# Clase 5: resolviendo ODEs a través de métodos numéricos

Hernán Mella

2 de abril de 2024

EIE PUCV

Nos hemos enfocado en resolver:

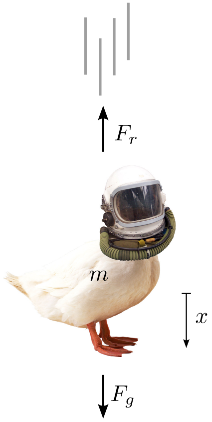
$$\dot{v}(t) = g - c/mv(t) \quad \text{(caída libre)}$$

Si la incógnita es una función se le llama "ecuación diferencial"

Cuando la ec. incorpora sólo una variable independiente se llama "ecuación diferencial ordinaria"

En caso contrario, se llama "ecuación diferencial parcial"

También se clasifican de acuerdo a la derivada de mayor orden



# Ecuaciones diferenciales ordinarias

Nos hemos enfocado en resolver:

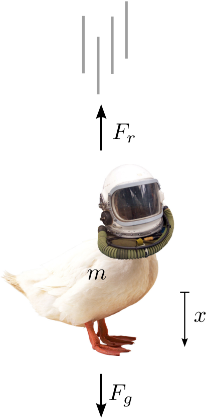
$$\dot{v}(t) = g - c/mv(t) \quad \text{(caída libre)}$$

Si la incógnita es una función se le llama "ecuación diferencial"

Cuando la ec. incorpora sólo una variable independiente se llama "ecuación diferencial ordinaria"

En caso contrario, se llama "ecuación diferencial parcial"

También se clasifican de acuerdo a la derivada de mayor orden



# Ecuaciones diferenciales ordinarias

Nos hemos enfocado en resolver:

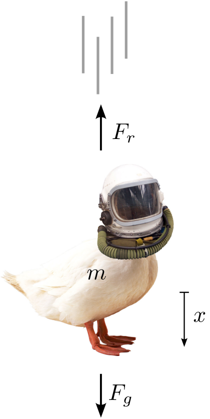
$$\dot{v}(t) = g - c/mv(t) \quad \text{(caída libre)}$$

Si la incógnita es una función se le llama "ecuación diferencial"

Cuando la ec. incorpora sólo una variable independiente se llama "ecuación diferencial ordinaria"

En caso contrario, se llama "ecuación diferencial parcial"

También se clasifican de acuerdo a la derivada de mayor orden



# Ecuaciones diferenciales ordinarias

Nos hemos enfocado en resolver:

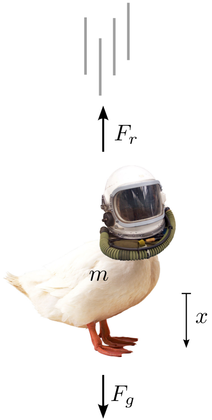
$$\dot{v}(t) = g - c/mv(t) \quad \text{(caída libre)}$$

Si la incógnita es una función se le llama "ecuación diferencial"

Cuando la ec. incorpora sólo una variable independiente se llama "ecuación diferencial ordinaria"

En caso contrario, se llama "ecuación diferencial parcial"

También se clasifican de acuerdo a la derivada de mayor orden



# Ecuaciones diferenciales ordinarias

Nos hemos enfocado en resolver:

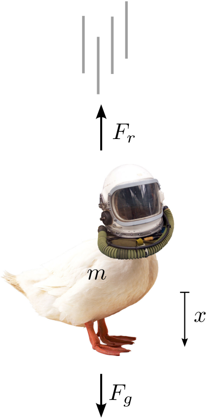
$$\dot{v}(t) = g - c/mv(t) \quad \text{(caída libre)}$$

Si la incógnita es una función se le llama "ecuación diferencial"

Cuando la ec. incorpora sólo una variable independiente se llama "ecuación diferencial ordinaria"

En caso contrario, se llama "ecuación diferencial parcial"

También se clasifican de acuerdo a la derivada de mayor orden



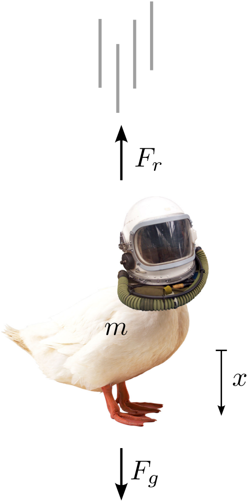
# Algunos ejemplos simples de EDOs de distinto orden

El problema de caída libre ($1^{er}$ orden):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

El sistema masa-resorte ($2^{do}$ orden):

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt}(t) + kx(t) = 0$$



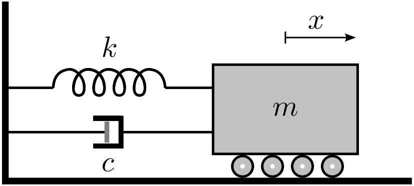
# Algunos ejemplos simples de EDOs de distinto orden

El problema de caída libre ($1^{er}$ orden):

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

El sistema masa-resorte ($2^{do}$ orden):

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{dx(t)}{dt}(t) + kx(t) = 0$$



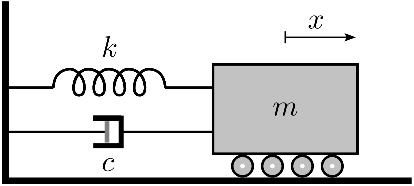
# El problema modelo

Nos enfocaremos sólo en problemas de primer orden

Todo problema de segundo orden se puede reducir a uno de primer orden

Por ejemplo, el sistema masa-resorte:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



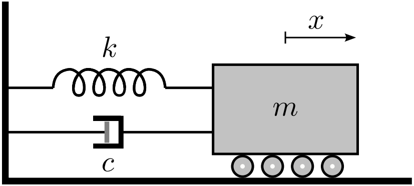
# El problema modelo

Nos enfocaremos sólo en problemas de primer orden

Todo problema de segundo orden se puede reducir a uno de primer orden

Por ejemplo, el sistema masa-resorte:

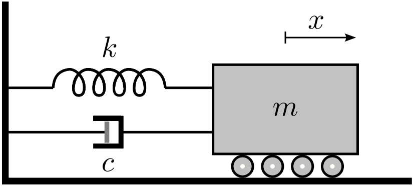
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



# El problema modelo

- Nos enfocaremos sólo en problemas de primer orden
- Todo problema de segundo orden se puede reducir a uno de primer orden
- Por ejemplo, el sistema masa-resorte:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$



# Cómo se resolvían las EDOs antes de los computadores

Muchas EDOs no tienen solución analítica

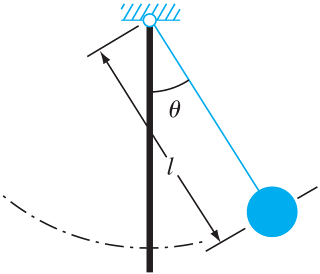
En estos casos la única alternativa viable son los métodos numéricos

Un método para resolver estos caso es la linearización

Una EDO linea tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Todas las EDOs lineales tienen solución analítica y la mayoría de las no-lineales no.



# Cómo se resolvían las EDOs antes de los computadores

Muchas EDOs no tienen solución analítica

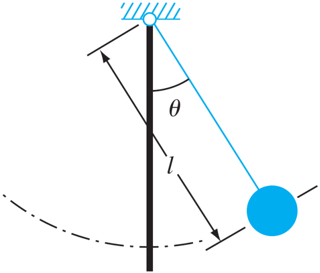
En estos casos la única alternativa viable son los métodos numéricos

Un método para resolver estos caso es la linearización

Una EDO linea tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Todas las EDOs lineales tienen solución analítica y la mayoría de las no-lineales no.



# Cómo se resolvían las EDOs antes de los computadores

Muchas EDOs no tienen solución analítica

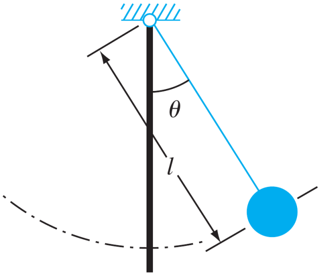
En estos casos la única alternativa viable son los métodos numéricos

Un método para resolver estos caso es la linearización

Una EDO linea tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Todas las EDOs lineales tienen solución analítica y la mayoría de las no-lineales no.



# Cómo se resolvían las EDOs antes de los computadores

Muchas EDOs no tienen solución analítica

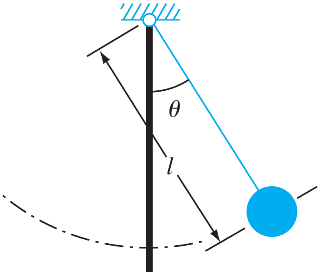
En estos casos la única alternativa viable son los métodos numéricos

Un método para resolver estos caso es la linearización

Una EDO linea tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Todas las EDOs lineales tienen solución analítica y la mayoría de las no-lineales no.



# Cómo se resolvían las EDOs antes de los computadores

Muchas EDOs no tienen solución analítica

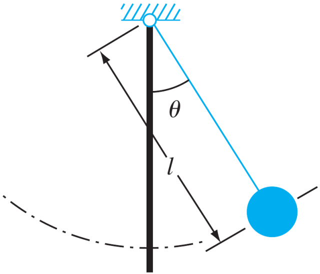
En estos casos la única alternativa viable son los métodos numéricos

Un método para resolver estos caso es la linearización

Una EDO linea tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

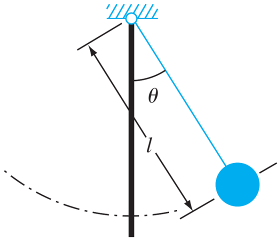
Todas las EDOs lineales tienen solución analítica y la mayoría de las no-lineales no.



# Resolviendo el movimiento de un péndulo por medio de la linealización

La ecuación que describe el movimiento de un péndulo es no-lineal

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$




Esta ec. es no-lineal producto del término $\sin(\theta)$

Para ángulos pequeños $\sin(\theta) \approx \theta$ y por lo tanto

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

es lineal y tiene solución analítica

Sin embargo la ec. anterior no es útil en todos los casos

# Resolviendo el movimiento de un péndulo por medio de la linealización

La ecuación que describe el movimiento de un péndulo es no-lineal

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

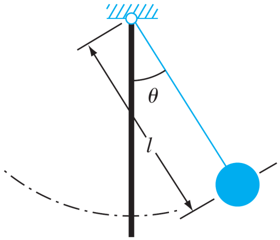
Esta ec. es no-lineal producto del término $\sin(\theta)$

Para ángulos pequeños $\sin(\theta) \approx \theta$ y por lo tanto

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

es lineal y tiene solución analítica

Sin embargo la ec. anterior no es útil en todos los casos



# Resolviendo el movimiento de un péndulo por medio de la linealización

La ecuación que describe el movimiento de un péndulo es no-lineal

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

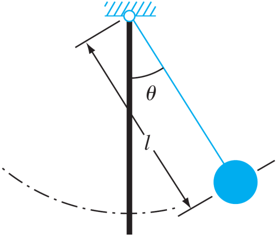
Esta ec. es no-lineal producto del término $\sin(\theta)$

Para ángulos pequeños $\sin(\theta) \approx \theta$ y por lo tanto

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

es lineal y tiene solución analítica

Sin embargo la ec. anterior no es útil en todos los casos



# Resolviendo el movimiento de un péndulo por medio de la linealización

La ecuación que describe el movimiento de un péndulo es no-lineal

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

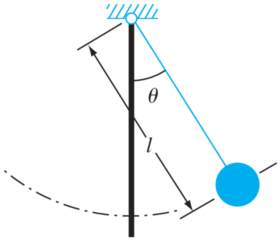
Esta ec. es no-lineal producto del término $\sin(\theta)$

Para ángulos pequeños $\sin(\theta) \approx \theta$ y por lo tanto

$$\frac{d^2\theta}{d\theta^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

es lineal y tiene solución analítica

Sin embargo la ec. anterior no es útil en todos los casos



# EDOs en la práctica ingenieril

Las leyes fundamentales de la física, mecánica, electricidad y termodinámica se basan en observaciones empíricas

Estas leyes explican variaciones en propiedades físicas y estados de sistemas

Se describen en base a tasas de cambio temporal y espacial

| Law | Mathematical Expression | Variables and Parameters |
|---|---|---|
| Newton's second law of motion | $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ | Velocity ($v$), force ($F$), and mass ($m$) |
| Fourier's heat law | $q = -k' \frac{dT}{dx}$ | Heat flux ($q$), thermal conductivity ($k'$) and temperature ($T$) |
| Fick's law of diffusion | $J = -D \frac{dc}{dx}$ | Mass flux ($J$), diffusion coefficient ($D$), and concentration ($c$) |
| Faraday's law (voltage drop across an inductor) | $\Delta V_L = L \frac{di}{dt}$ | Voltage drop ($\Delta V_L$), inductance ($L$), and current ($i$) |

# EDOs en la práctica ingenieril

- Las leyes fundamentales de la física, mecánica, electricidad y termodinámica se basan en observaciones empíricas
- Estas leyes explican variaciones en propiedades físicas y estados de sistemas
- Se describen en base a tasas de cambio temporal y espacial

| Law | Mathematical Expression | Variables and Parameters |
|---|---|---|
| Newton's second law of motion | $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ | Velocity ($v$), force ($F$), and mass ($m$) |
| Fourier's heat law | $q = -k' \frac{dT}{dx}$ | Heat flux ($q$), thermal conductivity ($k'$) and temperature ($T$) |
| Fick's law of diffusion | $J = -D \frac{dc}{dx}$ | Mass flux ($J$), diffusion coefficient ($D$), and concentration ($c$) |
| Faraday's law (voltage drop across an inductor) | $\Delta V_L = L \frac{di}{dt}$ | Voltage drop ($\Delta V_L$), inductance ($L$), and current ($i$) |

# EDOs en la práctica ingenieril

- Las leyes fundamentales de la física, mecánica, electricidad y termodinámica se basan en observaciones empíricas
- Estas leyes explican variaciones en propiedades físicas y estados de sistemas
- Se describen en base a tasas de cambio temporal y espacial

| Law | Mathematical Expression | Variables and Parameters |
|---|---|---|
| Newton's second law of motion | $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ | Velocity ($v$), force ($F$), and mass ($m$) |
| Fourier's heat law | $q = -k' \frac{dT}{dx}$ | Heat flux ($q$), thermal conductivity ($k'$) and temperature ($T$) |
| Fick's law of diffusion | $J = -D \frac{dc}{dx}$ | Mass flux ($J$), diffusion coefficient ($D$), and concentration ($c$) |
| Faraday's law (voltage drop across an inductor) | $\Delta V_L = L \frac{di}{dt}$ | Voltage drop ($\Delta V_L$), inductance ($L$), and current ($i$) |

# EDOs en la práctica ingenieril

- Las leyes fundamentales de la física, mecánica, electricidad y termodinámica se basan en observaciones empíricas
- Estas leyes explican variaciones en propiedades físicas y estados de sistemas
- Se describen en base a tasas de cambio temporal y espacial

| **Law** | **Mathematical Expression** | **Variables and Parameters** |
|---|---|---|
| Newton's second law of motion | $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ | Velocity ($v$), force ($F$), and mass ($m$) |
| Fourier's heat law | $q = -k' \frac{dT}{dx}$ | Heat flux ($q$), thermal conductivity ($k'$) and temperature ($T$) |
| Fick's law of diffusion | $J = -D \frac{dc}{dx}$ | Mass flux ($J$), diffusion coefficient ($D$), and concentration ($c$) |
| Faraday's law (voltage drop across an inductor) | $\Delta V_L = L \frac{di}{dt}$ | Voltage drop ($\Delta V_L$), inductance ($L$), and current ($i$) |

# EDOs en la práctica ingenieril

- Las leyes fundamentales de la física, mecánica, electricidad y termodinámica se basan en observaciones empíricas
- Estas leyes explican variaciones en propiedades físicas y estados de sistemas
- Se describen en base a tasas de cambio temporal y espacial

| **Law** | **Mathematical Expression** | **Variables and Parameters** |
|---|---|---|
| Newton's second law of motion | $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ | Velocity ($v$), force ($F$), and mass ($m$) |
| Fourier's heat law | $q = -k' \frac{dT}{dx}$ | Heat flux ($q$), thermal conductivity ($k'$) and temperature ($T$) |
| Fick's law of diffusion | $J = -D \frac{dc}{dx}$ | Mass flux ($J$), diffusion coefficient ($D$), and concentration ($c$) |
| Faraday's law (voltage drop across an inductor) | $\Delta V_L = L \frac{di}{dt}$ | Voltage drop ($\Delta V_L$), inductance ($L$), and current ($i$) |

# Objetivos de la clase

Aprender a resolver EDOs usando métodos numéricos

Aprender a escoger el mejor método para resolver cada EDO

Entender las representaciones visuales de los métodos

# Objetivos de la clase

Aprender a resolver EDOs usando métodos numéricos

Aprender a escoger el mejor método para resolver cada EDO

Entender las representaciones visuales de los métodos

# Objetivos de la clase

Aprender a resolver EDOs usando métodos numéricos

Aprender a escoger el mejor método para resolver cada EDO

Entender las representaciones visuales de los métodos

Nos enfocaremos en resolver el siguiente tipo de problema

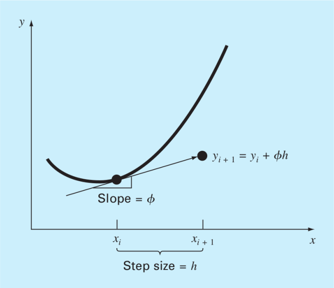
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Una aproximación para estimar $y$ es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

donde $\phi$ es la pendiente y $h$ el paso.

Esta es la forma general de los "métodos de un paso" y sólo difieren en la forma de aproximar $\phi$



# El problema tipo

Nos enfocaremos en resolver el siguiente tipo de problema

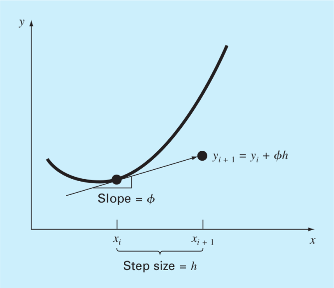
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Una aproximación para estimar $y$ es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

donde $\phi$ es la pendiente y $h$ el paso.

Esta es la forma general de los "métodos de un paso" y sólo difieren en la forma de aproximar $\phi$



# El problema tipo

Nos enfocaremos en resolver el siguiente tipo de problema

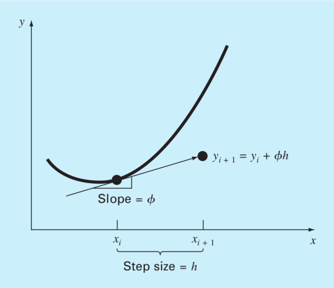
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Una aproximación para estimar $y$ es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

donde $\phi$ es la pendiente y $h$ el paso.

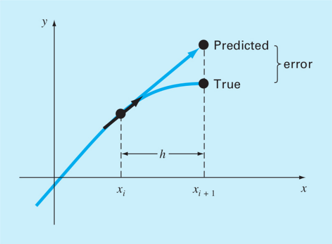
Esta es la forma general de los "métodos de un paso" y sólo difieren en la forma de aproximar $\phi$



Este método aproxima la pendiente promedio en todo el intervalo como $\phi = f(x_i, y_i)$

Esto significa que el valor de $y_{i+1}$ se estima como:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$




**Piénsenlo de la siguiente manera**

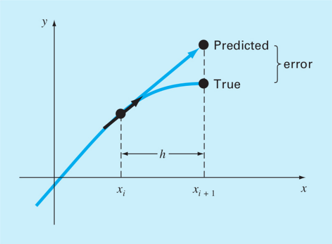
El método de Euler es una extrapolación lineal sobre el intervalo $h$

# El método de Euler

Este método aproxima la pendiente promedio en todo el intervalo como $\phi = f(x_i, y_i)$

Esto significa que el valor de $y_{i+1}$ se estima como:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$




**Piénsenlo de la siguiente manera**

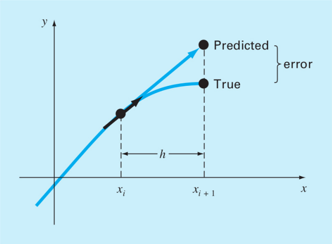
El método de Euler es una extrapolación lineal sobre el intervalo $h$

# El método de Euler

Este método aproxima la pendiente promedio en todo el intervalo como $\phi = f(x_i, y_i)$

Esto significa que el valor de $y_{i+1}$ se estima como:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$




## Piénsenlo de la siguiente manera

El método de Euler es una extrapolación lineal sobre el intervalo $h$

# Resolvamos otra ecuación diferencial ordinaria simple

**Ejemplo:** use el método de Euler para integrar numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = 4e^{0.8t} - 0.5y$$

con $t \in [0, 4]$, $h = 1.0$ y condición inicial $y(0) = 2$.

## Observación

La solución de esta ecuación diferencial es

$$y = \frac{4}{1.3}(e^{0.8t} - e^{-0.5t}) + 2e^{-0.5t}$$

# Resolvamos otra

**Ejemplo:** use el método de Euler para integrar numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

en el intervalo $[0, 4]$ con un espaciamiento ($h$) de $0.5$. Se sabe que $y = 1$ en $x = 0$.

## Observación

La solución de esta ecuación diferencial es

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

# ¿Qué tanto nos equivocamos con el método de Euler?

El error que cometemos al resolver numéricamente una ODE depende de:

1. Errores de truncamiento o discretización
2. Errores de redondeo

El error de truncamiento se compone de dos partes:

1. *Error de truncamiento local*: el que se comete en un solo paso del método de Euler
2. *Error de propagación*: el que se produce por las aproximaciones en los pasos anteriores

La suma de los dos errores de truncamiento se llama *"error de truncamiento global"*

# ¿Qué tanto nos equivocamos con el método de Euler?

El error que cometemos al resolver numéricamente una ODE depende de:

1. Errores de truncamiento o discretización
2. Errores de redondeo

El error de truncamiento se compone de dos partes:

1. *Error de truncamiento local*: el que se comete en un solo paso del método de Euler
2. *Error de propagación*: el que se produce por las aproximaciones en los pasos anteriores

La suma de los dos errores de truncamiento se llama *"error de truncamiento global"*

# ¿Qué tanto nos equivocamos con el método de Euler?

El error que cometemos al resolver numéricamente una ODE depende de:

1. Errores de truncamiento o discretización
2. Errores de redondeo

El error de truncamiento se compone de dos partes:

1. *Error de truncamiento local*: el que se comete en un solo paso del método de Euler
2. *Error de propagación*: el que se produce por las aproximaciones en los pasos anteriores

La suma de los dos errores de truncamiento se llama *"error de truncamiento global"*

# ¿Qué tanto nos equivocamos con el método de Euler?

El error que cometemos al resolver numéricamente una ODE depende de:

1. Errores de truncamiento o discretización
2. Errores de redondeo

El error de truncamiento se compone de dos partes:

1. *Error de truncamiento local*: el que se comete en un solo paso del método de Euler
2. *Error de propagación*: el que se produce por las aproximaciones en los pasos anteriores

La suma de los dos errores de truncamiento se llama *"error de truncamiento global"*

# ¿Qué tanto nos equivocamos con el método de Euler?

El error que cometemos al resolver numéricamente una ODE depende de:

1. Errores de truncamiento o discretización
2. Errores de redondeo

El error de truncamiento se compone de dos partes:

1. *Error de truncamiento local*: el que se comete en un solo paso del método de Euler
2. *Error de propagación*: el que se produce por las aproximaciones en los pasos anteriores

La suma de los dos errores de truncamiento se llama *"error de truncamiento global"*

# ¿Qué tanto nos equivocamos con el método de Euler?

El error que cometemos al resolver numéricamente una ODE depende de:

1. Errores de truncamiento o discretización
2. Errores de redondeo

El error de truncamiento se compone de dos partes:

1. *Error de truncamiento local*: el que se comete en un solo paso del método de Euler
2. *Error de propagación*: el que se produce por las aproximaciones en los pasos anteriores

La suma de los dos errores de truncamiento se llama *"error de truncamiento global"*

# ¿Qué tanto nos equivocamos con el método de Euler?

El error que cometemos al resolver numéricamente una ODE depende de:

1. Errores de truncamiento o discretización
2. Errores de redondeo

El error de truncamiento se compone de dos partes:

1. *Error de truncamiento local*: el que se comete en un solo paso del método de Euler
2. *Error de propagación*: el que se produce por las aproximaciones en los pasos anteriores

La suma de los dos errores de truncamiento se llama *“error de truncamiento global”*

# Aproximando el error del método de Euler con series de Taylor

Nuevamente consideremos el caso general

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Si $y$ tiene derivadas continuas, i.e., es infinitamente diferenciable, puede ser representada usando series de Taylor alrededor de $(x_i, y_i)$:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + O(h^{n+1}) \tag{2}$$

Substituyendo (1) en (2) se obtiene:

# Aproximando el error del método de Euler con series de Taylor

Nuevamente consideremos el caso general

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Si $y$ tiene derivadas continuas, i.e., es infinitamente diferenciable, puede ser representada usando series de Taylor alrededor de $(x_i, y_i)$:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + O(h^{n+1}) \tag{2}$$

Substituyendo (1) en (2) se obtiene:

# Aproximando el error del método de Euler con series de Taylor

Nuevamente consideremos el caso general

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Si $y$ tiene derivadas continuas, i.e., es infinitamente diferenciable, puede ser representada usando series de Taylor alrededor de $(x_i, y_i)$:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + O(h^{n+1}) \tag{2}$$

Substituyendo (1) en (2) se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!} h^n + O(h^{n+1})$$

# Aproximando el error del método de Euler con series de Taylor

Nuevamente consideremos el caso general

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Si $y$ tiene derivadas continuas, i.e., es infinitamente diferenciable, puede ser representada usando series de Taylor alrededor de $(x_i, y_i)$:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!}h^n + O(h^{n+1}) \tag{2}$$

Substituyendo (1) en (2) se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

# Aproximando el error del método de Euler con series de Taylor

De la expresión

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

podemos concluir que el error que comete el método de Euler es

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + O(h^{n+1})$$

Si $h \ll 1$ el error se puede representar como

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 \quad \text{ó} \quad E_t = O(h^2)$$

# Aproximando el error del método de Euler con series de Taylor

De la expresión

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

podemos concluir que el error que comete el método de Euler es

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + O(h^{n+1})$$

Si $h \ll 1$ el error se puede representar como

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 \quad \text{ó} \quad E_t = O(h^2)$$

# Estimemos el error de una aproximación usando Euler

**Ejemplo:** use la ecuación de abajo para estimar el error que se comete en el primer paso del ejemplo anterior. Adicionalmente, calcule el error que se comete debido a cada término de orden superior de la serie de Taylor.

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + O(h^{n+1})$$

## El ejemplo anterior

Use el método de Euler para integrar numéricamente la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

en el intervalo $[0, 4]$ con un espaciamiento ($h$) de $0.5$. Se sabe que $y = 1$ en $x = 0$.

# Estabilidad del método de Euler

El método de Euler es *condicionalmente estable*

Considere la siguiente EDO

$$y' = -ay \quad y = y_0 e^{-at}$$

Usando el método de Euler se tiene que

$$y_{i+1} = y_i - ay_i h = y_i(1 - ah)$$

Si $h > 2/a$ entonces $|y_i| \to \infty$ cuando $i \to \infty$, lo que se contradice con la solución exacta

# Estabilidad del método de Euler

El método de Euler es *condicionalmente estable*

Considere la siguiente EDO

$$y' = -ay \quad y = y_0 e^{-at}$$

Usando el método de Euler se tiene que

$$y_{i+1} = y_i - a y_i h = y_i(1 - ah)$$

Si $h > 2/a$ entonces $|y_i| \to \infty$ cuando $i \to \infty$, lo que se contradice con la solución exacta

# Estabilidad del método de Euler

El método de Euler es *condicionalmente estable*

Considere la siguiente EDO

$$y' = -ay \quad y = y_0 e^{-at}$$

Usando el método de Euler se tiene que

$$y_{i+1} = y_i - ay_i h = y_i(1 - ah)$$

Si $h > 2/a$ entonces $|y_i| \to \infty$ cuando $i \to \infty$, lo que se contradice con la solución exacta

# Estabilidad del método de Euler

El método de Euler es *condicionalmente estable*

Considere la siguiente EDO

$$y' = -ay \quad y = y_0 e^{-at}$$

Usando el método de Euler se tiene que

$$y_{i+1} = y_i - a y_i h = y_i(1 - ah)$$

Si $h > 2/a$ entonces $|y_i| \to \infty$ cuando $i \to \infty$, lo que se contradice con la solución exacta

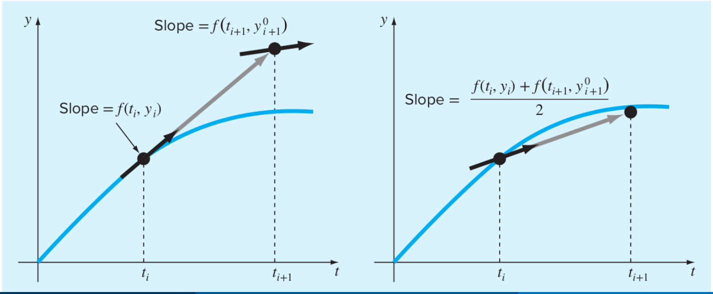
# Mejoras al método de Euler: el método de Heun

El método de Euler asume que la derivada al principio del intervalo es una buena aproximación para todo el intervalo

El método de Heun utiliza dos derivadas para estimar el valor al final del intervalo de la siguiente forma

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(t_i, y_i)h \qquad \text{(predictor)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(t_i, y_i) + f(t_i, y_{i+1}^0)}{2}h \qquad \text{(corrector)}$$



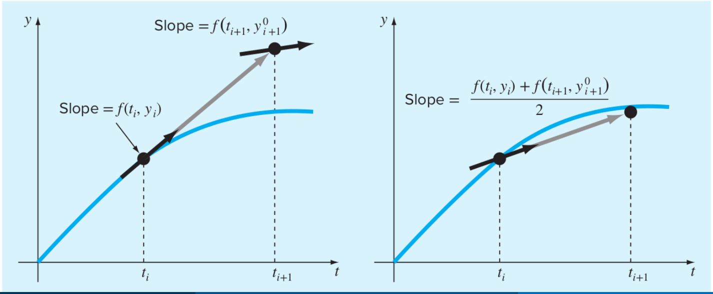
# Mejoras al método de Euler: el método de Heun

El método de Euler asume que la derivada al principio del intervalo es una buena aproximación para todo el intervalo

El método de Heun utiliza dos derivadas para estimar el valor al final del intervalo de la siguiente forma

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(t_i, y_i)h \qquad \text{(predictor)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(t_i, y_i) + f(t_i, y_{i+1}^0)}{2}h \qquad \text{(corrector)}$$



# Mejoras al método de Euler: el método de Heun

El proceso de predicción-corrección puede ser repetido las veces que sea necesario de manera que

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(t_i, y_i)h \qquad \text{(predictor)}$$

$$y_{i+1}^{j+1} = y_i^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f(t_i, y_{i+1}^{j})}{2}h \qquad \text{(corrector)}$$

para $j = 0, 1, \ldots, m$

$$y_{i+1}^{j} \longleftarrow y_i^m + \frac{f(t_i, y_i^m) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^{j-1}\right)}{2}h$$

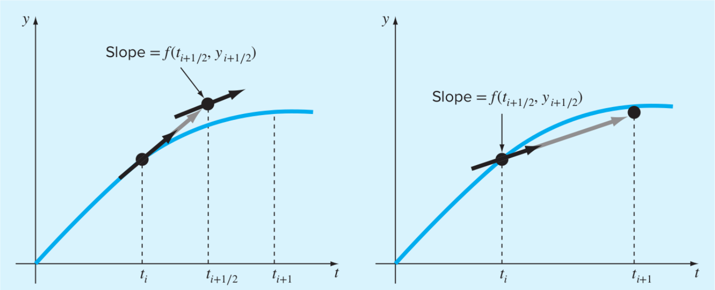
# Mejoras al método de Euler: el método del punto medio

Usa el método de Euler para predecir un valor de $y$ en la mitad del intervalo

$$y_{i+1/2} = y_i + f(t_i, y_i)\frac{h}{2}$$

Luego esta predicción se utiliza para estimar el valor de $y$ al final del intervalo:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$



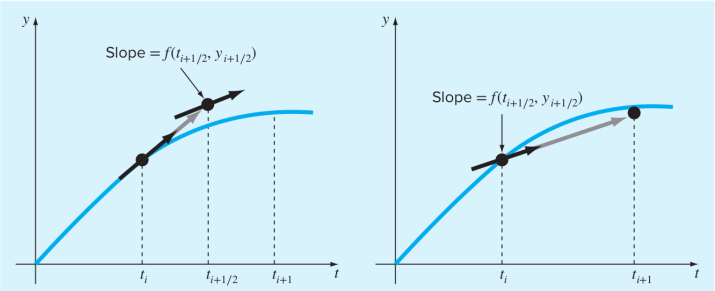
# Mejoras al método de Euler: el método del punto medio

Usa el método de Euler para predecir un valor de $y$ en la mitad del intervalo

$$y_{i+1/2} = y_i + f(t_i, y_i)\frac{h}{2}$$

Luego esta predicción se utiliza para estimar el valor de $y$ al final del intervalo:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$



# Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta (RK) obtienen la precisión de las series de Taylor sin necesidad de calcular sus términos

Existen muchas variaciones, pero todas se pueden formalizar como

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

donde $\phi$ es una *función incremento* que representa una pendiente representativa sobre el intervalo

La función incremento se define como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

# Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta (RK) obtienen la precisión de las series de Taylor sin necesidad de calcular sus términos

Existen muchas variaciones, pero todas se pueden formalizar como

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

donde $\phi$ es una *función incremento* que representa una pendiente representativa sobre el intervalo

La función incremento se define como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

# Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta (RK) obtienen la precisión de las series de Taylor sin necesidad de calcular sus términos

Existen muchas variaciones, pero todas se pueden formalizar como

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$

donde $\phi$ es una *función incremento* que representa una pendiente representativa sobre el intervalo

La función incremento se define como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

# La función incremento

La función incremento se define como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

donde $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ son constantes y $\{k_i\}_{i=1}^{n}$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

donde $\{p_i\}_{i=1}^{n-1}$ y $\{q_{i,j}\}_{i=j,j=1}^{n-1}$ son constantes.

# La función incremento

La función incremento se define como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

donde $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ son constantes y $\{k_i\}_{i=1}^{n}$:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

donde $\{p_i\}_{i=1}^{n-1}$ y $\{q_{i,j}\}_{i=j,j=1}^{n-1}$ son constantes.

# Familias de métodos de RK

Dependiendo del $n$ que se elija para la *función incremento* $\phi$ existen varios tipos de métodos de RK

Para encontrar los valores de las $a's$, $p's$ y $q's$ se debe resolver la siguiente ecuación:

$$y_i + \phi h = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

para $n$ fijo, donde

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

# Familias de métodos de RK

Dependiendo del $n$ que se elija para la *función incremento* $\phi$ existen varios tipos de métodos de RK

Para encontrar los valores de las $a's$, $p's$ y $q's$ se debe resolver la siguiente ecuación:

$$y_i + \phi h = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1})$$

para $n$ fijo, donde

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

# RK de primer orden (RK1)

Resolviendo la ecuación

$$y_i + a_1 k_1 h = y_i + f(x_i, y_i)h$$

encontramos

$$a_1 = 1$$

Es decir, con RK1 recuperamos el método de Euler

# RK de primer orden (RK1)

Resolviendo la ecuación

$$y_i + a_1 k_1 h = y_i + f(x_i, y_i)h$$

encontramos

$$a_1 = 1$$

Es decir, con RK1 recuperamos el método de Euler

# RK de segundo orden (RK2)

Resolviendo la siguiente ecuación:

$$y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2$$

encontramos

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= 1/2 \\ a_2 q_{11} &= 1/2 \end{aligned}$$

(3 ecs. y 4 incógnitas!)

Por lo tanto, existe un número infinitos de esquemas RK2

Para calcular todas las variables se fija el valor de una. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - a_2 \\ p_1 &= q_{11} = 1/(2a_2) \end{aligned}$$

# RK de segundo orden (RK2)

Resolviendo la siguiente ecuación:

$$y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2$$

encontramos

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= 1/2 \\ a_2 q_{11} &= 1/2 \end{aligned} \qquad \text{(3 ecs. y 4 incógnitas!)}$$

Por lo tanto, existe un número infinitos de esquemas RK2

Para calcular todas las variables se fija el valor de una. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - a_2 \\ p_1 &= q_{11} = 1/(2a_2) \end{aligned}$$

# RK de segundo orden (RK2)

Resolviendo la siguiente ecuación:

$$y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2$$

encontramos

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= 1/2 \qquad \text{(3 ecs. y 4 incógnitas!)} \\ a_2 q_{11} &= 1/2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe un número infinitos de esquemas RK2

Para calcular todas las variables se fija el valor de una. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - a_2 \\ p_1 &= q_{11} = 1/(2a_2) \end{aligned}$$

Asumiendo $a_2 = 1/2$ se tiene que:

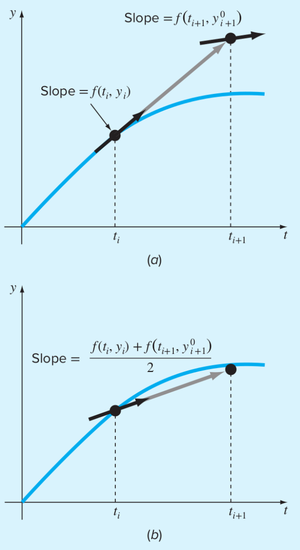
$$a_1 = 1/2, \quad p_1 = q_{11} = 1$$

Por lo tanto, el método de RK2 queda:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$



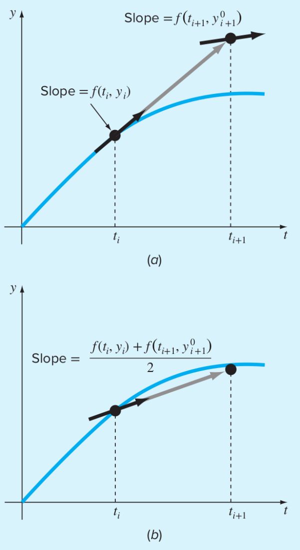
# RK2: el método de Heun ($a_2 = 1/2$)

Asumiendo $a_2 = 1/2$ se tiene que:

$$a_1 = 1/2, \quad p_1 = q_{11} = 1$$

Por lo tanto, el método de RK2 queda:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$



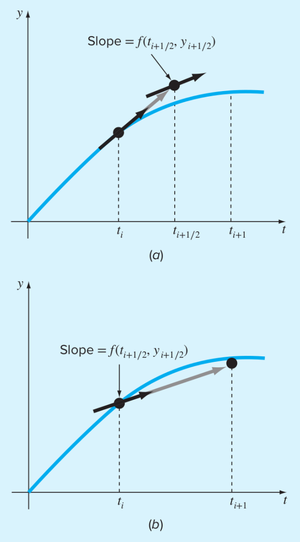
# RK2: el método del punto medio ($a_2 = 1$)

Asumiendo $a_2 = 1$ se tiene que:

$$a_1 = 0, \quad p_1 = q_{11} = 1/2$$

Por lo tanto, el método de RK2 queda:

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$



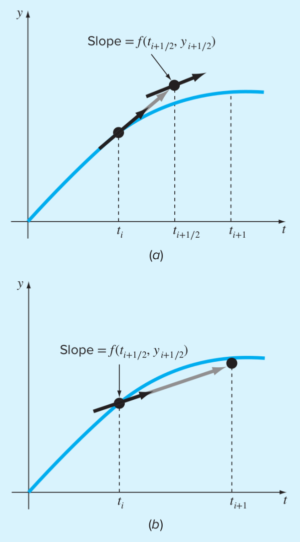
# RK2: el método del punto medio ($a_2 = 1$)

Asumiendo $a_2 = 1$ se tiene que:

$$a_1 = 0, \quad p_1 = q_{11} = 1/2$$

Por lo tanto, el método de RK2 queda:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + k_2 h \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \end{aligned}$$



# RK2: el método de Ralston ($a_2 = 2/3$)

Asumiendo $a_2 = 2/3$ se tiene que:

$$a_1 = 1/2, \quad p_1 = q_{11} = 3/4$$

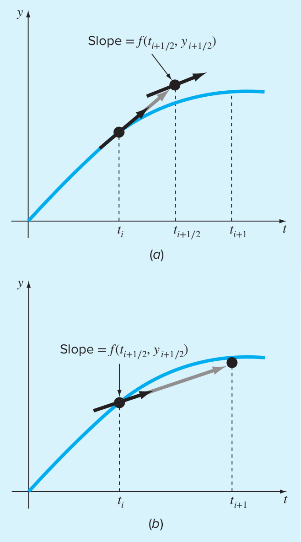
Por lo tanto, el método de RK2 queda:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Este método asegura una cota de error mínima[1]




[1] Ralston, *Runge-Kutta methods with minimum error bounds*. Math. Comp. 1962

# RK2: el método de Ralston ($a_2 = 2/3$)

Asumiendo $a_2 = 2/3$ se tiene que:

$$a_1 = 1/2, \quad p_1 = q_{11} = 3/4$$

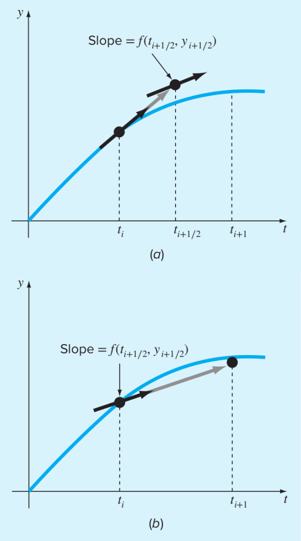
Por lo tanto, el método de RK2 queda:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Este método asegura una cota de error mínima[1]




[1] Ralston, *Runge-Kutta methods with minimum error bounds*. Math. Comp. 1962

# RK2: el método de Ralston ($a_2 = 2/3$)

Asumiendo $a_2 = 2/3$ se tiene que:

$$a_1 = 1/2, \quad p_1 = q_{11} = 3/4$$

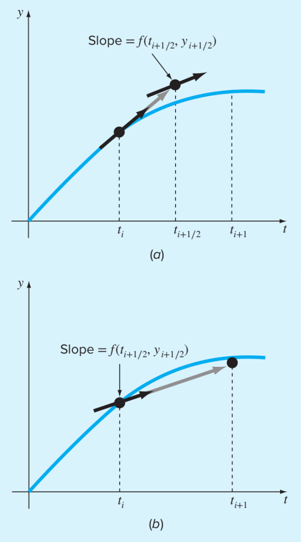
Por lo tanto, el método de RK2 queda:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right) h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Este método asegura una cota de error mínima[1]




[1] Ralston, *Runge-Kutta methods with minimum error bounds*. Math. Comp. 1962

# Ejemplo: comparación de métodos RK2

Utilice los métodos de Heun, punto medio y Ralston para integrar numericamente

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$ usando un paso de $h = 0.5$. En $x = 0$ se debe cumplir que $y = 1$.
La solución de esta ecuación diferencial es

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

# RK de tercer orden (RK3)

Para $n = 3$ se obtiene un sistema de 6 ecuaciones y 8 incógnitas (se deben fijar 2 para encontrar el resto)

Uno de los métodos RK3 más conocidos resulta en

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right) \end{aligned}$$

# RK de tercer orden (RK3)

Para $n = 3$ se obtiene un sistema de 6 ecuaciones y 8 incógnitas (se deben fijar 2 para encontrar el resto)

Uno de los métodos RK3 más conocidos resulta en

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right) \end{aligned}$$

# RK de cuarto orden (RK4)

Para $n = 4$ se obtiene un sistema de 12 ecuaciones y 16 incógnitas

Uno de los métodos RK4 más conocidos resulta en

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

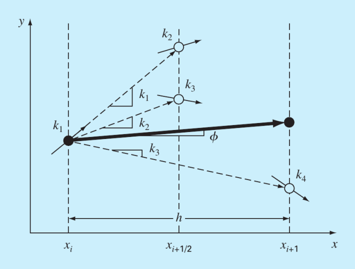
donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)$$

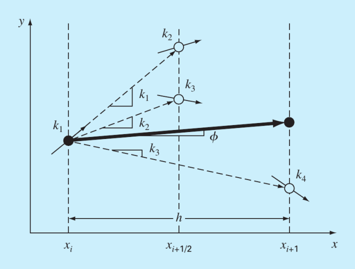


# RK de cuarto orden (RK4)

Para $n = 4$ se obtiene un sistema de 12 ecuaciones y 16 incógnitas

Uno de los métodos RK4 más conocidos resulta en

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$




donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)$$

# Ejemplo:

Utilice el método RK4 de la diapositiva anterior para integrar $y' = 4e^{0.8t} - 0.5y$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$ usando un paso de $h = 1$ con $y(0) = 2$.
La solución teórica es

$$y = \frac{4}{1.3}(e^{0.8t} - e^{-0.5t}) + 2e^{-0.5t}$$

# Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Muchas veces el problema que queremos resolver es un sistema de EDOs:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

En dicho caso, los mismos que métodos que hemos aprendido se puede aplicar para su resolución

# Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Muchas veces el problema que queremos resolver es un sistema de EDOs:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned}$$

En dicho caso, los mismos que métodos que hemos aprendido se puede aplicar para su resolución

# Un ejemplo simple: el sistema masa resorte

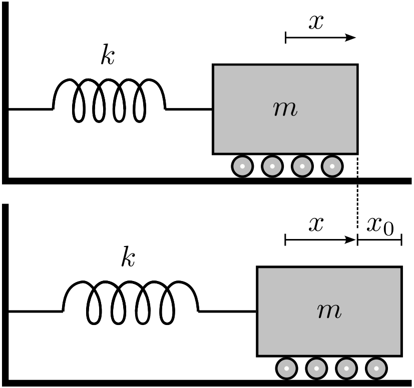
La EDO que gobierna un sistema masa resorte se puede escribir como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

y su solución teórica está dada por

$$x(t) = x_0 \cos\left(\omega t\right) + v_0/\omega \sin(\omega t)$$

donde $x_0$ representa la posición inicial. $v_0$ la velocidad inicial y $\omega = \sqrt{k/m}$.

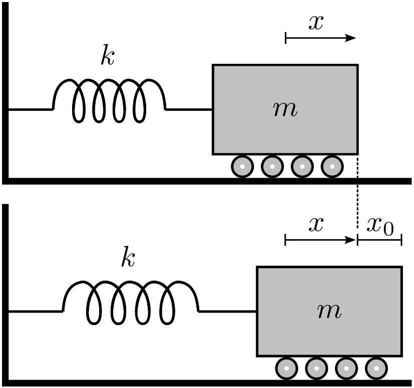


# Un ejemplo simple: el sistema masa resorte

El problema anterior puede ser escrito como un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$




## Resolvamos el ejemplo

Utilice el método de Euler y RK4 para determinar las soluciones del sistema de ecuaciones. Las condiciones iniciales son $x(0) = 1$ y $v(0) = 0$.
Asuma que $m = 1$ y $k = 2\pi$ y utilice un paso $h = 0.5$.