3. Оценка интеграла, монотонность интеграла, теоремы о среднем

a. Одна общая оценка интеграла. Начнем с одной общей оценки интеграла, которая, как потом выяснится, справедлива не только для интегралов от действительнозначных функций.

Теорема 3. *Если $a \leqslant b$ и $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ и справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|(x)\,dx. \tag{9}$$

Если при этом $|f|(x) \leqslant C$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b |f|(x)\,dx \leqslant C(b-a). \tag{10}$$

◄ При $a=b$ утверждение тривиально, поэтому будем считать, что $a<b$.

Для доказательства теоремы достаточно вспомнить теперь, что $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ (см. утверждение 4 из § 1), и написать следующую оценку интегральной суммы $\sigma(f; P, \xi)$:

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)||\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i \leqslant C\sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b-a).$$

Переходя к пределу при $\lambda(P) \to 0$, получаем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|(x)\,dx \leqslant C(b-a). \ ►$$

b. Монотонность интеграла и первая теорема о среднем. Все дальнейшее специфично для интегралов от действительнозначных функций.

Теорема 4. *Если $a \leqslant b$, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ в любой точке $x \in [a, b]$, то*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{11}$$

◄ При $a=b$ утверждение тривиально. Если же $a<b$, то достаточно записать для интегральных сумм неравенство

$$\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i,$$

справедливое, поскольку $\Delta x_i > 0$ $(i=1, \ldots, n)$, и затем перейти в нем к пределу при $\lambda(P) \to 0$. ►

Теорему 4 можно трактовать как утверждение о монотонности зависимости интеграла от подынтегральной функции.

Из теоремы 4 получается ряд полезных следствий.

Следствие 1. *Если* $a \leqslant b$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *и* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *на* $x \in [a, b]$, *то*

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M \cdot (b-a), \tag{12}$$

и, в частности, если $0 \leqslant f(x)$ *на* $[a, b]$, *то*

$$0 \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

◄ Соотношение (12) получается, если проинтегрировать каждый член неравенств $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и воспользоваться теоремой 4. ►

Следствие 2. *Если*

$$f \in \mathcal{R}[a, b], \quad m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

то найдется число $\mu \in [m, M]$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b-a). \tag{13}$$

◄ Если $a = b$, то утверждение тривиально. Если $a \neq b$, то положим $\mu = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тогда из (12) следует, что $m \leqslant \mu \leqslant M$, если $a < b$. Но обе части (13) меняют знак при перестановке местами a и b, поэтому (13) справедливо и при $b < a$. ►

Следствие 3. *Если* $f \in C[a, b]$, *то найдется точка* $\xi \in [a, b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{14}$$

◄ По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, на отрезке $[a, b]$ найдется точка ξ, в которой $f(\xi) = \mu$, если только

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \max_{x \in [a,b]} f(x) = M.$$

Таким образом, (14) следует из (13). ►

Равенство (14) часто называют *первой теоремой о среднем* для интеграла. Мы же зарезервируем это название для следующего, несколько более общего утверждения.

Теорема 5 (первая теорема о среднем для интеграла). *Пусть*

$$f, g \in \mathcal{R}[a, b], \quad m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Если функция g неотрицательна (*или неположительна*) *на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx, \tag{15}$$

где $\mu \in [m, M]$.

Если, кроме того, известно, что $f \in C[a, b]$, *то найдется точка* $\xi \in [a, b]$ *такая, что*

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{16}$$

◄ Поскольку перестановка пределов интегрирования приводит к изменению знака одновременно в обеих частях равенства (15), то достаточно проверить это равенство в случае $a < b$. Изменение знака функции $g(x)$ тоже одновременно меняет знак обеих частей равенства (15), поэтому можно без ограничения общности доказательства считать, что $g(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Поскольку $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, то при $g(x) \geqslant 0$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Поскольку $m \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$, $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $M \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$, то, применяя теорему 4 и теорему 1, получаем

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leqslant M \int_a^b g(x)\, dx. \tag{17}$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\, dx = 0$, то, как видно из этих неравенств, соотношение (15) выполнено.

Если же $\int\limits_a^b g(x)\, dx \neq 0$, то, полагая

$$\mu = \left(\int_a^b g(x)\, dx \right)^{-1} \cdot \int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx,$$

из (17) находим, что

$$m \leqslant \mu \leqslant M,$$

но это равносильно соотношению (15).

Равенство (16) теперь следует из (15) и теоремы о промежуточном значении для функции $f \in C[a, b]$, с учетом того, что в случае $f \in C[a, b]$

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x). \ ►$$

Заметим, что равенство (13) получается из (15), если $g(x) \equiv 1$ на $[a, b]$.