

Известно, что всегда $O(f) + o(f) = O(f)$, и $o(f) + o(f) = o(f)$, и $2o(f) = o(f)$ при фиксированной базе. Следует ли отсюда, что $o(f) \equiv 0$?

6. Известно, что произведение двух или любого конечного числа бесконечно малых является функцией бесконечно малой. Приведите пример, показывающий, что для бесконечных произведений это уже не всегда так.

7. Зная степенное разложение функции e^x , найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\ln(1+x)$.

8. Вычислите $\exp A$, когда A — одна из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Сколько членов ряда для e^x надо взять, чтобы получить многочлен, позволяющий вычислять e^x на отрезке $[-1, 2]$ с точностью до 10^{-3} ?

10. Зная степенные разложения функций $\sin x$ и $\cos x$, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x = 0$.

11. Длину стягивающего земной шар по экватору пояса увеличили на 1 метр, после чего поясок натянули, подперев вертикальным столбиком. Какова примерно высота столбика, если радиус Земли ≈ 6400 км.?

12. Вычислите

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} \right)^x$$

13. Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

а) $\log_{\cos x} \sin x$ б) $\operatorname{arctg} \frac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Покажите, что если вектор ускорения $a(t)$ в любой момент t ортогонален вектору $v(t)$ скорости движения, то величина $|v(t)|$ остается постоянной. 2. Пусть (x, t) и (\tilde{x}, \tilde{t}) — соответственно координата и время движущейся

дифференцируема на R , то f' непрерывна в любой точке $a \in R$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$$

где ξ -точка между a и x . Тогда если $x \rightarrow a$, то $\xi \rightarrow a$. По определению,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

и поскольку этот предел существует, то существует и равен ему предел правой части формулы Лагранжа, т. е. $f'(\xi) \rightarrow f'(a)$ при $\xi \rightarrow a$. Непрерывность f' в точке a «доказана». Где ошибка?

4. Пусть функция f имеет $n + 1$ производную в точке x_0 , и пусть $\xi = x_0 + \theta_x(x - x_0)$ - средняя точка в формуле Лагранжа остаточного члена $\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$, так что $0 < \theta_x < 1$. Покажите, что $\theta_x \rightarrow \frac{1}{n+1}$ при $x \rightarrow x_0$, если $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

5. а) Если функция $f \in C^{(n)}([a, b], R)$ в $n + 1$ точке отрезка $[a, b]$ имеет нули, то на этом отрезке имеется по крайней мере один нуль функции $f^{(n)}$ производной f порядка n . б) Покажите, что полином $P_n(x) = \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет n корней. (Указание: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ и $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(1) = 0$ при $k = 0, \dots, n - 1$.)

6. Вспомните геометрический смысл производной и покажите, что если функция f определена и дифференцируема на интервале I и $[a, b] \subset I$, то функция f' (даже не будучи непрерывной!) принимает на отрезке $[a, b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

7. Докажите неравенство

$$a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

где числа $a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ неотрицательны и $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

8. Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy)$$

поэтому естественно считать, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (формула Эйлера) и

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

9. Найдите форму поверхности жидкости, равномерно вращающейся в стакане.

10. Покажите, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0) имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ и что световые лучи от источника, помещенного в одном из фокусов $F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ эллипса с полуосями $a > b > 0$, собираются эллиптическим зеркалом в другом фокусе.

11. Частица без предварительного разгона под действием силы тяжести начинает скатываться с вершины ледяной горки эллиптического профиля. Уравнение профиля: $x^2 + 5y^2 = 1, y \geq 0$. Рассчитайте траекторию движения частицы до ее приземления.

12. Средним порядка α чисел x_1, x_2, \dots, x_n называют величину

$$s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha}$$

В частности, при $\alpha = 1, 2, -1$ получаем соответственно среднее арифметическое, среднее квадратичное и среднее гармоническое этих чисел.

Будем считать, что все числа x_1, x_2, \dots, x_n неотрицательны, а если степень $\alpha < 0$, то будем предполагать, что они даже положительны.

а) Используя неравенство Гёльдера, покажите, что если $\alpha < \beta$, то

$$s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) s_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

причем равенство имеет место, лишь когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

б) Покажите, что при стремлении α к нулю величина $s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ стремится к $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, т.е. к среднему геометрическому этих чисел.

С учетом результата задачи а) отсюда, например, следует классическое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим неотрицательных чисел (напишите его).

с) Если $\alpha \rightarrow +\infty$, то $s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а при $\alpha \rightarrow -\infty$ величина $s_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ стремится к меньшему из рассматриваемых чисел, т. е. к $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Докажите это. (функция времени). Считаем, что это непрерывно дифференцируемая функция на промежутке atb .

а) Можно ли, ссылаясь на теорему Лагранжа о среднем, утверждать, что на $[a, b]$ найдется момент ξ , такой что $r(b) - r(a) = r'(\xi) \cdot (b - a)$? Поясните ответ примерами.

б) Пусть $\text{Convex}\{r'\}$ - выпуклая оболочка множества (концов) векторов $r'(t), t \in [a, b]$. Покажите, что найдется вектор $v \in \text{Convex}\{r'\}$, такой что $r(b) - r(a) = v \cdot (b - a)$

с) Соотношение $|r(b) - r(a)| \leq \sup |r'(t)| \cdot |b - a|$, где верхняя грань берется по $t \in [a, b]$, имеет очевидный физический смысл. Какой? Докажите это неравенство как общий математический факт, развивающий классическую теорему Лагранжа о конечном приращении.