

3. Оценка интеграла, монотонность интеграла, теоремы о среднем.

а. Одна общая оценка интеграла. Начнем с общей оценки интеграла, которая, как потом выяснится, справедлива не только для интегралов от действительных функций.

ТЕОРЕМА 3. Если $a \leq b$ и $f \in \mathbb{R}[a, b]$, то $|f| \in \mathbb{R}[a, b]$ и справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx. \quad (9)$$

Если при этом $|f|(x) \leq C$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b |f|(x) dx \leq C(b-a). \quad (10)$$

◀ При $a = b$ утверждение тривиально, поэтому будем считать, что $a < b$.

Для доказательства теоремы достаточно вспомнить теперь, что $|f| \in \mathbb{R}[a, b]$ (см. утверждение 4 из §1), и написать следующую оценку интегральной суммы $\sigma(f, P, \xi)$:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i \leq C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b-a).$$

Переходя к пределу при $\lambda(P) \rightarrow 0$, получаем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx \leq C(b-a). \blacktriangleright$$

б. Монотонность интеграла и первая теорема о среднем. Все дальнейшее специфично для интегралов от действительных функций.

ТЕОРЕМА 4. Если $a \leq b$, $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[a, b]$ и $f_1(x) \leq f_2(x)$ в любой точке $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx. \quad (11)$$

◀ При $a = b$ утверждение тривиально. Если же $a < b$, то достаточно записать для интегральных сумм неравенство

$$\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \Delta x_i,$$

справедливое, поскольку $\Delta x_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), и затем перейти в нем к пределу $\lambda(P) \rightarrow 0$. ▶

Теорему 4 можно трактовать как утверждение о монотонности зависимости интеграла от подынтегральной функции.

Из теоремы 4 получается ряд полезных следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $a \leq b$, $f \in \mathbb{R}[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ на $x \in [a, b]$, то

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a), \quad (12)$$

и, в частности, если $0 \leq f(x)$ на $[a, b]$, то

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx.$$

◀ Соотношение (12) получается, если проинтегрировать каждый член неравенств $m \leq f(x) \leq M$ и воспользоваться теоремой 4. ▶

СЛЕДСТВИЕ 2. Если

$$f \in \mathbb{R}[a, b], \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

то найдется число $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x) dx = \mu \cdot (b - a). \quad (13)$$

◀ Если $a = b$, то утверждение тривиально. Если $a \neq b$, то положим $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Тогда из (12) следует, что $m \leq \mu \leq M$, если $a < b$. Но обе части (13) меняют знак при перестановке местами a и b , поэтому (13) справедливо и при $b < a$. ▶

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $f \in C[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a). \quad (14)$$

◀ По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, на отрезке $[a, b]$ найдется точка ξ , в которой $f(\xi) = \mu$, если только

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \leq \mu \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) = M.$$

Таким образом, (14) следует из (13). ▶

Равенство (14) часто называют *первой теоремой о среднем* для интеграла. Мы же зарезервируем это название для следующего, несколько более общего утверждения.

ТЕОРЕМА 5 (первая теорема о среднем для интеграла). Пусть

$$f, g \in R[a, b], \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Если функция g неотрицательна (или неположительна) на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b (f \cdot g)(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx, \quad (15)$$

где $\mu \in [m, M]$.

Если, кроме того, известно, что $f \in C[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b (f \cdot g)(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (16)$$

◀ Поскольку перестановка пределов интегрирования приводит к изменению знака одновременно в обеих частях равенства (15), то достаточно проверить это равенство в случае $a < b$. Изменение знака функции $g(x)$ тоже одновременно меняет знак обеих частей равенства (15), поэтому можно без ограничений общности доказательств считать, что $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

Поскольку $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ и $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, то при $g(x) \geq 0$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Поскольку $m \cdot g \in R[a, b]$, $f \cdot g \in R[a, b]$ и $M \cdot g \in R[a, b]$, то, применяя теорему 4 и теорему 1, получаем

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (17)$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то, как видно из этих неравенств, соотношение (15) выполнено.

Если же $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, то, полагая

$$\mu = \left(\int_a^b g(x) dx \right)^{-1} \cdot \int_a^b (f \cdot g)(x) dx,$$

из (17) находим, что

$$m \leq \mu \leq M$$

но это равенство равносильно соотношению (15).

Равенство (16) теперь следует из (15) и теоремы о промежуточном значении для функции $f \in C[a, b]$, с учетом того, что в случае $f \in C[a, b]$

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x). \blacktriangleright$$

Заметим, что равенство (13) получается из (15), если $g(x) \equiv 1$ на $[a, b]$.