$$\text{a)}\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin (n+m)x - \sin (n-m)x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{n+m}\cos (n+m)x + \frac{1}{n-m}\cos (n-m)x\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

если $n-m \neq 0$. Случай, когда $n-m=0$, можно рассмотреть отдельно, и в этом случае, очевидно, вновь приходим к тому же результату.

$$\text{b)}\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)\, dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

$$\text{c)}\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Пример 3. Пусть $f \in \mathcal{R}[-a, a]$. Покажем, что

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx, & \text{если } f \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

Если $f(-x) = f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{a}^{0} f(-t)(-1)\, dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx =$$
$$= \int\limits_{0}^{a} f(-t)\, dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\, dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Если же $f(-x) = -f(x)$, то, как видно из тех же выкладок, получим

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\, dx = \int\limits_{0}^{a} 0\, dx = 0.$$

Пример 4. Пусть f — определенная на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ периодическая функция с периодом T, т. е. $f(x+T) = f(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

Если f — интегрируемая на каждом конечном отрезке функция, то при любом $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\, dx,$$

т. е. интеграл от периодической функции по отрезку длины периода T этой функции не зависит от положения отрезка интегрирования на числовой прямой:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx =$$
$$= \int_0^T f(x)\,dx + \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(t+T)\cdot 1\,dt =$$
$$= \int_0^T f(x)\,dx + \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Мы сделали замену $x = t + T$ и воспользовались периодичностью функции $f(x)$.

Пример 5. Пусть нам нужно вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sin x^2\,dx$, например, с точностью до 10^{-2}.

Мы знаем, что первообразная $\int \sin x^2\,dx$ (интеграл Френеля) не выражается в элементарных функциях, поэтому использовать формулу Ньютона—Лейбница здесь в традиционном смысле нельзя.

Поступим иначе. Исследуя в дифференциальном исчислении формулу Тейлора, мы в качестве примера (см. гл. V, § 3, пример 11) нашли, что на отрезке $[-1, 1]$ с точностью до 10^{-3} имеет место равенство

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 =: P(x).$$

Но если $|\sin x - P(x)| < 10^{-3}$ на отрезке $[-1, 1]$, то верно также, что $|\sin x^2 - P(x^2)| < 10^{-3}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Следовательно,

$$\left|\int_0^1 \sin x^2\,dx - \int_0^1 P(x^2)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 |\sin x^2 - P(x^2)|\,dx < \int_0^1 10^{-3}\,dx < 10^{-3}.$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int\limits_0^1 \sin x^2\,dx$ с нужной точностью достаточно вычислить интеграл $\int\limits_0^1 P(x^2)\,dx$. Но

$$\int_0^1 P(x^2)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10}\right) dx =$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3!\,7}x^7 + \frac{1}{5!\,11}x^{11}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\,7} + \frac{1}{5!\,11} = 0{,}310 \pm 10^{-3},$$

поэтому

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = 0{,}310 \pm 2\cdot 10^{-3} = 0{,}31 \pm 10^{-2}.$$

Пример 6. Величина $\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *интегральным средним значений функции на отрезке* $[a, b]$.

Пусть f — определенная на $\mathbb{R}$ и интегрируемая на любом отрезке функция.

Построим по f новую функцию

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt,$$

значение которой в точке x есть интегральное среднее значений f в δ-окрестности точки x.

Покажем, что функция $F_\delta(x)$ (называемая *усреднением* f) более регулярна по сравнению с f. Точнее, если f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, то $F_\delta(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а если $f \in C(\mathbb{R})$, то $F_\delta(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Проверим сначала непрерывность функции $F_\delta(x)$:

$$|F_\delta(x+h) - F_\delta(x)| = \frac{1}{2\delta}\left|\int\limits_{x+\delta}^{x+\delta+h} f(t)\,dt + \int\limits_{x-\delta+h}^{x-\delta} f(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta}(C|h| + C|h|) = \frac{C}{\delta}|h|,$$

если $|f(t)| \leqslant C$, например, в 2δ-окрестности точки x и $|h| < \delta$. Из этой оценки, очевидно, следует непрерывность функции $F_\delta(x)$.

Если же $f \in C(\mathbb{R})$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{d\varphi}\int\limits_a^{\varphi} f(t)\,dt \cdot \frac{d\varphi}{dx} = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

поэтому из записи

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_a^{x+\delta} f(t)\,dt - \frac{1}{2\delta}\int\limits_a^{x-\delta} f(t)\,dt$$

получаем, что

$$F'_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2\delta}.$$

Функцию $F_\delta(x)$ после замены $t = x + u$ переменной интегрирования можно записать в виде

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\,du.$$

Если $f \in C(\mathbb{R})$, то, применяя первую теорему о среднем, находим, что

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} f(x+\tau) \cdot 2\delta = f(x+\tau),$$