

# Dempet rullebevegelse i bunnen av sirkelformet bane

T. C. Djupvik<sup>1</sup>, O. F. Jakobsen<sup>1</sup>

<sup>a</sup>Institutt for fysikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, N-7491 Trondheim, Norway.

## Sammendrag

Ulike sylindrer som ruller rent i bunnen av en sirkelformet bane opplever ulike dempekrefter. I dette forsøket ønskes det å analysere et slikt system med hjelp av videoanalyse og numeriske løsninger av den aktuelle differensialligningen. I løsningen av differensial-ligningene ble både Crank-Nicholson-metoden og Euler-metoden ble forsøkt brukt, hvorpå Crank-Nicholson-metoden gav en bedre tilnærming til de eksperimentelle dataene enn Eulers-metode. Det ble dernest observert, basert på de numeriske modellene, at luftmotstanden og den forenklete motstanden fra en del andre fysiske prosesser var særdeles dominerende i forhold til rullefriksjonen.

## 1. Innledning

I dette prosjektet undersøkes det hvilke effekter som bremser opp bevegelsen til en sylinder som ruller rent i bunnen av en sirkelformet bane. Det kommer ikke til å bli tatt hensyn til sluring, men både luft- og rullemotstand kommer til å bli tatt med i modellen. Ved å sammenligne de eksperimentelle målingene med de numeriske og analytiske løsningene av ligningen som beskriver systemet ønsker vi å anslå verdier for de ulike dempeeffektene. I tillegg vil det bli diskutert hvordan de ulike bremsekreftene varierer alt etter hvor sylindren er i banen.

## 2. Teori

For å beskrive bevegelsen til sylindren kan man bruke Newtons andre lov i tangentiell retning. Man kan da finne et uttrykk for  $\ddot{\phi}$  gitt ved  $\dot{\phi}$  og  $\phi$ . Denne differensialligningen inneholder også de tre dempekreftene  $f_S$ ,  $f_D$  og  $f_R$ , som henholdsvis inneholder diverse dempekrefter, luftmotstand og rullefriksjon.

$$\vec{f}_S = -\tilde{\delta}\vec{v} \quad (1)$$

$$\vec{f}_D = -\tilde{\beta}|\vec{v}|^2\hat{v} \quad (2)$$

$$\vec{f}_R = -|f_R|\hat{v} \quad (3)$$

Her er  $\tilde{\delta}$  dempingskonstanten,  $\tilde{\beta}$  dragkoeffisienten. Det kan vises at  $F_R$  kan uttrykkes ved

$$|f_R|\text{sgn}\dot{\phi} = m \left[ c\ddot{\phi} + \frac{d}{r} (l\dot{\phi}^2 + g \cos \phi) \text{sgn} \dot{\phi} \right] \quad (4)$$

Ved å bruke Newtons andre lov på den rullende sylindren og bruke ligningen for  $f_R$  kommer man frem til følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & -\omega_0^2 \sin \phi - 2\delta\dot{\phi} \\ & - \frac{\pi\phi_R}{2\omega_0} \left( \omega_0^2 \cos \phi + \gamma\dot{\phi}^2 \right) \text{sgn} \dot{\phi} \\ & - \beta \frac{3\pi}{4\omega_0} \dot{\phi}^2 \text{sgn} \dot{\phi} \end{aligned} \quad (5)$$

Her er størrelsene  $\delta$ ,  $\beta$  og  $\phi_R$  skalerte versjoner av  $\tilde{\delta}$ ,  $\tilde{\beta}$  og  $d$ , der  $d$  er armen til normalkraften (se figur ??). Disse er definert slik:

$$\delta = \gamma \frac{\tilde{\delta}}{2m} \quad (6a)$$

$$\beta = \frac{4\gamma}{3\pi} \frac{\omega_0 l}{m} \tilde{\beta} \quad (6b)$$

$$\phi_R = \frac{d}{r} \frac{2\omega_0}{\pi} \quad (6c)$$

Å løse differensialligninger eksakt vil i de fleste tilfeller være svært vanskelig eller umulig. Likevel kan man løse (??) i noen grensetilfeller. Ved å bare se på  $\phi \ll 1$  vil man kunne bruke approksimasjonene  $\sin(\phi) = \phi + \mathcal{O}(\phi^3) \approx \phi$  og  $\cos(\phi) = 1 + \mathcal{O}(\phi^2) \approx 1$ . I tillegg vil man kunne finne eksakte løsninger ved å sette to av  $\delta$ ,  $\beta$  og  $\phi_R$  lik 0.

Selv om man i noen tilfeller kan finne analytiske løsninger vil det i mange tilfeller være mer hensiktsmessig å løse differensialligningen numerisk. (??) er en ordinær differensialligning av andre orden. Denne kan skrives som to koblede førsteordens ordinære differensialligninger ved å innføre  $u = \dot{\phi}$ :

$$\frac{d\phi}{dt} = u \quad (7a)$$

$$\frac{du}{dt} = f(\phi, u) \quad (7b)$$

Dette ligningssettet kan løses diskret ved bruk av Eulers metode. Man løser da

$$\phi_{i+1} = \phi_i + u_i \Delta t \quad (8a)$$

$$u_{i+1} = u_i + f(\phi_i, u_i) \Delta t \quad (8b)$$

for en valgt  $\Delta t$  og med startverdiene  $\phi_0$  og  $u_0 = \dot{\phi}_0$ .

Da Eulers metode ofte fører til systematisk avvik er det bedre å bruke Crank-Nicholson-metoden, som man kan finne i labheftet [? ].

**Figur 1:** Skisse av system.

**Figur 2:** Skisse av oppsett.

### 3. Metode

#### Utstyr:

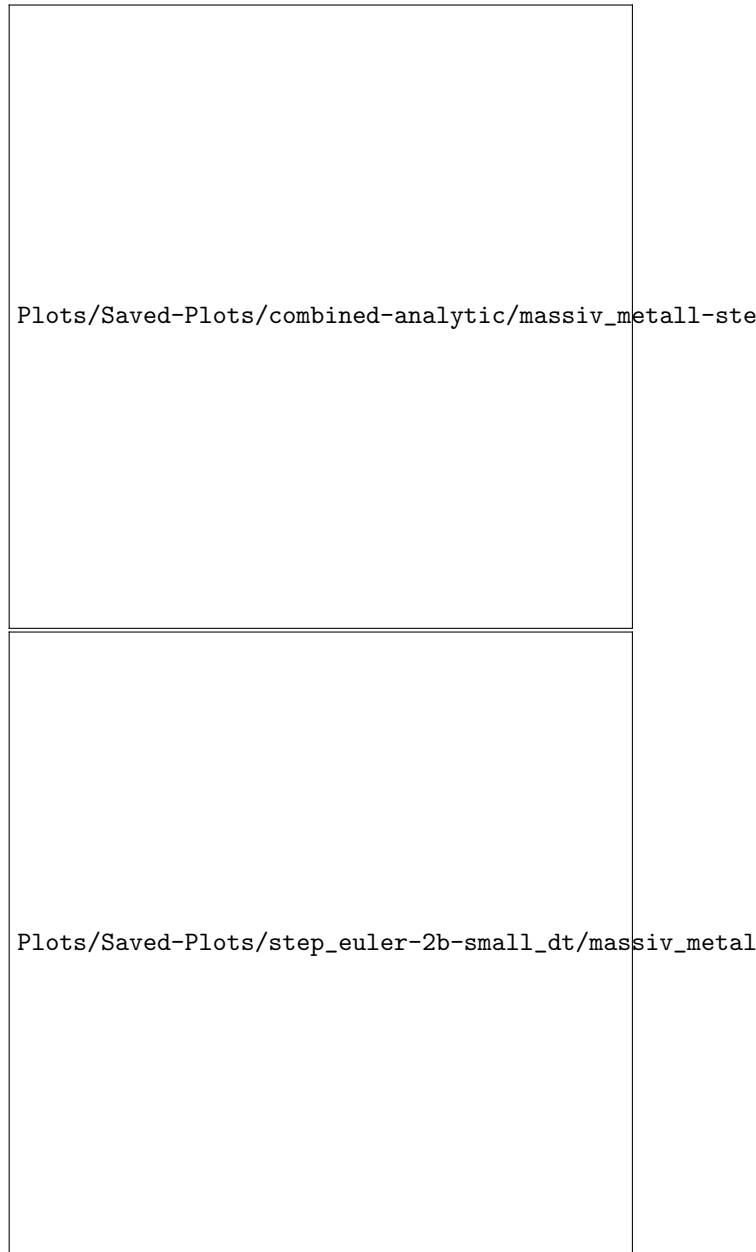
- Kvartsirkel i stål ( $R = 46$  cm)
- Tre ulike sylindre:  
Sylinder 1 - massiv plast  
Sylinder 2 - massiv metall  
Sylinder 3 - hul metall
- Kamera med tripod Panasonic DMC-FZ-200
- Videoanalyseprogrammet Tracker
- Meterstav, skyvelær, vekt

I dette forsøket brukes Tracker til å samle inn måleserier. Først gjøres det et testopptak for å passe på at lys- og fokusinnstillinger på kameraet er gode nok for videre analyse. Deretter blir sylindren satt i sirkelbanen. (Se figur ??) Ved å bruke autotracker-funksjonen i Tracker får man deretter ut måleserier med posisjonsdata. Videre blir posisjonsdataene analysert og plottet med Python. I tillegg til analyse av de eksperimentelle dataene blir også problemet løst både analytisk med en forenklet modell og numerisk. Løsningene blir dernest også plottet i python sammen med de eksperimentelle dataene. Dette for å etterpå kunne finne tilnærmede verdier for  $\delta$ ,  $\phi_R$  og  $\beta$ , som gir best overenskomst med de eksperimentelle dataene.

### 4. Resultat

Figur ?? viser implementering av Eulers metode på måleserien til Sylinder 1. Her er det valgt  $\Delta t = 0.01$  og  $\Delta t = 10^{-6}$ . Crank-Nicholson-metoden gir fullstendig sammenfallende løsning som den analytiske løsningen av (?). Se figur ??.

Eksperimentering av ulike verdier for  $\phi_R$ ,  $\delta$  og  $\beta$  gir figur ?? som beste resultat. Her er  $\delta = 0.014$ ,  $\phi_R = 0.0002$



**Figur 3:** Bruk av Eulers metode. Henholdsvis  $\Delta t = 0.01$  og  $\Delta t = 10^{-6}$ .

**Tabell 1:** Målinger av de ulike sylindrene.

Sylinder	masse (g)	indre diameter (mm)	ytre diameter (mm)
1	$442 \pm 0.5$		$73.5 \pm 0.1$
2	$1097 \pm 0.5$		$44.5 \pm 0.1$
3	$255 \pm 0.5$	$42.4 \pm 0.1$	$36.5 \pm 0.1$

og  $\beta = 0.080$  hos massiv metall og  $\delta = 0.009$ ,  $\phi_R = 0.0006$  og  $\beta = 0.090$  hos massiv plast.

Brukte videre (??) for å plote hvordan de ulike dempeleddene i differensialligningen varierer med  $\dot{\phi}$  (se figur ??).

## 5. Diskusjon

Basert på resultatene fra figur ?? kan en observere at når  $\dot{\phi}$  er null, som inntreffer når sylindren er på sitt høyeste punkt i banen, er det kun rullefriksjonen som har en effekt. Etterhvert som sylindren bygger opp fart derimot, øker de to andre friksjonskreftene raskt, og overgår rullefriksjonen relativt fort. Av disse igjen er det  $f_s$  som stort sett får den høyeste verdien i intervallet som  $\dot{\phi}$  holder seg innenfor i forsøket. Luftmotstanden blir ikke veldig stor før sylindren har kommet opp i fart, noe som ikke skjer i særlig stor grad i det gjeldende forsøket. Det medfører at det mesteparten av tiden er friksjon fra andre fysiske prosesser, og luftmotstand, som dominerer nedbremsingen, og ikke rullefriksjonen.

Det ble gjort målinger på tre ulike sylindre, men bare massiv metall (sylinder 2) og massiv plast (sylinder 1) ble analysert grunnet dårlig videokvalitet og måleserier hos sylinder 3 (hul metall). Dette skyldes trolig konverteringsfeil og/eller feil instillinger på kamera. Anslåtte verdier av  $\delta$ ,  $\phi_R$  og  $\beta$  kan tolkes dit hen at sylindrene er relativt jevne, slik at rullefriksjonen bidrar relativt lite til dempingen. Den dempende effekten til rullefriksjonen har opprinnelse i deformasjon av materialene som er i kontakt med hverandre. Det kan tenkes at plastsylindren vil være mer tilbøyelig for deformasjon i kontakt med overflaten til banen enn metallsylindren.

Angående usikkerhet er det en del knyttet til målingene. Det vil selvsagt være måleusikkerhet til alle de målte størrelsene, men de fleste av dem er neglisjerbare i forhold til noen av de større kildene. Vi vet blant annet at kameraet var posisjonert litt for langt til den ene siden, noe som førte til at alle x-verdiene våre, og dermed også  $\phi$ -verdiene våre, ble forskjøvet, som igjen førte til litt utfordringer med å tilpasse parameterene til de eksperimentelle dataene. Dette ble også forsterket av at noen av filmene ble litt trimmet i overføringen fra kamera til datamaskin. Tracker fikk dermed problemer med å følge sylindrene på grunn av uskarpheter i filmen. Dette har ført til litt for unøyaktige datasett, og hull i dataene. Det vil nok også ha virket inn

på analysen og skillet mellom de numeriske og de eksperimentelle dataene. I tillegg ble også tilpasningen gjort på øyemål, noe som åpenbart blir gjenspeilet i resultatene.

## 6. Konklusjon

Forsøket har vist at rullefriksjon sammenlignet med luftmotstand og andre dempekrefter er relativt liten for en sylinder i bunnen av en sirkelformet bane. Modellen som ble brukt viser også at luftmotstanden er relativt liten for liten vinkelfart. Usikkerheter i målinger, numeriske tilpassninger av kurven, samt til dels mindre gode filmer gjorde at tallverdiene for dempekreftene med liten sikkerhet kan slås fast.

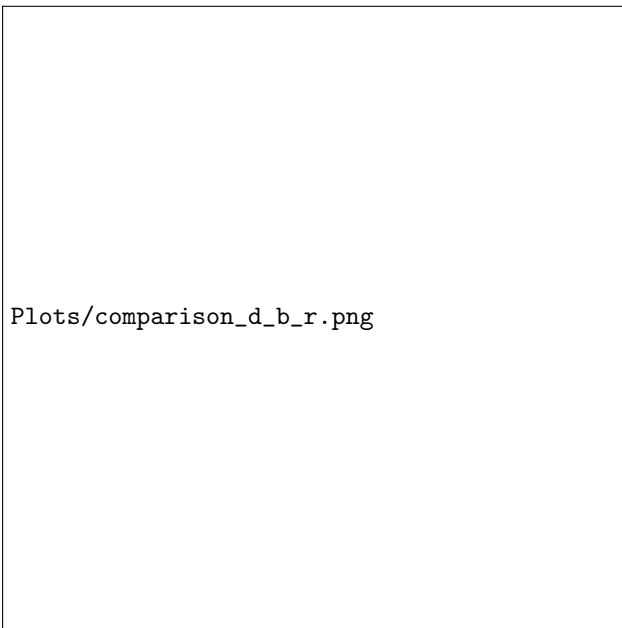
## Referanser

- [1] V. Falch, N. H. Aase og S. C. Johnsen. Prosjektbeskrivelse Lab 3 FY1001. NTNU Institutt for fysikk, 7. oktober 2022.



**Figur 4:** CN-metoden og den analytiske løsningen med  $\delta = 0.04$  og  $\beta$  og  $\phi_R = 0$ . Disse sammenfaller fullstendig.

**Figur 5:** Justering av  $\phi_R$ ,  $\beta$  og  $\delta$  hos helholdsvi massiv metall og massiv plast.



**Figur 6:** Sammenligning av påvirkning til  $\phi_R$ ,  $\beta$  og  $\delta$  som funksjon av  $\dot{\phi}$ . Ser på tidspunkt med maksimal rullemotstand når  $\phi = 0$ . Det er bare rullefriksjonsleddet som avhenger av  $\phi$  (se (??)).