GIẢI TÍCH TỔ HỢP

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Nguyễn lí đếm cơ bản
Phép hoán vị
Tổ hợp
Các hệ số đa thức

Outline

GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Nguyễn lí đếm cơ bản
Phép hoán vị
Tổ hợp
Các hệ số đa thức

Outline

1 Nguyễn lí đếm cơ bản
2 Phép hoán vị
3 Tổ hợp
4 Các hệ số đa thức

GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Nguyễn lí đếm cơ bản
Phép hoán vị
Tổ hợp
Các hệ số đa thức

Nguyên lí đếm cơ bản

Nguyên lí đếm cơ bản

Giả sử hai phép thử được thực hiện. Khi đó nếu phép thử 1 có thể xảy ra 1 trong m kết quả có thể và nếu, với mỗi kết quả của phép thử 1, có n kết quả có thể của phép thử 2, thì có mn kết quả có thể của cả hai phép thử.

Chứng minh.

Đánh số tất cả các khả năng của hai phép thử:

$$\begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & \ldots, & (1,n) \\ (2,1), & (2,2), & \ldots, & (2,n) \\ \vdots & & & \\ (m,1), & (m,2), & \ldots, & (m,n) \end{array}$$

$\square$

Nguyên lí đếm cơ bản

Ví dụ 1

Một cộng đồng nhỏ gồm 10 phụ nữ, mỗi người có 3 người con. Nếu một người phụ nữ và 1 người con của cô ấy được chọn làm người mẹ và người con tiêu biểu của năm, thì có bao nhiêu cách chọn khác nhau có thể?

Nguyên lí đếm cơ bản mở rộng

Nguyên lí đếm cơ bản mở rộng

Nếu r phép thử được thực hiện sao cho phép thử đầu tiên có thể xảy ra 1 trong n_1 kết quả; và nếu, với mỗi một trong n_1 kết quả có thể này, có n_2 kết quả có thể của phép thử thứ hai; và nếu, với mỗi kết quả có thể của hai phép thử đầu tiên, có n_3 kết quả có thể của phép thử thứ ba; và nếu $\dots$, thì có tổng cộng $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$ kết quả có thể của r phép thử.

Nguyên lí đếm cơ bản mở rộng

Ví dụ 2

Một loại bằng chứng chỉ được đặc trưng bởi một dãy gồm 7 kí tự, trong đó 3 kí tự đầu là các chữ cái và 4 kí tự cuối là các chữ số. Hỏi có tối đa bao nhiêu chứng chỉ?

Ví dụ 3

Trong ví dụ 2, có bao nhiêu chứng chỉ nếu các kí tự và các số không được trùng nhau?

Outline

Định nghĩa 4 (Hoán vị)

Giả sử ta có n phần tử khác nhau. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này thành 1 dãy có thứ tự được gọi là một hoán vị.

Mệnh đề 5

Số các hoán vị khác nhau của n phần tử là $n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1 = n!$.

Chứng minh.

Thật vậy, phần tử đầu tiên của hoán vị có thể được chọn từ n phần tử, phần tử thứ hai của hoán vị có thể được chọn từ $n-1$ phần tử (trừ đi phần tử đầu tiên đã được chọn), tương tự như vậy cho đến phần tử cuối cùng của hoán vị. Như vậy, theo nguyên tắc đếm cơ bản mở rộng thì có $n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1 = n!$. □

Ví dụ 6

Một người có 10 quyển sách được đặt trên kệ. Trong đó, có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách hóa, 2 quyển sách lịch sử, và 1 quyển sách ngoại ngữ. Người này muốn sắp xếp các quyển sách sao cho những quyển sách cùng chủ đề phải được sắp xếp kế cận nhau. Hỏi người này có bao nhiêu cách sắp xếp?

Bây giờ ta đếm số hoán vị của n phần tử trong trường hợp một số phần tử trong đó là giống nhau (không thể phân biệt được).

Ví dụ 7

Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau từ các kí tự *PEPPER*?

Tổng quát,

Mệnh đề 8

Số hoán vị khác nhau của n phần tử trong đó có n_1 phần tử loại 1 giống nhau, n_2 phần tử loại 2 giống nhau, ..., n_r phần tử loại r giống nhau là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Phép hoán vị

Ví dụ 9

Một giải đấu cờ vua có 10 đấu thủ, trong đó có 4 người Nga, 3 người Mĩ, và 2 người Anh và 1 người Brazin. Nếu kết quả giải đấu chỉ liệt kê tên các quốc gia của các đấu thủ theo thứ tự họ đạt được thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

Outline

GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Nguyên lí đếm cơ bản
Phép hoán vị
Tổ hợp
Các hệ số đa thức

Tổ hợp

GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Nguyên lí đếm cơ bản
Phép hoán vị
Tổ hợp
Các hệ số đa thức

Định nghĩa 10 (Tổ hợp)

Một tổ hợp chập r của n phần tử là một nhóm không có thự tự có r phần tử được chọn từ n phần tử phân biệt đã cho.

Mệnh đề 11

Số tổ hợp chập r của n phần tử là $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Tổ hợp

GIẢI TÍCH TỔ HỢP
Nguyễn Văn Thìn
Nguyên lí đếm cơ bản
Phép hoán vị
Tổ hợp
Các hệ số đa thức

Chứng minh.

Số cách khác nhau mà một nhóm gồm r phần tử được chọn từ n phần tử khi có xét đến thứ tự chọn là $n(n-1)\cdots(n-r-1)$. Mỗi nhóm r phần tử được đếm $r!$ lần trong cách đếm này. Do đó số nhóm khác nhau của r phần tử được chọn từ n phần tử là

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

□

Kí hiệu Người ta thường kí hiệu số tổ hợp chập r ($r \leq n$) của n phần tử là $\binom{n}{r}$ hoặc C_n^r.

Tổ hợp

Ví dụ 12

Một hội đồng có 3 người được chọn từ một nhóm 20 người. Hỏi có thể lập được bao nhiêu hội đồng khác nhau?

Ví dụ 13

Một nhóm có 5 phụ nữ và 7 đàn ông. Hỏi có bao nhiêu cách lập ra một hội đồng gồm 2 phụ nữ và 3 đàn ông? Nếu có 2 người đàn ông không chịu hoạt động chung trong một hội đồng thì có bao nhiêu cách lập?

Tổ hợp

Mệnh đề 14

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \leq r \leq n$$

Chứng minh.

Xét 1 nhóm gồm n phần tử khác nhau và cố định 1 phần tử cố định nào đó gọi là P. Có $\binom{n-1}{r-1}$ nhóm kích thước r có chứa phần tử P. Cũng vậy, có $\binom{n-1}{r}$ nhóm kích thước r không chứa P. Tổng cộng là có $\binom{n}{r}$ nhóm kích thước r. □

Tổ hợp

Định lí 15 (Định lí nhị thức)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Các hệ số $\binom{n}{k}$ còn được gọi là các hệ số nhị thức.

Chứng minh.

Định lí có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Xem sách giáo trình trang 8. □

Outline

Ví dụ 16

Một tập gồm n phần tử phân biệt được chia vào r nhóm phân biệt với các kích thước tương ứng là n_1, n_2,..., n_r, với $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

Kí hiệu 17

Nếu $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, ta đặt $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ bằng

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

Do đó, $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ là số cách chia n phần tử phân biệt vào r nhóm phân biệt có kích thước $n_1, n_2, \ldots, n_r$.

Định lí 18 (Định lí đa thức)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_r): \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

tức là, tổng trên tất cả các vector giá trị nguyên không âm $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ *sao cho* $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

Các số $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ được gọi là *các hệ số đa thức*.

Ví dụ 19

Khai triển $(x_1 + x_2 + x_3)^3$?