MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

Outline

Outline

1 Nội dung chính

2 Các bất đẳng thức xác suất

3 Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Nội dung chính

Bài giảng hôm nay giới thiệu một số bất đẳng thức sau:

- Các bất đẳng thức xác suất: Markov, Chebychev, Hoeffding[1], Mill[1]
- Các bất đẳng thức cho kì vọng: Cauchy-Schwartz, Jensen

[1] Phần đọc thêm

Outline

Bất đẳng thức Markov

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Định lí 1 (Bất đẳng thức Markov)

Giả sử X là biến ngẫu nhiên không âm và tồn tại kỳ vọng. Khi đó, với mọi $t > 0$,

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

Chứng minh.

Ta chỉ chứng minh cho trường hợp X liên tục. Trường hợp X rời rạc chỉ cần thay dấu tích phân bằng tổng.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_t^{+\infty} xf(x)dx \geq t\int_t^{+\infty} f(x)dx = tP(X \geq t)$$

□

Bất đẳng thức Chebyshev

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Định lí 2 (Bất đẳng thức Chebyshev)

Cho X là biến ngẫu nhiên tồn tại kỳ vọng và có phương sai hữu hạn. Khi đó, với mọi $t > 0$,

$$P(|X - EX| \geq t) \leq \frac{Var(X)}{t^2}$$

Chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức Markov, ta được

$$P(|X-EX| \geq t) = P(|X-EX|^2 \geq t^2) \leq \frac{E(X-EX)^2}{t^2} = \frac{Var(X)}{t^2}$$

□

Bất đẳng thức Chebyshev

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Nhận xét 3

Một trường hợp đặc biệt của định lí 2 là: với $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, thì

$$P(|Z| \geq k) \leq \frac{1}{k^2}$$

Ví dụ 4

Một nhà quản lý thiết bị mua 10,000 con chip nhớ từ một công ty có 3% con chip bị lỗi. Giả sử rằng các con chip là độc lập. Tìm xác suất số chip tốt nằm trong khoảng

(a) từ 9650 đến 9750

(b) từ 9675 đến 9775.

Giải:

Giải (tt):

Ví dụ 5

Cho $X \sim B(50, 0.1)$. Sử dụng BĐT Markov, tìm xác suất $X \geq 10$ và so sánh nó với giá trị đúng.

Giải:

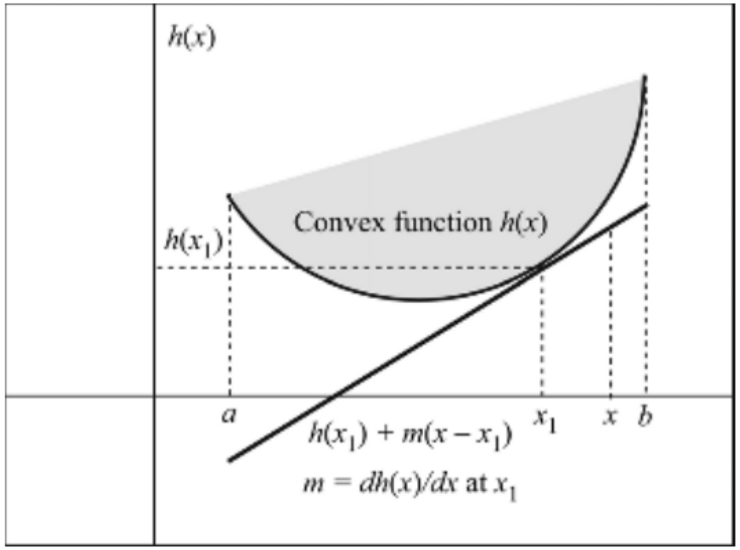
Định nghĩa 6

Hàm h là lồi trên $[a, b]$ nếu với mỗi $x_1 \in [a, b]$, tồn tại một hằng số m sao cho bất đẳng thức sau thỏa với mọi $x \in [a, b]$:

$$h(x) \geq h(x_1) + m(x - x_1)$$

Như trong hình bên dưới, $h(x_1) + m(x - x_1)$ là phương trình đường thẳng đi qua điểm $(x_1, h(x_1))$ và m là độ dốc của đường thẳng này.

Hàm lồi



Hàm lồi

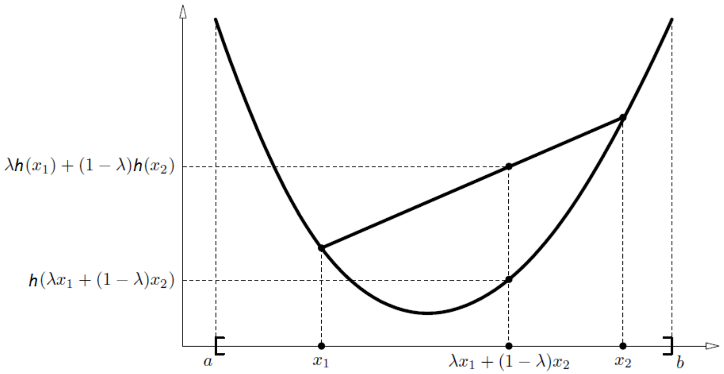
Ta cũng có một định nghĩa khác tương đương như sau

Định nghĩa 7

- Hàm h là lồi trên $[a, b]$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ và mọi $\lambda \in [0, 1]$,
$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2) \qquad (1)$$
- Hàm h là lõm nếu $-h$ là lồi.

Xem hình ảnh minh họa sau đây:

Hàm lồi



Hàm lồi

Nhận xét 8

- Nếu dấu bằng trong bất đẳng thức (1) không xảy ra, thì h được gọi là lồi ngặt.
- Về mặt hình học, phương trình này nói rằng nếu hàm h nằm dưới (tương ứng, trên) đường thẳng nối hai điểm trong khoảng $[a, b]$, thì nó lồi (tương ứng, lõm).
- Người ta có thể chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để h lồi là đạo hàm cấp hai $h''(x) \geq 0$ với mọi x trong khoảng $[a, b]$.

Hàm lồi - Ví dụ

Các hàm sau đây đều là hàm lồi

1. x^2,
2. $|x|$,
3. e^x,
4. $-\ln(x)$ với $x > 0$,
5. $x \ln(x)$ với $x > 0$.

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Bất đẳng thức Hoeffding [1]

Định lí 9 (Bất đẳng thức Hoeffding)

Cho $Y_1, \ldots, Y_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thỏa $E(Y_i) = 0$ và $a_i \le Y_i \le b_i$. Cho $\epsilon > 0$. Khi đó, với mọi $t > 0$,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \ge \epsilon\right) \le e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^{n} e^{t^2(b_i-a_i)^2/8}. \tag{2}$$

Chứng minh

Ta sử dụng dạng chính xác của định lí Taylor: Nếu g là một hàm trơn, thì tồn tại $\xi \in (0, u)$ sao cho $g(u) = g(0) + ug'(u) + \frac{u^2}{2} g''(\xi)$.
Với $t > 0$ bất kì, từ bất đẳng thức Markov, ta có

[1] Phần đọc thêm

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Chứng minh (tt)

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \ge \epsilon\right) &= P\left(t\sum_{i=1}^{n} Y_i \ge t\epsilon\right) = P\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} Y_i} \ge e^{t\epsilon}\right) \\ &\le e^{-t\epsilon} E\left(e^{t\sum_{i=1}^{n} Y_i}\right) = e^{-t\epsilon} \prod_{i} E(e^{tY_i}) \end{aligned} \tag{3}$$

Bởi vì $a_i \le Y_i \le b_i$, ta có thể viết Y_i dưới dạng một tổ hợp lồi của a_i và b_i, tức là, $Y_i = \alpha b_i + (1-\alpha) a_i$ với $\alpha = (Y_i - a_i)/(b_i - a_i)$. Vì vậy, do tính lồi của e^{ty}, ta có

$$e^{tY_i} \le \frac{Y_i - a_i}{b_i - a_i} e^{tb_i} + \frac{b_i - Y_i}{b_i - a_i} e^{ta_i}.$$

Lấy kì vọng hai vế và sử dụng $E(Y_i) = 0$,

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Chứng minh (tt)

$$Ee^{tY_i} \le -\frac{a_i}{b_i - a_i} e^{tb_i} + \frac{b_i}{b_i - a_i} e^{ta_i} = e^{g(u)} \tag{4}$$

với $u = t(b_i - a_i)$, $g(u) = -\gamma u + \log(1 - \gamma + \gamma e^u)$ và $\gamma = -a_i/(b_i - a_i)$. Chú ý rằng $g(0) = g'(0) = 0$ và $g''(u) \le 1/4$ với mọi $u > 0$. Do định lí Taylor, tồn tại $\xi \in (0, u)$ sao cho

$$\begin{aligned} g(u) &= g(0) + ug'(0) + \frac{u^2}{2} g''(\xi) \\ &= \frac{u^2}{2} g''(\xi) \le \frac{u^2}{8} = \frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$Ee^{tY_i} \le e^{g(u)} \le e^{t^2(b_i-a_i)^2/8}$$

Kết hợp với (3) ta có đpcm.

Bất đẳng thức Hoeffding

Hệ quả 10

Cho $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối $B(1, p)$. Khi đó, với mọi $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq \epsilon\right) \leq 2e^{-2n\epsilon^2} \tag{5}$$

Bất đẳng thức Hoeffding

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Chứng minh.

Đặt $Y_i = (1/n)(X_i - p)$. Khi đó, $Y_1, \ldots, Y_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thỏa $E(Y_i) = 0$ và $-p/n \leq Y_i \leq (1-p)/n$. Theo bất đẳng thức Hoeffding,

$$P(\overline{X}_n - p \geq \epsilon) = P\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \epsilon\right) \leq e^{-t\epsilon} e^{t^2/(8n)}$$

Chọn $t = 4n\epsilon$. Ta được $P(\overline{X}_n - p \geq \epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}$. Tương tự, ta cũng có $P(\overline{X}_n - p \leq -\epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}$. Do vậy, $P\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geq \epsilon\right) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}$. □

Bất đẳng thức Hoeffding - Ví dụ

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Ví dụ 11

Cho $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} B(1, p)$. Cho $n = 100$ và $\epsilon = 0.2$. Ta thấy rằng theo bất đẳng thức Chebychev thì

$$P(|\overline{X}_n - p| \geq 0.2) \leq \frac{Var(\overline{X}_n)}{0.2^2} = \frac{p(1-p)}{n(0.2^2)} \leq \frac{0.25}{100(0.2^2)} = 0.0625$$

Theo bất đẳng thức Hoeffding thì,

$$P(|\overline{X}_n - p| \geq 0.2) \leq 2e^{-2(100)(0.2)^2} = 0.00067$$

nhỏ hơn rất nhiều so với 0.0625.

Bất đẳng thức Mill

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Định lí 12 (Bất đẳng thức Mill)

Cho $Z \sim N(0, 1)$ và $t > 0$. Khi đó,

$$P(|Z| \geq t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{-t^2}{2}}}{t}$$

Bất đẳng thức Mill [2]

Chứng minh.

$$\begin{aligned} P(Z \geq t) &= \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &\leq \int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{xe^{-x^2/2}}{t} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-t^2/2}}{t} \end{aligned}$$

Mặt khác $P(|Z| \geq t) = 2P(Z \geq t)$. Do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

[2] Phần đọc thêm

Bất đẳng thức Mill - Ví dụ

Ví dụ 13

Cho $X_1, \ldots, X_n$ độc lập, cùng phân phối $N(0,1)$. Hãy chặn $P\left(\left|\overline{X}_n\right| \geq t\right)$ bằng bất đẳng thức Chebyshev và Mill.

Giải:

Bất đẳng thức Mill - Ví dụ

Giải (tt):

Outline

Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz

Định lí 14 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có phương sai hữu hạn. Khi đó,

$$E|XY| \leq \sqrt{E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)}$$

Chứng minh.

Xem chương 4. □

Bất đẳng thức Jensen

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Định lí 15 (Bất đẳng thức Jensen)

Nếu g là hàm lồi, thì

$$E[g(X)] \geq g(EX) \tag{6}$$

Nếu g là hàm lõm, thì

$$E[g(X)] \leq g(EX) \tag{7}$$

Bất đẳng thức Jensen

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Chứng minh.

Trường hợp g là lồi. Theo định nghĩa 6, tồn tại m sao cho với mọi x, thì

$$g(x) \geq g(EX) + m(x - EX)$$

Lấy kỳ vọng cả hai vế,

$$E[g(X)] \geq g(EX) + m(EX - EX) = g(EX)$$

Trường hợp g là lõm. Khi đó, $-g$ là lồi nên $E[-g(X)] \geq -g(EX)$, tức là $E[g(X)] \leq g(EX)$. □

Bất đẳng thức Jensen - Ví dụ

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC
Nguyễn Văn Thìn
Nội dung chính
Các bất đẳng thức xác suất
Bất đẳng thức cho các kỳ vọng

Ví dụ 16

Cho X là biến ngẫu nhiên nhận giá trị dương và có kỳ vọng hữu hạn. CMR,

$$E\left(\frac{1}{X}\right)E(X) \geq 1$$

Giải: