

**BÀI TẬP BỔ SUNG 1**

Vẽ bảng chân trị cho các mệnh đề sau:

1.  $(p \vee r) \rightarrow (r \vee \sim p)$

Giải

| $p$ | $r$ | $\sim p$ | $p \vee r$ | $r \vee \sim p$ | $(p \vee r) \rightarrow (r \vee \sim p)$ |
|-----|-----|----------|------------|-----------------|--|
| 0   | 0   | 1        | 0          | 1               | 1  |
| 0   | 1   | 1        | 1          | 1               | 1  |
| 1   | 0   | 0        | 1          | 0               | 0  |
| 1   | 1   | 0        | 1          | 1               | 1  |

2.  $\sim (\sim p \wedge \sim q)$

Giải

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \wedge \sim q$ | $\sim (\sim p \wedge \sim q)$ |
|-----|-----|----------|----------|------------------------|-------------------------------|
| 0   | 0   | 1        | 1        | 1                      | 0                             |
| 0   | 1   | 1        | 0        | 0                      | 1                             |
| 1   | 0   | 0        | 1        | 0                      | 1                             |
| 1   | 1   | 0        | 0        | 0                      | 1                             |

3.  $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$

Giải

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\sim q$ | $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$ |
|-----|-----|--------------|----------|-----------------------------------|
| 0   | 0   | 0            | 1        | 1                                 |
| 0   | 1   | 0            | 0        | 1                                 |
| 1   | 0   | 0            | 1        | 1                                 |
| 1   | 1   | 1            | 0        | 0                                 |

Xét các suy luận sau đây có đúng hay không? Trình bày chi tiết các bước và luật sử dụng trong suy luận:

4.

$$\sim p \vee r \quad (1)$$

$$\sim q \rightarrow \sim r \quad (2)$$

$$\sim s \wedge p \quad (3)$$

$$t \vee s \quad (4)$$

$$\sim t \vee u \quad (5)$$

$$\text{Suy ra, } u \wedge q \quad (6)$$

**Giải**

Ta biến đổi các mệnh đề sau:

$$(1) \equiv \sim p \vee r \equiv p \rightarrow r$$

$$(2) \equiv \sim q \rightarrow \sim r \equiv r \rightarrow q$$

Từ mệnh đề (3), áp dụng luật Simplification ta được:

$$\sim s \quad (7)$$

$$p \quad (8)$$

Kết hợp (1) và (2), áp dụng luật Hypothetical syllogism ta được:

$$(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q) \equiv p \rightarrow q \quad (9)$$

Kết hợp (8) và (9), áp dụng luật Modus ponens ta được:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \equiv q \quad (10)$$

Kết hợp (4) và (5), áp dụng luật Resolution ta được:

$$(t \vee s) \wedge (\sim t \vee u) \equiv s \vee u \quad (11)$$

Kết hợp (7) và (10), áp dụng luật Disjunctive Syllogism ta được:

$$(\sim s) \wedge (s \vee u) \equiv u \quad (12)$$

Kết hợp (10) và (12), áp dụng luật Conjunction ta được:

$$u \wedge q \equiv (6)$$

Do đó, suy luận trên đúng.

**5.**

$$\sim (p \vee q) \quad (1)$$

$$r \rightarrow q \quad (2)$$

$$r \vee s \quad (3)$$

$$\sim s \vee t \quad (4)$$

$$\text{Suy ra, } \sim p \wedge t \quad (5)$$

**Giải**

Ta biến đổi các mệnh đề sau:

$$(1) \equiv \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$(3) \equiv r \vee s \equiv \sim r \rightarrow s$$

$$(4) \equiv \sim s \vee t \equiv s \rightarrow t$$

Từ mệnh đề (1), áp dụng luật Simplification ta được:

$$\sim p \tag{6}$$

$$\sim q \tag{7}$$

Kết hợp (3) và (4), áp dụng luật Hypothetical Syllogism ta được:

$$(\sim r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow t) \equiv \sim r \rightarrow t \tag{8}$$

Kết hợp (2) và (7), áp dụng luật Modus Tollens ta được:

$$(r \rightarrow q) \wedge (\sim q) \equiv \sim r \tag{9}$$

Kết hợp (8) và (9), áp dụng luật Modus Ponens ta được:

$$(\sim r \rightarrow t) \wedge (\sim r) \equiv t \tag{10}$$

Kết hợp (6) và (10), áp dụng luật Conjunction ta được:

$$\sim p \wedge t \equiv (5)$$

Do đó, suy luận trên đúng.

**6.**

$$\sim (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s) \tag{1}$$

$$q \rightarrow (u \wedge t) \tag{2}$$

$$u \rightarrow p \tag{3}$$

$$\sim s \tag{4}$$

$$\text{Suy ra, } q \rightarrow r \tag{5}$$

**Giải**

Xét trường hợp sau:  $p = 1, q = 1, t = 1, u = 1, r = 0, s = 0$ . Khi đó, ta kiểm tra lại các mệnh đề:

$$(1) \equiv \sim (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

$$\equiv \sim (1 \wedge 1) \rightarrow (0 \vee 0)$$

$$\equiv \sim 1 \rightarrow 0$$

$$\equiv 0 \rightarrow 0 \equiv 1$$

$$(2) \equiv q \rightarrow (u \wedge t)$$

$$\equiv 1 \rightarrow (1 \wedge 1)$$

$$\equiv 1 \rightarrow 1 \equiv 1$$

$$(3) \equiv u \rightarrow p$$

$$\equiv 1 \rightarrow 1 \equiv 1$$

$$(4) \equiv \sim s \equiv \sim 0 \equiv 1$$

$$(5) \equiv q \rightarrow r$$

$$\equiv 1 \rightarrow 0 \equiv 0$$

Như vậy, tồn tại trường hợp để các mệnh đề điều kiện đều đúng mà mệnh đề kết luận sai. Do đó, suy luận trên không đúng.

**Các cặp mệnh đề sau đây có tương đương logic không?**

**7.** Mệnh đề 1:  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

Mệnh đề 2:  $(p \wedge q) \rightarrow r$

**Giải**

Xét trường hợp sau:  $p = 0, q = 1, r = 0$ . Ta kiểm tra lại các mệnh đề:

$$\text{Mệnh đề 1: } (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$\equiv (0 \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow 0)$$

$$\equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$$

$$\text{Mệnh đề 2: } (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$\equiv (0 \wedge 1) \rightarrow 0$$

$$\equiv 0 \rightarrow 0 \equiv 1$$

Như vậy, tồn tại trường hợp mà  $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv 0$  hay  $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$  không là một tautology. Do đó, 2 mệnh đề trên không tương đương logic với nhau.

8. Mệnh đề 3:  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

Mệnh đề 4:  $p \rightarrow (q \wedge r)$

**Giải**

Ta biến đổi mệnh đề 3 như sau:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \\ &\equiv \sim p \vee (q \wedge r) \\ &\equiv p \rightarrow (q \wedge r) \quad (\text{Mệnh đề 4})\end{aligned}$$

Do đó, 2 mệnh đề trên tương đương logic với nhau.

**Không dùng bảng chân trị, chứng minh các mệnh đề sau đây luôn đúng:**

9.  $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

**Giải**

$$\begin{aligned}[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q &\equiv [p \wedge (\sim p \vee q)] \rightarrow q \\ &\equiv [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \\ &\equiv [\mathbf{F} \vee (p \wedge q)] \rightarrow q \\ &\equiv (p \wedge q) \rightarrow q \\ &\equiv \sim (p \wedge q) \vee q \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q \\ &\equiv (\sim p) \vee (\sim q \vee q) \\ &\equiv \sim p \vee \mathbf{T} \\ &\equiv \mathbf{T}\end{aligned}$$

Do đó, mệnh đề trên luôn đúng.

10.  $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

**Giải**

Xét mệnh đề  $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$  ta có

$$\begin{aligned}(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &\equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r \\ &\equiv \sim (p \vee q) \vee r \\ &\equiv (p \vee q) \rightarrow r\end{aligned}$$

Thay kết quả trên vào mệnh đề ta được

$$\begin{aligned}
 [(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r &\equiv \{(p \vee q) \wedge [(p \vee q) \rightarrow r]\} \rightarrow r \\
 &\equiv \{(p \vee q) \wedge [\sim (p \vee q) \vee r]\} \rightarrow r \\
 &\equiv \{[(p \vee q) \wedge \sim (p \vee q)] \vee [(p \vee q) \wedge r]\} \rightarrow r \\
 &\equiv \{\mathbf{F} \vee [(p \vee q) \wedge r]\} \rightarrow r \\
 &\equiv [(p \vee q) \wedge r] \rightarrow r \\
 &\equiv \sim [(p \vee q) \wedge r] \vee r \\
 &\equiv [\sim (p \vee q) \vee \sim r] \vee r \\
 &\equiv \sim (p \vee q) \vee (\sim r \vee r) \\
 &\equiv \sim (p \vee q) \vee \mathbf{T} \\
 &\equiv \mathbf{T}.
 \end{aligned}$$

Do đó mệnh đề trên luôn đúng.