Однако такой путь часто приводит к очень громоздкой рациональной функции, поэтому следует иметь в виду, что в ряде случаев существуют и другие возможности рационализации интеграла.

b. В случае интегралов вида $\int R(cos^2x, sin^2x)dx$ или $\int r(tgx)dx$, где r(u) — рациональная функция, удобна подстановка $t = tgx$, ибо

$$cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x}, sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x},$$

$$dt = \frac{dx}{cos^2x}, dx = \frac{dt}{1+tg^2x}.$$

Выполнив указанную подстановку, получим соответственно

$$\int R(cos^2x, sin^2x)dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int r(tgx)dx = \int r(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

c. В случае интегралов вида

$$\int R(cosx, sin^2x)sinxdx \int R(cos^2x, sinx)cosxdx$$

можно внести функции $sinx$, $cosx$ под знак дифференциала и сделать замену $t = cosx$ или $t = sinx$ соответственно. После замены эти интегралы будут иметь вид

$$-\int R(t, 1-t^2)dt \int R(1-t^2, t)dt.$$

Пример 15.

$$\int \frac{dx}{3+sinx} = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}} * \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{3t^2+2t+3} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3u}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + c.$$

Здесь мы воспользовались универсальной заменой $t = tg\frac{x}{2}$.

Пример 16.

$$\int \frac{dx}{(sinx+cosx)^2} = \int \frac{dx}{cos^2x(tgx+1)^2} = \int \frac{dtgx}{(tgx+1)^2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+1} + c = c - \frac{1}{1+tgx}.$$

Пример 17.

$$\int \frac{dx}{2sin^2 3x - 3cos^2 3x + 1} = \int \frac{dx}{cosx^2 3x(2tg^2 3x - 3 + (1 + tg^2 3x))} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dtg3x}{3tg^2 3x - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{3t^2 - 2} = \frac{1}{3*2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}t}{\frac{3}{2}t^2 - 1} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\int \frac{du}{u^2 - 1} =$$

$$\frac{1}{6\sqrt{6}}\ln|\frac{u-1}{u+1}| + c = \frac{1}{6\sqrt{6}}\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}t - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}}t + 1}\right| + c = \frac{1}{6\sqrt{6}}\left|\frac{tg3x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{tg3x + \sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + c.$$

Пример 18.

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^7 x}dx = \int \frac{cos^2 xdsinx}{sin^x 7x} = \int \frac{(1 - t^2)dt}{t^7} =$$

$$= \int (t^{-7} - t^{-5})dt = -\frac{1}{6}t^{-6} + \frac{1}{4}t^{-4} + c = \frac{1}{4sin^4 x} - \frac{1}{6sin^6 x} + c.$$

5. Первообразные вида $\int R(x, y(x)dx$. Пусть, как и в пункте 4, R(x,y) — рациональная функция. Рассмотрим некоторые специальные первообразные вида

$$\int R(x, y(x))dx,$$

где y = y(x) — функция от x.

Прежде всего, ясно, что если удастся сделать замену x = x(t) так, что обе функции x = x(t) и y = y(x(t)) окажутся рациональными функциями от t, то x'(t) — тоже рациональная функция и

$$\int R(x, y(x))dx = \int R(x(t), y(x(t))x'(t)dt,$$

т.е. дело сводится к интегрированию рациональной функции.

Мы рассмотрим следующие специальные случаи задания функции y = y(x).

a. Если $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где n ∈ ℕ, то, полагая $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, получаем

$$x = \frac{d * t^n - b}{a - c * t^n}, y = t,$$

и подынтегральное выражение рационализируется.

Пример 19.

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int td\left(\frac{t^3+1}{1-t^3}\right) = t * \frac{t^3+1}{1-t^3} - \int \frac{t^3+1}{1-t^3}dt =$$

$$= t * \frac{t^3+1}{1-t^3} - \int \left(\frac{2}{1-t^3} - 1\right)dt = t * \frac{t^3+1}{1-t^3} + t - 2\int \frac{dt}{(1-t)(1+t+t^2)} =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} - 2\int \left(\frac{1}{3(1-t)} + \frac{2+t}{3(1+t+t^2)}\right)dt =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3}\ln|1-t| - \frac{2}{3}\int \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}dt} =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3}\ln|1-t| - \frac{1}{3}\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right) + c,$$

где

$$t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

b. Рассмотрим теперь случай, когда $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, т.е. речь идёт об интегралах вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx.$$

Выделяя полный квадрат в трёхчлене ax^2+bx+c и делая соответствующую линейную замену переменной, сводим общий случай к одному из следующих трёх простейших:

$$\int R(t, \sqrt{t^2+1})dt, \int R(t, \sqrt{t^2-1})dt, \int R(t, \sqrt{1-t^2})dt. (18)$$

Для рационализации этих интегралов теперь достаточно положить соответственно

$$\sqrt{t^2+1} = tu+1, \sqrt{t^2+1} = tu-1, \sqrt{t^2+1} = t-u;$$
$$\sqrt{t^2-1} = u(t-1), \sqrt{t^2-1} = u(t+1), \sqrt{t^2-1} = t-u;$$
$$\sqrt{1-t^2} = u(1-t), \sqrt{1-t^2} = u(1+t), \sqrt{1-t^2} = tu+-1.$$

Эти подстановки были предложены ещё Эйлером (см. задачу 3 в конце параграфа).

Проверим, например, что после первой подстановки мы сведем интеграл к интегралу от рациональной функции.

В самом деле, если $\sqrt{t^2+1} = tu+1$, то $t^2+1 = t^2u^2+2u+1$, откуда

$$t = \frac{2u}{1-u^2}$$

и, в свою очередь,

$$\sqrt{t^2+1} = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Таким образом, t и $\sqrt{t^2+1}$ выразились рационально через u, а следовательно, интеграл привелся к интегралу от рациональной функции.

Интегралы (18) подстановки $t = sh\varphi$, $t = ch\varphi$, $t = sin\varphi$ (или $t = cos\varphi$) соответственно приводятся также к тригонометрической форме

$$\int R(sh\varphi, ch\varphi)ch\varphi d\varphi, \int R(ch\varphi, sh\varphi)sh\varphi d\varphi.$$