

Лекция 7

7.1. Классические и квантовые случайные процессы

Целью лекции будет рассказ о том, как классические винеровский и пуассоновский случайные процессы вкладываются в симметричное (бозонное) пространство Фока. Что касается винеровского процесса, идеология такого вложения следует разложению Винера-Ито пространства L^2 -функционалов от броуновского движения [12]. Вложение пуассоновского процесса было предложено в пионерской работе [32]. Всюду ниже T обозначено одно из множеств $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}$ или \mathbb{Z}_+ .

Определение 7.1. Однопараметрическое множество случайных величин $\{\xi_t, t \in T\}$ называется (*классическим*) *случайным процессом*, если задано совместное распределение вероятностей:

$$Pr(\xi_{t_1} \in B_1, \dots, \xi_{t_n} \in B_n)$$

для любого выбора индексов $t_j \in T$ и подмножеств $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Определение 7.2. Процесс $\{\xi_t, t \in T\}$ называется *случайным процессом с независимыми приращениями*, если случайные величины $\xi_{t_1} - \xi_{s_1}$ и $\xi_{t_2} - \xi_{s_2}$ независимы при любом выборе непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$.

Пример 7.1. Случайный процесс с независимыми приращениями $\{\xi_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *винеровским*, если $\xi_t - \xi_s \in \mathcal{N}(0, t - s)$, $s < t$, то есть распределение вероятностей $\xi_t - \xi_s$ является гауссовским:

$$Pr(\xi_t - \xi_s \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_B \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

$s < t, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

Пример 7.2. Случайный процесс с независимыми приращениями $\{\xi_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *пуассоновским*, если $\xi_t - \xi_s \in \mathcal{P}(t - s)$, $s < t$, то есть распределение вероятностей $\xi_t - \xi_s$ является пуассоновским:

$$Pr(\xi_t - \xi_s = k) = e^{-t+s} \frac{(t-s)^k}{k!},$$

$s < t, k = 0, 1, 2, \dots$

Определение классических случайных процессов с независимыми приращениями может быть перенесено на квантовый случай в следующей форме:

Определение 7.3. Пара $(\{X_t, t \in T\}, \rho)$, состоящая из семейства наблюдаемых $X_t \in \mathfrak{A}$ и состояния $\rho \in \mathfrak{S}$, называется *квантовым случайным процессом с независимыми приращениями*, если приращения процесса $X_{st} = X_t - X_s$ коммутируют (наблюдаемые совместимы):

$$[X_{s_1 t_1}, X_{s_2 t_2}] = 0$$

для непересекающихся интервалов $(s_1, t_1) \cap (s_2, t_2) = \emptyset$ и классические случайные величины $\xi_{s_j t_j}$ с совместным распределением, определяемым формулой (см. определение 3.15):

$$Pr(\xi_{s_1 t_1} \in B_1, \dots, \xi_{s_n t_n} \in B_n) = Tr(\rho E_1(B_1) \dots E_n(B_n)),$$

где (E_j) - проекторозначные меры, отвечающие наблюдаемым $(X_{s_j t_j})$, независимы.

7.2. Симметричное пространство Фока

Рассмотрим тензорное произведение $H^{\otimes n}$, состоящее из n копий гильбертова пространства H . Скалярное произведение в $H^{\otimes n}$ задаётся на элементарных тензорах формулой

$$\langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_n \rangle_{H^{\otimes n}} = \prod_{j=1}^n \langle f_j, g_j \rangle_H,$$

$f_j, g_j \in H$, и продолжается затем на всё пространство по линейности.

Определим ортогональный проектор $P_s : H^{\otimes n} \rightarrow H^{\otimes n}$ по формуле

$$P_s e_1 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_n = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S} e_{s(1)} \otimes \dots \otimes e_{s(n)},$$

где суммирование ведётся по множеству S , состоящему из всех перестановок множества $\{1, \dots, n\}$ и $e_j \in H$.

Определение 7.4. Подпространство $H^{\otimes n}_s = P_s H^{\otimes n}$ называется *симметризованным тензорным произведением n копий пространства H* .

Определение 7.5. Гильбертово пространство:

$$F(H) = \{\mathbb{C}\Omega\} \oplus \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H^{\otimes n}_s$$

называется *симметричным (бозонным) пространством Фока*. Фиксированный вектор Ω называется *вакуумным*, пространство H — *одно-частным*, а пространства $H^{\otimes_s^n}$ — *n -частичными*.

Ранее мы рассматривали модель квантового гармонического осциллятора. Нашей целью теперь будет построение модели бесконечного множества квантовых гармонических осцилляторов в гильбертовом пространстве $F(H)$. Модель, которую мы построим, будет сводиться к единичному осциллятору, когда $\dim H = 1$. Следующее определение даёт аналог когерентных состояний для $F(H)$.

Определение 7.6. Для $f \in H$ элемент $e(f) \in F(H)$, определяемый формулой

$$e(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{\otimes n}}{\sqrt{n!}}$$

называется экспоненциальным вектором.

Непосредственно проверяется, что скалярное произведение экспоненциальных векторов равно

$$\langle e(f), e(g) \rangle_{F(H)} = e^{\langle f, g \rangle_H}$$

Лемма 7.1. *Линейные комбинации экспоненциальных векторов из множества*

$$\{e(f), \quad f \in H\}$$

плотны в $F(H)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} (e(tf)) \right|_{t=0} = \sqrt{n!} f^{\otimes n}$$

С другой стороны, множество линейных комбинаций элементарных тензоров вида $f^{\otimes n}$ позволяет выразить любой элементарный тензор из $H^{\otimes_s^n}$. Докажем это по индукции. Для $n = 2$ получаем

$$f \otimes g + g \otimes f = (f + g) \otimes (f + g) - f \otimes f - g \otimes g$$

Пусть утверждение доказано для n . Докажем его для $n + 1$. Рассмотрим элемент h , представляющий собой симметризованное тензорное произведение f и $g^{\otimes n}$:

$$h = f \otimes g^{\otimes n} + g \otimes f \otimes g^{\otimes n-1} + \dots + g^{\otimes n} \otimes f,$$

где $f, g \in H$. Утверждение верно, если из равенства нулю скалярного произведения

$$\left\langle h, u^{\otimes n+1} \right\rangle_{H^{\otimes n+1}} = 0$$

для любого $u \in H$ следует, что

$$h = 0$$

Заметим, что

$$\left\langle h, u^{\otimes n+1} \right\rangle_{H^{\otimes n+1}} = (n+1) \langle f, u \rangle_H \langle g, u \rangle_H^n$$

Положим $u = f$, тогда из (7.4)-(7.5) вытекает $\langle g, f \rangle_H = 0$ для всех $f \in H$, так что $g = 0$. Аналогично, подставляя $u = g$, получаем, что $f = 0$. Тем самым $h = 0$.

В силу леммы 7.1 любой линейный оператор в $F(H)$ достаточно задать на экспоненциальных векторах. Экспоненциальные вектора обладают ещё одним важным свойством, которое нам потребуется в дальнейшем.

Лемма 7.2. *Отображение $U : F(H \oplus K) \rightarrow F(H) \otimes F(K)$, отображение заданное на экспоненциальных векторах формулой*

$$U(e(f \oplus g)) = e(f) \otimes e(g), \quad f \in H, \quad g \in K,$$

является унитарным оператором.