网络流

岳镝

2025 年 4 月 18 日

容量网络

容量网络：有向连通图 $G=(V,E)$，边权（容量）$c(e)\geq 0$，源点 $s\in V$，汇点 $t\in V$

两个假设：

(1) 不存在平行边

(2) 源点入度为 0，汇点出度为 0

流

函数 $f\colon E \to \mathbb{R}$ 称为 G 的一个可行流，若满足

(1) 容量限制：$\forall (u,v) \in E,\ 0 \le f(u,v) \le c(u,v)$

(2) 平衡条件：$\forall u \in V \setminus \{s,t\}$,

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v,u)$$

流量

可行流 f 的流量定义为

$$|f| := \sum_{(s,v)\in E} f(s,v)$$

两个性质：

(1) $|f| = \sum_{(s,v)\in E} f(s,v) = \sum_{(v,t)\in E} f(v,t)$

(2) 若子集 $S \subseteq V$ 满足 $s \in S$，则

$$|f| = \underbrace{\sum_{u\in S}\sum_{v\in V\setminus S} f(u,v)}_{\text{流出}} - \underbrace{\sum_{u\in S}\sum_{v\in V\setminus S} f(v,u)}_{\text{流入}}$$

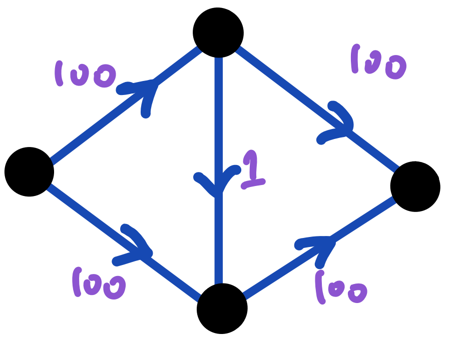
最大流及其算法

目标：找 G 上的可行流 f，使得 $|f|$ 最大

最大流及其算法

目标：找 G 上的可行流 f，使得 $|f|$ 最大

基本思想：不断寻找当前 G 中的增广路径，逐步增大 $|f|$，有限步后收敛



- 任意增广路径 (Ford-Fulkerson): $O(mf^*)$
- 最短增广路径 (Edmonds-Karp): $O(nm^2)$
- 分层辅助网络 + 前向增广路径 (Dinic): $O(n^3)$
- ...

一个小常识：最大流问题的 state-of-the-art 算法做到近线性复杂度：$\tilde{O}(m^{1+o(1)})$ （假设容量 $\le \mathrm{poly}(n)$）

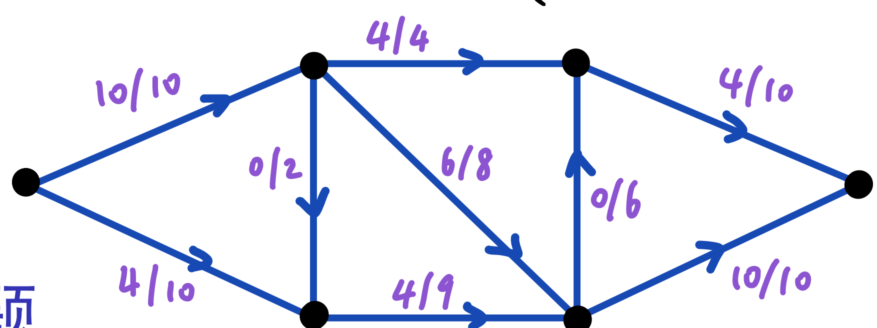
- *Maximum Flow and Minimum-Cost Flow in Almost-Linear Time* (Chen-Kyng-Liu-Peng-Gutenberg-Sachdeva, FOCS 2022 Best Paper)

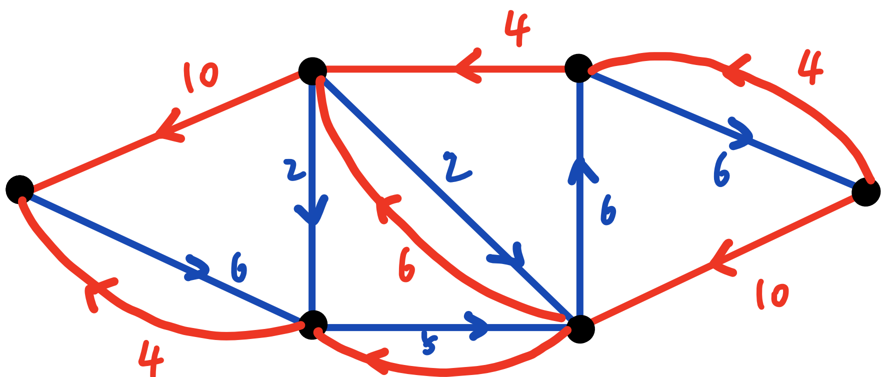
增广路径与辅助网络

增广路径：前向边非饱和，后向边非零流

辅助网络：$G_f = (V, E_f)$，以及容量

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), & (u,v) \in E, \\ f(v,u), & (v,u) \in E, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$





命题

f 是 G 上的最大流当且仅当 G 中不存在 $s \to t$ 增广路径（G_f 中不存在 $s \to t$ 路径）

正确性

命题

f 是 G 上的最大流当且仅当 G 中不存在 $s \to t$ 增广路径（G_f 中不存在 $s \to t$ 路径）

证明.

以下命题等价

(1) f 是最大流

(2) G 中不存在 $s \to t$ 增广路径

(3) 存在一个割 $C = (S, T)$，满足 $c(S, T) = |f|$

□

正确性

命题

f 是 G 上的最大流当且仅当 G 中不存在 $s \to t$ 增广路径（G_f 中不存在 $s \to t$ 路径）

证明.

以下命题等价

(1) f 是最大流

(2) G 中不存在 $s \to t$ 增广路径

(3) 存在一个割 $C = (S, T)$，满足 $c(S, T) = |f|$

$\square$

推论（最大流-最小割定理）

最大流 $=$ 最小割

最大流-最小割定理与对偶线性规划