


# Clase 2: modelos matemáticos, fundamentos y resolución numérica de modelos


Hernán Mella


11 de marzo de 2024

EIE PUCV

# Objetivos de la unidad

Al finalizar esta unidad el estudiante podrá:

- Entender qué es y cómo describir un modelo matemático
- Comprender (superficialmente) sus posibles aplicaciones y limitaciones
- Utilizar herramientas básicas de Python para la resolución de modelos numéricos

# Entendiendo qué es un modelo matemático

Es una formulación/ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o proceso en términos matemáticos[1].

Los modelos matemáticos permiten estudiar el comportamiento de sistemas complejos

## Ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

## Ecuación de Schrodinger

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) + \frac{2m}{\bar{h}^2}\{E - V(\boldsymbol{r})\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

[1] Chapra & Canale. Numerical Methods for Engineers. 2015

# Entendiendo qué es un modelo matemático

Es una formulación/ecuación que expresa las características esenciales de un sistema físico o proceso en términos matemáticos[1].

Los modelos matemáticos permiten estudiar el comportamiento de sistemas complejos

## Ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

## Ecuación de Schrodinger

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) + \frac{2m}{\bar{h}^2}\{E - V(\boldsymbol{r})\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

[1] Chapra & Canale. Numerical Methods for Engineers. 2015

# Elementos de un modelo matemático

Un modelo matemático se compone por:

- Ecuaciones gobernantes
- Ecuaciones complementarias (ecuaciones constitutivas)
- Supuestos y restricciones (condiciones iniciales y de borde. Restricciones clásicas y cinemáticas)

## Ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

## Ecuación de Schrodinger

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\{E - V(\boldsymbol{r})\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

# Elementos de un modelo matemático

Un modelo matemático se compone por:

- Ecuaciones gobernantes
- Ecuaciones complementarias (ecuaciones constitutivas)
- Supuestos y restricciones (condiciones iniciales y de borde. Restricciones clásicas y cinemáticas)

## Ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

## Ecuación de Schrodinger

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\{E - V(\boldsymbol{r})\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

# Elementos de un modelo matemático

Un modelo matemático se compone por:

- Ecuaciones gobernantes
- Ecuaciones complementarias (ecuaciones constitutivas)
- Supuestos y restricciones (condiciones iniciales y de borde. Restricciones clásicas y cinemáticas)

## Ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

## Ecuación de Schrodinger

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) + \frac{2m}{\bar{h}^2}\{E - V(\boldsymbol{r})\}\psi(\boldsymbol{r}) = 0$$

# Elementos de un modelo matemático

Un modelo matemático se compone por:

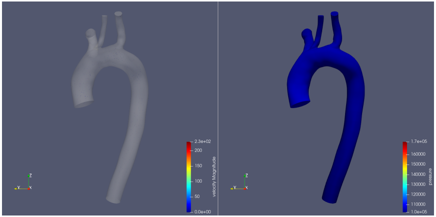
- Ecuaciones gobernantes
- Ecuaciones complementarias (ecuaciones constitutivas)
- Supuestos y restricciones (condiciones iniciales y de borde. Restricciones clásicas y cinemáticas)


$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \{\nabla \boldsymbol{u}\}^T)$$

# Elementos de un modelo matemático

Un modelo matemático se compone por:

- Ecuaciones gobernantes
- Ecuaciones complementarias (ecuaciones constitutivas)
- Supuestos y restricciones (condiciones iniciales y de borde. Restricciones clásicas y cinemáticas)




$$\rho\dot{v} + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - p\mathbf{I}$$

# Descripción de un modelo matemático

Un modelo matemático puede ser descrito como

$$\begin{array}{c}\text{Variable}\\ \text{dependiente}\end{array} = f\left(\begin{array}{c}\text{variables,}\\ \text{independientes}\end{array} \quad \text{parámetros,} \quad \begin{array}{c}\text{variables}\\ \text{externas}\end{array}\right)$$

donde

- La *variable dependiente* refleja el comportamiento o estado del sistema.
- Las *variables independientes* se refiere usualmente a dimensiones (x,t).
- Los *parámetros* reflejan la composición o propiedades del sistema.
- Las *variables externas* denotan influencias externas que actúan sobre el sistema.

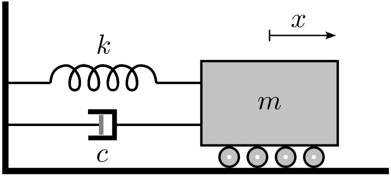
# Ejemplos de modelos matemáticos: sistema masa-resorte-amortiguador

Supongamos que tenemos un objeto de masa $m$ sujeto a un resorte de constante elástica $k$ y amortiguador con factor de amortiguamiento $c$.

No existe roce entre el objeto y el suelo.

El modelo que describe la posición $x$ de la masa se puede describir como:

$$x = f(t, k, c, m, F_{\text{ext}})$$



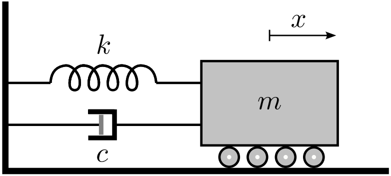
# Ejemplos de modelos matemáticos: sistema masa-resorte-amortiguador

Supongamos que tenemos un objeto de masa $m$ sujeto a un resorte de constante elástica $k$ y amortiguador con factor de amortiguamiento $c$.

No existe roce entre el objeto y el suelo.

El modelo que describe la posición $x$ de la masa se puede describir como:

$$x = f(t, k, c, m, F_{\text{ext}})$$



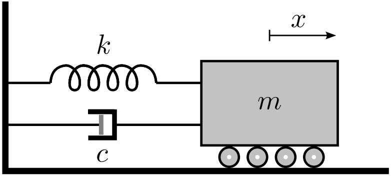
# Ejemplos de modelos matemáticos: sistema masa-resorte-amortiguador

Supongamos que tenemos un objeto de masa $m$ sujeto a un resorte de constante elástica $k$ y amortiguador con factor de amortiguamiento $c$.

No existe roce entre el objeto y el suelo.

El modelo que describe la posición $x$ de la masa se puede describir como:

$$x = f(t, k, c, m, F_{\text{ext}})$$



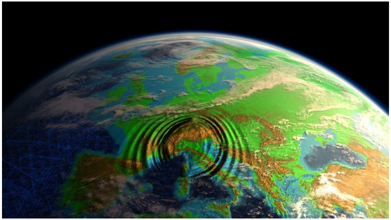
# Ejemplos de modelos matemáticos: propagación de ondas elásticas

Supongamos que tenemos un medio con módulo de elasticidad $E$, módulo de Poisson $\nu$ y densidad $\rho$.

Supongamos además que las deformaciones del medio son pequeñas (infinitesimales).

El modelo que describe el campo de desplazamientos $u$ del medio se puede describir como:

$$u = f(x, t, \rho, E, \nu, F_{\text{ext}})$$



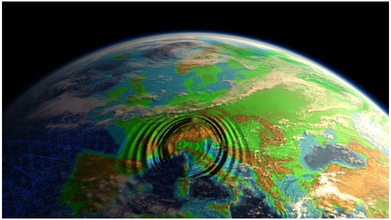
# Ejemplos de modelos matemáticos: propagación de ondas elásticas

Supongamos que tenemos un medio con módulo de elasticidad $E$, módulo de Poisson $\nu$ y densidad $\rho$.

Supongamos además que las deformaciones del medio son pequeñas (infinitesimales).

El modelo que describe el campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}$ del medio se puede describir como:

$$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{x}, t, \rho, E, \nu, F_{\text{ext}})$$



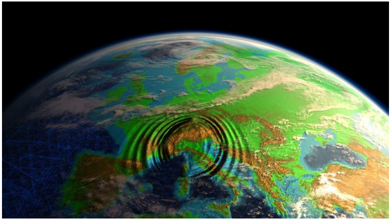
# Ejemplos de modelos matemáticos: propagación de ondas elásticas

Supongamos que tenemos un medio con módulo de elasticidad $E$, módulo de Poisson $\nu$ y densidad $\rho$.

Supongamos además que las deformaciones del medio son pequeñas (infinitesimales).

El modelo que describe el campo de desplazamientos $\boldsymbol{u}$ del medio se puede describir como:

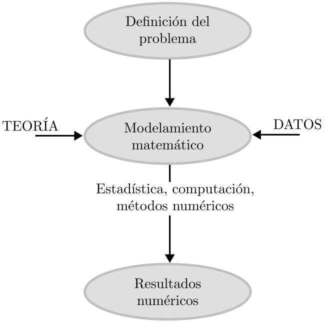
$$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{x}, t, \rho, E, \nu, F_{\text{ext}})$$



# Modelamiento matemático en la solución de problemas de ingeniería

Para definir un modelo matemático se debe:

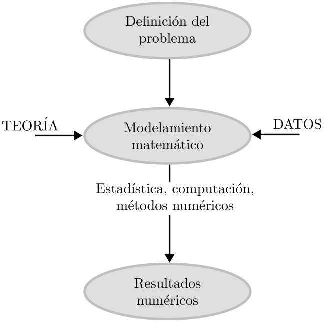
1. Identificar o definir el problema a resolver
2. Definir un modelo matemático basado en la teoría y observaciones
3. Utilizar herramientas de métodos numéricos, estadística y computación para aproximar su solución
4. Analizar/presentar resultados



# Modelamiento matemático en la solución de problemas de ingeniería

Para definir un modelo matemático se debe:

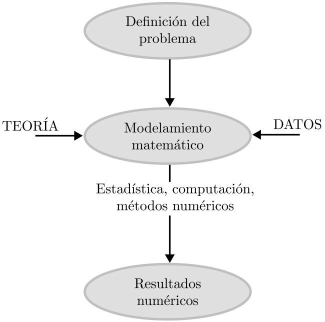
1. Identificar o definir el problema a resolver
2. Definir un modelo matemático basado en la teoría y observaciones
3. Utilizar herramientas de métodos numéricos, estadística y computación para aproximar su solución
4. Analizar/presentar resultados



# Modelamiento matemático en la solución de problemas de ingeniería

Para definir un modelo matemático se debe:

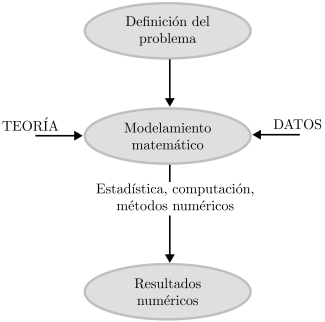
1. Identificar o definir el problema a resolver
2. Definir un modelo matemático basado en la teoría y observaciones
3. Utilizar herramientas de métodos numéricos, estadística y computación para aproximar su solución
4. Analizar/presentar resultados



# Modelamiento matemático en la solución de problemas de ingeniería

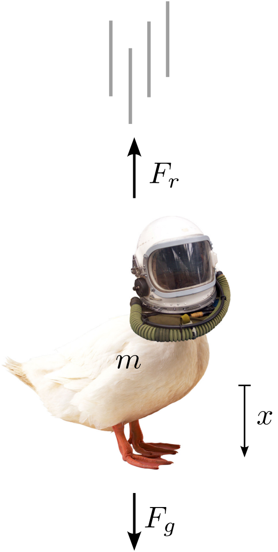
Para definir un modelo matemático se debe:

1. Identificar o definir el problema a resolver
2. Definir un modelo matemático basado en la teoría y observaciones
3. Utilizar herramientas de métodos numéricos, estadística y computación para aproximar su solución
4. Analizar/presentar resultados



# Un ejemplo simple: caída libre

Encontrar la velocidad de caida del pato de masa $m$ para cualquier instante de tiempo $t$ dado que cae a una velocidad inicial $v(0) = v_0$.
Sobre su cuerpo actúa la gravedad $g$ y la fuerza de resistencia del viento $F_r = cv(t)$.



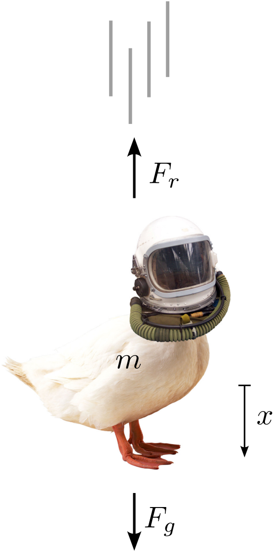
# Un ejemplo simple: caída libre (solución)

La ecuación diferencial se obtiene de plantear el equilibrio del sistema ($\sum F = ma$):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m} v(t)$$

Y su solución teórica está dada por

$$v(t) = v_0 \, e^{-(c/m)t} + \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$



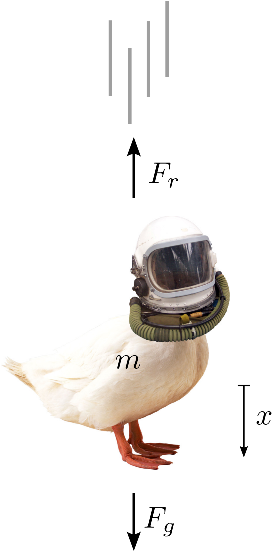
# Un ejemplo simple: caída libre (solución)

La ecuación diferencial se obtiene de plantear el equilibrio del sistema ($\sum F = ma$):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

Y su solución teórica está dada por

$$v(t) = v_0\, e^{-(c/m)t} + \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})$$



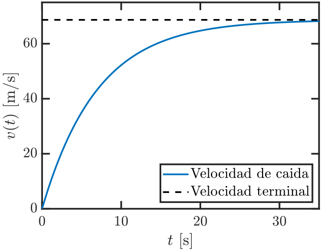
# Un ejemplo simple: caída libre (solución)

La ecuación diferencial se obtiene de plantear el equilibrio del sistema ($\sum F = ma$):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

Y su solución teórica está dada por

$$v(t) = v_0\, e^{-(c/m)t} + \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})$$




Solución obtenida con $m = 70$ kg, $g = 9.81$ m/s$^2$, $c = 10$ kg/s y $v_0 = 0$ m/s

1 Modelos matemáticos

2 Fundamentos del cálculo numérico

3 Resolución numérica de modelos

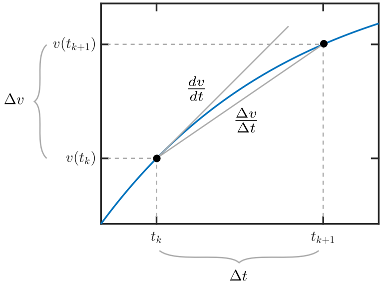
# La ecuación diferencial se puede aproximar usando datos discretos

Considerando tiempos discretos, una aproximación de la aceleración se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = g - \frac{c}{m} v(t_k)$$



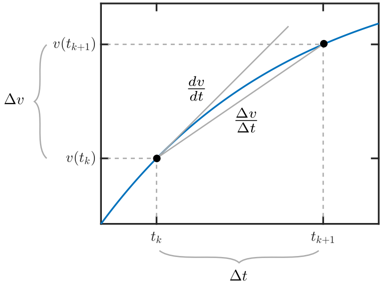
# La ecuación diferencial se puede aproximar usando datos discretos

Considerando tiempos discretos, una aproximación de la aceleración se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = g - \frac{c}{m} v(t_k)$$

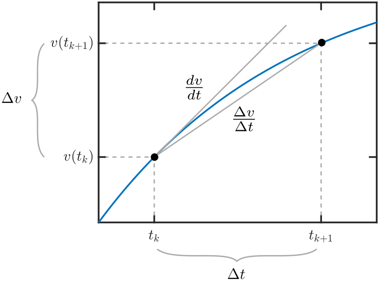


# Solución numérica de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial puede ser re-escrita de la siguiente forma:

$$v_{k+1} = v_k + \left(g - \frac{c}{m} v_k\right)(t_{k+1} - t_k)$$

y puede ser resuelta de manera iterativa.

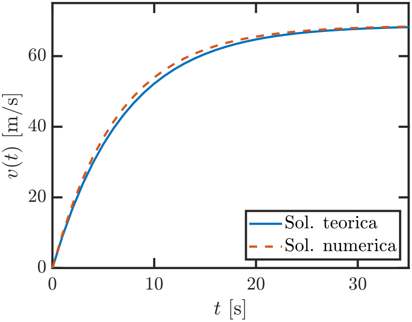


# Solución numérica de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial puede ser re-escrita de la siguiente forma:

$$v_{k+1} = v_k + \left(g - \frac{c}{m} v_k\right)(t_{k+1} - t_k)$$

y puede ser resuelta de manera iterativa.



# Repasemos

¿Qué son los modelos matemáticos y para qué sirven?

¿Cuál es la descripción general de un modelo matemático?

¿Cómo podemos definir un modelo matemático?. ¿Cuáles son los pasos a seguir?

¿Podemos confiar a ciegas de las soluciones obtenidas a través de resoluciones numéricas?

# Repasemos

¿Qué son los modelos matemáticos y para qué sirven?

¿Cuál es la descripción general de un modelo matemático?

¿Cómo podemos definir un modelo matemático?. ¿Cuáles son los pasos a seguir?

¿Podemos confiar a ciegas de las soluciones obtenidas a través de resoluciones numéricas?

# Repasemos

¿Qué son los modelos matemáticos y para qué sirven?

¿Cuál es la descripción general de un modelo matemático?

¿Cómo podemos definir un modelo matemático?. ¿Cuáles son los pasos a seguir?

¿Podemos confiar a ciegas de las soluciones obtenidas a través de resoluciones numéricas?

# Repasemos

¿Qué son los modelos matemáticos y para qué sirven?

¿Cuál es la descripción general de un modelo matemático?

¿Cómo podemos definir un modelo matemático?. ¿Cuáles son los pasos a seguir?

¿Podemos confiar a ciegas de las soluciones obtenidas a través de resoluciones numéricas?