Например, если

$$y = \frac{1}{2}\ x^4 - \frac{1}{6}\ x^8 + 2x^2 + \frac{4}{3}\ x - \frac{1}{2}$$

то

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{2}\ x^2 + 4x + \frac{4}{3} y'' = 6x^2 - x + 4,$$
$$y''' = 12x - 1, y'''' = 12,$$

так что все последующие производные равны тождественно нулю. Или Пусть

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

тогда

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, y'' = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}, y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}..$$

Заметим, что по отношению к производным высших порядков так же, индуктивно, можно установить понятие о д н о с т о р о н н е й производной [ср. $n°86$]. Если функция $y = f(x)$ определена лишь в некотором промежутке X , то, говоря о производной любого порядка на к о н ц е его, всегда имеют в виду именно одностороннюю производную.

96. Общие формулы для производных любого порядка. Итак, для того, чтобы вычислить n-ю производную от какой-либо функции, вообще говоря, нужно предварительно вычислить производные всех предшествующих порядков. Однако в ряде случаев удается установить такое общее выражение для n-й производной, которое зависит непосредственно от n и не содержит более обозначений предшествующих производных.

При выводе таких общих выражений иногда бывают полезны формулы:

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

обобщающие на случай высших производных известные читателю правила I и II $n°83$. Их легко получить последовательным применением этих правил.

1) Рассмотрим сначала степенную функцию $y = x^\mu$, где μ-любое вещественное число. Имеем последовательно:

$$y' = \mu x^{\mu-1}, y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$
$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \ldots$$

Легко усмотреть отсюда и общий закон:

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

который доказывается по методу математической индукции.

Если, например, взять μ=–1, то получим

$$(\frac{1}{x})^(n) = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}.$$

.

Когда само μ есть натуральное число m, то m-я производная от x^m будет уже постоянным числом $m!$, а все следующие - нулями. Отсюда ясно, что и для целого многочлена степени mимеет место аналогичное обстоятельство.

2)Пусть теперь $y = \ln x$. Прежде всего, имеем

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Возьмем отсюда производную $(n-1)$-го порядка по соответствующей формуле из 1), заменив в ней n на $n-1$; мы и получим тогда

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\frac{1}{x})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3) Если $y = a^x$, то

$$y' = a^x \cdot \ln a, y'' = a^x \cdot (\ln a)^2, \ldots$$

Общая формула

$$y^(n) = a^x \cdot (\ln a)^n$$

легко доказывается по методу математической индукции.

В частности, очевидно,

$$(\exp^x)^{(n)} = \exp^x.$$

4) Положим $y = \sin x$; тогда

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = ---\cos x,$$

$$y'''' = \sin x, y^{(5)} = \cos x, \ldots$$

На этом пути найти требуемое общее выражение для n-й производной трудно. Но дело сразу упрощается, если переписать формулу для первой производной в виде $y' = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; становится ясным, что при каждом дифференцировании к аргументу будет прибавляться $\frac{\pi}{2}$, так что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Аналогично получается и формула

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

5) Остановимся еще на функции $y = \arctan x$. Поставим себе задачей выразить y^n через y. Так как $x = \tan y$, то

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Дифференцируя вторично по x (и помня, что y есть функция от x), получим

$$y'' = \left[-\sin y \cdot \sin(y + \frac{\pi}{2}) + \cos y \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' =$$

$$= \cos^2 y \cdot \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \cdot \sin 2(2y + \frac{\pi}{2}).$$

Следующее дифференцирование дает:

$$y''' = \left[-2\sin y \cdot \cos y 2\sin(y + \frac{\pi}{2}) + 2\cos^2 y \cdot \cos 2(y + \frac{\pi}{2})\right] \cdot y' =$$

$$= 2\cos^3 y \cdot \cos\left(3y + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y \cdot \sin 3(2y + \frac{\pi}{2}).$$

Общая формула

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n(y + \frac{\pi}{2})$$

оправдывается по методу математической индукции.

97. Формула Лейбница. Как мы заметили в начале предыдущего номера, правила I и II $n^\circ 83$ непосредственно переносятся и на случай производных любого порядка. Сложнее обстоит дело с правилом III, относящимся к дифференцированию произведения. Предположим, что функции u, v от x имеют каждая в отдельности производные до n-го порядка включительно; докажем, что тогда их произведение $y = uv$ также имеет n-ю производную, найдем ее выражение. Станем, применяя правило III, последовательно дифференцировать это произведение; мы найдем:

$$y' = u'v + uv', y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \ldots$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение стпеней бинома: $(u+v)^2$, $(u+v)^3, \ldots$, лишь вместо степеней u, v стоят производные соответствующих порядков. Сходство станет более полным, если