
FY1001: Lab 3 - Dempet rullebevegelse i bunnen av en sirkelformet bane

Vemund Falch, Niels Henrik Aase, Christian Svingen Johnsen

7. oktober 2022

Innhold

1	Introduksjon	3
2	Teori	3
2.1	Utledning av Bevegelsesligningen til Systemet	3
2.2	Teori som Eksperimentelt Verktøy	9
2.3	Analytisk Løsning av Differensialligninger	9
2.4	Numerisk Løsning av Differensialligninger	12
3	Utstyr	13
4	Oppgaver	14
A	Videre Lesning	17
B	Kort Notat om Notasjon for Derivasjon	17
C	Numerisk Løsning av Differensialligninger	18
C.1	Numeriske Stegfunksjoner og Feilestimat	18
C.2	Fra Ett til Mange Steg	20
C.3	Implisitte Differensialligninglødere	20

1 Introduksjon

Vi skal i dette prosjektet undersøke hvilke effekter som bremser opp bevegelsen til en sylinder som ruller rent i bunnen av en sirkelformet bane. Det kommer altså ikke til å tas hensyn til sluring, men både luftmotstand og rullemotstand tas med i modellen som brukes i prosjektet.

Mål:

- Måle fysiske størrelser knyttet til mekaniske svingninger, og sammenligne disse med teoretiske og numeriske modeller.
- Bruke videoanalyse til å måle posisjonen til en sylinder som ruller på en kvartsirkel.
- Bruke Python til å analysere de eksperimentelle målingene nærmere.
- Undersøke hvordan eksperimentelle målinger kan si noe om hvilke fysiske prosesser som er viktige for å beskrive energitapet i systemet.

2 Teori

I denne seksjonen legges teorien bak forsøket fram. I seksjon 2.1 introduseres systemet og de ulike kreftene som må tas hensyn til blir forklart. Deretter utledes ligningene som beskriver bevegelsen til sylindren. I seksjon 2.2 tar vi et kort sidesprang for å se på hva teorien i seksjon 2.1 kan brukes til når den kombineres med eksperimentelle målinger. I seksjon 2.3 løses bevegelsesligningen til sylindren analytisk i noen utvalgte grensetilfeller. Seksjon 2.4 beskriver deretter hvordan man går fram for å løse den generelle bevegelsesligningen numerisk.

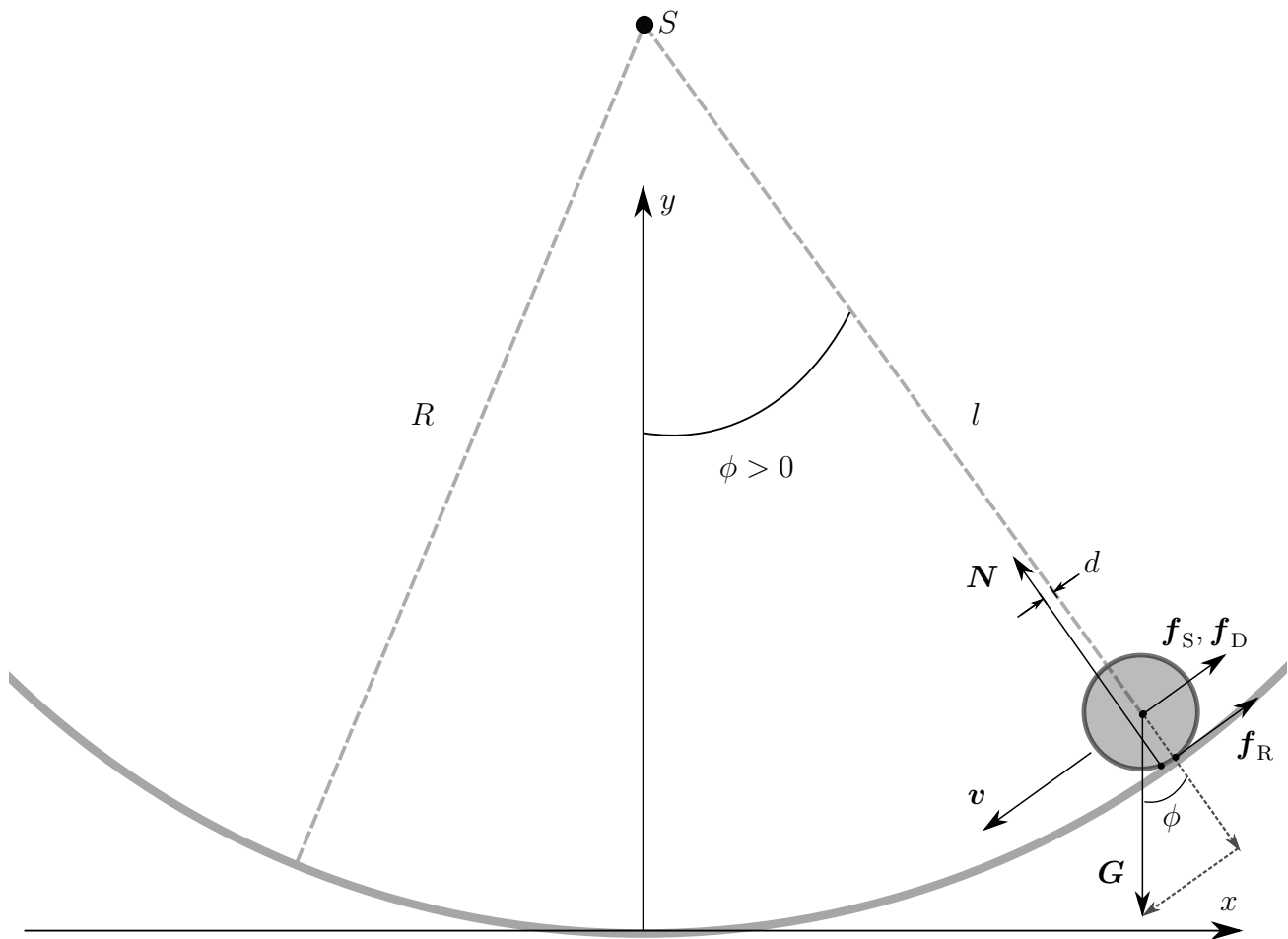
Notasjonen som benyttes for derivasjon varierer etter hva som er hensiktsmessig, se appendiks B for en kort innføring i de ulike notasjonsformene.

2.1 Utledning av Bevegelsesligningen til Systemet

I dette delkapitlet utledes differensialligningen som kan løses for å finne bevegelsen til sylindren. Den kalles *bevegelsesligningen* til systemet. Helt spesifikt kommer vi til å bruke Newtons andre lov for å finne en ligning for akselerasjonen til vinkelutslaget ϕ som vises i figur 1 og senere bruke den ligningen til å simulere rullebevegelsen.

For å finne den ovennevnte bevegelsesligningen tar vi utgangspunkt i en sylinder med uniformt fordelt masse m og radius r som ruller i bunnen av en sirkelformet bane. Sylindren har treghetsmoment

$$I = cmr^2 \tag{1}$$



Figur 1: Figuren viser en sylinder som ruller med fart v på en bane formet som del av en sirkel med radius R og sentrum i S . Linjestykket med lengde l som går fra S til sylinderens rotasjonsakse danner vinkelutslaget ϕ med vertikalaksen. Denne vinkelen er tilstrekkelig for å beskrive både sylinderens horisontal- og vertikalkoordinat x og y . Inntegnet er også en overdrevet stor d , som er avstanden angrepspunktet til normalkraften N er forskjøvet med. Videre er G gravitasjonskraften som virker på sylindere og f_S , f_D og f_R er de forskjellige typene motstand vi modellerer. I figuren er motstandene tegnet inn for lange i forhold til komponenten av G som går i tangentiell retning.

med hensyn på rotasjonsaksen som går gjennom massesenteret (CM). Her er konstanten c et positivt tall som avhenger av hvordan massen er fordelt rundt rotasjonsaksen.¹ Radiusen til sirkelen er R . Når vi da legger origo i bunnen av denne vil x - og y -koordinaten til sylindren ved tidspunktet t være gitt ved

$$x(t) = l \sin \phi(t) \quad (2a)$$

$$y(t) = R - l \cos \phi(t), \quad (2b)$$

hvor $l = R - r$ er avstanden fra sentrum av sirkelen til CM. Her er vinkelutslaget vist i figur 1, $\phi(t)$, positivt når sylindren er til høyre for origo og negativt til venstre slik at enhetsvektoren $\hat{\phi}$ alltid peker mot klokken langs sirkelen.

Vi skal forsøke å modellere forskjellige typer motstand som bremser opp sylindren vår. For å ha en bremsende effekt må kreftene være motsatt rettet av farten \mathbf{v} til sylindren, og ettersom en sylinder i ro i bunnen av en sirkel forblir i ro, bør kreftene være null når $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Med disse kravene vil det være naturlig å se etter krefter som skalerer med farten i n -te potens, dvs. krefter $f \propto v^n$. Dersom farten er lav, vil det holde å bare se på små n , som $n = 1$ og $n = 2$.

La oss først se nærmere på noen av de ulike kreftene som virker på sylindren. Deler av oppgaven i denne laben kommer til å være å undersøke hvor viktige de ulike kreftene beskrevet under er for dynamikken til sylindren.

2.1.1 Dempingskraften

Kraften over som skalerer som \mathbf{v} , skriver vi som

$$\mathbf{f}_S = -\tilde{\delta}\mathbf{v}, \quad (3)$$

hvor det ikke-negative tallet $\tilde{\delta}$ kalles for *dempingskonstanten*. Denne kraften kan komme fra flere fysiske prosesser², men vi har her valgt å presentere et forenklet bilde. Vi vil også anta at dempingskraften virker i massesenteret til sylindren.

2.1.2 Luftmotstand

Luftmotstanden er forventet å gi et bidrag som skalerer med v^2 , som vi skriver som

$$\mathbf{f}_D = -\tilde{\beta}|\mathbf{v}|^2\hat{\mathbf{v}}. \quad (4)$$

¹For en kompakt sylinder er $c = 1/2$, mens for en hul sylinder med indre radius r_i og ytre radius r er $c = (1 + r_i^2/r^2)/2$.

²Dempingskraften kommer trolig i stor grad fra kollisjoner mellom ujevnheter enten på sylindren eller banen og burde ideelt sett vært inkludert gjennom en \mathbf{v} -avhengig d i figur 1. Dempingskraften ville da fått en mer komplisert ϕ -avhengighet, men forenklingen vi har gjort her bør ikke påvirke resultatet nevneverdig. Merk at også luftmotstanden vil ha et bidrag som kunne blitt skrevet som ligning (3) kjent som Stokes' lov, men denne er forventet å være neglisjerbar i fluider som luft med lav viskositet.

Her står D for drag og vi kaller det ikke-negative tallet $\tilde{\beta}$ for *dragkoeffisienten*. Som dempingskraften virker denne kraften også motsatt rettet av fartsretningen og i massesenteret til sylindren.

2.1.3 Rullefriksjon

Den siste motstanden vi tar med i modellen, er en type tørr friksjon kalt rullemotstand som har angrepspunkt i kontaktflaten mellom underlaget og sylindren. Til å begynne med antar vi kun at rullemotstanden er

$$\mathbf{f}_R = -|\mathbf{f}_R|\hat{\mathbf{v}}, \quad (5)$$

det vil si at den er motsatt rettet av farten – vi finner størrelsen senere. Rullefriksjonen er kraften som sørger for at sylindren ruller rent uten å slure. Ved vanlig ren rulling vil ikke rullefriksjonen føre til tap av mekanisk energi og dermed heller ikke dempe svingningen. Her vil vi modellere at kulen har mer enn ett kontaktpunkt med underlaget, noe som fører til at rullefriksjonen også vil dempe svingningen.

2.1.4 Normalkraft

Normalkraften virker fra underlaget på sylindren og sørger for at sylindren ikke faller “gjennom” banen. Vi kommer her til å modellere at normalkraften får angrepspunktet sitt forskjøvet fra senteraksen gjennom CM, vist med grå stiplet linje i figur 1, med en avstand d i fartsretningen. Dette skyldes at sylindren har mer enn ett kontaktpunkt med underlaget, enten grunnet deformasjon av sylindren eller ujevnheter på underlaget eller sylindren.

2.1.5 Gravitasjonskraften

Til slutt har vi gravitasjonskraften, \mathbf{G} , som blir

$$\mathbf{G} = -mg\hat{\mathbf{y}} \quad (6)$$

når vi definerer x - og y -aksen som i figur 1.

2.1.6 Anvendelse av Newtons Andre Lov på Rullende Sylinder

Nå er vi klare til å prøve å finne ut hvor sylindren vår er til enhver tid etter å ha blitt sluppet med null fart ved $t = 0$ og posisjon $(x(t_0), y(t_0))$. Vi kommer herfra til å konsentrere oss om vinkelen ϕ fordi den er alt vi trenger for å beskrive sylindrens posisjon, som vist i ligning (2). La oss dermed si at sylindren slippes fra en vinkel $\phi(0) = \phi_0$. Energibetraktninger er lite

hensiktsmessige for å finne tidsutviklingen av dette systemet så vi vender oss til Newtons andre lov. På vektorform gir denne

$$m\dot{\mathbf{v}} = -mg\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\delta}\mathbf{v} - \tilde{\beta}|\mathbf{v}|^2\hat{\mathbf{v}} - |\mathbf{f}_R|\hat{\mathbf{v}}, \quad (7)$$

hvor $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$. I ϕ -retning – tangentiell retning – blir ligningen over

$$m\dot{v} = -mg \sin \phi - \tilde{\delta}v - \tilde{\beta}v^2 \operatorname{sgn} v - |\mathbf{f}_R| \operatorname{sgn} v, \quad (8)$$

ettersom \mathbf{v} alltid peker i tangentiell retning. Her har vi altså definert farten v med fortegn slik at $\mathbf{v} \equiv v\hat{\phi}$ peker riktig vei langs sirkelbanen. I figur 1, for eksempel, er $v < 0$. Videre er signumfunksjonen, eller fortegnsfunksjonen,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Vi kan med fordel bytte ut v i ligning (8) ved å bruke at definisjonen av radianer gir

$$v = l\dot{\phi} \quad (10)$$

ettersom sylindere beveger seg langs en sirkelbane. Dermed har vi

$$ml\ddot{\phi} = -mg \sin \phi - \tilde{\delta}l\dot{\phi} - \tilde{\beta}l^2\dot{\phi}^2 \operatorname{sgn} \dot{\phi} - |\mathbf{f}_R| \operatorname{sgn} \dot{\phi} \quad (11)$$

fra Newtons andre lov i tangentialretning. Det er denne ligningen som vil, etter litt opprydding, la oss finne $\phi(t)$.

Rullestand i ligningen over er fortsatt ukjent så vi trenger minst én ligning til. La oss prøve Newtons andre lov for rotasjon, $I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum \boldsymbol{\tau}$, hvor $\sum \boldsymbol{\tau}$ er summen av alle dreiemomentene relativt CM på sylindere og $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ er den vektorielle vinkelakselerasjonen som sylindere roterer om CM med. Loven gir her

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{r}_R \times \mathbf{f}_R + \mathbf{r}_N \times \mathbf{N}, \quad (12)$$

hvor armene $\mathbf{r}_R, \mathbf{r}_N$ er avstandsvektorene som går fra CM til angrepspunktet til henholdsvis \mathbf{f}_R og \mathbf{N} . Her er det ingen bidrag fra \mathbf{G}, \mathbf{f}_S og \mathbf{f}_D siden alle disse har en arm lik nullvektor. Nå er det nyttig å bruke antagelsen om ren rulling, det vil si at vinkelfarten til sylindere rulling om CM er

$$\omega = v/r = \dot{\phi}l/r. \quad (13)$$

Med denne fortegnskonvensjonen for ω må $\boldsymbol{\omega} = -\omega\hat{\mathbf{z}}$ for å få riktig retning på $\boldsymbol{\omega}$ (høyrehåndsregel, $\hat{\mathbf{z}}$ peker ut av papirplanet i figur 1). Merk at vinkelfartene ω og $\dot{\phi}$ er forskjellige størrelser. Fra figur 1 følger det at $\mathbf{r}_R \times \mathbf{f}_R = -r|\mathbf{f}_R| \operatorname{sgn}(\dot{\phi})\hat{\mathbf{z}}$ hvor r som før er radien til sylindere. For normalkraften antar vi at angrepspunktet er forskjøvet en avstand d langs banen i fartsretningen som vist i figur 1, og dermed finner vi $\mathbf{r}_N \times \mathbf{N} = dN \operatorname{sgn}(\dot{\phi})\hat{\mathbf{z}}$ hvor $N \equiv |\mathbf{N}|$ er absoluttverdien til normalkraften. Ligning (12) i z -retning blir nå

$$-I\ddot{\phi}\frac{l}{r} = -r|\mathbf{f}_R| \operatorname{sgn} \dot{\phi} + dN \operatorname{sgn} \dot{\phi}, \quad (14)$$

slik at vi ved innsetting av ligning (1) for treghetsmomentet I får uttrykket

$$|\mathbf{f}_R| \operatorname{sgn} \dot{\phi} = cml\ddot{\phi} + \frac{d}{r}N \operatorname{sgn} \dot{\phi} \quad (15)$$

for rullemotstanden. Fordi vi vet at sentripetalakselerasjonen er v^2/l , kan vi finne N . Med positiv retning innover i sirkelen gir Newtons andre lov i radialretning at

$$\frac{mv^2}{l} = N - mg \cos \phi, \quad (16)$$

det vil si at normalkraften er

$$N = m \left(l\dot{\phi}^2 + g \cos \phi \right) \quad (17)$$

ved bruk av ligning (10) igjen. Følgelig er rullemotstanden

$$|\mathbf{f}_R| \operatorname{sgn} \dot{\phi} = m \left[cl\ddot{\phi} + \frac{d}{r} \left(l\dot{\phi}^2 + g \cos \phi \right) \operatorname{sgn} \dot{\phi} \right]. \quad (18)$$

2.1.7 Bevegelsesligningen og Omskalering av Parametre

Vi har nå en ligning for $|\mathbf{f}_R|$, som kan settes inn i ligning (11), og ved å dele på ml på begge sider får man

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi - \frac{\tilde{\delta}}{m} \dot{\phi} - \frac{\tilde{\beta}l}{m} \dot{\phi}^2 \operatorname{sgn} \dot{\phi} - c\ddot{\phi} - \frac{d}{rl} \operatorname{sgn} \dot{\phi} \left(l\dot{\phi}^2 + g \cos \phi \right). \quad (19)$$

Samler vi alle $\ddot{\phi}$ -ene på venstresiden, får vi

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l(1+c)} \sin \phi - \frac{\tilde{\delta}}{m(1+c)} \dot{\phi} - \left[\frac{d}{r} \left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{l} \cos \phi \right) + \frac{\tilde{\beta}l}{m} \dot{\phi}^2 \right] \frac{\operatorname{sgn} \dot{\phi}}{1+c}, \quad (20)$$

som essensielt er bevegelsesligningen vi var ute etter. Vi skal imidlertid gjøre en liten omskrivning av ligningen. Det vil nemlig vise seg at det er hensiktsmessig å innføre noen nye parametre og skalerte versjoner av de tidligere parametrene. Dette gjøres fordi disse parametrene enkelt vil kunne knyttes opp mot målbare størrelser som vinkelfrekvensen til svingningene eller hvor raskt svingeutslaget avtar.

Divisoren $1+c$ inngår i alle ledd så vi definerer

$$\gamma = \frac{1}{1+c}. \quad (21)$$

Videre innfører vi vinkelfrekvensen ω_0 gitt ved

$$\omega_0^2 = \gamma \frac{g}{l}. \quad (22)$$

Den vil være tilnærmet lik vinkelfrekvensen til sylindren. Til slutt innfører vi de skalerte versjonene

$$\delta = \gamma \frac{\tilde{\delta}}{2m} \quad (23)$$

$$\beta = \frac{4\gamma}{3\pi} \frac{\omega_0 l}{m} \tilde{\beta} \quad (24)$$

$$\phi_R = \frac{d}{r} \frac{2\omega_0}{\pi} \quad (25)$$

av henholdsvis dempingskonstanten $\tilde{\delta}$, dragkoeffisienten $\tilde{\beta}$ og armen d til normalkraften. De er lettere å knytte til hvor fort svingeutslaget dempes, som vi vil se i seksjon 2.3. Setter man inn disse i ligning (20) og rydder litt opp, finner man bevegelsesligningen

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & -\omega_0^2 \sin \phi - 2\delta \dot{\phi} \\ & - \frac{\pi \phi_R}{2\omega_0} \left(\omega_0^2 \cos \phi + \gamma \dot{\phi}^2 \right) \operatorname{sgn} \dot{\phi} \\ & - \beta \frac{3\pi}{4\omega_0} \dot{\phi}^2 \operatorname{sgn} \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (26)$$

2.2 Teori som Eksperimentelt Verktøy

Før vi gir oss i kast med hvordan man løser ligning (26), så er det hensiktsmessig å dvele ved hva den kan brukes til. For et gitt system (der system innebærer alt fra materialet sirkelen og sylindren er laget av, til mediet sylindren beveger seg i) er ϕ_R , δ og β ukjente størrelser. Heldigvis har vi nå en teoretisk modell for tidsutviklingen til $\phi(t)$, gitt ved ligning (26). Dersom vi måler $\phi(t)$ på laben, så kan vi løse ligning (26) med forskjellige verdier for ϕ_R , δ og β . Ved å finne hvilke verdier for disse parametrene som gir best samsvar mellom løsningen (og dermed den teoretiske modellen) og de eksperimentelle målingene har man dermed funnet et godt anslag for ϕ_R , δ og β . Dette er representativt for hvordan fysikere jobber i praksis: Modeller utvikles gjerne ved bruk av teori, men de er avhengig av eksperimentelle resultater for å kunne beskrive virkeligheten.

Merk at den numeriske løsningen sjeldent vil være helt konsistent med eksperimentelle måleserier, så det vil være usikkerhet knyttet til parameterverdiene. Dette kan skyldes både eksperimentelle målefeil eller mangler i modellen.

2.3 Analytisk Løsning av Differensialligninger

I dette kapittelet vil vi utlede analytiske løsninger av ligning (26) for diverse grensetilfeller. Det er ikke meningen at dere skal kunne følge og forstå alle utregningene under, men dere burde

merke dere de tilnærmede løsningene av ligning (26) når kun en av δ, ϕ_R, β er ulik 0, som er gitt i henholdsvis ligning (30), (32) og (36).

I noen bestemte grenser kan vi løse ligning (26) eksakt. Vi vil i det følgende anta at initialbetingelsene er gitt ved $\phi(t=0) = \phi_0$ og $\dot{\phi}(t=0) = 0$. I alle tilfellene vil det være nødvendig å linearisere ligningen for små vinkelutslag, det vil si vi må anta at $\phi \ll 1$ og sette $\cos(\phi) = 1 + \mathcal{O}(\phi^2) \approx 1$ og $\sin(\phi) = \phi + \mathcal{O}(\phi^3) \approx \phi$. I tillegg vil vi kunne anta at $(g/l) \cos \phi \gg \dot{\phi}^2$, ettersom $\dot{\phi} \ll 1$ for små ϕ , og fordi $g/l \sim 20 \text{ s}^{-2}$ i vårt system. Under følger løsninger for noen bestemte verdier av parametrene i ligning (26) under disse antagelsene.

2.3.1 Udempet Harmonisk Svingning, $\delta, \phi_R, \beta = 0$

Dersom vi har null damping, dvs. $\delta, \phi_R, \beta = 0$, finner vi differensialligningen

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0, \quad (27)$$

som har løsningen

$$\phi(t) = \phi_0 \cos(\omega_0 t), \quad (28)$$

som lett kan verifiseres ved innsetting. Dette er uttrykket for en udempet harmonisk oscillator.

2.3.2 Eksponentielt Dempet Harmonisk Svingning, $\delta > 0$ og $\phi_R, \beta = 0$

Dersom vi i tillegg legger til dempingsleddet lineært i $\dot{\phi}$ blir differensialligningen

$$\ddot{\phi} + 2\delta\dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0, \quad (29)$$

som også lar seg løse analytisk

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t), \quad (30)$$

hvor $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, som igjen kan sjekkes ved innsetting. Dette er løsningen for en dempet harmonisk oscillator. Fra figur 2 (b) ser vi at dette er uttrykket for en harmonisk oscillasjon modulert med en eksponentielt avtagende funksjon. Her ser vi tydelig at δ , ikke $\tilde{\delta}$, er parameteren som beskriver dempingen.

2.3.3 Lineært Dempet Harmonisk Svingning, $\phi_R > 0, \delta, \beta = 0$

Vi kan også finne en analytisk løsning på problemet hvis vi kun tar med det konstante dempingsleddet. I dette tilfellet tar differensialligningen formen

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 [\phi + (\pi\phi_R)/(2\omega_0) \text{sgn}(\dot{\phi})] = 0. \quad (31)$$

Denne er relativt komplisert å løse da den må løses separat på hver halvperiode og så skjøtes sammen³, men løsningen kan tilnærmes med en harmonisk oscillator modulert med en lineært synkende funksjon, dvs.

$$\phi(t) \approx [\phi_0 - \text{sgn}(\phi_0)\phi_R t] \cos(\omega_0 t) \quad (32)$$

som vist i figur 2 (a).

2.3.4 Hyperbolsk Dempet Harmonisk Svingning, $\beta > 0$ og $\delta, \phi_R = 0$

Til slutt ser vi på tilfellet når $\beta \neq 0$, dvs. vi har et dempingsledd kvadratisk i $\dot{\phi}$ slik at bevegelsesligningen er gitt ved

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \phi + \beta \frac{3\pi}{4\omega_0} \dot{\phi}^2 \text{sgn}(\dot{\phi}) = 0. \quad (33)$$

Denne ligningen lar seg ikke løse eksakt, men for små β kan vi tilnærme løsningen. Vi kan forvente at dempingsleddet vil endre både vinkelfrekvensen og amplituden, men ettersom vi i første rekke er ute etter hvor mye den demper oscillasjonen neglisjerer vi i det følgende vinkelfrekvensendringen. Vi antar videre at løsningen er på formen $\phi(t) = \phi_\beta(t) \cos(\omega_0 t)$ og ønsker å finne en differensialligning for $\phi_\beta(t)$ til første orden i β . Vi kan umiddelbart se at $\phi_\beta(0) = \phi_{\beta=0}(t) = \phi_0$. La oss for enkelhets skyld også anta $\phi_0 > 0 \implies \phi_\beta(t) > 0$. Vi regner først ut arbeidet friksjonskraften gjør i løpet av en svingning dersom vi antar at $\phi_\beta(t) = \phi_\beta = \text{konstant}$. Friksjonskraften på legemet er gitt ved $F_R = \beta v^2 = \beta(3\pi/4\gamma)(m/\omega_0 l)^2 \dot{\phi}^2$, slik at arbeidet blir

$$W = \int_{t=0}^{t=T} F_R ds = -\beta \frac{3\pi}{4\omega_0} \frac{ml^2}{\gamma} \int_0^T |\dot{\phi}^3| dt = -2\pi\beta\phi_\beta^3 ml^2 \frac{\omega_0}{\gamma}, \quad (34)$$

hvor vi bruker at $ds = l d\phi = l(d\phi/dt)dt$ og at perioden $T = 2\pi/\omega_0$. Fra energibevaring vet vi at den mekaniske energien i toppunktet etter en svingning $E_f = mgh = mgl[1 - \cos\phi_\beta(t+T)]$ må være like stor som den initielle mekaniske energien og friksjonstapet $E_i = mgh + W = mgl[1 - \cos\phi_\beta(t)] - 2\pi\beta\phi_\beta^3(t)ml^2\omega_0/\gamma$. Ved å utvikle $\cos\phi_\beta \approx 1 - (\phi_\beta)^2/2$ til andre orden samt linearisere $[\phi_\beta(t+T)]^2 = [\phi_\beta(t) + \Delta\phi_\beta]^2 \approx \phi_\beta^2(t) + 2\phi_\beta(t)\Delta\phi_\beta$ finner vi $\Delta\phi_\beta = -2\pi\beta\phi_\beta^2(t)/\omega_0$. Ved å dele på $\Delta t = T = 2\pi/\omega_0$ på hver side finner vi

$$\frac{\Delta\phi_\beta}{\Delta t} \approx \frac{d\phi_\beta}{dt} = -\beta\phi_\beta^2 \implies \phi_\beta(t) = \frac{1}{\phi_0^{-1} + \beta t}. \quad (35)$$

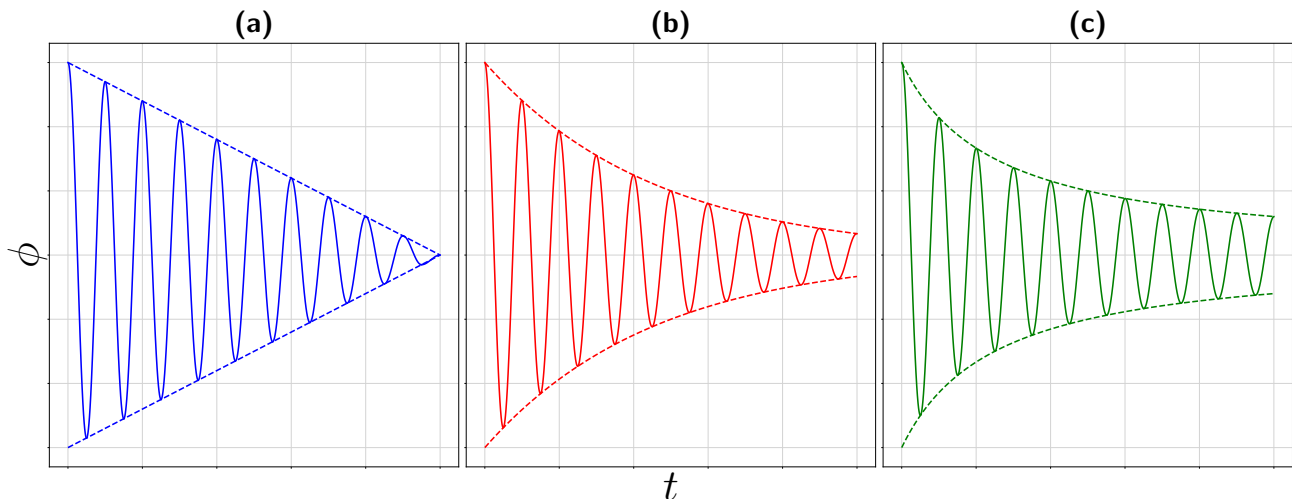
Dersom vi også tar hensyn til fortegnet til ϕ_0 , blir løsningen

$$\phi(t) \approx \frac{\cos(\omega_0 t)}{\phi_0^{-1} + \text{sgn}(\phi_0)\beta t}. \quad (36)$$

³For å løse denne må vi splitte tidsintervallet i halvperioder $t \in [(n-1)T/2, nT/2]$, hvor T er perioden til svingningen. Det kan vises at løsningen i hver halvperiode er $\phi_n(T) = A_n \cos(\omega_0 t) \mp (\phi_R \pi)/(2\omega_0)$. Utviklingskonstantene A_n bestemmes deretter ved å anvende betingelsen at $\phi(t)$ er kontinuerlig ved hver halvperiode $t = nT/2$. Etter litt regning finner vi dermed at

$$\phi_n(t) = \phi_0 \cos(\omega_0 t) + \text{sgn}(\phi_0)(-1)^n \frac{\pi\phi_R}{2\omega_0} \left[1 + (-1)^n (2n+1) \cos(\omega_0 t) \right]$$

hvor n som før karakteriserer hvilken halvperiode vi befinner oss i, og hvor første halvperiode er $n = 1$.



Figur 2: Figuren viser løsninger av ligning (26) for en dempet harmonisk oscillator når **(a)** $\phi_R > 0$ og $\tilde{\delta}, \tilde{\beta} = 0$, **(b)** $\tilde{\delta} > 0$ og $\phi_R, \tilde{\beta} = 0$ og **(c)** $\tilde{\beta} > 0$ og $\phi_R, \tilde{\delta} = 0$ under antagelsen $\phi \ll 1$. **(a)** og **(b)** viser de analytiske løsningene gitt henholdsvis i ligning (3) og (30), mens **(c)** er en numerisk løsning da den ikke er mulig å løse analytisk. De stiplede kurvene gitt ved henholdsvis **(a)** $\phi_0 - \phi_R t$, **(b)** $\phi_0 \exp(-\tilde{\delta}t)$ og **(c)** $(\phi_0^{-1} + \beta t)$ er vist for å lette sammenligningen med analytiske uttrykk.

Fra figur 2 (c) er det tydelig at dette stemmer godt overens med den numeriske løsningen selv for β som gir betydelig damping.

2.4 Numerisk Løsning av Differensialligninger

I de fleste tilfeller er vi ikke i stand til å løse differensialligninger analytisk. I slike tilfeller må vi som regel ty til numeriske metoder for å tilnærme løsningen. Det eksisterer mange ulike numeriske metoder for å løse differensialligninger, avhengig av antall variabler og grensebetingelser. I vårt tilfelle har vi en ordinær differensialligning (ODE) med bare én variabel t , som er et initialverdiproblem med kjente initialverdier $\phi(t=0)$ og $\dot{\phi}(t=0)$, hvor vi ønsker å finne verdien til $\phi(t)$ på et tidsintervall $t \in (0, t_f)$.

Trikset for å løse et initialverdiproblem numerisk er å dele opp tidsintervallet i $N-1$ delintervaller (t_i, t_{i+1}) , med $t_0 = 0$ og $t_N = t_f$, og deretter løse for $\phi_i = \phi(t = t_i)$ og $\dot{\phi}_i$ iterativt. Det vil si at siden vi kjenner $\phi_0, \dot{\phi}_0$, kan vi tilnærme $\phi_1, \dot{\phi}_1$, og deretter bruke $\phi_1, \dot{\phi}_1$ for å tilnærme $\phi_2, \dot{\phi}_2$ og så videre, helt til vi finner en tilnærming for $\phi_N, \dot{\phi}_N$. Avhengig av hvilken metode vi bruker for å tilnærme $\phi_i, \dot{\phi}_i$, vil den totale feilen i ϕ_N fra den eksakte løsningen typisk skalere som N^{-n} med $n \in \mathbb{Z}^+$, slik at vi kan få en så god tilnærming som vi ønsker ved å velge N tilstrekkelig liten.

Ligning (26) er en andreordens ODE, ettersom den inneholder andreordens tidsderiverte. For å kunne løse den numerisk innfører vi i denne seksjonen en hjelpevariabel $u = \dot{\phi}$. Vi kan da skrive

om en generell andreordens ODE $\ddot{\phi} = f(\phi, u)$ til to koblede førsteordens ODE-er

$$\frac{d\phi}{dt} = u \quad (37a)$$

$$\frac{du}{dt} = f(\phi, u). \quad (37b)$$

For eksempel vil $f(\phi, u)$ være gitt ved høyresiden av ligning (26) når alle dempingsmekanismene er inkludert. Merk at man vanligvis ikke innfører hjelpevariabelen u , men det gjøres her for at vi skal huske å behandle u som en separat variabel på lik linje med ϕ . Intuitivt kan vi diskretisere ligningen ovenfor som $\Delta\phi \approx u\Delta t$ og $\Delta u \approx f(\phi, u)\Delta t$, og ved å bruke $\Delta\phi = \phi_{i+1} - \phi_i$ og $\Delta u = u_{i+1} - u_i$ finner vi

$$\phi_{i+1} = \phi_i + u_i\Delta t \quad (38a)$$

$$u_{i+1} = u_i + f(\phi_i, u_i)\Delta t. \quad (38b)$$

Ved å iterere over disse ligningene fra ϕ_0, u_0 finner vi en komplett tilnærming til løsningen på initialverdiproblemet. Dette er kjent som Eulers metode, som bl.a. foreleses i TMA4100 *Matematikk 1*. Som vist i appendiks C finner vi at den globale feilen fra den eksakte løsningen ϕ_E skalerer som $|\phi_N - \phi_E(t_f)| \propto N^{-1}$.

Eulermetoden er dessverre relativt ustabil og vil ofte føre til et systematisk avvik fra den eksakte løsningen. I den utdelte koden bruker vi derfor i stedet Crank-Nicholson-metoden (CN-metoden) definert ved

$$\phi_{i+1} = \phi_i + (u_i + u_{i+1})\frac{\Delta t}{2} \quad (39a)$$

$$u_{i+1} = u_i + [f(\phi_i, u_i) + f(\phi_{i+1}, u_{i+1})]\frac{\Delta t}{2}. \quad (39b)$$

Denne metoden er både mer stabil, og den globale feilen skalerer som N^{-2} , så den vil derfor gi et mer nøyaktig resultat for store N .⁴

3 Utstyr

Kvartsirkel i Stål

Det utdelte banene består av en kvartsirkel i stål med radius $R = \text{TBD}$. Banen er festet til rammen ved hjelp av en skrue i den stående stålbjelken og kan justeres om denne løsnes.

⁴Til gjengjeld er det en implisitt metode, ettersom ϕ_{i+1}, u_{i+1} inngår både på venstre og høyre side av ligning (39). Vi må derfor løse et ligningssett for hvert tidssteg, hvor vi anvender Newtons metode til å tilnærme en løsning. Merk også at Newtons metode ikke nødvendigvis konvergerer for funksjoner som ikke har kontinuerlige deriverte, og fra ligning (26) ser vi at $f(\phi, u)$ er diskontinuerlig i $u = 0$ når $\phi_R \neq 0$. Den utdelte CN-metoden vil derfor anvende en høyere ordens Runge-Kutta-metode dersom Newtons metode ikke konvergerer etter et gitt antall iterasjoner, eller dersom den oppdager en diskontinuitet i $f(\phi, u)$.

Sylindre

Hver gruppe har tilgang på en rekke ulike sylindre med variabel vekt, radius og massefordeling. **Vær forsiktig når dere slipper metallsylindrene, de har en tendens til å skjene til siden og falle av banen. Metallsylindrene er spesielt tunge og kan skade både utstyr og personer. Det er ikke nødvendig å ha et veldig stort initielt utslag.**

Kamera med Tripod

For innspilling av videoer brukes et kamera (Panasonic DMC-FZ-200) som har flere innstillinger for bildefrekvens. For dette forsøket vil det typisk være unødvendig å bruke høyhastighetsinnstillingen, men her må dere ta en avgjørelse på hva dere mener vil være fornuftig.

Hver gruppe får også utdelt et kamerastativ med justerbare bein som kameraet kan festes i. **Vær forsiktig når dere drar ut beina på stativet, dersom dere bruker for mye kraft, vil de falle av og være tidkrevende å reparere.**

Videoanalyse-programmet Tracker

Tracker er et åpen-kildekode-verktøy for å gjøre videoanalyse og skal være kjent fra tidligere labøkter. Mer informasjon om installasjon og bruk finnes i Kap. 3 “Kollisjoner” i labheftet og på Blackboard.

Annet Utstyr

Laben er utstyrt med både meterstav, målebånd, skyvelær og vekt som dere kan bruke til å måle andre størrelser dere trenger for å gjennomføre forsøket.

4 Oppgaver

I forbindelse med dette forsøket skal dere skrive en rapport som dere vil få tilbakemelding på. Se dokumenter på Blackboard i mappen “Rapportskriving” for mer informasjon om hva en rapport bør inneholde. For å gi dere noe konkret å skrive om legger vi ved et sett med oppgaver knyttet til forsøket. Rapporten skal være en sammenhengende tekst som blant annet inneholder svarene på oppgave 2 og 3. Den skal ikke ha direkte referanser til oppgavene, men dere kan referere til prosjektbeskrivelsen ellers. Hvis dere ønsker å drøfte utover oppgavene, er det både tillatt og oppfordret, gitt at det som diskuteres er relevant. For eksempel vil det være særs relevant å

diskutere hvordan eventuelle feilkilder påvirker resultatene. Sjekk i god tid før innlevering at dere har diskutert feilkilder, samt at dere har dekket det oppgavene spør om.

Oppgave 1 (Planlegging og utførelse av forsøk)

Den første oppgaven er å planlegge hvordan dere skal utføre forsøket selv. Hensikten med forsøket kan hjelpe dere med dette, så vi gjentar den her: Dere skal se nærmere på dynamikken til en sylinder som ruller rent på en kvartsirkel. Bruk videoanalyse til å identifisere og drøfte forskjellige dempingsmekanismer som gjør at sylindren taper energi og at bevegelsen stopper. Ved å sammenligne måleserier med numeriske løsninger av differensialligningen som bestemmer dynamikken til sylindren, skal dere knytte det dere observerer til den underliggende fysikken som styrer dynamikken. Hvis dere har målinger av to forskjellige sylindre, vil eventuelle forskjeller i dynamikken dere observerer være relevant å diskutere.

Etter selve labøkten må dere ha minst én måleserie (helst to, med forskjellige sylindre) der dere har målt vinkelutslaget til sylindren som funksjon av tid. Film rullebevegelsen til sylindren og analyser filmene i Tracker. For hver film henter dere ut tidspunkter og posisjoner til en tekstfil som senere leses og analyseres videre i Python.

Oppgave 2 (Numerikk)

For å hjelpe dere med den numeriske delen av prosjektet har vi laget en Jupyter Notebook som ligger på Blackboard. Den inneholder noe av koden dere trenger til å analysere de eksperimentelle resultatene deres, mens resten av koden må dere skrive selv. Notebooken har tips til hvordan dere kan løse samtlige deloppgaver knyttet til numerikk.

2a) Skriv en funksjon som leser de eksperimentelle målingene fra Tracker inn i Python. Plott vinkelutslaget ϕ som funksjon av t og forklar kvalitativt hva dere observerer. *Hint:* Ligning (2a) beskriver forholdet mellom x og ϕ . For å bruke arcsin-funksjonen på en `numpy`-array, bruk `np.arcsin()`.

2b) Implementer Eulers metode som beskrevet i seksjon 2.4, og løs (den forenklede) ODE-en i ligning (29) numerisk i samme tidsintervall som de eksperimentelle målingene deres. Bruk $\delta = 0.04$ og uttrykket for ω_0 gitt ved ligning (22). Plott den numeriske løsningen deres sammen med den analytiske løsningen i ligning (30). Samsvarer de to grafene? Hva skjer hvis dere ikke velger Δt liten nok?

2c) Gjenta oppgave 2b), men bruk nå utdelt kode til å bruke CN-metoden. Ved å bruke kodestrukturen i Notebooken kan dette gjøres ved å kun erstatte et funksjonsnavn med et annet.

Hva kan dere nå si om valg av Δt og samsvaret mellom numeriske og analytiske resultater?

Oppgave 3 (Diskusjon)

Ved hjelp av de numeriske metodene dere utviklet i oppgave 2 kan dere nå sammenligne numeriske og eksperimentelle resultater. Selv om størrelsene ϕ_R , β og δ er ukjente størrelser (som er svært vanskelige å måle), kan de likevel anslås ved å bestemme hvilke verdier for ϕ_R , β og δ som gir best samsvar mellom numeriske og eksperimentelle resultater.

3a) Bruk CN-metoden til å eksperimentere med forskjellige verdier for ϕ_R , δ og β . Prøv (på øyemål) å finne parametre som gjør at de eksperimentelle målingene samsvarer best mulig med de numeriske resultatene. Oppgi hvilke verdier dere har funnet, og forklar hvilke krefter som bidrar mest til å bremse sylindren.

3b) De forskjellige dempingsmekanismene avhenger alle av v (merk at $l\dot{\phi} = v$), men ikke på samme måte. Under hvilke deler av bevegelsen opplever sylindren mest/minst bremsing fra kreftene dere har anslått som de viktigste?

3c) Dersom dere har to måleserier for to forskjellige sylindre, sammenlign verdiene dere anslår i **3a)** for begge måleseriene. Hva kan være en fysisk forklaring på det dere observerer? Hvis dere kun har én måleserie, kan dere spekulere i hvordan dynamikken ville endret seg om dere endret noe ved sylindren (masse, radius, massefordeling etc.).

Appendiks

A Videre Lesning

Teorien i denne oppgaven bygger i stor grad på C. Hanisch and M. Ziese, *European Journal of Physics* **42**, 045004 (2021). For videre lesning om av hvordan d avhenger av v se R. Cross, *American Journal of Physics* **84**, 221 (2016).

B Kort Notat om Notasjon for Derivasjon

Det finnes flere ulike notasjonsformer for deriverte, og hvilken som benyttes avhenger av hva som er mest hensynsmessig. Det er viktig å påpeke at selv om notasjonen er forskjellig, er matematikken hele tiden den samme.

Fra tidligere er dere mest sannsynlig kjent med å skrive den deriverte som $y'(x)$ eller $f'(x)$. Dette er kjent som Lagranges notasjon og fungerer veldig bra for enkle funksjoner med bare én variabel. For den tidsderiverte bruker vi som regel \dot{y} eller \dot{f} i stedet, hvor det er inneforstått at vi deriverer med hensyn på tiden. Dette er kjent som Newtons notasjon.

Det finnes også en del tilfeller hvor Lagranges/Newtons notasjon ikke er mest nyttig, og hvor man i stedet benytter Leibniz' notasjon $y'(x) = dy/dx$ eller

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x). \quad (40)$$

Leibniz' notasjon har flere fordeler, den er blant annet lett å bruke på større og styggere uttrykk, hvor apostrofen i Lagranges eller prikken i Newtons notasjon er lett å overse. Den er også nyttig for funksjoner med flere variable hvor $f'(x, z)$ ikke lenger vil være entydig. Her er den også lett å generalisere til partiellderiverte, som dere har sett tidligere til bruk i Gauss' feilforplantningslov. Til slutt er Leibniz' notasjon nyttig da man kan gange og dele på de differensielle størrelsene, bl.a. er det lett å vise at

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad (41)$$

eller at

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \implies \int_{t_i}^{t_f} v_x dt = \int_{x_i}^{x_f} dx. \quad (42)$$

Derfor er Leibniz' notasjon spesielt mye brukt når man jobber med differensialligninger, som vi gjør i dette prosjektet.

C Numerisk Løsning av Differensialligninger

Advarsel: Dette appendikset er ikke påkrevd lesning for labopplegget og bygger delvis på teori som dere enda ikke har lært.

Dette appendikset er ment å gi en grundigere innføring i teorien bak numeriske løsninger av differensialligninger. Det er myntet på studenter som ønsker å grave dypere enn det som er påkrevd i FY1001 og dekker stort sett stoff som senere vil bli gjennomgått i TMA4320 *Introduksjon til Vitenskapelige Beregninger*. Kursboken *Numerical Analysis* av T. Sauer anbefales for videre lesning, og ellers finnes det mange gode innføringer i temaet differensialligninger.

C.1 Numeriske Stegfunksjoner og Feilestimat

La oss starte med å se på en førsteordens ordinær differensialligning, som generelt kan uttrykkes som

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y). \quad (43)$$

Her ønsker vi å finne et uttrykk for y som funksjon av en variabel x , gitt at vi kjenner den deriverte dy/dx overalt, dvs. for alle (y, x) . Et typisk eksempel i fysikk kan være at vi ønsker å finne posisjonen $x(t)$ som en funksjon av tiden t , når farten $v = dx/dt$ er kjent overalt. For å finne en entydig løsning er vi også nødt til å kjenne verdien til y i ett vilkårlig punkt x_0 . I fysikken kommer vi som regel over initialbetingelser, i eksempelet med posisjonen $x(t)$ vil vi som regel kjenne initialposisjonen $x(0)$.

For noen spesielle uttrykk for den deriverte $f(x, y)$ vil vi kunne løse differensialligning (43) eksakt, et godt eksempel er dersom $f(x, y) = f(x)$ kun er en funksjon x . Da kan vi multiplisere med dx på begge sider av ligning (43), og så integrere fra verdien x_0 hvor vi antar $y_0 = y(x_0)$ er kjent og finner

$$\int_{y_0}^y dy = y - y_0 = \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad (44)$$

så dersom vi klarer å løse det siste integralet, har vi funnet en løsning til ligning (43)⁵.

Ofte klarer vi ikke å finne en eksakt (analytisk) løsning på differensialligningen. I disse tilfellene må vi ofte ty til numeriske metoder for å finne en approksimasjon til løsningen. En første idé vil være å la $dy, dx \rightarrow \Delta y, \Delta x$ gå til endelig størrelser, og skrive om ligning (43) til

$$\Delta y \approx f(x, y) \Delta x. \quad (45)$$

Merk her at det ikke er gitt hvilket punkt vi velger å evaluere $f(x, y)$ i, men dersom vi kjenner (x_0, y_0) og ønsker å finne y_1 ved x_1 , vil det som regel være naturlig å sette $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Ved så å bruke $\Delta x, \Delta y = x_1 - x_0, y_1 - y_0$ kan vi omskrive ligning (45) til

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0). \quad (46)$$

⁵Merk at for “fine” nok $f(y, x)$ kan vi vise at ligning (43) kun har én entydig løsning.

Det er ikke helt umiddelbart klart hvor god denne approksimasjonen er, men intuitivt burde den bli bedre jo mindre $(x_1 - x_0)$ er.

Vi kan systematisere fremgangsmåten i forrige avsnitt ved å Taylor-utvikle $f(x, y)$ rundt en vilkårlig verdi \tilde{x} ⁶ og ta integralet av ligning (43) mellom to vilkårlige verdier x_0 og x_1 :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dy}{dx} dx &= \int_{y_0}^{y_1} dy = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{\tilde{x}} (x - \tilde{x})^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{\tilde{x}} \left[(x_1 - \tilde{x})^{n+1} - (x_0 - \tilde{x})^{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Som over vil et naturlig valg være å sette $\tilde{x} = x_0$, som gir oss

$$y_1 = y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_0} (x_1 - x_0)^{n+1}. \quad (48)$$

Dersom f er tilstrekkelig glatt, slik at de deriverte $d^n f/dx^n$ ikke divergerer og $x_1 - x_0 \ll 1$, ser vi at vi til første orden i $x_1 - x_0$ finner igjen uttrykket i ligning (46). Vi ser også at til laveste orden i $x_1 - x_0$ er feilen i tilnærmingen gitt ved

$$|y_1^E - y_1| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} (x_1 - x_0)^2, \quad (49)$$

hvor y_1^E er den eksakte løsningen. Vi ser at når vi minker steglengden $(x_1 - x_0)^2$, minsker også feilen i tilnærmingen vår, og vi kan få en så lav feil som vi ønsker ved å velge et kort nok steg.

Vi kan også gjøre et annet valg for \tilde{x} i ligning (47). Et spesielt nyttig valg kan være å gjennomsnittet av resultatet om vi velger x_0 og x_1 , som gir

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_0} + (-1)^n \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_1} \right] (x_1 - x_0)^{n+1} \quad (50)$$

som til laveste orden gir

$$y_1 \approx y_0 + \frac{1}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)] (x_1 - x_0) \quad (51)$$

med feilestimat

$$|y_1^E - y_1| \approx \frac{1}{4} \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0} - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_1} (x_1 - x_0)^2 \approx \frac{1}{4} \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} (x_1 - x_0)^3, \quad (52)$$

hvor vi har brukt Taylor-rekken til $d^n f/dx^n$ ved x_0 til å tilnærme $df/dx|_{x_1} = df/dx|_{x_0} + d^2 f/dx^2|_{x_0} (x_1 - x_0)$ som gir resultatet over. Vi ser dermed at denne feilen skalerer som $(x_1 - x_0)^3$, og vil være mindre enn feilen i ligning (49) når $x_1 - x_0 \ll 1$. Tilnærmelsen i ligning (51) er derfor forventet å være bedre enn tilnærmelsen vi først fant i ligning (46).

⁶Merk at vi kan se på $f(x, y) = f(x, y(x)) = f(x)$ som en funksjon som kun avhenger av x ettersom $y = y(x)$. Vi trenger derfor ikke å ta hensyn til at vi har flere variabler når vi Taylor-utvikler $f(x, y)$, men huske på at $dy/dx \neq 0$ når vi deriverer $df/dx = \partial f/\partial x + (\partial f/\partial y)(dy/dx)$.

C.2 Fra Ett til Mange Steg

I de fleste problemer vi kommer borti, vil ikke avstanden mellom første x -verdi x_0 og siste x -verdi x_f være liten, og vi må forvente at en direkte anvendelse av ligning (46) eller (51) vil gi en dårlig tilnærming. Trikset i dette tilfellet er å dele opp intervallet (x_0, x_f) i N delintervaller, eller steg, (x_i, x_{i+1}) som er tilstrekkelig små, for deretter å anvende ligning (46) eller (51) på hvert av delintervallene. Delintervallene trenger ikke nødvendigvis være like store; en populær metode for å løse differensialligninger baserer seg på å la steglengden tilpasse seg den deriverte i hvert steg og er spesielt nyttig for å løse såkalte stive differensialligninger. I denne laben kommer vi kun til å bruke metoder hvor steglengden er låst på forhånd. Å løse en differensialligning ved å bruke ligning (46) i hvert steg kalles Eulermetoden, mens å bruke ligning (51) kalles Crank-Nicholson-metoden.

Dersom vi vet at den deriverte til f er begrenset ovenfra av en verdi $|df/dx| < A_1$ i intervallet (x_0, x_f) , kan vi estimere feilen dersom vi kjenner steglengden. Hvis vi antar at alle delintervallene er like store, dvs. at $x_{i+1} - x_i = (x_f - x_0)/N$ for alle i , finner vi for tilnærmingen i ligning (46) den totale feilen ved å summere feilestimatet fra ligning (49). Feilen blir altså

$$|y_f^E - y_f| \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 < \frac{B}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_f - x_0)^2}{N^2} \approx \frac{B}{2} \frac{(x_f - x_0)^2}{N}. \quad (53)$$

Vi ser dermed at den totale feilen skalerer som $\sim N^{-1}$, og vi kan dermed få en vilkårlig god tilnærming til løsningen ved å velge N stor nok. For steget i ligning (51) finner vi istedet vha. ligning (52)

$$|y_f^E - y_f| \lesssim \frac{A_2}{4} \frac{(x_f - x_0)^3}{N^2}, \quad (54)$$

hvor vi antar $|d^2f/dx^2| < A_2$ for alle x -verdier i intervallet (x_0, x_f) . Vi ser at denne feilen skalerer som N^{-2} , og den vil derfor synke raskere enn N^{-1} for store N .

Fra ligning (53) og (54) ser vi at Crank-Nicholson-metoden (39) vil gi en bedre tilnærming til løsningen for store N enn Eulermetoden (46). En annet problem med Eulermetoden er at den som regel ikke vil bevare energien i et mekanisk system, men vil etterhvert divergere, noe som dere vil se i laben.

C.3 Implisitte Differensialligningslødere

Som den skarpsindige leser allerede har oppdaget, er ligning (51) betraktelig vanskeligere å løse enn ligning (46), ettersom den ukjente størrelsen y_1 inngår på både venstre og høyre side av uttrykket gjennom $f(x_1, y_1)$. For noen uttrykk kan det være lett å løse ligning (51) analytisk, mens i andre tilfeller må man ty til numeriske metoder. Merk at ved å flytte om på ligning (51) kan vi skrive den som (husk at den ukjente størrelsen nå er y_1 , vi antar x_0, x_1 og y_0 er kjent)

$$g(y_1) = y_1 - y_0 - (1/2)[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)](x_1 - x_0) = 0. \quad (55)$$

Den lettest forståelige måten å løse problemer som ligning (55) er ved hjelp av Newtons metode, som bl.a. foreleses i TMA4100 *Matematikk 1*. Gitt en tilnærming $y_1^{(n)}$ til problemet i ligning (55), lineariserer man $g(y_1) = g(y_1^{(n)}) + g'(y_1^{(n)})(y_1 - y_1^{(n)})$ rundt $y_1^{(n)}$, og finner en forbedret tilnærming $y_1^{(n+1)}$ ved regne ut hvor tangenten til g ved $y_1^{(n)}$ krysser y -aksen:

$$g(y_1^{(n)}) + g'(y_1^{(n)})(y_1^{(n+1)} - y_1^{(n)}) = 0 \implies y_1^{(n+1)} = y_1^{(n)} - \frac{g(y_1^{(n)})}{g'(y_1^{(n)})}. \quad (56)$$

Dersom f er en “fin” nok funksjon, kan man ved å iterere Newtons metode (56) nok ganger finne en tilnærming $y_1^{(n)}$ som løser ligning (55) til vilkårlig presisjon δ , dvs. $g(y_1^{(n)}) < \delta$. Merk at det er flere ting som kan gå galt ved å bruke Newtons metode, spesielt hvis den initielle tilnærmingen $y_1^{(0)}$ ikke er god.

Vi kan også utvide Newtons metode til flere ligninger med flere ukjente. For høyere-ordens differensialligninger vil man kunne møte på problemer som $g_i(y_1, y_2, \dots, y_k) = 0$ for $i = 1, 2, \dots, k$ ligninger og k ukjente. Newtons metode tar da form som et ligningssett

$$\sum_j \frac{dg_i}{dx_j} \Big|_{\{x^{(n)}\}} (x_j^{(n+1)} - x_j^{(n)}) = -g_i(\{x^{(n)}\}), \quad (57)$$

hvor $\{x^{(n)}\} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_1^{(n)}$. For $k = 2$ er løsningen kjent

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= x_1^{(n)} - |J_F|^{-1} \left(\frac{dg_2}{dx_2} \Big|_{\{x^{(n)}\}} x_1^{(n)} - \frac{dg_1}{dx_2} \Big|_{\{x^{(n)}\}} x_2^{(n)} \right) \\ x_2^{(n+1)} &= x_2^{(n)} - |J_F|^{-1} \left(\frac{dg_1}{dx_1} \Big|_{\{x^{(n)}\}} x_2^{(n)} - \frac{dg_2}{dx_1} \Big|_{\{x^{(n)}\}} x_1^{(n)} \right), \end{aligned} \quad (58)$$

hvor

$$|J_F|^{-1} = \frac{dg_1}{dx_1} \Big|_{\{x^{(n)}\}} \frac{dg_2}{dx_2} \Big|_{\{x^{(n)}\}} - \frac{dg_1}{dx_2} \Big|_{\{x^{(n)}\}} \frac{dg_2}{dx_1} \Big|_{\{x^{(n)}\}}. \quad (59)$$