


Clase 8: aplicaciones en la simulación de sistemas físicos

Hernán Mella

14 de noviembre de 2023

EIE PUCV

1 Motivación e introducción

2 Sistemas físicos en distintos ámbitos de la ingeniería
- Ingeniería química y bioingeniería
- Ingeniería civil y ambiental
- Otros ejemplos

Objetivos y motivaciones

- El objetivo principal es resolver EDOs usando los métodos estudiados.
- Las ecuaciones diferenciales que estudiaremos surgen de aplicaciones prácticas de ingeniería.
- Estas EDOs muchas veces son no-lineales y por lo tanto difíciles de resolver.

Objetivos y motivaciones

- El objetivo principal es resolver EDOs usando los métodos estudiados.
- Las ecuaciones diferenciales que estudiaremos surgen de aplicaciones prácticas de ingeniería.
- Estas EDOs muchas veces son no-lineales y por lo tanto difíciles de resolver.

Objetivos y motivaciones

- El objetivo principal es resolver EDOs usando los métodos estudiados.
- Las ecuaciones diferenciales que estudiaremos surgen de aplicaciones prácticas de ingeniería.
- Estas EDOs muchas veces son no-lineales y por lo tanto difíciles de resolver.

El prinicipio básico de los reactores químicos

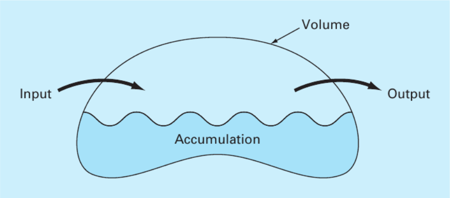
El prinicipio más utilizado en ingeniería química es la conservación de masa.

En términos prácticos, lo anterior se produce en un balance de masas:

$$\text{Aumulación} = \text{Entradas} - \text{Salidas}$$

Si las entradas son mayores que las salidas la acumulación es positiva.

Si las entradas son menores que las salidas la acumulación es negativa.

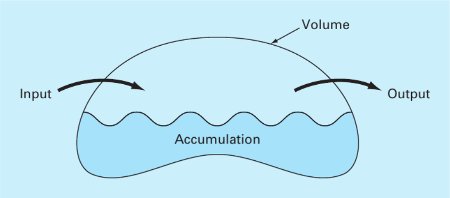


El prinicipio básico de los reactores químicos

El prinicipio más utilizado en ingeniería química es la conservación de masa.

En términos prácticos, lo anterior se produce en un balance de masas:

$$\text{Aumulación} = \text{Entradas} - \text{Salidas}$$



Si las entradas son mayores que las salidas la acumulación es positiva.

Si las entradas son menores que las salidas la acumulación es negativa.

El prinicipio básico de los reactores químicos

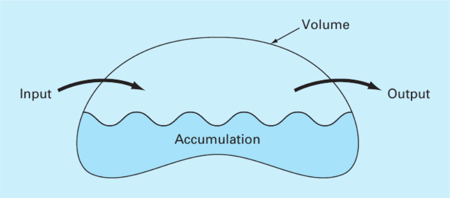
El prinicipio más utilizado en ingeniería química es la conservación de masa.

En términos prácticos, lo anterior se produce en un balance de masas:

$$\text{Aumulación} = \text{Entradas} - \text{Salidas}$$

Si las entradas son mayores que las salidas la acumulación es positiva.

Si las entradas son menores que las salidas la acumulación es negativa.



El prinicipio básico de los reactores químicos

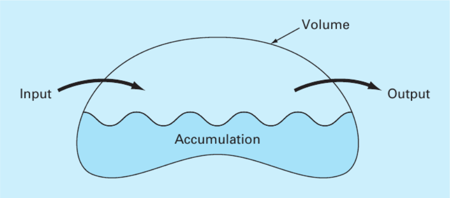
El prinicipio más utilizado en ingeniería química es la conservación de masa.

En términos prácticos, lo anterior se produce en un balance de masas:

$$\text{Aumulación} = \text{Entradas} - \text{Salidas}$$

Si las entradas son mayores que las salidas la acumulación es positiva.

Si las entradas son menores que las salidas la acumulación es negativa.



Reactor con una entrada y una salida

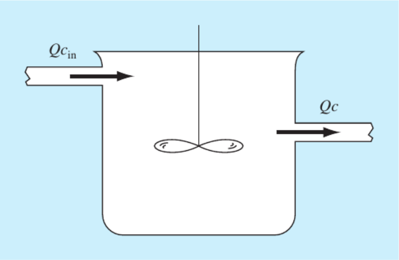
En un reactor de volumen constante, la acumulación está dada por

$$\text{Acumulación} = V\frac{dc}{dt}$$

donde V es el volúmen del reactor y c la concentración.

Planteando el equilibrio de masas se obtiene:

$$V\frac{dc}{dt} = Qc_{in} - Qc$$



Si el sistema es de volumen constante...

¿Por qué hay variación de masa al interior del reactor?

Reactor con una entrada y una salida

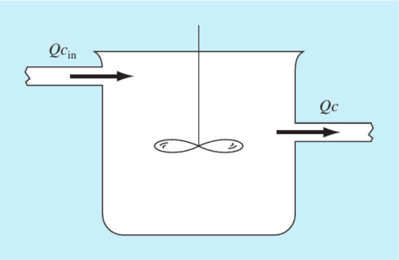
En un reactor de volumen constante, la acumulación está dada por

$$\text{Acumulación} = V\frac{dc}{dt}$$

donde V es el volúmen del reactor y c la concentración.

Planteando el equilibrio de masas se obtiene:

$$V\frac{dc}{dt} = Qc_{in} - Qc$$



Si el sistema es de volumen constante...

¿Por qué hay variación de masa al interior del reactor?

Reactor con una entrada y una salida

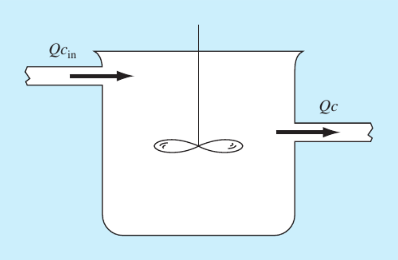
En un reactor de volumen constante, la acumulación está dada por

$$\text{Acumulación} = V\frac{dc}{dt}$$

donde V es el volúmen del reactor y c la concentración.

Planteando el equilibrio de masas se obtiene:

$$V\frac{dc}{dt} = Qc_{in} - Qc$$



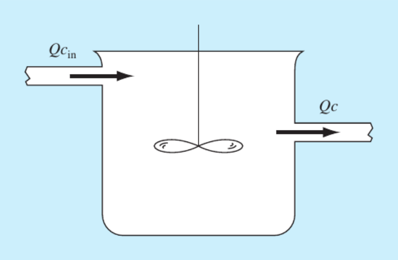
Si el sistema es de volumen constante...

¿Por qué hay variación de masa al interior del reactor?

Reactor con una entrada y una salida: solución teórica

Si en $t = 0$ se tiene que $c = c_0$, la solución teórica de la EDO anterior está dada por:

$$c = c_{in}(1 - e^{-(Q/V)t}) + c_0 e^{-(Q/V)t}$$

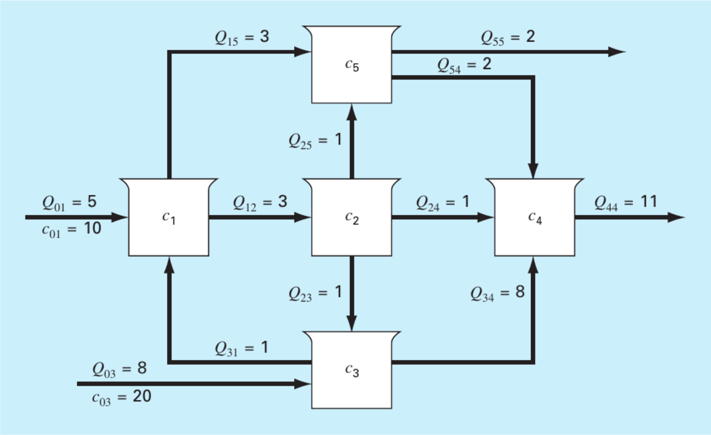


Ejercicio

Resuelva el problema del reactor en el intervalo de tiempo $t \in [0, 50]$ min. Considere $c_0 = 10$ mg/m^3, $Q = 5$ m^3/min, $V = 100$ m^3 y $c_{in} = 50$ mg/m^3.
Compare su estimación con la solución analítica.

Sistema de reactores

Derive el sistema de ecuaciones diferenciales del sistema de reactores de la figura.



Sistema de reactores

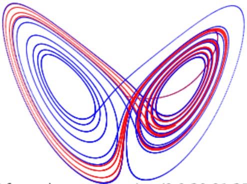
Las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema de reactores son:

$$\frac{dc_1}{dt} = -0.12c_1 + 0.02c_3 + 1$$
$$\frac{dc_2}{dt} = 0.15c_1 - 0.15c_2$$
$$\frac{dc_3}{dt} = 0.025c_2 - 0.225c_3 + 4$$
$$\frac{dc_4}{dt} = 0.1c_3 - 0.1375c_4 + 0.025c_5$$
$$\frac{dc_5}{dt} = 0.03c_1 + 0.01c_2 - 0.04c_5$$

Dinámica de fluidos atmosféricos: las ecuaciones de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz son un modelo simplificado de convección atmosférica, y son:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy$$



IC for red curve: (x,y,z) = (0.0,20.01,25.0)
IC for blue curve: (x,y,z) = (0.0,20.00,25.0)

donde x representa la intensidad del movimiento del fluido e y y z variaciones de temperaturas en las direcciones horizontal y vertical respectivamente.

Dinámica de fluidos atmosféricos: las ecuaciones de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz son un modelo simplificado de convección atmosférica, y son:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy$$

donde x representa la intensidad del movimiento del fluido e y y z variaciones de temperaturas en las direcciones horizontal y vertical respectivamente.

Ejercicio

Resuelva las ecuaciones de Lorenz en el intervalo $t \in [0, 20]$ usando $\sigma = 10$, $b = 2.666667$ y $r = 28$. Las condiciones iniciales son $x = y = z = 5$.
¿Qué pasa si cambia las condiciones iniciales por 5.01?

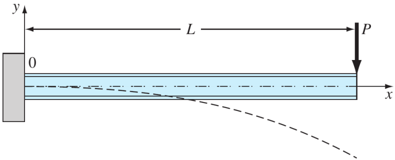
La deflexión de una viga empotrada

En ingeniería civil saber la deflexión de elementos estructurales es fundamental.

La EDO que modela la deflexión de la viga de la figura está dada por:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P(L-x)$$

donde E es el módulo de elasticidad e I el momento de inercia.



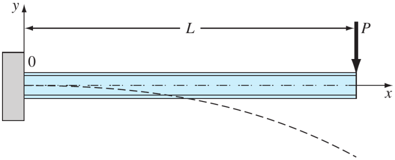
La deflexión de una viga empotrada

En ingeniería civil saber la deflexión de elementos estructurales es fundamental.

La EDO que modela la deflexión de la viga de la figura está dada por:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -P(L - x)$$

donde E es el módulo de elasticidad e I el momento de inercia.

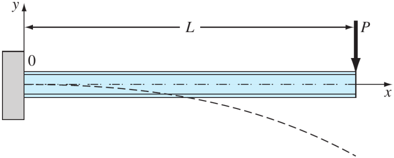


La deflexión de una viga empotrada: solución teórica

La solución de la EDO anterior está dada por:

$$y = -\frac{PLx^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI}$$

donde E es el módulo de elasticidad e I el momento de inercia.



Ejercicio

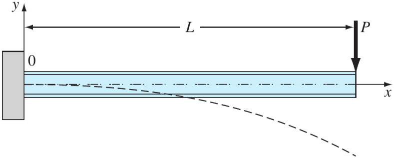
Calcule la deflexión y en una viga con $E = 10000$ kN$/$m^2, $I = 0.01$m^4, $P = 10$ N y $L = 5\ m$.

La deflexión de una viga empotrada: solución teórica

La solución de la EDO anterior está dada por:

$$y = -\frac{PLx^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI}$$

donde E es el módulo de elasticidad e I el momento de inercia.



Ejercicio

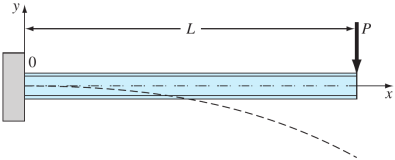
Calcule la deflexión y en una viga con $E = 10000$ kN$/$m^2, $I = 0.01$m^4, $P = 10$ N y $L = 5\,m$.

La deflexión de una viga empotrada: solución teórica

La solución de la EDO anterior está dada por:

$$y = -\frac{PLx^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI}$$

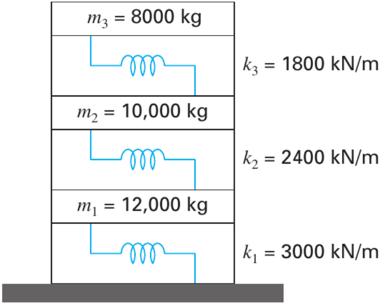
donde E es el módulo de elasticidad e I el momento de inercia.



Ejercicio

Calcule la deflexión y en una viga con $E = 10000$ kN/m^2, $I = 0.01$m^4, $P = 10$ N y $L = 5\ m$.

Un edificio simplificado



En ingeniería civil se suelen usar simplificaciones para estudiar la dinámica de estructuras.

Un edificio de 3 pisos se puede representar simplificadamente como un sistema masa-resorte.

Ejercicio 1

Resuelva las ecuaciones de movimiento de la estructura al estar bajo la acción de una carga horizontal F que actúa en el último piso.

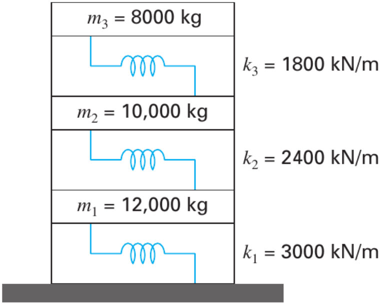
Ejercicio 2

Resuelva la ecuación diferencial para los parámetros de la figura y $F = e^{-t}\sin(t)$

Un edificio simplificado

En ingeniería civil se suelen usar simplificaciones para estudiar la dinámica de estructuras.

Un edificio de 3 pisos se puede representar simplificadamente como un sistema masa-resorte.



Ejercicio 1

Resuelva las ecuaciones de movimiento de la estructura al estar bajo la acción de una carga horizontal F que actúa en el último piso.

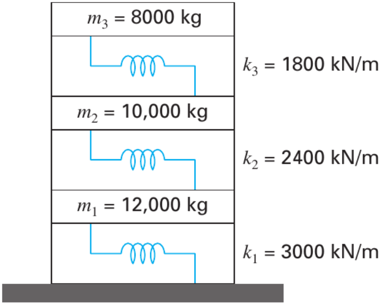
Ejercicio 2

Resuelva la ecuación diferencial para los parámetros de la figura y $F = e^{-t}\sin(t)$

Un edificio simplificado

En ingeniería civil se suelen usar simplificaciones para estudiar la dinámica de estructuras.

Un edificio de 3 pisos se puede representar simplificadamente como un sistema masa-resorte.



Ejercicio 1

Resuelva las ecuaciones de movimiento de la estructura al estar bajo la acción de una carga horizontal F que actúa en el último piso.

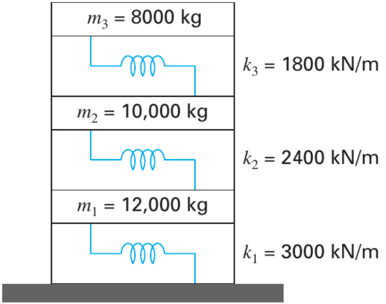
Ejercicio 2

Resuelva la ecuación diferencial para los parámetros de la figura y $F = e^{-t}\sin(t)$

Un edificio simplificado

En ingeniería civil se suelen usar simplificaciones para estudiar la dinámica de estructuras.

Un edificio de 3 pisos se puede representar simplificadamente como un sistema masa-resorte.



Ejercicio 1

Resuelva las ecuaciones de movimiento de la estructura al estar bajo la acción de una carga horizontal F que actúa en el último piso.

Ejercicio 2

Resuelva la ecuación diferencial para los parámetros de la figura y $F = e^{-t}\sin(t)$

Un edificio simplificado

Las EDOs que modelan el edificio simplificado son:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 \tag{1a}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_3(x_3 - x_2) - k_2(x_2 - x_1) \tag{1b}$$

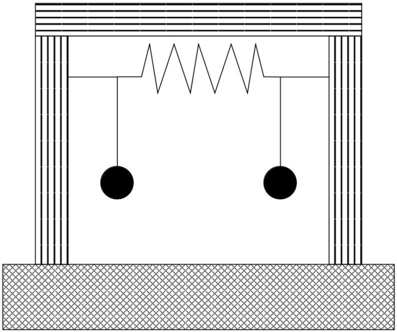
$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = F - k_3(x_3 - x_2) \tag{1c}$$

Dos péndulos conectados por un resorte

El sistema de ecuaciones diferenciales que modela los dos péndulos idénticos está dado por

$$mL^2\ddot{\theta}_1 + mgL\sin\theta_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$mL^2\ddot{\theta}_2 + mgL\sin\theta_2 - k(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Resuelva las ecuaciones diferenciales usando el método de Runge-Kutta de orden 4.



Movimiento de un sistema binario

Consideremos dos masas puntuales m_1 y m_2, moviendose en el espacio tridimensional euclidiano con vectores de posición R_1 y R_2. Además, definamos el vector de posición relativa $R = R_2 - R_1$ y su longitud $r = \|R\|$. De acuerdo a las leyes de Newton y la ley de gravitación universal, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_1\ddot{R}_1 = \frac{G_0 m_1 m_2}{r^3}R + F_1$$
$$m_2\ddot{R}_2 = -\frac{G_0 m_1 m_2}{r^3}R + F_2$$

Resuelva el sistema anterior usando el método de Runge-Kutta de orden 4. Obtenga una animación de los dos cuerpos interactuando entre ellos.