

Experimentación en un Motor DC ante un Voltaje de Entrada y una Resistencia de Armadura

Bastian Quiero, Emilio Álvarez, Joaquín Toro

June 24, 2024

Contents

1	Introducción	2
2	Motor de Corriente Continua	2
3	Ecuaciones Diferenciales	2
3.1	Origen de las Ecuaciones Diferenciales	2
3.2	Desarrollo de las Ecuaciones del Motor DC	3
3.2.1	Ley de Kirchhoff (LKV)	3
3.2.2	2ª Ley de Newton Rotacional	3
3.2.3	Posición Angular	4
4	Comparación de Métodos Numéricos	4
4.1	Métodos Numéricos Implementados	4
4.1.1	Método de Runge-Kutta de Segundo Orden (RK2)	4
4.1.2	Método de Runge-Kutta de Tercer Orden (RK3)	5
4.1.3	Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)	5
4.2	Resultados Comparativos	5
5	Comentario General sobre los Resultados	7
6	Problemas Propuestos	7
6.1	Contexto y Propósito de los Experimentos	7
6.2	Problema 1: Variación del Voltaje de Alimentación	8
6.2.1	Desarrollo	8
6.2.2	Resultados y Gráficos	8
6.3	Problema 2: Variación de la Resistencia de Armadura	10
6.3.1	Desarrollo	10
6.3.2	Resultados y Gráficos	11
7	Conclusión	13

1 Introducción

En este informe se investigan y experimentan diferentes tipos de voltajes y resistencias de armadura que afectan el desempeño de un motor de corriente continua (DC). Los parámetros clave, como la corriente de armadura y la velocidad angular, se observarán bajo distintas condiciones de voltaje de entrada y resistencia de armadura. El objetivo es comprender cómo estos factores influyen en el rendimiento y eficiencia del motor DC.

Para realizar el experimento, se utilizó un código en Python que implementa diversos métodos numéricos (RK2, RK3, RK4) para resolver las ecuaciones diferenciales que modelan los parámetros de un motor de corriente continua. La precisión de estos métodos numéricos se evaluará y comparará con una solución de referencia.

2 Motor de Corriente Continua

El motor de corriente continua (DC) transforma la energía eléctrica en energía mecánica mediante el principio de inducción electromagnética. Sus componentes principales son:

- **Carcasa de metal (estator):** Protege los componentes internos y disipa el calor.
- **Eje:** Transfiere la energía mecánica fuera del motor.
- **Terminales:** Puntos de conexión eléctrica del motor.
- **Imanes:** Generan el campo magnético principal del motor.
- **Rotor:** Compuesto por hojas laminadas, bobinas y conmutador.

3 Ecuaciones Diferenciales

3.1 Origen de las Ecuaciones Diferenciales

El motor de corriente continua (DC) es un dispositivo electromecánico que convierte la energía eléctrica en energía mecánica a través de la interacción de corrientes eléctricas y campos magnéticos. Es ampliamente utilizado en aplicaciones donde se requiere control preciso de velocidad y torque. Para entender el comportamiento dinámico de un motor DC, se utilizan ecuaciones diferenciales que describen las relaciones entre las variables eléctricas y mecánicas.

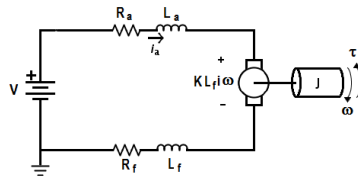


Figure 1: Diagrama de un Motor de Corriente Continua (DC)

3.2 Desarrollo de las Ecuaciones del Motor DC

Las ecuaciones que modelan el funcionamiento de un motor DC se basan en las leyes de Kirchhoff y la dinámica rotacional de Newton. A continuación, se desarrollan estas ecuaciones en detalle.

3.2.1 Ley de Kirchhoff (LKV)

Para analizar el circuito eléctrico del motor, aplicamos la Ley de Kirchhoff de Voltajes (LKV) a la armadura del motor. La ecuación diferencial que describe la dinámica del circuito es:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = V_s - R_a i_a - V_{Ea} \quad (1)$$

donde:

- L_a es la inductancia de la armadura.
- i_a es la corriente de armadura.
- V_s es el voltaje de suministro.
- R_a es la resistencia de armadura.
- V_{Ea} es el voltaje inducido en la armadura, también conocido como fuerza electromotriz (FEM).

El voltaje inducido V_{Ea} está relacionado con la velocidad angular del motor ω_m por la siguiente relación:

$$V_{Ea} = K_b \omega_m \quad (2)$$

donde K_b es la constante de FEM del motor.

Sustituyendo V_{Ea} en la ecuación de Kirchhoff, obtenemos:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = V_s - R_a i_a - K_b \omega_m \quad (3)$$

3.2.2 2ª Ley de Newton Rotacional

La dinámica rotacional del motor se describe mediante la segunda ley de Newton aplicada a la rotación:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = T_m - T_b \quad (4)$$

donde:

- J es el momento de inercia del rotor.
- ω_m es la velocidad angular del motor.
- T_m es el torque desarrollado por el motor.
- T_b es el torque de carga.

El torque desarrollado T_m está relacionado con la corriente de armadura i_a por la constante de torque K_t :

$$T_m = K_t i_a \quad (5)$$

Sustituyendo T_m en la ecuación de Newton, obtenemos:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} = K_t i_a - T_b \quad (6)$$

La solución analítica de esta ecuación diferencial es:

$$\omega_m(t) = \frac{K_m V_t}{B R_a} \left(1 - e^{-\frac{Bt}{J}}\right) - \frac{K_m V_t L_a}{(B L_a - J R_a) R_a} \left(e^{-\frac{R_a t}{L_a}} - e^{-\frac{Bt}{J}}\right) \quad (7)$$

3.2.3 Posición Angular

La posición angular $\theta(t)$ se obtiene integrando la velocidad angular $\omega_m(t)$:

$$\theta(t) = \int \omega_m(t) dt \quad (8)$$

Estas ecuaciones diferenciales proporcionan un modelo completo del comportamiento dinámico del motor de corriente continua, permitiendo analizar cómo varían sus variables en función del tiempo bajo diferentes condiciones de operación.

4 Comparación de Métodos Numéricos

Para evaluar la precisión de los métodos numéricos RK2, RK3 y RK4, se implementaron en Python para resolver las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del motor DC. Los resultados se compararon con una solución de referencia obtenida utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4) con un paso de tiempo muy pequeño (0.0001 s). A continuación, se detalla la implementación y los resultados obtenidos.

4.1 Métodos Numéricos Implementados

Los métodos numéricos de Runge-Kutta son técnicas de integración para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Cada método ofrece un balance entre precisión y recursos computacionales necesarios. A continuación, se describen los métodos RK2, RK3 y RK4 implementados en este estudio.

4.1.1 Método de Runge-Kutta de Segundo Orden (RK2)

El método RK2, también conocido como método del punto medio, es una mejora sobre el método de Euler. Utiliza dos estimaciones del valor de la derivada para calcular el valor de la función en el siguiente paso de tiempo. La fórmula general es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (9)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, y_n) \Delta t \quad (10)$$

$$k_2 = f(t_n + \Delta t, y_n + k_1)\Delta t \quad (11)$$

Este método mejora la precisión respecto al método de Euler al promediar dos estimaciones de la pendiente.

4.1.2 Método de Runge-Kutta de Tercer Orden (RK3)

El método RK3 es un compromiso entre precisión y eficiencia computacional. Utiliza tres estimaciones del valor de la derivada para calcular el valor de la función en el siguiente paso de tiempo. La fórmula general es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (12)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, y_n)\Delta t \quad (13)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1)\Delta t \quad (14)$$

$$k_3 = f(t_n + \Delta t, y_n - k_1 + 2k_2)\Delta t \quad (15)$$

Este método ofrece una mayor precisión que RK2 al utilizar una combinación ponderada de tres estimaciones de la pendiente.

4.1.3 Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)

El método RK4 es uno de los más utilizados debido a su alta precisión. Utiliza cuatro estimaciones del valor de la derivada para calcular el valor de la función en el siguiente paso de tiempo. La fórmula general es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (16)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, y_n)\Delta t \quad (17)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1)\Delta t \quad (18)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_2)\Delta t \quad (19)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + k_3)\Delta t \quad (20)$$

Este método proporciona la mayor precisión de los tres métodos analizados, a costa de una mayor complejidad computacional.

4.2 Resultados Comparativos

Se realizaron simulaciones numéricas con los métodos RK2, RK3 y RK4 para resolver las ecuaciones diferenciales del motor DC. Los resultados obtenidos se compararon con una referencia obtenida usando RK4 con un paso de tiempo muy pequeño.

article graphix float

Table 1: Comparación de Métodos Numéricos con el Referencial (Velocidad Angular)

Tiempo (s)	RK2 (Velocidad Angular)	RK3 (Velocidad Angular)	RK4 (Velocidad Angular)	Referencial
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.05	1.23991	1.26872	1.27749	1.27843
0.10	3.51654	3.55938	3.57211	3.57106
0.15	5.87929	5.92422	5.93742	5.93656
0.20	8.23742	8.28241	8.29553	8.29410
0.25	10.58235	10.62713	10.64009	10.63824
0.30	12.91333	12.95786	12.97067	12.96855
0.35	15.23036	15.27465	15.28730	15.28505
0.40	17.53352	17.57756	17.59007	17.58764
0.45	19.82290	19.86670	19.87905	19.87636
0.50	22.09857	22.14213	22.15433	22.15146
Error Absoluto Promedio	0.28818	0.24811	0.23652	

Table 2: Comparación de Métodos Numéricos con el Referencial (Corriente de Armadura)

Tiempo (s)	RK2 (Corriente Armadura)	RK3 (Corriente Armadura)	RK4 (Corriente Armadura)	Referencial
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.05	43.41337	43.89936	44.04243	44.04328
0.10	47.51693	47.60334	47.62688	47.61839
0.15	47.86586	47.87603	47.87852	47.86855
0.20	47.85641	47.85605	47.85586	47.84576
0.25	47.81297	47.81134	47.81085	47.80081
0.30	47.76655	47.76479	47.76427	47.75429
0.35	47.72009	47.71832	47.71781	47.70790
0.40	47.67389	47.67212	47.67161	47.66177
0.45	47.62795	47.62620	47.62569	47.61592
0.50	47.58229	47.58055	47.58005	47.57034
Error Absoluto Promedio	0.12246	0.03344	0.00907	

Table 3: Comparación de Métodos Numéricos con el Referencial (Posición Angular)

Tiempo (s)	RK2 (Posición Angular)	RK3 (Posición Angular)	RK4 (Posición Angular)	Referencial
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.05	0.01486	0.01530	0.01544	0.02943
0.10	0.12149	0.12375	0.12443	0.16216
0.15	0.34454	0.34899	0.35033	0.41246
0.20	0.68572	0.69242	0.69441	0.78084
0.25	1.14454	1.15349	1.15613	1.26669
0.30	1.72033	1.73152	1.73480	1.86932
0.35	2.41240	2.42580	2.42973	2.58804
0.40	3.22003	3.23565	3.24020	3.42214
0.45	4.14255	4.16036	4.16554	4.37094
0.50	5.17926	5.19926	5.20505	5.43375
Error Absoluto Promedio	0.12216	0.11308	0.11042	

Table 4: Comparación de Métodos Numéricos con el Referencial (Torque)

Tiempo (s)	RK2 (Torque)	RK3 (Torque)	RK4 (Torque)	Referencial
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.05	0.43413	0.43899	0.44042	0.44043
0.10	0.47517	0.47603	0.47627	0.47618
0.15	0.47866	0.47876	0.47879	0.47869
0.20	0.47856	0.47856	0.47856	0.47846
0.25	0.47813	0.47811	0.47811	0.47801
0.30	0.47767	0.47765	0.47764	0.47754
0.35	0.47720	0.47718	0.47718	0.47708
0.40	0.47674	0.47672	0.47672	0.47662
0.45	0.47628	0.47626	0.47626	0.47616
0.50	0.47582	0.47581	0.47580	0.47570
Error Absoluto Promedio	0.00122	0.00033	0.00009	

5 Comentario General sobre los Resultados

Los resultados obtenidos en las tablas de comparación de métodos numéricos para la corriente de armadura, la velocidad angular, el torque y la posición angular demuestran consistentemente que el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) es el más preciso entre los métodos analizados. A continuación se resumen los puntos clave observados:

- **RK2:** Este método, aunque menos preciso, es útil para obtener resultados rápidamente con una menor carga computacional. Sin embargo, los errores absolutos promedios más altos en todas las variables indican que este método puede no ser adecuado para aplicaciones que requieren alta precisión.
- **RK3:** El método de tercer orden proporciona un equilibrio adecuado entre precisión y eficiencia computacional. Presenta errores absolutos promedios menores que RK2, lo que lo hace una mejor opción cuando se necesita una precisión razonable sin un costo computacional elevado.
- **RK4:** Consistentemente, el método de cuarto orden demuestra ser el más preciso en todas las comparaciones. Los errores absolutos promedios más bajos en las variables de corriente de armadura, velocidad angular, torque y posición angular confirman que RK4 es ideal para aplicaciones donde la precisión es crucial, a pesar de su mayor complejidad computacional.

En conclusión, aunque RK2 y RK3 ofrecen ventajas en términos de eficiencia computacional, RK4 es la mejor opción para obtener resultados precisos y confiables en la simulación del comportamiento dinámico de un motor de corriente continua (DC). La elección del método numérico adecuado dependerá del equilibrio requerido entre precisión y recursos computacionales disponibles en cada aplicación específica.

6 Problemas Propuestos

Se propone analizar la sensibilidad del motor eléctrico respecto a dos parámetros principales:

- Variación del voltaje de alimentación (V_t)
- Variación de la resistencia de armadura (R_a)

6.1 Contexto y Propósito de los Experimentos

Estos experimentos se realizan en el contexto de optimización y control de motores eléctricos. Los objetivos principales son:

- **Optimización del Diseño del Motor:** Permite diseñar motores más eficientes y seleccionar componentes adecuados.
- **Mejora del Control del Motor:** Facilita el ajuste de algoritmos de control para mantener el motor en su punto de operación óptimo y mejorar la adaptabilidad a cambios en las condiciones de carga o suministro eléctrico.

- **Aumento de la Fiabilidad y Durabilidad:** Ayuda a desarrollar sistemas de diagnóstico para detectar fallos o degradación en componentes, y ajustar las condiciones operativas del motor para reducir el desgaste y extender su vida útil.
- **Seguridad Operacional:** Establece límites seguros de operación y permite respuestas rápidas a cambios inesperados en las condiciones operativas.
- **Desarrollo de Nuevas Tecnologías:** Proporciona información valiosa para el desarrollo de nuevas tecnologías y métodos de control, optimizando el consumo de energía y mejorando la eficiencia operativa.

6.2 Problema 1: Variación del Voltaje de Alimentación

6.2.1 Desarrollo

Para analizar cómo las variaciones en el voltaje de alimentación afectan las variables del motor (corriente de armadura, velocidad angular, posición angular y torque), se utilizó un método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4) con un paso de tiempo muy pequeño (0.0001 s) para obtener una solución de referencia precisa. Luego, se variaron los voltajes dentro del rango de 20 V a 28 V.

6.2.2 Resultados y Gráficos

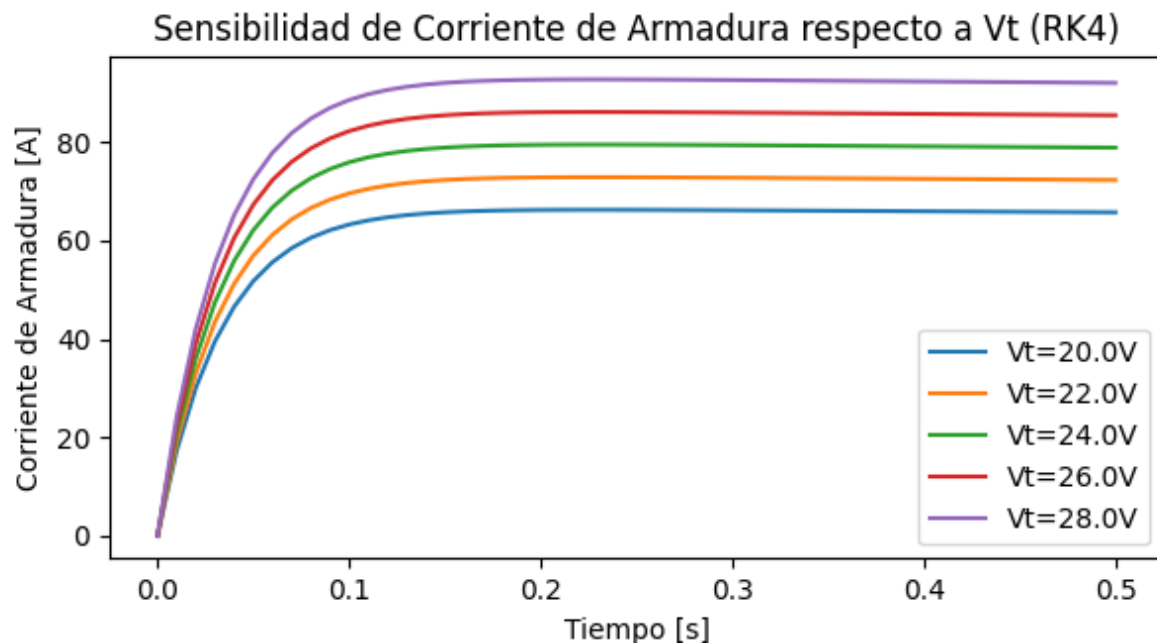


Figure 2: Sensibilidad de Corriente de Armadura respecto a V_t

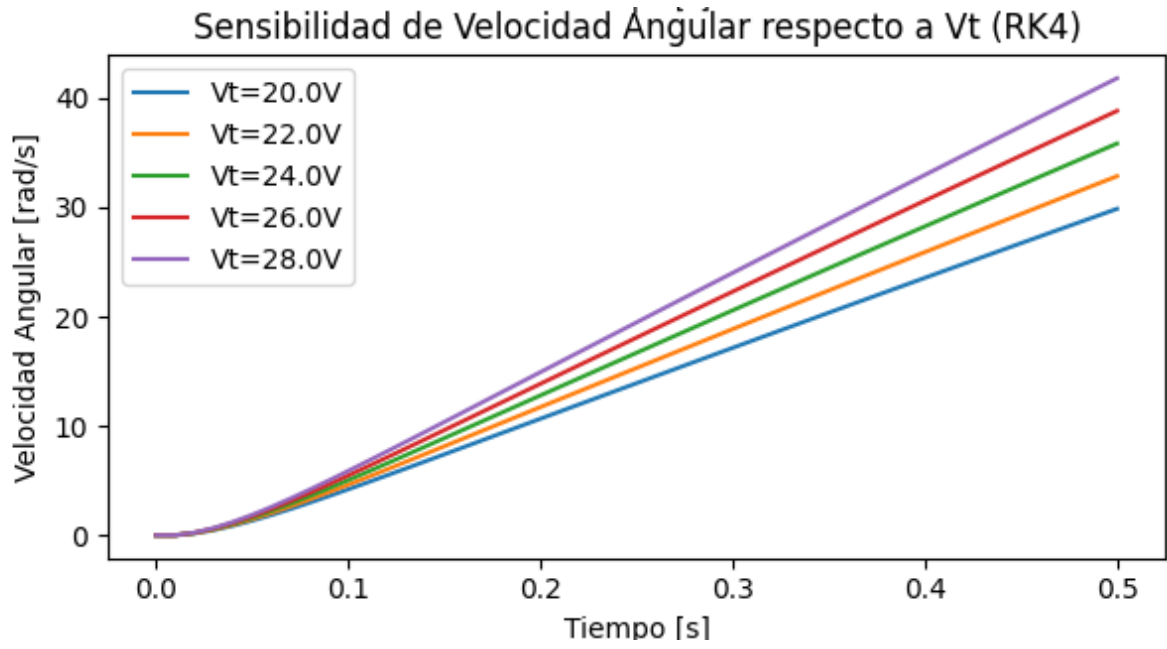


Figure 3: Sensibilidad de Velocidad Angular respecto a V_t

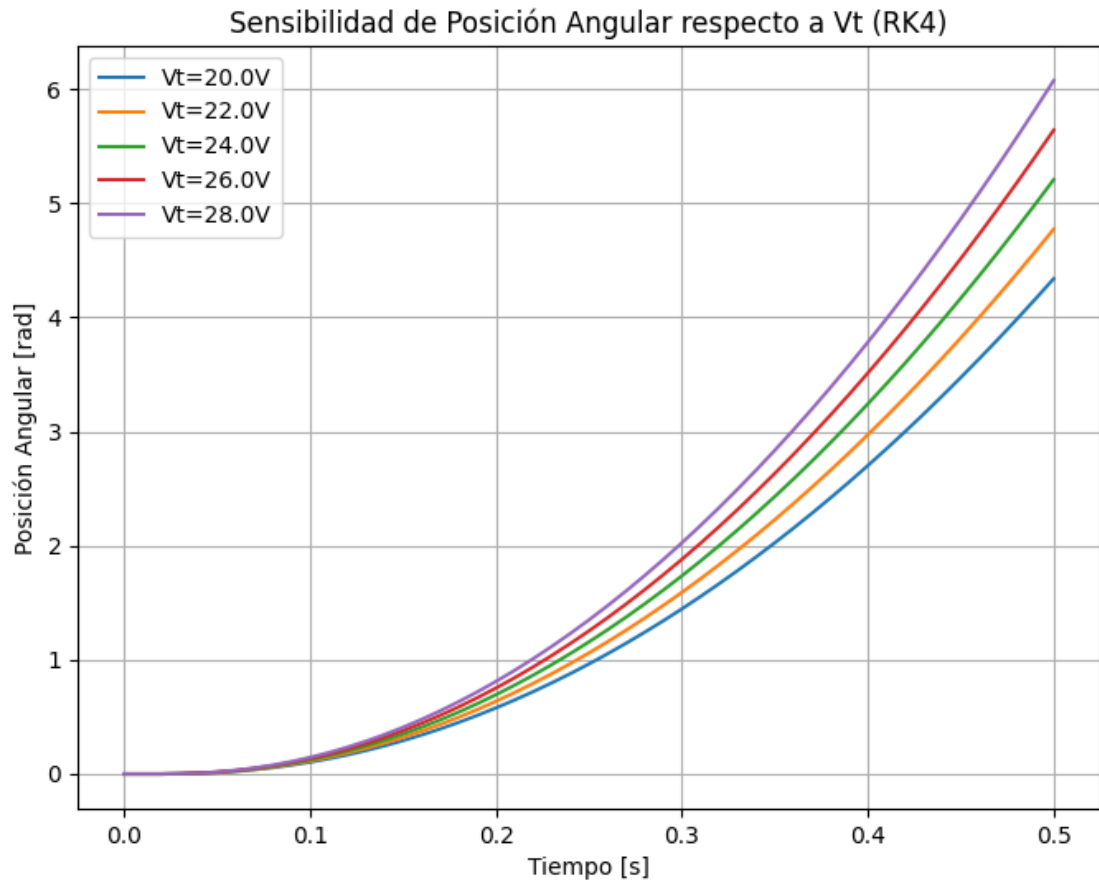


Figure 4: Sensibilidad de Posición Angular respecto a V_t

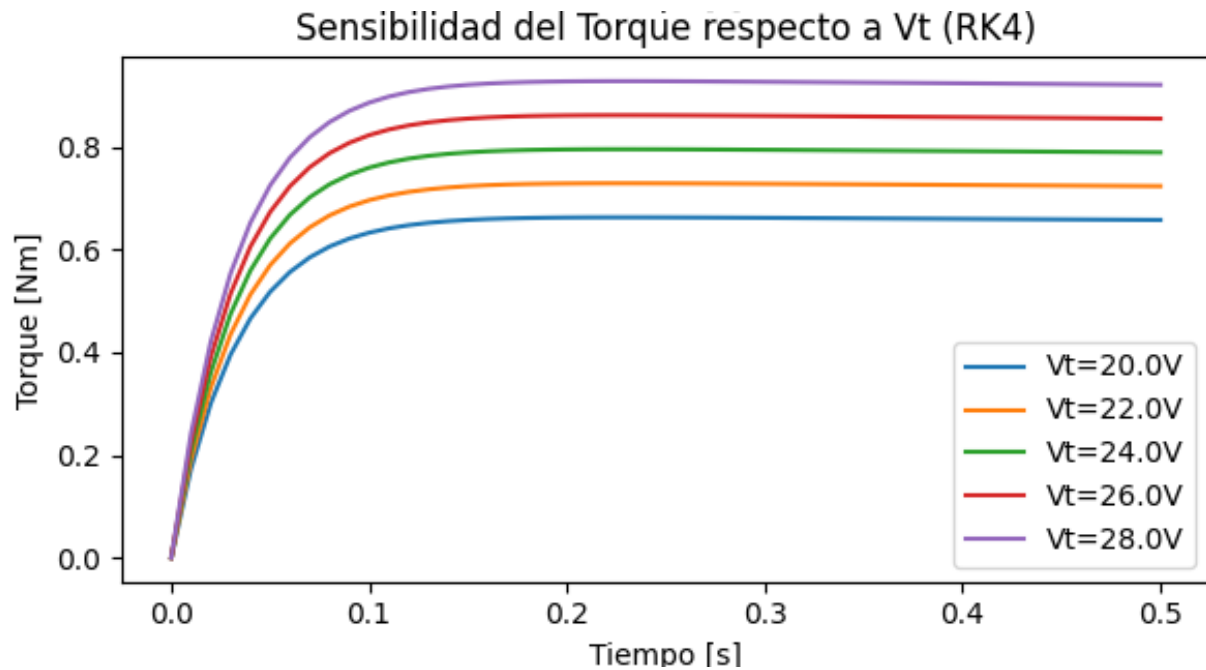


Figure 5: Sensibilidad del Torque respecto a V_t

Los gráficos muestran cómo las variaciones en el voltaje de alimentación afectan las distintas variables del motor. A medida que aumenta el voltaje, la corriente de armadura y el torque también aumentan, lo que se refleja en una mayor velocidad angular y posición angular.

6.3 Problema 2: Variación de la Resistencia de Armadura

6.3.1 Desarrollo

Para analizar cómo las variaciones en la resistencia de armadura afectan las variables del motor, se utilizó el mismo método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4) con un paso de tiempo muy pequeño. Se variaron las resistencias dentro del rango de 0.3 a 0.7 .

6.3.2 Resultados y Gráficos

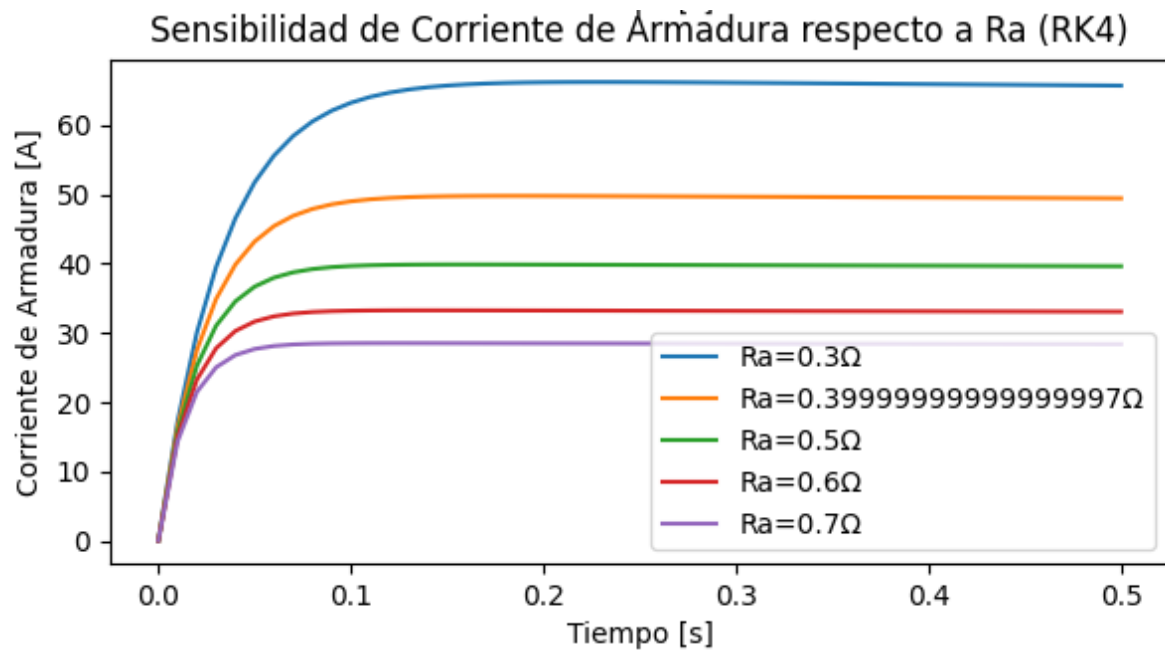


Figure 6: Sensibilidad de Corriente de Armadura respecto a R_a

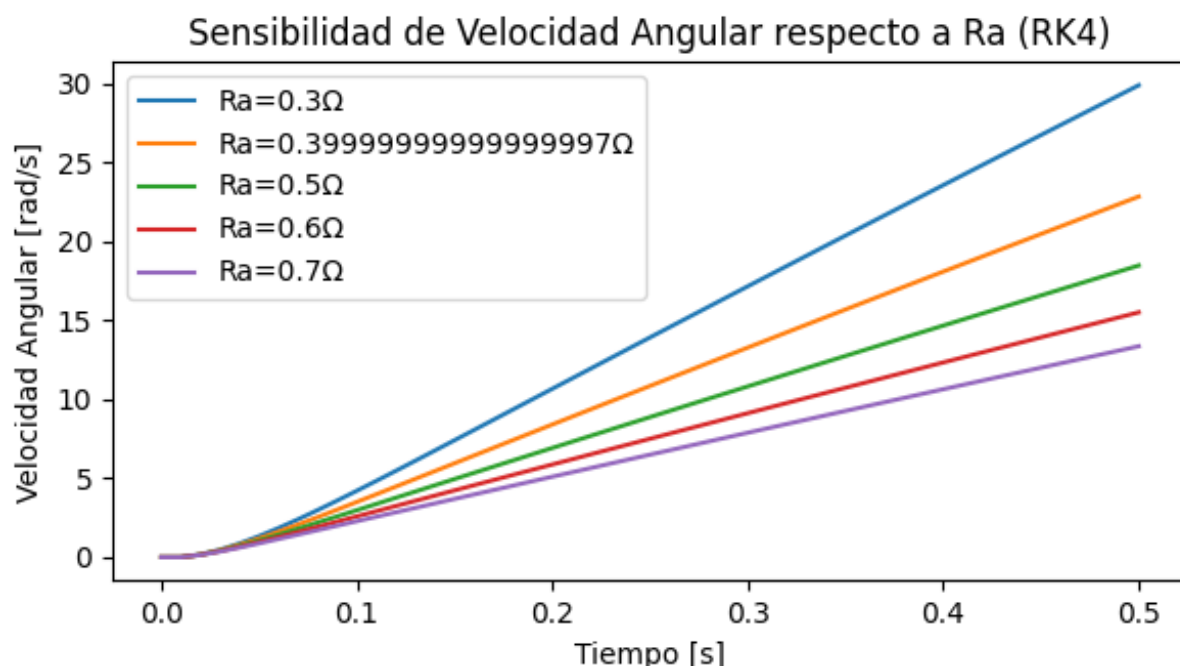


Figure 7: Sensibilidad de Velocidad Angular respecto a R_a

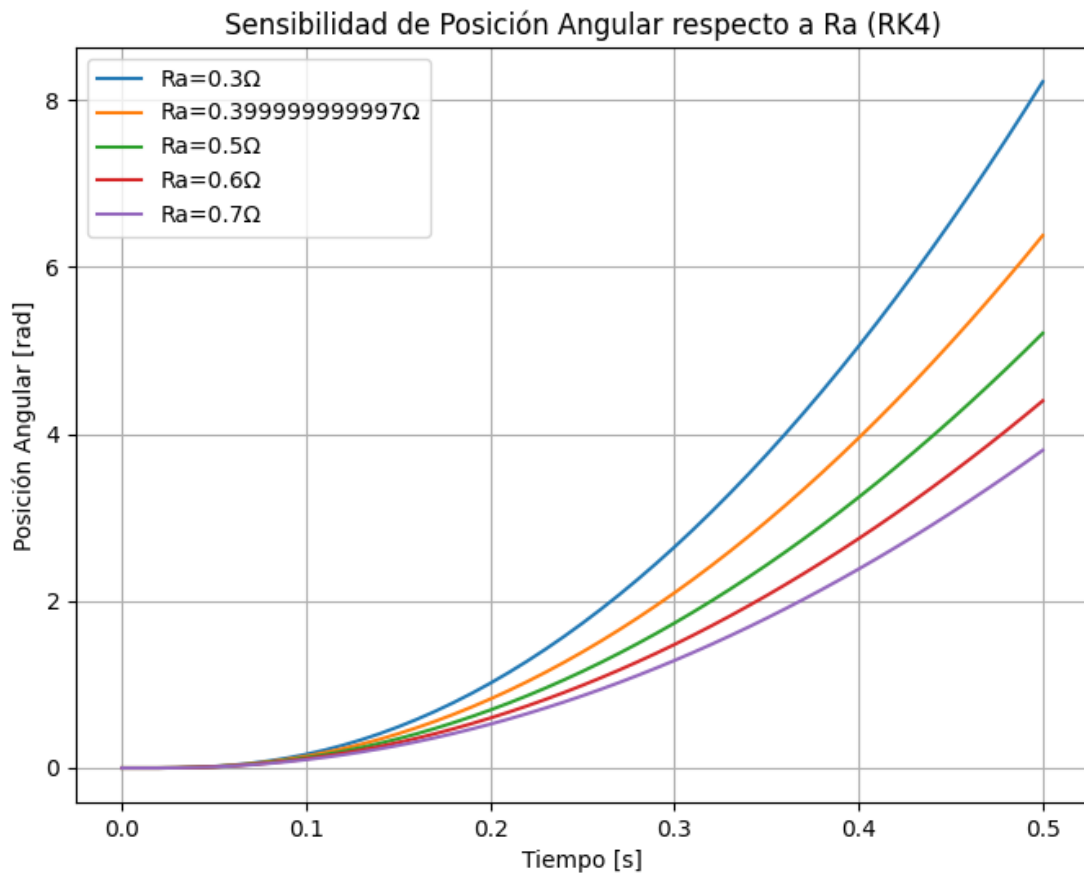


Figure 8: Sensibilidad de Posición Angular respecto a R_a

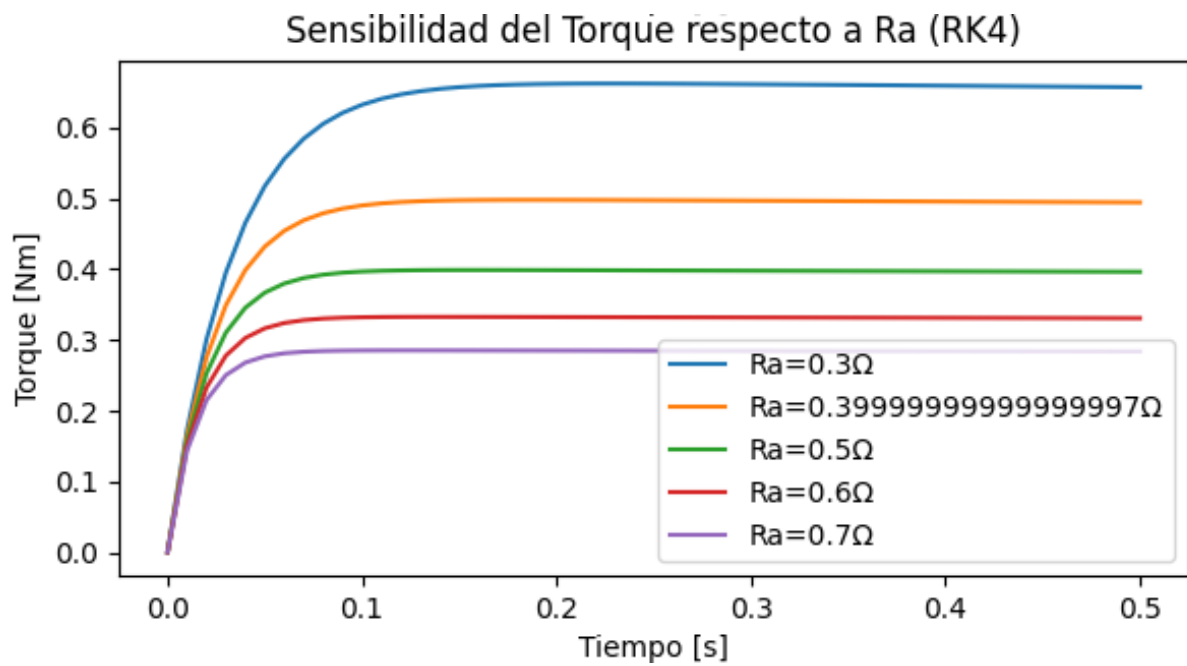


Figure 9: Sensibilidad del Torque respecto a R_a

Los gráficos muestran cómo las variaciones en la resistencia de armadura afectan las distintas variables del motor. A medida que aumenta la resistencia, la corriente de armadura y el torque disminuyen, lo que se refleja en una menor velocidad angular y posición angular.

7 Conclusión

En ambos análisis, se puede observar que:

- La corriente de armadura y el torque aumentan con un mayor voltaje de alimentación y disminuyen con una mayor resistencia de armadura.
- La velocidad angular y la posición angular también son directamente afectadas por el voltaje y la resistencia de armadura.
- El método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4) proporciona resultados más precisos en comparación con RK2 y RK3, con menores errores absolutos.

Estos experimentos son cruciales para optimizar el diseño, control y mantenimiento de motores eléctricos, asegurando su rendimiento, fiabilidad y eficiencia operativa. La implementación de métodos numéricos precisos como RK4 en la simulación de motores DC permite una mejor comprensión de su comportamiento bajo diferentes condiciones, lo que es fundamental para el desarrollo de sistemas más eficientes y robustos.

En resumen, el análisis y comparación de diferentes métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales de un motor de corriente continua revela la importancia de seleccionar el método adecuado según las necesidades de precisión y recursos computacionales disponibles. Este estudio no solo proporciona una visión clara de cómo el voltaje de alimentación y la resistencia de armadura afectan el rendimiento del motor, sino que también destaca la efectividad de los métodos numéricos avanzados en la simulación y optimización de sistemas eléctricos.