递推方程

岳镝

2025 年 2 月 28 日

递推方程的求解方法

- 迭代法
  - 直接迭代：$T(n) \leftarrow T(n-1)$
  - 换元迭代：$T(n) \leftarrow T(n/b)$
  - 差消迭代：$T(n) \leftarrow \sum_{i<n} T(i)$
- 递归树
- 尝试法：用于分析，需要归纳证明
- 主定理：$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

主定理

设 $a \geq 1, b > 1$ 为常数，$f(n)$ 为函数，$T(n)$ 为非负整数，且

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

则

(1) 若 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \varepsilon > 0$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) 若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) 若 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}), \varepsilon > 0$，且对于某个常数 $c < 1$ 和所有充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

主定理

设 $a \geq 1, b > 1$ 为常数，$f(n)$ 为函数，$T(n)$ 为非负整数，且

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

则

(1) 若 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \varepsilon > 0$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) 若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

(3) 若 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}), \varepsilon > 0$，且对于某个常数 $c < 1$ 和所有充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

- 直觉：$T_1(n) = aT_1(n/b)$, $T_2(n) = f(n)$，比较谁（在多项式意义下）dominate
- 主定理失效：sub-polynomial 意义下 dominate。例子：$T(n) = 2T(n/2) + n \log n$
- 怎么理解情形 (3)?

主定理失效

一般结果

若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$。

情形 (3)?

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

- 若 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon}), \varepsilon > 0$，且对于某个常数 $c < 1$ 和所有充分大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$