

Однако такой путь часто приводит к очень громоздкой рациональной функции, поэтому следует иметь в виду, что в ряде случаев существуют и другие возможности рационализации интеграла.

б. В случае интегралов вида $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x) dx$ или $\int r(\operatorname{tg} x) dx$, где $r(u)$ — рациональная функция, удобна подстановка $t = \operatorname{tg} x$, ибо

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \text{т. е.} \quad dx = \frac{dt}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Выполнив указанную подстановку, получим соответственно

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x) dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\int r(\operatorname{tg} x) dx = \int r(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

с. В случае интегралов вида

$$\int R(\cos x, \sin^2 x) \sin x dx \quad \text{или} \quad \int R(\cos^2 x, \sin x) \cos x dx$$

можно внести функции $\sin x$, $\cos x$ под знак дифференциала и сделать замену $t = \cos x$ или $t = \sin x$ соответственно. После замены эти интегралы будут иметь вид

$$-\int R(t, 1-t^2) dt \quad \text{или} \quad \int R(1-t^2, t) dt.$$

ПРИМЕР 15.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin x} &= \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1+t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3} = \frac{2}{3} \int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3u}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + c. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались универсальной заменой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

ПРИМЕР 16.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg} x + 1)^2} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{t+1} + c = c - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 17.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2 \sin^2 3x - 3 \cos^2 3x + 1} &= \int \frac{dx}{\cos^2 3x (2 \operatorname{tg}^2 3x - 3 + (1 + \operatorname{tg}^2 3x))} = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{d \operatorname{tg} 3x}{3 \operatorname{tg}^2 3x - 2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{3t^2 - 2} = \frac{1}{3 \cdot 2} \sqrt{\frac{2}{3}} \int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}t}{\frac{3}{2}t^2 - 1} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \int \frac{du}{u^2 - 1} = \\
&= \frac{1}{6\sqrt{6}} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + c = \frac{1}{6\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}t - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}}t + 1} \right| + c = \frac{1}{6\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} 3x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg} 3x + \sqrt{\frac{2}{3}}} \right| + c.
\end{aligned}$$

ПРИМЕР 18.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \, d \sin x}{\sin^7 x} = \int \frac{(1-t^2) dt}{t^7} = \\
&= \int (t^{-7} - t^{-5}) dt = -\frac{1}{6}t^{-6} + \frac{1}{4}t^{-4} + c = \frac{1}{4 \sin^4 x} - \frac{1}{6 \sin^6 x} + c.
\end{aligned}$$

5. Первообразные вида $\int R(x, y(x)) dx$. Пусть, как и в пункте 4, $R(x, y)$ — рациональная функция. Рассмотрим некоторые специальные первообразные вида

$$\int R(x, y(x)) dx,$$

где $y = y(x)$ — функция от x .

Прежде всего, ясно, что если удастся сделать замену $x = x(t)$ так, что обе функции $x = x(t)$ и $y = y(x(t))$ окажутся рациональными функциями от t , то $x'(t)$ — тоже рациональная функция и

$$\int R(x, y(x)) dx = \int R(x(t), y(x(t)))x'(t) dt,$$

т. е. дело сведется к интегрированию рациональной функции.

Мы рассмотрим следующие специальные случаи задания функции $y = y(x)$.

а. Если $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $n \in \mathbb{N}$, то, полагая $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, получаем

$$x = \frac{d \cdot t^n - b}{a - c \cdot t^n}, \quad y = t,$$

и подынтегральное выражение рационализуется.

ПРИМЕР 19.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int t \, d\left(\frac{t^3+1}{1-t^3}\right) = t \cdot \frac{t^3+1}{1-t^3} - \int \frac{t^3+1}{1-t^3} dt = \\
&= t \cdot \frac{t^3+1}{1-t^3} - \int \left(\frac{2}{1-t^3} - 1\right) dt = t \cdot \frac{t^3+1}{1-t^3} + t - 2 \int \frac{dt}{(1-t)(1+t+t^2)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2t}{1-t^3} - 2 \int \left(\frac{1}{3(1-t)} + \frac{2+t}{3(1+t+t^2)} \right) dt = \\
&= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3} \ln |1-t| - \frac{2}{3} \int \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \\
&= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3} \ln |1-t| - \frac{1}{3} \ln \left[\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right) + c, \\
&\text{где } t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}.
\end{aligned}$$

б. Рассмотрим теперь случай, когда $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, т. е. речь идет об интегралах вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Выделяя полный квадрат в трехчлене $ax^2 + bx + c$ и делая соответствующую линейную замену переменной, сводим общий случай к одному из следующих трех простейших:

$$\int R(t, \sqrt{t^2 + 1}) dt, \quad \int R(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt, \quad \int R(t, \sqrt{1 - t^2}) dt. \quad (18)$$

Для рационализации этих интегралов теперь достаточно положить соответственно

$$\begin{aligned}
\sqrt{t^2 + 1} &= tu + 1, & \text{или } \sqrt{t^2 + 1} &= tu - 1, & \text{или } \sqrt{t^2 + 1} &= t - u; \\
\sqrt{t^2 - 1} &= u(t - 1), & \text{или } \sqrt{t^2 - 1} &= u(t + 1), & \text{или } \sqrt{t^2 - 1} &= t - u; \\
\sqrt{1 - t^2} &= u(1 - t), & \text{или } \sqrt{1 - t^2} &= u(1 + t), & \text{или } \sqrt{1 - t^2} &= tu \pm 1.
\end{aligned}$$

Эти подстановки были предложены еще Эйлером (см. задачу 3 в конце параграфа).

Проверим, например, что после первой подстановки мы сведем первый интеграл к интегралу от рациональной функции.

В самом деле, если $\sqrt{t^2 + 1} = tu + 1$, то $t^2 + 1 = t^2 u^2 + 2tu + 1$, откуда

$$t = \frac{2u}{1 - u^2}$$

и, в свою очередь,

$$\sqrt{t^2 + 1} = \frac{1 + u^2}{1 - u^2}.$$

Таким образом, t и $\sqrt{t^2 + 1}$ выразились рационально через u , а следовательно, интеграл привелся к интегралу от рациональной функции.

Интегралы (18) подстановками $t = \operatorname{sh} \varphi$, $t = \operatorname{ch} \varphi$, $t = \sin \varphi$ (или $t = \cos \varphi$) соответственно приводятся также к тригонометрической форме

$$\int R(\operatorname{sh} \varphi, \operatorname{ch} \varphi) \operatorname{ch} \varphi d\varphi, \quad \int R(\operatorname{ch} \varphi, \operatorname{sh} \varphi) \operatorname{sh} \varphi d\varphi$$