Tarea 1

EIE200 - Programación Numérica

Instrucciones

- Elabore un informe respondiendo y discutiendo las preguntas contenidas en este documento.
- No existe un formato predefinido para el documento. Sin embargo, procure que este sea lo más ordenado posible, manteniendo una redacción y ortografía adecuada.
- Junto con el informe, debe entregar todos los códigos utilizados para resolver las preguntas.
- El informe en formato `PDF` más los códigos utilizados para resolver las preguntas deben ser subidos a través del aula virtual en un solo archivo `zip` con nombre `Apellido_Nombre.zip`.
- El nombre del informe debe ser `Apellido_Nombre.pdf`.
- Los códigos deben ser autocontenidos, es decir, se deben poder ejecutar desde la carpeta sin necesidad de instalar ninguna librería distinta de `numpy` y `matplotlib`.
- No se aceptarán trabajos entregados después de la fecha de entrega.

Fecha de entrega: viernes 23 de septiembre

Pregunta 1

La solución teórica al problema de caída libre de un pato de masa $m = 4\ kg$ está dada por:

$$v(t) = v_0 e^{-c/mt} + \frac{gm}{c}(1 - e^{-c/mt}) \tag{1}$$

donde v_0 es la velocidad inicial, g la aceleración de gravedad y c el coeficiente de arrastre del aire, el que genera un fuerza de resistencia a la caída. En la ecuación anterior, t representa el tiempo transcurrido.

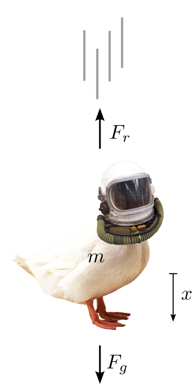

Figura 1: Esquema del problema de caída libre de un pato.

Las aceleraciones de gravedad (en m/s^2) en los planetas Tierra, Marte y Júpiter son 9.81, 3.71 y 24.79 respectivamente.

Calcule la velocidad de caída del pato en los tres planetas en el intervalo de tiempo (en segundos) $[0, 45]$ si se deja caer desde el reposo[1]. Muestre sus resultados en un mismo gráfico y discuta los cambios observados para cada caso.

[1] Considere un coeficiente de arrastre de 0.35 kg/s para todos sus cálculos

Pregunta 2

La función $1/x^2$ en torno a $x = -1$ se puede aproximar usando la siguiente serie de Taylor:

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n \tag{2}$$

Calcule de manerae incremental y grafique la aproximación que se obtiene a medida que se van aumentando los términos de la serie. Utilice un máximo de 8 términos y use leyendas para diferenciar cada aproximación de la función original.

Calcule el *error relativo real* en $x = -1.05$ que se está cometiendo con cada aproximación, el cual se define como

$$\varepsilon_t(\%) = 100 \left| \frac{\text{true} - \text{estimated}}{\text{true}} \right| \tag{3}$$

Pregunta 3

Considere un computador hipotético en base-10 de 5 bits de manera que utiliza 4 bits para el coeficiente y 1 para el exponente, es decir:

$$c_0.c_1c_2c_3 \times 10^{e_5} \tag{4}$$

1. Determine el máximo y menor número positivo que es capaz de representar el computador.
2. Calcule la suma entre los números 1.354 y 0.04321 y calcule el *error relativo real* de redondeo que comete la máquina.
3. Calcule la suma entre los números 0.0010 y 4000 y discuta el resultado.

Tarea 1
EIE200 - Programación Numérica
Hernán Mella

Pregunta 1

La solución del problema de caída libre está dada por:

$$v(t) = v_0 e^{-c/mt} + \frac{gm}{c}(1 - e^{-c/mt}) \quad (1)$$

Para los valores de g dados en el enunciado, las velocidades de caída del pato en cada uno de los planetas se presentan en la Figura 1.

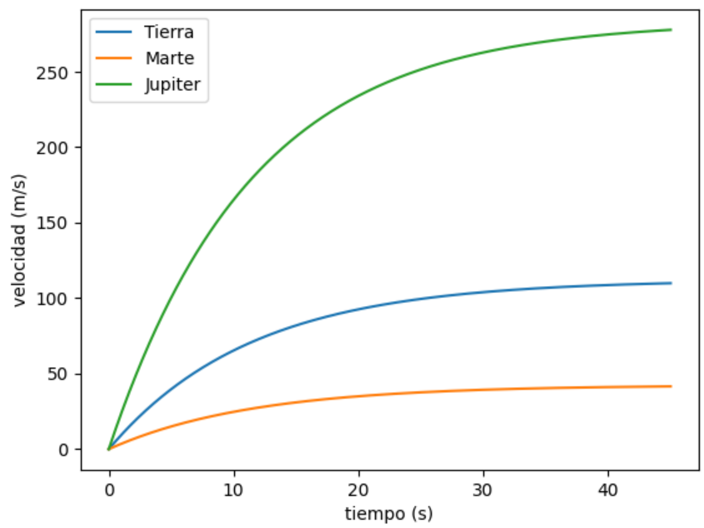

Figura 1: Velocidades de caída libre en los planetas Tierra, Marte y Júpiter obtenidos utilizando $m = 4\ kg$, $v_0 = 0\ m/s$ y $c = 0.35\ kg/s$.

De la Figura se subentiende que a valores mayores de gravedad la velocidad de caída aumenta, lo que es de esperar y que también se desprende de la Ecuación (1).

Pregunta 2

En la Figura 2 se muestra las aproximaciones de la función $1/x^2$ en torno al punto $x = -1$ obtenida usando la siguiente serie de Taylor:

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n \tag{2}$$

Como se puede apreciar, no se notan diferencias visuales entre las aproximaciones y la solución de referencia (al menos en torno al punto $x = -1$). Sin embargo, al estimar el error relativo usando la expresión dada en la Ecuación 3 se obtienen las diferencias dadas en la tabla 1.

$$\varepsilon_t(\%) = 100\left|\frac{\text{true} - \text{estimated}}{\text{true}}\right| \tag{3}$$

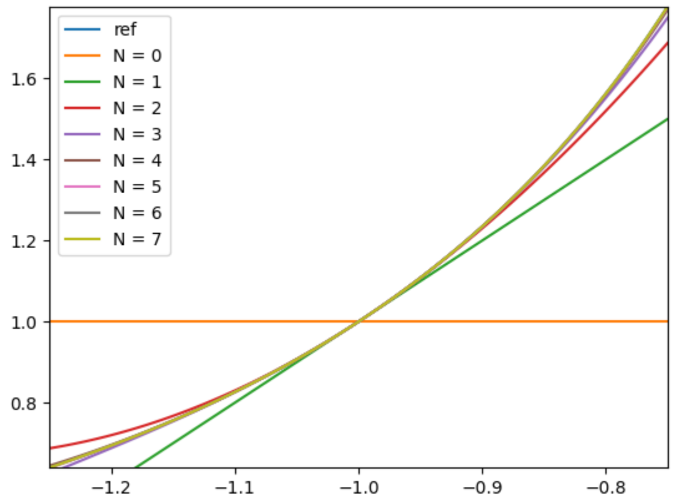

Figura 2: Aproximaciones obtenidas usando la serie de Taylor para distintos números de N.

Debido a que la aproximación dada en la Ecuación 2 es sólo exacta en torno al punto $x = -1$ (y cuando $n \to \infty$), el error presentado en la tabla 1 siempre será distinto de cero a pesar de la cantidad de términos que se agreguen[1].

Tabla 1: Errores relativos estimados para las aproximaciones obtenidas con distintos números de términos

N^o de términos	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon(\%)$	1.03×10^{1}	7.75×10^{-1}	5.19×10^{-2}	3.25×10^{-3}	1.95×10^{-4}	1.14×10^{-5}	6.52×10^{-7}	3.67×10^{-8}

[1] Es posible que calculando el error para una aproximación en torno a $x = -1$ se consiga un error igual a cero con un número finito de términos debido a la precisión del computador.

Pregunta 3

El computador hipotético en base-10 de 5 bits utiliza 4 bits para el coeficiente y 1 para el exponente, es decir, el sistema de representación está dado por:

$$c_0.c_1c_2c_3 \times 10^{e_5} \tag{4}$$

Pregunta 3.1

Se puede notar que al no haber bits asignados para el signo tanto en el coeficiente como en el exponente, no es posible representar números negativos ni números decimales.

El número máximo que puede representar es 9.999×10^9 y el mínimo 1.0×10^0.

Pregunta 3.2

La representación de los números a sumar en el sistema hipotético es:

$$1.354 = 1.354 \times 10^0 \tag{5a}$$
$$0.04321 = 4.321 \times 10^2 \tag{5b}$$

Para sumar ambos números, primero se debe igualar sus exponentes. Así, la suma se pueden escribir como:

$$1.354 \times 10^0 + 0.0432 \times 10^0 = (1.354 + 0.0432) \times 10^0 = (1.354 + 0.0432) \times 10^0 = 1.3972 \times 10^0 \tag{6}$$

Debido a que el computador sólo posee 4 bits para el coeficiente, se debe truncar el resultado y los últimos 3 dígitos se dejan fuera del resultado final, que es:

$$1.354 \times 10^0 + 0.04321 \times 10^0 = 1.397 \times 10^0 \tag{7}$$

Finalmente, el error relativo real es:

$$\varepsilon_t(\%) = 100 \left| \frac{1.39721 - 1.397}{1.39721} \right| = 0.01503 \tag{8}$$

Del resultado anterior se pueden concluir que la capacidad de representación de un sistema induce a errores al sumar números con órdenes de magnitud muy distintos. En este caso, dicho error es del 0.01503 % y podría reducirse a cero con sólo agregar un bit adicional al exponente.

Pregunta 3.3

Procediendo de la misma forma que en la pregunta anterior, los números a sumar en el sistema de representación están dados por:

$$4000 = 4.000 \times 10^3 \tag{9a}$$
$$0.001 = 0.001 \times 10^1 \tag{9b}$$

Entonces, la suma se puede escribir de la siguiente forma:

$$4.000 \times 10^3 + 0.00001 \times 10^3 = 4.00001 \times 10^3 \tag{10}$$

Luego de truncar a la precisión del computador, se obtiene el resultado final (aproximado a la precisión del computador) de la suma:

$$4000 + 0.001 \approx 4.000 \times 10^3 = 4000 \tag{11}$$

De lo anterior se concluye que al sumar dos números con órdenes de magnitud muy distintos entre ellos, dependiendo de la precisión del computador, se pierde información.