§4. Прогрессии. Суммирование. Бином Ньютона. Числовые неравенства.

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Числовая последовательность.

1) Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

Кратко последовательность обозначают символом x_n или (x_n), число x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

2) Последовательность обычно задается либо формулой, с помощью которой можно вычислить каждый ее член по соответствующему номеру, либо формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим (рекуррентной формулой).

2. Арифметическая прогрессия.

1) *Арифметическая прогрессия* — последовательность a_n— определяется рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где a_1 и d— заданные числа; число d называется *разностью* арифметической прогрессии.

2) Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

3) Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т.е. при $k \geq 2$ справедливо равенство

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

4) Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

3. Геометрическая прогрессия.

1) *Геометрическая прогрессия* — последовательность b_n— определяемая рекуррентной формулой

$$b_{n+1} = b_n q$$

где b_1 и q— заданные числа, отличные от нуля; число q называют *знаменателем* геометрической прогрессии.

2) Формула $n-$го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

В частности, если $Q(x) = x - a$, где a — заданное число ($a \in R$ или $a \in C$), а $P(x) = Q_n(x)$ — многочлен степени n, то в формуле (2) частное $T(x) = \widetilde{Q}_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$, а $R(x) = r$ — некоторое число. Итак, формула деления многочлена $Q_n(x)$ степени n на двучлен $x - a$ имеет вид

$$Q_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + r. \tag{3}$$

5) `Теорема Безу.` *Число a является корнем многочлена $Q_n(x), x - a,$..*

$$Q_n(x) = \widetilde{Q}_{n-1}(x)(x-a).$$

6) Числа a называют *корнем многочлена* $Q_n(x)k$, если существует число $k \in N$ и многочлен $Q^*_{n-k}(x)$ такие, что для всех x ($x \in R$ или $x \in C$) справедливо равенство

$$Q_n(x) = (x-a)^k Q^*_{n-k}(x), \tag{4}$$

где

$$Q^*_{n-k} \neq 0, \tag{5}$$

Если $a \in R$ и коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ — действительные числа, то условия (4), (5) выполняются тогда и только тогда, когда

$$Q_n(a) = 0,\ Q_n^{'}(a) = 0, ...,\ Q_n^(k-1)(a) = 0,\ Q_n^{(k)}(a) \neq 0.$$

7) Если $Q(x) = x^2 + px + q$, где $p \in R, q \in R, p^2 - 4q < 0$, то корни x_1 и x_2 многочлена $Q(x)$ — комплексно сопряженные числа:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},\ x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

8) Если $Q_n(x)$— многочлен с действительными коэффициентами, а $x_0 = \gamma + i\delta, \delta \neq 0$, то число $\overline{x}_0 = \gamma - i\delta$ также является корнем этого многочлена.

9) Целые корни алгебраического уравнения $Q_n(x) = 0$, где $Q_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, являются делителями свободного члена.

2. Разложение многочлена на множители.

1) `Теорема Гаусса` (основная теорема алгебры). *Алгебраическое уравнение степени $n \geq 1$, т.е. уравнение $Q_n(x) = 0$, где $Q_n(x)$ — многочленг (1) степени n, с действительными или комплексными коэффициентами имеет n корней при условии, что каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

2) Пусть $Q_n(x)$ — многочлен (1) степени n сдействительными коэффициентами, $a_j (j = 1, 2, ..., k)$ — все действительные корни этого многочлена, α_j — кратность корня a_j. Тогда

$$Q_n(x) = C_n(x-a_1)^{\alpha_1} ... (x-a_k)^{\alpha_k} R(x),$$

где $R(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами степени $t = n - \sum_{j=1}^{k} a_j$, не имеющий действительных корней. Если $t > 1$, то многочлен $R(x)$ далжен делиться на многочлен $x^2 + px + q = (x - x_0)(x - \overline{x}_0)$, где $x_0 = \gamma + i\delta\,(\delta \neq 0)$— комплексный корень многочлена $R(x)$.

Пусть x_j и $\overline{x}_j$— пара комплексно сопряженных корней многочлена $R(x), \beta_j$— кратность этих корней,

$$x^2 + p_j x + q_j = (x - x_j)(x - \overline{x}_j), p_j \in R, q_j \in R,$$

$x_j, \overline{x}_j \quad (j = 1, 2, ..., s)$— все пары комплексно сопряженных корней многочлена $R(x)$. Тогда

$$Q_n(x) = C_n(x - a_1)^{\alpha_1} ... (x - a_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_i} ... (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s}, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_k + 2 \sum_{j=1}^{s} \beta_j = n.$$

3. Разложение правильной рациональной дроби на элементарные.

1) Пусть $P_m(x)$ и $Q_n(x)$— многочлены степени m и n. Если $m < n$, то функцию $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называют *правильной рациональной дробью*, а при $m \geq n$ — *неправильной.*

2) Если $T(x)$ частное, а $R(x)$ — остаток от деления многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$, то

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)},$$

где либо $R(x) = 0$ (в случае, когда многочлен $P_m(x)$ нацело делится на многочлен $Q_n(x)$), либо $R(x) \neq 0$, а дробь $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ является правильной.

3) Пусть $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами, $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ — правильная дробь, а число a — действительный корень кратности k многочлена $Q_n(x)$. Тогда существуют действительные числа $A_1, A_2, ..., A_k$ такие, что

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x - a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - a)^{k-1}} + ... + \frac{A_1}{x - a} + \frac{P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)},$$

где $P^*(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами или нуль, $Q^*_{n-k}(x)$ — частное от деления $Q_n(x)$ на $(x - a)^k$ при $P^*(x) \not\equiv 0$. Дробь $\frac{P^*(x)}{Q^*_{n-k}(x)}$ является правильной, а числа $A_j (j = 1, 2, ..., k)$ и многочлен $P^*(x)$ определяется однозначно.