Лекция 7

7.1. Классические и квантовые случайные процессы

Целью лекции будет рассказ о том, как классические винеровский и пуассоновский случайные процессы вкладываются в симметричное (бозонное) пространство Фока. Что касается винеровского процесса, идеология такого вложения следует разложению Винера–Ито пространства L^2-функционалов от броуновского движения [12]. Вложение пуассоновского процесса было предложено в пионерской работе [32].

Всюду ниже T обозначено одно из множеств $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_+$.

Определение 7.1. Однопараметрическое множество случайных величин $\{\xi_t,\ t \in T\}$ называется (*классическим*) *случайным процессом*, если задано совместное распределение вероятностей:

$$Pr(\xi_{t_1} \in B_1, \ldots, \xi_{t_n} \in B_n)$$

для любого выбора индексов $t_j \in T$ и подмножеств $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Определение 7.2. Процесс $\{\xi_t,\ t \in T\}$ называется *случайным процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины $\xi_{t_1} - \xi_{s_1}$ и $\xi_{t_2} - \xi_{s_2}$ независимы при любом выборе непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2)$.

Пример 7.1. Случайный процесс с независимыми приращениями $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *винеровским*, если $\xi_t - \xi_s \in \mathcal{N}(0, t-s)),\ s < t$, то есть распределение вероятностей $\xi_t - \xi_s$ является гауссовским:

$$Pr(\xi_t - \xi_s \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int\limits_B exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx,$$

$s < t,\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Пример 7.2. Случайный процесс с независимыми приращениями $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *пуассоновским*, если $\xi_t - \xi_s \in \mathcal{P}(t-s),\ s < t$, то есть распределение вероятностей $\xi_t - \xi_s$ является пуассоновским:

$$Pr(\xi_t - \xi_s = k) = e^{-t+s}\frac{(t-s)^k}{k!},$$

$s < t,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

Определение классических случайных процессов с независимыми приращениями может быть перенесено на квантовый случай в следующей форме:

Определение 7.3. Пара $(\{X_t,\ t \in T\}, \rho)$, состоящая из семейства наблюдаемых $X_t \in \mathfrak{A}$ и состояния $\rho \in \mathfrak{S}$, называется *квантовым случайным процессом с независимыми приращениями*, если приращения процесса $X_{st} = X_t - X_s$ коммутируют (наблюдаемые совместимы):

$$[X_{s_1t_1}, X_{s_2t_2}] = 0$$

для непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$ и классические случайные величины $\xi_{s_jt_j}$ с совместным распределением, определяемым формулой (см. определение 3.15):

$$Pr(\xi_{s_1t_1} \in B_1, \ldots, \xi_{s_nt_n} \in B_n) = \mathrm{Tr}(\rho E_1(B_1) \ldots E_n(B_n)),$$

где (E_j) – проекторозначные меры, отвечающие наблюдаемым $(X_{s_jt_j})$, независимы.

7.2. Симметричное пространство Фока

Рассмотрим тензорное произведение $H^{\otimes^n}$, состоящее из n копий гильбертова пространства H. Скалярное произведение в $H^{\otimes^n}$ задаётся на элементарных тензорах формулой

$$\langle f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \rangle_{H^{\otimes^n}} = \prod_{j=1}^{n} \langle f_j, g_j \rangle_H,$$

$f_j, g_j \in H$, и продолжается затем на всё пространство по линейности.

Определим ортогональный проектор $P_s : H^{\otimes^n} \to H^{\otimes^n}$ по формуле

$$P_s e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_n = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S} e_{s(1)} \otimes \cdots \otimes e_{s(n)},$$

где суммирование ведётся по множеству S, состоящему из всех перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$ и $e_j \in H$.

Определение 7.4. Подпространство $H^{\otimes^n_s} = P_s H^{\otimes^n}$ называется *симметризованным тензорным произведением* n копий пространства H.

Определение 7.5. Гильбертово пространство:

$$F(H) = \{\mathbb{C}\Omega\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H^{\otimes^n_s}$$

называется *симметричным* (*бозонным*) *пространством Фока.* Фиксированный вектор Ω называется *вакуумным*, пространство H – *одночастичным*, а пространства $H^{\otimes_s^n}$ – *n-частичными.*

Ранее мы рассматривали модель квантового гармонического осциллятора. Нашей целью теперь будет построение модели бесконечного множества квантовых гармонических осцилляторов в гильбертовом пространстве $F(H)$. Модель, которую мы построим, будет сводится к единичному осциллятору, когда $\dim H = 1$. Следующее определение даёт аналог когерентных состояний для $F(H)$.

Определение 7.6. Для $f \in H$ элемент $e(f) \in F(H)$, определяемый формулой

$$e(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{\otimes^n}}{\sqrt{n!}},$$

называется *экспоненциальным вектором.*

Непосредственно проверяется, что скалярное произведение экспоненциальных векторов равно

$$\langle e(f), e(g)\rangle_{F(H)} = e^{\langle f,g\rangle_H}. \tag{7.1}$$

Лемма 7.1. *Линейные комбинации экспоненциальных векторов из множества*

$$\{e(f),\ f \in H\}$$

плотны в $F(H)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{d^n}{dt^n}(e(tf))|_{t=0} = \sqrt{n!}f^{\otimes^n}.$$

С другой стороны, множество линейных комбинаций элементарных тензоров вида $f^{\otimes^n}$ позволяет выразить любой элементарный тензор из $H^{\otimes_s^n}$. Докажем это по индукции. Для $n = 2$ получаем

$$f \otimes g + g \otimes f = (f + g) \otimes (f + g) - f \otimes f - g \otimes g. \tag{7.2}$$

Пусть утверждение доказано для n. Докажем его для $n + 1$. Рассмотрим элемент h, представляющий собой симметризованное тензорное произведение f и $g^{\otimes n}$:

$$h = f \otimes g^{\otimes^n} + g \otimes f \otimes g^{\otimes^{n-1}} + \cdots + g^{\otimes^n} \otimes f, \tag{7.3}$$

где $f, g \in H$. Утверждение верно, если из равенства нулю скалярного произведения

$$\langle h, u^{\otimes^{n+1}} \rangle_{H^{\otimes^{n+1}}} = 0 \tag{7.4}$$

для любого $u \in H$ следует, что

$$h = 0.$$

Заметим, что

$$\langle h, u^{\otimes^{n+1}} \rangle_{H^{\otimes^{n+1}}} = (n+1)\langle f, u\rangle_H \langle g, u\rangle_H^n. \tag{7.5}$$

Положим $u = f$, тогда из (7.4)–(7.5) вытекает $\langle g, f\rangle_H = 0$ для всех $f \in H$, так что $g = 0$. Аналогично, подставляя $u = g$, получаем, что $f = 0$. Тем самым $h = 0$. □

В силу леммы 7.1 любой линейный оператор в $F(H)$ достаточно задать на экспоненциальных векторах. Экспоненциальные вектора обладают ещё одним важным свойством, которое нам потребуется в дальнейшем.

Лемма 7.2. *Отображение $U : F(H \oplus K) \to F(H) \otimes F(K)$, заданное на экспоненциальных векторах формулой*

$$U(e(f \oplus g)) = e(f) \otimes e(g),\ f \in H,\ g \in K,$$

является унитарным оператором.

Доказательство. Нам нужно доказать, что U сохраняет скалярное произведение. Заметим, что

$$\langle e(f_1)\otimes e(g_1), e(f_2)\otimes e(g_2)\rangle_{F(H)\otimes F(K)} = \langle e(f_1), e(f_2)\rangle_{F(H)} \langle e(g_1), e(g_2)\rangle_{F(K)} =$$

$$= e^{\langle f_1, f_2\rangle_H + \langle g_1, g_2\rangle_K}, f_j \in H,\ g_k \in K.$$

С другой стороны,

$$\langle e(f_1 \oplus g_1), e(f_2 \oplus g_2)\rangle_{F(H\oplus K)} = e^{\langle f_1, f_2\rangle_H + \langle g_1, g_2\rangle_H},$$

$f_j \in H,\ g_k \in K$. □

Для $f \in H$ определим оператор $a(f)$ на экспоненциальных векторах по формуле

$$a(f)e(g) = \langle f, g\rangle e(g),\ g \in H. \tag{7.6}$$