

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Tìm miền xác định của hàm số

1. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

2. $y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

3. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$

4. $y = \arccos(\sin x)$

5. $y = \arcsin(\sin x)$

6. $y = \sin(\arcsin x)$

7. $y = \lg(\sin \frac{\pi}{x})$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 14} + x}{\sqrt{x^2 - 2} + x}$

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 14} + x}{\sqrt{x^2 - 2} + x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x^2 + 2x^3)}{1 - \cos 2x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan^2 x)^{1/\sin x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{2x + x^2}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{3x} - 1}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+5}\right)^{2x}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{x-1/3}$

Bài 3. So sánh các VCB sau

1. $\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - 1, \beta(x) = e^{x(x+1)} - 1$ khi $x \rightarrow 0$

2. $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} - 1, \beta(x) = \ln(1 + \sqrt{x \sin x})$ khi $x \rightarrow 0$

3. $\alpha(x) = \sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}, \beta(x) = x^2$ khi $x \rightarrow 0$

4. $\alpha(x) = \sin x - x, \beta(x) = x^3$ khi $x \rightarrow 0$

5. $\alpha(x) = x^2 + \tan^4 x, \beta(x) = \sin^2 x + 2x^3$ khi $x \rightarrow 0$

6. $\alpha(x) = e^{\sqrt{1-x}} - 1, \beta(x) = \sqrt{1-x^2}$ khi $x \rightarrow 1^-$

7. $\alpha(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, \beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$ khi $x \rightarrow 0^+$

Bài 4. Tìm a để hàm số sau liên tục

$$1. \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ a \cos x + b \sin x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Bài 5. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số sau:

$$1. f(x) = x \arctan \frac{1}{x+1}$$

$$2. f(x) = x \operatorname{arccot} \frac{1}{x+1}$$

$$3. f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arccot} \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$4. f(x) = \frac{\sin 2x}{|x|}$$

$$5. y = \frac{8}{1 - 2^{\cot x}}$$

$$6. y = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \quad (a \neq b)$$

Bài 6. Tính đạo hàm cấp cao của hàm số

$$1. y = \sin ax, \text{ tính } y^{(n)}$$

$$2. y = \cos ax, \text{ tính } y^{(n)}$$

$$3. y = x^2 \cos 2x, \text{ tính } y^{(5)}$$

$$4. y = x \ln x, \text{ tính } y^{(5)}$$

$$5. y = x^2 e^x, \text{ tính } y^{(5)}$$

$$6. y = \frac{1}{x^2 - 1}, \text{ tính } y^{(n)}$$

$$7. y = \frac{1 - 2x}{e^x}, \text{ tính } y^{(n)}$$

$$8. y = x \ln(1 - 2x), \text{ tính } y^{(n)}$$

Bài 7. Tìm

$$1. \frac{d}{d(x^2)} (x^6 + 3x^4 + 1)$$

$$2. \frac{d}{d(x^3)} \left(\frac{e^x}{x} \right)$$

Bài 8. Tìm các giới hạn sau

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x}{3x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{2000}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2021} - 1}{\ln x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2x-\pi}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

Bài 9. a. Khai triển Maclaurin của hàm số $y = \ln(1-3x)$ đến x^4 .

b. Khai triển Maclaurin của hàm số $y = \cos^2 x$ đến x^4 .

Bài 10. Tìm cực trị của các hàm số sau:

$$1. y = 2x^3 - 3x^2 \quad 2. y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$$

$$3. y = x\sqrt{x^2 - 2} \quad 4. y = x - \ln(1+x)$$

$$5. y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+x^2}}$$

HD

Bài 1.

$$1. \begin{cases} x > 0 \\ x \neq k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$2. -1 \leq x < 1$$

$$3. -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

$$4. x \in \mathbb{R}$$

$$5. x \in \mathbb{R}$$

$$6. -1 \leq x \leq 1$$

$$7. \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài 2.

$$1. \frac{4}{3}$$

$$2. 20$$

$$3. -\frac{1}{2}$$

$$4. 1$$

5. -7, sử dụng phương pháp nhân dạng liên hợp để khử dạng vô định

$$6. \frac{1}{2}$$

$$7. 1$$

$$8. \frac{1}{2}, \text{ sử dụng VCB tương đương}$$

$$9. e^2$$

$$10. \frac{1}{3}$$

$$11. e^2$$

$$12. \frac{3}{2}$$

13. 1, bài này không có dạng vô định.

$$14. e^{-\frac{2}{3}}$$

Bài 3.

1. $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x \rightarrow 0$.
2. $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \rightarrow 0$.
3. $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x \rightarrow 0$.
4. $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x \rightarrow 0$.
5. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \rightarrow 0$.
6. $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x \rightarrow 1^-$.
7. $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x \rightarrow 0$.

Bài 4.

1. $a = 4$
2. $a = 1/2$
3. $a = 1/2$
4. $a = 1$

Bài 5.

1. $x = -1$ là điểm gián đoạn loại 1.
2. $x = -1$ là điểm gián đoạn loại 1.
3. $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2.
4. $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1.
5. $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1.
6. $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1.

Bài 6.

$$1. y^{(n)} = (\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2. y^{(n)} = (\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$3. y = x^2 \cos 2x, \text{ tính } y^{(5)}$$

$$\text{Ta có: } (\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{(5)} = C_5^0 x^2 (\cos 2x)^{(5)} + C_5^1 (x^2)' (\cos 2x)^{(4)} + C_5^2 (x^2)'' (\cos 2x)^{(3)} + 0$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 2^5 \cos\left(2x + 5\frac{\pi}{2}\right) + 5.2x.2^4 \cos\left(2x + 4\frac{\pi}{2}\right) + 10.2.2^3 \cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 32x^2(-\sin 2x) + 160x \cos 2x + 160 \sin 2x = 160x \cos 2x + 160 \sin 2x - 32x^2 \sin 2x
\end{aligned}$$

4. $y = x \ln x$, tính $y^{(5)}$

Ta tính $(\ln x)^{(n)}$, đặt $y_1 = \ln x$

$$y_1' = (\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y_1'' = (x^{-1})' = -x^{-2}$$

$$y_1''' = (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3}$$

$$y_1^{(4)} = -(-2)(-3)x^{-4}$$

$$y_1^{(n)} = (\ln x)^{(n)} = -(-2).(-3). \dots .(-(n-1))x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

$$y^{(5)} = (x \ln x)^{(5)} = C_5^0 x (\ln x)^{(5)} + C_5^1 (\ln x)^{(4)}$$

$$= x \frac{(-1)^4 4!}{x^5} + 5 \frac{(-1)^3 3!}{x^4} = \frac{24}{x^4} - \frac{30}{x^4} = -\frac{6}{x^4}$$

5. $y = x^2 e^x$, tính $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = C_n^0 x^2 (e^x)^{(n)} + C_n^1 (x^2)' (e^x)^{(n-1)} + C_n^2 (x^2)'' (e^x)^{(n-2)}$$

$$= x^2 e^x + n.2xe^x + \frac{n(n-1)}{2}.2e^x = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$$

6. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, tính $y^{(n)}$

$$\text{Ta có: } y = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \right)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right)$$

7. $y = \frac{1-2x}{e^x}$, tính $y^{(n)}$

$$y = \frac{1-2x}{e^x} = (1-2x)e^{-x}$$

$$y^{(n)} = C_n^0 (1-2x) (e^{-x})^{(n)} + C_n^1 (1-2x)' (e^{-x})^{(n-1)}$$

$$= (1-2x)(-1)^n e^{-x} + n(-2)(-1)^{n-1} e^{-x}$$

$$= (1-2x)(-1)^n e^{-x} + n(-2)(-1)^{n-1} e^{-x}$$

$$= (-1)^n (1-2x+2n) e^{-x}$$

Bài 7.

1. $3x^4 + 6x^2$

2. $\frac{x-1}{3x^4} e^x$

Bài 8.

1. $\frac{1}{3}$

2. 2

3. ∞

4. $\frac{1}{2}$

5. 2021

6. 1, sử dụng công thức $\lim [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim v(x) \ln u(x)}$

7. 1, sử dụng công thức $\lim [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim v(x) \ln u(x)}$

8. 1, sử dụng công thức $\lim [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim v(x) \ln u(x)}$

9. $e^{-1/2}$