

# 动态规划

岳镒

2025 年 3 月 14 日

# 动态规划

动态规划通常处理的是优化问题

- ▶ 理解优化的目标函数和约束条件
- ▶ 确定什么是状态，需要多少维来表示
- ▶ 怎样下降到一个子问题？
  - ▶ 通常可能需要“枚举”某个状态
- ▶ 递推关系
  - ▶ 列递推方程
  - ▶ 确定初始/边界条件
  - ▶ 标记函数
- ▶ 时间复杂度
  - ▶ 通常可以先确定空间复杂度（状态的总数），然后看每一步递推的时间复杂度

# 最长上升子序列

设正整数序列  $\{a_i\}_{i=1}^n$  各项互不相等, 求  $\{a_i\}_{i=1}^n$  的最长单调递增子序列的长度。

m

$f(m) :=$  以  $a_m$  结尾的最长 ↑ 子序列

$$\left\{ \begin{array}{l} f(m) = \max_{\substack{i \leq m \\ \underline{a_i} < a_m}} \{ f(i) \} + \underline{1} \\ f(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$O(n) \times O(n) = O(n^2)$$

# 最长上升子序列



设正整数序列  $\{a_i\}_{i=1}^n$  各项互不相等, 求  $\{a_i\}_{i=1}^n$  的最长单调递增子序列的长度。

$g_j :=$  长为  $j$  的 ↑ 子序列末尾元素的 min

$g_j^{(i)} :=$  前  $i$  个元素中



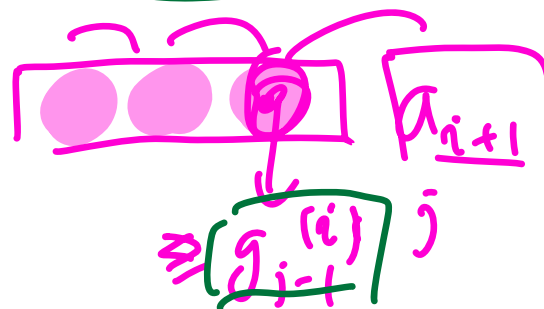
$$g_1^{(n)} \leq g_2^{(n)} \leq \dots \leq g_n^{(n)}$$

↓  $\boxed{a_{i+1}}$

$$g_1^{(i+1)} \quad g_2^{(i+1)} \quad \dots \quad g_n^{(i+1)}$$

$$g_j^{(i+1)} < g_j^{(i)}$$

$$g_{j-1}^{(i)} < a_{i+1} < g_j^{(i)}$$



Limit:  $g_1^{(1)} = a_1$      $g_j^{(1)} = +\infty$      $j \geq 2$

$O(n \log n)$

Iteration i.

① Find j. s.t.

$$\underline{g_{j-1}^{(i-1)}} < a_i < \underline{g_j^{(i-1)}}$$

$O(\log n)$

② Update  $g_j^{(i)} \leftarrow a_i$

$$g_1^{(n)} \leq g_2^{(n)} \leq \dots \leq g_n^{(n)}$$

$$l = \max\{j : \underline{g_j^{(n)}} < +\infty\}$$

## 2018 期中

五一期间，小江同学计划开车从 A 地出发，到相距为  $L$  公里的 B 地探险。在 A 地到 B 地的途中有  $n$  个加油站，它们分别分布在距离 A 地  $d_i, i = 1, 2, \dots, n$  公里的位置，每个加油站可以提供  $V_i$  升的汽油。一开始小江同学的汽车上有  $S$  升汽油，汽车每行驶一公里需要耗油一升，假设汽车油箱容量无穷。

小江同学希望在从 A 地和 B 地的途中用汽油换购一些土特产。在 A 地到 B 地的途中有  $m$  个售卖土特产的商店，它们分别分布在距离 A 地  $e_j, j = 1, 2, \dots, m$  公里的位置。在每一个商店，小江同学可以使用  $p_j$  升的汽油换购一些价值为  $c_j$  的商品，或者选择什么都不换购。在小江同学能够顺利到达 B 地的前提下，请问她最多能换购多少价值的土特产？

# 树形 DP

某大学有  $n$  个职员，编号为  $1, 2, \dots, n$ 。他们之间有从属关系，也就是说他们的关系就像一棵以校长为根的树，父结点就是子结点的直接上司。现在有个周年庆宴会，宴会每邀请来一个职员都会增加一定的快乐指数  $r_i$ ，但是呢，如果某个职员的直接上司来参加舞会了，那么这个职员就无论如何也不肯来参加舞会了。所以，请你计算，邀请哪些职员可以使快乐指数最大，求最大的快乐指数。