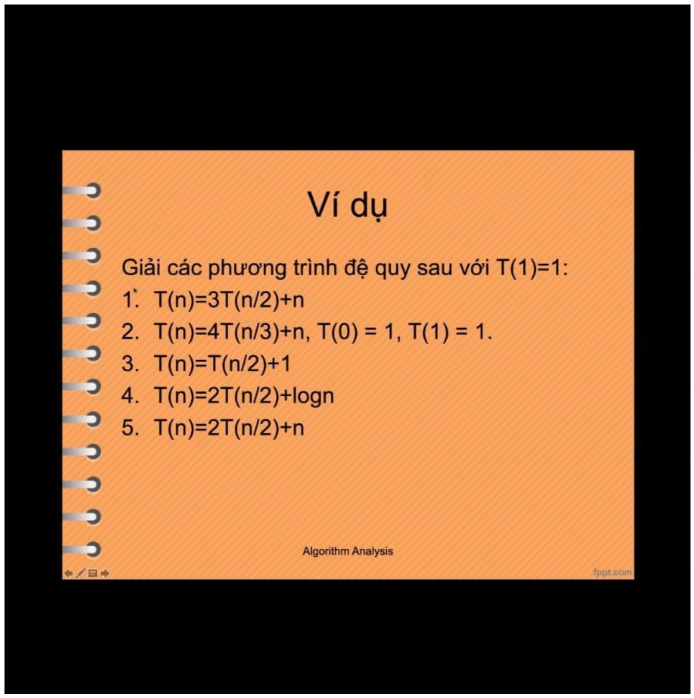
Họ và tên: Trịnh Ngọc Hiến
MSSV: 19110315

Bài tập về nhà tuần 5:
Trình bày rõ ràng theo yêu cầu bài toán sau:
Hạn nộp: ngày 01/05/2022.



1/ $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n; T(1) = 1.$

Giả sử ta có biểu diễn nhị phân của n là:
n = $3^k a_k + 3^{k-1} a_{k-1} + ... + 3a_1 + a_0$.
với k = $[log_2(n)]$
**Chú ý:* Khi n $\geqslant$ 2, $a_k = 1$.

Thật vậy, ta có:
T(n) = 3T($\frac{n}{2}$) + n.
- T($a_k.a_{k-1}....a_0$) = 3T($a_k...a_1$) + ($3^k a_k + ... + a_0$).
- 3T($a_k...a_1$) = 3^2T($a_k...a_2$) + 3($3^k a_{k-1} + ... + 3a_1$).
- $3^2 T(a_k...a_2)$ = 3^3T($a_k...a_3$) + 3^2($3^k a_{k-2} + ... + 3^2 a_2$).
...
- $3^k T(a_k.a_{k-1})$ = $3^k T(a_k)$ + $3^{k-1}(3a_k + a_{k-1})$.
$\Rightarrow$ T(n) = $3^k + k(3^k.a_k + ... + 3.a_1 + a_0)$.

2/ $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n; T(0) = 1, T(1) = 1.$

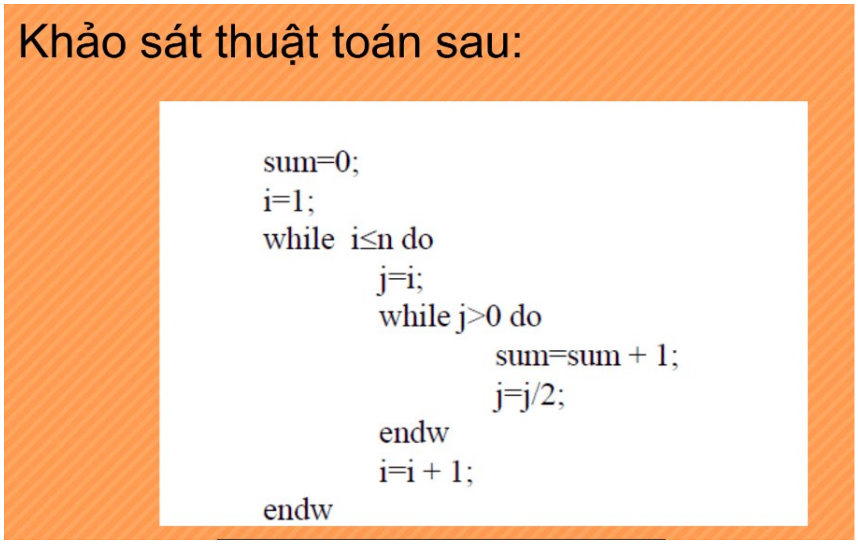
Giả sử ta có biểu diễn nhị phân của n là:
n = $4^k a_k + 4^{k-1}a_{k-1} + ... + 4a_1 + a_0$.
với k = $[log_2(n)]$
**Chú ý:* Khi n $\geqslant 2$, $a_k = 1$ và $a_{k+1} = 1$.

Thật vậy, ta có:
T(n) = 4T($\frac{n}{3}$) + n.
- T($a_k.a_{k-1}....a_0$) = 4T($a_k...a_1$) + ($4^k a_k + ... + a_0$).
- 4T($a_k...a_1$) = $4^2 T(a_k...a_2) + 4(4^k a_{k-1} + ... + 4a_1)$.
- $4^2 T(a_k...a_2) = 4^3 T(a_k...a_3) + 4^2(4^k a_{k-2} + ... + 4^2 a_2)$.
...
- $4^k T(a_k.a_{k-1}) = 4^k T(a_k) + 4^{k-1}(4a_k + a_{k-1})$.
$\Rightarrow$ T(n) = $4^k + 4^{k+1} + k(4^k.a_k + ... + 4.a_1 + a_0)$.

3/$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1; T(1) = 1$

Giả sử ta có biểu diễn nhị phân của n là:
n = $a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0$.
với k = $[log_2(n)]$
**Chú ý:* Khi n $\geqslant 2$, $a_k = 1$.

Thật vậy, ta có:
T(n) = T($\frac{n}{2}$) + 1.
- T($a_k.a_{k-1}....a_0$) = T($a_k...a_1$) + ($a_k + ... + a_0$).
- T($a_k...a_1$) = $T(a_k...a_2) + (a_{k-1} + ... + a_1)$.
- $T(a_k...a_2) = T(a_k...a_3) + (a_{k-2} + ... + a_2)$.
...
- $T(a_k.a_{k-1}) = T(a_k) + (a_k + a_{k-1})$.
$\Rightarrow$ T(n) = $1 + k(a_k + ... + a_1 + a_0)$.



Thật vậy, ta gọi a là 1 số tự nhiên lớn nhất, với a là phần thực của $\sqrt{n}$. Từ đó, ta có $a^2 \leq n < (a+1)^2$.

Giả sử, trường hợp a chạy từ 1 $\rightarrow$ 3:

Khi đó, ta có phần thực của n hay [n] = 1.

Giả sử, trường hợp a chạy từ 4 $\rightarrow$ 8:

Khi đó, ta có phần thực của n hay [n] = 2.

....

Giả sử, trường hợp a chạy từ $(a-1)^2 \rightarrow a^2 - 1$:

Khi đó, ta có phần thực của n hay [n] = a - 1.

Giả sử, trường hợp a chạy từ $a^2 \rightarrow$ n:

Khi đó, ta có phần thực của n hay [n] = a.

Qua đó, ta có thể khảo sát độ phức tạp của thuật toán dựa trên số phép gán và so sánh như sau:

+ Với a cũng là số lần thực thi câu lệnh bên trong vòng lặp con.

- SS = 1 + $\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{i}+1+1]$ = 1 + 2n + $\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{i}]$.
- Gán = 2 + $\sum_{i=1}^{n}[1+2*[\sqrt{i}]+1]$ = 2 + 2n + 2 * $\sum_{i=1}^{n}[\sqrt{i}]$.