BÀI TẬP BỔ SUNG 2

Bài 1. Đại cương về đồ thị

1. (3 điểm) Cho ma trận kề lưu trữ thông tin của đồ thị vô hướng G sau:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

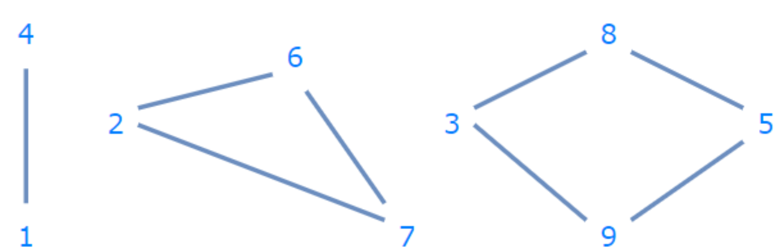
(a) Vẽ đồ thị G. (*Các đỉnh có tên là các số tự nhiên từ 1 đến n*)

(b) Đồ thị G có bao nhiêu thành phần liên thông? Liệt kê các thành phần liên thông đó.

(c) Chuyển đồ thị G dưới dạng danh sách kề.

Giải

(a) Đồ thị G được vẽ như sau



(b) Đồ thị trên có 3 thành phần liên thông:

- Thành phần liên thông thứ 1: (1, 4).
- Thành phần liên thông thứ 2: (2, 6, 7).
- Thành phần liên thông thứ 3: (3, 8, 5, 9).

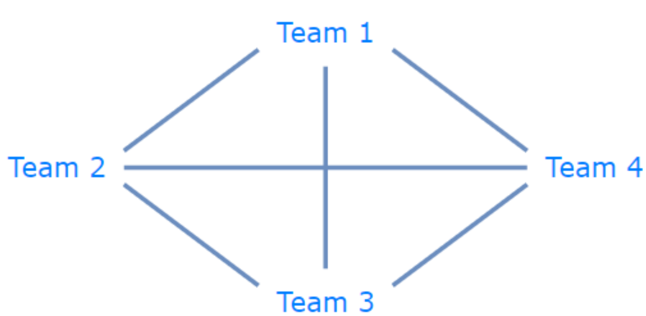
(c) Đồ thị G dưới dạng ma trận kề như sau

Vertex	Adjacent Vertices
1	4
2	6, 7
3	8, 9
4	1
5	8, 9
6	2, 7
7	2, 6
8	3, 5
9	3, 5

2. (1 điểm) Giải đấu bóng đá tranh cúp vô địch thế giới FIFA World Cup 2018 qui tụ 32 đội bóng hàng đầu thế giới. Các đội bóng được chia làm 8 bảng đầu, mỗi bảng bao gồm 4 đội bóng. Các đội bóng phải thi đấu ở vòng đấu bảng với thể thức vòng tròn, mỗi đội phải đấu với tất cả các đội còn lại trong cùng bảng. Hãy dùng đồ thị để mô tả các trận đấu bảng của một bảng. Có bao nhiêu trận đấu ở vòng đấu bảng của tất cả các bảng đấu? Mỗi bảng đấu sau khi thi đấu, vòng bảng sẽ chọn 2 đội đầu bảng để tiếp tục thi đấu theo hình thức loại trực tiếp cho đến khi chọn được đội vô địch. Hãy xác định số trận đấu của đội vô định trong giải đấu này?

Giải

- Đồ thị mô tả các trận đấu bảng của một bảng có dạng như sau



- Số trận đấu ở vòng đấu bảng của tất cả các bảng đấu là

$$\frac{4 \times 3}{2} \times 8 = 48 \quad \text{(trận)}.$$

- Mỗi bảng đấu sau khi thi đấu vòng bảng sẽ chọn ra 2 đội đầu bảng để tiếp túc thi đấu theo hình thức loại trực tiếp. Do đó, có tổng cộng $2 \times 8 = 16$ đội được tiếp tục thi đấu.

Khi đó, tổng số vòng sẽ diễn ra tiếp theo theo hình thức loại trực tiếp là $\lceil \log_2(16) \rceil = 4$ vòng. Như vậy, tổng số trận đấu của đội vô địch trong giải đấu này là

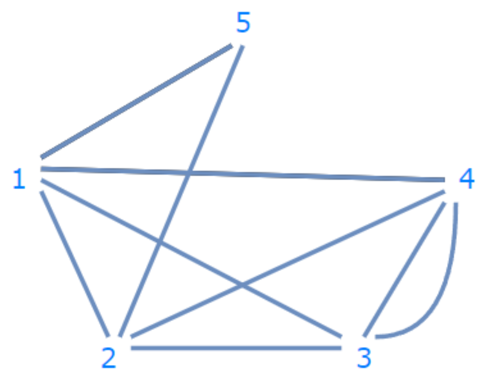
$$3 + 4 = 7 \quad \text{(trận)}.$$

trong đó, 3 trận đấu ở vòng bảng và 4 trận đấu theo hình thức loại trực tiếp.

3. (1 điểm) Vẽ đồ thị có dãy các bậc như sau: 4, 4, 4, 4, 2. Đồ thị kết quả có khả năng là đồ thị đơn hay không?

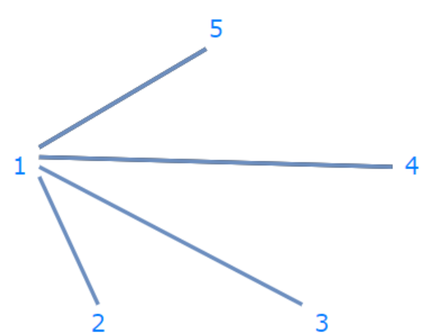
Giải

Đồ thị có dãy các bậc 4, 4, 4, 4, 2 có thể có dạng như sau

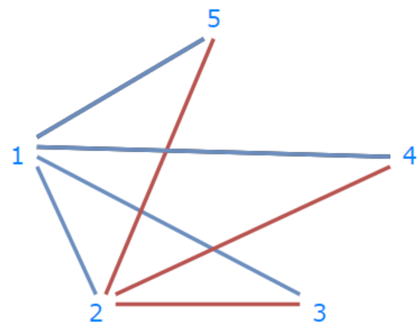


Để kiểm tra đồ thị kết quả có khả năng là đồ thị đơn hay không, ta xét giả định sau: giả sử rằng đồ thị kết quả có khả năng là đồ thị đơn. Theo đề, ta có 5 đỉnh với bậc lần lượt là 4, 4, 4, 4, 2. Khi đó, ta tiến hành vẽ đồ thị đơn với các đỉnh có bậc như trên:

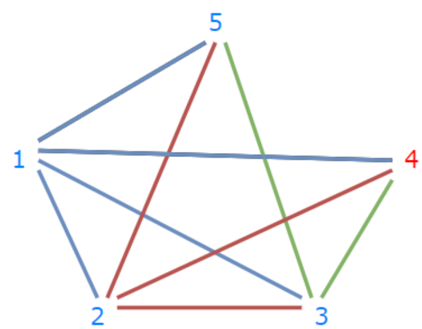
- Ta sẽ bắt đầu với các đỉnh có bậc lớn nhất (4 đỉnh bậc 4). Ta chọn 1 đỉnh trong 4 đỉnh có bậc là 4. Để có thể tạo thành đồ thị đơn, đỉnh này phải kề với 4 đỉnh còn lại.



- Ta tiếp tục chọn 1 đỉnh bậc 4 trong 3 đỉnh còn lại. Do đỉnh được chọn đã kề với đỉnh trước đó nên để tạo thành đồ thị đơn, đỉnh này phải kề với 3 đỉnh còn lại.



- Thực hiện tương tự với điểm bậc 4 tiếp theo ta có kết quả như hình



Ta thấy rằng, chỉ đến bước thứ 3 mà bậc của 2 điểm còn lại đều lớn hơn 2 (bậc 3). Do đó, mẫu thuẫn với giả định là đồ thị đơn có một đỉnh có bậc 2.

Như vậy, đồ thị kết quả không có khả năng là đồ thị đơn.

4. (1 điểm) Cây tam phân đủ với chiều cao 6 có tối đa bao nhiêu đỉnh trong. Trình bày và vẽ hình để chứng minh.

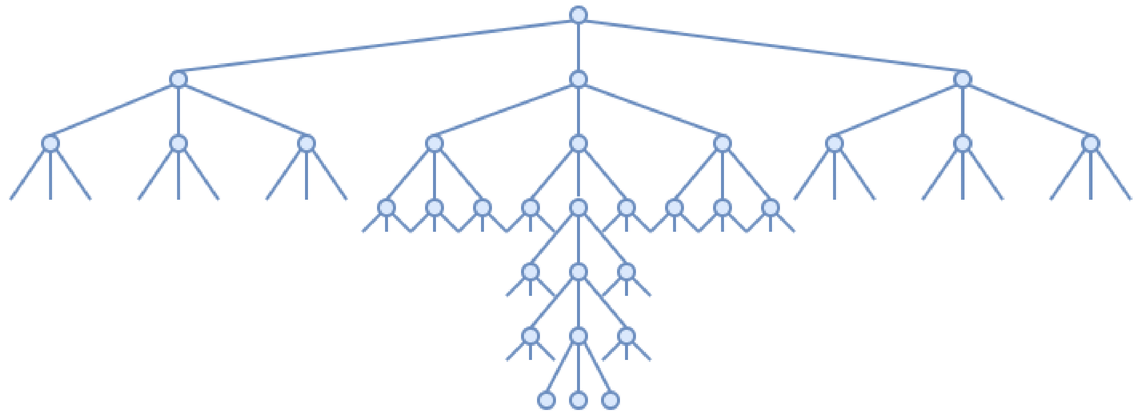
Giải

Cây tam phân đủ với chiều cao 6. Từ điều trên ta có dữ kiện $m = 3$ và số đỉnh lá $\ell = 3^6 = 729$ đỉnh. Khi đó, số đỉnh trong i sẽ là

$$i = \frac{\ell - 1}{m - 1} = \frac{729 - 1}{3 - 1} = 364 \quad \text{(đỉnh)}. \tag{*}$$

Nhìn hình (1) ta thấy rằng, ứng với mỗi bậc của cây tam phân đủ sẽ có $3^i, i = \overline{0, 6}$ đỉnh. Các đỉnh ứng với bậc là 6 sẽ là các đỉnh lá (do các đỉnh này có bậc bằng với chiều cao của cây). Như vậy, các đỉnh có bậc từ 0 đến 5 sẽ là các đỉnh trong. Khi đó, tổng số đỉnh trong sẽ là

$$3^0 + 3^1 + ... + 3^5 = 364 \quad \text{(đỉnh)}.$$

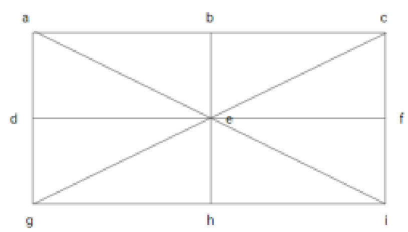


Hình 1: Hình minh hoạ cây tam phân đủ

Như vậy, kết quả được tính từ công thức ở phương trình (*) là chính xác.

Bài 2. Hamilton

6. (1 điểm) Tìm đường đi Hamilton của đồ thị sau. Trình bày chi tiết các bước.

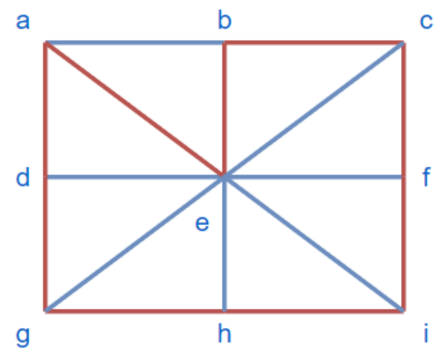


Giải

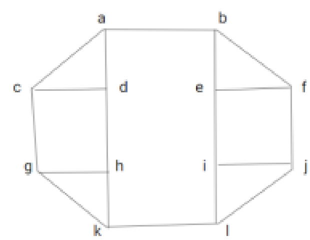
Các bước tìm đường đi Hamilton cho đồ thị trên:

- Giả sử ta lấy các cạnh e-a và e-b.
- Theo quy tắc 3, có thể xoá các cạnh e-c, e-f, e-i, e-h, e-g, e-d.
- Các đỉnh c, g, h, i, f, c trở thành bậc 2, ta lấy thêm được 7 cạnh kề với chúng là a-d, d-g, g-h, h-i, i-f, f-c, c-b.
- Ta xoá cạnh a-b do sẽ tạo chu trình con a-b-e theo quy tắc 2.

Như vậy, đường đi Hamilton đồng thời là chu trình Hamilton của đồ thị trên là e-a-d-g-h-i-f-c-b-e.



7. (1 điểm) Tìm chu trình Hamilton của đồ thị sau. Trình bày chi tiết các bước.

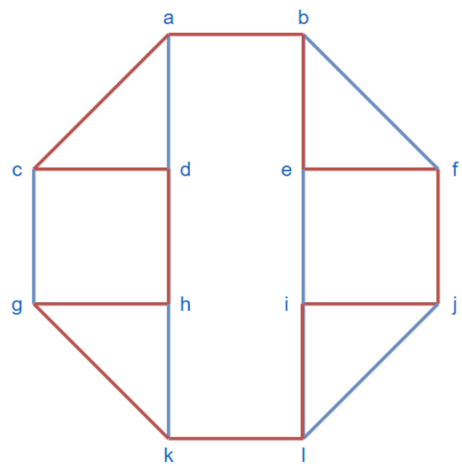


Giải

Các bước tìm chu trình Hamilton của đồ thị trên như sau:

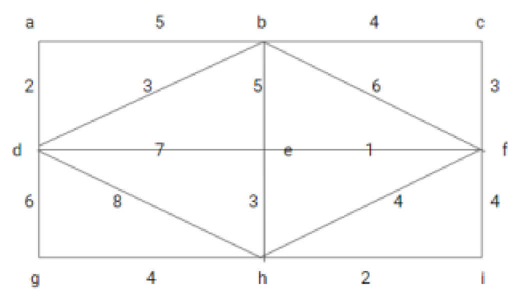
- Giả sử ta lấy các cạnh a-c và a-b.
- Theo quy tắc 3, ta có thể xoá cạnh a-d.
- Đỉnh d trở thành bậc 2, ta lấy thêm 2 cạnh kề với d là d-c và d-h.
- Theo quy tắc 3, ta có thể xoá cạnh c-g.
- Đỉnh g trở thành bậc 2, ta lấy thêm 2 cạnh kề với g là g-h và g-k.
- Theo quy tắc 3, ta có thể xoá cạnh h-k.
- Đỉnh k trở thành bậc 2, ta lấy thêm cạnh kề với k là k-l.
- Giả sử ta lấy cạnh b-e.
- Theo quy tắc 3, ta có thể xoá cạnh b-f.
- Đỉnh f trở thành bậc 2, ta lấy thêm các cạnh kề với f là f-e và f-j.
- Theo quy tắc 3, ta có thể xoá cạnh e-i.
- Đỉnh i trở thành bậc 2, ta lấy thêm các cạnh kề với i là i-j và i-l.

Như vậy, chu trình Hamilton của đồ thị trên là a-c-d-h-g-k-l-i-j-f-e-b-a.



Bài 3. Khung cây tối tiểu

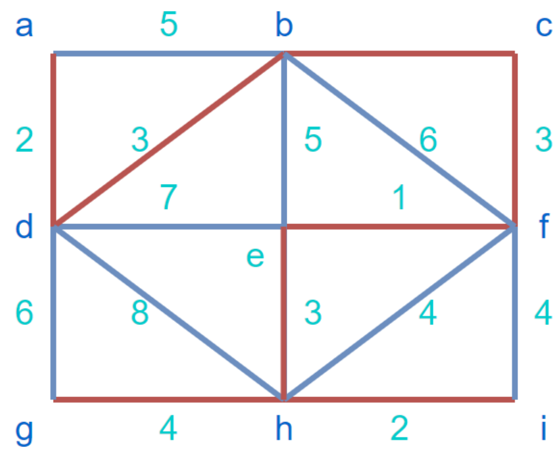
8. (1,5 điểm) Sử dụng thuật toán Prim để tìm khung cây tối tiểu của đồ thị dưới đây. Trình bày các bước làm.



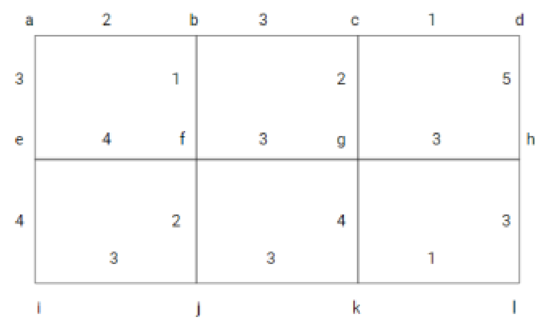
Giải

Choice	Edge	Weight
1	(e, f)	1
2	(e, h)	3
3	(h, i)	2
4	(f, c)	3
5	(c, b)	4
6	(b, d)	3
7	(d, a)	2
8	(h, g)	4
Total		22

Như vậy, cây khung tối tiểu của đồ thị trên gồm 8 cạnh: e-f, e-h, h-i, f-e, c-b, b-d, d-a, h-g và tổng chi phí là 22.



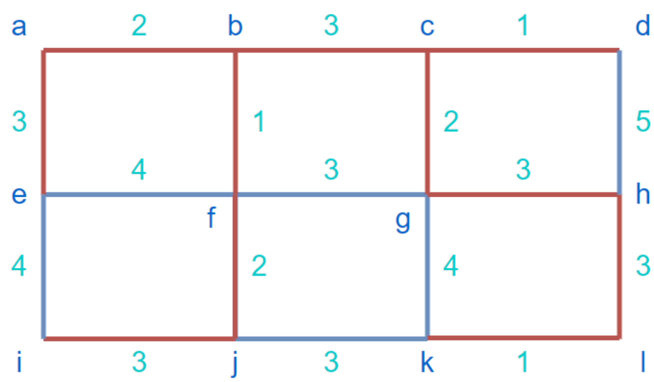
9. (1,5 điểm) Sử dụng thuật toán Kruskal để tìm khung cây tối tiểu của đồ thị dưới đây. Trình bày các bước làm.



Giải

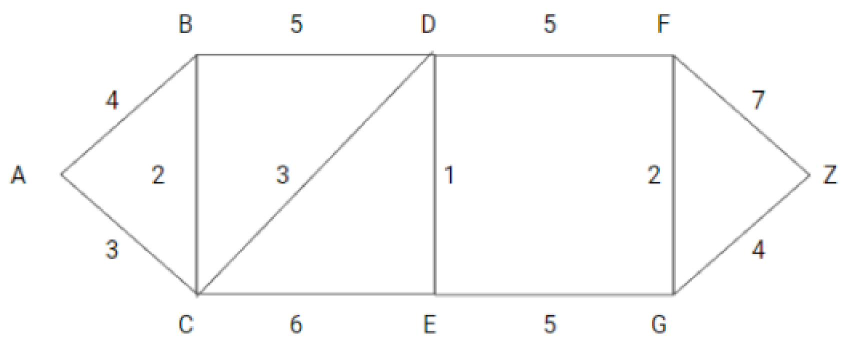
Choice	Edge	Weight
1	(b, f)	1
2	(c, d)	1
3	(k, l)	1
4	(a, b)	2
5	(c, g)	2
6	(f, j)	2
7	(a, e)	3
8	(b, c)	3
9	(g, h)	3
10	(h, l)	3
11	(i, j)	3
Total		24

Như vậy, cây khung tối tiểu của đồ thị trên gồm 11 cạnh: b-f, c-d, k-l, a-b, c-g, f-j, a-e, b-c, g-h, h-l, i-j và tổng chi phí là 24.



Bài 4. Thuật toán Dijkstra

10. (2 điểm) Từ đỉnh A đến đỉnh Z.

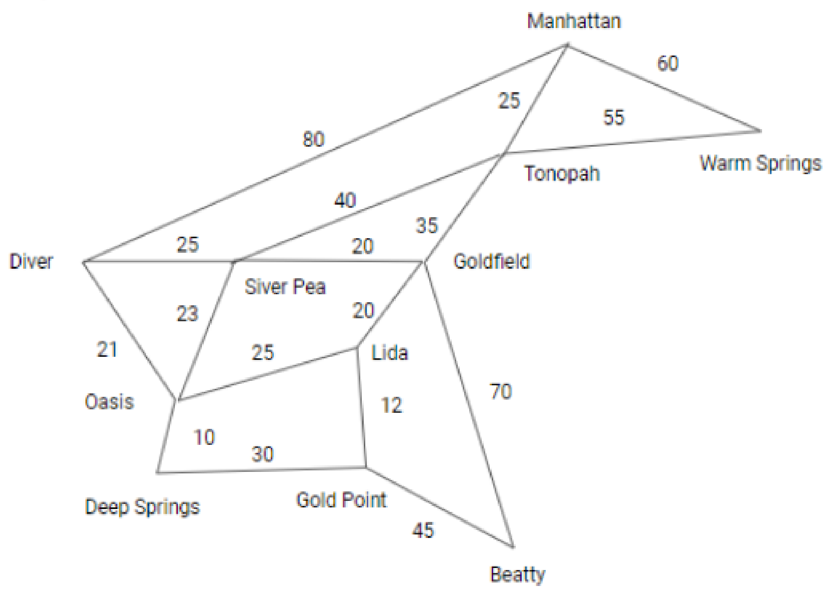


Giải

A	B	C	D	E	F	G	Z
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	(4, A)	(3, A)	∞	∞	∞	∞	∞
-	(4, A)	**(3, A)**	(6, C)	(9, C)	∞	∞	∞
-	**(4, A)**	-	(6, C)	(9, C)	∞	∞	∞
-	-	-	**(6, C)**	(7, D)	(11, D)	∞	∞
-	-	-	-	**(7, D)**	(11, D)	(12, E)	∞
-	-	-	-	-	**(11, D)**	(12, E)	(18, F)
-	-	-	-	-	-	**(12, E)**	**(16, G)**

Đường đi ngắn nhất từ A đến Z là : $A \to C \to D \to E \to G \to Z$, với tổng chi phí là 16.

11. (2 điểm) Từ Deep Springs đến Warm Springs.



Giải

Ta ký hiệu các địa điểm trên graph cho việc lập bảng Dijkstra như sau:

D : Diver
O : Oasis
DS: Deep Springs
GP: Gold Point
B : Beatty
L : Lida
SP: Siver Pea
G : Goldfield
T : Tonopah
M : Mahattan
WS: Warm Springs

D	O	DS	GP	B	L	SP	G	T	M	WS
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	(10, DS)	**0**	(30, DS)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
(31, O)	**(10, DS)**	-	(30, DS)	∞	(35, O)	(33, O)	∞	∞	∞	∞
(31, O)	-	-	**(30, DS)**	(75, GP)	(35, O)	(33, O)	∞	∞	∞	∞
(31, O)	-	-	-	(75, GP)	(35, O)	(33, O)	∞	∞	(111, D)	∞
-	-	-	-	(75, GP)	(35, O)	**(33, O)**	(53, SP)	(73, SP)	(111, D)	∞
-	-	-	-	(75, GP)	**(35, O)**	-	(53, SP)	(73, SP)	(111, D)	∞
-	-	-	-	(75, GP)	-	-	**(53, SP)**	(73, SP)	(111, D)	∞
-	-	-	-	(75, GP)	-	-	-	**(73, SP)**	(98, T)	(128, T)
-	-	-	-	**(75, GP)**	-	-	-	-	(98, T)	(128, T)
-	-	-	-	-	-	-	-	-	**(98, T)**	(128, T)
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**(128, T)**

Đường đi ngắn nhất từ Deep Springs đến Warm Springs là: Deep Springs $\rightarrow$ Oasis $\rightarrow$ Siver Pea $\rightarrow$ Tonopah $\rightarrow$ Warm Springs, với tổng chi phí là 128.