Например, если

$$y=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^3+2x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{2},$$

то

$$y'=2x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+\frac{4}{3},\quad y''=6x^2-x+4,$$

$$y'''=12x-1,\quad y''''=12,$$

так что все последующие производные равны тождественно нулю. Или пусть

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

тогда

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad y''=-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}},\quad y'''=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}\ \text{и т. д.}$$

Заметим, что по отношению к производным высших порядков так же, индуктивно, можно установить понятие *односторонней* производной [ср. n°**86**]. Если функция $y=f(x)$ определена лишь в некотором промежутке $\mathscr{X}$, то, говоря о производной любого порядка на *конце* его, всегда имеют в виду именно одностороннюю производную.

96. Общие формулы для производных любого порядка. Итак, для того, чтобы вычислить n-ю производную от какой-либо функции, вообще говоря, нужно предварительно вычислить производные всех предшествующих порядков. Однако в ряде случаев удается установить такое общее выражение для n-й производной, которое зависит непосредственно от n и не содержит более обозначений предшествующих производных.

При выводе таких общих выражений иногда бывают полезны формулы:

$$(cu)^{(n)}=c\cdot u^{(n)},\quad (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

обобщающие на случай высших производных известные читателю правила I и II n°**83**. Их легко получить последовательным применением этих правил.

1) Рассмотрим сначала степенную функцию $y=x^{\mu}$, где μ — любое вещественное число. Имеем последовательно:

$$y'=\mu x^{\mu-1},\quad y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},\ldots$$

Легко усмотреть отсюда и общий закон:

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

который доказывается по методу математической индукции.

Если, например, взять $\mu=-1$, то получим

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}.$$

Когда само μ есть натуральное число m, то m-я производная от x^m будет уже постоянным числом $m!$, а все следующие — нулями. Отсюда ясно, что и для целого многочлена степени m имеет место аналогичное обстоятельство.

2) Пусть теперь $y = \ln x$. Прежде всего, имеем

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Возьмем отсюда производную $(n-1)$-го порядка по соответствующей формуле из 1), заменив в ней n на $n-1$; мы и получим тогда

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3) Если $y = a^x$, то

$$y' = a^x \cdot \ln a, \quad y'' = a^x \cdot (\ln a)^2, \ldots$$

Общая формула

$$y^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$$

легко доказывается по методу математической индукции.

В частности, очевидно,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

4) Положим $y = \sin x$; тогда

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x,$$
$$y'''' = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \ldots$$

На этом пути найти требуемое общее выражение для n-й производной трудно. Но дело сразу упрощается, если переписать формулу для первой производной в виде $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; становится ясным, что при каждом дифференцировании к аргументу будет прибавляться $\frac{\pi}{2}$, так что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогично получается и формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

5) Остановимся еще на функции $y = \operatorname{arctg} x$. Поставим себе задачей выразить $y^{(n)}$ через y. Так как $x = \operatorname{tg} y$, то

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Дифференцируя вторично по x (и помня, что y есть функция от x), получим

$$y'' = \left[-\sin y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' =$$
$$= \cos^2 y \cdot \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следующее дифференцирование дает:

$$y''' = \left[-2\sin y \cdot \cos y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos^2 y \cdot \cos 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' =$$
$$= 2\cos^3 y \cdot \cos\left(3y + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y \cdot \sin 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Общая формула

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

оправдывается по методу математической индукции.

97. Формула Лейбница. Как мы заметили в начале предыдущего номера, правила I и II n°**83** непосредственно переносятся и на случай производных любого порядка. Сложнее обстоит дело с правилом III, относящимся к дифференцированию произведения.

Предположим, что функции u, v от x имеют каждая в отдельности производные до n-го порядка включительно; докажем, что тогда их произведение $y = uv$ также имеет n-ю производную, и найдем ее выражение.

Станем, применяя правило III, последовательно дифференцировать это произведение; мы найдем:

$$y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \ldots$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение степеней бинома: $u + v$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, $\ldots$, лишь вместо степеней u, v стоят производные соответствующих порядков. Сходство станет более полным, если