最小割

岳镝

2025 年 4 月 18 日

问题

给定带权无向图 $G=(V,E,w_{\geq 0})$，求 G 的最小割

等价描述：求顶点集 V 的一个划分 $V=S\cup T$，最小化

$$\sum_{u\in S,v\in T,(u,v)\in E} w(u,v).$$

回忆：最大流-最小割定理

定理（最大流-最小割定理）
最大流 $=$ 最小割。

直接运行最大流算法，时间复杂度 Max-Flow(n, m)?

回忆：最大流-最小割定理

定理（最大流-最小割定理）

~~最大流= 最小割。~~

$s \to t$ 最大流 $=$ $s \to t$ 最小割。

算法：枚举源点 s 和汇点 t，运行 $s \to t$ 最大流算法，复杂度 $n^2 \cdot \textsf{Max-Flow}(n, m)$

回忆：最大流-最小割定理

定理（最大流-最小割定理）

~~最大流= 最小割。~~

$s \to t$ 最大流 $= s \to t$ 最小割。

算法：枚举源点 s 和汇点 t，运行 $s \to t$ 最大流算法，复杂度 $n^2 \cdot \text{Max-Flow}(n, m)$

改进：固定源点 s，枚举汇点 t，运行 $s \to t$ 最大流算法，复杂度 $n \cdot \text{Max-Flow}(n, m)$

Max-Flow

- 任意增广路径 (Ford-Fulkerson): $O(mf^*)$
- 最短增广路径 (Edmonds-Karp): $O(nm^2)$
- 分层辅助网络 + 前向增广路径 (Dinic): $O(n^3)$
- SOTA: $\tilde{O}(m^{1+o(1)})$

另一个问题

n 个顶点的图 G，有多少个最小割？

A. 常数：$O(1)$

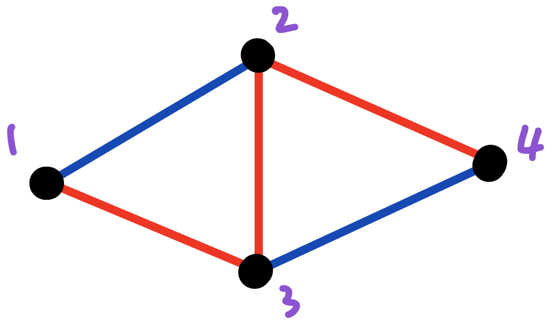
B. 多项式：$n^{O(1)}$

C. 亚指数：$n^{\log^{O(1)} n}$

D. 指数：$2^{O(n)}$

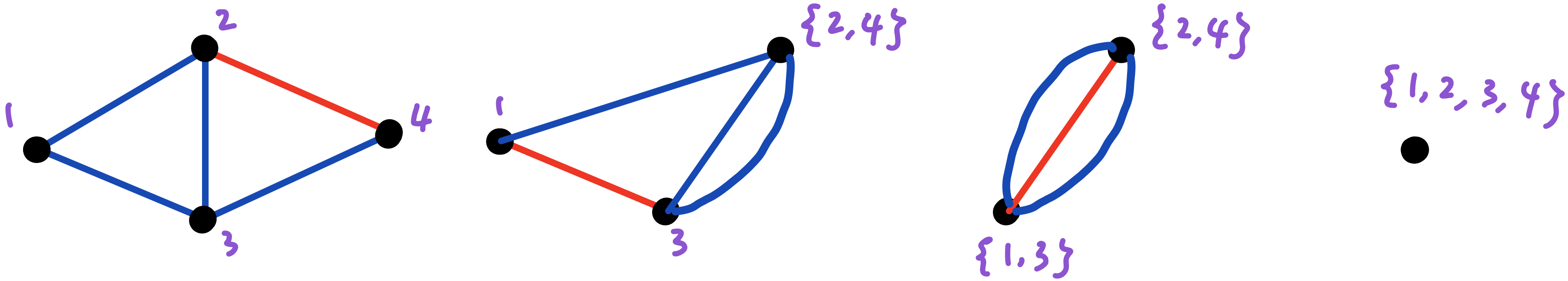
收缩边

回忆：最小生成树 Kruskal 算法



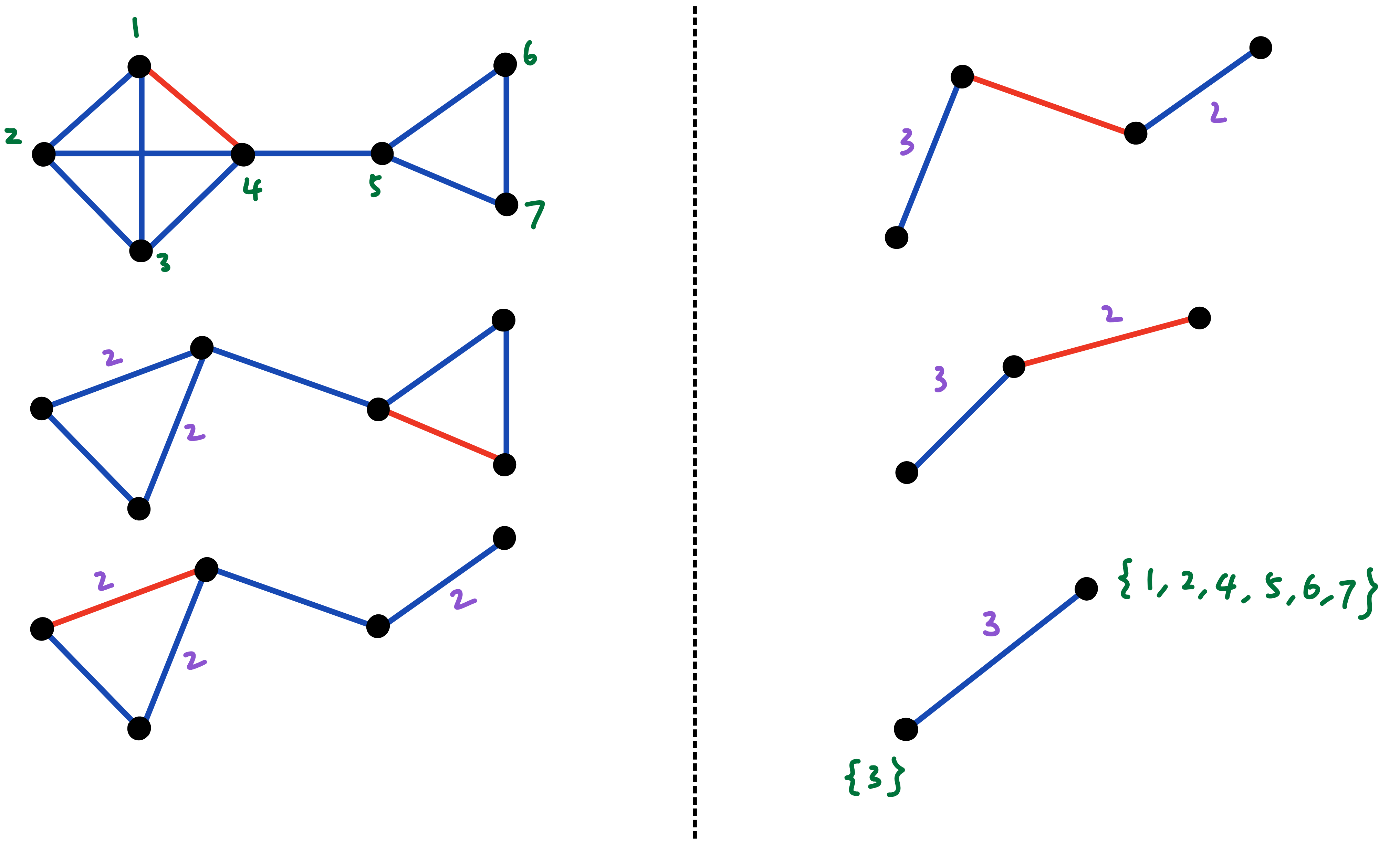
按顺序选取一条边，连接两个连通分支

等价描述：按顺序选取一条边，收缩



收缩边

按顺序选取一条边，收缩



算法框架

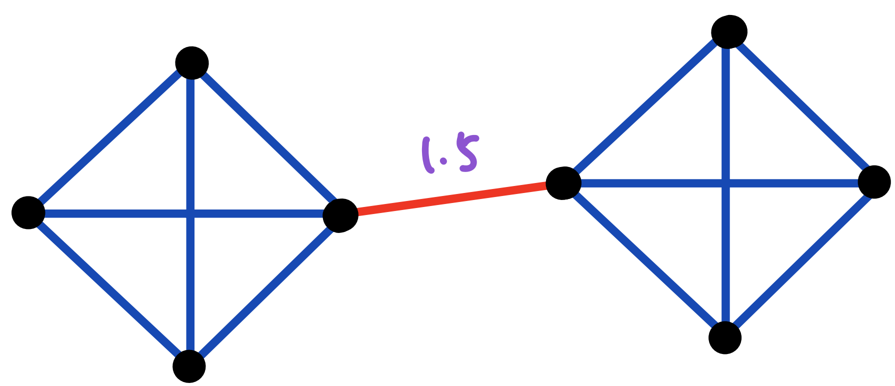
1. 输入图 $G = (V, E, w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i = n, n-1, \ldots, 3$ do
   a. 按顺序选取一条边 $e \in E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2 = \{s, t\}$ 对应所求划分，$E_2 = \{e\}$ 对应割边

问题：按什么顺序收缩边？

思路 1：贪心

1. 输入图 $G = (V, E, w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i = n, n-1, \ldots, 3$ do
   a. 选取权值最大的边 $e \in E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2 = \{s, t\}$ 对应所求划分，$E_2 = \{e\}$ 对应割边

能得到正确答案吗？



思路 2：随机 sample

1. 输入图 $G=(V,E,w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i=n,n-1,\ldots,3$ do
   a. 以概率分布 $\frac{w(e)}{\sum_{e\in E_i} w(e)}$ 随机取边 $e \sim E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2=\{s,t\}$ 对应所求划分，$E_2=\{e\}$ 对应割边

分析

1. 输入图 $G = (V, E, w)$，初始化 $V_n \leftarrow V, E_n \leftarrow E$
2. For $i = n, n-1, \ldots, 3$ do
   a. 以概率分布 $\frac{w(e)}{\sum_{e \in E_i} w(e)}$ 随机取边 $e \sim E_i$，收缩
   b. 相应更新 V_{i-1}, E_{i-1} 及边权 $\{w(e)\}$
3. $V_2 = \{s, t\}$ 对应所求划分，$E_2 = \{e\}$ 对应割边

固定一个最小割 S。算法返回 S 当且仅当 S 中的边从未被收缩，称为 S 存活

第 n 轮 $(i = n)$ 收缩边，S 存活的概率是？

假设第 $n, n-1, \ldots, i+1$ 轮收缩边 S 均存活。那么第 i 轮收缩边，S 存活的概率是？

分析

引理

假设 S 是 $G=(V,E)$ 的最小割，则 $w(S) \leq \frac{2}{n} w(E)$

分析

定理

对 G 的任意一个最小割 S，算法返回 S 的概率至少是 $\frac{2}{n(n-1)}$

推论

若 $|V| = n$，则 G 至多有 $\binom{n}{2}$ 个最小割

成功概率

定理

对 G 的任意一个最小割 S，算法返回 S 的概率至少是 $\frac{2}{n(n-1)}$

- $O(n^2 \log n)$ 次独立重复试验，以高概率至少成功一次
- 时间复杂度 $O(mn^2 \log n)$
- 能否改进？