Известно, что всегда $O(f)+o(f) = O(f)$, и $o(f)+o(f) = o(f)$, и $2o(f) = o(f)$ при фиксированной базе. Следует ли отсюда, что $o(f) \equiv 0$?

6. Известно, что произведение двух или любого конечного числа бесконечно малых является функцией бесконечно малой. Приведите пример, показывающий, что для бесконечных произведений это уже не всегда так.

7. Зная степенное разложение функции e^x, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\ln(1+x)$.

8. Вычислите $\exp A$, когда A — одна из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Сколько членов ряда для e^x надо взять, чтобы получить многочлен, позволяющий вычислять e^x на отрезке $[-1,2]$ с точностью до 10^{-3}?

10. Зная степенные разложения функций $\sin x$ и $\cos x$, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x = 0$.

11. Длину стягивающего земной шар по экватору пояска увеличили на 1 метр, после чего поясок натянули, подперев вертикальным столбиком. Какова примерно высота столбика, если радиус Земли ≈ 6400 км.?

12. Вычислите

$$\lim_{x\to\infty}\left(e\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}\right)^{x}.$$

13. Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

a) $\log_{\cos x}\sin x$; b) $\operatorname{arctg}\dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Покажите, что если вектор ускорения $\boldsymbol{a}(t)$ в любой момент t ортогонален вектору $\boldsymbol{v}(t)$ скорости движения, то величина $|\boldsymbol{v}(t)|$ остается постоянной.

2. Пусть (x,t) и $(\tilde{x},\tilde{t})$ — соответственно координата и время движущейся дифференцируема на $\mathbb{R}$, то f' непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi),$$

где ξ — точка между a и x. Тогда если $x \to a$, то $\xi \to a$. По определению,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

и поскольку этот предел существует, то существует и равен ему предел правой части формулы Лагранжа, т. е. $f'(\xi) \to f'(a)$ при $\xi \to a$. Непрерывность f' в точке a «доказана». Где ошибка?

4. Пусть функция f имеет $n + 1$ производную в точке x_0, и пусть $\xi = x_0 + \theta_x(x - x_0)$ — средняя точка в формуле Лагранжа остаточного члена $\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n$, так что $0 < \theta_x < 1$. Покажите, что $\theta_x \to \frac{1}{n+1}$ при $x \to x_0$, если $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

5. a) Если функция $f \in C^{(n)}([a, b], \mathbb{R})$ в $n + 1$ точке отрезка $[a, b]$ имеет нули, то на этом отрезке имеется по крайней мере один нуль функции $f^{(n)}$ — производной f порядка n.

b) Покажите, что полином $P_n(x) = \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет n корней. (Указание: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ и $P_n^{(k)}(-1) = P_n{}^{(k)}(1) = 0$ при $k = 0, \ldots, n - 1$.)

6. Вспомните геометрический смысл производной и покажите, что если функция f определена и дифференцируема на интервале I и $[a, b] \subset I$, то функция f' (даже не будучи непрерывной!) принимает на отрезке $[a, b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

7. Докажите неравенство

$$a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n,$$

где числа $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ неотрицательны и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

8. Покажите, что

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (z = x + iy),$$

поэтому естественно считать, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (формула Эйлера) и

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

9. Найдите форму поверхности жидкости, равномерно вращающейся в стакане.

10. Покажите, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_0,y_0) имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ и что световые лучи от источника, помещенного в одном из фокусов $F_1=\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$, $F_2=\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ эллипса с полуосями $a>b>0$, собираются эллиптическим зеркалом в другом фокусе.

11. Частица без предварительного разгона под действием силы тяжести начинает скатываться с вершины ледяной горки эллиптического профиля. Уравнение профиля: $x^2+5y^2=1$, $y\geqslant 0$. Рассчитайте траекторию движения частицы до ее приземления.

12. Средним порядка α чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют величину

$$s_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

В частности, при $\alpha=1,2,-1$ получаем соответственно *среднее арифметическое*, *среднее квадратичное* и *среднее гармоническое* этих чисел.

Будем считать, что все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательны, а если степень $\alpha<0$, то будем предполагать, что они даже положительны.

a) Используя неравенство Гёльдера, покажите, что если $\alpha<\beta$, то

$$s_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leqslant s_\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

причем равенство имеет место, лишь когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

b) Покажите, что при стремлении α к нулю величина $s_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ стремится к $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$, т.е. к *среднему геометрическому* этих чисел.

С учетом результата задачи а) отсюда, например, следует классическое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим неотрицательных чисел (напишите его).

c) Если $\alpha\to+\infty$, то $s_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, а при $\alpha\to\to-\infty$ величина $s_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ стремится к меньшему из рассматриваемых чисел, т.е. к $\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Докажите это.

13. Пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ — закон движения точки (т.е. ее радиус-вектор как функция времени). Считаем, что это непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $a\leqslant t\leqslant b$.

a) Можно ли, ссылаясь на теорему Лагранжа о среднем, утверждать, что на $[a,b]$ найдется момент ξ, такой что $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{r}'(\xi)\cdot(b-a)$? Поясните ответ примерами.

b) Пусть $\operatorname{Convex}\{\boldsymbol{r}'\}$ — выпуклая оболочка множества (концов) векторов $\boldsymbol{r}'(t)$, $t\in[a,b]$. Покажите, что найдется вектор $\boldsymbol{v}\in\operatorname{Convex}\{\boldsymbol{r}'\}$, такой что $\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)=\boldsymbol{v}\cdot(b-a)$.

c) Соотношение $|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)|\leqslant\sup|\boldsymbol{r}'(t)|\cdot|b-a|$, где верхняя грань берется по $t\in[a,b]$, имеет очевидный физический смысл. Какой? Докажите это неравенство как общий математический факт, развивающий классическую теорему Лагранжа о конечном приращении.