


Clase 6: resolviendo ODEs a través de métodos numéricos

Hernán Mella

3 de octubre de 2023

EIE PUCV

1 Métodos de paso adaptativo

2 Otros métodos

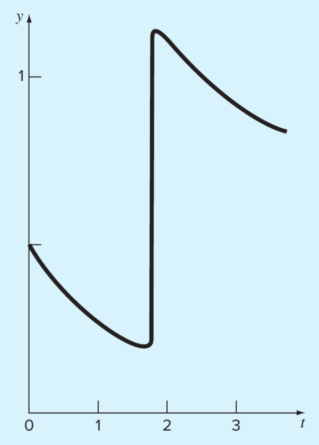
Recapitulemos lo que hemos visto hasta ahora

Hasta el momento vimos métodos de integración numérica para resolver EDOs'

Todos ellos utilizan un paso h fijo para estimar la solución al final del intervalo

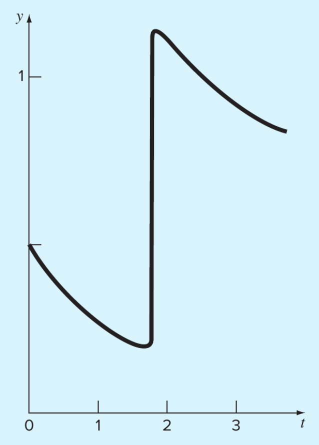
Sin embargo, esto puede ser una limitación para algunos tipos de problemas

Para lo anterior existen los *métodos de paso adaptativo*



Recapitulemos lo que hemos visto hasta ahora

- Hasta el momento vimos métodos de integración numérica para resolver EDOs'
- Todos ellos utilizan un paso h fijo para estimar la solución al final del intervalo
- Sin embargo, esto puede ser una limitación para algunos tipos de problemas
- Para lo anterior existen los *métodos de paso adaptativo*



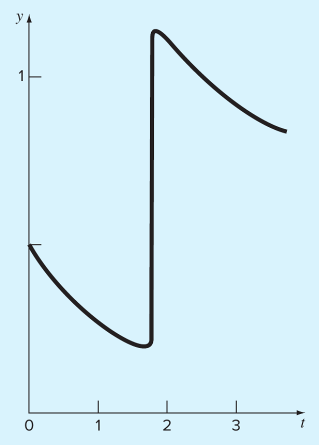
Recapitulemos lo que hemos visto hasta ahora

Hasta el momento vimos métodos de integración numérica para resolver EDOs'

Todos ellos utilizan un paso h fijo para estimar la solución al final del intervalo

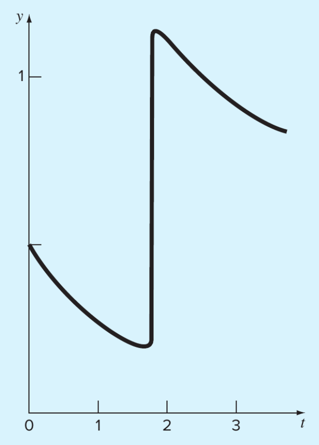
Sin embargo, esto puede ser una limitación para algunos tipos de problemas

Para lo anterior existen los *métodos de paso adaptativo*



Recapitulemos lo que hemos visto hasta ahora

- Hasta el momento vimos métodos de integración numérica para resolver EDOs'
- Todos ellos utilizan un paso h fijo para estimar la solución al final del intervalo
- Sin embargo, esto puede ser una limitación para algunos tipos de problemas
- Para lo anterior existen los *métodos de paso adaptativo*



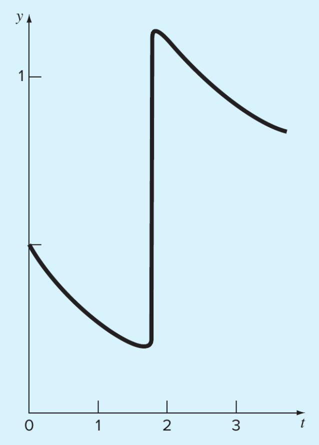
¿Qué son los métodos de paso adaptativo?

Estos métodos permiten que el esquema numérico se adapte a la solución

Reducen la cantidad cálculos numéricos a realizar

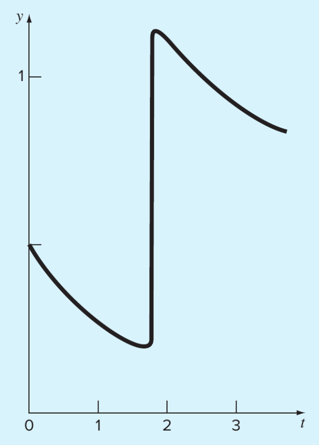
Trabajan en base a una estimación del error de truncamiento local

Existen dos tipos de métodos adaptativos que veremos a continuación



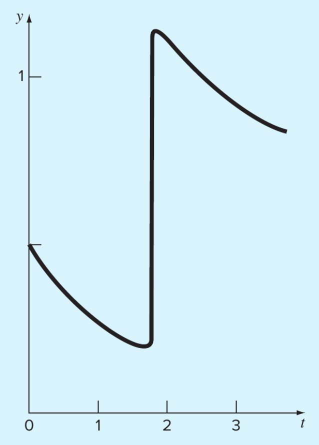
¿Qué son los métodos de paso adaptativo?

- Estos métodos permiten que el esquema numérico se adapte a la solución
- Reducen la cantidad cálculos numéricos a realizar
- Trabajan en base a una estimación del error de truncamiento local
- Existen dos tipos de métodos adaptativos que veremos a continuación



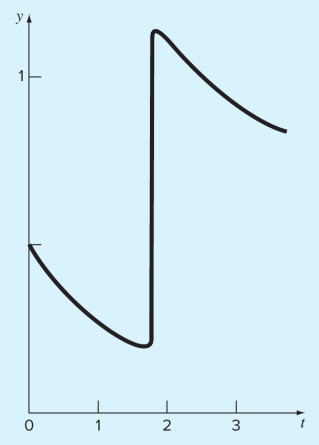
¿Qué son los métodos de paso adaptativo?

- Estos métodos permiten que el esquema numérico se adapte a la solución
- Reducen la cantidad cálculos numéricos a realizar
- Trabajan en base a una estimación del error de truncamiento local
- Existen dos tipos de métodos adaptativos que veremos a continuación



¿Qué son los métodos de paso adaptativo?

- Estos métodos permiten que el esquema numérico se adapte a la solución
- Reducen la cantidad cálculos numéricos a realizar
- Trabajan en base a una estimación del error de truncamiento local
- Existen dos tipos de métodos adaptativos que veremos a continuación



RK adaptativo o método de *reducción a la mitad*

Primero: usa el paso completo h para estimar y_1

Segundo: usa dos pasos de $h/2$ para hacer una segunda estimación y_2

Luego, se estima el error de la siguiente forma:

$$\Delta = y_2 - y_1$$

Δ se utiliza como un criterio de control del paso h y también para corregir la segunda estimación y_2

Para RK4, la corrección es

$$y_2 \longleftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

La estimación RK4 con h posee un error de truncamiento local de $O(h^5)$, mientras que la corrección de $O(h^6)$ $(\star)$

RK adaptativo o método de *reducción a la mitad*

Primero: usa el paso completo h para estimar y_1

Segundo: usa dos pasos de $h/2$ para hacer una segunda estimación y_2

Luego, se estima el error de la siguiente forma:

$$\Delta = y_2 - y_1$$

Δ se utiliza como un criterio de control del paso h y también para corregir la segunda estimación y_2

Para RK4, la corrección es

$$y_2 \longleftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

La estimación RK4 con h posee un error de truncamiento local de $O(h^5)$, mientras que la corrección de $O(h^6)$ ($\star$)

RK adaptativo o método de *reducción a la mitad*

Primero: usa el paso completo h para estimar y_1

Segundo: usa dos pasos de $h/2$ para hacer una segunda estimación y_2

Luego, se estima el error de la siguiente forma:

$$\Delta = y_2 - y_1$$

Δ se utiliza como un criterio de control del paso h y también para corregir la segunda estimación y_2

Para RK4, la corrección es

$$y_2 \longleftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

La estimación RK4 con h posee un error de truncamiento local de $O(h^5)$, mientras que la corrección de $O(h^6)$ $(\star)$

RK adaptativo o método de *reducción a la mitad*

Primero: usa el paso completo h para estimar y_1

Segundo: usa dos pasos de $h/2$ para hacer una segunda estimación y_2

Luego, se estima el error de la siguiente forma:

$$\Delta = y_2 - y_1$$

Δ se utiliza como un criterio de control del paso h y también para corregir la segunda estimación y_2

Para RK4, la corrección es

$$y_2 \longleftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

La estimación RK4 con h posee un error de truncamiento local de $O(h^5)$, mientras que la corrección de $O(h^6)$ $(\star)$

RK adaptativo o método de *reducción a la mitad*

Primero: usa el paso completo h para estimar y_1

Segundo: usa dos pasos de $h/2$ para hacer una segunda estimación y_2

Luego, se estima el error de la siguiente forma:

$$\Delta = y_2 - y_1$$

Δ se utiliza como un criterio de control del paso h y también para corregir la segunda estimación y_2

Para RK4, la corrección es

$$y_2 \longleftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

La estimación RK4 con h posee un error de truncamiento local de $O(h^5)$, mientras que la corrección de $O(h^6)$ $(\star)$

RK adaptativo o método de *reducción a la mitad*

Primero: usa el paso completo h para estimar y_1

Segundo: usa dos pasos de $h/2$ para hacer una segunda estimación y_2

Luego, se estima el error de la siguiente forma:

$$\Delta = y_2 - y_1$$

Δ se utiliza como un criterio de control del paso h y también para corregir la segunda estimación y_2

Para RK4, la corrección es

$$y_2 \longleftarrow y_2 + \frac{\Delta}{15}$$

La estimación RK4 con h posee un error de truncamiento local de $O(h^5)$, mientras que la corrección de $O(h^6)$ ($\star$)

Ejemplo: RK4 adaptativo

Use el método RK4 adaptativo para integrar $dy/dt = 4e^{0.8t} - 0.5y$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$ usando $h = 2$ y una condición inicial de $y(0) = 2$. El valor real de la solución en el punto $y(2) = 14.84392$.

El método RK Fehlberg

- Calcula dos predicciones usando métodos de RK de distinto orden
- Los resultados se restan para obtener un estimado del error de truncamiento local
- Este método puede aumentar el tiempo de cómputo
- Por ejemplo, usando RK4 y RK5 se necesita un total de 10 evaluaciones de funciones por paso

¿Cómo solucionamos esto?

Se puede utilizar un método RK5 con valores de k que sirvan para el método de RK4, reduciendo sólo a 6 evaluaciones de funciones

El método RK Fehlberg

Calcula dos predicciones usando métodos de RK de distinto orden

Los resultados se restan para obtener un estimado del error de truncamiento local

Este método puede aumentar el tiempo de cómputo

Por ejemplo, usando RK4 y RK5 se necesita un total de 10 evaluaciones de funciones por paso

¿Cómo solucionamos esto?

Se puede utilizar un método RK5 con valores de k que sirvan para el método de RK4, reduciendo sólo a 6 evaluaciones de funciones

El método RK Fehlberg

- Calcula dos predicciones usando métodos de RK de distinto orden
- Los resultados se restan para obtener un estimado del error de truncamiento local
- Este método puede aumentar el tiempo de cómputo
- Por ejemplo, usando RK4 y RK5 se necesita un total de 10 evaluaciones de funciones por paso

¿Cómo solucionamos esto?

Se puede utilizar un método RK5 con valores de k que sirvan para el método de RK4, reduciendo sólo a 6 evaluaciones de funciones

El método RK Fehlberg

- Calcula dos predicciones usando métodos de RK de distinto orden
- Los resultados se restan para obtener un estimado del error de truncamiento local
- Este método puede aumentar el tiempo de cómputo
- Por ejemplo, usando RK4 y RK5 se necesita un total de 10 evaluaciones de funciones por paso

¿Cómo solucionamos esto?

Se puede utilizar un método RK5 con valores de k que sirvan para el método de RK4, reduciendo sólo a 6 evaluaciones de funciones

El método RK Fehlberg

- Calcula dos predicciones usando métodos de RK de distinto orden
- Los resultados se restan para obtener un estimado del error de truncamiento local
- Este método puede aumentar el tiempo de cómputo
- Por ejemplo, usando RK4 y RK5 se necesita un total de 10 evaluaciones de funciones por paso

¿Cómo solucionamos esto?

Se puede utilizar un método RK5 con valores de k que sirvan para el método de RK4, reduciendo sólo a 6 evaluaciones de funciones

El método RK Fehlberg

De esta forma, el método queda:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378} k_1 + \frac{250}{621} k_3 + \frac{125}{594} k_4 + \frac{512}{1771} k_6 \right) h$$
$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648} k_1 + \frac{18575}{48384} k_3 + \frac{13525}{55296} k_4 + \frac{277}{14336} k_5 + \frac{1}{4} k_6 \right) h$$

donde

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right),$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{5} h, y_i + \frac{1}{5} k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{3}{10} h, y_i + \frac{3}{40} k_1 h + \frac{9}{40} k_2 h\right)$$
$$k_4 = f\left(x_i + \frac{3}{5} h, y_i + \frac{3}{10} k_1 h - \frac{9}{10} k_2 h - \frac{6}{5} k_3 h\right)$$
$$k_5 = f\left(x_i + h, y_i - \frac{11}{54} k_1 h + \frac{5}{2} k_2 h - \frac{70}{27} k_3 h + \frac{35}{27} k_4 h\right)$$
$$k_6 = f\left(x_i + \frac{7}{8} h, y_i + \frac{1631}{55296} k_1 h + \frac{175}{512} k_2 h + \frac{575}{13824} k_3 h + \frac{44275}{110592} k_4 h + \frac{253}{4096} k_5 h\right)$$

El método RK Fehlberg

De esta forma, el método queda:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h$$
$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{2825}{27648}k_1 + \frac{18575}{48384}k_3 + \frac{13525}{55296}k_4 + \frac{277}{14336}k_5 + \frac{1}{4}k_6\right)h$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_i, y_i\right), \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{5}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{3}{10}h, y_i + \frac{3}{40}k_1 h + \frac{9}{40}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + \frac{3}{5}h, y_i + \frac{3}{10}k_1 h - \frac{9}{10}k_2 h - \frac{6}{5}k_3 h\right) \\
k_5 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{11}{54}k_1 h + \frac{5}{2}k_2 h - \frac{70}{27}k_3 h + \frac{35}{27}k_4 h\right) \\
k_6 &= f\left(x_i + \frac{7}{8}h, y_i + \frac{1631}{55296}k_1 h + \frac{175}{512}k_2 h + \frac{575}{13824}k_3 h + \frac{44275}{110592}k_4 h + \frac{253}{4096}k_5 h\right)
\end{aligned}$$

Ejemplo: método de RK adaptativo

Utilice el método RK4 adaptativo para integrar $y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$ usando un paso de $h = 1$ con $y'(0) = 2$. El valor real en $t = 2$ está dado por $y(2) = 14.84392$.

Recordatorio

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)$$

Adaptando el valor de h

El error (Δ) calculado con los métodos adaptativos y de Fehlberg se pueden usar para aumentar o disminuir el paso h

Una sugerencia para estimar el nuevo paso es la siguiente:

$$h_{\text{nuevo}} = h_{\text{present}} \left| \frac{\Delta_{\text{new}}}{\Delta_{\text{present}}} \right|^{\alpha} \quad \alpha = \begin{cases} 0.2 & \text{si } \Delta_{\text{present}} \leq \Delta_{\text{new}} \\ 0.25 & \text{si } \Delta_{\text{present}} > \Delta_{\text{new}} \end{cases}$$

La definición de Δ_{new} es clave porque define qué tan precisa queremos la estimación

Adaptando el valor de h

El error (Δ) calculado con los métodos adaptativos y de Fehlberg se pueden usar para aumentar o disminuir el paso h

Una sugerencia para estimar el nuevo paso es la siguiente:

$$h_{\text{nuevo}} = h_{\text{present}} \left| \frac{\Delta_{\text{new}}}{\Delta_{\text{present}}} \right|^{\alpha} \qquad \alpha = \begin{cases} 0.2 & \text{si } \Delta_{\text{present}} \leq \Delta_{\text{new}} \\ 0.25 & \text{si } \Delta_{\text{present}} > \Delta_{\text{new}} \end{cases}$$

La definición de Δ_{new} es clave porque define qué tan precisa queremos la estimación

El error (Δ) calculado con los métodos adaptativos y de Fehlberg se pueden usar para aumentar o disminuir el paso h

Una sugerencia para estimar el nuevo paso es la siguiente:

$$h_{\text{nuevo}} = h_{\text{present}} \left| \frac{\Delta_{\text{new}}}{\Delta_{\text{present}}} \right|^{\alpha} \quad \alpha = \begin{cases} 0.2 & \text{si } \Delta_{\text{present}} \leq \Delta_{\text{new}} \\ 0.25 & \text{si } \Delta_{\text{present}} > \Delta_{\text{new}} \end{cases}$$

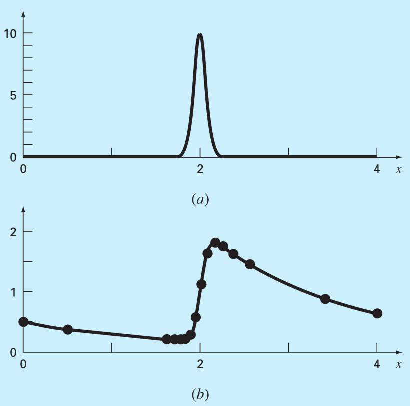
La definición de Δ_{new} es clave porque define qué tan precisa queremos la estimación

¿Cómo definimos Δ_{new}?

Una forma general de definir $\Delta_{\text{new}} = \varepsilon y_{\text{scale}}$ donde ε es un nivel de tolerancia e y_{scale} un factor de escalamiento del error.

Si $y_{\text{scale}} = y$ el error se define en términos de fracciones de errores relativos.

Si $y_{\text{scale}} = |y| + |h \cdot dy/dx|$ se asegura un error relativo constante (excepto cerca de los cruces por cero)

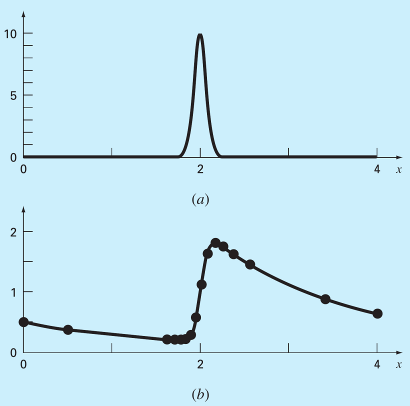


¿Cómo definimos Δ_{new}?

Una forma general de definir $\Delta_{\text{new}} = \varepsilon y_{\text{scale}}$ donde ε es un nivel de tolerancia e y_{scale} un factor de escalamiento del error.

Si $y_{\text{scale}} = y$ el error se define en términos de fracciones de errores relativos.

Si $y_{\text{scale}} = |y| + |h \cdot dy/dx|$ se asegura un error relativo constante (excepto cerca de los cruces por cero)

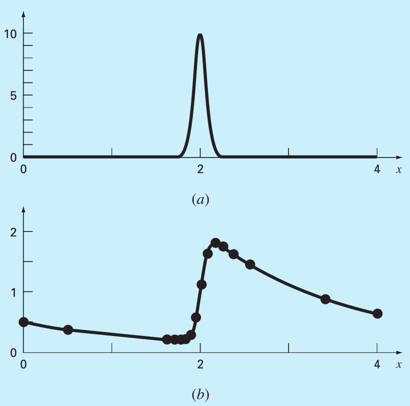


¿Cómo definimos Δ_{new}?

Una forma general de definir $\Delta_{\text{new}} = \varepsilon y_{\text{scale}}$ donde ε es un nivel de tolerancia e y_{scale} un factor de escalamiento del error.

Si $y_{\text{scale}} = y$ el error se define en términos de fracciones de errores relativos.

Si $y_{\text{scale}} = |y| + |h \cdot dy/dx|$ se asegura un error relativo constante (excepto cerca de los cruces por cero)



1 Métodos de paso adaptativo

2 Otros métodos

Métodos de RK de orden superior

Si se requiere mayor exactitud, RK de orden 5 entrega excelentes resultados

El método RK5 está dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_1 h + k_3 h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right)$$

Métodos de RK de orden superior

Si se requiere mayor exactitud, RK de orden 5 entrega excelentes resultados

El método RK5 está dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_1 h + k_3 h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right)$$

El método de Newmark

Para EDOs que modelan sistemas dinámicos (usualmente de 2do orden) se pueden resolver usando el método de Newmark

Consideremos el problema modelo:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + f^{\text{int}}(u) = f^{\text{ext}}$$

Newmark se basa en una versión extendida del teorema del valor medio y define la velocidad y desplazamiento de la ecuación de movimiento como:

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1}$$
$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1-2\beta}{2}\Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1}$$

El método de Newmark

Para EDOs que modelan sistemas dinámicos (usualmente de 2do orden) se pueden resolver usando el método de Newmark

Consideremos el problema modelo:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + f^{\text{int}}(u) = f^{\text{ext}}$$

Newmark se basa en una versión extendida del teorema del valor medio y define la velocidad y desplazamiento de la ecuación de movimiento como:

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1-\gamma)\Delta t\ddot{u}_n + \gamma\Delta t\ddot{u}_{n+1}$$

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\dot{u}_n + \frac{1-2\beta}{2}\Delta t^2\ddot{u}_n + \beta\Delta t^2\ddot{u}_{n+1}$$

El método de Newmark

Para EDOs que modelan sistemas dinámicos (usualmente de 2do orden) se pueden resolver usando el método de Newmark

Consideremos el problema modelo:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + f^{\text{int}}(u) = f^{\text{ext}}$$

Newmark se basa en una versión extendida del teorema del valor medio y define la velocidad y desplazamiento de la ecuación de movimiento como:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{n+1} &= \dot{u}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \\
u_{n+1} &= u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{1-2\beta}{2}\Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1}
\end{aligned}$$

El método de Newmark: elección de γ y β

Dependiendo de los valores de γ y β se pueden recuperar distintos métodos de integración

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0$ se ontiene el método de diferencias finitas centradas

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$ se obtiene el método de aceleración constante (regla del punto medio)

Como regla regeneral, $\beta = (\gamma + 0.5)^2/4$

El último es más utilizado para resolver sistemas dinámicos

El método de Newmark: elección de γ y β

Dependiendo de los valores de γ y β se pueden recuperar distintos métodos de integración

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0$ se ontiene el método de diferencias finitas centradas

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$ se obtiene el método de aceleración constante (regla del punto medio)

Como regla regeneral, $\beta = (\gamma + 0.5)^2/4$

El último es más utilizado para resolver sistemas dinámicos

El método de Newmark: elección de γ y β

Dependiendo de los valores de γ y β se pueden recuperar distintos métodos de integración

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0$ se ontiene el método de diferencias finitas centradas

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$ se obtiene el método de aceleración constante (regla del punto medio)

Como regla regeneral, $\beta = (\gamma + 0.5)^2/4$

El último es más utilizado para resolver sistemas dinámicos

El método de Newmark: elección de γ y β

Dependiendo de los valores de γ y β se pueden recuperar distintos métodos de integración

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0$ se ontiene el método de diferencias finitas centradas

Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$ se obtiene el método de aceleración constante (regla del punto medio)

Como regla regeneral, $\beta = (\gamma + 0.5)^2/4$

El último es más utilizado para resolver sistemas dinámicos

El método de Newmark: elección de γ y β

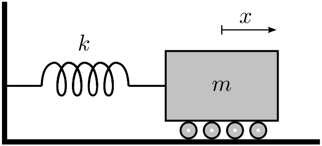
- Dependiendo de los valores de γ y β se pueden recuperar distintos métodos de integración
- Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0$ se ontiene el método de diferencias finitas centradas
- Usando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$ se obtiene el método de aceleración constante (regla del punto medio)
- Como regla regeneral, $\beta = (\gamma + 0.5)^2/4$
- El último es más utilizado para resolver sistemas dinámicos

Ejemplo

Resuelva la EDO que describe el sistema masa-resorte de la figura usando el método de Newmark usando $h = 1$ s.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

La velocidad inicial del sistema es cero y su posición inicial 1 m. Asuma que $k = 1$ y $m = 1$.



Solución teórica

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$