Họ và tên: Trịnh Ngọc Hiến

MSSV: 19110315

-*-*-

Bài tập về nhà tuần 2:

Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh:

Hạn nộp: ngày 26/03/2022.

- Prove that a complete binary tree with k level has $2^k - 1$ nodes.

Bài giải

- Thật vây, ta giả sử cây nhị phân có cấp 1. Khi đó, ta được

$$2^k - 1 = 2^1 - 1 = 1 \text{ nút.}$$

⇨ Do đó ta dễ dàng chứng minh thuật toán đúng với k = 1.

- Giả sử cây nhị phân hoàn chỉnh đúng với cấp k (với $k \geq 1$). Khi đó, ta được mệnh đề là

$$2^k - 1 \text{ nút (giả thuyết quy nạp)}$$

- Ta chứng minh cây nhị phân hoàn chỉnh cấp k + 1. Khi đó, ta được mệnh đề là

$$2^{k+1} - 1 = 2.2^k - 1 \text{ nút.}$$

- Khi đó, nếu ta bỏ đi 1 cấp trong cây nhị phân đi 1 thì ta sẽ có được $2^k - 1$ nút theo giả thuyết quy nạp.

⇨ Vậy cây nhị phân hoàn chỉnh cấp k có $2^k - 1$ nút.

Prove that for all $n \geq 1$, one has

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 1$$

Bài giải

- Từ giả thuyết trên ta có mệnh đề:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1 \text{ (1).}$$

- Thật vậy, giả sử n = 1, khi đó ta có mệnh đề (1) là

$$\frac{1}{2^1} = 0.5 < 1$$

⇨ Mệnh đề (1) đúng với n = 1.

- Giả sử mệnh đề (1) đúng với n = k (với $k \geq 1$), nghĩa là

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} < 1 \ (\textit{Giả thuyết quy nạp})$$

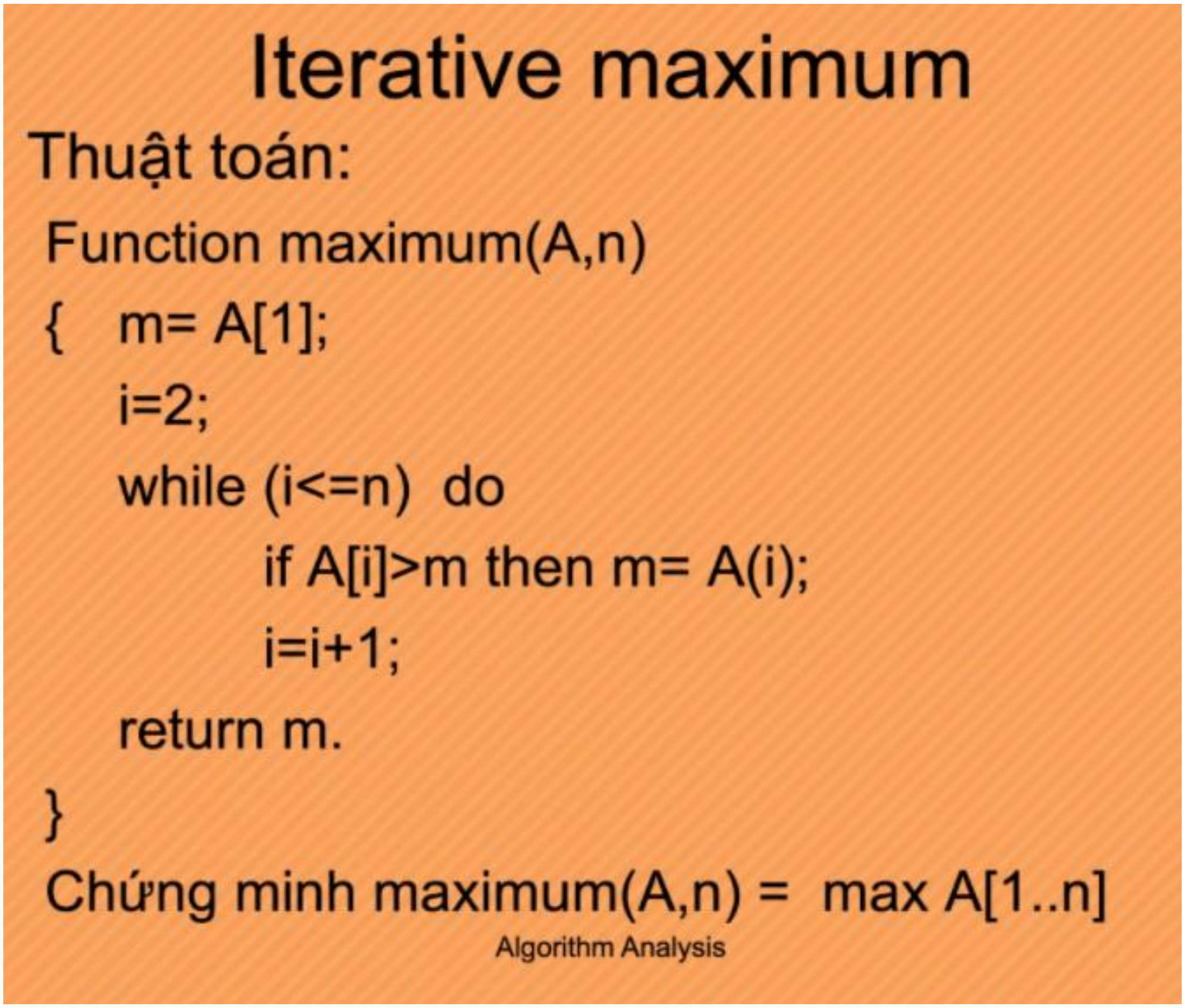
- Ta phải chứng minh mệnh đề (1) cũng đúng với n = k +1, khi đó ta có mệnh đề (1) là

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < 1$$

- Do $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} < 1$

nên $S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} < 1$

Vậy $\forall n \geq 1$ thì $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < 1$



<u>Giải</u>

- Ta dễ dàng kiểm tra thuật toán đúng với n = 0 và n = 1 khi đó A[1] là giá trị lớn nhất.

- Giả sử thuật toán đúng với n > 2 , khi đó ta được thuật toán là

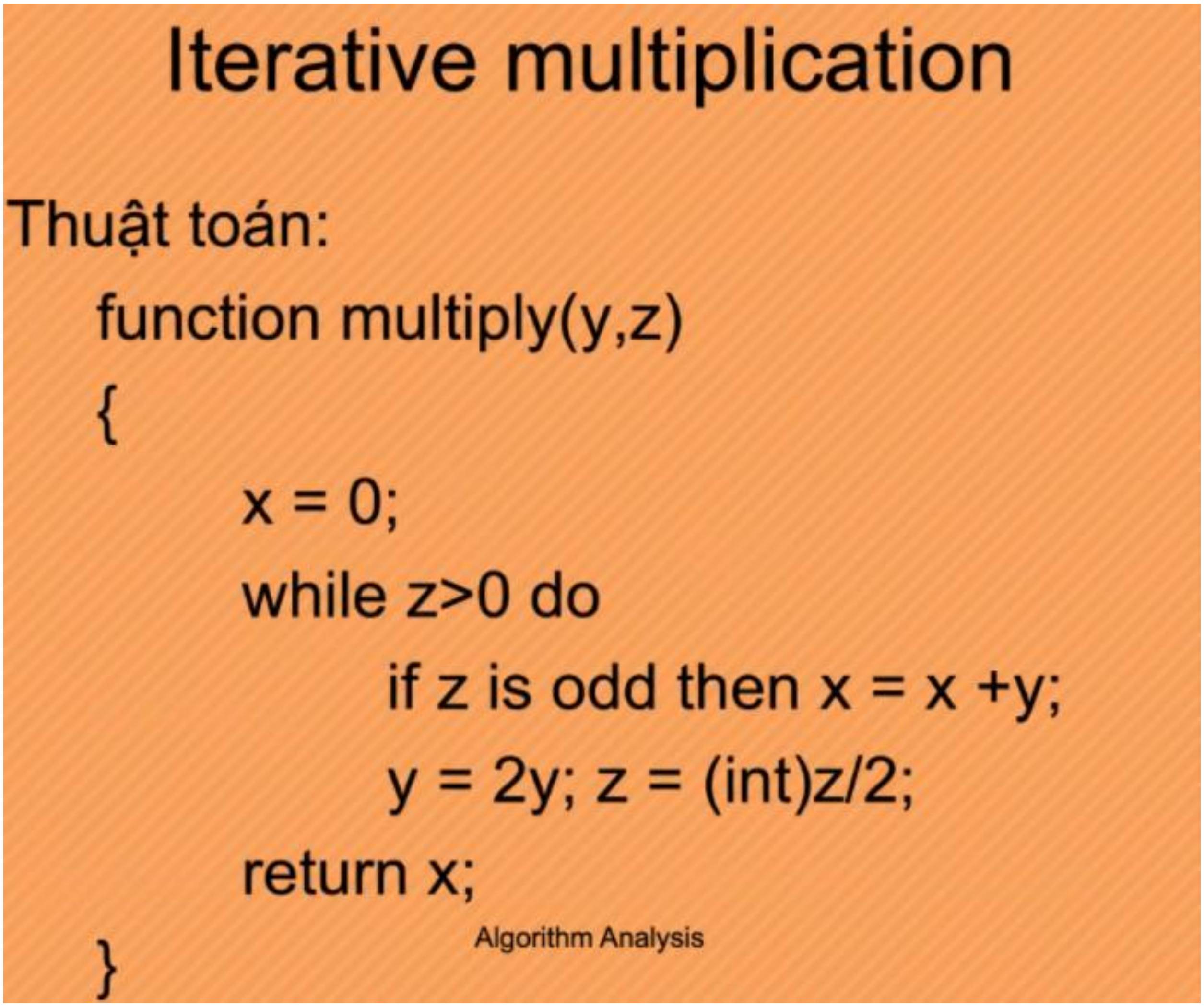
maximum (A,k) = max A[1…k].

- Ta chứng minh thuật toán đúng khi maximum (A,k+1) = max A[1…k+1]

- Thật vậy, ta thấy:

maximum (A,k+1) = max (max A[1…k], A[k+1]) = max A[1…k+1]

⇨ Như vậy theo chứng minh quy nạp thuật toán đệ quy là đúng.


Iterative multiplication
Thuật toán:
function multiply(y,z)
{
x = 0;
while z>0 do
if z is odd then x = x +y;
y = 2y; z = (int)z/2;
return x;
}
Algorithm Analysis

Giải