Clase 7: programación de métodos numéricos

Hernán Mella

EIE PUCV

7 de octubre de 2022

1. El método de RK1: Euler
2. Métodos de RK2
   - El método de Heun
   - El método del punto medio
   - El método de Ralston
3. Métodos de RK3, RK4 y RK5
4. Sistemas de EDOs

Poniendonos en contexto

Nos interesa programar métodos que nos permitan resolver el siguiente problema

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Todos los métodos vistos aproximan la solución de la EDO anterior como

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

O dicho de otra forma

Dados y_i y h, debemos calcular ϕ y estimar y_{i+1} para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Poniendonos en contexto

Nos interesa programar métodos que nos permitan resolver el siguiente problema

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Todos los métodos vistos aproximan la solución de la EDO anterior como

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

O dicho de otra forma

Dados y_i y h, debemos calcular ϕ y estimar y_{i+1} para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Poniendonos en contexto

Nos interesa programar métodos que nos permitan resolver el siguiente problema

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Todos los métodos vistos aproximan la solución de la EDO anterior como

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

O dicho de otra forma

Dados y_i y h, debemos calcular ϕ y estimar y_{i+1} para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Consideraciones para la programación

Debe documentar muy bien sus códigos para que los pueda re-utilizar y modificar en el futuro

Los *solvers* deben ser lo suficientemente genéricos como para resolver cualquier EDO

Es conveniente utilizar funciones para cada uno de los métodos numéricos

Para evaluar ϕ en cada paso de tiempo, es conveniente definir una función

Consideraciones para la programación

Debe documentar muy bien sus códigos para que los pueda re-utilizar y modificar en el futuro

Los *solvers* deben ser lo suficientemente genéricos como para resolver cualquier EDO

Es conveniente utilizar funciones para cada uno de los métodos numéricos

Para evaluar ϕ en cada paso de tiempo, es conveniente definir una función

Consideraciones para la programación

Debe documentar muy bien sus códigos para que los pueda re-utilizar y modificar en el futuro

Los *solvers* deben ser lo suficientemente genéricos como para resolver cualquier EDO

Es conveniente utilizar funciones para cada uno de los métodos numéricos

Para evaluar ϕ en cada paso de tiempo, es conveniente definir una función

Consideraciones para la programación

- Debe documentar muy bien sus códigos para que los pueda re-utilizar y modificar en el futuro
- Los *solvers* deben ser lo suficientemente genéricos como para resolver cualquier EDO
- Es conveniente utilizar funciones para cada uno de los métodos numéricos
- Para evaluar ϕ en cada paso de tiempo, es conveniente definir una función

El ejemplo tipo

Integre numericamente la siguiente EDO

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$ usando un paso de $h = 0.5$. En $x = 0$ se debe cumplir que $y = 1$.
La solución de esta ecuación diferencial es

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

1 El método de RK1: Euler

2 Métodos de RK2
- El método de Heun
- El método del punto medio
- El método de Ralston

3 Métodos de RK3, RK4 y RK5

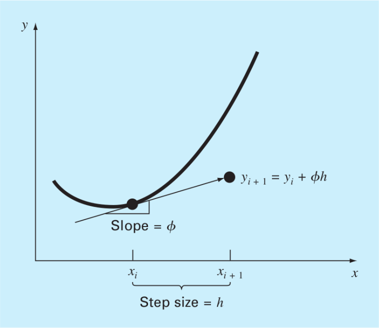
4 Sistemas de EDOs

El método de Euler se define como:

$$y_{i+1} = y_i + k_1 h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$



1 El método de RK1: Euler

2 Métodos de RK2
- El método de Heun
- El método del punto medio
- El método de Ralston

3 Métodos de RK3, RK4 y RK5

4 Sistemas de EDOs

1 El método de RK1: Euler

2 Métodos de RK2
- El método de Heun
- El método del punto medio
- El método de Ralston

3 Métodos de RK3, RK4 y RK5

4 Sistemas de EDOs

El método de Heun

El método de Heun se define como:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

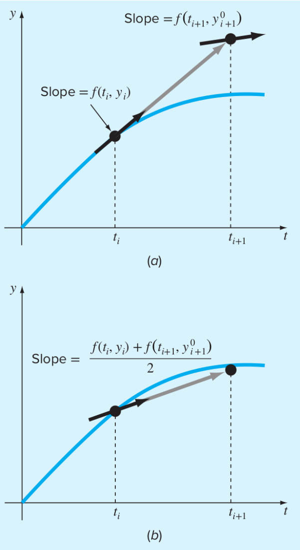
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

Proceso de corrección

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(t_i, y_i)h$$

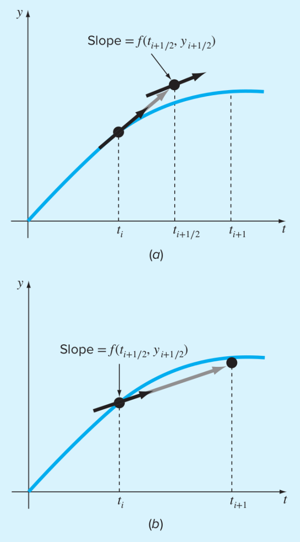
$$y_{i+1}^{j+1} = y_i^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f(t_i, y_{i+1}^j)}{2}$$



1. El método de RK1: Euler
2. Métodos de RK2
   - El método de Heun
   - El método del punto medio
   - El método de Ralston
3. Métodos de RK3, RK4 y RK5
4. Sistemas de EDOs

El método del punto medio se define como:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + k_2 h \\
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)
\end{aligned}
$$



1 El método de RK1: Euler

2 Métodos de RK2
- El método de Heun
- El método del punto medio
- El método de Ralston

3 Métodos de RK3, RK4 y RK5

4 Sistemas de EDOs

El método de Ralston

El método de Ralston se define como:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Este método asegura una cota de error mínima[1]

El método de Ralston

El método de Ralston se define como:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Este método asegura una cota de error mínima[1]

1 El método de RK1: Euler

2 Métodos de RK2
- El método de Heun
- El método del punto medio
- El método de Ralston

3 Métodos de RK3, RK4 y RK5

4 Sistemas de EDOs

El método de RK3

El método RK3 más conocido resulta en

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right)
\end{aligned}$$

El método de RK4

El método RK4 más conocido resulta en

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

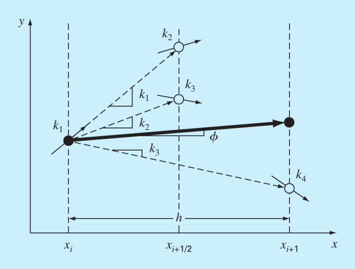
donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)$$



El método de RK5

El método RK5 está dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_1 h + k_3 h\right) \\
k_5 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h\right) \\
k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1 h + \frac{2}{7}k_2 h + \frac{12}{7}k_3 h - \frac{12}{7}k_4 h + \frac{8}{7}k_5 h\right)
\end{aligned}$$

1 El método de RK1: Euler

2 Métodos de RK2
- El método de Heun
- El método del punto medio
- El método de Ralston

3 Métodos de RK3, RK4 y RK5

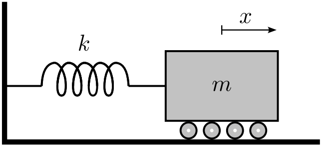
4 Sistemas de EDOs

Programando sistemas de EDOs: ejemplo 1

Resuelva la EDO que describe el sistema masa-resorte de la figura usando el método de Newmark usando $h = 1$ s.

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

La velocidad inicial del sistema es cero y su posición inicial 1 m. Asuma que $k = 1$ y $m = 1$.



Solución teórica

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Programando sistemas de EDOs: ejemplo 2

Las ecuaciones de Lotka-Volterra describen la interacción entre una población de presas y predadores. La ecuación tiene la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

donde x e y denotan el número de presas y predadores respectivamente, a la tasa de reproducción de las presas, c la tasa de muerte de los predadores y b y d tasas que caracterizan el efecto de la interacción predador-presa en la muerte de las presas y reproducción de los predadores.
Utilice valores los siguientes valores para su simulación: $a = 1.2$, $b = 0.6$, $c = 0.8$ y $d = 0.3$.