LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

Outline

Outline

Các dạng hội tụ

Trong phần này $X_1, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên được định nghĩa trên cùng một không gian xác suất. $F_1, \dots, F_n$ là hàm phân phối của $X_1, \dots, X_n$, F là hàm phân phối của X.

Định nghĩa 1 (Hội tụ hầu khắp nơi)

Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n\}$ hội tụ hầu khắp nơi (hay hầu chắc chắn) về biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, nếu

$$P\left(\omega \in \Omega : X_n\left(\omega\right) \longrightarrow X\left(\omega\right)\right) = 1$$

Các dạng hội tụ

Định nghĩa 2 (Hội tụ theo xác suất)

Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n\}$ hội tụ theo xác suất về biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là $X_n \xrightarrow{P} X$, nếu:

$$\forall \epsilon > 0, P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Định nghĩa 3 (Hội tụ theo phân phối)

Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n\}$ hội tụ theo phân phối về biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là $X_n \xrightarrow{d} X$, nếu:

$$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x), \forall x \in \mathcal{C}(F_X), \mathcal{C}(F_X) = \{x : F_X \text{ liên tục tại } x\}$$

rong trường hợp này $\{X_n\}, X$ có thể được định nghĩa trên các không gian xác suất khác nhau.

Các dạng hội tụ

Định nghĩa 4 (Hội tụ theo r trung bình)

Dãy biến ngẫu nhiên $X_1, \dots, X_n$ hội tụ theo r trung bình về biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là $X_n \xrightarrow{r} X$, nếu:

$$E\left(|X_n - X|^r\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Khi $r = 2$, ta còn gọi là hội tụ theo bình phương trung bình (mean square (m.s.)) và kí hiệu là $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$

Các dạng hội tụ - Ví dụ

Ví dụ 5

Giả sử không gian xác suất là khoảng đơn vị Lebesgue: $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ với λ là độ đo Lebesgue. Định nghĩa

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n, & \text{nếu } 0 \le \omega \le 1/n \\ 0, & \text{nếu } 1/n < \omega \le 1 \end{cases}$$

Khi đó, $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ bởi vì với mọi $\omega \notin N = \{0\}$ thì $X_n(\omega) \to 0$.

Các dạng hội tụ - Ví dụ

Ví dụ 6

Cho $X_n \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$. Chứng minh

(a) $X_n \xrightarrow{d} 0$

(b) $X_n \xrightarrow{P} 0$

(c) $X_n \xrightarrow{m.s.} 0$

Giải

Giải (tt)

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Quan hệ giữa các dạng hội tụ

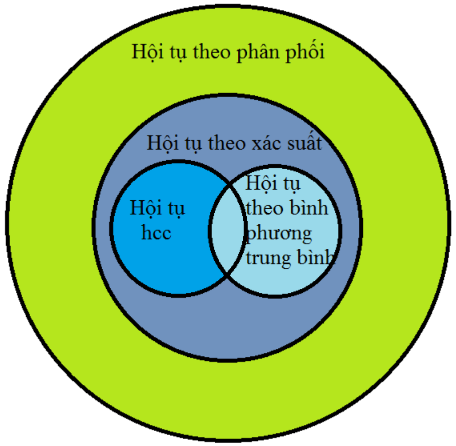
LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

1. Hội tụ hầu chắc chắn suy ra hội tụ theo xác suất. Điều ngược lại không đúng.
2. Hội tụ bình phương trung bình suy ra hội tụ theo xác suất. Điều ngược lại không đúng.
3. Nếu $\{X_n\}$ hội tụ theo xác suất, thì tồn tại một dãy con $\{X_{n_k}\}$ của $\{X_n\}$ hội tụ hầu chắc chắn.
4. Hội tụ hầu chắc chắn (hội tụ theo xác suất, hội tụ theo bình phương trung bình) đều suy ra hội tụ theo phân phối. Điều ngược lại không đúng.

Bốn dạng hội tụ này được minh họa như sau:

Quan hệ giữa các dạng hội tụ

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta



Quan hệ giữa các dạng hội tụ - Ví dụ

Dưới đây là một ví dụ về một dãy biến ngẫu nhiên hội tụ theo xác suất về 0 nhưng không hội tụ hầu chắc chắn về 0.

Ví dụ 7

Cho $(\Omega, \mathcal{B}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ với λ là độ đo Lebesgue và định nghĩa $\{X_n\}$ như sau:

$$\begin{array}{lll} X_1 = 1_{[0,1]}, & & \\ X_2 = 1_{[0,\frac{1}{2}]}, & X_3 = 1_{[\frac{1}{2},1]} & \\ X_4 = 1_{[0,\frac{1}{3}]}, & X_5 = 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, & X_6 = 1_{[\frac{2}{3},1]} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Với mọi $\omega \in [0,1], X_n(\omega) \nrightarrow 0$ vì $X_n(\omega) = 1$ với vô hạn giá trị n. Tuy nhiên $X_n \xrightarrow{P} 0$ vì với mọi $\epsilon > 0$, $P(|X_n| > \epsilon) = P(X_n = 1) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Quan hệ giữa các dạng hội tụ - Ví dụ

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Dưới đây là một ví dụ về một dãy biến ngẫu nhiên hội tụ theo xác suất về 0 nhưng không hội tụ bình phương trung bình về 0.

Ví dụ 8

Cho $\{X_n\}_{n\geq 1}$ thỏa

$$P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$$

(a) Chứng minh $X_n \xrightarrow{P} 0$.
(b) Chứng minh $X_n \overset{m.s.}{\nrightarrow} 0$.

Giải

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Tính duy nhất của giới hạn

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Định lí 9

Nếu dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n\}$ hội tụ hầu khắp nơi (hội tụ theo xác suất, hội tụ theo $r-$trung bình, hội tụ theo phân phối) thì biến ngẫu nhiên giới hạn là duy nhất (theo nghĩa hầu khắp)

Chứng minh.

Được để lại như 1 bài tập. □

Định lí tiếp theo phát biểu về sự bảo toàn của các dạng hội tụ qua các phép biến đổi (chứng minh được bỏ qua).

Tính duy nhất của giới hạn

Định lí 10

Cho $\{X_n\}, \{Y_n\}$ là các dãy biến ngẫu nhiên và g là một hàm liên tục.

1. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X + Y.$
2. $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y.$
3. $X_n \xrightarrow{r} X, Y_n \xrightarrow{r} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{r} X + Y.$
4. $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c.$
5. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} XY.$
6. $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{P} XY.$
7. $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{d} cX.$
8. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} g(X)$
9. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$
10. $X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

Outline

Luật yếu số lớn

Trong phần này, $\{X_n\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối có $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$.

Đặt $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Ta có $E(\overline{X}_n) = \mu, Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Định lí 11 (Luật yếu số lớn (The weak law of large number(WLLN)))

Cho $X_1, X_2, \ldots$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Khi đó

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev,

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \le \frac{Var(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Luật mạnh số lớn

Định lí 12 (Luật mạnh số lớn (The strong law of large number (SLLN)))

Cho $X_1, X_2, \ldots$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối có $E(X_i) < \infty$. Khi đó

$$\overline{X_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu$$

Chứng minh

Ta thấy rằng $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \xrightarrow{a.s.} 0$. Do đó, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\mu = 0$. Đặt $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ và xét

$$E(S_n^4) = E[(X_1+\cdots+X_n)(X_1+\cdots+X_n)(X_1+\cdots+X_n)(X_1+\cdots+X_n)] \tag{1}$$

Khai triển S_n^4 ta nhận được một tổng có các số hạng có dạng

$$X_i^4, X_i^3X_j, X_i^2X_j^2, X_i^2X_jX_k, X_iX_jX_kX_l$$

với i, j, k, l khác nhau. Bởi vì mọi X_i có trung bình 0, kết hợp với tính độc lập của các X_i, ta có

$$\begin{aligned} E[X_i^3X_j] &= E[X_i^3]E[X_j] = 0 \\ E[X_i^2X_jX_k] &= E[X_i^2]E[X_j]E[X_k] = 0 \\ E[X_iX_jX_kX_l] &= 0 \end{aligned}$$

Chứng minh (tt)

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Với mỗi cặp i và j cho trước, có $C_4^2 = 6$ số hạng trong khai triển S^4 bằng $X_i^2X_j^2$. Do đó, từ phương trình (1), ta có

$$\begin{aligned} E[S^4] &= nE[X_i^4] + 6C_2^n E[X_i^2X_j^2] \\ &= nK + 3n(n-1)E[X_i^2]E[X_j^2] \end{aligned}$$

Bởi vì, $0 \le Var(X_i^2) = E[X_i^4] - (E[X_i^2])^2$, nên $(E[X_i^2])^2 \le E[X_i^4] = K$. Do đó,

$$E[S_n^4] \le nK + 3n(n-1)K$$

hay

$$E\left[\frac{S_n^4}{n^4}\right] \le \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}$$

Chứng minh (tt)

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Do đó,

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n^4}{n^4}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\frac{S_n^4}{n^4}\right] < \infty$$

Điều này suy ra rằng, với xác suất 1, $\sum_{i=1}^{\infty} S_n^4/n^4 < \infty$ (tại sao?) Nhưng sự hội tụ của dãy suy ra số hạng thứ n của nó tiến tới 0; Vì vậy ta có thể kết luận rằng với xác suất 1,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^4}{n^4} = 0$$

Do đó, với xác suất 1,

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty$$

Outline

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Định lí giới hạn trung tâm

Định lí 13 (Định lí giới hạn trung tâm - The Central Limit Theorem (CLT))

Gọi $X_1, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối với trung bình μ và phương sai σ^2. Gọi $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$. Khi đó

$$Z_n \equiv \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{Var(\overline{X}_n)}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z$$

với $Z \sim N(0,1)$. Nói cách khác,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Chứng minh

Nhắc lại rằng nếu X là một biến ngẫu nhiên, thì hàm sinh moment của nó là $M_X(t) = E(e^{tX})$. Giả sử rằng hàm sinh moment là hữu hạn trong một lân cận của $t = 0$.

Bổ đề 14

Cho $Z_1, Z_2, \dots$ là một dãy các biến ngẫu nhiên. Gọi M_n là hàm sinh moment của Z_n. Gọi Z là một biến ngẫu nhiên khác và hàm sinh moment của nó là M. Nếu $M_n(t) \to M(t)$ với mọi t trong một khoảng mở nào đó quanh 0, thì $Z_n \xrightarrow{d} Z$.

Chứng minh (tt)

Gọi $Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$. Khi đó, $Z_n = n^{-1/2}\sum_i Y_i$. Gọi $M(t)$ là hàm sinh moment của Y_i. Hàm sinh moment của $\sum_i Y_i$ là $(M(t))^n$ và của Z_n là $[M(t/\sqrt{n})]^n \equiv \xi_n(t)$. Ta có $M'(0) = E(Y_1) = 0, M''(0) = E(Y_1^2) = Var(Y_1) = 1$. Vì vậy,

$$\begin{aligned}
M(t) &= M(0) + tM'(0) + \frac{t^2}{2!}M''(0) + \frac{t^3}{3!}M'''(0) + \cdots \\
&= 1 + 0 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}M'''(0) + \cdots \\
&= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}M'''(0) + \cdots
\end{aligned}$$

và

Chứng minh (tt)

$$\begin{aligned}
\xi_n(t) &= \left[M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{3!n^{3/2}}M'''(0) + \cdots\right]^n \\
&= \left[1 + \frac{\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!n^{1/2}}M'''(0) + \cdots}{n}\right]^n \\
&\to e^{t^2/2}
\end{aligned}$$

Trong đó, $e^{t^2/2}$ là hàm sinh moment của $N(0,1)$. Do đó, theo bổ đề 14, $Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$.
Trong bước cuối cùng ta đã sử dụng kết quả: nếu $a_n \to a$ thì

$$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \to e^a.$$

Định lí giới hạn trung tâm - Ví dụ

Ví dụ 15

Giả sử rằng số lỗi trong một chương trình máy tính có phân phối Poisson với trung bình 5. Gọi $X_1, \dots, X_{125}$ là số lỗi trong $n = 125$ chương trình. Tính $P(\overline{X}_n \leq 5.5)$.

Giải.

Định lí giới hạn trung tâm

Định lí giới hạn trung tâm nói rằng $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$ xấp xỉ $N(0,1)$. Tuy nhiên, ta hiếm khi biết được σ. Nếu thay σ^2 bằng ước lượng S_n^2 của nó

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

thì ta vẫn được phân phối giới hạn chuẩn.

Định lí 16

Với các giả thiết như trong định lí 13. Khi đó,

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Định lí giới hạn trung tâm

Định lí sau cho phép ta đánh giá độ chính xác của xấp xỉ chuẩn.

Định lí 17 (Bất đẳng thức Berry-Essèen)

Giả sử rằng $E|X_1|^3 < \infty$. Khi đó

$$\sup_z |P(Z_n \leq z) - \Phi(z)| \leq \frac{33}{4}\frac{E|X_1 - \mu|^3}{\sqrt{n}\sigma^3} \tag{2}$$

Định lí giới hạn trung tâm nhiều chiều

Định lí 18

Cho $X_1, \dots, X_n$ là các vector ngẫu nhiên k chiều i.i.d,

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ \vdots \\ X_{ki} \end{pmatrix}, \text{ trung bình } \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_{1i}) \\ E(X_{2i}) \\ \vdots \\ E(X_{ki}) \end{pmatrix},$$

và ma trận phương sai $\Sigma_{k\times k} = [cov(X_{pi}, X_{qi})]_{p,q=\overline{1,k}}$. Gọi

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \vdots \\ \overline{X}_k \end{pmatrix} \quad \text{với } \overline{X}_j = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_{ji}.$$

Khi đó, $$\sqrt{n}(\overline{X} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$$

Outline

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Phương pháp Delta

Nếu Y_n có phân phối Chuẩn giới hạn thì phương pháp delta cho phép ta tìm phân phối giới hạn của $g(Y_n)$ với g là hàm trơn bất kì.

Định lí 19 (Phương pháp Delta)

Giả sử rằng

$$\frac{\sqrt{n}(Y_n-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

và g là một hàm khả vi sao cho $g'(\mu) \neq 0$. Khi đó

$$\frac{\sqrt{n}(g(Y_n)-g(\mu))}{|g'(\mu)|\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Nói cách khác,

$$Y_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ suy ra } g(Y_n) \approx N\left(g(\mu), (g'(\mu))^2\frac{\sigma^2}{n}\right).$$

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Phương pháp Delta - Ví dụ

Ví dụ 20

Cho $X_1, \dots, X_n$ là i.i.d với trung bình hữu hạn μ và phương sai hữu hạn σ^2. Đặt $W_n = e^{\overline{X}_n}$. Tìm phân phối giới hạn của W_n.

Giải.

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Phương pháp Delta nhiều chiều

Định lí 21 (Phương pháp Delta nhiều chiều)

Giả sử rằng $Y_n = (Y_{n1}, \dots, Y_{nk})$ là một dãy các vector ngẫu nhiên sao cho

$$\sqrt{n}(Y_n-\mu) \xrightarrow{d} N(0,\Sigma).$$

Đặt $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ và đặt

$$\nabla g(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial y_k} \end{pmatrix}$$

Đặt ∇_μ kí hiệu $\nabla g(y)$ được tính tại $y=\mu$ và giả sử rằng các phần tử của ∇_μ là khác không. Khi đó

$$\sqrt{n}(g(Y_n)-g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, \nabla_\mu^T \Sigma \nabla_\mu).$$

Phương pháp Delta nhiều chiều - Ví dụ

Cho

$$\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \end{pmatrix}$$

là các vector i.i.d với trung bình $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ và phương sai Σ. Đặt

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}, \quad \overline{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

và đặt $Y_n = \overline{X}_1\overline{X}_2$. Do đó, $Y_n = g(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$ với $g(s_1, s_2) = s_1 s_2$.

LUẬT SỐ LỚN VÀ ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM
Nguyễn Văn Thìn
Các dạng hội tụ
Luật số lớn
Định lí giới hạn trung tâm
Phương pháp Delta

Do định lí giới hạn trung tâm,

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X}_1 - \mu_1 \\ \overline{X}_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$$

Ta có

$$\nabla g(s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial s_1} \\ \frac{\partial g}{\partial s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

và vì vậy

$$\nabla_\mu^T \Sigma \nabla_\mu = \begin{pmatrix} \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \mu_2^2\sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2\sigma_{22}.$$

Do đó,

$$\sqrt{n}(\overline{X}_1\overline{X}_2 - \mu_1\mu_2) \xrightarrow{d} N(0, \mu_2^2\sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2\sigma_{22})$$