МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский Авиационный Институт»
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа
по курсу «Фундаментальная
информатика»
I семестр
Задание 3
«Вещественный тип. Приближенные вычисления.
Табулирование функций»

Группа	М8О-109Б-22
Студент	Нгуен Н. Х. А.
Преподаватель	Сысоев М. А.
Оценка	
Дата	27 декабря 2022 г.

Москва, 2022

Задание

Составить программу на Си, которая печатает таблицу значений элементарной функции, вычисленной двумя способами: по формуле Тейлора и с помощью встроенных функций языка программирования. В качестве аргументов таблицы взять точки разбиения отрезка [a, b] на n равных частей (n+1 точка включая концы отрезка), находящихся в рекомендованной области хорошей точности формулы Тейлора. Вычисления по формуле Тейлора проводить по экономной в сложностном смысле схеме с точностью ε * k, где ε - машинное эпсилон аппаратно реализованного вещественного типа для данной ЭВМ, а k – экспериментально подбираемый коэффициент, обеспечивающий приемлемую сходимость. Число итераций должно ограничиваться сверху числом порядка 100. Программа должна обеспечивать корректные размеры генерируемой таблицы.

Вариант 1:

№	ряд	a	b	функция
1	$\frac{x}{9} - \frac{x^3}{9^2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$	-1.0	1.0	$\frac{x}{9+x^2}$

Теоретическая часть

Формула Тейлора — формула разложения функции в бесконечную сумму степенных функций. Формула широко используется в приближённых вычислениях, так как позволяет приводить трансцендентных функций к более простым. Сама она является следствием теоремы Лагранжа о среднем значении дифференцируемой функции. В случае a=0 формула называется рядом Маклорена.

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Машинное эпсилон — числовое значение, меньше которого невозможно задавать относительную точность для любого алгоритма, возвращающего вещественные числа. Абсолютное значение для машинного эпсилон зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и от разрядности используемых при расчёте чисел. Формально это машинное эпсилон определяют как число, удовлетворяющее равенству 1 + ε = 1. Фактически, два отличных от нуля числа являются равными с точки зрения машинной арифметики, если их модуль разности меньше или не превосходит машинное эпсилон.

В языке Си машинные эпсилон определено для следующих типов: float – 1.19 * 10-7, double – 2.20 * 10-16, long double – 1.08 * 10-19

.

Алгоритм решения

Для каждой из строк таблицы нужно просуммировать члены формулы Тейлора до тех пор, пока новые члены ряда больше или равны ε*k. Для этого просто ищем каждый новый член из формулы Тэйлора и суммируем с результатом.

Использованные в программе переменные

Название переменной	Тип переменной	Смысл переменной
a	long double	Начало отрезка
b	long double	Конец отрезка
iter	int	Число n, на которое нужно разбить отрезок
x	long double	Значения в промежутке [a;b], для которого вычисляются значения
step	long double	Значение, прибавляемое к x на каждом шаге
k	long double	Коэффициент для вычисления точности
t	long double	Текущий член ряда Тейлора
sum	long double	Сумма ряда Тейлора
count	int	Количество итераций вычисления
LDBL_EPSILON	long double	Машинный эпсилон. Для long double ε = $1.08 * 10^{-19}$

Исходный код программы:

```
#include <stdio.h>
#include <float.h>
#include <math.h>
#include <assert.h>

long double f(long double x) {
   return x / (9 + x * x);
}

void create_table() {
   printf("                    Taylor series values table for f(x) = x / (9 + x^2)\n");
   printf(" -------------------------------------------------------------------------------------\n");
   printf("| x \t| Taylor series\t\t     | Function\t\t          | Iters | Difference\t\t      |\n");
   printf(" -------+-----------------------+-----------------------+-------+-----------------------\n");
}

void print_row(long double x, long double sum, int iter) {
   if (sum < 0) {
      printf("| %.2Lf\t| %.19Lf | %.19Lf | %d\t  | %.19Lf |\n", x, sum, f(x), iter, fabsl(f(x) - 
sum));
   } else {
      printf("| %.2Lf\t| %.19Lf  | %.19Lf  | %d\t  | %.19Lf |\n", x, sum, f(x), iter, fabsl(f(x) - 
sum));
   }
}



int main() {
   const long double a = -1,
                  b = 1;
   long double sum, t, k;
```

```
}

    int count = 0;
    int iter;

    printf("Enter number of iterations (n): ");
    scanf("%d", &iter);
    assert((iter > 0) && "Enter positive number!");
    printf("Enter the coefficient (k): ");
    scanf("%Lf", &k);
    printf("\n\n");
    create_table();

    long double step = (b - a) / iter;
    for (long double x = a; x <= b; x += step) {
        for (int n = 0; n < 99; ++n) {
            t = powl(-1, n) * powl(x, 2 * n + 1) / powl(9, n + 1);
            sum += t;
            ++count;
            if (fabsl(sum - f(x)) < LDBL_EPSILON * k) {
                break;
            }
        }
        print_row(x, sum, count);
        sum = 0;
        count = 0;
    }

    printf(" ------------------------------------------------------------------------------------------\n");
    printf("* machine epsilon (long double) = %.10Le\n", LDBL_EPSILON);
}
```

Входные данные

Единственная строка содержит два целых числа n – число разбиений отрезка на равные части, k — коэффициент для вычисления точности формулы Тейлора.

Выходные данные

Программа должна вывести n+1 строку, в каждой из которых должно быть значение x, для которого вычисляется функция, число P — значение, вычисленное с помощью формулы Тейлора, Q – значение, вычисленное с помощью встроенных функций языка, i – количество итераций, требуемых для вычисления, и Δ – разница значений P и Q по модулю.

Протокол исполнения и тесты

Тест №1

Входные данные:

10

20

Выходные данные:

```
Enter number of iterations (n): 10
Enter the coefficient (k): 20

                    Taylor series values table for f(x) = x / (9 + x^2)
 -------------------------------------------------------------------------------------------
| x      | Taylor series          | Function               | Iters | Difference             |
 --------+------------------------+------------------------+-------+------------------------
| -1.00 | -0.0999999999999999778 | -0.1000000000000000056 | 99    | 0.0000000000000000278 |
| -0.80 | -0.0829875518672199136 | -0.0829875518672199136 | 14    | 0.0000000000000000000 |
| -0.60 | -0.0641025641025641107 | -0.0641025641025641107 | 12    | 0.0000000000000000000 |
| -0.40 | -0.0436681222707423627 | -0.0436681222707423627 | 10    | 0.0000000000000000000 |
| -0.20 | -0.0221238938053097446 | -0.0221238938053097446 | 7     | 0.0000000000000000000 |
| -0.00 | -0.0000000000000000062 | -0.0000000000000000062 | 1     | 0.0000000000000000000 |
| 0.20  | 0.0221238938053097342  | 0.0221238938053097307  | 99    | 0.0000000000000000035 |
| 0.40  | 0.0436681222707423558  | 0.0436681222707423558  | 9     | 0.0000000000000000000 |
| 0.60  | 0.0641025641025640969  | 0.0641025641025641107  | 99    | 0.0000000000000000139 |
| 0.80  | 0.0829875518672199136  | 0.0829875518672199136  | 14    | 0.0000000000000000000 |
| 1.00  | 0.0999999999999999778  | 0.1000000000000000056  | 99    | 0.0000000000000000278 |
 ------------------------------------------------------------------------------------------
* machine epsilon (long double) = 1.0842021725e-19
```

Тест №2

Входные данные:

8

2

Выходные данные:

```
Enter number of iterations (n): 8
Enter the coefficient (k): 2

                     Taylor series values table for f(x) = x / (9 + x^2)
 ------------------------------------------------------------------------------------------
| x      | Taylor series          | Function               | Iters  | Difference             |
 -------+------------------------+------------------------+-------+------------------------
| -1.00 | -0.0999999999999999778 | -0.1000000000000000056 | 99     | 0.0000000000000000278 |
| -0.75 | -0.0784313725490196068 | -0.0784313725490196068 | 14     | 0.0000000000000000000 |
| -0.50 | -0.0540540540540540432 | -0.0540540540540540571 | 99     | 0.0000000000000000139 |
| -0.25 | -0.0275862068965517203 | -0.0275862068965517238 | 99     | 0.0000000000000000035 |
| 0.00  | 0.0000000000000000000  | 0.0000000000000000000  | 1      | 0.0000000000000000000 |
| 0.25  | 0.0275862068965517203  | 0.0275862068965517238  | 99     | 0.0000000000000000035 |
| 0.50  | 0.0540540540540540432  | 0.0540540540540540571  | 99     | 0.0000000000000000139 |
| 0.75  | 0.0784313725490196068  | 0.0784313725490196068  | 14     | 0.0000000000000000000 |
| 1.00  | 0.0999999999999999778  | 0.1000000000000000056  | 99     | 0.0000000000000000278 |
 ------------------------------------------------------------------------------------------
* machine epsilon (long double) = 1.0842021725e-19
```

Тест №3

Входные данные:

6

13

Выходные данные:

```
Enter number of iterations (n): 6
Enter the coefficient (k): 13

                     Taylor series values table for f(x) = x / (9 + x^2)
 ------------------------------------------------------------------------------------------
| x      | Taylor series          | Function               | Iters  | Difference             |
 -------+------------------------+------------------------+-------+------------------------
| -1.00 | -0.0999999999999999778 | -0.1000000000000000056 | 99     | 0.0000000000000000278 |
| -0.67 | -0.0705882352941176600 | -0.0705882352941176600 | 13     | 0.0000000000000000000 |
| -0.33 | -0.0365853658536585483 | -0.0365853658536585483 | 9      | 0.0000000000000000000 |
| -0.00 | -0.0000000000000000123 | -0.0000000000000000123 | 1      | 0.0000000000000000000 |
| 0.33  | 0.0365853658536585205  | 0.0365853658536585205  | 9      | 0.0000000000000000000 |
| 0.67  | 0.0705882352941176322  | 0.0705882352941176322  | 13     | 0.0000000000000000000 |
| 1.00  | 0.0999999999999999778  | 0.0999999999999999778  | 17     | 0.0000000000000000000 |
 ------------------------------------------------------------------------------------------
* machine epsilon (long double) = 1.0842021725e-19
```

Вывод

Из-за того, что существует понятие ограниченности разрядной сетки, вещественные числа имеют диапазон представления в памяти компьютера, что неизбежно приводит к тому, что в вычислениях в окрестности границ этого диапазона возникают погрешности.

Вычисление значения функции по ряду Тейлора требует много процессорного времени, что неэффективно в перспективе глобального применения.