线性规划、单纯形法

岳镝

2025 年 3 月 28 日

线性规划的一般形式

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ &\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\ &\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

线性规划的一般形式

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ &\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\ &\qquad x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

等价地写成矩阵形式

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \mathbf{c}^\top \mathbf{x}; \\ &\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}. \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$.

线性规划的一般形式

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\
\text{s.t. } & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\
& x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

等价地写成矩阵形式

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & \mathbf{c}^\top \mathbf{x}; \\
\text{s.t. } & \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top$.

问题：一般的约束条件/目标函数怎样转化成 (1)?

引入松弛变量

考虑 n 个变量，m 个约束条件的线性规划问题

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ &\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\ &\quad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

对第 i 个约束条件引入松弛变量 x_{n+i}，化成标准形

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ &\text{s.t. } x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\ &\quad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+m. \end{aligned}$$

“猜”一个解

假设 $b_i \geq 0$。考虑线性规划标准形

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\
\text{s.t.} \quad & x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m; \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n+m.
\end{aligned}
$$

"猜"一个解

假设 $b_i \geq 0$。考虑线性规划标准形

$$
\begin{aligned}
& \text{maximize } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\
& \text{s.t. } x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m; \\
& \qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+m.
\end{aligned}
$$

观察 1：$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ 是一个可行解，对应目标值 $y = 0$。

（问题：这是最优解吗？什么情况下是最优解？）

“猜”一个解

假设 $b_i \geq 0$。考虑线性规划标准形

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\
\text{s.t.} \ & x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m; \\
& x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \ldots, n+m.
\end{aligned}
$$

观察 1：$(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ 是一个可行解，对应目标值 $y = 0$。
（问题：这是最优解吗？什么情况下是最优解？）

观察 2：m 个约束方程，$n+m$ 个变量 $\Longrightarrow$ 变量之间可以相互表示，问题的解不变。
希望找到合适的表示，目标函数转化为
maximize $v - \lambda_1 x_{i_1} - \lambda_2 x_{i_2} - \cdots - \lambda_n x_{i_n}$。

单纯形法

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30; \\
& 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24; \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36. \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

单纯形法

$$\begin{aligned} \text{maximize}\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + 3x_3 \le 30; \\ & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 24; \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 36. \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

化成标准形

$$\begin{aligned} \text{maximize}\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3 \\ & x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ & x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \\ & x_j \ge 0, 1 \le j \le 6. \end{aligned}$$

单纯形法

找不到初始可行解？

回忆：我们假设 $b_i \geq 0,\ \forall i$。当存在某个 $b_i < 0$ 时，我们的办法找不到初始可行解。甚至问题本身可能不存在可行解。

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\ & 4x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
& x_1 - 5x_2 \leq -4 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

判断是否存在可行解

原问题 $\mathcal{P}$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\ & 4x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 \le 2 \\
& x_1 - 5x_2 \le -4 \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

辅助问题 $\mathcal{P}_{\text{aux}}$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\ & -x_0 \\
\text{s.t.}\quad & -x_0 + 2x_1 - x_2 \le 2 \\
& -x_0 + x_1 - 5x_2 \le -4 \\
& x_0, x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

命题：$\mathcal{P}$ 存在可行解 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}_{\text{aux}}$ 的最优值为 0.

总结

$$\begin{cases} \forall b_i \geq 0 \Rightarrow \text{找到初始可行解} \Rightarrow \text{单纯形} \begin{cases} \text{存在最优值} \\ \text{不存在最优值（无界）} \end{cases} \\ \exists b_i < 0 \Rightarrow \text{构造辅助问题} \Rightarrow \begin{cases} \text{不存在可行解} \\ \text{存在并找到一个初始可行解} \Rightarrow \text{单纯形} \end{cases} \end{cases}$$