Thuật toán dừng khi nào? $\begin{cases} i = n+1 \to \text{0 tìm thấy} \\ i = i_0 \text{ với } 1 \leq i_0 \leq n \to \text{tìm thấy} \end{cases}$

BT1: CM Cthức số lần so sánh khoá trung bình cho cả 2 TH.

$$(n+1)q + (1-q)\sum_{i=1}^{n} i p_i$$

TH1 Khi không tìm thấy: $i = n+1$

Thật vậy, ta có Cthức trên thành

$$\cancel{(n+1)q + (1-q)\sum_{i=1}^{n} ip_i = (n+1)q + (1-q).[np_n]}$$

$$\cancel{= nq + q + (np_n - q\,nqp_n)}$$

$$\cancel{= n(q} \; nq(1-p_n) + q + np_n$$

$$(n+1)q + (1-q)\sum_{i=1}^{n} ip_i = (n+1)\left[(n+1)q + (1-q)(np_n)\right]$$

$$= (n+1)[nq + q + np_n - nqp_n]$$

$$= [n^2q + nq + np_n - n^2qp_n + nq + q + np_n - nqp_n]$$

$$= [n^2q + 2nq + 2np_n - n^2qp_n - nqp_n + q]$$

$$= nq(n+2) + 2np_n - nqp_n(n+1) + q$$

$$= nq(n+2 + p_n(n+1)) + 2np_n + q$$

$$\cancel{= nq(n+2}$$

TH2: Khi tìm thấy: $i = i_0$ với $1 \leq i_0 \leq n$

Thật vậy, ta có cthức trên thành:

$$(n+1)q + (1-q)\sum_{i=1}^{n} ip_i = i_0\left[(n+1)q + (1-q)(np_n)\right] \text{ với } (1 \leq i_0 \leq n)$$

$$= i_0[nq + q + np_n - nqp_n]$$

$$= i_0 nq + i_0 q + i_0 np_n - i_0 nqp_n$$

$$= \cancel{i_0 q[n+1-np_n]}$$

$$= i_0 q(n+1) + i_0 np_n(1-q)$$

Được quét bằng CamScanner

BT3: Đánh giá độ phức tạp ~~tr~~ TB của thuật toán:

j=2 → 1 gán
while (j ≤ n) do → n so sánh
i=j-1; ~~→1 gán~~ → 1 gán
k = a[j].key; → n-1 sao chép khoá
x = a[j]; ~~→1 gán~~ n-1 sao chép mẫu tin
while ((i > 0) && (k < a[i].key)) do →
a[i+1] = a[i] ~~→2 gán~~ sao chép mẫu tin.
i = i-1 → gán
endw
a[i+1] = x; → n-1 sao chép mẫu tin
j = j+1; ~~→1 gán~~ n-1 gán
endw

Thật vậy, ta gọi a là 1 số tự nhiên lớn nhất, với a là phần thức của $\sqrt{n}$.

Từ đó, ta có $a^2 \leq n \leq (a+1)^2$

Giả sử, TH a chạy từ 1 → 3:
Khi đó, ta có pthức của a hay [n] = 1

Giả sử, TH a chạy từ 4 → 8:
Khi đó, ta có pthức của a hay [n] = 2

...

Giả sử, TH a chạy từ $(a-1)^2 \to a^2 - 1$:
Khi đó, ta có pthức của a hay [n] = a − 1

Giả sử, TH a chạy từ $a^2 \to n$:
Khi đó, ta có pthức của n hay [n] = a

Qua đó, có thể khảo sát độ phức tạp của thuật toán

$$\underline{SS} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \left[\left[\sqrt{j-1}\right] + 1 + 1 \right] = 1 + 2n + \sum_{j=2}^{n} \left(\sqrt{j-1}\right)$$

$$\underline{Gán} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \left[1 + 1 + \left[\sqrt{j-1}\right] + 1 + 1 \right]$$

$$= 1 + 3n + \sum_{j=2}^{n} \left[\sqrt{j-1}\right]$$

$$\underline{SS\ khoá} = \cancel{\sum_{j=2}^{n} (n-1)}\ (n-1) + (n-1) = 2n - 2$$

$$\underline{SS\ mẫu\ tin} = (n-1) + \sum_{1=j-1}^{n-1} [1] + (n-1)$$

$$= \cancel{n}\ 2n - 2 + \cancel{n+}\ (n-2)$$

$$= 3n - 4$$

BT 4: CM lại tcả các KQ từ slide 31 → slide 37.

Thuật toán:

j = 2 → 1 gán số học

While (j ≤ n) do → n SS số học

i = j − 1; → n − 1 gán số học

k = a[j].key → n − 1 sao chép khoá

r = a[j]; → n − 1 sao chép mẫu tin

P(j) { While ((i > 0) && (k < a[i].key)) do
a[i+1] = a[i];
i = i − 1;
} − $\alpha_j + 1$ lần so sánh; − α_j sao chép mẫu tin; − α_j gán số học

endw

a[i+1] = r → n − 1 sao chép mẫu tin

j = j + 1 → n − 1 gán số học

endw

α_j số lần lặp của P(j)

- Xét P(j) có 2TH:
  + ⊖ tối ưu hoá biểu thức $(\alpha_j + 1)$ so sánh số học và $(\alpha_j + 1)$ so sánh khoá
  + Tối ưu:
    - i có thể giảm về 0: $(\alpha_j + 1)$ so sánh số học và α_j so sánh khoá
    - i ⊖ thể giảm về 0: $(\alpha_j + 1)$ so sánh số học và $(\alpha_j + 1)$ so sánh khoá

- Mục tiêu là xđ a_j:
  ~~+ Nhận xét~~ + Gọi $\sigma = a_1, a_2, \dots, a_n$: hoán vị ban đầu
  Với α_j = số phtử bên trái a_j ⊙ cur mà lớn hơn a_j
  = số ptử bên trái a_j ⊙ σ mà lớn hơn a_j

- Do đó, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ = ~~so sánh thứ tự~~ số nghịch thế của σ

$\alpha_1 = 0 \Rightarrow \sum_{j=2}^{n} a_j$ = ~~so sánh số học~~ số nghịch thế của σ

- Số phép gán số học:
$= 1 + (n-1) + \left[\sum_{j=2}^{n} (\text{gán số học } P(j))\right] + n + 1$

$= 2n - 1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j = 2n - 1 + 1$ ~~so sánh số học~~ số nghịch thế của σ $\begin{cases} \min = 0 \\ \max = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{4} \end{cases}$

- So sánh số học:
$= n + \sum_{j=2}^{n} (\alpha_j + 1) = 2n - 1 +$ số ~~sánh số học~~ nghịch thế của σ

- Sao chép khoá $= n - 1$

- Sao chép mẫu tin:
$= (n-1) + \left[\sum_{j=2}^{n} (\text{sao chép mẫu tin } P(j))\right] + n - 1$

$= 2n-2+\sum_{j=2}^{n}\alpha_j = 2n-2+$ số ~~sánh số học~~ nghịch thế của σ

- So sánh khoá:

+ o tối ưu $= \sum_{j=2}^{n}(\alpha_j+1) = n-1+$ số ~~sánh số học~~ nghịch thế của σ

+ Có tối ưu: a[j] là cực tiểu so với bên trái: i có thể giảm về 0.
Ngc lại i o giảm về 0

$$=\left(\begin{array}{c}\sum_{j=2}^{n}\alpha_j \\ a[j] \text{ loại } 1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\sum_{j=2}^{n}(\alpha_j+1) \\ a[j] \text{ loại } 2\end{array}\right),$$

$$=\sum_{j=2}^{n}\alpha_j+\sum_{j=2}^{n}1.$$

- Vậy số phép so sánh khoá là (số nghịch thế của σ + (n - số ptử cực tiểu bên trái))

$$\Rightarrow TB = \frac{n(n-1)}{4} + n - H_n.$$

BT5 : Đánh giá độ phức tạp trung bình của thuật toán.

```
j = n
while (j >= 2) do
  idx = 1;
  i = 2;
  while (i <= j) do
     if (a[i] > a[idx]) then
         idx = i
     endif
     i = i + 1;
  endw
  a[j] <-> a[idx];
  j = j - 1;
endw
```

$$Gán = 1 + 2(n-1) + \cancel{\alpha} \sum_{i=2}^{n-1} [1 \quad + \cancel{j}\, 1] + n - 1$$

$$= 1 + 2n - 2 + 2(n-2) + n - 1$$

$$= \cancel{4\ 5n - 3 - 4\ 5n - 4}\ 5n - 6$$

$$SS = n + \sum_{i=2}^{n-1} 1 = n + n - 2 = 2n - 2$$

$$\text{Số khoá} = j - 1 = \cancel{n-2}\ n - 1 - 1 = n - 2$$

$$\text{Gán mẫu tin} = 3(n-1) = 3n - 3$$