BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Outline

1 Không gian mẫu và biến cố
2 Đại số và xích ma đại số
3 Xác suất
4 Tính liên tục của xác suất
5 Không gian xác suất hữu hạn
6 Xác suất có điều kiện
7 Công thức BAYES
8 Sự độc lập

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Không gian mẫu và biến cố

Định nghĩa 1

Xét một phép thử, trong đó kết quả xuất hiện là không thể được xác định trước. Tuy nhiên, mặc dù kết quả của phép thử này không thể biết trước nhưng ta giả sử rằng tập tất cả các kết quả có thể (possible outcomes) là được biết.

- Tập tất cả các kết quả có thể của một phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử đó và kí hiệu là Ω.
- Mỗi phần tử của Ω được gọi là một *biến cố sơ cấp.*
- Mỗi tập con của Ω được gọi là một *biến cố.*
- Biến cố không thể xảy ra khi thực hiện phép thử được gọi là *Biến cố bất khả*. Kí hiệu là $\emptyset$.
- Biến cố luôn xảy ra khi thực hiện một phép thử được gọi là *Biến cố chắc chắn*. Kí hiệu là Ω.

Ví dụ 2

- Gieo đồng xu hai mặt. Kí hiệu S (N) chỉ kết quả xuất hiện mặt sấp (ngửa). Không gian mẫu của phép thử này là $\Omega = \{S, N\}$.
- Gieo hai đồng xu đồng thời. Không gian mẫu của phép thử này là $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$. Trong đó, kết quả SS chỉ cả hai đồng xu đều sấp, SN chỉ đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt sấp, đồng xu thứ hai xuất hiện mặt ngửa,v.v.

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Định nghĩa 3 (Quan hệ giữa hai biến cố)

Cho hai biến cố E và F trong không gian mẫu Ω. Ta nói

- Biến cố E *chứa trong* biến cố F hoặc E là tập con của F nếu mọi kết quả của E đều thuộc F. Kí hiệu $E \subset F$
- Hai biến cố E và F là *tương đương* (bằng nhau) nếu $E \subset F$ và $F \subset E$.

Định nghĩa 4 (Các phép toán trên các biến cố)

Cho hai biến cố E và F trong không gian mẫu Ω. Ta nói

- Biến cố tổng của E và F là biến cố $E \cup F$.
- Biến cố giao của E và F là biến cố $E \cap F$.
- Hai biến cố E và F xung khắc nhau nếu $EF = \emptyset$.
- Biến cố đối của E là biến cố $\Omega \setminus E$. Kí hiệu E^c hoặc $\overline{E}$.

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Định nghĩa 5

Họ các tập con $\mathcal{A}$ của Ω được gọi là một đại số nếu thỏa các tính chất sau:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$
(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{A}$
(iii) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Nhận xét 6

Giả sử $\mathcal{A}$ là một đại số. Khi đó

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}$.

(iii) Nếu $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ thì $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ và $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Chứng minh.

Dễ dàng suy từ định nghĩa. □

Ví dụ 7

$\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ (họ tất cả các tập con của Ω) đều là các đại số.

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Định nghĩa 8 (σ-đại số)

Họ các tập con $\mathcal{F}$ của Ω được gọi là một σ-đại số nếu $\mathcal{F}$ là một đại số và

$$\forall (A_i) \subset \mathcal{F} : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Định nghĩa 9 (Độ đo xác suất)

Cho $\mathcal{F}$ là một σ-đại số. Ánh xạ $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một độ đo xác suất nếu thỏa các tính chất sau:

(i) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Nếu $(A_i) \subset \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, thì

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Không gian xác suất

Định nghĩa 10 (Không gian xác suất)

Bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, trong đó Ω là một tập tùy ý, $\mathcal{F}$ là một σ-đại số các tập con của Ω, P là độ đo xác suất trên $\mathcal{F}$, được gọi là một không gian xác suất.

Tính chất 11

(i) $P(\emptyset) = 0$.

(ii) *Nếu* $A, B \in \mathcal{F}$ *và* $A \cap B = \emptyset$ *thì* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(iv) $\forall (A_i) \subset \mathcal{F}$, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$

Chứng minh

(i) Chọn $A_i = \emptyset, \forall i$ và sử dụng (iii) trong định nghĩa 9.

(ii) Chọn $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_i = \emptyset\ \forall i > 2$ và sử dụng (iii) trong định nghĩa 9.

(iii) Ta viết A, B, $A \cup B$ thành tổng của các biến cố xung khắc như sau:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup AB \\ B &= (B \setminus A) \cup AB \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup AB \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất (ii), ta được

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \setminus B) + P(AB) && (1) \\ P(B) &= P(B \setminus A) + P(AB) && (2) \\ P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(AB) && (3) \end{aligned}$$

Cuối cùng, lấy (1) + (2) − (3) vế theo vế, ta có đpcm.

Chứng minh

(iv) Đặt

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ \dots \\ B_n &= A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \end{aligned}$$

Ta có,

$$B_n \subset A_n$$
$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Chứng minh

Ta có,

$$B_n \subset A_n$$
$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Do đó,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Outline

Định nghĩa 12

Một dãy các biến cố $\{E_n, n \geq 1\}$ được gọi là

- một dãy tăng nếu $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$
- một dãy giảm nếu $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$

Định nghĩa 13

- Cho $\{E_n, n \geq 1\}$ là một dãy tăng các biến cố, ta định nghĩa biến cố $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$, bởi
$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$
- Cho $\{E_n, n \geq 1\}$ là một dãy giảm các biến cố, ta định nghĩa biến cố $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$, bởi
$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Mệnh đề 14

Nếu $\{E_n, n \geq 1\}$ là một dãy tăng hoặc giảm các biến cố, thì

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n) \tag{4}$$

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Chứng minh

Đầu tiên, giả sử rằng $\{E_n, n \geq 1\}$ là một dãy tăng, và định nghĩa dãy biến cố $\{F_n, n \geq 1\}$, bởi

$$F_1 = E_1$$
$$F_n = E_n \left(\bigcup_{1}^{n-1} E_i\right)^c = E_n E_{n-1}^c \quad n > 1$$

vì $\bigcup\limits_{1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$.

Ta thấy rằng các biến cố F_n xung khắc từng đôi một và thỏa

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ và } \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{với mọi } n \geq 1$$

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Chứng minh ...

Do đó,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)
\end{aligned}$$

Chứng minh ...

$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

Nếu $\{E_n, n \geq 1\}$ là một dãy giảm, thì $\{E_n^c, n \geq 1\}$ là một dãy tăng. Do đó, theo kết quả ở trên,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c) \tag{5}$$

Mặt khác,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) = P\left(\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right) \tag{6}$$

và

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n) \tag{7}$$

Chứng minh ...

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Thay (6) và (7) vào (5) ta được

$$P\left(\bigcap_{1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Không gian xác suất hữu hạn

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Định nghĩa 15

Trường hợp $|\Omega| < \infty$, ta có thể định nghĩa độ đo xác suất P trên $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned} P\colon \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \frac{|A|}{|\Omega|} \end{aligned}$$

Ta gọi độ đo xác suất này là độ đo xác suất rời rạc.

Không gian xác suất hữu hạn
Ví dụ

Ví dụ 16

Rút ngẫu nhiên không hoàn lại 3 lá bài từ một bộ bài, tính xác suất trong 3 lá bài vừa rút không có lá bài nào là chất cơ.

Ví dụ 17

Nếu 1 nhóm có thứ tự gồm 3 chữ số dạng $000 \to 999$ được chọn 1 cách ngẫu nhiên. Tính xác suất trong số đó có đúng 1 chữ số lớn hơn 5.

Ví dụ 18

Trong một hộp có 100 bóng đèn trong đó có 75 bóng đèn tốt và 25 bóng đèn hư. Lấy ngẫu nhiên không hoàn lại 15 bóng đèn, tính xác suất trong số 15 bóng đèn lấy ra có ít nhất một bóng đèn hư.

Không gian xác suất hữu hạn
Ví dụ

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Ví dụ 19

Gọi E, F, G là 3 biến cố. Hãy biểu diễn các biến cố sau thông qua 3 biến cố kể trên

1. Chỉ E xảy ra.
2. Cả E và G xảy ra, F không xảy ra.
3. Có ít nhất 1 trong 3 biến cố xảy ra.
4. Có ít nhất 2 biến cố xảy ra.
5. Có đúng 2 biến cố xảy ra.
6. Có nhiều nhất 2 biến cố xảy ra.

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Xác suất có điều kiện

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Định nghĩa 20

Xác suất của biến cố A được tính với giả thiết biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất có điều kiện của A với điều kiện B, kí hiệu là $P(A|B)$ và được tính theo công thức

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{8}$$

Tính chất 21

(i) $P(A|B) \geq 0$

(ii) $P(\Omega|B) = 1$

(iii) *Nếu* $(A_i) \subset \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall j \neq j$ *thì*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

Xác suất có điều kiện

Chứng minh.

Dễ dàng có được từ định nghĩa. □

Nhận xét 22

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là một không gian xác suất, $B \in \mathcal{F}$ thỏa $P(B) > 0$. Đặt

$$\begin{aligned} P(.|B) \colon \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto P(A|B) \end{aligned}$$

thì $(\Omega, \mathcal{F}, P(.|B))$ cũng là một không gian xác suất.

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Ví dụ 23

Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối và đồng chất.

(a) Tính xác suất tổng điểm hai mặt của xúc sắc bằng 8 biết rằng xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 3.

(b) Tính xác suất tổng điểm hai mặt bằng 6 biết rằng xúc sắc thứ nhất xuất hiện mặt 3.

Giải Ví dụ 23

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Ví dụ 24

Trong một hộp gồm 8 bi đỏ, 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại hai bi từ hộp, tính xác suất để cả hai bi đều là bi đỏ.

Nhận xét 25

Bằng cách nhân hai vế của (8) cho $P(B)$, ta được

$$P(AB) = P(A|B).P(B) \tag{9}$$

Tổng quát,

Định lí 26 (Công thức nhân xác suất)

Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là n biến cố, ta có

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1})$$

Chứng minh.

Áp dụng định nghĩa xác suất có điều kiện cho vế phải ta được

$$P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})} = P(A_1A_2\cdots A_n)$$

□

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Hệ các biến cố đầy đủ

Định nghĩa 27

Hệ các biến cố $(A_i)_{i\in I}$ được gọi là một hệ đầy đủ nếu

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i &= \Omega \\ A_i \cap A_j &= \emptyset, \forall i \neq j \end{cases}$$

Ví dụ 28

Hệ $A, \overline{A}$ là hệ đầy đủ.

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT

Nguyễn Văn Thìn

Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Công thức xác suất toàn phần

Định lí 29 (Công thức xác suất toàn phần)

Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là hệ đầy đủ và B là biến cố bất kì

$$P(B) = P(B|A_1).P(A_1) + \dots + P(B|A_n).P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Chứng minh.

Vì (A_i) là một hệ đầy đủ nên
$B = B\Omega = B \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \cup_{i=1}^{n} BA_i$. Mặt khác,
$(BA_i) \cap (BA_j) = BA_iA_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$, nên

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

□

Ví dụ 30

Một người có hai đồng xu, đồng xu thứ nhất là đồng xu cân đối, đồng xu thứ 2 có xác suất mặt ngửa gấp 3 lần mặt sấp. Anh ta chọn ngẫu nhiên một đồng xu và gieo. Tính xác suất mặt hiện là mặt ngửa. Nếu gieo được mặt ngửa thì xác suất chọn được đồng xu cân đối là bao nhiêu?

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Công thức Bayes

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Định lí 31 (Công thức Bayes)

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ, B là một biến cố bất kỳ

$$P\left(A_i|B\right) = \frac{P\left(B|A_i\right)P\left(A_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B|A_i\right)P\left(A_i\right)}$$

Chứng minh.

Theo định nghĩa xác suất có điều kiện và công thức nhân xác suất,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

□

Outline

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES
Sự độc lập

Sự độc lập

Định nghĩa 32

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Nhận xét 33

Nếu A, B độc lập thì

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES

Sự độc lập
Ví dụ

Ví dụ 34

Gieo hai con xúc sắc và theo dõi mặt phía trên của chúng:
$A = \{$Tổng hai xúc sắc bằng 7$\}$
$B = \{$Xúc sắc thứ nhất ra mặt 5$\}$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
$$P(AB) = \frac{1}{36}$$

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES

Sự độc lập

Định nghĩa 35

Họ các biến cố $A_i,\ i = \overline{1,n}$ được gọi là độc lập nếu

$$\forall 2 \le k \le n,\ \forall 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n,$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

Ví dụ 36

$$A, B, C \text{ độc lập} \Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) & = P(A)P(B) \\ P(AC) & = P(A)P(C) \\ P(BC) & = P(B)P(C) \\ P(ABC) & = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES

Sự độc lập
Ví dụ

Gieo hai con xúc sắc và quan sát mặt trên của chúng. Gọi
$A = \{$Xúc sắc 1 ra mặt 1, 2 hoặc 3$\}$
$B = \{$Xúc sắc 2 ra mặt 4, 5 hoặc 6$\}$
$C = \{$Tổng điểm trên hai xúc sắc bằng 9$\}$
Ta có,

$$P(AB) = \frac{9}{36},\quad P(AC) = \frac{1}{36},\quad P(BC) = \frac{3}{36}$$
$$P(A) = \frac{18}{36},\quad P(B) = \frac{18}{36},\quad P(C) = \frac{4}{36}$$

Do đó,

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(AC) \neq P(A)P(C)$$
$$P(BC) \neq P(B)P(C)$$

Sự độc lập ...
Ví dụ

Nghĩa là

- A, B độc lập,
- A, C không độc lập,
- B, C không độc lập,
- A, B, C không độc lập.

Sự độc lập
Một ví dụ khác

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES

Ví dụ 37

Hai con xúc sắc được gieo liên tục cho tới khi tổng điểm ở mặt trên của chúng là 5 hoặc 7 thì dừng. Tính xác suất tổng điểm của hai xúc sắc bằng 5 xảy ra trước.

Gợi ý

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES

Gọi A là biến cố "tổng điểm của hai xúc sắc bằng 5 xảy ra trước".
A_n là biến cố "tổng điểm của hai xúc sắc bằng 5 ở lần gieo thứ n và trong $n-1$ lần gieo trước có tổng khác 5 và 7". Khi đó,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Bởi vì $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$ nên

$$P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{10}$$

Mỗi lần tung hai con xúc sắc sẽ có 36 khả năng xuất hiện khác nhau. Trong đó, có 4 khả năng xuất hiện để tổng điểm

Gợi ý ...

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT
Nguyễn Văn Thìn
Không gian mẫu và biến cố
Đại số và xích ma đại số
Xác suất
Tính liên tục của xác suất
Không gian xác suất hữu hạn
Xác suất có điều kiện
Công thức BAYES

là 5 $((1,4),(2,3),(3,2),(4,1))$, và 6 khả năng xuất hiện để tổng điểm là 7 $((1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1))$. Do đó, số khả năng xuất hiện để tổng điểm khác 5 và 7 là $36-4-6=26$. Vì các phép thử là độc lập nhau, nên

$$P(A_n) = \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36}$$

Thay vào (10) ta được,

$$P(A) = \frac{4}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} = \frac{4}{36}\frac{1}{1-\frac{26}{36}} = 0.4 \tag{11}$$