стью точки x, которая вообще не содержит точек F, т. е. $O(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus F$ и, следовательно, множество $\mathbb{R}^m \setminus F = \mathbb{R}^m \setminus \overline{F}$ открыто, т. е. F замкнуто в $\mathbb{R}^m$. ►

3. Компакты в $\mathbb{R}^m$

Определение 8. Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется *компактом*, если из любого покрытия K множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$, можно выделить конечное покрытие.

Пример 12. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ является компактом в $\mathbb{R}^1$ в силу леммы о конечном покрытии.

Пример 13. Обобщением отрезка в $\mathbb{R}^m$ является множество

$$I = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, m\},$$

которое называется *m-мерным промежутком*, m-мерным брусом или m-мерным параллелепипедом.

Покажем, что I — компакт в $\mathbb{R}^m$.

◄ Предположим, что из некоторого открытого покрытия I нельзя выделить конечное покрытие. Разделив каждый из координатных отрезков $I^i = \{x^i \in \mathbb{R} \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ пополам, мы разобьем промежуток I на 2^m промежутков, из которых по крайней мере один не допускает конечного покрытия множествами нашей системы. С ним поступим так же, как и с исходным промежутком. Продолжая этот процесс деления, получим последовательность вложенных промежутков $I = I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, ни один из которых не допускает конечного покрытия. Если $I_n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a_n^i \leqslant x^i \leqslant b_n^i,\ i = 1, \ldots, m\}$, то при каждом $i \in \{1, \ldots, m\}$ координатные отрезки $a_n^i \leqslant x^i \leqslant b_n^i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют, по построению, систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Найдя при каждом $i \in \{1, \ldots, m\}$ точку $\xi^i \in \left[a_n^i, b_n^i\right]$, общую для всех этих отрезков, получим точку $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$, принадлежащую всем промежуткам $I = I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ Поскольку $\xi \in I$, то найдется такое открытое множество G нашей системы покрывающих множеств, что $\xi \in G$. Тогда при некотором $\delta > 0$ также $B(\xi; \delta) \subset G$. Но по построению в силу соотношения (2) найдется номер N такой, что $I_n \subset B(\xi; \delta) \subset G$ при $n > N$, и мы вступаем в противоречие с тем, что промежутки I_n не допускают конечного покрытия множествами данной системы. ►

Утверждение 3. *Если K — компакт в $\mathbb{R}^m$, то*

a) *K — замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$;*

b) *любое замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащееся в K, само является компактом.*

◀ a) Покажем, что любая точка $a \in \mathbb{R}^m$, предельная для K, принадлежит K. Пусть $a \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ построим такую окрестность $G(x)$, что точка a обладает окрестностью, не имеющей с $G(x)$ общих точек. Совокупность $\{G(x)\}$, $x \in K$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие компакта K, из которого выделяется конечное покрытие $G(x_1), \dots, G(x_n)$. Если теперь $O_i(a)$ — такая окрестность точки a, что $G(x_i) \cap O_i(a) = \varnothing$, то множество $O(a) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(a)$ также является окрестностью точки a, причем, очевидно, $K \cap O(a) = \varnothing$. Таким образом, a не может быть предельной точкой для K.

b) Пусть F — замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество и $F \subset K$. Пусть $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathrm{A}$, — покрытие F множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$. Присоединив к нему еще одно открытое множество $G = \mathbb{R}^m \setminus F$, получим открытое покрытие $\mathbb{R}^m$ и, в частности, K, из которого извлекаем конечное покрытие K. Это конечное покрытие K будет покрывать также множество F. Замечая, что $G \cap F = \varnothing$, можно сказать, что если G входит в это конечное покрытие, то, даже удалив G, мы получим конечное покрытие F множествами исходной системы $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathrm{A}$. ▶

Определение 9. *Диаметром* множества $E \subset \mathbb{R}^m$ называется величина

$$d(E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} d(x_1, x_2).$$

Определение 10. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Утверждение 4. *Если K — компакт в $\mathbb{R}^m$, то K — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^m$.*

◀ Возьмем произвольную точку $a \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим последовательность шаров $\{B(a; n)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Они образуют открытое покрытие $\mathbb{R}^m$, а следовательно, и K. Если бы K не было ограниченным множеством, то из этого покрытия нельзя было бы извлечь конечное покрытие K. ▶

Утверждение 5. *Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ является компактом в том и только в том случае, если K замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^m$.*

◀ Необходимость этих условий нами уже показана в утверждениях 3 и 4.

Проверим достаточность этих условий. Поскольку K — ограниченное множество, то найдется m-мерный промежуток I, содержащий K. Как было показано в примере 13, I является компактом в $\mathbb{R}^m$. Но если K — замкнутое множество, содержащееся в компакте I, то по утверждению 3b) оно само является компактом. ▶

Задачи и упражнения

1. *Расстоянием* $d(E_1, E_2)$ *между множествами* $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^m$ называется величина

$$d(E_1, E_2) := \inf_{x_1 \in E_1, x_2 \in E_2} d(x_1, x_2).$$

Приведите пример замкнутых в $\mathbb{R}^m$ множеств E_1, E_2 без общих точек, для которых $d(E_1, E_2) = 0$.

2. Покажите, что

a) замыкание $\overline{E}$ в $\mathbb{R}^m$ любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ является множеством, замкнутым в $\mathbb{R}^m$;

b) множество ∂E граничных точек любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ является замкнутым множеством;

c) если G — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, а F замкнуто в $\mathbb{R}^m$, то $G \setminus F$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^m$.

3. Покажите, что если $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ — последовательность вложенных компактов, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$.

4. a) В пространстве $\mathbb{R}^k$ двумерная сфера S^2 и окружность S^1 расположились так, что расстояние от любой точки сферы до любой точки окружности одно и то же. Может ли такое быть?

b) Рассмотрите задачу a) для произвольных по размерности сфер S^m, S^n в $\mathbb{R}^k$. При каком соотношении между m, n и k описанная ситуация возможна?

§ 2. Предел и непрерывность функции многих переменных

1. Предел функции. В главе III мы подробно изучили операцию предельного перехода для вещественнозначных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$, определенных на множестве X, в котором фиксирована база $\mathcal{B}$.

В ближайших параграфах нам предстоит рассматривать функции $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, определенные на подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$, со зна-