Tài liệu tham khảo [1]

Tháng 3/2016

[1] Thầy chỉ có thời gian để làm bản nháp này cho các em tham khảo trước. Đây là tài liệu chỉ dùng cho mục đích cá nhân, nội bộ. Sẽ có những bài chưa được giải, giải sai,... SV **chỉ nên** xem các lời giải trong tài liệu này như là các gợi ý.

Mục lục

Bài 1.1

Gieo một con xúc xắc. Liệt kê các phần tử của tập A=x:x là mặt có giá trị số nguyên tố. Nhắc lại số nguyên tố là số chỉ có hai ước số khác nhau: 1 và chính nó.

Bài giải

A={2, 3, 5}.

■

Bài 1.2

Xét thí nghiệm tung ngẫu nhiên một đồng xu ba lần.
(a) Gọi S là tập hợp tất cả các kết quả của thí nghiệm. Liệt kê các phần tử của S. Gọi H là mặt ngửa, T là mặt sấp.
(b) Gọi E là tập con của S với nhiều hơn một mặt ngửa. Liệt kê các phần tử của E.
(c) Giả sử F = {THH, HTH, HHT, HHH}. Viết mô tả của tập F.

Bài giải

(a) Ta có:

S = {TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH}

(b) E là tập con của S với nhiều hơn một mặt sấp.
Khi đó:

E = {TTT,TTH, THT, HTT}

(c) Ta có F = {THH, HTH, HHT, HHH}. Dễ thấy rằng F là tập con của S với nhiều hơn một mặt ngửa.
Hay F = {x: x là phần tử thuộc S với nhiều hơn một mặt ngửa}

■

Bài 1.3

Tung đồng tiền 3 lần.
Gọi E là tập có ít nhất 1 mặt ngữa.
Gọi F là tập có nhiều hơn 1 mặt ngữa.
So sánh mối quan hệ của E và F

Bài giải

Đặt H là mặt ngữa
Đặt T là mặt sấp
E=$\{HTT, THT, TTH, TTH, THT, HTT, TTT\}$
F=$\{TTH, THT, HTT, TTT\}$
$\Rightarrow F \subset E$

■

Bai 1.4

Một người được chia 5 lá bài từ bộ bài 52 lá. Gọi E là tập hợp sao cho người chơi đó có cả 5 quân át. Liệt kê các phần tử của E

Bài giải

Vì một bộ bài 52 lá chỉ có 4 lá át nên việc E chứa 5 quân át là không thể. Vậy E = ∅

■

Bài 1.5

Chứng minh rằng:
a) $A \subseteq A$
b) Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì $A = B$
c) Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$

Bài giải

a) $\forall x \in A$ thì $x \in A$
$\Rightarrow A \subseteq A$
b)$\forall x \in A$ thì $x \in B$ và $\forall x \in B$ thì $x \in A$
$\Rightarrow A = B$
c) $\forall x \in A$ thì $x \in B$ và $\forall x \in B$ thì $x \in C$
$\Rightarrow \forall x \in A$ thì $x \in C$
$\Rightarrow A \subseteq C$

■

Bài 1.6

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học: $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+2)}{2}$

Bài giải

Với n=1
Ta có VT=VP=1 (đúng)
Gỉa sử n=k đúng
$1+2+3+...+n=\dfrac{k(k+1)}{2}$
Ta cần chứng minh n=k+1 đúng
Với n=k+1 ta có:
$1+2+3+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$
Ta có:
$1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$
$\Rightarrow 1+2+3+..+k+k+1=\dfrac{k(k+1)}{2}+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}(cpcm)$

■

Bài 1.7

Dùng quy nạp toán học chứng minh

$$1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bài giải

$1^2+2^2+3^2+....+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}(*)$

- Với $n=1$ ta có $VP(*)=1^2=1$ $VT(*)=\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$
  Suy ra $VP(*)=VT(*)$
- Giả sử (*) đúng với $n=k$
  $1^2+2^2+3^2+....+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
- Ta cần chứng minh (*) đúng với $n=k+1$ nghĩa là

$$1^2+2^2+3^2+....+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}(**)$$

Thật vậy
$1^2+2^2+3^2+....+k^2+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$
$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$

$= \dfrac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$
$= \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$
Suy ra (**) đúng
Vậy $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ đúng với mọi n

■

Bài 1.8

Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng:
$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ khi $x > -1$

Bài giải

Với $n = 1$, ta có:
$VT = 1 + x$, $VP = 1 + x$
$\Rightarrow VT \geq VP$.
$\Rightarrow$(1) đúng.
Giả sử (1) đúng với $n = k$, chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$ (khi $x > -1$).
Với $n = k + 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\
&\geq (1+kx)(1+x) \qquad \text{khi} \quad x > -1 \\
&= 1 + kx + x + kx^2 \\
&= 1 + kx^2 + (k+1)x \\
&\geq 1 + (k+1)x \qquad (\text{do} \quad kx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

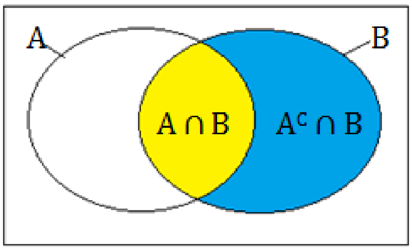
$\Rightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$.
$\Rightarrow$ (1) đúng với $\quad k+1 \quad \Rightarrow$ (đpcm).

■

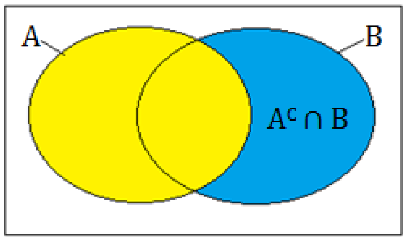
Bài 1.9

Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh:
$1 + a + a^2 + ... + a^{n-1} = \dfrac{1-a^n}{1-a}$

Bài giải



(a) hình 1



(b) hình 2

Hình 1: Bài 2.1

.

Với $n = 1$ ta có $1 = 1$ (đúng).

Giả sử $n = k$ đúng, ta có $1 + a + a^2 + ... + a^{k-1} = \dfrac{1 - a^k}{1 - a}$ đúng.

Ta cần CM: $n = k + 1$ đúng , tức là ta cần CM:

$1 + a + a^2 + ... + a^k = \dfrac{1 - a^{k+1}}{1 - a}$ đúng

■

Bài 1.10

Tàu điện ngầm chuẩn bị 60 cái bánh sandwich 4-inch cho một buổi tiệc sinh nhật. Ở giữa những cái sandwich này, 45 cái trong số đó có cà chua, 30 cái có cả cà chua và hành và 5 cái không có cà chua và hành. Sử dụng sơ đồ venn, bao nhiêu sandwich anh ta làm với:

(a) Cà chua hoặc hành?

(b) Hành?

(c) Hành nhưng không có cà chua?

Bài giải

(a) 55

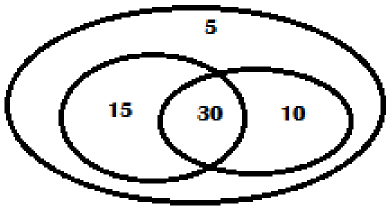
(b) 10 + 30 = 40

(c) 10

■

Bài 1.10

Subway chuẩn bị 60 bánh sandwich cỡ 4 inch cho 1 bữa tiệc sinh nhật. Trong đó có 45 bánh có cà chua, 30 bánh có cà chua và hành, 5 bánh không có cả cà chua và hành. Dùng biểu đồ Venn biểu diễn có bao nhiêu sandwich

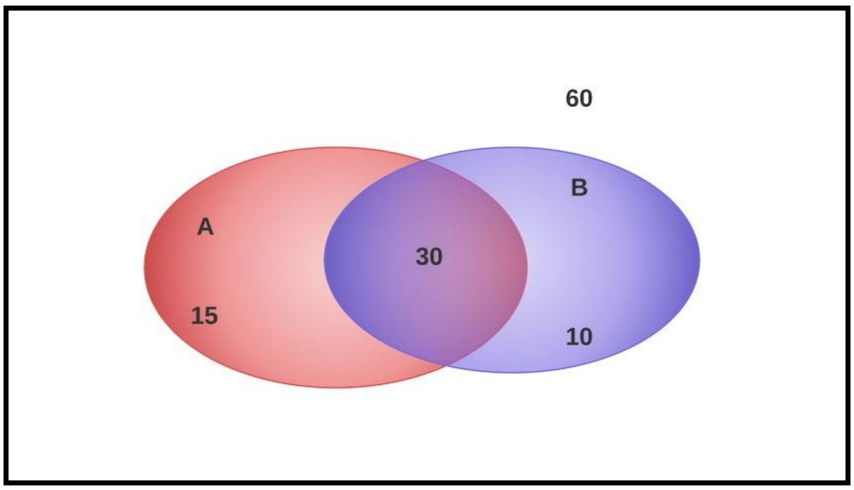


a) Có cà chua và hành?

b) Chỉ có hành?

c) Có hành nhưng không có cà chua?

Bài giải



Hình 2: Biểu đồ Venn

trong đó

A: Bánh có cà chua
B: Bánh có hành

Ta có

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 - 5 = 55.$$

Suy ra

$$n(B) = 55 + 30 - 45 = 40.$$

Do đó, số bánh sandwich chỉ có hành nhưng không có cà chua là

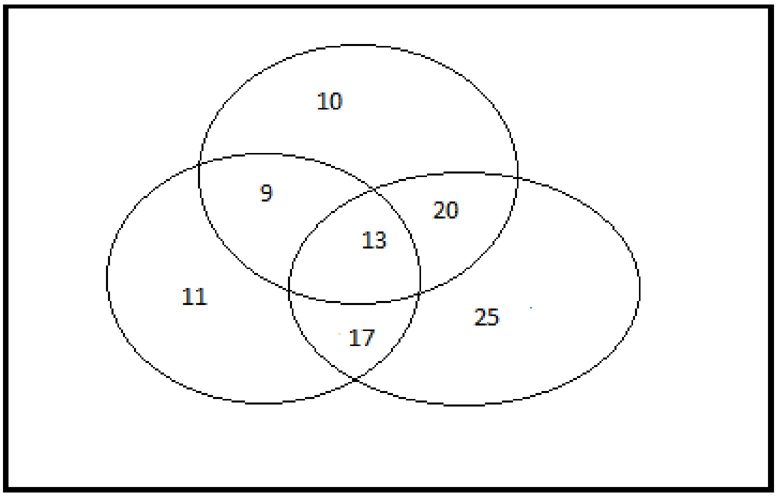
$$n(B) - n(A \cap B) = 40 - 30 = 10.$$

■

Bài 1.11

Cuộc cắm trại của sinh viên quốc tế có 110 sinh viên tham gia. Trong số các học sinh đó có:
75 sv nói tiếng Anh.
52 sv nói tiếng Tây Ban Nha
50 sv nói tiếng Pháp
33 sv nói tiếng Anh và tiếng Tây Ban Nha
30 sv nói tiếng Anh và tiếng Pháp
22 sv nói tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp
13 sv nói cả 3 ngôn ngữ.
Hỏi có bao nhiêu sinh viên:
a) Nói tiếng Anh và tiếng Tây Ban Nha nhưng không nói tiếng Pháp
b) Không nói cả tiếng Anh, tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp
c) Nói tiếng Pháp nhưng không nói tiếng Anh và tiếng Tây Ban Nha
d) Nói tiếng Anh nhưng không nói tiếng Tây Ban Nha
e) Chỉ nói một trong ba ngôn ngữ
f) Nói chính xác hai trong ba ngôn ngữ

Bài giải



a) Số sinh viên nói tiếng Anh và tiếng Tât Ban Nha nhưng không nói tiếng Pháp là:
33 - 13 = 20 sinh viên
b) Số sinh viên không nói cả tiếng Anh, tiếng Pháp và tiếng Tây Ban Nha là:
(110 -(75 +(50 -30)+ (52 -22 -20)) = 5 sinh viên
c) Số sinh viên nói tiếng Pháp nhưng không nói tiếng Anh và tiếng Tây Ban Nha là:
50 - 30 - (22 - 13) = 11 sinh viên
d) Số sinh viên nói tiếng Anh nhưng không nói tiếng Tây Ban Nha là:
75 - 33 = 42 sinh viên
e) Số sinh viên chỉ nói một trong ba ngôn ngữ là:
11+ (52- (33 + 22 -13)) + (75 - (33 + 30 - 13)) = 46 sinh viên
f) Số sinh viên nói chính xác hai trong ba ngôn ngữ là:
22 + 30 + 33 - 13 x 3 = 46 sinh viên

■

Bài 1.12

Một thí nghiệm bao gồm 2 giai đoạn:
(1) tung một đồng xu
(2) nếu đồng xu xuất hiện mặt ngửa thì tiếp tục tung con xúc sắc, ngược lại thì tiếp tục tung đồng xu.
Kết quả của thí nghiệm là 1 cặp gồm kết quả của giai đoạn 1 và kết quả của giai đoạn 2. Đặt S là tập hợp các kết quả của thí nghiệm. Liệt kê các phần tử của S và tìm số phần tử của S.

Bài giải

H = {xuất hiện mặt ngửa}
T = {xuất hiện mặt sấp}

Nếu đồng xu là mặt ngửa thì tiếp tục tung xúc sắc. Khi đó, ta có các kết quả sau: (H,1), (H,2), (H,3), (H,4), (H,5), (H,6)
Ngược lại, nếu đồng xu là mặt sấp thì tiếp tục tung đồng xu. Lúc này thí nghiệm cho ta 2 kết quả sau: (T,H), (T,T)
Khi đó:

$$S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, H), (T, T)\}$$

và

$$n(S) = 8$$

■

Bài 1.13

Cho ánh xạ f :$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Được xác định bởi f(x)= 3x+5
Chứng minh f đơn ánh và toàn ánh

<u>*Bài giải*</u>

- Chứng minh f đơn ánh

Với x= y $\Rightarrow$ f(x)= 3x+5
$\Leftrightarrow$ 3x+5= 3y+5
$\Leftrightarrow$ x= y
$\Rightarrow$ f đơn ánh.

- Chứng minh f toàn ánh

$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{y-5}{3} \in \mathbb{R}$ sao cho
f(x)= y
$\Rightarrow f\frac{y-5}{3} = y$
$\Rightarrow$ toàn ánh.

■

Bài 1.14

Tìm n(A), nếu n(P(A)) = 32

<u>*Bài giải*</u>

Áp dụng công thức trong Example 1.12: $n(A) = n$ thì $n(P(A)) = 2^n$
Ta có $n(P(A)) = 32 = 2^5 \Longrightarrow n(A) = 5$

■

Bài 1.15

Xét hàm f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi f(n)=$\begin{cases} \frac{n}{2}, \text{Nếu n chẵn} \\ -\frac{n-1}{2}, \text{Nếu n lẻ} \end{cases}$
a) Chứng minh rằng f(m)=f(n) không thể xảy ra nếu n và m có tính chẵn lẻ khác nhau, nghĩa là, f(n)=f(m) xảy ra khi n và m cùng chẵn hoặc cùng lẻ
b) Chứng minh rằng $\mathbb{Z}$ đếm được

Bài giải

a) Giả sử n chẵn, m lẻ.
f(n)=f(m)$\Leftrightarrow$ $\frac{n}{2}$=-$\frac{m-1}{2}$$\Leftrightarrow$n+m=1 (vô lý do n+m$\geqslant$2)
Vậy f(n)=f(m) xảy ra khi n và m cùng chẵn hoặc cùng lẻ
b) $\forall k \in \mathbb{Z}$, có duy nhất n $\in \mathbb{Z}$ sao cho f(n)=k
Nếu k=0 $\Leftrightarrow$ f(n)=0 $\Leftrightarrow$ n=1
Nếu k>0 $\Leftrightarrow$ f(n)=k $\Leftrightarrow$ n=2k
Nếu k<0 $\Leftrightarrow$ f(n)=k $\Leftrightarrow$ n=-2k+1
Mà $\mathbb{N}$ đếm được nên $\mathbb{Z}$ cũng đếm được

■

Bài 1.16

Cho A là 1 tập k rỗng và $f : A \to P(A)$ là hàm bất kì. Cho $B = a \in A|a \notin f(A)$. Rõ ràng, $B \in P(A)$. CMR không có $b \in A$ sao cho f(b)=B. Do đó, không có ánh xạ từ A tới P(A).

Bài giải

Gỉa sử có $\exists b \in A : f(b) = B$
. $b \in B \Rightarrow b \notin f(b) = B$ (vô lý)
. $b \notin B \Rightarrow b \in f(b) = B$ (vô lý)

■

Bài 1.17

Áp dụng bài toán 1.16 để chứng minh rằng P($\mathbb{N}$) không đếm được

Bài giải

Áp dụng bài 1.16 ta thay A = $\mathbb{N}$
Khi đó ta có
$f : \mathbb{N} \longrightarrow P(\mathbb{N})$ là không toàn ánh

Suy ra f không song ánh
Vì ℕ là tập đếm được nên P(ℕ) là tập không đếm được
Vậy P(ℕ) là tập không đếm được

■

Bài 2.1

Cho hai tập hợp A, B bất kỳ. Sử dụng biểu đồ Venn để biểu diễn:
$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ và $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$

Bài giải

Xem Hình 1: Bài 2.1 (a),(b)

■

Bài 2.2

Chứng minh nếu $A \subseteq B$ thì $B = A \cup (A^c \cap B)$. Do đó, B có thể được viết là hai tập tách rời nhau.

Bài giải

+) Chứng minh: $A \cup (A^c \cap B) \subseteq B$
Ta có: $A \subseteq B$
Mà $A^c \cap B = (B \setminus A) \cap B = B \setminus A \subseteq B$
$\Rightarrow A \cup (A^c \cap B) \subset B$

+) Chứng minh: $B \subseteq A \cup (A^c \cap B)$
Lấy $x \in B$, Chứng minh $x \in A$ hoặc $x \in (A^c \cap B)$

1) Giả sử: $x \in B$, Lấy $x \in B \Rightarrow x \in A$ (Do $A \subseteq B$)
2) $x \notin A$
Lấy $x \in B, x \notin A \Rightarrow x \in B \setminus A \Rightarrow x \in A^c \cap B$
Vậy $B = (a^c \cap B) \cup A$

■

Bài 2.3

Một khảo sát về một nhóm những sở thích trong cuối năm qua đã tiết lộ những thông tin sau

i. 28% thích xem thể dục.

ii. 29% thích xem bóng chày.

iii. 19% thích xem đá banh.

iv. 14% thích xem thể dục và bóng chày.

v. 12% thích xem bóng chày và đá banh.

vi. 10% thích xem thể dục và đá banh.

vii. 8% thích xem thể dục, bóng chày và đá banh.

Miêu tả phát biểu "đều không thích xem thể dục, bóng chày và đá banh trong suốt cuối năm qua" bằng việc sử dụng phép toán tập hợp

Bài giải

A: tập hợp những người thích xem thể dục.
B: tập hợp những người thích xem bóng chày.
C: tập hợp những người thích xem đá banh.
Ta có: $A = 28\%$; $B = 29\%$; $C = 19\%$; $A \cap B = 14\%$; $B \cap C = 12\%$; $A \cap C = 10\%$; $A \cap B \cap C = 8\%$
Giả sử ta khảo sát 100 người
$n(A \cup B \cup C) = n(A) \cup n(B) \cup n(C)$ - $n(B \cap C)$ - $n(A \cap C)$ - $n(A \cap B)$ + $n(A \cap B \cap C)$ = 48
$\Rightarrow n(A \cup B \cup C)^c$ = 100 -48 = 52

■

Bài 2.3

Một cuộc khảo sát về thói quen của một nhóm xem trong năm vừa qua đã tiết lộ thông tin như sau:
(i) 28% xem gym
(ii) 29% xem bóng chày
(iii) 19% xem bóng đá
(iv) 14% xem gym và bóng chày
(v) 12% xem bóng chày và bóng đá
(vi) 10% xem gym và bóng đá
(vii) 8% xem cả ba
Chỉ ra rằng "nhóm mà không xem cả ba môn thể thao trong năm vừa qua"

Bài giải

A: Biến cố người xem gym
B: Biến cố người xem bóng chày
C: Biến cố người xem bóng đá
P($\overline{A \cup B \cup C}$) = 100 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A ∩ B) + P(B ∩ C) + P(C ∩ A) - P(A ∩ B ∩ C) = 100 - 28 - 29 - 19 + 14 + 12 + 10 - 8 = 52%

■

Bài 2.4

Hộp thứ nhất chứa 10 bi: 4 bi đỏ và 6 bi xanh. Hộp thứ hai chứa 16 bi đỏ nhưng chưa biết số bi xanh. Một viên bi được rút trong mỗi hộp. R_i là biến cố rút được bi đỏ trong hộp thứ i (i = 1, 2) và B_i là biến cố rút được bi xanh trong hộp thứ i. Chứng minh rằng $R_1 \bigcap R_2$ và $B_1 \bigcap B_2$ là rời nhau.

Bài giải

Ta có: $R_1 \bigcap B_1 = \emptyset \Rightarrow (R_1 \bigcap R_2) \bigcap B_1 = \emptyset$ (1)
lại có: $R_2 \bigcap B_2 = \emptyset \Rightarrow (R_1 \bigcap R_2) \bigcap B_2 = \emptyset$ (2)
Từ (1) và (2)$\Rightarrow (R_1 \bigcap R_2) \bigcap (B_1 \bigcap B_2 = \emptyset)$

■

Bài 2.5

Một công ty bảo hiểm có 10,000 hợp đồng bảo hiểm. Mỗi hợp đồng được phân loại dựa vào các yếu tố như sau:

(i) trẻ hoặc già;
(ii) nam hoặc nữ;
(iii) đã kết hôn hoặc độc thân.

Trong số những người mua bảo hiểm có 3,000 người trẻ, 4,600 là nam và 7,000 người đã kết hôn. Trong số đó lại có 1,320 là nam_trẻ, 3,010 là nam_đã kết hôn và 1,400 là trẻ_đã kết hôn. Cuối cùng, 600 là nam_trẻ_đã kết hôn.
Hỏi có bao nhiêu người mua bảo hiểm của công ty là nữ_trẻ_độc thân?

Bài giải

Ta đặt:

A: trẻ   B: nam   C: đã kết hôn

Như vậy ta cần tìm $n(A \cap B^c \cap C^c)$.
Theo đề bài, ta có:

$$n(A) = 3000, n(B) = 4600, n(C) = 7000$$
$$n(A \cap B) = 1320, n(B \cap C) = 3010, n(A \cap C) = 1400$$
$$n(A \cap B \cap C) = 600$$

Do đó:

$n(A \cap B^c \cap C) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 800$
$n(A \cap B \cap C^c) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 720$

$\Rightarrow n(A \cap B^c \cap C^c) = n(A) - n(A \cap B \cap C) - n(A \cap B^c \cap C) - n(A \cap B \cap C^c) = 880$
Vậy có 880 người mua bảo hiểm của công ty là nữ_trẻ_độc thân.

■

Bài 2.6

' Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy. 60% dân số sỡ hữu 1 chiếc ô tô, 30% dân số sỡ hữu 1 căn nhà. 20% dân số sở hữu cả ô tô và nhà. Hỏi có bao nhiêu % dân số sở hữu ô tô hoặc nhà mà không có cả 2

Bài giải

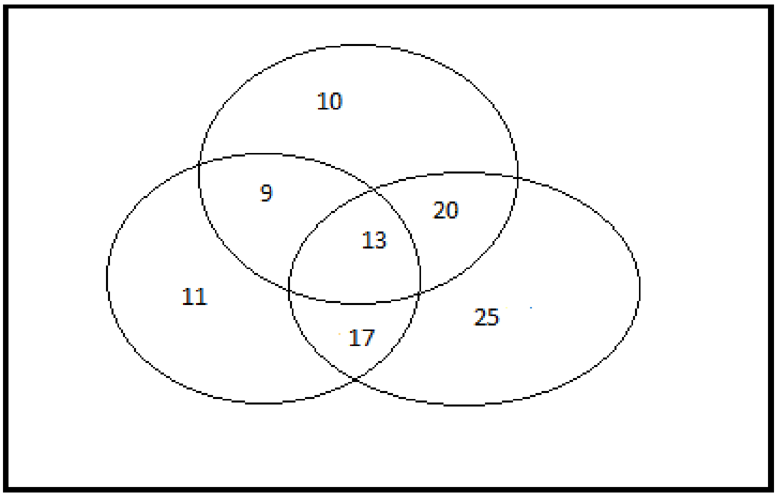
Đặt A là % dân số sở hữu ô tô
Đặt B là % dân số sở hữu nhà
Ta có : A= 60% B=30% $A \cap B = 20\%$
% dân số sở hữu ô tô hoặc nhà mà không có cả 2 là :
A - $A \cap B$ + B - $A \cap B$ = 60% - 20% + 30% - 20% = 50%

■

Bài 2.7

35% các chuyến thăm tới văn phòng một bác sĩ gia đình (PCP) kết quả không giới thiệu tới làm việc trong phòng thí nghiệm cũng không giới thiệu tới chuyên gia. Trong số những người đến văn phòng PCP, 30% được giới thiệu chuyên gia, 40% được giới thiệu làm việc trong phòng thí nghiệm. Hỏi có bao nhiêu phần trăm của chuyến tới văn phòng PCP mà kết quả bao gồm của chuyên gia và làm việc trong phòng thí nghiệm?

Bài giải



Gọi A là biến cố được giới thiệu tới chuyên gia
Gọi B là biến cố được giới thiệu vào làm việc trong phòng thí nghiệm
Ta có P(A) = 0.4 và P(B) = 0.3
$1 = P(A) + P(B) - P(AB) + (1 - P((A\cup)B)) \Leftrightarrow 1 = 0.4 + 0.3 - P(AB) + 0.35 \Leftrightarrow P(AB) = 0.05$

■

Bài 2.9

Một công ty bảo hiểm ước tính rằng $40^0\backslash_0$ số người mua bảo hiểm, những người chỉ có một chính sách ô tô sẽ đổi mới vào năm tới và $60^0\backslash_0$ của người mua bảo hiểm những người chỉ có một chính sách sở hữu nhà sẽ gia hạn vào năm tới. Công ty ước tính rằng $80^0\backslash_0$ của người được bảo hiểm có cả chính sách ô tô và sở hữu nhà sẽ đổi mới ít nhất một trong những chính sách trong năm tới. Hồ sơ công ty cho thấy rằng $65^0\backslash_0$ của số người được bảo hiểm có một chính sách ô tô, $50^0\backslash_0$ của số người được bảo hiểm có một chính sách sở hữu nhà, và $15^0\backslash_0$ của số người được bảo hiểm có cả một chính sách ô tô và chính sách sở hữu nhà. Sử dụng ước tính của công ty, tính toán tỷ lệ phần trăm của chính sách người mua bảo hiểm mà sẽ đổi mới ít nhất một chính sách trong năm tiếp theo.

Bài giải

A: khách hàng tham giam bảo hiểm ô tô.
H: khách hàng tham gia bảo hiểm nhà.
Theo đề bài ta có:
$(A \cap H) = 0,15$; $(A \cap H^c) = A - (A \cap H) = 0.65 - 0.15 = 0.50$
$(A^c \cap H) = H - (A \cap H) = 0.50 - 0.15 = 0.35$
Tỉ lệ phần trăm số khách hàng kí lại ít nhất một hợp đồng là:

$0.4.(A \cap H^c) + 0.6(A^c \cap H) + 0.8(A \cap H)$
$=0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.35 + 0.8 \times 0.15 = 0.53^0\backslash_0$

■

Bài 2.8

Trong một không gian mẫu U=100, A và B là 2 tập con của U sao cho n(A∪B)=70, và n(A∪B^c)=90, xác định n(A)

Bài giải

n(A∪B)=70 ⇔ n(A)+n(B)-n(A∩B)=70
n(A∪B^c)=90 ⇔ n(A)+n(B^c)-n(A∩B^c)=90
n(A∪B)+n(A∪B^c)= n(A)+n(B)-n(A∩B)+n(A)+n(B^c)-n(A∩B^c)=160 (*)
n(B)+n(B^c)=100
n(A∩B)+n(A∩B^c)=n(A)
Thay vào (*), n(A∪B)+n(A∪B^c)=n(A)+100=160
Vậy n(A)=60

■

Bài 2.10

Chứng minh rằng nếu A, B, C là tập con của U thì

$$n(A\bigcup B\bigcup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

Bài giải

Ta có công thức cho 2 tập hợp
$n(A\bigcup B) = n(A) + n(B) - n(A\bigcap B)$
Ta sẽ chứng minh trường hợp cho 3 tập hợp
$n(A\bigcup B\bigcup C) = n(A\bigcup B) + n(C) - n((A\bigcup B)\bigcap C)$
$= n(A) + n(B) - n(A\bigcap B) + n(C) - n((A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C))$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A\bigcap B) - n(A\bigcap C) - n(B\bigcap C) + n(A\bigcap B\bigcap C)$
Vậy
$n(A\bigcup B\bigcup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$

■

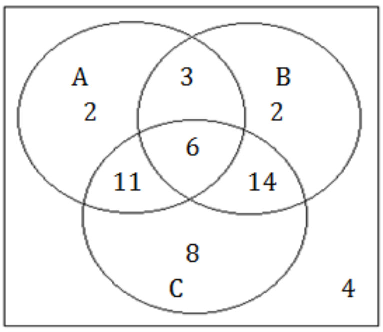
Bài 2.11

Trong một cuộc nghiên cứu về mùi vị kem que yêu thích của những đứa trẻ từ 3-5 tuổi. Kết quả cho thấy:

- 22 trẻ thích dâu tây.
- 25 trẻ thích việt quất.
- 39 trẻ thích nho.
- 9 trẻ thích việt quất và dâu tây.
- 17 trẻ thích dâu tây và nho.
- 20 trẻ thích việt quất và nho.
- 6 trẻ thích tất cả các vị.
- 4 trẻ không thích vị nào.

Hỏi có bao nhiêu trẻ được khảo sát?

Bài giải



Hình 3: Bài 2.11

Gọi A: tập hợp trẻ thích vị dâu tây.
B: tập hợp trẻ thích vị việt quất.
C: tập hợp trẻ thích vị nho.
Sử dụng biểu đồ Venn, ta có hình trên:
Vậy tổng số trẻ tham gia khảo sát là:

$$6 + 3 + 11 + 14 + 2 + 2 + 8 + 4 = 50$$

■

Bài 2.12

Cho A, B và C là ba tập con của U với các tính chất sau:
$n(A) = 63, n(B) = 91, n(C) = 44, n(A \cap B) = 25, n(A \cap C) = 23, n(C \cap B) = 21, n(A \cup B \cup C) = 139$
Tìm $n(A \cap B \cap C)$.

Bài giải

Ta có: $n(A \cap B \cap C) = n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A) - n(B) - n(C)$
$n(A \cap B \cap C) = 139 + 25 + 23 + 21 - 63 - 91 - 44$ $n(A \cap B \cap C) = 10$

■

Bài 2.13

50 sinh viên trong 1 kí túc xá đang đăng ký học phần cho kì học mùa thu. Theo thống kê thu được có

- 30 sinh viên đăng ký môn Toán
- 18 sinh viên đăng ký môn Sử
- 26 sinh viên đăng ký môn Tin
- 9 sinh viên đăng ký 2 môn Toán và Sử
- 16 sinh viên đăng ký 2 môn Toán và Tin
- 8 sinh viên đăng ký 2 môn Sử và Tin
- 47 sinh viên đăng ký ít nhất 1 trong 3 môn đó

a) Có bao nhiêu sinh viên không đăng ký môn học nào hết?
b) Bao nhiêu sinh viên đăng ký học cả 3 môn?

Bài giải

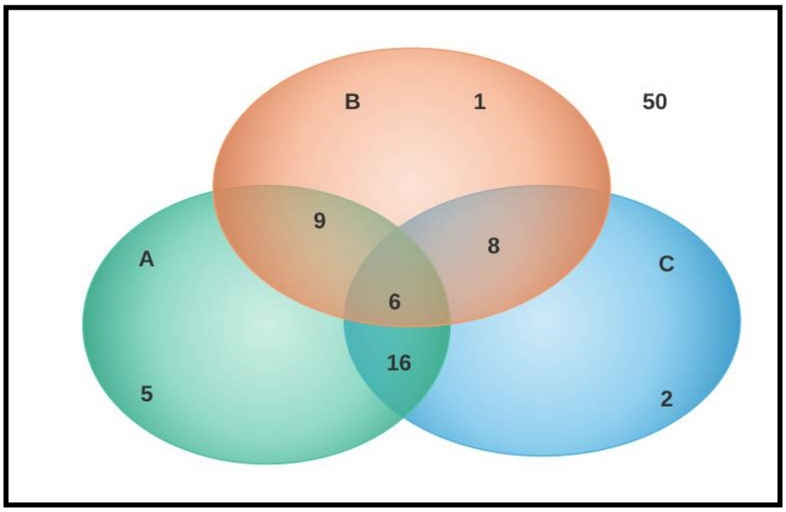
a) Số sinh viên không đăng ký môn học nào hết là

$$50 - 47 = 3 \text{ (sinh viên).}$$

b) Áp dụng công thức ta tính được số sinh viên đăng ký học cả 3 môn là

$$\begin{aligned} n(A \cap B \cap C) &= n(A \cup B \cup C) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) \\ &= 47 - 30 - 18 - 26 + 9 + 16 + 8 \\ &= 6. \end{aligned}$$

■



Hình 4: Biểu đồ Venn

Bài 2.13

Năm mươi sinh viên sống trong ký túc xá đại học đã được đăng ký cho các lớp học cho học kỳ mùa thu. Sau đây là cuộc khảo sát:

- 30 sinh viên đăng ký một lớp học toán
- 18 sinh viên đăng ký một lớp học sử
- 26 sinh viên đăng ký một lớp học máy tính
- 9 sinh viên đăng ký lớp toán và sử
- 16 sinh viên đăng ký lớp toàn và máy tính
- 8 sinh viên đăng ký sử và máy tính
- 47 sinh viên đăng ký ít nhất một trong ba lớp

(a) Có bao nhiêu sinh viên không đăng ký các lớp này?
(b) Có bao nhiêu sinh viên đăng ký cả ba lớp?

Bài giải

A: Sinh viên đăng ký một lớp học toán
B: Sinh viên đăng ký một lớp học sử
C: Sinh viên đăng ký một lớp học máy tính

(a) n($\overline{A \cup B \cup C}$) = 50 - 47 = 3(sinh viên)
(b) n(A ∩ B ∩ C) = 50 - (n(A) + n(B) + n(C) - n(A ∩ B) - n(B ∩ C) - n(C ∩ A) + n($\overline{A \cup B \cup C}$)) = 50 - (30 + 18 + 26 - 9 - 16 - 8 + 3) = 6

■

Bài 2.14

Một bác sĩ nghiên cứu quan hệ giữa huyết áp và nhịp tim khác thường trong số bệnh nhân. Cô kiểm tra một mẫu ngẫu nhiên của các bệnh nhân và ghi chú huyết áp của họ (cao, thấp hay bình thường) và nhịp tim của họ (bình thường hay bất thường). Cô thấy rằng:
i) 14% có huyết áp cao
ii) 22% có huyết áp thấp
iii) 15% có nhịp tim không bình thường
iv) Trong số các trường hợp tim bất thường, 1/3 có huyết áp cao v) Trong các trường hợp huyết áp bình thường, có 1/8 có nhịp tim bất thường
Phần trăm bệnh nhân có nhịp tim bình thường và huyết áp thấp?

Bài giải

Gọi
A_1: huyết áp cao
A_2: huyết áp thấp
A_0: huyết áp bình thường
B_1: nhịp tim không bình thường
B_0: nhịp tim bình thường
P(A_1)= 14%
P(A_2)= 22%
P(A_0)= 64%
P(B_1)= 15%
$P(A_1B_1) = \frac{1}{3}P(B_1) = \frac{1}{3}15\% = 5\%$
$P(A_0B_1) = \frac{1}{8}P(A_0) = \frac{1}{8}64\% = 8\%$
$P(A_2B_1) = P(B_1) - P(A_1B_1) - P(A_0B_1) = 15\% - 5\% - 8\% = 2\%$ $P(A_2B_0) = P(A_2) - P(A_2B_1) = 22\% - 2\% = 20\%$

■

Bài 2.15

Chứng minh: Nếu A, B và C là các tập con của tập U thì:
(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bài giải

(a) Trước hết, ta chứng minh $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Lấy $x \in A \cap (B \cup C)$. Ta chứng minh $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Ta có $x \in A \cap (B \cup C)$
$\Rightarrow x \in A$ và $x \in (B \cup C)$
$\Rightarrow x \in A$ và ($x \in B$ hoặc $x \in C$)
$\Rightarrow$ ($x \in A$ và $x \in B$) hoặc ($x \in A$ và $x \in C$)
$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ hoặc $x \in (A \cap C)$
$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Do đó: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (1)

Cuối cùng, ta chứng minh $A \cap B \cup (A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$

Lấy $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Ta chứng minh $y \in A \cap (B \cup C)$
Ta có, $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$\Rightarrow y \in (A \cap B)$ hoặc $y \in (A \cap C)$
$\Rightarrow$ ($y \in A$ và $y \in B$) hoặc $y \in A$ và $y \in C$)
$\Rightarrow y \in A$ và ($y \in B$ hoặc $y \in C$)
$\Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)$
Do đó: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) Trước hết, ta chứng minh $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Lấy $x \in A \cup (B \cap C)$. Ta chứng minh $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Ta có $x \in A \cup (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in A$ hoặc $x \in (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in A$ hoặc ($x \in B$ và $x \in C$)
$\Rightarrow$ ($x \in A$ hoặc $x \in B$) và ($x \in A$ hoặc $x \in C$)
$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ và $x \in (A \cup C)$
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Do đó: $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (3)

Cuối cùng, ta chứng minh $A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Lấy $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ta chứng minh $y \in A \cup (B \cap C)$
Ta có $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$\Rightarrow y \in (A \cup B)$ và $y \in (A \cup C)$
$\Rightarrow$ ($y \in A$ hoặc ($y \in B$) và $y \in A$ hoặc $y \in C$)
$\Rightarrow y \in A$ hoặc ($y \in B$ và $y \in C$)
$\Rightarrow y \in A$ hoặc $y \in (B \cap C)$
$\Rightarrow y \in A \cup (B \cap C)$
Do đó: $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ (4)

Từ (3), (4) suy ra: $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

$\blacksquare$

Bài 2.16

Chuyển các mô tả bằng lời nói sau thành ký hiệu toán học. Ví dụ A hoặc B xảy ra nhưng cả 2 không đồng thời xảy ra :$A \cup B - A \cap B$
a) A xảy ra bất cứ khi nào B xảy ra
b) Nếu A xảy ra nhưng sau đó B ko xảy ra
c) Chỉ A xảy ra hoặc chỉ B xảy ra
d) A ko xảy ra và B cũng ko xảy ra

Bài giải

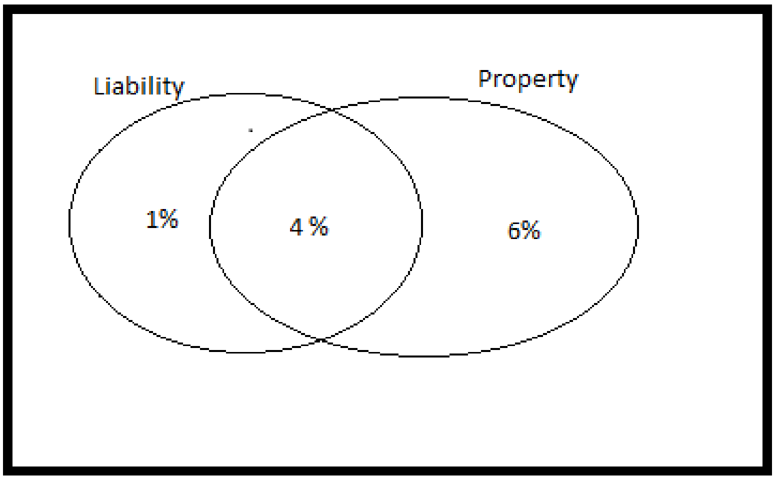
a) A xảy ra bất cứ khi nào B xảy ra : $B \subset A$
b) Nếu A xảy ra nhưng sau đó B ko xảy ra : c) Chỉ A xảy ra hoặc chỉ B xảy ra : $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
d) A ko xảy ra và B cũng ko xảy ra : $\overline{A \cup B}$

■

Bài 2.17

Một cuộc khảo sát 100 người xem truyền hình trong 1 năm qua cho thấy rằng:
i) 34 người xem CBS
ii) 15 người xem NBC
iii) 10 người xem ABC
iv) 7 người xem CBS và NBC
v) 6 người xem CBS và ABC
vi) 5 người xem NBC và ABC
vii) 4 người xem CBS, NBC, ABC
viii) 18 người xem HGTV và trong số này không xem CBS, NBC, ABC
Tính xem có bao nhiêu người trong 100 người xem truyền hình không xem kênh nào trong số 4 kênh

Bài giải



Gọi A là biến cố xem kênh CBS
B là biến cố xem kênh NBC
C là ciến cố xem kênh ABC
D là biến cố xem kênh HGTV
E là biến cố không xem kênh nào trong số 4 kênh
Ta có:
P(A)=0.34
P(B)=0.15
P(C)=0.1
P(D)=0.18
P(AB)=0.07
P(AC)=0.06
P(BC)=0.05
P(ABC)=0.04
Dựa vào hình vẽ ta có:
1 = P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC) - P(BC) + P(D) + P(E) + P(ABC)
Suy ra P(E) = 0.37
Hay ta nói có 37 người trong 100 người xem truyền hình không xem kênh nào trong 4 kênh CBS, NBC, ABC, HGTV

■

Bài 3.1

Nếu mỗi trong 10 số từ 0 đến 9 được chọn ngẫu nhiên, có bao nhiêu cách để bạn chọn những con số sau đây?
a) Một mã số có 2 chữ số, được phép lặp lại
b) Một số thẻ có 3 chữ số, số đầu tiên không thể là số 0, được phép lặp lại

c) Một mã khóa xe đạp có 4 chữ số, không có số nào được lặp lại 2 lần
d) Một mã số vùng có 5 chữ số, số đầu tiên không thể là số 0, được phép lặp lại

Bài giải

a) $C_{10}^1.C_{10}^1$=100
b) $C_9^1.C_{10}^1.C_{10}^1$=900
c) $C_{10}^1.C_9^1.C_8^1.C_7^1$=5040
d) $C_9^1.C_{10}^1.C_{10}^1.C_{10}^1.C_{10}^1$=90000

■

Bài 3.2

(a) Nếu tám xe được nhập trong một cuộc đua và ba chiếc đã hoàn thành được xem xét, có bao nhiêu đơn đặt hàng hoàn thiện họ có thể hoàn thành? Giả sử không có liên kết.
(b)Nếu ba chiếc xe hàng đầu là Buick, Honda, và BMW, có bao nhiêu đơn đặt hàng họ có thể hoàn thành.

Bài giải

a)$A_8^3 = 336$
b)$3! = 6$

■

Bài 3.3

Trong một chuyến đi một người mang theo 2 áo sơ mi (trắng, đỏ) và 3 quần tây (đen, xanh, xám). Hỏi có bao nhiêu cách để chọn ra những bộ trang phục khác nhau?

Bài giải

Số cách chọn áo sơ mi là 2 cách

Số cách chọn quần tây là 3 cách

Vậy số cách chọn ra những bộ trang phục khác nhau là $2.3 = 6$ cách

■

Bài 3.4

Một nhóm có 10 thành viên. Một chủ tịch và một phó chủ tịch được lựa chọn.
Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu mỗi người đều thích hợp?

Bài giải

Số cách chọn chủ tịch: 10 cách
Số cách chọn phó chủ tịch: 9 cách
Vậy số cách chọn 1 chủ tịch và 1 phó chủ tịch là: $10 \,.\, 9 = 90$ cách

■

Bài 3.5

Trong một nghiên cứu y tế, bệnh nhân được phân loại theo cho dù họ có thường xuyên (RHB) hoặc bất thường nhịp tim (IHB) và cũng theo liệu huyết áp thấp (L), bình thường (N) , hoặc cao (H). Sử dụng một sơ đồ cây để đại diện cho các kết quả khác nhau có thể xảy ra.

Bài giải

Có 6 trường hợp xảy ra:

$$RBH : H, L, N$$

$$IBH : H, L, N$$

■

Bài 3.6

Nếu một cơ quan du lịch cung cấp các chuyến đi cuối tuần đặc biệt đến 12 thành phố khác nhau, bằng đường hàng không, đường sắt, xe buýt, hoặc biển, trong bao nhiêu cách khác nhau có thể là một chuyến đi như vậy được sắp xếp?

Bài giải

12 x 4 = 48(cách)

■

Bài 3.6

Một đại lý du lịch cung cấp những chuyến đi cuối tuần đặc biệt đến 12 thành phố khác nhau bằng máy bay, đường sắt, xe buýt hoặc bằng đường biển. Hỏi có thể có bao nhiêu cách để sắp xếp cho một chuyến đi?

Bài giải

Có $12 \times 4 = 48$ các sắp xếp.

■

Bài 3.7

Nếu có 20 loai rượu khác nhau được tham gia vào cuộc thi thử rượu. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau để giám khảo có thể trao giải nhất và giải nhì?

Bài giải

Số cách chọn khác nhau để giám khảo có thể trao giải nhất và giải nhì là:
$20 * 19 = 380$ cách

■

Bài 3.8

Hỏi có bao nhiêu cách chọn 1 hiệu trưởng, 1 hiệu phó, 1 thư ký và 1 thủ quỹ từ hội đồng trường đại học có 24 thành viên?

Bài giải

Chọn 1 hiệu trưởng có: 24 cách.
Chọn 1 hiệu phó có: $24 - 1 = 23$ cách.
Chọn 1 thư ký có: $24 - 2 = 22$ cách.
Chọn 1 thủ quỹ có: $24 - 3 = 21$ cách.

Do đó có $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 255{,}024$ cách chọn 1 hiệu trưởng, 1 hiệu phó, 1 thư ký và 1 thủ quỹ.

■

Bài 3.9

Tìm số cách chọn 4 cuốn tiểu thuyết trong 10 cuốn tiểu thuyết và sắp vào vị trí thứ 1,2,3,4 theo doanh số bán ra trong 3 tháng đầu tiên

Bài giải

Số cách chọn 4 trong 10 cuốn tiểu thuyết và sắp vào vị trí 1,2,3,4 là : P_{10}^{4}= 5040 cách

■

Bài 3.10

Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 8 người, gồm 4 cặp vợ chồng, trên 1 dãy ghế (8 chỗ) nếu tất cả các cặp đôi ngồi liền kề với nhau?

Bài giải

Có 4 cặp vợ chồng nên hoán vị 4 cặp ta được 4! cách sắp xếp
Trong 1 cặp, vợ và chồng có thể đổi chỗ cho nhau nên ta được 2 cách sắp xếp. Do đó trong 4 cặp ta có 2^4 cách sắp xếp Vậy số cách sắp xếp chỗ cho 8 người (4cặp) là $2^4 \times 4! = 384$

■

Bài 4.1

Tìm m,n sao cho $A_n^m = \frac{9!}{6!}$

Bài giải

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{9!}{6!}$
$\Rightarrow$n=9, m=3

■

Bài 4.2

Có bao nhiêu từ mã bốn chữ cái có thể được hình thành bằng cách sử dụng một bảng 26 chữ cái tiêu chuẩn. (a) nếu lặp lại được cho phép? (b) nếu lặp đi lặp lại không được cho phép?

Bài giải

a)Số cách chọn 4 kí tự lặp lại từ 26 kí tự là : 26^4cách
b)Số cách chọn 4 kí tự không lặp lại từ 26 kí tự là: $23 \times 24 \times 25 \times 26$ cách

■

Bài 4.3

Một loại giấy phép lái xe ô tô được đặc trưng bởi 6 kí tự, trong đó có 3 kí tự đầu là chữ cái và 3 kí tự cuối là chữ số.
a) Có bao nhiêu giấy phép lái xe ô tô nếu các chữ cái không được lặp lại nhưng các chữ số có thể lặp lại?
b) Có bao nhiêu giấy phép lái xe ô tô nếu các chữ cái và các chữ số không lặp lại?

Bài giải

Gọi 6 kí tự cần tìm là: $\overline{abcdef}$
(với a,b,c đại diện cho 26 kí tự chữ cái và d, e, f đại diện cho 10 kí tự chữ số)
Ta chia công việc lập giấy phép lái xe ô tô thỏa yêu cầu bài toán thành 6 giai đoạn

- câu a
  - giai đoạn 1: a có 26 cách chọn
  - giai đoạn 2: b có 25 cách chọn
  - giai đoạn 3: c có 24 cách chọn
  - giai đoạn 4: d có 10 cách chọn
  - giai đoạn 5: e có 10 cách chọn
  - giai đoạn 6: f có 10 cách chọn

  Vậy có 26.25.24.10.10.10 = 15600000 cách chọn thỏa yêu cầu bài toán

- câu b
  - giai đoạn 1: a có 26 cách chọn
  - giai đoạn 2: b có 25 cách chọn
  - giai đoạn 3: c có 24 cách chọn
  - giai đoạn 4: d có 10 cách chọn
  - giai đoạn 5: e có 9 cách chọn
  - giai đoạn 6: f có 8 cách chọn

  Vậy có 26.25.24.10.9.8 = 11232000 cách chọn thỏa yêu cầu bài toán

■

Bài 4.4

Một tập hợp gồm có 40 số.

a) Hỏi có bao nhiêu tập hợp khác nhau gồm 3 phần tử có thể được tạo thành nếu các phần tử được phép lặp lại?

b) Hỏi có bao nhiêu tập hợp khác nhau được tạo thành nếu 3 phần tử của tập hợp là khác nhau?

Bài giải

a) Cách chọn phần tử thứ 1: 40 cách
Cách chọn phần tử thứ 2: 40 cách
Cách chọn phần tử thứ 3: 40 cách
⇒ Số cách chọn các tập hợp thỏa yêu cầu bài toán là:

$$40\,.\,40\,.\,40 = 64000 \text{ cách chọn}$$

b) Cách chọn phần tử thứ 1: 40 cách
Cách chọn phần tử thứ 2: 39 cách
Cách chọn phần tử thứ 3: 38 cách
⇒ Số cách chọn các tập hợp thỏa yêu cầu bài toán là:

$$40\,.\,39\,.\,38 = 59280 \text{ cách chọn}$$

■

Bài 4.5

a) Có 12 quan chức nội các được xắp sếp ngồi trong một hàng cho một bức tranh. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi khác nhau đó?

b) Có 7 thành viên của nội các là phụ nữ và 5 là nam giới. Có bao nhiêu cách khác nhau để chọn 7 người phụ nữ có thể được ngồi cùng nhau bên trái, và sau đó 5 người đàn ông ngồi với nhau bên phải?

Bài giải

a) Số cách sắp xếp 12 người vào 12 vị trí: 12!

b) Số cách sắp xếp 7 người phụ nữ ngồi gần nhau về phía bên phải. 5 người ngồi gần nhau về phía bên trái là: $7!x5!$

■

Bài 4.6

Sử dụng những con số 1, 3, 5, 7 và 9, không lặp lại những con số này, có bao nhiêu cách:
(a) một chữ số có thể được thực hiện?
(b) hai chữ số có thể được thực hiện?
(c) ba chữ số có thể được thực hiện?
(d) bốn chữ số có thể được thực hiện?

Bài giải

(a) $C_5^1 = 5$
(b) C_5^1 x $C_4^1 = 20$
(c) C_5^1 x C_4^1 x $C_3^1 = 60$
(d) C_5^1 x C_4^1 x C_3^1 x $C_2^1 = 120$

■

Bài 4.6

Dùng các chữ số 1, 3, 5, 7 và 9 mà không lặp lại. Có bao nhiêu

a) Số có 1 chữ số?

b) Số có 2 chữ số?

c) Số có 3 chữ số?

d) Số có 4 chữ số?

Bài giải

Từ 5 số 1, 3, 5, 7, 9 ta thành lập được

a) Số các số có 1 chữ số là: $C_5^1 = 5$.

b) Số các số có 2 chữ số khác nhau là: $C_5^1 \times C_4^1 = 20$.

c) Số các số có 3 chữ số khác nhau là: $C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 60$.

d) Số các số có 4 chữ số khác nhau là: $C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 120$.

■

Bài 4.7

Có 5 thành viên của câu lạc bộ Toán. Trong đó có bao nhiêu cách chọn 1 nhóm trưởng, 1 thư ký và 1 thủ quỹ?

Bài giải

Số cách chọn 1 nhóm trưởng, 1 thư ký và 1 thủ quỹ là:
$5 * 4 * 3 * 2 = 120$ cách chọn

■

Bài 4.8

Tìm số cách chọn 3 chữ cái từ bảng chữ cái nếu các chữ cái không trùng nhau. Các chữ viết tắt như MBF và BMF được coi là khác nhau.

Bài giải

Vì các chữ cái được chọn không trùng nhau nên ta có:

Số cách chọn chữ cái thứ nhất: 26 cách
Số cách chọn chữ cái thứ hai: $26 - 1 = 25$ cách
Số cách chọn chữ cái thứ ba: $26 - 2 = 24$ cách
$\Rightarrow$ Có $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15{,}600$ cách chọn 3 chữ cái thỏa đề bài.

■

Bài 5.1

Tìm m và n để $C_m^n = 13$.

Bài giải

$\forall k > 1, k \in \mathbb{N}$
$C_k^1 = \frac{k!}{(k-1)!} = k$
Chọn n= 1.
$C_m^1 = 13 \Rightarrow m = 13$
$C_m^n = C^m - n_m \Rightarrow C_1^1 3 = C^1 2_1 3$
Vậy m= 13, n=1 hoặc n=12.

■

Bài 5.2

Một câu lạc bộ với 42 thành viên, phải chọn ra 3 người đại diện cho cuộc họp khu vực. Hỏi có mấy cách chọn có thể có?

Bài giải

Chọn 3 người trong số 42 người có C_{42}^3 cách chọn = 11480 cách chọn

■

Bài 5.3

Trong một buổi lễ của Liên Hợp Quốc, 25 nhà ngoại giao đã được giới thiệu với nhau. Giả sử rằng các nhà ngoại giao bắt tay với nhau đúng một lần. Hỏi có bao nhiêu lần bắt tay?

Bài giải

Người thứ nhất sẽ bắt tay với 24 người
Người thứ hai sẽ bắt tay với 23 người trừ người thứ nhất
Người thứ ba sẽ bắt tay với 22 người trừ người thứ nhất và thứ 2
...
Người thứ 23 sẽ bắt tay với 2 người
Người thứ 24 sẽ bắt tay với 1 người
Vậy tổng số lần bắt tay là $\sum_{i=1}^{24} i$=300

■

Bài 5.4

Có 5 thành viên của câu lạc bộ toán học. Có bao nhiêu cách để Hội đồng xã hội gồm 2 người được lựa chọn?

Bài giải

Số cách chọn 2 người từ 5 người vào hội đồng xã hội là: $C_5^2 = 10$ cách

■

Bài 5.5

Một nhóm nghiên cứu y tế có kế hoạch để chọn 2 tình nguyện viên trong số 8 tình nguyện viên cho một cuộc thử nghiêm thuốc. Có bao nhiêu cách có thể chọn ra 2 tình nguyện viên đó?

Bài giải

Số cách có thể chọn ra 2 trong số 8 tình nguyện viên là $C_8^2 = 28$ cách.

■

Bài 5.6

Một nhóm khách hàng gồm có 30 thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách có thể chọn một nhóm 3 người để tham dự buổi họp mặt truyền thống?

Bài giải

Số cách chọn 3 người trong 30 người là: $C_{30}^{3} = 4060$ cách chọn

■

Bài 5.7

Tìm công thức liên hệ giữa chỉnh hợp và tổ hợp.

Bài giải

$mPn{=}\dfrac{m!}{(m=n)!}{=}\dfrac{n!m!}{n!(m-n)!}{=}n!mCn$

Ta có: $n! \geq 1 \Leftrightarrow n!mCn \geq mCn \Leftrightarrow mPn \geq mCn$

■

Bài 5.8

Xác định xem liệu mỗi vấn đề đòi hỏi tổ hợp hoặc hoán vị:

a) có 10 lớp phủ lên bề mặt kem của bạn và chỉ được phép chọn ba màu. Có bao nhiêu cách kết hợp có thể?

b) 15 sinh viên tham dự cuộc đua tranh cuộc thi chính tả. người đầu tiên chiến thắng sẽ nhận được 1000. người thứ 2 nhận được 500 và người thứ 3 được 250. có bao nhiêu cách có thể 3 người chiến thắng?

Bài giải

a) Tổ hợp

b) Hoán vị

■

Bài 5.8

Trong mỗi trường hợp dưới đây xem nó là tổ hợp hay hoán vị:

(a) Hiện có 10 loại kem cho bạn và bạn được cho phép chọn chỉ 3 loại kem. Hỏi có bao nhiêu tổ hợp có thể có để chọn ra ra 3 loại kem?

(b) 15 học sinh tham gia vào một cuộc thi đánh vần. Người đứng đầu cuộc thi sẽ được nhận \$1,000, người đứng nhì cuộc thi sẽ được nhận \$500 và người đứng thứ ba sẽ được nhật \$250. Hỏi có bao nhiêu cách có thể có để chọn ra 3 người thắng cuộc.

Bài giải

(a) Tổ hợp

(b) Hoán vị

■

Bài 5.9

Dùng định lí nhị thức và tam giác Pascal để tìm khai triển của $(a+b)^7$

Bài giải

Nhị thức:

$(a+b)^7 = \mathrm{C}_0^7 a^7 + \mathrm{C}_1^7 a^6 b + \mathrm{C}_2^7 a^5 b^2 + \mathrm{C}_3^7 a^4 b^3 + \mathrm{C}_4^7 a^3 b^4 + \mathrm{C}_5^7 a^2 b^5 + \mathrm{C}_6^7 ab^5 + \mathrm{C}_7^7 b^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^a b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$

Tam giác Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^a b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$

■

Bài 5.10

Tìm số hạng thứ 5 trong khai triển $(2a-3b)^7$

Bài giải

Số hạng tổng quát khi khai triển $(2a-3b)^7$ là:

$$\mathrm{C}_n^k (2a)^{7-k} \cdot (-3b)^k \quad (k = \overline{0,7})$$

Vậy số hạng thứ 5 trong khai triển tương ứng với k = 4 là:

$$\mathrm{C}_7^4 (2a)^3 \cdot (-3b)^4 = 22,680a^3 b^4$$

■

Bài 5.11

30 phần tử được xếp vào một bảng gồm 5 dòng 6 cột như hình.
Tính số cách để chọn một bộ ba các phần tử khác nhau sao cho hai trong số các phần tử được chọn không cùng nằm trên cùng hàng hoặc cột.

<u>*Bài giải*</u>

- Ta có 30 cách chọn phần tử thứ nhất.

- Vì hai trong số các phần tử được chọn không cùng nằm trên cùng hàng hoặc cột nên chỉ có 20 cách chọn phần tử thứ hai.

- Tương tự để hai trong số các phần tử được chọn không cùng nằm trên cùng hàng hoặc cột nên chỉ có 12 cách chọn phần tử thứ ba.

- Vậy ta có: $30 \times 20 \times 12 = 7200$

- Vì các phần tử được chọn hoán vị với nhau lần dẫn đến bị trùng nên số cách chọn thật sự là: $7200 \div 3 = 1200$

■

Bai 6.1

Xem xét 1 thí nghiệm ngẫu nhiên khi gieo 1 con xúc xắc:
a. Tìm không gian mẫu của thí nghiệm.
b. Tìm biến cố khi gieo xúc xắc được số chẵn.

<u>*Bài giải*</u>

a. Khi gieo 1 con xúc xắc ta có 6 trường hợp có thể xảy ra. Vậy không gian mẫu là 6
S $\{1,2,3,4,5,6\}$
b. Gọi A là biến cố khi gieo con xúc xắc được số chẵn. Vậy A = $\{2,4,6\}$

■

Bài 6.2

Một thí nghiệm bao gồm hai giai đoạn sau đây:
(1) Tung một đồng xu
(2) Nếu tung đồng xu được mặt ngửa thì gieo xúc sắc. Nếu tung đồng xu dược mặt sấp thì đồng xu được tung lại
Một kết quả của thí nghiệm này là một cặp của mẫu (kết quả giai đoạn 1, kết quả giai đoạn 2). S là tập hợp các kết quả có thể xảy ra. Tìm S

Bài giải

Gọi H: "Biến cố tung đồng xu được mặt ngửa"
T: "Biến cố tung đồng xu được mặt sấp"
R_i: "Biến cố tung xúc sắc được mặt i" i=1,2,...,6
$S = \{(H, H), (H, T), (T, R_1), (T, R_2), (T, R_3), (T, R_4), (T, R_5), (T, R_6)\}$

■

Bài 6.3

6.3 Doanh nghiệp bảo hiểm cung cấp bảo hiểm sức khỏe cho nhân viên của một công ty lớn. Như một phần của kế hoạch này, các nhân viên có thể lựa chọn chính xác hai trong số các bảo hiểm bổ sung A, B, và C, hoặc họ có thể chọn không có bảo hiểm bổ sung . Tỷ lệ nhân viên của công ty mà lựa chọn các bảo hiểm A, B, và C là 1/4, 1/3, và 5/12 tương ứng. Xác định xác suất mà một nhân viên được lựa chọn ngẫu nhiên sẽ không có lựa chọn bảo hiểm bổ sung.

Bài giải

Vì 1 nhân viên chỉ có thể chọn 2 hoặc không chọn, nên ta có:

$$\begin{cases} P(A) = P[(A \cap B) + (A \cap C)] \\ P(B) = P[(B \cap C) + (B \cap C)] \\ P(C) = P[(C \cap A) + (B \cap C)] \end{cases}$$

$A \cap B \cap C = \varnothing$. Do không thể chọn cả 3.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} = P[(A \cap B) + (A \cap C)] \\ \dfrac{1}{3} = P[(B \cap C) + (B \cap C)] \\ \dfrac{5}{12} = P[(C \cap A) + (B \cap C)] \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} P(A \cap B) = \dfrac{1}{12} \\ P(B \cap C) = \dfrac{1}{4} \\ P(C \cap A) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Xác suất để một người chọn cả 2 là: $P[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
Vậy xác suất để một người không chọn là : $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

■

Bài 6.4

Một thí nghiệm: Gieo ngẫu nhiên 2 con xúc sắc cân đối và đồng chất.
a) Viết ra không gian mẫu của thí nghiệm này.
b) Nếu E là biến cố "tổng điểm tối đa của 2 xúc sắc là 10", liệt kê các kết quả thuộc E^c.
c) Tính xác suất tổng điểm tối đa của 2 xúc sắc là 10?
d) Tính xác suất để trong một lần tung số nốt của 2 xúc sắc giống nhau như là:
{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)} sẽ không xảy ra?
e) Tính xác suất để trong một lần tung số nốt của hai xúc sắc khác nhau và tổng điểm 2 xúc sắc không lớn hơn 10?

Bài giải

a) $\Omega = \{(i,j) | i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}\}$
b) E = $\{(i,j) | i + j \leq 10, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}\}$
Suy ra $E^c = \{(i,j) | i + j > 10, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}\} = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$
c) Ta có $P(E^c) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
Xác suất tổng điểm tối đa của 2 xúc sắc là 10: $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$
d) Gọi $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$
Xác suất để trong một lần tung số nốt của 2 xúc sắc giống nhau $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
Vậy xác suất để trong một lần tung số nốt của 2 xúc sắc giống nhau không xảy ra là $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
e) Gọi $B = \{(i,j) | i + j \leq 10, i = j, i = \overline{1,5}, j = \overline{1,5}\} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$
Suy ra $P(B) = \frac{5}{36}$
Gọi C là biến cố "trong một lần tung số nốt của hai xúc sắc khác nhau và tổng điểm 2 xúc sắc không lớn hơn 10".
Suy ra $P(C) = P(E) - P(B) = \frac{11}{12} - \frac{5}{36} = \frac{7}{9}$

■

Bài 6.5

Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Nếu một số được chọn ngẫu nhiên, có nghĩa là, cơ hội để các số được chọn ra từ tập hợp là như nhau, tính xác suất của các trường hợp sau:

(a) A là biến cố chọn ra một số chẵn.

(b) B là biến cố chọn ra một số nhỏ hơn 5 và lớn hơn 9.

(c) C là biến cố chọn ra một số nhỏ hơn 11 và lớn hơn 0.

(d) D là biến cố chọn ra một số nguyên tố.

(e) E là biến cố chọn ra một số lẻ và là số nguyên tố.

Bài giải

Không gian mẫu: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$\Rightarrow \mid S \mid = 10$.

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$\Rightarrow \mid A \mid = 5$.
Vậy $P(A) = \dfrac{\mid A \mid}{\mid S \mid} = 0.5$.

b) $B = \phi$
$\Rightarrow \mid B \mid = 0$.
Vậy $P(B) = 0$.

c) $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
$\Rightarrow \mid C \mid = 10$.
Vậy $P(C) = 1$.

d) $D = \{2, 3, 5, 7\}$
$\Rightarrow \mid D \mid = 4$.
Vậy $P(D) = 0.4$.

e) $E = \{3, 5, 7\}$
$\Rightarrow \mid E \mid = 3$.
Vậy $P(E) = 0.3$.

■

Bài 6.6

Máy xe chỉ kéo sợi như hình sau: Tìm xác suất để thỏa mãn:

a) Xác suất những số là ước của 24.

b) Xác suất những số là bội của $AB = \{4, 8\}$.

c) Xác suất những số lẻ $C = \{1, 3, 5, 7\}$.

d) Xác suất có số 9 là: $P(D) = 0$.

e) Xác suất những số là tích của những số còn lại không là số nguyên tố.

Bài giải

a) Xác suất những số là ước của 24 gồm:$\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) Xác suất những số là bội của $AB = \{4, 8\}$
$\Rightarrow P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

c) Xác suất những số lẻ $C = \{1, 3, 5, 7\}$
$\Rightarrow P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d) Xác suất có số 9 là: $P(D) = 0$

e) Xác suất những số là tích của những số còn lại không là số nguyên tố:
$k = \{4, 6, 8\} \Rightarrow P(k) = \frac{3}{8}$

f) Xác suất những số không là số nguyên tố và không là tích cuta những số còn lại:
$F = \{1\} \Rightarrow P(F) = \frac{1}{8}$

■

Bài 6.7

Một thùng đồ chứa đựng 15 áo sơ mi và 10 quần đùi. Ba mạt hàng được rút ra từ hộp không hoàn lại. Xác suất mà cả ba đều là áo sơ mi hoạc cả ba đều là quần đùi.

Bài giải

Gọi không gian mẫu là: C_{25}^{3}
Chọn 3 trong số 15 áo sơ mi là: C_{15}^{3}
Chọn 3 trong số 10 quần đùi là: C_{10}^{3}
Xác suất chọn được 3 áo hoạc 3 quần là: $\frac{\mathrm{C}_{15}^{3}+\mathrm{C}_{10}^{3}}{\mathrm{C}_{25}^{3}} = 0.25$

■

Bài 6.7

1 hộp có 15 áo thun và 10 quần dài. Lấy ra 3 món đồ từ hộp mà không hoàn lại. Xác suất cả 3 món đồ đều là áo hoặc đều là quần là bao nhiêu?

Bài giải

Xác suất để 3 món đồ lấy ra đều là áo thun : $\dfrac{C_{15}^3}{C_{25}^3}$.
Xác suất để 3 món đồ lấy ra đều là quần dài : $\dfrac{C_{10}^3}{C_{25}^3}$.
Do đó, xác suất cả 3 món đồ đều là áo hoặc đều là quần

$$\frac{C_{15}^3}{C_{25}^3} + \frac{C_{10}^3}{C_{25}^3} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

■

Bài 6.8

Một đồng xu được lặp đi lặp lại. Hỏi xác suất mặt ngửa thứ 2 xuất hiện ở lần tung thứ 7 (vì chỉ chú trọng 7 lần tung đầu tiên nên bạn có thể cho rằng đồng xu chỉ được tung 7 lần)

Bài giải

Xác suất đồng xu được tung 7 lần:$(\frac{1}{2})^7 = \frac{1}{128}$
Xác suất mặt ngửa thứ 2 xuất hiện ở lần tung thứ 7 là: $\frac{6}{128}$
Có 6 trường hợp:
N S S S S S N
S N S S S S N
S S N S S S N
S S S N S S N
S S S S N S N
S S S S S N N

■

Bài 6.9

Giả sử mỗi giáo sư trong 100 giáo sư toán chọn ngẫu nhiên trong 200 khóa học. Tính xác suất để có ít nhất 2 giáo sư chọn cùng một khóa học?

Bài giải

Gọi E là biến cố "không có 2 giáo sư nào chọn trùng khóa học"
Có tổng cộng 200^{100} cách chọn
Giáo sư thứ nhất có 200 cách chọn
Giáo sư thứ hai có 199 cách chọn
Cứ như vậy đến giáo sư thứ một trăm sẽ có 101 cách chọn
$\Rightarrow P(E) = \frac{200 \cdot 199 \cdots 101}{200^{100}} = 6.6 \text{ x } 10^{-14}$
Do đó xác suất để có ít nhất 2 giáo sư cùng chọn một khóa học là:

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 6.6 \text{ x } 10^{-14}$$

■

Bài 6.10

Một lớp học lớn gồm 100 học sinh nước ngoài, 30 người trong số đó nói Tiếng Tây Ban Nha, 25 người nói tiếng I-ta-li-a, trong khi đó 55 người không nói cả hai.

1. Hỏi có bao nhiêu người nói cả hai thứ tiếng?

2. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh nói tiếng I-ta-li-a. Hỏi xác suất anh(cô) ấy nói tiếng Tây Ban Nha?

Bài giải

1. Số người nói cả hai thứ tiếng là:
(30+25)-(100-55)=10

2. Gọi A là số người nói tiếng I-ta-li-a.
B là số người nói tiếng Tây Ban Nha.
Xác suất để người đó nói tiếng Tây Ban Nha khi biết người đó nói Tiếng I-ta=li-a.
$P(A \setminus B) = P(AB) \div P(B) = 10 \div 25 = 0.4$

■

Bài 6.11

Một hộp chứa 5 pin trong đó có 2 pin bị hỏng. Một thanh tra chọn 2 pin một cách ngẫu nhiên từ hộp. Cô/anh ấy kiểm tra 2 mẫu hàng và quan sát cho dù các vật mẫu này có bị hỏng.
a. Viết không gian mẫu của tất cả các kết quả có thể có của thí nghiệm này. Hãy xác định cụ thể.
b. Các hộp sẽ không được chấp nhận nếu cả hai mặt hàng được lấy mẫu đều bị hỏng. Tính xác suất thanh tra sẽ từ chối hộp?

Bài giải

a. Gọi A_i là biến cố pin hỏng thứ i với i=1,2
B_j là biến cố pin tốt thứ j với j=1,2,3
Ω là không gian mẫu của thí nghiệm
$\Rightarrow \Omega = \{A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, A_1A_2, B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$
b. Thanh tra sẽ từ chối hộp khi cả hai mặt hàng được lấy mẫu đều bị hỏng. Vậy xác suất để thanh tra từ chối hộp là: $P(A_1A_2) = \frac{1}{10} = 10\%$

■

Bài 7.1

Một cuộc khảo sát về tiêu dùng một DVD cho là rất tốt hoặc tốt. Gọi A là đánh giá rất tốt và B là đánh giá tốt. Cho Pr(A)=0,22. Pr(B)=0,35 tìm
(a) $Pr(A^c)$
$(b)Pr(A \cup B)$
$(c)Pr(A \cap B)$

Bài giải

$Pr(A^c) = 1 - Pr(A) = 0,78$
$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) = 0,57$
$Pr(A \cap B) = 0$ (Do A và B là 2 biến cố xung khắc)

■

Bài 7.2

7.2 Một kỳ thi tuyển sinh bao gồm hai môn: Toán và tiếng Anh. Xác suất mà một sinh viên rớt toán là 0,20. Xác suất rớt tiếng Anh là 0,15, và xác suất thất bại cả hai môn này là 0,03. Xác suất mà các học sinh sẽ rớt ít nhất một trong các môn này?

Bài giải

A: là xác suất rớt môn Toán
B: là xác suất rớt môn tiếng Anh
Theo đề bài ta có: P(A)=0.20
P(B)=0.15
$P(A \cap B) = 0.03$
Vậy xác suất học sinh rớt ít nhất một môn là:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.20 + 0.15 - 0.03 = 0.32$

■

Bài 7.3

Giả sử A là biến cố "rút một con già" từ bộ bài 52 lá và B là biến cố "rút một con rô". Hỏi A và B có xung khắc nhau không? Tính $Pr(A \bigcup B)$.

Bài giải

A là biến cố "rút một con già".
B là biến cố "rút một con rô".
Hai biến cố A và B được gọi là hai biến cố xung khắc nếu chúng không đồng thời xảy ra trong một phép thử. Do đó hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \bigcap B = \emptyset$.
Theo giả thiết ta có $A \bigcap B = C$ (với C là biến cố "rút một con già rô").
Vì vậy A và B không xung khắc nhau.
Ta có $Pr(A) = \frac{4}{52}$. $Pr(B) = \frac{13}{52}$. $Pr(A \bigcap B) = \frac{1}{52}$
$Pr(A \bigcup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \bigcap B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$.
Vậy $Pr(A \bigcup B) = \frac{4}{13}$

■

Bài 7.4

Một cái bình bao gồm: 4 viên bi đỏ, 8 viên bi vàng và 6 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên một viên bi. Tính xác suất để viên bi được chọn là màu đỏ hoặc xanh.

Bài giải

Xác suất để viên bi được chọn có màu đỏ hoặc xanh là:

$$\frac{4+6}{4+8+6} = \frac{10}{18} = 0.556$$

■

Bài 7.5

Chứng minh rằng với hai biến cố A và B bất kì, ta có:
$Pr(A \cap B) \geq Pr(A) + Pr(B) - 1$

Bài giải

Ta có: $P(A \cup B) \leq 1$
$\Rightarrow -P(A \cup B) \geq -1$
$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$
$\Rightarrow P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

■

Bài 7.6

Một hộp chứa 2 quả bóng đỏ, 4 quả bóng xanh, 5 quả bóng trắng.
a) Xác suất lấy ngẫu nhiên đỏ là bao nhiêu?
b) Xác suất lấy ngẫu nhiên không đỏ là bao nhiêu?
c) Xác suất lấy ngẫu nhiên đỏ hoặc xanh là bao nhiêu?

Bài giải

a) Xác suất lấy bi đỏ trong hộp là: P(A)=$\frac{2}{11}$
b) Xác suất không lấy được bi đỏ là: P(B)=1-P(A)=1-$\frac{2}{11}$=$\frac{9}{11}$
c) Xác suất lấy được bi xanh hoặc đỏ là: P(C)=$\frac{2+4}{11}$=$\frac{6}{11}$

■

Bài 7.6

Một bình chứa 2 quả banh đỏ, 4 quả banh xanh và 5 quả banh trắng.

(a) R:"Một quả banh được bốc ngẫu nhiên và quả đó là màu đỏ". Tính xác suất để sự kiện R xảy ra?

(b) $\bar{R}$:"Một quả banh được bốc ngẫu nhiên và quả đó không phải là màu đỏ". Tính xác suất để sự kiện $\bar{R}$ xảy ra?

(c) Tính xác suất để một quả banh được bốc ngẫu nhiên là màu đỏ hoặc màu xanh?

Bài giải

(a) $P(R) = \dfrac{C_2^1}{C_{11}^1} = \dfrac{2}{11} \approx 0.182$

(b) $P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - \dfrac{2}{11} = \dfrac{9}{11}$

(c) C:"Quả bóng được rút ra ngẫn nhiên là quả màu đỏ hoặc màu xanh"
$P(C) = 1 - \dfrac{C_5^1}{C_{11}^1} = 1 - \dfrac{5}{11} = \dfrac{6}{11} \approx 0.545$

■

Bài 7.7

Trong một phép thử tung hai xúc xắc, E là biến cố tổng hai mặt là số chẵn và P là biến cố tổng hai mặt là số nguyên tố. Tính xác suất tổng của hai xúc xắc là chẵn hoặc nguyên tố

Bài giải

Các trường hợp xảy ra của E:
$(1,1);(2,2);(3,1);(1,3);(3,3);(4,2);(2,4);(5,1);(1,5);(4,4);(2,6);(6,2);(5,3);(3,5);$
$(5,5);(4,6);(6,4);(6,6)$
Các trường hợp xảy ra của P:
$(1,1);(1,2);(2,1);(2,3);(3,2);(1,4);(4,1);(1,6);(6,1);(2,5);(5,2);(3,4);(4,3);(5,6);(6,5)$
$P(E) = \frac{18}{36}$
$P(P) = \frac{15}{36}$
$P(P \bigcap E) = \frac{1}{36}$
Xác suất tổng của hai xũa xắc là chẵn howcj nguyên tố là:
$P(E \bigcup P) = P(E) + P(P) + P(P \bigcap E) = \frac{8}{9}$

■

Bài 7.8

Gọi S là không gian mẫu với A và B là hai biến cố có P(A) = 0.8 và P(B) = 0.9. Xác định xem A và B có xung khắc hay không?

Bài giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.8 + 0.9 - P(A \cup B) \\ &= 1.7 - P(A \cup B) \end{aligned}$$

Mà $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$
Nên $P(A \cap B) \geq 0.7 \neq 0$
Do đó A và B không phải là 2 biến cố xung khắc.

■

Bài 7.9

Một cuộc khảo sát của một nhóm cho thấy thói quen xem của mọi người theo thông tin sau:

- 28% người xem thể dục dụng cụ
- 29% người xem bóng rổ
- 19% người xem bóng đá
- 14% người xem thể dục và bóng rổ
- 12% người xem bóng rổ và bóng đá
- 10% người xem bóng đá và thể dục
- 8% người xem cả ba

Tìm xác suất số người mà không xem cả ba môn trong 1 năm qua.

Bài giải

- Xác suất số người xem của 3 bộ môn: $28 + 29 + 19 + 14 - 12 - 10 + 8 = 48\%$

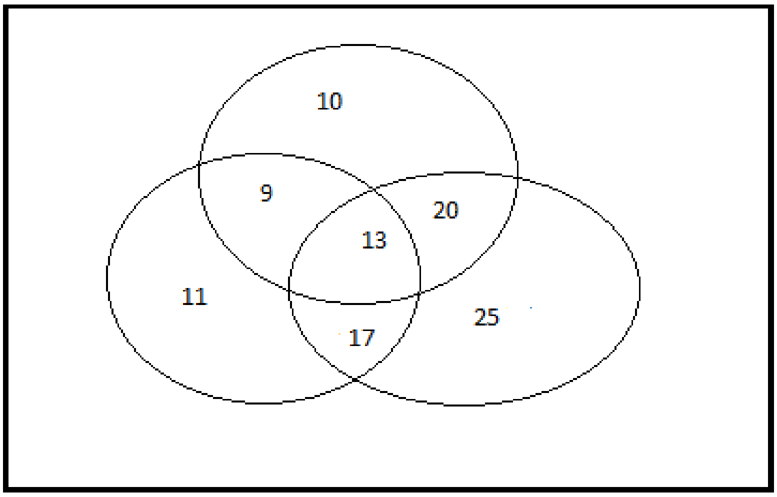
- Xác suất số người không xem môn nào: $100 - 48 = 52\%$

■

Bài 7.10

Xác suất một chuyến viếng thăm tới văn phòng một bác sĩ gia đình (PCP) có kết quả không giới thiệu tới làm việc trong phòng thí nghiệm cũng không giới thiệu tới chuyên gia là 35%. Trong số những người đến văn phòng PCP, 30% được giới thiệu tới chuyên gia, 40% được giới thiệu làm việc trong phòng thí nghiệm. Xác định xác suất một chuyến viếng thăm tới văn phòng PCP có kết quả bao gồm làm việc trong phòng thí nghiệm và giới thiệu tới chuyên gia?

Bài giải



Gọi A là biến cố được giới thiệu tới chuyên gia
Gọi B là biến cố được giới thiệu vào làm việc trong phòng thí nghiệm
Ta có P(A) = 0.4 và P(B) = 0.3
$1 = P(A) + P(B) - P(AB) + (1 - P((A \cup) B)) \Leftrightarrow 1 = 0.4 + 0.3 - P(AB) + 0.35 \Leftrightarrow P(AB) = 0.05$

■

Bài 7.11

Cho $Pr(A \cup B) = 0.7, Pr(A \cup B^c) = 0.9$, tìm Pr(A)

Bài giải

Pr(A∪B)=0.7 ⇔ Pr(A)+Pr(B)-Pr(A∩B)=0.7
Pr(A∪B^c)=0.9 ⇔ Pr(A)+Pr(B^c)-Pr(A∩B^c)=0.9
Pr(A∪B)+Pr(A∪B^c)= Pr(A)+Pr(B)-Pr(A∩B)+Pr(A)+Pr(B^c)-Pr(A∩B^c)=1.6(*)
Pr(B)+Pr(B^c)=1
Pr(A∩B)+Pr(A∩B^c)=Pr(A)
Thay vào (*), Pr(A∪B)+Pr(A∪B^c)=Pr(A)+1=1.6
Vậy Pr(A)=0.6

■

Bài 7.12

Trong một nhóm lớn các bệnh nhân hồi phục sau chấn thương vai, nó được thấy rằng $22^0\backslash_0$ lần dùng cả liệu pháp vật lý trị liệu và phương pháp nắn khớp xương, trong khi

$12^0\backslash_0$ không phải dùng cả hai. Xác suất một lần bệnh nhân dùng phương pháp nắn khớp xương vượt quá $14^0\backslash_0$ xác suất mà một bệnh nhân dùng liệu pháp vật lý trị liệu. Xác định xác suất mà một lựa chọn ngẫu nhiên thành viên của nhóm này dùng vật lý trị liệu.

Bài giải

C:xác suất bệnh nhân dùng phương pháp nắn xương
T:xác suất bệnh nhân dùng phương pháp vật lý trị liệu
Chúng ta có: $P(C) = P(T) + 0.14$
$P(C \cap T) = 0.22$
và $P(C^c \cap T^c) = P((C \cup T)^c) = 0.12$
Vì thế: $0.88 = P(C \cup T) = P(C) + P(T) - P(C \cap T)$
$= P(T) + 0.14 + P(T) - 0.22 = 2P(T) - 0.08$
$P(T) = \dfrac{0.88 + 0.08}{2} = 0.48$
Vậy xác suất bệnh nhân lựa chon phương pháp vật lý trị liệu là: $48^0\backslash_0$

■

Bài 7.13

Trong một mô hình hóa số lượng các đơn kiện của cá nhân về chính sách ô tô trong thời gian 3 năm, chuyên gia bảo hiểm làm cho các giả định đơn giản hóa, tất cả các số nguyên $n \geq 0, p_{n+1} = \dfrac{1}{5}.p_n$, với p_n là xác suất mà hồ sơ bảo hiểm thứ n khiếu nại trong suốt thời gian đó. Theo giả thiết này, tính xác suất có nhiều hơn 1 khiếu nại trong thời gian đó.

Bài giải

Ta có :
$p_n = \dfrac{1}{5}.p_{n-1} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2.p_{n-2} = \ldots = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n.p_0$ với n = 1,2,...
Ta có
$\sum_{n=k}^{\infty} p_n = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n.p_0 = 1$
Mặt khác ta có
$\sum_{n=k}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n.p_0 = p_0.\sum_{n=k}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = \dfrac{p_0}{1 - \dfrac{1}{5}} = p_0.\dfrac{5}{4}$ (vì $|\dfrac{1}{5}| < 1$)
Suy ra $p_0 = \dfrac{4}{5}$
$p_1 = \dfrac{1}{5}.p_0 = \dfrac{4}{25}$
Gọi A là biến cố "có nhiều hơn một khiếu nại"

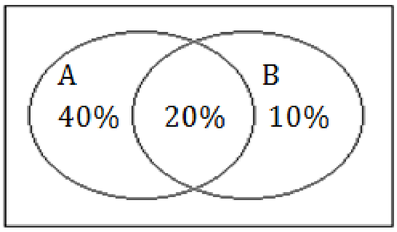
$p(A) = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}$
Vậy xác suất có nhiều hơn 1 khiếu nại trong thời gian đó là $\frac{1}{25}$.

■

Bài 7.14

Một nghiên cứu tiếp thị cho thấy 60% dân cư sở hữu xe ô tô, 30% sở hữu nhà và 20% sở hữu xe ô tô và nhà. Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người mà người đó sở hữu xe ô tô hoặc nhà mà không sở hữu cả hai.

Bài giải



Hình 5: Bài 7.14

Gọi A: là biến cố người đó sở hữu xe ô tô.
B: là biến cố người đó sở hữu nhà.
Sử dụng biểu đồ Venn, ta có Hình 3:
Xác suất chọn một người sở hữu nhà hoặc xe mà không sở hữu cả hai là:

$$40\% + 10\% = 50\%$$

■

Bài 7.15

Một đại lý bảo hiểm cung cấp bảo hiểm xe, bảo hiểm chủ nhà và bảo hiểm cho người thuê nhà. Việc mua bảo hiểm chủ nhà và mua bảo hiểm cho người thuê nhà là loại trừ lẫn nhau. Các thông tin về các đại lý khách hàng như sau:

i) 17% số khách hàng không có một trong ba loại bảo hiểm.

ii) 64% số khách hàng có bảo hiểm xe.

iii) Khách hàng có bảo hiểm cho người thuê nhà gấp hai lần khách hàng có bảo hiểm chủ nhà.

iv) 35% số khách hàng có hai trong số ba loại bảo hiểm.

v) 11% số khách hàng có bảo hiểm chủ nhà, nhưng không có bảo hiểm xe.

Tính phần trăm khách hàng của đại lý có cả bảo hiểm xe và bảo hiểm người thuê nhà.

Bài giải

Gọi H là biến cố khách hàng có bảo hiểm chủ nhà.
R là biến cố khách hàng có bảo hiểm người thuê nhà.
A là biến cố khách hàng có bảo hiểm xe.

i) $Pr((H \cup R \cup A)^c) = 0,17 \Rightarrow Pr(H \cup R \cup A) = 0,83$

ii) $Pr(A) = 0,64$

iii) $Pr(H) = 2Pr(R)$

iv) $Pr(A \cap H) - Pr(A \cap H \cap R) + Pr(A \cap R) - Pr(A \cap H \cap R) + Pr(H \cap R) - Pr(A \cap H \cap R) = Pr(A \cap H) + Pr(A \cap R) = 0,35$

v) $Pr(H \backslash A) = Pr(H \backslash (A \cap H)) = Pr(H) - Pr(A \cap H) = 0,11$
Ta có: $0,83 = Pr(H \cup R \cup A) = Pr(H) + Pr(R) + Pr(A) - Pr(H \cap R) - Pr(H \cap A) - Pr(R \cap A) + Pr(H \cap B \cap A) = 3Pr(R) + 0,64 - 0,35 \Rightarrow Pr(R) = 0,18$
$0,36 = Pr(H) = Pr(H \cap A) + Pr(H \backslash A) = Pr(H \cap A) = 0,11 \Rightarrow Pr(H \cap A) = 0,25$
Và: $Pr(A \cap R) = 0,35 - 0,25 = 0,1$

■

Bài 7.16

Cửa hàng bán nệm chỉ có nệm vua, hoàng hậu và nệm cỡ sinh đôi. Thống kê thấy một phần tư nệm hoàng hậu được bán so với nệm vua và sinh đôi kết hợp. Mẫu hoàng hậu gấp ba lần nệm cỡ sinh đôi. Tính khả năng bán các loại nệm.

Bài giải

Đặt: Q=Queen K=King T=Twin
Theo giả thuyêt ta có:

$$\begin{cases} P(Q) + P(K) + P(T) = 1 \\ P(K) = 3P(T) \\ P(Q) = \frac{1}{4}[P(K) + P(T))] \end{cases} \Leftrightarrow P(Q) = \frac{1}{4}[3P(T) + P(T)] \Leftrightarrow P(Q) = P(T)$$

Kết hợp giả thuyết trên:

Ta có: P(Q)+P(K)+P(T)=1
$\Leftrightarrow 3P(T) + P(T) + P(T) = 1$
$\Leftrightarrow 5P(T) = 1$
$\Leftrightarrow P(T) = 0.2$
$\Rightarrow P(Q) + P(K) = 0.8$
mà P(Q)=P(T)=0.2 nên P(K)=0.6

■

Bài 7.16

1 cửa hàng bán đệm với 3 cỡ lớn, nhỏ và vừa. Doanh thu cho thấy số đệm cỡ nhỏ bán ra bằng $\frac{1}{4}$ tổng số đệm cỡ lớn và cỡ vừa bán được. Đồng thời số đệm cỡ lớn bán ra bằng 3 lần số đệm cỡ vừa bán được. Tính xác suất để đệm được bán tiếp theo là đệm cỡ lớn hoặc cỡ nhỏ.

Bài giải

Gọi

A là biến cố đệm bán ra là cỡ lớn.

B là biến cố đệm bán ra là cỡ vừa.

C là biến cố đệm bán ra là cỡ nhỏ.

Gọi xác suất đệm cỡ vừa bán ra là: $P(B) = t$.
Suy ra, xác suất đệm cỡ lớn bán ra là: $P(A) = 3t$.
Xác suất đệm cỡ nhỏ bán ra là: $P(C) = \frac{1}{4}(3t + t) = t$.
Mà $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ nên $t = \frac{1}{5} = 0.2$.
Xác suất để đệm được bán tiếp theo là đệm cỡ lớn hoặc cỡ nhỏ là

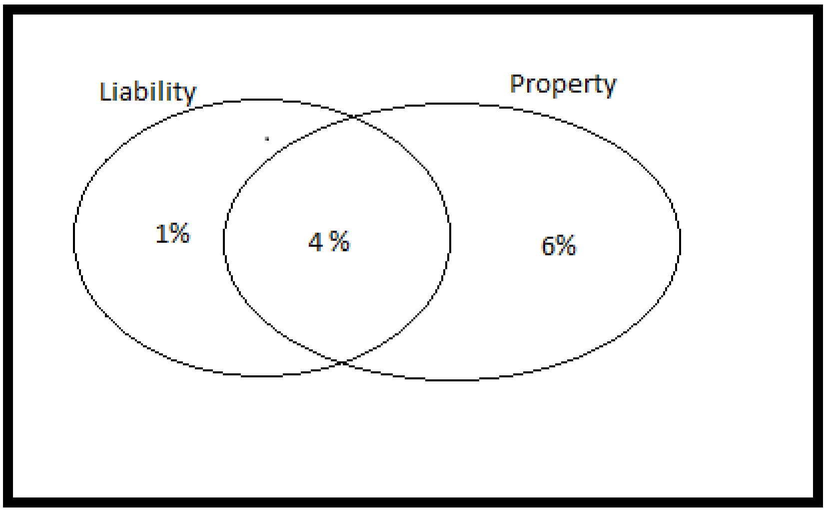
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 3t + t = 4t = 0.8.$$

■

Bài 7.17

Xác suất mà một thành viên của một lớp nào đó của chủ nhà có bảo hiểm trách nhiệm pháp lý và tài sản sẽ nộp đơn yêu cầu trách nhiệm là 0.04, và xác suất mà một thành viên của lớp này sẽ nộp đơn kiện bất động sản là 0,10. Xác suất mà một thành viên của lớp này sẽ nộp đơn kiện trách nhiệm nhưng không phải là một yêu cầu bồi thường tài sản là 0,01. Tính xác suất mà một thành viên được lựa chọn ngẫu nhiên của lớp này của chủ nhà sẽ không nộp đơn yêu cầu của một trong hai loại.

Bài giải



Xác suất mà một thành viên của lớp sẽ không nộp đơn yêu cầu của một trong hai loại là:
100% - ((10% - 4%) + 4% + 1%) = 89%

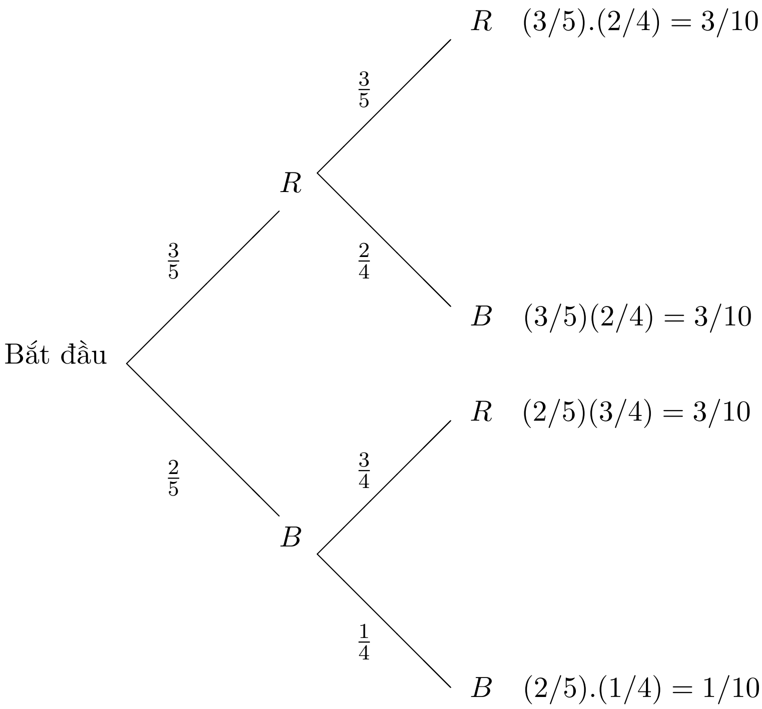
■

Bài 8.1

Một hộp có chứa 3 banh đỏ và 2 banh xanh. Chọn ngẫu nhiên 2 banh không hoàn lại. Dùng sơ đồ cây để biễu diễn các khả năng có thể xảy ra. Tính xác suất mỗi khả năng.

Bài giải

R : banh đỏ B : banh xanh

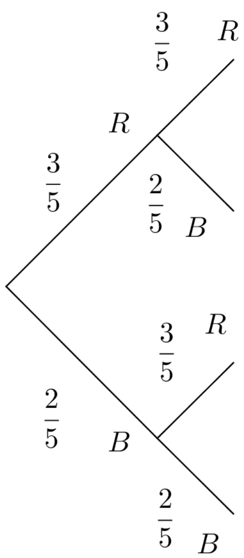


■

Bài 8.2

Một hộp bao gồm ba quả bóng màu đỏ và hai quả bóng màu xanh. Hai quả bóng đang được rút ra có hoàn lại. Sử dụng một sơ đồ cây để đại diện cho các kết quả khác nhau có thể xảy ra. Xác suất của từng kết quả là gì?

Bài giải



$Pr(RR) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$Pr(RB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$Pr(BR) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

$Pr(BB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

■

Bài 8.3

Một hộp chứa 3 viên bi đỏ và 2 viên bi xanh lá cây. Một thí nghiệm lấy ra một viên bi không hoàn lại cho đến khi thu được viên bi màu đỏ. Tìm xác suất của các trường hợp sau:
a. Chỉ cần lấy một lần
b. Cần lấy đúng hai lần
c. Cần lấy đúng ba lần

Bài giải

Gọi A_i là biến cố lấy được bi đỏ lần thứ i với $i = 1, 2, 3$
Gọi B_j là biến cố lấy được bi xanh lần thứ j với $j = 1, 2$

a. Xác xuất chỉ cần lấy một lần được bi đỏ là:
$P(A_1) = \frac{3}{5} = 0.6$
b. Do cần lấy đúng 2 lần và thí nghiệm dừng lại đến khi thu được viên bi màu đỏ nên ta có lần lấy đầu tiên sẽ được bi xanh, lần 2 là bi đỏ. Vậy xác suất cần lấy đúng 2 lần ở thí nghiệm trên là:
$P(B_1A_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 0.3$
c. Tương tự câu b, ta có 2 lần đàu lấy được bi xanh, lần thứ 3 lấy được bi đỏ. Vậy xác suất cần lấy đúng 3 lần ở thí nghiệm trên là:
$P(B_1B_2A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} = 0.1$

■

Bài 8.4

Xét một lọ 3 viên bi đen và 1 viên bi đỏ. Cuộc thử nghiệm lấy 2 trong số 4 viên bi mà hoàn lại. Xác suất lấy được lần đầu là bi đen, lần sau là bi đỏ là bao nhiêu?

Bài giải

Đặt A là biến cố :"Lấy được lần đầu là bi đen, lần sau là bi đỏ"
$P(A) = \frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

■

Bài 8.5

Một chiếc bình chứa hai quả bóng màu đen và một quả bóng màu đỏ. Hai quả bóng được rút ra hoàn lại. Xác suất mà cả hai quả bóng có màu đen là gì? Gỉa sử rằng các quả bóng là đều có khả năng được rút ra.

Bài giải

Xác suất để 2 lần lấy là bi đen(có hoàn lại)là: $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

■

Bài 8.6

Một hộp có chứa 4 quả bóng: 1 đỏ, 1 xanh, 1 vàng và 1 trắng. Lần lượt lấy ra không hoàn lại 2 quả bóng. Tính xác suất để nhận được 1 bóng đỏ và 1 bóng trắng. Biết rằng xác suất để nhận được các quả bóng là như nhau.

Bài giải

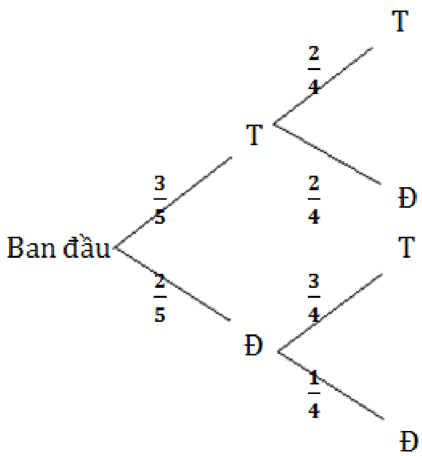
Gọi A là biến cố "nhận được 1 bóng đỏ và 1 bóng trắng".
$Pr(A) = \frac{C_1^1.C_1^1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$.
Vậy xác suất để nhận được 1 bóng đỏ và 1 bóng trắng là $\frac{1}{6}$.

∎

Bài 8.7

Một cái bình bao gồm 3 viên bi trắng và 2 viên bi đỏ. Hai viên bi được lần lượt lấy ra mà không hoàn lại. Vẽ biểu đồ cây cho thí nghiệm này và tính xác suất để 2 viên bi lấy ra có màu khác nhau. Giả sử các viên bi là như nhau trong lúc được chọn.

Bài giải



Hình 6: Bài 8.7

Xác suất chọn 2 viên bi khác màu là:
$P(\text{TĐ}) + P(\text{ĐT}) = (\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}) + (\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}) = \frac{3}{5} = 0.6$

∎

Bài 8.8-chưa giải

Một cái bình bao gồm 3 viên bi trắng và 2 viên bi đỏ. Hai viên bi được lần lượt lấy ra và đươc hoàn lại. Vẽ biểu đồ cây cho thí nghiệm này và tính xác suất để 2 viên bi lấy ra có màu khác nhau. Giả sử các viên bi là như nhau trong lúc được chọn.

<u>*Bài giải*</u>

■

Bài 8.9

Một hộp chứa 16 quả bóng màu đen và 3 quả bóng tím. Hai quả bóng lấy ra mà không hoàn lại. Tính xác suất khi lấy ra quả đầu tiên màu đen và sau là tím.

<u>*Bài giải*</u>

Xác suất để lần đầu tiên lấy được quả bóng màu đen là: P(A)=$\frac{16}{19}$
Xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu tím là: P(B)=$\frac{3}{18}$
Xác suất theo yêu cầu là: P=$\frac{16}{19}.\frac{3}{18}$=$\frac{8}{57}$

■

Bài 8.9

Một bình chứa 16 quả banh đen và 3 quả banh tím. Hai quả banh được bốc ra lần lượt không hoản trả lại. Tính xác suất để quả banh đầu bốc ra là màu đen và quả banh thứ hai bốc ra là màu tím?

<u>*Bài giải*</u>

Xác suất để quả banh đầu bốc ra là màu đen và quả banh thứ hai bốc ra là màu tím là:

$$\frac{C_{16}^1}{C_{19}^1} \times \frac{C_3^1}{C_{18}^1} = \frac{16}{19} \times \frac{3}{18} = \frac{8}{57} \approx 0.1403$$

■

Bài 8.12

Có 27 kiện hàng. Có 4 kiện hàng được bảo hiểm. Biết xác suất bốc trúng kiện hàng được bảo hiểm gấp đôi xác suất bốc trúng kiện hàng ko được bảo hiểm. Tính xác suất bốc trúng 2 kiện hàng được bảo hiểm

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là xác suất bốc trúng 1 kiện hàng được bảo hiểm
Xác suất bốc trúng kiện hàng ko được bảo hiểm là 1-X
Gọi $P(i = \overline{1,4})$ là xác suất có i kiện hàng được bảo hiểm
$P(0) = (1 - X)^4$

$P(1) = 4(1-X)^3X$
$P(2) = 6(1-X)^2X^2$
$P(3) = 4(1-X)X^3$
$P(4) = X^4$

Ta có : P(1)=2P(0)
$\Leftrightarrow 4(1-X)^3X = 2(1-X)^4$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow P(2) = \frac{24}{1}$

■

Bài 8.10

Một hội đồng quản trị của một trường đại học bao gồm 8 nam và 7 nữ. Một ủy ban gồm 3 người được lựa chọn một cách ngẫu nhiên và không có sự thay thế. Vai trò của Ủy ban là để chọn hiệu trưởng mới cho các trường đại học. Tính xác suất mà số lượng nam lựa chọn nhiều hơn số lượng nữ được lựa chọn.

Bài giải

Xác suất mà số lượng nam được chọn nhiều hơn số lượng nữ: $\frac{C_2^8 * C_1^7}{C_3^{15}} + \frac{C_3^8}{C_3^{15}} = \frac{36}{65}$

■

Bài 8.11

Một cửa hàng có 80 thiết bị tồn kho, 30 thiết bị đến từ nguồn A, số còn lại đến từ nguồn B. Trong số thiết bị đến từ nguồn A có 20% là bị hỏng. Trong số thiết bị đến từ nguồn B có 8% là bị hỏng.
Tính xác suất có chính xác 2 trong 5 thiết bị tồn kho ngẫu nhiên của cửa hàng là bị hỏng.

Bài giải

Số thiết bị hỏng từ nguồn A:

$$30(0.2) = 6$$

Số thiết bị hỏng từ nguồn B:

$$(80-30)(0.08) = 4$$

$\Longrightarrow$ Cửa hàng có 10 thiết bị hỏng và 70 thiết bị tốt
Chọn ngẫu nhiên 5 thiết bị từ cửa hàng trong đó có 2 thiết bị hỏng, ta có:

$$C_{10}^2 \text{ cách chọn 2 thiết bị hỏng và } C_{70}^3 \text{ cách chọn 3 thiết bị tốt}$$

Vậy xác suất để chọn 5 thiết bị trong đó có 2 thiết bị hỏng là:

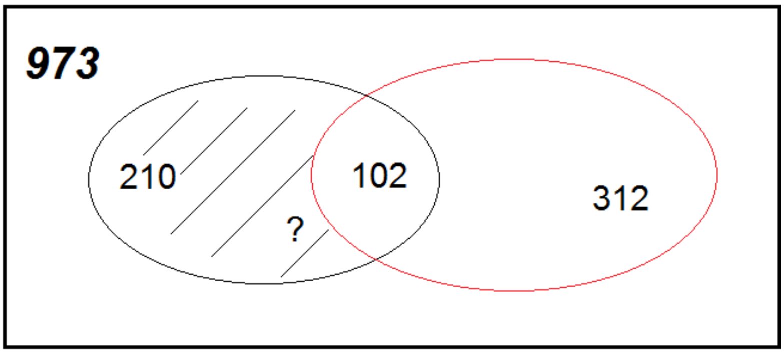
$$\frac{C_{10}^2 \cdot C_{70}^3}{C_{80}^5} = 0.102$$

■

Bài 9.1

Một nhà nghiên cứu ngành y tế cộng đồng kiểm tra bệnh án của một nhóm 937 những người đàn ông qua đời năm 1990 và phát hiện rằng 210 trong số những người đàn ông đã chết chết vì nguyên nhân liên quan đến bệnh tim. Hơn nữa,312 của 937 người đàn ông đã có ít nhất một cha mẹ bệnh tim, và 102 của 312 người đàn ông này đã chết vì nguyên nhân liên quan đến bệnh tim. Xác định xác suất mà một người đàn ông được lựa chọn ngẫu nhiên từ nhóm này đã chết vì nguyên nhân liên quan đến bệnh tim, biết rằng cha mẹ của người này không bị bệnh tim.

Bài giải



Gọi A_1 là biến cố có ít nhất một cha mẹ bệnh tim
A_2 là biến cố cha mẹ không bệnh tim
B_1 là biến cố chết vì nguyên nhân liên quan đến bệnh tim
B_2 là biến cố chết không vì nguyên nhân bệnh tim
Dựa theo hình vẽ, ta có số người đàn ông chết vì nguyên nhân liên quan đến bệnh tim và có cha mẹ không bệnh tim là: 210 - 102 = 108 người
Vậy xác suất chọn một người đàn ông nhóm trên đã chết vì nguyên nhân liên quan tới bệnh tim, biết rằng cha mẹ người này không bệnh tim là: $P(B_1|A_2) = \frac{P(A_2B_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{108}{937}}{\frac{(937-312)}{937}} = 0.1728$

■

Bài 9.2

Một công ty bảo hiểm khảo sát khách hàng bảo hiểm và được thông tin sau:
(i) Tất cả khách hàng bảo hiểm đều sở hữu ít nhất 1 xe hơi
(ii) 70% khách hàng có nhiều hơn 1 xe hơi
(iii) 20% khách hàng sở hữu xe thể thao
(iv) Trong tất cả các khách hàng sở hữu 1 xe hơi, có 15% sở hữu xe thể thao
Tính xác suất ngẫu nhiên chọn được khách hàng chỉ sở hữu 1 xe và xe đó không phải xe thể thao.

Bài giải

Gọi là biến cố: "Tất cả các khách hàng bảo hiểm tham gia khảo sát"
Goi A là biến cố: "Khách hàng chỉ sở hữu 1 xe"
Gọi B là biến cố: "Khách hàng sở hữu xe thể thao"
Ta có $Pr(A^c) = 0.7, Pr(B) = 0.2, Pr(B|A) = 0.15$
Theo định lí De-morgan $Pr(A \cap B^c) = Pr(A^c \cup B)$

■

Bài 9.3

9.3 Một chuyên gia nghiên cứu tỷ lệ của ba yếu tố rủi ro về sức khỏe, ký hiệu bằng A, B, và C, trong một nhóm phụ nữ. Đối với một trong ba yếu tố, xác suất là 0,1 rằng một người phụ nữ trong dân số chỉ có yếu tố rủi ro này (và không có những cái khác). Đối với bất kỳ hai trong ba yếu tố, xác suất là 0,12 mà cô ta có chính xác hai yếu tố rủi ro (mà không có cái khác). Xác suất rằng một người phụ nữ có tất cả ba yếu tố rủi ro, cho rằng cô có A và B, là 1/3. Xác suất mà một người phụ nữ không có ba yếu tố rủi ro là gì, cho rằng cô ấy không có rủi ro yếu tố A?

Bài giải

Xác suất nữ có một nhân tố rủi ro:
$P(A\overline{BC}) = P(\overline{A}B\overline{C} = P(\overline{AB}C) = 0.1$
Xác suất nữ có hai nhân tố rủi ro:
$P(AB\overline{C}) = P(A\overline{B}C) = P(\overline{A}BC) = 0.12$
Xác suất nữ có ba nhân tố rủi ro, biết rằng có A và B:
$P(ABC|AB) = \dfrac{1}{3} = \dfrac{P(ABC)}{AB} = \dfrac{P(ABC)}{P(ABC) + 0.12} \Rightarrow P(ABC) = 0.06$
Xác suất nữ không có cả hai nhân tố rủi ro, biết rằng không có A:
$P((A \cup B \cup C)^c \mid A^c) = \dfrac{P((A \cup B \cup C)^c}{P(A^c)} = \dfrac{P((A \cup B \cup C)^c)}{P(A^c}$
$= \dfrac{1 - P(A \cup B \cup C)}{1 - P(A)} = \dfrac{1 - P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(CB) + P(ABC)}{1 - P(A)}$

$$= \frac{1 - (0.1 + 0.12 \times 2 + 0.06) \times 3 - (0.12 + 0.06) \times 3 + 0.06)}{1 - (0.1 + 0.12 \times 3 + 0.06}$$
$$= 0.467$$

■

Bài 9.4

Cho $Pr(A) = \frac{2}{5}, Pr(A \bigcup B) = \frac{3}{5}, Pr(B|A) = \frac{1}{4}, Pr(C|B) = \frac{1}{3}$ và $Pr(C|A \bigcap B) = \frac{1}{2}$. Tìm $Pr(A|B \bigcap C)$.

Bài giải

- $Pr(A \bigcap B) = Pr(A).Pr(B|A) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$
- Ta có $Pr(A \bigcup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \bigcap B)$
  Suy ra $Pr(B) = Pr(A \bigcup B) - Pr(A) + Pr(A \bigcap B) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$
- $Pr(B \bigcap C) = Pr(B).Pr(C|B) = \frac{3}{10}.\frac{1}{3} = \frac{1}{10}$
- $Pr(A \bigcap B \bigcap C) = Pr(A).Pr(B|A).Pr(C|A \bigcap B) = \frac{2}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{20}$
- $Pr(A|B \bigcap C) = \frac{Pr(A \bigcap B \bigcap C)}{Pr(B \bigcap C)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{2}$
  Vậy $Pr(A|B \bigcap C) = \frac{1}{2}$

■

Bài 9.5

Một cuộc khảo sát 100 người về việc xem chương trình Tivi "Thuyết Big Bang". Kết quả của việc bỏ phiếu khảo sát được thể hiện trong bảng: (Hình 5)

(a) Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người là nam và có xem chương trình?

(b) Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người là nam?

(c) Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người có xem chương trình?

Xem / Giới tính	Có	Không	Tổng
Nam	19	41	60
Nữ	12	28	40
Tổng	31	69	100

Hình 7: Bài 9.5

(d) Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người có xem chương trình mà người đó là nam?

(e) Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người xem là nam?

Bài giải

Gọi A: là biến cố người đó là nam.
B: là biến cố người đó có xem chương trình.

(a) $P(AB) = \dfrac{19}{100} = 0.19$

(b) $P(A) = \dfrac{60}{100} = 0.60$

(c) $P(B) = \dfrac{31}{100} = 0.31$

(d) $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.19}{0.60} = 0.317$

(e) $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{0.19}{0.31} = 0.613$

■

Bài 9.6

Trong một bình chứa 22 viên bi: 10 màu đỏ, màu xanh lá cây 5, và 7 màu cam. Bạn hãy chọn hai viên bi ngẫu nhiên mà không cần thay thế. Tính xác suất mà viên đầu tiên được chọn là màu đỏ và viên thứ thứ hai được chọn là màu da cam?

Bài giải

Ta có: 10 bi đỏ, 5 bi xanh lá cây, 7 bi cam.
Áp dụng công thức xác suất đồng thời:
⇒Xác suất nhận được bi đỏ đầu tiên và bi cam thứ 2: $\frac{10}{22}$ x $\frac{7}{21} \approx 0,151$.

■

Bài 9.7

Bạn tung hai con xúc sắc. Tìm xác suất mà tổng hai mặt là 6 biết rằng hai mặt của xúc sắc khác nhau

<u>*Bài giải*</u>

$\Omega = 30$
A: "Tổng hai mặt xúc sắc bằng 6 và hai mặt khác nhau"
A = (1;5),(5;1),(2;4),(4;2)
$\Rightarrow$ P(A) = $\frac{4}{30}$ = 0.133

■

Bài 9.7

Thảy 2 con xúc xắc đồng chất. Tìm xác suất có điều kiện rằng tổng 2 mặt là 6, cho biết số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc là khác nhau.

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X biểu diễn sự kiện số chấm xuất hiện trên mỗi xúc xắc khác nhau.
Gọi Y biểu diễn sự kiện tổng số chấm xuất hiện trên 2 xúc xắc là 6.
Chú ý rằng, trong các cặp giá trị có thể có của X và Y thì có 6 cặp giá trị mà số chấm xuất hiện trên 2 xúc sắc là như nhau. Do đó

$$P(X) = \frac{36-6}{36} = \frac{30}{36}.$$

Nếu tổng số chấm xuất hiện trên 2 xúc xắc là 6, thì chỉ có 4 cặp giá trị thỏa mãn sự kiện số chấm trên mỗi xúc xắc khác nhau, đó là $\{(1,5);(5,1);(2,4);(4,2)\}$. Do đó

$$P(Y \cap X) = \frac{4}{36}.$$

Do đó, xác suất có điều kiện rằng tổng 2 mặt là 6, cho biết số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc khác nhau là

$$P(Y \mid X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)} = \frac{4/36}{30/36} = \frac{4}{30} = 0.1333.$$

■

Bài 9.8

Một máy sản xuất những hũ nhỏ để nướng tương. Xác suất những hũ có hình dạng hoàn hảo là 0,9. Xác suất để những hũ bị lỗi mà nhà sản xuất không phát hiện là 0,02. Xác suất để những hũ bị lỗi mà nhà sản xuất phát hiện là 0,08. Những cái hũ phải vượt qua 1 cái máy kiểm tra lỗi tự động mà có thể nhận ra những cái hũ bị lỗi và loại bỏ chúng. Xác suất mà có một cái hũ được vận chuyển sử dụng có hình dạng hoàn hảo.

Bài giải

Gọi:
A_1: hũ hoàn hảo
A_2: hũ bị lỗi, không bị phát hiện
A_1: hũ bị lỗi, bị phát hiện
B: qua hệ thống của máy kiểm tra lỗi
B= $A_1 + A_2$
$P(A_1) = 0,9$
$P(A_2) = 0,02$
$P(A_3) = 0,08$
$P(A_1|B) = P(A_1|(A_1 + A_2)) = \dfrac{P(A_1(A_1 + A_2))}{P(A_1) + P(A_2)} = \dfrac{0,9}{0,9 + 0,02} = 0,9782$

■

Bài 9.9

Một hộp có chứa 225 bi trắng và 15 bi đen. Nếu chúng ta chọn ngẫu nhiên không hoàn lại 2 bi từ hộp, tính xác suất cả 2 bi được chọn đều là màu đen.

Bài giải

Gọi $A_i(i = 1, 2) = \{$chọn được bi đen ở lần thứ i$\}$
Khi đó,

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{14}{239} \cdot \frac{15}{240} = \frac{7}{1972}$$

Vậy xác suất để chọn được 2 bi đen là $\frac{7}{1972}$

■

Bài 9.10

Tính xác suất bốc ngẫu nhiên 2 lá già từ 52 lá bài :
a) Không hoàn lại
b) Hoàn lại

Bài giải

a) Xác suất bốc 2 là già không hoàn lại là : $\frac{C_4^1 C_3^1}{C_{52}^1 C_{51}^1} = \frac{1}{221}$

b) Xác suất bốc 2 là già hoàn lại là :$\frac{C_4^1 C_4^1}{C_{52}^2} = \frac{1}{169}$

■

Bài 9.11

Một hộp đèn hình chứa 20 ống, trong đó có 5 cái bị lỗi. Nếu ba trong số các ống này được chọn ngẫu nhiên và lấy ra liên tiếp không hoàn lại. Xác suất 3 ống lấy ra đều bị lỗi.

Bài giải

Xác suất lấy liên tiếp không hoàn lại được cả 3 ống bị lỗi đều bị lỗi là: $\frac{5}{20} \times \frac{4}{19} \times \frac{3}{18} = \frac{1}{114} = 0.0088$

■

Bài 9.12

Một cuộc nghiên cứu về lý thuyết và thực hành lái xe cho thấy rằng 40% của các vụ tai bạn gây chết người do những người học lý thuyết. 1% trong số những vụ tai nạn thì chết người, và những người học thực hành thì gây ra 20%. Tìm phần trăm số tai nạn không chết người được gây ra bởi những người không học lý thuyết

Bài giải

Gọi A là biến cố: "Tai nạn gây chết người"
B là biến cố:"Người học lý thuyết"
Ta có Pr(A)=0,01; Pr(B)

■

Bài 9.13

Một nhà sản xuất truyền hình mua ống truyền từ ba nguồn. Nguồn A cung cấp 50% của tất cả các ống và có tỷ lệ lỗi 1%. Nguồn B cung cấp 30% của tất cả các ống và có tỷ lệ lỗi là 2%. Nguồn C cung cấp cho 20% còn lại của ống và có tỷ lệ lỗi 5%. (a) Xác suất mà một ống mua lựa chọn ngẫu nhiên là bị lỗi là gì? (b) Cho rằng một ống mua là khiếm khuyết, xác suất nó đến nguồn từ A? Từ nguồn B? Từ nguồn C? là bao nhiêu?

Bài giải

Một nhà sản xuất TV mua ống TV từ 3 nguồn trong đó:
Nguồn A cung cấp $50^0\backslash_0$, ống lỗi $1^0\backslash_0$.
Nguồn B cung cấp $30^0\backslash_0$, ống lỗi $2^0\backslash_0$.
Nguồn C cung cấp $20^0\backslash_0$, ống lỗi $3^0\backslash_0$.
Gọi H là biến cố ống bị lỗi.
$P(A) = 50^0\backslash_0$; $P(H|A) = 1^0\backslash_0$.
$P(B) = 30^0\backslash_0$; $P(H|B) = 2^0\backslash_0$.
$P(C) = 20^0\backslash_0$; $P(H|C) = 3^0\backslash_0$.
a)Xác suất để chọn được ông TV bị lỗi là: $P(H) = P(A)P(H|A) + P(B)P(H|B) + P(C)P(H|C) = 0.5 \times 0.01 + 0.3 \times 0.02 + 0.2 \times 0.03 = 2.1^0\backslash_0$
b)
Xác suất ống lỗi từ nguồn A là:
$P(A|H) = \dfrac{P(H|A)P(A)}{P(H)} = \dfrac{0.5 \times 0.01}{0.021} = 0.2381$
Xác suất ống lỗi từ nguồn B là:
$P(B|H) = \dfrac{P(H|B)P(B)}{P(H)} = \dfrac{0.3 \times 0.02}{0.021} = 0.2850$
Xác suất ống lỗi từ nguồn C là:
$P(C|H) = \dfrac{P(H|C)P(A)}{P(H)} = \dfrac{0.2 \times 0.03}{0.021} = 0.4762$

■

Bài 9.14

Trong một thị trấn nào đó ở Hoa Kỳ, 40% dân số là người tự do và 60% là những người bảo thủ. Hội đồng thành phố đã đề xuất bán rượu lậu ở thị trấn. Được biết, 75% số người bảo thủ và 30% người tự do ủng hộ đề xuất này.
a) Tính xác suất chọn ngẫu nhiên từ cư dân thị trấn ủng hộ đề xuất này ?
b) Nếu người được chọn ngẫu nhiên ủng hộ đề xuất này, tính xác suất người đó là người tự do ?
c) Nếu người được chọn ngẫu nhiên không ủng hộ đề xuất này, tính xác suất người đó là người tự do ?

Bài giải

Gọi A là biến cố "người tự do"
B là biến cố "người bảo thủ"
C là biến cố "ủng hộ đề xuất"
D là biến cố "không ủng hộ đề xuất"
Theo đề bài ta có
$P(A) = 0.4$ $\qquad P(B) = 0.6$
$P(C|A) = 0.3$ $\qquad P(C|B) = 0.75$
Suy ra

$P(D|A) = 0.7$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P(D|B) = 0.25$

- câu a
  Xác suất chọn ngẫu nhiên từ cư dân thị trấn ủng hộ đề xuất này
  $P(C) = P(C|A).P(A) + P(C|B).P(B) = 0.3 \times 0.4 + 0.75 \times 0.6 = 0.57$

- câu b
  Nếu người được chọn ngẫu nhiên ủng hộ đề xuất này, xác suất người đó là người tự do
  Ta cần tính P(A|C)
  $P(A|C) = \dfrac{P(A \bigcap C)}{P(C)} = \dfrac{P(C|A) \times P(A)}{P(C)} = \dfrac{0.3 \times 0.4}{0.57} = 0.211$

- câu c
  Nếu người được chọn ngẫu nhiên không ủng hộ đề xuất này, xác suất người đó là người tự do
  Ta cần tính P(A|D)
  $P(A|D) = \dfrac{P(A \bigcap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)} = \dfrac{P(D|A) \times P(A)}{1 - P(C)} = \dfrac{0.7 \times 0.4}{1 - 0.57} = 0.651$

■

Bài 10.1

b10.1 Một công ty bảo hiểm tin rằng, người lái xe được chia làm 2 loại: những người có nguy cơ tai nạn cao và những người có nguy cơ tai nạn thấp. Thống kê cho thấy xác suất 1 người lái xe có nguy cơ tai nạn cao trong 1 năm là 0.4, trong khi xác suất là 0.2 cho người lái xe có nguy cơ tai nạn thấp.

(a) Nếu chúng ta giả sử rằng 30% dân cư có nguy cơ tai nạn cao. Tính xác suất 1 hợp đồng bảo hiểm mới dành cho một tai nạn trong một năm (Tính xác suất tai nạn trong 1 năm).

(b) Giả sử có một bảo hiểm dành cho một tai nạn trong một năm. Tính xác suất để nó là nguy cơ bị tai nạn cao.

Bài giải

Gọi $\quad F$: là biến cố bị tai nạn trong 1 năm.
A: là biến cố có nguy cơ bị tai nạn cao.
$\bar{A}$: là biến cố có nguy cơ bị tai nạn thấp.
$P(F \mid A) = 0.4 \qquad P(F \mid \bar{A}) = 0.2$
$P(A) = 0.3 \qquad P(\bar{A}) = 0.7$

a) Xác suất tai nạn trong 1 năm:
$P(F) = P(F \mid A).P(A) + P(F \mid \bar{A}).P(\bar{A}) = (0.4\,.\,0.3) + (0.2\,.\,0.7) = 0.26$

b) Xác suất có nguy cơ bị tai nạn cao trong 1 năm là:
$P(A \mid F) = \dfrac{P(FA)}{P(F)} = \dfrac{P(F \mid A).P(A)}{P(F)} = \dfrac{0.4\,.\,0.3}{0.26} = \dfrac{0.12}{0.26} = \dfrac{6}{13}$

■

Bài 10.2

Một công ty bảo hiểm ô tô, bồi thường cho người lái xe, ở tất cả các độ tuổi. Một nhân viên bảo hiểm, biên soạn theo thống kê trên số người lái xe, có bồi thường của công ty. Chọn ngẫu nhiên một người lái xe, được bồi thường của công ty khi có một tai nạn.

Tuổi của người lái	Xác suất người bị tai nạn	Phần bồi thường của công ty cho người lái xe
$16 \to 20$	0,06	0,08
$21 \to 30$	0,03	0,15
$31 \to 65$	0,02	0,49
$66 \to 99$	0,04	0,28

Tính xác suất để người đó có độ tuổi là 16-20.

Bài giải

Gọi A là biến cố bồi thường của công ty.
B là biến cố tai nạn ở độ tuổi từ $16-20$ tuổi.
$P_1 = P(A \mid B)P(B) = 0,08.0,06 = 0,0048$.
C là biến cố tai nạn ở độ tuổi từ 21-30 tuổi.
$P_2 = P(A \mid C)P(C) = 0,15.0,03 = 0,0045$.
D là biến cố tai nạn ở độ tuổi từ 31-65 tuổi.
$P_3 = P(A \mid D)P(D) = 0,49.0,02 = 0,0098$.
E là biến cố tai nạn ở độ tuổi từ 66- 99 tuổi.
$P_4 = P(A \mid E)P(E) = 0,25.0,04 = 0,0112$.

i) Xác suất được đền bù của một người lái xe của công ty bảo hiểm là:
$P(A) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0,0303$

ii) Xác suất để người lái xe đó ở độ tuổi từ 16-20 tuổi là:
$P(B \mid A) = \dfrac{P(B.A)}{P(A)} = \dfrac{P(A \mid B).P(B)}{P(A)} = \dfrac{0,08.0,06}{0,0303} = 0,158$

■

Bài 10.3

Một chính sách của công ty bảo hiểm bảo hiểm về nhân thọ có ba loại: tiêu chuẩn, ưa đãi, siêu ưa đãi. Những người tham gia bảo hiểm của công ty, 50% tiêu chuẩn, 40% ưa đãi và 10% siêu ưa đãi
Mỗi người tham gia bảo hiểm loại tiêu chuẩn có xác suất chết là 0.01 trong năm tiếp theo
Mỗi người tham gia bảo hiểm loại ưa đãi có xác suất chết là 0.005 trong năm tiếp theo
Mỗi người tham gia bảo hiểm loại siêu ưa đãi có xác suất chết là 0.001 trong năm tiếp theo
Một người tham gia bảo hiểm chết trong năm tiếp theo. Tìm xác suất mà người tham gia bảo hiểm là loại siêu ưu đãi?

Bài giải

Gọi S: biến cố người tham gia bảo hiểm loại tiêu chuẩn
P: biến cố người tham gia bảo hiểm loại ưa đãi
U: biến cố người tham gia bảo hiểm loại siêu ưa đãi
D: biến cố người tham gia bảo hiểm đã chết
P(S) = 0.5; P(D) = 0.4; P(U) = 0.1

$$\begin{cases} \text{P(D|S)=0.01} \\ \text{P(D|P)=0.005} \\ \text{P(D|U)=0.001} \end{cases}$$

Xác suất người mua bảo hiểm đã chết:
P(D) = P(D|S).P(S) + P(D|P).P(P) + P(D|U).P(U) = $7.1\text{x}10^{-3}$
⇒ Xác suất người mua bảo hiểm siêu ưu đãi khi biết người đó đã chết:
P(D|S) = $\frac{P(UD)}{P(D)} = \frac{P(D|U).P(U)}{P(D)} = 0.0141$

■

Bài 10.3

Một công ty bảo hiểm đưa ra những điều khoản cho bảo hiểm nhân thọ cho 3 loại bảo hiểm riêng biệt: chuẩn, ưu đãi và siêu ưu đãi. Trong những người mua bảo hiểm của công ty thì có 50% là chuẩn, 40% là ưu đãi và 10% là siêu ưu đãi.Mỗi người mua bảo hiểm loại chuẩn, ưu đãi và siêu ưu đãi thì xác suất qua đời trong năm tới lần lượt là 0.010, 0.005 và 0.001.
Giả sử một người mua bảo hiểm qua đời trong năm tới. Tính xác suất để người qua đời đó thuộc loại bảo hiểm siêu ưu đãi?

Bài giải

A: bảo hiểm loại chuẩn. $P(A) = 0.5$
B: bảo hiểm loại ưu đãi. $P(B) = 0.4$
C: bảo hiểm loại siêu ưu đãi $P(C) = 0.1$

D: "Người mua bảo hiểm qua đời"
Ta có: $P(D|A) = 0.01, \quad P(D|B) = 0.005, \quad P(D|C) = 0.001$

Xác suất để người mua bảo hiểm qua đời là:
$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$

$= 0.01 \times 0.5 + 0.005 \times 0.4 + 0.001 \times 0.1 = 7.1 \times 10^{-3}$
Xác suất để người qua đời thuộc loại bảo hiểm siêu ưu đãi là:
$P(C|D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \dfrac{0.001 \times 0.1}{7.1 \times 10^{-3}} = \dfrac{1}{71} \approx 0.0141$

■

Bài 10.4

Khi đến phòng cấp cứu của bệnh viện, bệnh nhân được phân loại theo tình trạng của họ là nguy kịch, nguy hiểm và ổn định. Trong năm qua:
i) 10% bệnh nhân của phòng cấp cứu là nguy kịch
ii) 30% bệnh nhân của phòng cấp cứu là nguy hiểm
iii) phần bệnh nhân còn lại là ổn định
iv) 40% bệnh nhân nguy kịch chết
v) 10% bệnh nhân nguy hiểm chết
vi) 1% bệnh nhân ổn định chết
Giả sử một người bệnh còn sống thì xác suất người bệnh nhân đó đươc phân loại là nguy hiểm

Bài giải

Gọi:
A: bệnh nhân sống sót
B: bệnh nhân nghiêm trọng
C: bệnh nhân nguy kịch
D: các trường hợp ổn định
$P(B) = 0,3$
$P(C) = 0,1$
$P(D) = 1 - 0,3 - 0,1 = 0,6$
$P(A|B) = 1 - 0,1 = 0,9$
$P(A|C) = 1 - 0,4 = 0,6$
$P(A|D) = 1 - 0,01 = 0,09$
Áp dụng định lý Bays ta có:
$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|C)P(C)+P(A|D)P(D)} = 0,29$

■

Bài 10.5

Một cuộc nghiên cứu về y tế theo dõi sức khỏe của một nhóm người trong 5 năm. Lúc bắt đầu nghiên cứu có 20% người nghiện thuốc lá nghiêm trọng, 30% người hút ít và 50% không hút thuốc lá.
Kết quả nghiên cứu cho thấy rằng trong số người chết trong 5 năm thì số người hút ít bằng 2 lần số người không hút thuốc nhưng chỉ bằng $\frac{1}{2}$ số người nghiện hút nghiêm trọng.
Chọn ngẫu nhiên 1 người chết trong 5 năm. Tính xác suất người này là nghiện hút nghiêm trọng.

Bài giải

Ta đặt:

H = {người được chọn nghiện hút nghiêm trọng}
L = {người được chọn hút ít}
N = {người được chọn không hút thuốc}
D = {người được chọn là người chết trong vòng 5 năm}

Ta cần tìm $P(H|D)$.
Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} P(H) &= 0.2, P(L) = 0.3, P(N) = 0.5 \\ P(D|L) &= 2P(D|N) \\ P(D|L) &= \frac{1}{2}P(D|H) \\ \Rightarrow P(D|H) &= 4P(D|N) \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|H)P(H) + P(D|L)P(L) + P(D|N)P(N) \\ &= (0.8)P(D|N) + (0.6)P(D|N) + (0.5)P(D|N) \\ &= (1.9)P(D|N) \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Bayes, ta được:

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)} = \frac{4P(D|N)0.2}{1.9P(D|N)} = 0.42$$

Vậy xác suất cần tìm là 0.42

■

Bài 10.6

Một chuyên viên thống kê cho biết thông tin về những vụ tai nạn trong năm qua tùy theo mỗi độ tuổi như sau :
Trẻ chiếm 8%
Trưởng thành chiếm 16%
Trung niên chiếm 45%
Già chiếm 31%
Trong đó xác suất có ít nhất 1 người xảy ra va chạm của mỗi kiểu người là :
Trẻ 0.15
Trưởng thành 0.08
Trung niên 0.04
Già 0.05
Cho rằng mỗi người lái xe đã tham gia ít nhất một vụ va chạm trong năm qua, xác suất mà người lái xe là người trường thành là bao nhiêu ?

Bài giải

Đặt biến cố người trẻ, trưởng thành, trung niên, già lần lượt là A1,A2,A3,A4
Đặt B là biến cố xảy ra tai nạn

Ta có : P(A1)=0.08 P(A2)=0.16 P(A3)=0.45 P(A4)=0.31
P(B|A1)=0.15 P(B|A2)= 0.08 P(B|A3)=0.04 P(B|A4)=0.05
P(B)= P(B|A1)P(A1) + P(B|A2)P(A2) +P(B|A3)P(A3) + P(B|A4)P(A4)= 0.0583 Xác xuất người trưởng thành bị tai nạn trong số người bị tai nạn là :
P(A2|B)=$\frac{P(A2\cap B}{P(B)} = \frac{P(A2)P(B|A2)}{P(B)} = 0.22$

■

Bài 10.7

Một xét nghiệm máu cho thấy sụ hiện diện của một căn bệnh cụ thể chiếm 95% thời gian khi mà nó hiện diện. Các thử nghiệm tương tự chỉ ra sự hiện diện của căn bệnh này chiếm 0.5% thời gian khi mà nó không hiện diện. 1% dân số có bệnh. Tính xác suất để một người có bệnh biết rằng các thử nghiệm cho thấy có sự hiện diện của bệnh.

Bài giải

Gọi B: là biến cố có bệnh. P(B) = 0.01
$\bar{B}$: là biến có không bệnh. $P(\bar{B}) = 0.99$
H: là biến cố căn bệnh hiện diện.
$\bar{H}$: là biến cố căn bệnh không hiện diện.
P(H|B) = 0.95
$P(H|\bar{B}) = 0.005$

P(B|H) = ???
Xác suất để một người có bệnh biết rằng căn bệnh đó hiện diện là:
Áp dụng định lí Bayes với họ biến cố đầy đủ là B và $\bar{B}$:

$$P(B|H) = \frac{P(H|B) \times P(B)}{P(H|B) \times P(B) + P(H|\bar{B}) \times (P(\bar{B})}$$

$$P(B|H) = \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.005 \times 0.99} = 0.657$$

■

Bài 10.8

Tỉ lệ ngẫu nhiên chọn được 1 người đàn ông có vấn để về tim là 0.25. Những người đàn ông có vấn đề về tim mà hút thuốc thì gấp đôi những người không có vấn để về tim mà hút thuốc. Trong số những người đàn ông có hút thuốc, tìm xác suất để những người này có vấn đề về tim.

Bài giải

Đặt A:"Biến cố người đàn ông có vấn đề về tim"
B:"Biến cố người đàn ông hút thuốc"
Ta có: $P(B|A) = 2P(B|\bar{A}) = 0.25$
$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A)+P(\bar{A}).P(B|\bar{A})}$
Thay $P(B|A) = 2P(B|\bar{A}) = 0.25$ vào, rút gọn ta được
$P(A|B) = \frac{2P(A)}{2P(A)+P(\bar{A})}$=0.4

■

Bài 10.9

Một nghiên cứu về tai nạn ô tô sản xuất các dữ liệu sau đây:

Nm	Tl	$Xcsuttainn$
1997	0.16	0.05
1998	0.18	0.02
1999	0.20	0.03
$Other$	0.46	0.04

Một ô tô từ một trong những mô hình năm 1997, 1998, và 1999 đã liên quan vào một tai nạn. Xác định xác suất mà năm mô hình ô tô này là năm 1997.

Bài giải

A: biến cố xe model 1997
B: biến cố xe model 1998
C: biến cố xe model 1999
T: biến cố gây tai nạn
Ta có:
$P(T|A) = 0.05$; $P(T|B) = 0.02$; $P(T|C) = 0.03$
Apa dụng công thưc Bayes:
Xác suất xe gây tai nạn model 1997 là:
$P(A|T) = \dfrac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B) + P(T|C)P(C)} = \dfrac{0.05 \times 0.16}{0.05 \times 0.16 + 0.02 \times 0.18 + 0.03 \times 0.2}$
$= 0.45$

■

Bài 10.10

Một cuộc khảo sát nghiên cứu về mức độ gây ô nhiễm từ các xe ô tô trong một thị trấn nào đó. Nghiên cứu cho thấy rằng có 25% số xe ô tô gây ô nhiễm. Được biết xác suất cho một ô tô gây ô nhiễm nhưng không bị kiểm tra là 0.99, xác suất cho một ô tô không gây ô nhiễm nhưng không bị kiểm tra là 0.17. Chọn ngẫu nhiên một ô tô, nếu ô tô được chọn là chiếc không bị kiểm tra, tính xác xuất để ô tô đó là chiếc gây ô nhiễm?

Bài giải

Gọi A là biến cố "ô tô gây ô nhiễm "
B là biến cố "ô tô không gây ô nhiễm"
C là biến cố "bị kiểm tra"
D là biến cố "không bị kiểm tra"
Theo đề bài ta có
$P(A) = 0.25$ $P(B) = 0.75$
$P(D|A) = 0.99$ $P(D|B) = 0.17$
Nếu ô tô được chọn là chiếc không bị kiểm tra, xác xuất để ô tô đó là chiếc gây ô nhiễm
$$P(A|D) = \frac{P(A \bigcap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A) \times P(A)}{P(D|A) \times P(A) + P(D|B) \times P(B)}$$
$$= \frac{0.99 \times 0.25}{0.99 \times 0.25 + 0.17 \times 0.75} = 0.66$$

■

Bài 10.11

Một cơ quan y học đang nghiên cứu về kết quả của sự chấn thương từ các hoạt động của một nhóm người. Trong đó có:

- – 50% người chơi trượt tuyết

– 30% người chơi đi bộ đường dài

– 20% người chơi đá bóng

Xác suất của 1 người bị chấn thương do trượt tuyết là 30%, 10% do đi bộ đường dài và 20% do chơi đá bóng.

a) Tính xác suất chọn ngẫu nhiên 1 người trong nhóm bị thương.

b) Chọn 1 người bị thương. Tính xác suất để sự bị thương đó là do trượt tuyết.

Bài giải

Gọi: A là biến cố bị thương
B là biến cố người trượt tuyết
C là biến cố người đi bộ
D là biến cố người chơi bóng đá
$Pr(B) = 0.5, Pr(C) = 0.3, Pr(D) = 0.2$
$Pr(A \mid B) = 0.3, Pr(A \mid C) = 0.1, Pr(A \mid D) = 0.2.$

a) $Pr(A) = Pr(A \mid B).Pr(B) + Pr(A \mid C).Pr(C) + Pr(A \mid D).P(D) = 0.22.$

b) $Pr(B \mid A) = \frac{Pr(AB)}{Pr(A)} = \frac{Pr(A|B).Pr(B)}{P(A)} = \frac{15}{22}.$

■

Bài 10.12

Một kì kiểm tra lý thuyết lái xe, được phân ra đậu hoặc rớt. Chọn ngẫu nhiên 1 người từ lớp lái xe, thì có 40% người biết nguồn tài liệu. Nếu 1 người biết nguồn tài liệu, thì xác suất người đó có thể đậu là 0,8. Một người không biết nguồn tài liệu thì xác suất người đó có thể đậu là 0,4.

a) Tính xác suất khi chọn ngẫu nhiên một người trong lớp mà đậu kì thi.

b) Chọn ngẫu nhiên một người đậu kì thi. Tính xác suất để người đó biết nguồn tư liệu.

Bài giải

A_1 là biến cố có nguồn tài liệu.
A_2 là biến cố không có nguồn tài liệu.
B là biến cố đậu kì thi.

a) Xác suất chọn ngẫu nhiên một người vượt qua kì thi:

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B \mid A_1).P(A_1) + P(B \mid A_2).P(A_2)\\ &= 0,8.0,4 + 0,4.0,6\\ &= 0,56\end{aligned}$$

b) Xác suất để một người biết nguồn tư liệu khi người đó đậu:

$$\begin{aligned}P(A_1 \mid B) &= \frac{P(A_1.B)}{B}\\ &= \frac{P(B \mid A_1).P(A_1)}{P(B)}\\ &= \frac{0,8.0,4}{0,56} = 0,5714\end{aligned}$$

■

Bài 10.13

Mười phần trăm của người tham gia bảo hiểm nhân thọ của công ty là những người hút thuốc. Phần còn lại là những người không hút thuốc. Đối với mỗi người không hút thuốc, xác suất chết trong năm là 0,01. Đối với mỗi người hút thuốc, xác suất chết trong năm là 0.05.
Biết rằng một người tham gia bảo hiểm đã chết, xác suất mà các hợp đồng bảo hiểm là một người hút thuốc là bao nhiêu?

Bài giải

A: Biến cố người tham gia bảo hiểm đã chết
B: Biến cố người tham gia bảo hiểm hút thuốc
$\overline{B}$: Biến cố người tham gia bảo hiểm không hút thuốc
P(B) = 0.1
P($\overline{B}$) = 0.9
P(A|$\overline{B}$) = 0.01
P(A|B) = 0.05
Tìm P(B|A)
P(B| A) = $\frac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}$ = 0.3571

■

Bài 10.13

10% người mua bảo hiểm nhân thọ của một công ty có hút thuốc, số còn lại không hút thuốc. Trong 1 năm, xác suất tử vong của một người không hút thuốc là 0.01 và của người hút thuốc là 0.05.
Cho biết rằng người mua bảo hiểm nhân thọ đã chết. Tính xác suất để người này có hút thuốc?

Bài giải

Đặt

B_1 là số người hút thuốc.

B_2 là số người không hút thuốc.

A là số người chết.

Ta có $P(B_1) = 0.1, \quad P(B_2) = 0.9, \quad P(A \mid B_1) = 0.05, \quad P(A \mid B_2) = 0.01.$
Áp dụng công thức Bayes ta tính được xác suất người mua bảo hiểm đã chết đó có hút thuốc là

$$\begin{aligned} P(B_1 \mid A) &= \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2)} \\ &= \frac{0.1 \times 0.05}{0.1 \times 0.05 + 0.9 \times 0.01} = 0.3751. \end{aligned}$$

■

Bài 10.14

Điều kiện tiên quyết để học sinh theo học môn xác suất là phải vượt qua môn toán biến thiên. Một cuộc nghiên cứu thống kê về trình độ của học sinh đang theo học về toán biến thiên và xác suất được thực hiện. Cuộc nghiên cứu cho thấy rằng 25% những học sinh học toán biến thiên được điểm A và những học sinh này thì có thể hơn 50% nhận được điểm A trong môn xác suất bởi vì những người đó có trình độ thấp hơn trong môn toán biến thiên. Nếu 1 học sinh nhận được 1 điểm A trong môn xác suất được chọn ngâu nhiên, hãy tìm xác suất mà người đó nhận được điểm A trong môn biến thiên

Bài giải

■

Bài 10.15

Trong một nhóm người có 70 người đàn ông và 70 phụ nữ. Có 7 người đàn ông và 10 phụ nữ được tìm thấy bị mù màu.
(a) Tính xác suất chọn ngẫu nhiên 1 người bị mù màu?
(b) Nếu chọn ngẫu nhiên được 1 người mù màu, tính xác suất người này là đàn ông?

Bài giải

Ta đặt:

M = {người được chọn là nam}
W = {người được chọn là nữ}
B ={người được chọn bị mù màu }

Theo đề bài, ta có:

$$P(M) = \frac{70}{140} \qquad P(W) = \frac{70}{140} \qquad P(B|M) = \frac{7}{70} \qquad P(B|W) = \frac{10}{70}$$

(a) Xác suất để chọn được ngẫu nhiên người bị mù màu là:

$$P(B) = P(B|M)P(M) + P(B|W)P(W) = \frac{17}{140}$$

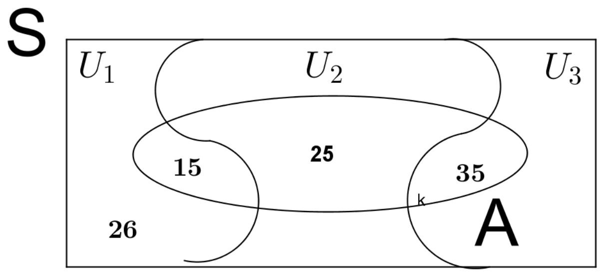
(b) Xác suất người được chọn là đàn ông nếu biết người này mù màu là:

$$P(M|B) = \frac{P(B|M)P(M)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{70} \cdot \frac{70}{140}}{\frac{17}{140}} = \frac{7}{17}$$

■

Bài 10.16

Tính Pr(U_1 |A).



Bài giải

Pr(U_1 | A) $= \frac{Pr(U_1 A)}{Pr(A)} = \frac{15}{75} = 0.2$

■

Bài 10.17

Xác suất để một người có bệnh ung thư tuyến tiền liệt là 0.8. Một xét nghiệm PSA được sử dụng để xác nhận chuẩn đoán dương tính cho kết quả 90% là người có bệnh, 5% là người không bệnh. Hỏi xác suất để một người có bệnh mà người đó dương tính là bao nhiêu?

Bài giải

Gọi B: là biến cố có bệnh. P(B) = 0.8
$\bar{\text{B}}$ là biến cố không bệnh. P($\bar{\text{B}}$) = 0.2
D; là biến cố dương tính
P(D|B) = 0.9
P(D|$\bar{\text{B}}$) = 0.05
P(B|D)=?
Xác suất để 1 người có bệnh mà dương tính là:
Áp dụng định lí Bayes với họ biến cố đầy đủ là B và $\bar{\text{B}}$:
$P(B|D) = \dfrac{P(D|B) \times P(B)}{P(D|B) \times P(B) + P(D|\bar{B}) \times (P(\bar{B})}$
$P(B|D) = \dfrac{0.8 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 + 0.2 \times 0.05} = \frac{72}{73}$

■

Bài 11.1

Hãy xác định những biến cố này độc lập hay không đọc lập:
(a) Chọn 1 viên bi trong hộp, chọn viên thứ hai cũng trong hộp đó và không hoàn lại viên bi đầu tiên
(b) Tung 1 con xúc sắc và quay 1 con quay

Bài giải

(a) Đây là 2 biến cố không độc lập do kết quả của lần chọn thứ nhất ảnh hưởng đến kết quá lần chọn thứ hai
(b) Đây là 2 biến cố độc lập do việc tung xúc sắc thì không ảnh hưởng gì đến việc quay con quay

■

Bài 11.2

Amin và Nadia được phép chọn một lớp mặt phủ cho cây kem của họ. Các sự lựa chọn của các lớp trên bề mặt là Butterfingers, M và M, Chocolate chip, Gummy Bears, Kit

Kat, Peanut Butter, và Chocolate xi-rô. Nếu họ chọn một cách ngẫu nhiên, xác suất mà cả hai đều chọn Kit Kat là lớp kem phủ trên là bao nhiêu?

Bài giải

Xác suất mà cả hai ddeuf chon Kit Kat là lớp kem phủ là: $\frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$

■

Bài 11.3

Chọn ngẫu nhiên 2 lá bài từ một bộ bài 52 lá. Tính xác suất sao cho lá thứ nhất không là các mặt (K, Q, J và A) và lá thứ hai là các mặt K, Q, J, A nếu
a) Nếu hoàn lại lá thứ nhất trước khi chọn lá thứ hai
b) Nếu không hoàn lại lá thứ nhất

Bài giải

Gọi A_i "rút được lá bài thứ i" i=1,2
B "chọn được 2 lá bài mà có hoàn lại lá thứ nhất"
C "chọn được 2 lá bài mà không hoàn lại lá thứ nhất"

- câu a)
  Nếu có hoàn lại lá thứ nhất trước khi chọn lá thứ hai thì hai biến cố A_1 và A_2 độc lập nhau ta có
  $P(B) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{36}{52} \times \frac{16}{52} = 0.213$
- câu b)
  Nếu không hoàn lại lá thứ nhất trước khi chọn lá thứ hai thì hai biến cố A_1 và A_2 phụ thuộc nhau ta có
  $P(C) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) = \frac{36}{52} \times \frac{16}{51} = 0.217$

■

Bài 11.4

Marlon, John và Steve được đưa ra sự lựa chọn duy nhất cho chiếc bánh pizza của mình. Có 10 lớp cho sự lựa chọn. Tính xác suất mỗi người chọn 1 lớp bánh khác nhau?

Bài giải

Xác suất mỗi người chọn 1 lớp bánh khác nhau là:

$$\frac{10}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0.72$$

■

Bài 11.5

Hộp 1 đựng 4 banh đỏ và 6 banh xanh. Hộp 2 đựng 16 banh đỏ và x banh xanh. Lấy ra 1 banh từ mỗi hộp. Xác suất để 2 banh cùng màu là 0,44. Tính x?

Bài giải

- Xác suất chọn hai banh đỏ là: $\frac{4}{10}.\frac{16}{16+x}$
- Xác suất chọn hai banh xanh là: $\frac{6}{10}.\frac{x}{16+x}$
- Xác suất chọn hai banh cùng màu:

$$\begin{aligned}\frac{4}{10}.\frac{16}{16+x}+\frac{6}{10}.\frac{x}{16+x} &= 0,44\\ \Leftrightarrow 64+6x &= 0,44.10(16+x)\\ \Leftrightarrow 64+6x &= 70,4+4,4x\\ \Leftrightarrow x &= 4.\end{aligned}$$

■

Bài 11.6

Một chuyên viên nghiên cứu các ưu đãi bảo hiểm cho những chủ sở hữu ô tô cho các kết luận sau:
(i) Một chủ sở hữu xe mua một bảo hiểm thương tật gấp đôi xác suất người mua bảo hiểm va chạm
(ii) Biến cố mà một chủ sở hữu ô tô mua bảo hiểm va chạm thì độc lập với biến cố anh ấy hoặc cô ấy mua bảo hiểm thương tật
(iii) Xác suất mà chủ sở hữu ô tô mua cả bảo hiểm va chạm và thương tật là 0.15
Tìm xác suất mà một chủ sở hữu ô tô không mua bảo hiểm va chạm cũng không mua bảo hiểm thương tật??

Bài giải

A: Biến cố chủ sở hữu ô tô mua bảo hiểm thương tật
B: Biến cố chủ sở hữu ô tô mua bảo hiểm va chạm
P(A) = 2P(B)
P(A|B) = P(A)
P(A∩B) = 0.15
P($\overline{A \cup B}$) = ?
Ta có: P(∩B) = P(A).P(B) = $2P^2(B) = 0.15$

$\Rightarrow$ P(B) = $\frac{\sqrt{30}}{20}$
P($\overline{A \cup B}$) = 1 - P($A \cup B$) = 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B) = 1 - 2.$\frac{\sqrt{30}}{20}$ - $\frac{\sqrt{30}}{20}$ + 0.15 = 0.328

■

Bài 11.6

Một chuyên gia tính toán bảo hiểm nghiên cứu những loại bảo hiểm được ưu chuộng của những người sở hữu xe ôtô đã đưa ra những kết luận sau:

(i.) Một chủ sở hữu xe ôtô có khả năng cho trả cho mức độ tàn tật gấp đôi mức độ va chạm.

(ii.) Việc chi trả cho mức độ tàn tật và mức độ va chạm là độc lập với nhau.

(iii.) Xác suất để một chủ sở hữu xe ôtô phải chi trả cho cả mức độ tàn tật với mức độ va chạm là 0.15.

Tính xác suất để một chủ sở không chi trả cho cả mức độ tàn tật và mức độ va chạm?

Bài giải

A: mức độ va chạm.
B: mức độ tàn tật.
Ta có: $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.15, \quad P(B) = 2P(A)$
$\Rightarrow P(A) \approx 0.274, \quad P(B) \approx 0.547$

Xác suất để một chủ sở không chi trả cho cả mức độ tàn tật và mức độ va chạm $P[(A \cup B)^c] = P(A^c \cap B^c) = P(A^c).P(B^c) = (1 - 0.274).(1 - 0.547) \approx 0.328$

■

Bài 11.8

Đặt $S = \{1, 2, 3, 4\}$ với mỗi kết quả ra là như nhau với xác suất là $\frac{1}{4}$. Các biến cố $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 4\}$. Chứng minh 3 biến cố A, B và C độc lập từng cặp nhưng chúng không độc lập.

Bài giải

Ta có:

$$P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B)P(C)$$

$\Rightarrow$ A, B và C độc lập theo từng cặp.
Tuy nhiên,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

Do đó A, B và C không độc lập.

■

Bài 11.9

Cho A và B là 2 biến cố độc lập với P(A)=0.2 và P(B)=0.3. Gọi C là biến có A ko xảy ra và B cũng ko xảy ra. Gọi D là biến cố có chính xác A xảy ra hoặc B xảy ra. Tính P(C) và P(D)

Bài giải

Ta có : P(A)=0.2 và P(B)=0.3
$C = \overline{(A \cup B)} = \bar{A}\bar{B} \Rightarrow P(C) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0.56$
$P(D) = P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B}) = 0.38$

■

Bài 11.10

Giả sử A, B, C là các biến cố độc lập với nhau và P(A) = 0.5, P(B) = 0.8, P(C) = 0.3. Tìm xác suất sao cho có ít nhất một biến cố xảy ra.

Bài giải

Ta có P(A) = 0.5 $\Longrightarrow P(\bar{A}) = 0.5$
P(B) = 0.8 $\Longrightarrow P(\bar{B}) = 0.2$
P(C) = 0.3 $\Longrightarrow P(\bar{C}) = 0.7$
Xác suất để có ít nhất một biến cố xảy ra là:
Ta lấy 1 trừ cho xác suất không có biến cố nào xảy ra:
$1 - P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \times P(\bar{C}) = 1 - 0.5 \times 0.2 \times 0.7 = 1 - 0.07 = 0.93$

■

Bài 11.11

Cho A, B, C là 3 biến cố độc lập, với Pr(A)=0.5, Pr(B)=0.8, Pr(C)=0.3, tìm xác suất để đúng 2 trong 3 biến cố cùng xảy ra.

Bài giải

Gọi D: "Biến cố đúng 2 trong 3 biến cố cùng xảy ra"
$Pr(D) = Pr(AB\bar{C}) + Pr(A\bar{B}C) + Pr(\bar{A}BC)$
$= Pr(A).Pr(B).Pr(\bar{C}) + Pr(A).Pr(\bar{B}).Pr(C) + Pr(\bar{A}).Pr(B).Pr(C) = 0.43$

■

Bài 11.12

Nếu biến cố A, B, và C là độc lập, CMR:
(a) A và $B \cap C$ là độc lập
(b) A và $B \cup C$ là độc lập

Bài giải

a)A và $B \cap C$ độc lập:
ta có $P(A|B \cap C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(A)$
Vậy a và $B \cap C$ độc lập.
b)A và $B \cup C$ độc lập:
$P(A|(B \cup C)) = \dfrac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \dfrac{P(A \cap B \cup A \cap C)}{P(B \cup C)}$
$= \dfrac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B) + P(C) - P(BC)} = P(A)$
Vậy A và $B \cup C$ độc lập.

■

Bài 11.13

Giả sử tung một đồng tiền 5 xu, đồng 1 hào và đồng 25 xen. Mỗi đồng tiền cân đối, đồng chất và tung mỗi đồng tiền khác nhau là độc lập. Cho A là biến cố "đồng tiền xuất hiện mặt ngửa có tổng giá trị ít nhất là 15 xen". Cho B là biến cố "đồng 25 xen xuất hiện mặt ngửa". Cho C là biến cố "đồng tiền xuất hiện mặt ngửa có tổng giá trị chia hết cho 10 xen".
a) Viết không gian mẫu, và liệt kê biến cố A, B, C.
b) Tìm Pr(A), Pr(B), và Pr(C)
c) Tính Pr(B|A)
d) Biến cố B và C có độc lập không? Giải thích.

Bài giải

- câu a
  Theo giả thiết ta có đồng 5 xu = 5 xen đồng 1 hào = 10 xen
  Gọi H_i là biến cố "mặt ngửa của đồng tiền thứ i xuất hiện" $\forall i = \overline{1,3}$

T_i là biến cố "mặt xấp của đồng tiền thứ i xuất hiện" $\forall i = \overline{1,3}$
Không gian mẫu
$\Omega = \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3, T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}$
$A = \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, T_1H_2H_3, T_1T_2H_3\}$
$B = \{H_1H_2H_3, T_1H_2H_3, H_1T_2H_3, T_1T_2H_3\}$
$C = \{H_1H_2H_3, H_1T_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2T_3\}$

- câu b
  Theo câu a ta có:
  $Pr(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{8}$
  $Pr(B) = \dfrac{|B|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
  $Pr(C) = \dfrac{|C|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

- câu c
  Theo câu a ta có $A \bigcap B = \{H_1H_2H_3, T_1H_2H_3, H_1T_2H_3, T_1T_2H_3\}$
  Suy ra $Pr(A \bigcap B) = \dfrac{|A \bigcap B|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
  Ta có $Pr(B|A) = \dfrac{Pr(A \bigcap B)}{Pr(A)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{4}{5}$

- câu d
  Ta có $B \bigcap C = \{H_1H_2H_3, H_1T_2H_3\}$
  Vậy$Pr(B \bigcap C) = \dfrac{|B \bigcap C|}{|\Omega|} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$
  Mặt khác $Pr(B) \times Pr(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$
  Suy ra $Pr(A \bigcap B) = Pr(A) \times Pr(B)$
  Vậy nên B và C độc lập nhau.

■

Bài 11.14

Tai nạn ở nơi làm việc được chia ra thành 3 nhóm: nhỏ, vừa và nghiêm trọng. Xác suất 1 tai nạn nhỏ là 0.5, tai nạn vừa là 0.4 và tai nạn nghiêm trọng là 0.1. Hai tai nạn xảy ra độc lập trong 1 tháng.
Tính xác suất để không có tai nạn nghiêm trọng và có nhiều nhất 1 tai nạn vừa.

Bài giải

Gọi:
A_i là biến cố tai nạn nhẹ lần thứ i, $i = 1, 2$

$Pr(A_i) = 0.5$.
B_i là biến cố tai nạn vừa lần thứ i, $i = 1, 2$.
$Pr(B_i) = 0.4$.
Xác suất không có tai nạn nặng và có nhiều nhất một tai nạn vừa là:
$Pr(A_1A_2) + Pr(A_1B_2) + Pr(A_2B_1)$
$= Pr(A_1).Pr(A_2) + Pr(A_1).Pr(B_2) + Pr(A_2).Pr(B_1)$
$= 0.65$

■

Bài 11.15

Trong số sinh viên đại học, ở KTX, có 20% sinh viên có xe ô tô. Không ở KTX, có 60% sinh viên có xe ô tô và có tất cả 30% sinh viên sống ở KTX. Tính xác suất khi chọn ngẫu nhiên một sinh viên.

a) Sinh viên không sống trong KTX.

b) Sinh viên sống trong KTX và có xe ô tô.

c) Sinh viên sống trong KTX và không có xe ô tô.

d) Sinh viên sống trong KTX hoặc có xe ô tô.

e) Sinh viên sống trong KTX và biết sinh viên đó không có xe ô tô.

Bài giải

Gọi A là biến cố sinh viên sống trong KTX.
B là biến cố sinh viên có xe ô tô.
Ta có : $P(A) = 30\%, P(B \mid A) = 20\%, P(B \mid \bar{A}) = 60\%$

a) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$

b) $P(AB) = P(B \mid A).P(A) = 0,2.0,3 = 0,06$

c) $P(A) = P(A\bar{B}).P(\bar{A}B) \Rightarrow P(A\bar{B}) = 0,3 - 0,06 = 0,24$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
Mà $P(B) = P(B \mid A).P(A) + P(B \mid \bar{A}).P(\bar{A})$
$P(A \cup B) = 0,72$

e) $P(A \mid \bar{B}) = \dfrac{P(A\bar{B})}{P(B)} = \dfrac{0,24}{1 - 0,48} = 0,4615$

■

Bài 12.1

Nếu xác suất của cậu bé sinh ra là $\frac{1}{2}$; và một gia đình có dự định có bốn đứa trẻ. Tỉ lệ trẻ em sinh ra tất cả không là con trai?

Bài giải

Xác suất sinh ra bốn đứa con trai: $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
Xác suất các trường hợp còn lại là: 1 - $\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
Tỉ lệ không sinh ra bốn đứa con trai: $\frac{15}{16} : \frac{1}{16} = 15{:}1$

■

Bài 12.1

Nếu xác suất sinh được con trai là 0.5, và 1 gia đình dự định sẽ sinh 4 đứa con, tính tỉ lệ bất lợi (odds against) của sự kiện tất cả đều là con trai?

Bài giải

$$\text{Odds against} \quad = \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^4}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \frac{15}{1} = 15 : 1.$$

■

Bài 12.4

Nếu xác suất của tuyết rơi trong ngày là 60%. Hỏi tỉ lệ giữa việc không có tuyết và có tuyết là?

Bài giải

Xác suất không có tuyết rơi trong ngày là: $100 - 60 = 40\%$
Vậy tỉ lệ giữa việc có tuyết và không có tuyết là: $40 : 60 = 4 : 6$

■

Bài 12.5

Trên một bảng tote tại một trường đua, tỷ lệ cược cho Smarty Harper được liệt kê là 26:1. Bảng tote liệt kê tỷ lệ con ngựa sẽ thua trong cuộc đua. Nếu đó là trương hợp, tính xác suất chiến thắng của Smarty Harper trong cuộc đua.

Bài giải

Gọi A là biến cố để Smarty Harper thua
Gọi B là biến cố để Smarty Harper thắng
n(A)=26× k n(B)=k Xác suất chiến thắng của Smarty Harper là:
P(B)=$\dfrac{n(A)}{n(A)+n(B)} = \dfrac{k}{26k+k} = \frac{1}{27}$

■

Bài 12.6

Tung 1 con xúc xắc, tỉ lệ nhận được các biến cố sau là bao nhiêu?
(a) Được mặt 4 (b) Được mặt là số nguyên tố (c) Được mặt có số lớn hơn 0 (d) Được mặt có số lớn hơn 6

Bài giải

Không gian mẫu $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(a) Gọi A:"Biến cố được mặt 4"
A={4}
$P(A) = \frac{1}{6}$
(b) Gọi B:"Biến cố được mặt số nguyên tố"
B={2,3,5}
$P(B) = \frac{3}{6}$
(c) Gọi C:"Biến cố được mặt lớn hơn 0"
C={1,2,3,4,5,6}
$P(C) = \frac{6}{6} = 1$
(d) Gọi D:"Biến cố được mặt lớn hơn 6"
$D = \varnothing$
$P(D) = \frac{0}{6} = 0$

■

Bài 12.7

Tìm tỉ lệ chống lại E nếu Pr(E) = 3/4.

Bài giải

$$\frac{n(E^c)}{n(E)} = \frac{1-P(E)}{P(E)} = \frac{1-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{3}{4}} = 1:3$$

■

Bài 12.8

Tìm $Pr(E)$ trong mỗi trường hợp sau
a) Tỉ lệ ủng hộ E là 3:4
b) Tỉ lệ không ủng hộ E là 7:3

Bài giải

- câu a
  Tỉ lệ ủng hộ E là 3:4
  $\dfrac{n(E)}{n(E^c)} = \dfrac{Pr(E)}{1 - Pr(E)} = \dfrac{3}{4}$
  $\iff \dfrac{7}{4}Pr(E) = \dfrac{3}{4}$
  $\implies Pr(E) = \dfrac{3}{7}$
  Vậy $Pr(E)$ trong trường hợp này là $Pr(E) = \dfrac{3}{7}$
- câu b
  Tỉ lệ không ủng hộ E là 7:3
  $\dfrac{n(E^c)}{n(E)} = \dfrac{1 - Pr(E)}{Pr(E)} = \dfrac{7}{3}$
  $\iff \dfrac{10}{3}Pr(E) = 1$
  $\implies Pr(E) = \dfrac{3}{10}$
  Vậy $Pr(E)$ trong trường hợp này là $Pr(E) = \dfrac{3}{10}$

■

Bài 12.8

Tính tỷ lệ thuận lợi cho việc xuất hiện ít nhất 2 mặt ngửa nếu tung một đồng xu 3 lần?

Bài giải

H : mặt ngửa   T : mặt sấp
Xét không gian mẫu của thí nghiệm:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT\}$$

Gọi E là biến cố "xuất hiện ít nhất 2 mặt ngửa". Khi đó:

$$E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{4}{8} \quad \text{và} \quad P(E^c) = 1 - P(E) = \frac{4}{8}$$

Do đó tỷ lệ thuận lợi cho việc xuất hiện ít nhất 2 mặt ngửa khi tung đồng xu 3 lần là

$$\frac{4}{8} \div \frac{4}{8} \quad \text{hay} \quad 1:1$$

■

Bài 13.1

Xác định xem các biến ngẫu nhiên sau là rời rạc, liên tục hay hỗn hợp.

a) X là một số được lựa chọn ngẫu nhiên trong khoảng $(0,1)$.

b) Y là số nhịp đập trái tim trong một phút.

c) Z là số lượng các cuộc gọi tại một đài trong một ngày.

d) $U:(0,1)\to\mathbb{R}$ được xác định bởi $U(s)=2s-1$.

e) $V:(0,1)\to\mathbb{R}$ được xác định bởi $V(s)=2s-1$ khi $0<s<\frac{1}{2}$ và $V(s)=1$ khi $\frac{1}{2}\leq s<1$

Bài giải

a) Biến ngẫu nhiên liên tục.

b) Biến ngẫu nhiên rời rạc.

c) Biến ngẫu nhiên rời rạc.

d) Biến ngẫu nhiên liên tục.

e) Biến ngẫu nhiên hỗn hợp (ngẫu nhiên và rời rạc).

■

Bài 13.2

Có hai quả táo được chọn ngẫu nhiên và loại bỏ liên tiếp, mà không được thay thế từ một túi đựng có 5 quả táo vàng và 3 quả táo đỏ . Hãy liệt kê các phần tử của không gian mẫu , xác suất tương ứng , và các giá trị tương ứng của biến ngẫu nhiên X , trong đó X là số của quả táo vàng chọn.

Bài giải

Gọi V là biến cố quả táo vàng.
D là biến cố quả táo đỏ.
S={VV,VĐ,ĐV,ĐĐ}.

■

Bài 13.3

Giả sử 2 con xúc xắc như nhau được tung có không gian mẫu là $S = (i, j) : 1 \leq i, j \leq 6$. Cho X là biến ngẫu nhiên X(i,j)= i+j. Tính Pr(X=6)

<u>*Bài giải*</u>

Không gian mẫu tung 2 con xúc sắc là: 6.6=36
Tổng khi tung 2 con xúc sắc có thể có là:
$$\begin{cases} i + j = 6 \\ (1; 5)(5; 1)(2; 4)(4; 2)(3; 3) \end{cases}$$
$\Rightarrow Pr(X = 6) = \frac{5}{36}$

■

Bài 13.3

Giả sử 2 con xúc sắc cân bằng được tung với không gian mẫu là $S = \{(i, j) : 1 \leqslant i, j \leqslant 6\}$. Đặt X là biến ngẫu nhiên sao cho $X(i, j) = i + j$. Tìm Pr(X=6).

<u>*Bài giải*</u>

Không gian mẫu: S=(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);...;(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)
$\Rightarrow$ n(S)=36
Biến cố $X(i + j = 6)$=(1,5);(5,1);(2,4);(4,2);(3,3)
$\Rightarrow$ n($X(i + j = 6)$)=5
Pr(X=6)=$\dfrac{5}{36}$

■

Bài 13.5

Bạn tung một đồng xu cho đến khi xuất hiện mặt ngửa. Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện lần đồng xu xuất hiện măt ngửa đầu tiên. Tìm $P(X = n)$ với n là một số nguyên dương.

<u>*Bài giải*</u>

Xác suất xuất hiện mặt ngửa(hay mặt sấp) ở mỗi lần tung là $\frac{1}{2}$
Lần thứ n xuất hiện mặt ngửa $\Rightarrow$ Có $n - 1$ lần đầu xuất hiện mặt sấp.
Vậy $P(X = n) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$

■

Bài 13.6

Một cặp vợ chồng đang mong đợi sự chào đời của cậu con trai. Họ quyết định đặt tên từ danh sách S= {Steve, Stanley, Joseph, Elija}. Đặt $X(\omega) = chci\emptyset utintrongtn$. Tìm $P(X = S)$.

Bài giải

$\Omega = 4$
$P(X = S) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

■

Bài 13.7

Số các yêu cầu bồi thường về thiệt hại trong một tháng được mô hình hóa bởi một biến ngẫu nhiên N với:
$P(N = n) = \dfrac{1}{(n+1) \times (n+2)}$ với $n \geq 0$
Xác định xác suất có ít nhất một yêu cầu bồi thường trong một tháng cụ thể, biết rằng có nhiều nhất bốn yêu cầu bồi thường trong tháng đó.

Bài giải

N	0	1	2	3	4
P(N = n)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$

$P(N \geq 1 | N \leq 4) = \frac{P(N \geq 1 \times (N \leq 4)}{P(N \leq 4)}$
$P(N \geq 1 | N \leq 4) = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}}$
$P(N \geq 1 | N \leq 4) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = 0.4$

■

Bài 13.8

Cho X là một biến ngẫu nhiên có bảng phân bố xác suất
$$\begin{bmatrix} x & 1 & 5 & 10 & 50 & 100 \\ Pr(X = x) & 0,02 & 0,41 & 0,21 & 0,08 & 0,28 \end{bmatrix}$$
Tính $Pr(X > 4 | X \leq 50)$

Bài giải

$Pr(X > 4|X \leq 50) = \frac{Pr(X>4.X\leq 50)}{Pr(X\leq 50)} = \frac{0,41+0,21+0,08}{0,02+0,41+0,21+0,08} = 0,9722$

■

Bài 13.9

Bắn súng là một trong những môn thể thao được liệt kê trong các trò chơi Olympic. Một thí sinh bắn ba lần, một cách độc lập. Xác suất của trúng các mục tiêu trong thử đầu tiên là 0,7, trong lần thứ hai thử 0.5, và ở một phần ba thử 0.4. Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc đại diện cho số lần bắn thành công giữa ba lần.
(a)Tìm công thức cho từng phần theo định nghĩa hàm X: $Q \to R$
(b)Tìm biến cố tương ưng với X=0. Xác suất mà anh ta bắn hụt cả ba phát là gì; nghĩa là, Pr (X = 0)?
(c)Xác suất mà anh thành công đúng một lần trong số ba lần là gì; tức là Pr (X = 1)?
(d) Xác suất mà anh thành công chính xác hai lần trong ba lần là gì; tức là Pr (X = 2)?
(e) Xác suất mà ông đã bắn trúng cả ba phát là gì; tức là Pr (X = 3)?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi T_i là biến cố người chơi bắn trúng ở lần thứ i $(i = 1, 2, 3)$
$\Omega = \{T_1T_2T_3, T_1T_2\overline{T_3}, T_1\overline{T_2}T_3, \overline{T_1}T_2T_3, T_1\overline{T_2T_3}, \overline{T_1}T_2\overline{T_3}, \overline{T_1T_2}T_3, \overline{T_1T_2T_3}\}$
a)

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \omega \in \{\overline{T_1T_2T_3}\}; \\ 1, & \text{nếu } \omega \in \{T_1\overline{T_2T_3}, \overline{T_1}T_2\overline{T_2}, \overline{T_1T_2}T_3\}; \\ 2 & \text{nếu } \omega \in \{T_1T_2\overline{T_3}, T_1\overline{T_2}T_3, \overline{T_1}T_2T_3\}; \\ 3 & \text{nếu}\omega \in \{T_1T_2T_3\}. \end{cases}$$

b)$P(X = 0) = P(\overline{T_1})P(\overline{T_2})P(\overline{T_3}) = 0.3 \times 0.5 \times 0.6 = 0.09$
c)$P(X = 1) = P(T_1)P(\overline{T_2})P(\overline{T_3}) + P(\overline{T_1})P(T_2)P(\overline{T_3}), P(\overline{T_1})P(\overline{T_2})P(T_3)$
$= 0.7 \times 0.9 \times 0.6 + 0.3 \times 0.5 \times 0.6 + 0.3 \times 0.5 \times 0.4 = 0.36$
d)$P(X = 2) = P(T_1)P(T_2)P(\overline{T_3}) + P(T_1)P(\overline{T_2})P(T_3) + P(\overline{T_1})P(T_2)P(T_3)$
$= 0.7 \times 0.5 \times 0.6 + 0.7 \times 0.5 \times \times 0.4 + 0.3 \times 0.4 \times 0.5 = 0.41$
e)$P(X = 3) = P(T_1)P(T_2)P(T_3) = 0.7 \times 0.4 \times 0.5 = 0.14$

■

Bài 13.10

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị {0,1,2,3,....}
Giả sử $Pr(X = 0) = Pr(X = 1), \quad Pr(X = k + 1) = \dfrac{1}{k}Pr(X = k), k = 1, 2, 3....$
Tính Pr(0).

<u>*Bài giải*</u>

Ta có $Pr(X=0) = Pr(X=1)$ và $Pr(X=k+1) = \dfrac{1}{k}Pr(X=k), k = 1, 2, 3...$
Suy ra

$$\begin{aligned}
Pr(X=k) &= \frac{1}{k-1}Pr(X=k-1) = \frac{1}{k-1} \times \frac{1}{k-2}Pr(X=k-2) \\
&= .... = \frac{1}{k-1} \times \frac{1}{k-2} \times .... \times \frac{1}{2}Pr(X=1) \\
&= \frac{1}{k-1} \times \frac{1}{k-2} \times .... \times \frac{1}{2}Pr(X=0) = \frac{1}{(k-1)!}Pr(X=0)
\end{aligned}$$

Ta có $\sum_{k=1}^{\infty} Pr(X=k) + Pr(X=0) = 1$

Do đó $\sum_{k=1}^{\infty} Pr(X=k) + Pr(X=0) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(k-1)!}Pr(X=0) + Pr(X=0)$

$$= Pr(X=0) \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 1\right) = Pr(X=0) \times (e+1) = 1$$

Suy ra $Pr(X=0) = \dfrac{1}{e+1}$

Vậy $Pr(0) = \dfrac{1}{e+1}$

■

Bài 13.11

Theo một chính sách bảo hiểm, tối đa là năm yêu cầu bồi thường có thể được sửa đổi mỗi năm bởi người có hợp đồng bảo hiểm. Đặt p_n là xác suất để một người có hợp đồng bảo hiểm sửa đổi n yêu cầu trong vòng một năm, với $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Một chuyên viên thống kê làm bảng quan sát sau:

(i) $p_n \geq p_{n+1}$ với $0 \leq n \leq 4$

(ii) Sự chênh lệch giữa p_n và p_{n+1} là như nhau với $0 \leq n \leq 4$

(iii) Có đúng 40% người có hợp đồng bảo hiểm sửa đổi ít hơn hai yêu cầu trong một năm.

Tính xác suất để chọn ngẫu nhiên một người sẽ thay đổi nhiều hơn ba yêu cầu trong một năm.

<u>*Bài giải*</u>

Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{aligned}
&p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 \\
&p_0 - p_1 = p_1 - p_2 = p_2 - p_3 = p_3 - p_4 = p_4 - p_5 = c && (1) \\
&p_0 + p_1 = 0.4 && (2) \\
&\Rrightarrow p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0.6 && (3)
\end{aligned}$$

Từ (1) suy ra:

$$\begin{aligned}
&p_3 = p_2 - c && (4) \\
&p_4 = p_3 - c = p_2 - 2c && (5) \\
&p_5 = p_4 - c = p_2 - 3c && (6)
\end{aligned}$$

Thế (4) ,(5) ,(6) vào (3) ta được:
$4p_2 - 6c = 0.6$. Mà $p_2 = p_1 - c$
$\Rrightarrow 4p_1 - 10c = 0.6$
Giải hệ phương trình:
$\begin{cases} 4p_1 - 10c & = 0.6 \\ p_0 + p_1 & = 0.4 \\ p_0 - p_1 & = c \end{cases} \iff \begin{cases} p_0 = \frac{5}{24} \\ p_1 = \frac{23}{120} \\ c = \frac{1}{60} \end{cases}$
Suy ra : $p_4 = \frac{17}{120}, p_5 = \frac{1}{8}$
Vậy: $p_4 + p_5 = \frac{4}{15}$

■

Bài 14.1

Trong một cuộc thử nghiệm, tung một đồng xu 3 lần. Cho X là biến ngẫu nhiên tượng trưng tổng các số lần xảy ra hình đầu người.

a) Mô tả hàm xác suất theo bảng.

b) Mô tả hàm xác suất theo biểu đồ.

Bài giải

X	0	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

■

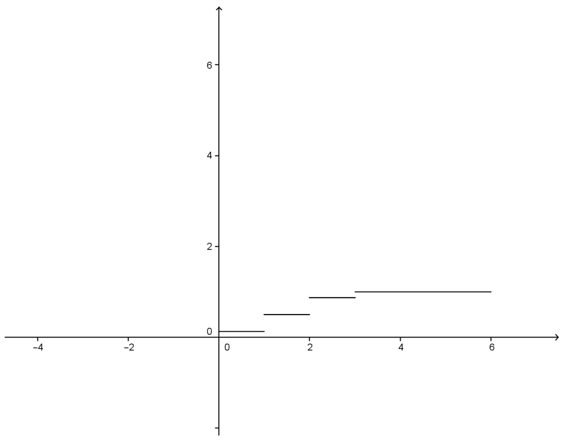
Bài 14.2

Trong các vấn đề 14.1 , mô tả chức năng phân phối tích lũy của một công thức và bằng một đồ thị.

Bài giải

Theo bài 14.1 ta có:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{8} & 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & 1\le x<2 \\ \frac{7}{8} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$



■

Bài 14.2

Thảy 1 đồng xu cân đối 3 lần. Gọi X là biến ngẫu nhiên biểu diễn tổng số mặt ngửa (head) xuất hiện.
Hãy mô tả hàm phân phối tích lũy bằng công thức và bằng đồ thị.

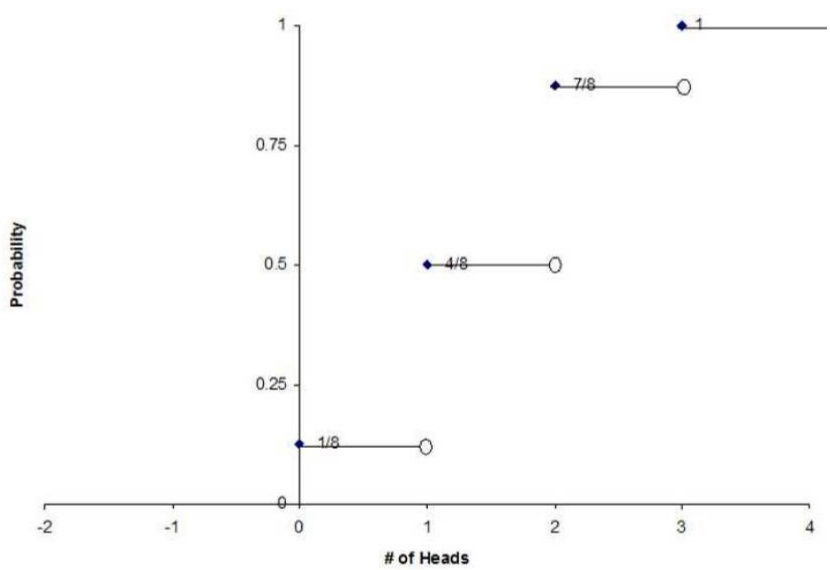
Bài giải

Ta có

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Suy ra

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\[2mm] \dfrac{1}{8}, & 0 \le x < 1, \\[2mm] \dfrac{4}{8}, & 1 \le x < 2, \\[2mm] \dfrac{7}{8}, & 2 \le x < 3, \\[2mm] 1, & x \ge 3. \end{cases}$$



Hình 8: Hàm phân phối tích lũy của biến ngẫu nhiên X.

■

Bài 14.5

Xét thí nghiệm tung 2 con xúc sắc. Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện số con xúc sắc xuất hiện mặt chẵn. Tìm hàm mật độ xác suất của X.

Bài giải

X là biến ngẫu nhiên thể hiện số con xúc sắc xuất hiện mặt chẵn. Khi đó X nhận các giá trị 0, 1 và 2.
Ta có bảng phân phối xác suất như sau:

x	0	1	2
P(X = x)	1/4	1/2	1/4

Khi đó hàm mật độ xác suất của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 0 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ \frac{1}{4} & x = 2 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

■

Bài 14.5

Trong một thí nghiệm tung 2 con xúc sắc, đặt X là số lần của mặt chẵn xuất hiện. Tìm hàm khối xác suất của X?

Bài giải

Hàm khối xác suất của X:

x	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

■

Bai 14.6

Lấy X là một giá trị ngẫu nhiên với
$p(n) = \frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^n$,với n=0,1,2,...
Tìm công thức cho F(n)

Bài giải

$$F(n) = P(X \leq n) = \sum_{x \leq n} p(x) = \sum_{x \leq n} \frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^x = \frac{1}{3} \times (\frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}) = 1 - (\frac{2}{3})^{n+1}$$

■

Bài 14.7

Một hộp chứa 100 chuột máy tính trong đó có 95 chuột hư
(a) Mỗi lần lấy ra một con chuột cho tới khi tìm được con chuột không hư. Gọi X là số con chuột hư bạn lấy ra, tìm hàm phân phối xác suất của X
(b) Lấy ra 10 con chuột và kiểm tra. Y là số con chuột không hư. Tìm hàm phân phối của Y

Bài giải

(a) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{100} & x = 1 \\ \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \ldots \cdot \frac{95-n+1}{100-n+1} \cdot \frac{5}{100-n} & \text{với n=2,3,4,...,95} \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

(b) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{C_5^y . C_{95}^{10-y}}{C_{100}^{10}} & y = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

■

Bài 14.8

Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với cdf được cho bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \leqslant -4; \\ \frac{3}{10}, & \text{nếu } -4 \leqslant x < 1; \\ \frac{7}{10}, & \text{nếu } 1 \leqslant x < 4; \\ 1, & \text{nếu} x \geqslant 4. \end{cases}$$

Tìm một công thức p(x).

Bài giải

Với x=-4 thì ta có $p(x1) = \frac{3}{10}$
Với x=1 thì ta có $p(x2) = \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$
Với x=4 thì ta có $p(x3) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

Vậy công thức của p(x) có dạng:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{10}, & \text{nếu } x = -4; \\ \\ \dfrac{4}{10}, & \text{nếu } x = 1; \\ \\ \dfrac{3}{10} & \text{nếu } x = 4. \end{cases}$$

■

Bài 14.9

Trong một trò chơi, chọn ngẫu nhiên 2 quả bóng không hoàn lại từ một bình chứa 3 bóng đỏ và 4 bóng xanh. Nếu chọn được 2 quả bóng cùng màu thì bạn thắng 2$. Nếu chọn được 2 quả bóng khác màu thì bạn thua 1$. Tìm hàm phân phối xác suất của X. Biết rằng X là số tiền bạn thu được hoặc mất đi sau một lần chơi.

Bài giải

Gọi A là biến cố "chọn được 2 quả bóng cùng màu"
B là biến cố "chọn được 2 quả bóng khác màu"
X là biến cố "số tiền thu được hoặc mất đi sau một lần chơi"
Ta có xác suất để chọn được 2 quả bóng màu đỏ $\dfrac{C_3^2}{C_7^2}$
Xác suất để chọn được 2 quả bóng màu xanh $\dfrac{C_2^2}{C_7^2}$
Vậy xác suất để chọn được hai quả bóng cùng màu là
$Pr(A) = Pr(X = 2) = \dfrac{C_3^2}{C_7^2} + \dfrac{C_2^2}{C_7^2} = \dfrac{3}{7}$
Xác suất để chọn hai quả bóng khác màu là
$Pr(B) = Pr(X = -1) = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$
Vậy hàm phân phối xác suất cần tìm là

X	-1	2
$Pr(X = x_i)$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{3}{7}$

■

Bài 14.10

Một đồng xu không hoàn thiện được tung ba lần. Xác suất của mặt hình đuôi trong bất kỳ lần tung nào cũng là $\frac{2}{3}$. Đặt X là số lần xuất hiện mặt đầu người.

(a) Tìm hàm khối xác suất của X.

(b) Vẽ đồ thị hàm phân phối tích lũy cho X.

<u>*Bài giải*</u>

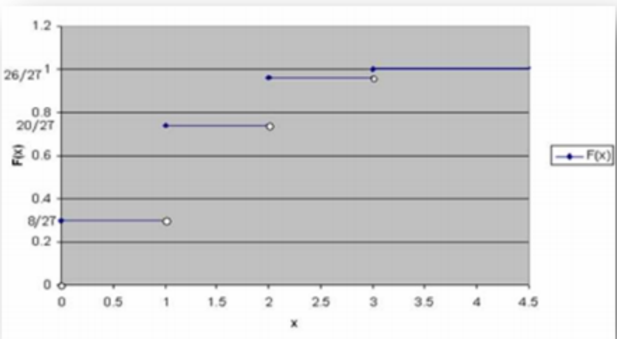
Đặt X là số lần xuất hiện mặt đầu người.

a) Hàm khối xác suất của X
$p(0) = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
$p(1) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{12}{27}$
$p(2) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{6}{27}$
$p(3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

b) Ta có, hàm phân phối tích lũy của X là:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{8}{27} & 0 \le x < 1 \\ \frac{20}{27} & 1 \le x < 2 \\ \frac{26}{27} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

Đồ thị hàm phân phối tích lũy của X (Hình 6).



Hình 9: Bài 14.10

■

Bài 14.11

Một trò chơi xổ số với ba con số được rút ra (mà không cần thay thế) từ một bộ 15 con số. Cho X biểu thị các biến ngẫu nhiên đại diện các con số trên vé phù hợp với các số trúng . Hãy tìm phân phối tích lũy của X.

<u>*Bài giải*</u>

Chọn 3 số trong 15 số: C_3^{15}
X là biến cố ngẫu nhiên thắng: $n = 1, 2, 3$ và 4.
Phân phối tích lũy của X:

$$P(0) = \frac{(C_0^3)C_3^{12}}{C_3^{15}} = \frac{220}{455}$$

$$P(1) = \frac{C_1^3 C_2^{12}}{C_3^{15}} = \frac{198}{455}$$

$$P(1) = \frac{C_2^3 C_1^{12}}{C_3^{15}} = \frac{36}{455}$$

$$P(1) = \frac{C_3^3 C_0^{12}}{C_3^{15}} = \frac{1}{455}$$

■

Bài 14.12

Nếu hàm phân phối tích lũy của X được cho bởi

$$\text{f(x)=}\begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{36} & 3 \leq x < \\ \frac{6}{36} & 4 \leq x < 5 \\ \frac{10}{36} & 5 \leq x < 6 \\ \frac{15}{36} & 6 \leq x < 7 \\ \frac{21}{36} & 7 \leq x < 8 \\ \frac{26}{36} & 8 \leq x < 9 \\ \frac{30}{36} & 9 \leq x < 10 \\ \frac{33}{36} & 10 \leq x < 11 \\ \frac{35}{36} & 11 \leq x < 12 \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

Tìm các phân bố xác suất của X

<u>*Bài giải*</u>

Lần lượt ta có:

$p(2) = \frac{1}{36}$ $\quad p(3) = \frac{2}{36}$ $\quad p(4) = \frac{3}{36}$ $\quad p(5) = \frac{4}{36}$ $\quad p(6) = \frac{5}{36}$

$p(7) = \frac{6}{36}$ $\quad p(8) = \frac{5}{36}$ $\quad p(9) = \frac{4}{36}$ $\quad p(10) = \frac{3}{36}$ $\quad p(11) = \frac{2}{36}$

$p(12) = \frac{1}{36}$ $\quad$ 0 nếu khác

■

Bài 14.12

Hàm phân phối tích lũy của X có dạng như sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{36} & 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{3}{36} & 3 \leqslant x < 4 \\ \frac{6}{36} & 4 \leqslant x < 5 \\ \frac{10}{36} & 5 \leqslant x < 6 \\ \frac{15}{36} & 6 \leqslant x < 7 \\ \frac{21}{36} & 7 \leqslant x < 8 \\ \frac{26}{36} & 8 \leqslant x < 9 \\ \frac{30}{36} & 9 \leqslant x < 10 \\ \frac{33}{36} & 10 \leqslant x < 11 \\ \frac{35}{36} & 11 \leqslant x < 12 \\ 1 & x \geqslant 12 \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối xác suất của X.

Bài giải

Bảng phân phối xác suất của X:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$p(x)$	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0

■

Bài 15.2

Trò chơi tung 2 con xúc sắc. Tổng của hai mặt là số nguyên từ 2 đến 12. Với mỗi giá trị, bạn thắng được số tiền tương ứng được thể hiện dưới bảng sau:

Số điểm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ Tiền thưởng	4	6	8	10	20	40	20	10	8	6	4

Tính kỳ vọng của trò chơi.

Bài giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên thể hiện tổng hai mặt của hai con xúc sắc. Khi đó X nhận các giá trị nguyên thuộc [2,12].
Ta có bảng phân phối xác suất như sau:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$	4	6	8	10	20	40	20	10	8	6	4

$$\begin{aligned}\Rightarrow E(X) &= \frac{1}{36}\cdot 4+\frac{2}{36}\cdot 6+\frac{3}{36}\cdot 8+\frac{4}{36}\cdot 10+\frac{5}{36}\cdot 20+\frac{6}{36}\cdot 40+\\ &\quad +\frac{5}{36}\cdot 20+\frac{4}{36}\cdot 10+\frac{3}{36}\cdot 8+\frac{2}{36}\cdot 6+\frac{1}{36}\cdot 4\\ &\approx 16.67\$\end{aligned}$$

■

Bài 15.3

Một trò chơi gồm hai con xúc xắc. Mỗi lượt chơi mất 2$. Nếu tổng số chấm xuất hiện là 7 thì bạn thắng 10$ các trường hợp còn lại bạn thua 2$. Bạn sẽ kiếm được tiền, thua tiền hay nên dừng cuộc chơi sớm nếu bạn tiếp tục trò chơi. Giải thích?

Bài giải

Đặt X là biến cố tổng số chấm bằng 7.
$\Omega = 36$
Số trường hợp tổng số chấm bằng 7 là 6.
Pr(X)= $6 \div 36 = \frac{1}{6}$
$Pr(\overline{X}) = \frac{5}{6}$
E(X)= $10 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{5}{6} = 0$
Vì vậy nên dừng cuộc chơi ngay nếu tiếp tục chơi trong thời gian dài.

■

Bai 15.4

Một trò chơi bao gồm việc tung hai con xúc xắc. Trò chơi này có giá 8 đô la để chơi. Bạn được trả tiền đô la bằng tổng của các chữ số xuất hiện trên các con xúc xắc. Kì vọng của trò chơi này là gì

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là số tiền mà người chơi nhận được

X	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Kì vọng của trò chơi là:

$E(X) = \sum_{i=1}^{12}(x_i \times p_i) = -1$

■

Bài 15.5

Một kho lưu trữ của một công ty bảo hiểm cung cấp bảo hiểm cho những mặt hàng trong cơ sở của nó. Cho mỗi mặt hàng có giá trị là $800, xác suất bị mất cho mỗi mặt hàng trị giá $400 là 0.01, trong khi xác suất của toàn bộ giá trị mặt hàng bị đánh cắp là 0.0025. Giả sử rằng chỉ có 2 loại bị mất này. Trung bình công ty phải bồi thường bao nhiêu tiền cho những người bị mất, biết rằng công ty đó phải cộng thêm $20 cho mỗi người bị mất?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là số tiền bị mất
Số tiền bị mất trung bình là
E(X)=400*0.01+800*0.0025=6
Vậy số tiền phải trả trung bình là 20+6=26

■

Bài 15.7

Trong một trò chơi, mỗi lượt chơi bạn phải trả 1$. Biết rằng, mỗi lượt chơi xác suất thua là 0.7. Xác suất thắng 50$ là 0.1 và xác suất thắng 35$ là 0.2. Nếu bạn chơi trò chơi này 10 lần, bạn nghĩ rằng mình sẽ thắng hay thua?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là số tiền thu được sau mỗi lượt chơi
Y là số tiền thực tế thu được sau mỗi lượt chơi
Ta có bảng phân phối xác suất

X	-1	35	50
Y	-1	34	49
$Pr(Y = y_i)$	0.7	0.2	0.1

$$\begin{aligned} E(10Y) = 10 \times E(Y) &= 10 \times \textstyle\sum_{i=1}^{3} y_i \times P(Y = y_i) \\ &= 10 \times [(-1) \times 0.7 + 34 \times 0.2 + 49 \times 0.1] = 110 \end{aligned}$$

■

Bài 15.8

Một trò chơi theo hình thức xổ số , có ba số được chọn từ 1 đến 12. Chi phí một vé chơi là 1$. Nếu vé của bạn phù hợp với ba số đã chọn, bạn giành chiến thắng với 100$. Tính kỳ vọng ?

Bài giải

Đặt X là kết quả của trò chơi.
$\Rightarrow x_1$: thắng, x_2 : thua
Kỳ vọng: $E(X) = x_1.p(x_1) + x_2.p(x_2) + x_3.p(x_3)$.
$p(x_1) = \dfrac{1}{C_{12}^3}$. Khi thắng bạn được 99$.
$p(x_2) = 1 - \dfrac{1}{C_{12}^3}$. Khi thua bạn mất 1 $.
Vậy $E(X) = 99.\dfrac{1}{C_{12}^3} - 1.(1 - \dfrac{1}{C_{12}^3}) = \dfrac{-6}{11} \approx 0.545$

■

Bài 15.9

Có hai chính sách bảo hiểm nhân thọ, phí bảo hiểm sau khi qua đời là 10.000 và phí bảo hiểm cho một lần là 500, được bán cho một cặp vợ chồng, mỗi loại bảo hiểm cho một người. Các chính sách sẽ hết hiệu lực vào cuối năm thứ mười. Xác suất rằng chỉ có vợ sẽ sống ít nhất mười năm là 0.025, xác suất rằng chỉ người chồng sẽ sống ít nhất mười năm là 0,01, và xác suất rằng cả hai người trong số họ sẽ sống ít nhất mười năm là 0,96. Tính kì vọng của phí bảo hiểm trên yêu cầu bồi thường, cho rằng bảo hiểm của người chồng tồn tại ít nhất mười năm?

Bài giải

Gọi W là biến cố mà người vợ sống sót ít nhất 10 năm.
H là biến cố mà người chồng sống sót ít nhất 10 năm.
B là số tiền bảo hiểm phải trả.

C là số tiền lợi nhuận.
Ta có:

$$Pr(H) = Pr(H \cap W) + Pr(H \cap W^c) = 0,96 + 0,01 = 0,97$$

Mà:

$$Pr(W^c|H) = \frac{Pr(H \cap W^c)}{Pr(H)} = \frac{0,01}{0,97} = 0,0103$$

Vậy:

$$\begin{aligned} E(c|H) &= E((1000 - B)|H) \\ &= 1000 - E(B|H) \\ &= 1000 - (0.Pr(W|H) + 10000.Pr(W^c|H)) \\ &= 1000 - 10000.0,0103 = 897 \end{aligned}$$

■

Bài 15.10

Một hộp chứa 30 viên bi trong đó có 8 màu đen, 12 màu đỏ và 10 là màu xanh. Ngẫu nhiên, chọn bốn viên bi mà không cần thay thế. Cho X là số viên bi màu đen trong các mẫu của bốn.
(a) Xác suất mà không có đá cẩm thạch màu đen đã được lựa chọn là gì?
(b) Xác suất chính xác một cẩm thạch đen được lựa chọn là gì?
(c) Tính E(X)

Bài giải

Không gian mẫu là: C_{30}^4
(a) Số cách lấy ra mà không có bi màu đen: C_{22}^4
Xác suất không có đá cẩm thạch màu đen đã được lựa chọn là: $\frac{C_{22}^4}{C_{30}^4}$=0.267
(b) Số cách lấy ra có một bi màu đen là: $C_8^1 C_{22}^3$
Xác suất có 1 đá cẩm thạch màu đen là: $\frac{C_8^1 C_{22}^3}{C_{30}^4}$=0.449
(c) E(X)=np với n=4 $p = \frac{8}{30} \Rightarrow E(X) = 1.067$

■

Bài 15.10

1 hộp chứa 30 viên bị, trong đó có 8 bi đen, 12 bi đỏ và 10 bi xanh. Ngẫu nhiên lấy không hoàn lại 4 bi. Gọi X là số bi đen trong mẫu 4 bi vừa lấy ra.

a) Tính xác suất không có bi đen trong 4 bi?

b) Tính xác suất có đúng 1 bi đen được lấy ra?

c) Tính $E(X)$.

Bài giải

Ta có

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{C_{22}^4}{C_{30}^4}$	$\frac{C_8^1 C_{22}^3}{C_{30}^4}$	$\frac{C_8^2 C_{22}^2}{C_{30}^4}$	$\frac{C_8^3 C_{22}^1}{C_{30}^4}$	$\frac{C_8^4}{C_{30}^4}$

a) Xác suất không có bi đen: $\dfrac{C_{22}^4}{C_{30}^4} = 0.267$.

b) Xác suất có đúng 1 bi đen: $\dfrac{C_8^1 C_{22}^3}{C_{30}^4} = 0.449$.

c)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{4} x \times P(X = x) \\
&= 1.068.
\end{aligned}
$$

■

Bài 15.12

Một cửa hàng máy tính chuyên bán laptop đã qua sử dụng. Các laptop được phân thành 2 loại: tốt và bình thường. Giả sử rằng nhân viên của cửa hàng có thể nói một laptop bất kì là tốt hay bình thường. Tuy nhiên khách hàng thì không thể nói gì khác. Giả sử rằng xác suất để khách hàng mua được laptop tốt là 0.4. Một laptop tốt của cửa hàng có chi phí 400\$ và khách hàng sẽ phải 525\$ trong khi laptop bình thường của cửa hàng có chi phí 200\$ và khách hàng sẽ phải trả 300\$.
(a) Tính giá trị kỳ vọng của việc mua laptop đã qua sử dụng của khách hàng - người mà không biết thêm được bất kì thông tin gì.
(b) Giả sử rằng khách hàng sẽ không trả nhiều hơn so với giá trị kỳ vọng của họ đối với việc mua laptop đã qua sử dụng, vậy nhân viên của cửa hàng có bán cho họ laptop tốt không?

Bài giải

(a) Theo đề bài ta có:

> Xác suất để mua được laptop tốt là 0.4 và số tiền khách hàng phải trả là 525\$
> Xác suất để mua được laptop bình thường là 0.6 và số tiền khách hàng phải trả là 300\$

Do đó kỳ vọng của việc mua laptop đã qua sử dụng của khách hàng là:

$E(X) = 525(0.4) + 300(0.6) = 390\$$

(b) Một laptop tốt của cửa hàng có chi phí 400$.

$$E(X) = 390 < 400$$

Do đó với việc khách hàng không trả nhiều hơn giá trị kì vọng thì hiển nhiên nhân viên cửa hàng sẽ không bán cho họ laptop tốt.

■

Bài 15.13

Một chiếc bình chứa 10 viên bi trong đó có 3 viên bi đen. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi (không hoàn lại) và xem đó có phải bi màu đen hay không. Đặt biến ngẫu nhiên X là số lượng viên bị được chọn không có màu đen.

1. Tìm hàm khối xác suất của X.

2. Tìm hàm phân phối tích lũy của X.

3. Tìm giá trị kì vọng của X.

Bài giải

1. Hàm khối xác suất của X.

x	1	2	3	4
P(x)	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2. Hàm phân phối tích lũy của X.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{30} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{3} & 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{6} & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4. \end{cases}$$

■

Bai 15.14

Một công ty bảo hiểm tự động được thực hiện một hệ thống tiền thưởng mới. Trong mỗi tháng, nếu một hợp đồng bảo hiểm không có xảy ra tai nạn, anh ta hoặc cô ta sẽ nhận được tiền thưởng 5,00 tiền mặt trở lại từ các công ty bảo hiểm. Trong số 1.000 người mua bảo hiểm của công ty bảo hiểm ô tô, 400 được phân loại như người lái xe có nguy cơ thấp và 600 được phân loại như người lái xe có nguy cơ cao. Trong mỗi tháng, xác suất không có tai nạn cho người lái xe có nguy cơ cao là 0,80 và xác suất không có tai nạn cho người lái xe có nguy cơ thấp là 0,90. Tính toán tiền thưởng dự kiến từ các doanh nghiệp bảo hiểm cho 1000 hợp đồng trong một năm.

Bài giải

Gọi A: là biến cố người lái xe có nguy cơ thấp $\Longrightarrow$ A = 400
P(A): là xác suất không có tai nạn cho người lái xe có nguy cơ thấp $\Longrightarrow$ P(A) = 0.9
B là biến cố người lái xe có nguy cơ cao $\Longrightarrow$ B = 600
P(B): là xác suất không có tai nạn cho người lái xe có nguy cơ cao $\Longrightarrow$ P(B) = 0.8
X: là số tiền thưởng trong một năm

Vậy số tiền thưởng dự kiến từ công ty bảo hiểm cho 1000 hợp đông trong một năm là:
$X = (A \times P(A) + B \times P(B)) \times 5 \times 12$
$X = (400 \times 0.9 + 600 \times 0.8) \times 5 \times 12$
$X = 50400$

■

Bài 16.1

Chứng minh rằng X là một biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm phân phối xác suất
$p(x) = cx^2$, x=1,2,3,4
(a) Tìm giá trị của c
(b) Tìm E(X)
(c) Tìm E(X(X-1))

Bài giải

(a) x là biến ngẫu nhiên rời rạc nên ta có
$\sum_{x=1}^{4} cx^2 = 1 \Leftrightarrow 30c = 1$
Vậy $c = \frac{1}{30}$
(b) E(X)=1*p(1)+2*p(2)+3*p(3)+4*p(4)=$\frac{4}{3}$
(c) $E(X(X-1)) = E(X^2 - X)$=(1-1)*p(1)+(4-2)*p(2)+(9-3)*p(3)+(16-4)*p(4)=$\frac{127}{15}$

■

Bài 16.2

Một biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối xác suất sau đây được định nghĩa trong dạng bảng

x	-1	1	2
$p(x)$	$2c$	$3c$	$4c$

(a) Tìm giá trị của c.
(b) Tính p (-1), p (1), và p (2).
(c) Tìm E (X) và E (X2).

Bài giải

a)Ta có: $-1 \times 2c + 3c + 2 \times 4c = 1$
$\Rightarrow c = \dfrac{1}{9}$
b)Với $c = \dfrac{1}{9}$
$p(-1) = \dfrac{-2}{9}$
$p(1) = \dfrac{3}{9}$
$p(2) = \dfrac{4}{9}$
c)$E(X) = \dfrac{-2}{9} + \dfrac{3}{9} \times 1 + \dfrac{4}{9} \times 2 = 1$
$E(X^2) = \dfrac{2}{9} \times (-1)^2 + \dfrac{3}{9} \times 1 + \dfrac{4}{9} \times 2^2 = \dfrac{7}{3}$

■

Bài 16.3

Cho biến ngẫu nhiên X với các giá trị {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Giả sử rằng p(x)=kx (k là hằng số dương)
a) Xác định giá trị của k?
b) Tính Pr(X=x), với x nhận các giá trị là số chẵn
c) Tính kì vọng của X

Bài giải

- câu a
  Theo giả thiết ta có hàm phân phối xác suất

$$p(x) = \begin{cases} \text{kx} & \text{nếu } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Ta có $\sum_{x=1}^{6} p(x) = k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 21k = 1$
Suy ra $k = \dfrac{1}{21}$
Vậy giá trị k cần tìm là $\dfrac{1}{21}$
Vậy

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{21} & \text{nếu } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- câu b
  Xác suất $Pr(X = x)$, với x nhận các giá trị là số chẵn
  $Pr(X = x) = Pr(X = 2) + Pr(X = 4) + Pr(X = 6) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{4}{7}$

- câu c
  Kì vọng của X là
  $E(X) = \sum_{x=1}^{6} x \times p(x) = \sum_{x=1}^{6} x \times \dfrac{x}{21}$
  $= 1 \times \dfrac{1}{21} + 2 \times \dfrac{2}{21} + 3 \times \dfrac{3}{21} + 4 \times \dfrac{4}{21} + 5 \times \dfrac{5}{21} + 6 \times \dfrac{6}{21} = 4.333$

■

Bài 16.4

Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc. Chứng minh: $E(aX^2 + bX + c) = aE(X^2) + bE(X) + c$.

Bài giải

$$\begin{aligned} E(aX^2 + bX + c) &= \sum_{x \in D} (ax^2 + bx + c)p(x) \\ &= \sum_{x \in D} ax^2 p(x) + \sum_{x \in D} bxp(x) + \sum_{x \in D} cp(x) \\ &= a\sum_{x \in D} x^2 p(x) + b\sum_{x \in D} xp(x) + c\sum_{x \in D} p(x) \\ &= aE(X^2) + bE(X) + c. \end{aligned}$$

■

Bài 16.5

Xét một biến cố ngẫu nhiên X, khi mà hàm xác suất được cho như sau:

$$P(x) = \begin{cases} 0,1 & x = -3 \\ 0,2 & x = 0 \\ 0,3 & x = 2,2 \\ 0,1 & x = 3 \\ 0,3 & x = 4 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

Hãy tính $F(x)$ tương ứng cdf. Tìm $E(F(x))$.

Bài giải

$$P(x) = \begin{cases} 0,1 & x = -3 \\ 0,2 & x = 0 \\ 0,3 & x = 2,2 \\ 0,1 & x = 3 \\ 0,3 & x = 4 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases} \Rrightarrow \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 0,1 & -3 \leq x < 0 \\ 0,3 & 0 \leq x < 2,2 \\ 0,6 & 2,2 \leq x < 3 \\ 0,7 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

■

Bài 16.6

Một chính sách bảo hiểm thanh toán 100per mỗi ngày cho đến 3 ngày nhập viện và 50per ngày cho mỗi ngày nằm viện sau đó. Số ngày nằm viện, X; là một biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm xác suất

$$\text{f(x)}=\begin{cases} \frac{6-k}{15} & k = 1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Xác định thanh toán dự kiến cho nhập viện theo chính sách này

Bài giải

$$E(x) = 100\sum_{k=1}^{3} kf(k) + 50\sum_{k=4}^{5} kf(k)$$

$$\Leftrightarrow E(x) = 100\sum_{k=1}^{3} k\frac{6-k}{15} + 50\sum_{k=4}^{5} k\frac{6-k}{15} = 220$$

■

Bài 16.6

Một hợp đồng bảo hiểm trả 100 mỗi ngày cho 3 ngày đầu tiên nằm viện và trả 50 mỗi ngày nằm viên cho từng ngày sau đó.
Số ngày nằm viện, X, là một biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm xác suất:

$$p(k) = \begin{cases} \dfrac{6-k}{15} & k = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tính kì vọng của số tiền cho việc nằm viện dưới điều khoản mà hợp đồng đưa ra.

Bài giải

X là số ngày nằm viện.
Y là số tiền trả viện phí theo hợp đồng.

$$Y = \begin{cases} 100 & P(X=1) = \frac{1}{3} \\ 200 & P(X=2) = \frac{4}{15} \\ 300 & P(X=3) = \frac{1}{5} \\ 350 & P(X=4) = \frac{2}{15} \\ 400 & P(X=5) = \frac{1}{15} \end{cases}$$

$$E(Y) = 100 \times \frac{1}{3} + 200 \times \frac{4}{15} + 300 \times \frac{1}{5} + 350 \times \frac{2}{15} + 400 \times \frac{1}{15} = 220$$

■

Bài 16.8

Xét X là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất như sau:

$$p(x) = \begin{cases} 0.2 & x = -1 \\ 0.3 & x = 0 \\ 0.1 & x = 0.2 \\ 0.1 & x = 0.5 \\ 0.3 & x = 4 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Tìm $E(p(x))$.

Bài giải

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} E(p(x)) &= (0.2)(0.2) + (0.3)(0.3) + (0.1)(0.1) + (0.1)(0.1) + (0.3)(0.3) \\ &= 0.24 \end{aligned}$$

■

Bài 16.9

Trong hộp có 7 viên bi gồm 3 bi đỏ và 4 bi xanh. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi không hoàn lại. Nếu 2 bi cùng màu thì bạn thắng 2$ nếu không thì thua 1$. Cho X là biến ngẫu nhiên đại diện cho bạn thắng.
a) Tìm hàm phân phồi xác suất
b) Tính $E(2^x)$

Bài giải

a) P(X=2)=$\frac{C_3^2}{C_7^2}+\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{3}{7}$
P(X=-1)=1-P(X=2)=1-$\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

X	-1	2
$P(X)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

Vậy hàm phân phối là :

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & : x<-1\\ \frac{4}{7} & : -1\leqslant x<2\\ 1 & : x\geqslant 2\end{cases}$$

b) Đặt Y=2^x

Y	$\frac{1}{2}$	4
$P(Y)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

$E(Y)=\sum_{i=1}^{2} y_i p_i=\frac{1}{2}.\frac{4}{7}+4.\frac{3}{7}=2$

■

Bai 16.10

Ba loại vé được bán ra tại một rạp chiếu phim: trẻ em (với 3 đô la), người lớn (với 8 đô la), và người già (với 5 đô la). Cho:
C là biểu thị số vé bán được cho trẻ em.
A là số vé bán được cho người lớn'
S là số vé bán được cho người già.
Cho E[C] = 45; E[A] = 137; E[S] = 34: Giả sử số lượng vé bán độc lập. Bất kỳ bộ phim nào chi phí để chiếu là 300 đô la,bất kể kích thước đối tượng.
(a) Viết công thức liên quan giữa C; A; và S về lợi nhuận P của nhà hát cho một bộ phim cụ thể.
(b) Tìm E(P).

Bài giải

a. Công thức liên quan về lợi nhuận P giữa C, A và S:
$P=3\times C+8\times A+5\times S-300$

b. Tìm E(P)
$E(P) = 3 \times E(C) + 8 \times E(A) + 5 \times E(S) - 300$
$E(P) = 1101$

■

Bài 17.1

Mật độ xác suất của số đơn hàng bảo hiểm cho bới bảng

$$\begin{bmatrix} \text{Đơn hàng} & \text{Xác suất} \\ 20 & 0,15 \\ 30 & 0,10 \\ 40 & 0,05 \\ 50 & 0,20 \\ 60 & 0,10 \\ 70 & 0,10 \\ 80 & 0,30 \end{bmatrix}$$

Xác suất của các đơn hàng chênh lệch 1 độ lệch chuẩn so với số đơn hàng trung bình

Bài giải

$E(X) = 20.0,15 + 30.0,10 + 40.0,05 + 50.0,2 + 60.0,1 + 70.0,1 + 80.0,3 = 55$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 20^2.0,15 + 30^2.0,10 + 40^2.0,05 + 50^2.0,2 + 60^2.0,1 + 70^2.0,1 + 80^2.0,3 - 55^2 = 475$
$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = 21,795$
$P(55 - 21,795 \leq X \leq 55 + 21,795) = 0,05 + 0,2 + 0,1 + 0,1 = 0,45$

■

Bài 17.2

Chi phí hàng năm duy trì và sửa chữa xe trung bình 200 xe với một phương sai 260. Phương sai của các chi phí hàng năm duy trì và sửa chữa một chiếc xe nếu thuế suất $20^0\backslash_0$ được giới thiệu trên tất cả các mặt hàng liên quan đến việc bảo trì và sửa chữa xe ô tô là gì?

Bài giải

Đặt X và Y lần lượt là chi phí sửa chữa và duy trì xe hơi trước và sau $20^0\backslash_0$ thuế:
Ta có $Y = 1.2X$. Vì thế
Var(Y)=Var(1.2X)=$1.2^2 \times Var(X) = 1.2 \times 260 = 374$

■

Bài 17.3

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có hàm phân phối xác suất
$p(x) = c(x-3)^2, x = -2, -1, 0, 1, 2$
a) Tìm giá trị của hằng số c
b) Tính trung bình và phương sai của X

Bài giải

- câu a
  Theo giả thiết ta có bảng phân phối xác suất

x	-2	-1	0	1	2
p(x)	$25c$	$16c$	$9c$	$4c$	c

  Vì X là biến ngẫu nhiên rời rạc nên ta có
  $\sum_{x=-2}^{2} p(x) = 25c + 16c + 9c + 4c + c = 1$
  Suy ra $c = \dfrac{1}{55}$
  Vậy giá trị hằng số c cần tìm là $\dfrac{1}{55}$

- câu b
  Theo câu a ta có

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{55} & \text{nếu } x = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

$E(X) = \sum_{x=-2}^{2} x \times p(x) = \sum_{x=-2}^{2} x \times \dfrac{(x-3)^2}{55}$
$=$
$(-2)\times\dfrac{(-2-3)^2}{55}+(-1)\times\dfrac{(-1-3)^2}{55}+(0)\times\dfrac{(0-3)^2}{55}+(1)\times\dfrac{(1-3)^2}{55}+(2)\times\dfrac{(2-3)^2}{55}$
$= \dfrac{-12}{11} = -1.09$
$E(X^2) = \sum_{x=-2}^{2} x^2 \times p(x) = \sum_{x=-2}^{2} x^2 \times \dfrac{(x-3)^2}{55}$
$= (-2)^2 \times \dfrac{(-2-3)^2}{55} + (-1)^2 \times \dfrac{(-1-3)^2}{55} + (0)^2 \times \dfrac{(0-3)^2}{55} + (1)^2 \times \dfrac{(1-3)^2}{55} +$
$(2)^2 \times \dfrac{(2-3)^2}{55}$
$= \dfrac{124}{55}$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{124}{55} - (\dfrac{-12}{11})^2 = 1.064$
Vậy trung bình của X là $E(X) = -1.09$
phương sai của X là $Var(X) = 1.064$

■

Bài 17.4

Một hộp chứa 10 viên bi trong đó có 3 viên màu đen. Bốn viên bi được lựa chọn ngẫu nhiên và được thử nghiệm cho màu đen. Xác định biến ngẫu nhiên X là số lượng các viên bi đã chọn mà không phải là màu đen.

(a) Tìm các hàm khối xác suất của X.

(b) Tìm phương sai của X.

Bài giải

a) X là số lượng các viên bi đã chọn mà không phải là màu đen.
$p(1) = \frac{C_3^3.C_7^1}{C_{10}^4} = \frac{1}{30}$
$p(2) = \frac{C_3^2.C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{10}$
$p(3) = \frac{C_3^1.C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{1}{2}$
$p(4) = \frac{C_3^0.C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{6}$

b) Ta có: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
$E(X) = 1.\frac{1}{30} + 2.\frac{3}{10} + 3.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{6} = \frac{14}{5}$
$E(X^2) = 1^2.\frac{1}{30} + 2^2.\frac{3}{10} + 3^2.\frac{1}{2} + 4^2.\frac{1}{6} = \frac{42}{5}$
Vậy $Var(X) = \frac{42}{5} - (\frac{14}{5})^2 = 0.56$.

■

Bài 17.5

Giả sử X là biến số ngẫu nhiên rời rạc với hàm xác suất là: $P(x) = cx^2$ với $x = \{1, 2, 3, 4\}$

a) Tìm giá trị của c.

b) Tìm $E(X)$ và $E(X(X-1))$.

c) Tìm $Var(X)$.

Bài giải

$P(x) = cx^2$với$x = \{1, 2, 3, 4\}$

a) Giá trị của c:
Ta có :

$$\sum_{i=1}^{4} P_i = 1 \Leftrightarrow c + 4c + 9c + 16c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{30}x^2$$

X	1	2	3	4
P(x)	c	4c	9c	16c

b) Tìm $E(X), E(X(X-1))$:

X	1	2	3	4
P(x)	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$

$$\Rrightarrow E(X) = \sum xpi = 1\frac{1}{30} + 2\frac{2}{15} + 3\frac{3}{10} + 4\frac{8}{15} = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \sum x^2pi = 1^2\frac{1}{30} + 2^2\frac{2}{15} + 3^2\frac{3}{10} + 4^2\frac{8}{15} = \frac{59}{5}$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = EX^2 - EX = \frac{59}{5} - \frac{10}{3} = \frac{127}{45}$$

c) $Var(X)$:

Ta có: $VarX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{59}{5} - (\frac{10}{3})^2 = 0,6889$

■

Bài 17.6

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên với E(X) = 4 và var(X) = 9. Để Y = 4X + 5. Tính E(Y) và var(Y)

Bài giải

E(Y) = E(4X + 5) = 4E(X) + 5 = 4.4 + 5 = 21
var(Y) = var(4X + 5) = 4^2var(X) = 16.9 = 144

■

Bài 17.6

Giả sử X là 1 biến ngẫu nhiên với $E(X) = 4, Var(X) = 9$. Cho $Y = 4X + 5$. Tính $E(Y), Var(Y)$?

Bài giải

Ta có
$$E(Y) = E(4X+5) = 4E(X) + 5 = 4 \times 4 + 5 = 21.$$

$$\begin{aligned}
Var(Y) = Var(4X+5) &= E\left[(4X+5)^2\right] - [E(4X+5)]^2 \\
&= E\left(16X^2 + 40X + 25\right) - 21^2 \\
&= 16E(X^2) + 40E(X) + 25 - 21^2 \\
&= 16\left(Var(X) + (EX)^2\right) + 40 \times 4 + 25 - 21^2 \\
&= 16(9 + 4^2) + 40 \times 4 + 25 - 21^2 \\
&= 144.
\end{aligned}$$

Vậy $E(Y) = 21$ và $Var(Y) = 144$.

■

Bài 17.8

Gọi X là biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm mật độ xác suất được thể hiện trong sau:

x	-4	1	4
p(x)	0.3	0.4	0.3

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Bài giải

Ta có:
$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = -4(0.3) + 1(0.4) + 4(0.3) = 0.4$$

và
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 p(x_i) = (-4)^2(0.3) + 1^2(0.4) + 4^2(0.3) = 10$$

Do đó,
$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 10 - (0.4)^2 = 9.84$$
$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{9.84} = 3.137$$

Vậy $Var(X) = 9.84$ và $\sigma_X = 3.137$

■

Bài 17.9

Cho X là bến ngẫu nhiên với xác suất P(0)= 1-p, P(1)=p và bằng 0 vời những giá trị x khác. Trong đó 0 < p < 1. Tìm E(X) và Var(X)

Bài giải

$$P(X) = \begin{cases} 1-p & : x = 0 \\ p & : x = 1 \\ 0 & : x \neq 0; 1 \end{cases}$$

E(X)= 0.(1-p) + 1.p = p

$E(X^2) = 0^2.(1-p) + 1^2.p = p$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2$

■

Bai 18.1

Mark là một người bán xe với 10% cơ hội của việc thuyết phục khách hàng lựa chọn ngẫu nhiên để mua một chiếc xe hơi. Trong số 8 khách hàng đã được phục vụ bởi Mark, xác suất chính xác có một sự đông ý để mua một chiếc xe hơi là gì?

Bài giải

Gọi p là xác suất thuyết phục được khách hàng mua xe $\Longrightarrow$ p = 0.1

q là xác suất không thuyết phục được khách hàng mua xe $\Longrightarrow$ q = 0.9

X là số người đồng ý mua xe trong 8 người.

Vậy xác suất có một sự đồng ý mua xe hơi là:

$P(X=1) = C_8^1 \times p^1 \times q^{8-1}$

$P(X=1) = 8 \times 0.1 \times 0.9^7$

$P(X=1) = 0.3826$

■

Bài 18.2

Xác suất của một đứa trẻ mới sinh bị bệnh di truyền là 0.25. Nếu bố mẹ mang bệnh và muốn có 4 người con thì xác suất 2 trong số 4 người con bị bệnh là bao nhiêu?

Bài giải

Gọi X là số đứa trẻ mang bệnh

$X \sim B(4; 0,25)$

$P(X=2) = C_4^2.0,25^2.0,75^{4-2} = 0,211$

■

Bài 18.4

Một bệnh viện nhận được $\frac{1}{5}$ các lô hàng vaccine trị cúm từ công ty X và phần còn lại của chuyến hàng đến từ các công ty khác. Mỗi lô hàng có chứa một số lượng rất lớn các lọ vaccine. Biết rằng, có 10% các lọ vaccine cúm không hiệu quả đối với lô hàng đến từ công ty X, 2% các lọ vaccine cúm không hiệu quả đối với các công ty khác. Bệnh viện chọn ngẫu nhiên 30 lọ từ một lô hàng để kiểm tra và thấy rằng có 1 lọ vaccine cúm không hiệu quả. Tính xác suất để 1 lọ vaccine cúm không hiệu quả đó đến từ công ty X?

Bài giải

Gọi X "lô hàng vaccine cúm đến từ công ty X"
X^c "lô hàng vaccine cúm đến từ các công ty khác"
H "lọ vaccine cúm hiệu quả"
H^c "lọ vaccine cúm không hiệu quả"
Theo giả thiết ta có $P(X) = \frac{1}{5}$
Suy ra $P(X^c) = 1 - P(X) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
Gọi A là số lọ vaccine cúm không hiệu quả của công ty X
$A \sim B(30; 0.1)$
C là số lọ vaccine cúm không hiệu quả của các công ty khác
$C \sim B(30; 0.02)$
Ta có $P(H^c|X) = P(A = 1) = C_{30}^1 \times 0.1^1 \times 0.9^{29} = 0.141$
$P(H^c|X^c) = P(C = 1) = C_{30}^1 \times 0.02^1 \times 0.98^{29} = 0.334$
Xác suất để 1 lọ vaccine cúm không hiệu quả đó đến từ công ty X là

$$P(X|H^c) = \frac{P(H^c|X) \times P(X)}{P(H^c)} = \frac{P(H^c|X) \times P(X)}{P(H^c|X) \times P(X) + P(H^c|X^c) \times P(X^c)}$$

$$= \frac{0.141 \times \frac{1}{5}}{0.141 \times \frac{1}{5} + 0.334 \times \frac{4}{5}} = 0.096$$

■

Bài 18.5

Một công ty thiết lập một quỹ của 120 người để trả một số tiền thưởng C, cho 20 nhân viên bất kỳ là những người đạt được mức độ hiệu suất công việc cao trong năm tới. Mỗi nhân viên có 2% cơ hội để đạt được mức độ hiệu suất công việc cao trong năm tới, mỗi nhân viên là độc lập với nhau. Xác định giá trị tối đa của C mà xác suất là ít hơn 1% số tiền sẽ không đủ để trang trải tất cả các khoản thanh toán cho người có hiệu suất công việc cao.

<u>*Bài giải*</u>

$X \sim B(20, 0.02)$
Tìm x sao cho $Pr(X > x) < 0.01$
hay $0.99 \leq Pr(X) < 1$.
$\Leftrightarrow 0.99 \leq \sum_{k=0}^{x} C_{20}^{k}(0.02)^k(0.98)^{n-k} < 1$
$\Leftrightarrow 0.99 \leq C_{20}^{0}(0.02)^0(0.98)^{20-0} + C_{20}^{1}(0.02)^1(0.98)^{20-1} + C_{20}^{2}(0.02)^2(0.98)^{20-2} + ... < 1$
$\Rightarrow x = 2$
Vậy $C = \dfrac{120}{x} = 60$.

■

Bài 18.6

Một công ty bảo hiểm thừa nhận cơn bão giá của mình:

i) Trong nhiều năm dương lịch, có thể có nhiều nhất một cơn bão.

ii) Trong nhiều năm dương lịch, xác suất của một cơn bão là 0,05.

iii) Số cơn bão trong những năm dương lịch độc lập với nhau.

Sử dụng các dữ kiện trên. Tính xác suất có ít hơn 3 cơn bão trong 20 năm.

<u>*Bài giải*</u>

Xác suất có ít hơn 3 cơn bão trong 20 năm:
$P(X < 3) = C_{20}^{0}0,05^0(1-0,05)^{20} + C_{20}^{1}0,05^1(1-0,05)^{19} + C_{20}^{2}0,05^2(1-0,05)^{18} = 0,925$

■

Bài 18.7

Xác suất chiến thắng một trò chơi là $\frac{1}{300}$. Nếu bạn chơi trò chơi này 200 lần. Xác suất mà bạn giành chiến thắng ít nhất hai lần là bao nhiêu?

<u>*Bài giải*</u>

X $\sim$ B(200,$\frac{1}{300}$)
P(X $\geq$ 2) = 1 - P(X < 2)
= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - $C_{200}^{0}.p^0.(1-p)^{200}$ - $C_{200}^{1}.p^1.(1-p)^{199} = 0.144$

■

Bài 18.7

Xác suất để thắng một trò chơi là $\frac{1}{300}$. Nếu bạn chơi trò chơi này 200 lần thì hỏi xác suất để bạn thắng trò này ít nhất hai lần là bao nhiêu?

<u>*Bài giải*</u>

X là số lần thắng trò chơi này.
$\Rightarrow X \sim B\left(200, \dfrac{1}{300}\right)$
Hàm phân phối tích lũy của X là:

$$F(x) = Pr(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{|x|} C_{200}^k p^k (1-p)^{200-k} & 0 \leqslant x \leqslant 200 \\ 1 & x > n \end{cases}$$

Xác suất để thắng trò chơi này ít nhất 2 lần là:
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$= 1 - C_{200}^0 \left(1 - \dfrac{1}{300}\right)^{200} - C_{200}^1 \times \dfrac{1}{300}\left(1 - \dfrac{1}{300}\right)^{199}$
$= 0.144$

■

Bài 18.9

Giả sử rằng 3% pin đèn pin được sản xuất bị hỏng. Các pin được đóng thành hộp mỗi hộp 20 pin để phân phối cho các cửa hàng bán lẻ.
Tính xác suất chọn ngẫu nhiên một hộp pin có chứa 2 pin bị hỏng?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là số pin hỏng trong mỗi hộp.
Khi đó:

$$X \sim B(20, 0.03) \quad \text{và} \quad X \in \{0, 1, ..., 20\}$$

Do đó xác suất chọn ngẫu nhiên một hộp pin có chứa 2 pin hỏng là:

$$P(X = 2) = \mathrm{C}_{20}^2 (0.03)^2 (0.97)^{18} = 0.1198$$

■

Bài 18.10

Xác suất của chuyến bay 701 bị trễ trong bất kỳ 1 ngày là 0.2. Biến cố độc lập với các ngày khác. Các chuyến bay chỉ có thể đến trễ 1 lần mỗi ngày. Tính xác suất các chuyến bay bị trể từ 2 lần trở lên trong 10 ngày.

Bài giải

Gọi X là biến cố máy bay bị trễ trong 1 ngày
Với xác suất bị trễ trong 1 ngày là 0.2
$\Rightarrow X \sim B(10, 0.2)$
$P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$
$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$= 1 - C_{10}^{0}.0, 2^{0}.0, 8^{10} - C_{10}^{1}.0, 2^{1}.0, 8^{9}$
$= 0, 6242$

■

Bai 18.11

Ashley thấy rằng cô đánh bại Carla trong quần vợt 70% thời gian. Hai người chơi 3 lần trong một tháng cụ thể. Giả sử các kết quả là độc lập, xác suất Ashley thắng ít nhất 2 trong 3 trận đấu là gì?

Bài giải

Gọi p là xác suất Ashley thắng $\Longrightarrow$ p = 0.7
q là xác suất Ashley thua $\Longrightarrow$ q = 0.3
X là số ván thắng của Ashley

Xác suất Ashley thắng ít nhất 2 trận là:
$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$
$P(X \geq 2) = C_3^2 \times p^2 \times q^1 + C_3^3 \times p^3 \times q^0$
$P(X \geq 2) = 3 \times 0.7^2 \times 0.3 + 1 \times 0.7^3 \times 1$
$P(X \geq 2) = 0.784$

■

Bài 18.12

Xác suất của một bộ vi xử lý máy tính bị hỏng là 0.05. Xét một kiện hàng gồm 6 bộ vi xử lý
(a) Xác suất một bộ vi xử lý bị hỏng là bao nhiêu?
(b) Xác suất ít nhất một bộ vi xử lý bị hỏng là bao nhiêu?

(c) Xác suất nhiều hơn 1 bộ vi xử lý bị hỏng là bao nhiêu, khi cho là sẽ có 1 bộ vi xử lý bị hỏng?

Bài giải

(a) Gọi X là số bộ vi xử lý bị hỏng
$X \sim B(6, 0, 05)$
$P(X = 1) = C_6^1.0, 05^1.0, 95^5 = 0, 232$
(b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_6^0.0, 05^0.0, 95^6 \approx 0, 265$
(c) $P(X > 1|X \geqslant 1) = \frac{P(X>1.X\geqslant 1)}{P(X\geqslant 1)} = \frac{P(X>1)}{P(X\geqslant 1)}$
$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_6^0.0, 05^0.0, 95^6 - C_6^1.0, 05.0, 95^5 \approx 0, 0328$
$P(X > 1|X \geqslant 1) \approx 0.124$

■

Bài 18.13

Trong một chương trình khuyến mãi, một công ty bỏng ngô chèn một phiếu giảm giá cho một bộ phim Red Box miễn phí trong $10^0\backslash_0$của các hộp sản xuất. Gỉa sử mà chúng tôi mua 10 hộp bỏng ngô, xác suất mà chúng tôi nhận được ít nhất 2 phiếu giảm giá là gì?

Bài giải

Goị k là số phiếu giảm giá nhận được.
Theo đề bài ta có $k \geqslant 2$, p=0.1 và q=0.9.
Áp dụng công thức nhị thức ta có :
$\sum_{k=2}^{10} C_{10}^k 0.1^k 0.9^{10-k} = 0.2639$ (k=2,3,...,10)

■

Bài 19.1

Gieo 72 con xúc sắc độc lập nhau và quan sát mặt trên của chúng. Tính kì vọng của X^2 biết rằng X là biến cố "xuất hiện mặt 6 chấm".

Bài giải

Vì X là biến cố "xuất hiện mặt 6 chấm" nên
$X \sim B(72, \dfrac{1}{6})$ với $n = 72$ và $p = \dfrac{1}{6}$
Ta có
$E(X^2) = n \times (n-1) \times p^2 + n \times p = 72 \times (72-1) \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 + 72 \times \dfrac{1}{6} = 154$
Vậy kì vọng của X^2 là $E(X^2) = 154$

■

Bài 19.2

Một nhà điều hành tour du lịch có một xe buýt có thể chứa 20 khách du lịch. Các nhà điều hành biết rằng khách du lịch có thể không đi xe buýt, do đó, ông bán 21 vé. Xác suất mà một du khách sẽ không đi xe là 0.02, mỗi du khách là độc lập với nhau. Mỗi vé trị giá 50$, và không hoàn lại nếu du khách không đi xe. Nếu một du khách đã mua vé mà không có chỗ ngồi, các nhà điều hành tour du lịch phải bồi thường 100$ (gồm chi phí vé + 50$ hình phạt) cho du khách. Dự kiến doanh thu của các nhà điều hành tour du lịch là bao nhiêu?

Bài giải

Tổng tiền bán vé là: $50.21 = 1050\,\$$.
Xác suất 21 du khách cùng đi xe buýt là: $(1-0.02)^{21} = 0.65\,\$$.
$\Rightarrow$ Số tiền nhà điều hành phải bồi thường cho du khách là: $(0.65).100 = 65\,\$$.
Vậy dự kiến doanh thu là: $1050 - 65 = 985\,\$$.

■

Bài 19.3

Lấy X là một biến cố ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với thông số $(n; 0,2)$. Định nghĩa biến ngẫu nhiên là:

$$S = 100 + 50Y - 10Y^2$$

Tính giá trị kì vọng của S khi $n = 1, 2$ và 3

Bài giải

Ta có: $E(Y) = np$ và $E(Y^2) = n(n-1)p^2 + np$
Giá trị kì vọng của S khi $n = 1, 2$ và 3 là:

n	$E(Y)$	$E(Y^2)$	$E(S)$
1	0,2	0,2	$100 + 10 - 2 = 108$
2	0,4	0,48	$100 + 20 - 4.8 = 115,2$
3	0,6	0,84	$100 + 30 - 8.4 = 121,6$

■

Bài 19.4

Một cuộc nghiên cứu gần đây cho thấy rằng xác suất của một cuộc hôn nhân sẽ kết thúc trong ly hôn trong vòng 10 năm là 0.4. Để ly hôn thành công, tìm kỳ vọng và độ lệch chuẩn cho phân phối nhị thức X trong 1000 cuộc hôn nhân

Bài giải

X $\sim$ B(1000,0.4)
E(X) = np = 1000 x 0.4 = 400
var(X) = np(1-p) = 1000 x 0.4 x 0.6 = 240
$\Rightarrow \sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}$

■

Bài 19.4

Một nghiên cứu gần đây cho thấy, trong vòng 10 năm, xác suất 1 cặp vợ chồng li hôn là 0.4. Cho rằng biến cố li hôn là thành công. Tìm kì vọng và độ lệch chuẩn cho biên ngẫu nhiên X có phân phối nhị thức trên 1000 cuộc hôn nhân được khảo sát.

Bài giải

Ta có: $X \sim B(1000, 0.4)$ với $n = 1000$, $p = 0.4$. Do đó

$$E(X) = np = 1000 \times 0.4 = 400.$$
$$Var(X) = np(1-p) = 1000 \times 0.4 \times 0.6 = 240.$$

Suy ra

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{240} = 15.492.$$

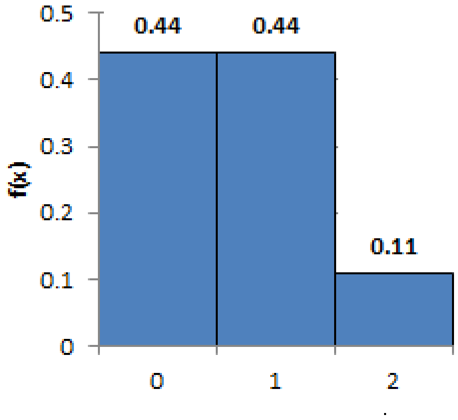
Vậy $E(X) = 400$ và $\sigma_X = 15.492$.

■

Bài 19.6

Tung một con xúc sắc 2 lần. Thành công là khi xuất hiện mặt 3 hoặc mặt 6.
(a) Viết hàm mật độ xác suất.
(b) Lập bảng phân phối xác suất.
(c) Vẽ biểu đồ của hàm mật độ.
(d) Tính giá trị trung bình và độ lệch chuẩn.

Bài giải



(a) Xác suất xuất hiện mặt 3 hoặc mặt 6 sau 2 lần tung là

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Gọi X là biến cố xuất hiện mặt 3 hoặc mặt 6 sau hai lần tung xúc sắc. Khi đó:

$$X \sim B(2, \frac{1}{3}) \quad \text{và} \quad X \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} C_2^x(\frac{1}{3})^x(\frac{2}{3})^{2-x} & \text{với} \quad x = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

(b) Ta có:

$$P(X = 0) = C_2^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.44$$

$$P(X = 1) = C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 0.44$$

$$P(X = 2) = C_2^0\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0.11$$

Bảng phân phối xác suất:

x	0	1	2
P(X=x)	0.44	0.44	0.11

(c) Biểu đồ của hàm mật độ:

(d) Giá trị trung bình $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 0(0.44) + 1(0.44) + 2(0.11) = 0.66$$

Độ lệch chuẩn σ_X:
Ta có:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 p(x_i) = 0^2(0.44) + 1^2(0.44) + 2^2(0.11) = 0.88$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.88 - 0.66^2 = 0.44$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{0.44} = 0.66$$

■

Bài 20.1

Số vụ tai nai xảy ra trên đoạn đường cao tốc là 4 vụ mỗi ngày. Giả sử rằng con số này tuân theo phân phồi Poisson. Tím xác suất không có tai nạn xảy ra trong 1 ngày. Tìm xác suất có 1 vụ tai nạn xảy ra trong 2 ngày.

Bài giải

Gọi X là biến cố số có tai nạn xảy ra trong 1 ngày
Trung bình số vụ tai nạn xảy ra mỗi ngày là $\lambda = 4$
$\Rightarrow X \sim P(4)$
Xác suất không có tai nạn xảy ra trong 1 ngày là :
$P(X = 0) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-4}.\frac{4^0}{0!} =$ 0,0183
$P(X = 1) = e^{-4}.\frac{4^1}{1!} =$ 0,0183
Đặt Y là xác suất bị tai nạn 1 lần trong 2 ngày
$\Rightarrow P(Y) = P(X = 1)P(X = 0) + P(X = 0)P(X = 1) = 0,0027$

■

Bai 20.2

Một nhà điều hành điện thoại nhận cuộc gọi trung bình của 2 cuộc gọi mỗi phút. Tính xác suất nhận được 10 cuộc gọi trong 5 phút?

Bài giải

Gọi:
λ là giá trị kì vọng xảy ra của cuộc gọi trong khoảng cho sẵn.
k là số cuộc gọi ta xét. $\Longrightarrow$ k=10.

X là số cuộc gọi.

Tính λ:
ta có 2 cuộc gọi/1 phút $\Longrightarrow$ 1 cuộc gọi/0.5 phút
tính 10 cuộc gọi - 5 phút
$\Longrightarrow \lambda = 5 \div 0.5 = 10$.
Xác suất có 10 cuộc gọi trong 5 phút:

$$P(X = k) = e^{(-\lambda)} \times \frac{\lambda^k}{k!} = e^{(-10)} \times \frac{10^{10}}{10!} = 0.1251$$

■

Bài 20.3

Trong bản phát thảo đầu tiên của sách lý thuyết xác suất, trung bình có 15 từ sai trong mỗi trang. Giả sử rằng số lỗi mỗi trang có phân phổi Poisson. Xác suất một trang không có lỗi là bao nhiêu?

Bài giải

Gọi X là số lỗi trong mỗi trang
$X \sim P(\lambda = 15)$
$P(X = 0) = 15^0.\frac{e^{-15}}{0!} \approx 3,06.10^{-7}$

■

Bài 20.4

Giả sử rằng số lượng người nhận vào một phòng cấp cứu mỗi ngày là một biến ngẫu nhiên Poisson với tham số $\lambda = 3$.
(a) Tìm xác suất để 3 hoặc nhiều người hơn nhận vào các trường hợp khẩn cấp phòng ngày hôm nay.
(b) Tìm xác suất mà không có người được nhận vào phòng cấp cứu ngày hôm nay.

Bài giải

Gọi X là số lượng người vào phòng cấp cứu.
Với $\lambda = 3$
a)Xác suất để 3 hoặc nhiều hơn vào phòng cấp cứu trong một ngày là:
$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - [\frac{\lambda^1 e^{-1}}{1!} + \frac{\lambda^2 e^{-2}}{2!}] = 0.577$
b)Xác suất để không có người nào được nhận vào phòng cấp cứu là:
$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-3}}{0!} = 0.05$

■

Bài 20.5

Số khách mời đến tham gia sự kiện, theo phân phối Poisson với số lượng trung bình 2 người mỗi phút. Tính xác suất
a) Tối đa sẽ có 4 khách mời đến bất kì trong mỗi phút
b) ít nhất 3 khách mời sẽ đến trong khoảng thời gian 2 phút
c) có đúng 5 khách mời sẽ đến trong 3 phút

<u>*Bài giải*</u>

Số khách mời đến tham gia sự kiện được tổ chức, theo phân phối Poisson với tham số $\lambda = 2$
Gọi $X_i(i = 1, 2, 3)$ là số khách mời sẽ đến trong phút thứ i
Theo giả thiết ta có X_i độc lập nhau, $X_i \sim P(2)$

- câu a
  Tối đa sẽ có 4 khách mời đến bất kì trong mỗi phút
  Suy ra $X_1 \sim P(2)$
  Vậy xác suất tối đa sẽ có 4 khách mời đến bất kì trong mỗi phút là
  $Pr(X \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} e^{-}2 \times \dfrac{2^k}{k!} = 0.947$
- câu b
  Gọi Y là số khách mời sẽ đến trong khoảng thời gian 2 phút
  Ta có $Y = X_1 + X_2$
  Suy ra $Y \sim P(4)$
  Vậy xác suất ít nhất 3 khách mời sẽ đến trong khoảng thời gian 2 phút là
  $Pr(Y \geq 3) = 1 - Pr(Y \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} e^{-}4 \times \dfrac{4^k}{k!} = 0.762$
- câu c
  Gọi Z là số khách mời sẽ đến trong 3 phút
  Ta có $Z = X_1 + X_2 + X_3$
  Suy ra $Z \sim P(6)$
  Vậy xác suất có đúng 5 khách mời sẽ đến trong 3 phút là
  $Pr(Z = 5) = e^{-}6 \times \dfrac{6^5}{5!} = 0.161$

$\blacksquare$

Bài 20.6

Giả sử rằng số vụ tai nạn xe hơi trên một đoạn đường cao tốc nhất định có thể được mô tả bởi một biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với độ lệch chuẩn $\sigma = 2$. Tính xác suất để có ít nhất ba tai nạn xảy ra?

Bài giải

Gọi X là số vụ tai nạn xảy ra trên đoạn đường cao tốc.
Theo đề ra X có phân phối Poisson với độ lệch chuẩn $\sigma = 2$ nên:
$\lambda = Var(X) = (\sigma)^2 = 4$
$\Rightarrow X \sim P(4)$.
Khi đó xác suất có ít nhất ba tai nạn xảy ra là:
$Pr(X \geq 3) = 1 - Pr(X < 3)$
$= 1 - [Pr(X = 0) + Pr(X = 1) + Pr(X = 2)]$
$= 1 - (\frac{e^{-4}.4^0}{0!} + \frac{e^{-4}.4^1}{1!} + \frac{e^{-4}.4^2}{2!})$
$= 0.7618967.$

■

Bài 20.7

Một truy cập Geiger giám sát sự rò rỉ của hạt α từ một thùng chứa chất phóng xạ. Trong một thời gian dài, mức trung bình của 50 hạt mỗi phút được đo. Giả định sự xuất hiện của hạt tại quầy được mô hình bởi phân phối Poisson.

a) Tính toán xác suất đó hạt ít nhất một đến trong một khoảng thời gian cụ thể một giây.

b) Tính toán xác suất rằng ít nhất hai hạt đến trong một khoảng thời gian cụ thể hai giây.

Bài giải

Gọi X là biến ngẫu nhiên mô tả số hạt α xuất hiện tại quầy.
λ= 50 hạt trên mỗi phút.
$X \sim P(\lambda)$

a) Trong 1s thì ta có $\frac{50}{60}$ hạt xuất hiện tại quầy: $X \sim P(\frac{5}{6})$
Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \frac{e^{\frac{-5}{6}}(\frac{5}{6}^0)}{0!} \\ &= 0,5654 \end{aligned}$$

b) Trong 2s ta có $\dfrac{50}{30}$ hạt xuất hiện tại quầy: $X \sim P(\frac{5}{3})$
Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \frac{e^{\frac{-5}{3}}(\frac{5}{3}^0)}{0!} - \frac{e^{\frac{-5}{3}}(\frac{5}{3}^1)}{1!} \\ &= 0,4963 \end{aligned}$$

■

Bài 20.8

Một chuyên viên thống kê đã thống kê rằng những người mua bảo hiểm có hai đơn đặt hàng gấp ba lần bốn đơn đặt hàng.
Nếu số đơn đặt hàng có phân phối Poisson. Tìm phương sai của số đơn đặt hàng đó?

Bài giải

X: Số đơn đặt hàng.
X $\sim$ P(λ)
P(X = 2) =$e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}$
P(X = 4) =$e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!}$
Mà P(X = 2) = 3P(X = 4)
$\Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{2!} = 3\ \frac{\lambda^4}{4!}$
$\Rightarrow \lambda = 2$

■

Bài 20.8

Một chuyên gia tính toán bảo hiểm đã phát hiện ra là người mua bảo hiểm có thể sắp xếp 2 phần số tiền bồi thường sẽ gấp 3 lần khả năng sắp xếp 4 phần số tiền bồi thường. Nếu số phần số tiền được sắp xếp tuân theo phân phối Poisson thì phương sai của nó là bao nhiêu?

Bài giải

X: số phần số tiền được sắp xếp.
$\Rightarrow X \sim P(\lambda)$
Ta có $P(X = 2) = 3P(X = 4) \Leftrightarrow e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^2}{2!} = 3e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^4}{4!}$
$\Rightarrow \lambda = 2$
$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = 2$

■

Bài 20.10

Trung bình số chuyến tàu về đến trạm trong một ngày tại một trung tâm thành phố là 12. Tìm xác suất mà vào một ngày nhất định có ít hơn 9 chuyến tàu về đến trạm?

Bài giải

Gọi X là số chuyến tàu về đến trạm trong một ngày.
Khi đó, $X \sim P(12)$.
Xác suất có ít hơn 9 chuyến tàu về đến trạm trong ngày:

$$\begin{aligned} P(X<9) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+ \\ &\quad +P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8) \\ &= \frac{12^0}{0!}e^{-12}+\frac{12^1}{1!}e^{-12}+\frac{12^2}{2!}e^{-12}+\frac{12^3}{3!}e^{-12}+\frac{12^4}{4!}e^{-12}+ \\ &\quad +\frac{12^5}{5!}e^{-12}+\frac{12^6}{6!}e^{-12}+\frac{12^7}{7!}e^{-12}+\frac{12^8}{8!}e^{-12} \\ &= 0.1550 \end{aligned}$$

■

Bài 20.11

Số lượng xe lửa đến ga trung bình 1 ngày là 12 chuyến. Tính xác suất xe lửa đến ga ít hơn 9 chuyến

Bài giải

Đặt X là số xe lửa đến ga 1 ngày
Trung bình số xe lửa đến ga 1 ngày là $\lambda = 12$
$\Rightarrow X \sim P(12)$
$P(X<9) = \sum_{i=0}^{8} P(X=i) = \sum_{i=0}^{8} e^{-12}.\frac{12^i}{i!} =$ 0,155

■

Bài 21.1

Cho X là một phân phối nhị thức với tham số $n = 200$ và $p = 0.02$. Tính $Pr(X \geq 2)$. giải thích tại sao phân phối Poisson được cho là một phép lấy xấp xỉ tốt của $Pr(X \geq 2)$ và sau đó tính giá trị của xấp xỉ này.

Bài giải

Ta có
$Pr(X \geq 2) = 1 - Pr(X < 2) = 1 - Pr(X = 0) - Pr(X = 1)$
$= 1 - C_{200}^{0} \times (0.02)^{0} \times (0.98)^{200} - C_{200}^{1} \times (0.02)^{1} \times (0.98)^{199} \approx 0.9106$
Dùng phép lấy xấp xỉ Poisson. Ta kiểm tra điều kiện

- $n = 200 \geq 20$
- $p = 0.02 \leq 0.05$
- $\lambda = np = 200 \times 0.02 = 4$
  Nên ta có thể tính các xác suất xấp xỉ theo phân phối Poisson như sau
  $Pr(X \geq 2) = 1 - Pr(X < 2) = 1 - \sum_{k=0}^{1} e^{-}4 \times \frac{4^k}{k!} \approx 0.984$

■

Bài 21.2

Trong một nhà máy sản xuất TV, xác suất sản xuất một TV bị hư hỏng là 0.03. Sử dụng phân phối Poisson, tìm xác suất sản xuất một TV bị hư hỏng trong 20 chiếc.

Bài giải

Đặt X là số TV bị hỏng, ta có :
$X \sim B(n, p)$ với $n = 20$ và $p = 0.03$.
Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối Poisson ta được:
$\lambda = np = 0.6$
$\Rightarrow X \sim P(0.6)$
Vậy $Pr(X = 1) = \frac{e^{-0.6}.(0.6)^1}{1!} \approx 0.3293.$

■

Bài 21.3

Giả sử có 1 trong số 400 lốp xe bị lỗi. Gọi X để biểu thị số lượng các lốp xe bị lỗi trong một nhóm gồm 200 lốp xe. Tính xác suất có ít nhất 3 trong số đó có lỗi?

Bài giải

Gọi X là biểu thị số lượng các lớp xe bị lỗi trong một nhóm gần 200 lốp xe. Vì có 1 lốp xe trong số 400 lốp xe bị lỗi $\Rightarrow p = \frac{1}{400} = 0,0025$
Vì $n = 200 > 100, p = 0,0025 < 0,01, \lambda = np = 0,5 < 20$

$\Rightarrow X \sim P(\lambda) = P(0,5)$ Xác suất có ít nhất 3 trong số đó có lỗi:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \\
&= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\
&= 1 - [\frac{e^{-0,5}0,5^0}{0!} + \frac{e^{-0,5}0,5^1}{1!} + \frac{e^{-0,5}0,5^2}{2!}] \\
&= 1 - 0,9856 \\
&= 0,0144
\end{aligned}$$

■

Bài 21.4

1000 bệnh nhân ung thư đang nhận một loại thuốc thử nghiệm lâm sàng cho bệnh ung thư. Tác dụng phụ đang được nghiên cứu. Xác suất mà một bệnh nhân bị ảnh hưởng tác dụng phụ của thuốc là 0.001. Tìm xác suất mà không ai trong số các bệnh nhân dùng thuốc thử nghiệm mà không có bất kì tác dụng phụ nào?

Bài giải

X $\sim$ B(1000,0.001)
Ta có:
n = 1000 $\geq$ 100
p = 0.001 $\leq$ 0.01
np = 1 $\leq$ 20
Từ phân phối nhị thức ta xấp xỉ qua phân phối Poisson
λ = np = 1
X $\sim$ P(λ = 1) P(X = 0) = $e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1}.\frac{(1)^0}{0!} = 0.3679$

■

Bài 21.4

Trong 1 thử nghiệm lâm sàng về tác dụng phụ của một loại thuốc mới, 1000 bênh nhân được đưa vào thử nghiệm. Xác suất có 1 bệnh nhân bị tác dụng phụ của thuốc là 0.001. Tìm xác suất không có bất kì bệnh nhân nào chịu tác dụng phụ của thuốc.

Bài giải

Gọi X là số bệnh nhân chịu tác dụng phụ của thuốc.
Ta có: $X \sim B(1000, 0.001)$.
Xác suất không có bất kì bệnh nhân nào chịu tác dụng phụ của thuốc là

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= C_{1000}^0 \times 0.001^0 \times (1 - 0.001)^{1000} \\
&= 0.368.
\end{aligned}$$

■

Bài 22.1

Một hộp kẹo gồm có 5 KitKat, 4 M&M và 1 Crunch. Các viên kẹo được lấy ra không hoàn lại cho đến khi gặp Crunch. Nếu X là biến ngẫu nhiên thể hiện số lần thí nghiệm xuất hiện Crunch, khi đó
(a) Tính xác suất xuất hiện Crunch ở lần thứ nhất?
(b) Tính xác suất xuất hiện Crunch ở lần thứ hai?
(c) Tính xác suất xuất hiện Crunch ở lần thứ n?

Bài giải

Theo đề bài, ta có:

Xác suất xuất hiện Crunch là $\frac{1}{10}$
X có phân phối hình học với tham số p = $\frac{1}{10} = 0.1$

Do đó:
(a) Xác suất xuất hiện Crunch ở lần thứ nhất là:

$$P(X = 1) = 0.1(1 - 0.1)^{1-1} = 0.1$$

(b) Xác suất xuất hiện Crunch ở lần thứ hai là:

$$P(X = 2) = 0.1(1 - 0.1)^{2-1} = 0.9$$

(c) Xác suất xuất hiện Crunch ở lần thứ n là:

$$P(X = n) = 0.1(1 - 0.1)^{n-1} = 0.9^n$$

■

Bài 22.2

Xác suất một chip máy tính bị lỗi là 0,10. Mỗi máy tính được chọn để kiểm tra khi nó được sản xuất. Tìm xác suất để tìm thấy ít nhất một lỗi trong 10 con chip máy tính được kiểm tra?

Bài giải

Gọi X là biến cố chip kiểm tra bị lỗi.
$X \sim B(10, 0.1)$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^{10} = 0,651$

■

Bài 22.4

Giả sử rằng mỗi lần bạn dùng nước sốt nóng, có xác suất 0.001 bạn bị ợ chua, độc lập trong tất cả những lần bạn dùng nước sốt
(a) Xác suất bạn bị ợ chua ở lần thứ nhất hoặc thứ hai khi ăn nước sốt nóng
(b) Kì Vọng của số lần bạn ăn nước sốt nóng cho tới khi bạn bị ợ chua lần thứ nhất.

Bài giải

(a) Gọi X:" Biến cố bị ợ chua ở lần thứ nhất hoặc thứ hai"
$P(X) = 0,001 + 0.999.0,001 = 1,999.10^{-3}$
(b) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.001} = 1000$

■

Bài 22.6

Xét một trò chơi tung liên tục n lần 1 con xúc sắc cân đối và đồng chất. Biết rằng khi con xúc sắc xuất hiện mặt 3 hoặc 1 chấm thì người chơi thắng. Cho X là số lần người chơi tung con xúc sắc.
a) Tính Pr(X=3)? Tính Pr(X=50)?
b) Tính kì vọng của X.

Bài giải

Xác suất để con xúc sắc xuất hiện mặt 3 hoặc 1 chấm là $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$
Theo giả thiết ta có X là số lần người chơi tung con xúc sắc, thì X có phân phối hình học với $p = \dfrac{1}{3}$

- câu a
  $Pr(X = 3) = p \times (1-p)^{3-1} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 0.1418$
  $Pr(X = 50) = p \times (1-p)^{50-1} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{49} = 7.842 \times 10^{-10}$
- câu b
  Kì vọng của X là $E(X) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

■

Bài 22.7

Trong những chiếc xe tại phòng trưng bày của một đại lý có 15% là xe mui trần. Một nhân viên bán hàng bắt đầu giới thiệu cho bạn một chiếc xe ngẫu nhiên, lần lượt từng chiếc. Đặt X là số xe mui trần bạn thấy ,mà trước đó chiếc xe đầu tiên bạn thấy không phải là mui trần.

(a) Tìm hàm phân phối xác suất của X?

(b) Tìm phân phối xác suất của $Y = X + 1$?

Bài giải

a) X là số xe mui trần bạn thấy ,mà trước đó chiếc xe đầu tiên bạn thấy không phải là mui trần.
$\Rightarrow Pr(X = 0) = (1 - 0.15), Pr(X = 1) = (1 - 0.15).0.15.$
Ta có $X \sim G(0.85)$ (phân phối bội) nên hàm phân phối xác suất của X với $p = 0.85$:

$$p_X(x) = \begin{cases} (0.85)(0.15)^{x-1} & x = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

b) Ta có hàm phân phối xác suất của $Y = X + 1$:

$$p_Y(x) = \begin{cases} (0.85)(0.15)^{y-1} & y = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

■

Bài 22.8

Một nghiên cứu về ắc quy của ô tô cho thấy rằng có 3% ắc quy của ô tô bị lỗi trong lúc sản xuất. Ắc quy được đóng thùng 20 chiếc để phân phối cho các nhà bán lẻ.

a) Tính xác suất chọn ngẫu nhiên một thùng mà trong thùng có ít nhất 2 hai ắc quy bị lỗi.

b) Giả sử chúng ta tiếp tục chọn ngẫu nhiên một thùng từ nhà sản xuất. Tính xác suất để chọn ít hơn năm thùng để tìm ra một thùng với ít nhất 2 sản phẩm bị lỗi?

Bài giải

Gọi X là số ắc quy bị lỗi.

a) Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\
&= 1 - C_{20}^{0} 0,03^{0} 0,97^{20} - C_{20}^{1} 0,03^{1} 0,97^{19} \\
&= 0,1198
\end{aligned}$$

■

Bài 22.9

Cho thấy sự phân bố hình học với tham số p đáp ứng phương trình

$$Pr(X > i + j | X > i) = Pr(X > j).$$

Điều này nói rằng sự phân bố hình học đáp ứng các "tài sản không nhớ"

Bài giải

Ta có:

Pr(X>i+j|X>i)=$\frac{Pr(X>i+j,X>i)}{Pr(X>i)}$=$\frac{Pr(X>i+j)}{Pr(X>i)}$ $= \frac{(1-p)^{(i+j)}}{(1-p)^{i}} = (1-p)^{j} = Pr(X > 1)$ (dpcm)

■

Bài 22.9

Bài giải

Gọi X là số phần số tiền được sắp xếp. $X \sim$ Poisson(λ).

Ta có $P(X = 2) = 3P(X = 4)$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^2}{2!} = 3e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^4}{4!}$

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{\lambda^2}{4}$

$\Rightarrow \lambda = 2$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = 2$

■

Bài 22.11

Giả sử rằng xác suất nộp đơn để được nhận vào làm việc sau phỏng vấn là 0.1. Người nộp đơn sẽ cố gắng tham gia nhiều cuộc phỏng vấn hơn cho đến khi được nhận. Giả sử rằng kết quả của các cuộc phỏng vấn là độc lập.

(a) Có bao nhiêu cuộc phỏng vấn người này kì vọng sẽ vượt qua để được nhận vào làm việc?

(b) Tính xác suất người này cần phải tham gia nhiều hơn 2 cuộc phỏng vấn.

Bài giải

Gọi X là số cuộc phỏng vấn người này tham gia. Khi đó X có phân phối hình học với tham số $p = 0.1$.
(a) Số cuộc phỏng vấn người này kì vọng vượt qua:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$$

(b) Xác suất người này cần tham gia nhiều hơn 2 cuộc phỏng vấn là:

$$\begin{aligned} P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) &= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - ((0.1)(0.9)^0 + (0.1)(0.9)^1) \\ &= 0.81 \end{aligned}$$

■

Bài 22.12

Trong mỗi sai số sau đây bạn cần xác định xem bài toán là một bài toán loại nhị thức hoặc một loại hình học. Trong mỗi trường hợp, tìm xác suất hàm khối p (x). Giả sử kết quả của các thử nghiệm riêng lẻ là độc lập với xác suất thành công.

1. Một game bắn súng vòm sẽ nhắm vào các mục tiêu cho đến khi một lần bắn thành công. Xác suất cơ bản của thành công là 0,40.
2. Một thử nghiệm lâm sàng ghi nhận 20 bệnh nhân với một căn bệnh hiếm gặp. Mỗi bệnh nhân được đưa ra một cách điều trị thử nghiệm, và số bệnh nhân cho thấy sự cải thiện đáng kể được quan sát thấy. Xác suất cơ bản thực sự của thành công là 0.60.

Bài giải

1. Là một loại hình học với hàm khối xác suất là: p(x) = $0.4(0.6)^{x-1}$, x = 1, 2, 3 ...
2. Là một loại nhị thức với hàm khối xác suất là:
   p(x) = $\begin{cases} C_{20}^{x}(0.6)^x(0.4)^{20-x} & x = 1, 2, 3..., 20 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

■

Bài 20.13

X là biến ngẫu nhiên có phân phối Poisson với tham số λ. Nếu $P(X = 1|X \leq 1)$=0,8. Tìm tham số λ

Bài giải

Ta có $P(X = 1|X \leq 1) = \frac{P(X=1.X\leq 1)}{P(X\leq 1)} = \frac{P(X=1)}{P(X\leq 1)} = 0,8$ (1)
$P(X = 1) = \lambda^1.\frac{e^{-\lambda}}{1!} = \lambda.e^{-\lambda}(2)$
$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-\lambda} + \lambda.e^{-\lambda}(3)$
Thay (2),(3) vào (1) ta được
$\frac{\lambda}{\lambda+1} = 0,8$
$\Leftrightarrow \lambda = 4$

■

Bài 20.14

Số lượng xe tải đi đến một kho xe tải vào một ngày nhất định có phân phối Poisson với trung bình là 2,5 / ngày.
(a) Tìm xác suất một ngày trôi qua không có nhiều hơn một chiếc xe tải đến?
(b) Tìm trung bình và độ lệch chuẩn của số lượng xe tải đến trong một khoảng thời gian 8 ngày.

Bài giải

Với $\lambda = 2.5$
Gọi X là số lượng xe tải đến kho xe.
a)Xác suất một ngày trôi qua không có nhiều hơn một xe tải đến kho là:
$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \dfrac{\lambda^0 e^{-2.5}}{0!} + \dfrac{\lambda^1 e^{-2.5}}{1!} = 0.2875$
b)Trung bình của số lượng xe tải đến trong vòng 8 ngày là:
$E(X) = 8 \times 2.5 = 20$
Độ lệch chuẩn của số lượng xe tải đến trong vòng 8 ngày là:
$\sigma = \sqrt{20} = 4.47$

■

Bài 23.1

Xét một đồng xu không đối xứng với xác suất nhận đầu là 0,1. Cho X là số lần va chạm cần thiết để có người đứng đầu thứ 8.
a. Xác suất nhận được người đứng đầu thứ 8 trên 50 lần tung?
b. Tìm kỳ vọng và độ lệch chuẩn của X

Bài giải

a. X là số lần va chạm cần thiết để nhận được người đứng đầu thứ 8. X là một negative binomial random variable với tham số r = 8, p = 0.1.
Do đó, xác suất nhận được người đúng đầu thứ 8 trên 50 lần tung là:
P(X=50) $= C_{50-1}^{8-1} \times 0.1^8 \times (1-0.1)^{50-8} = 0.0103$
b. E(X) $= \frac{r}{p} = \frac{8}{0.1} = 80$
Var(X) $= \dfrac{r(1-p)}{p^2} = \dfrac{8 \times 0.9}{0.9^2} = 720$
$\Longrightarrow$ Độ lệch chuẩn = 26.833

■

Bài 23.2

Gần đây người ta tìm thấy ở đáy biển gần Cyprus có dấu hiệu của dầu. Giả sử rằng có 20% cơ hội khoan trúng dầu. Tìm xác suất khoan trúng dầu từ lần 3 tới lần 5

Bài giải

Gọi X là biến cố khoan trúng dầu từ lần 3 tới lần thứ 5
X có phân phối nhị thức âm với r=3 và n=5
$Pr(X) = C_{5-1}^{3-1}.0,2^3.0,8^2 = 0,03072$

■

Bài 23.3

Xét một bài 52 lá. Liên tiếp rút ra một lá với sự thay thế và ghi lại giá trị bề mặt của nó. Cho X là số các thử nghiệm cần thiết để có được ba lá bài K.
(a) X phân phối gì?
(b) Xác suất mà X = 39 là gì?

Bài giải

a)X là phân phối negative binomial distribution.
Với r=3 , $p = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$
$\Rightarrow p(n) = C_{k-1}^{2}(\dfrac{12}{13})^{n-3}(\dfrac{1}{13})^3$
b)

■

Bài 23.4

Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất, gieo liên tục cho đến khi xuất hiện mặt 3 chấm trong khoảng thời gian 4^{th}. Cho X là số lần gieo cần thiết để đạt được mục tiêu. Tính $E(X)$ và $Var(X)$

Bài giải

Theo giả thiết ta có X là số lần gieo cần thiết để đạt được mục tiêu, do đó X là biến ngẫu nhiên có phân phối Nhị thức âm với tham sô $r = 4$ và $p = \dfrac{1}{6}$

Vậy

$E(X) = \dfrac{r}{p} = \dfrac{4}{\dfrac{1}{6}} = 24$

$Var(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2} = \dfrac{4 \times (1 - \dfrac{1}{6})}{\left(\dfrac{1}{6}\right)^2} = 120$

■

Bài 23.5

Tính xác suất để lần thứ tư xuất hiện mặt có hình đầu người trong chín lần tung một đồng xu hoàn hảo.

Bài giải

Gọi X biến ngẫu nhiên xuất hiện mặt đầu người với tham số $p = \frac{1}{2}$.

Theo đề ra ta có: $r = 4, n = 9$

Áp dụng công thức:

$p(n) = Pr(X = n) = {}_{n-1}C_{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$

Vậy xác suất để lần thứ tư xuất hiện mặt đầu người trong chín lần thử là:

$p(9) = {}_8C_3(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^5 = 0.109375$

■

Bài 23.6

Có 75% cơ hội để vượt qua bài kiểm tra viết ở kỳ thi lái xe. Tính xác suất một người sẽ vượt qua bài kiểm tra trong kỳ thi lần thứ hai ?

Bài giải

Xác suât để có cơ hội vượt qua bài thi là p=0,75.
Áp dụng biến cố ngẫu nhiên hình học:
$p(n) = p(1-p)^{n-1} \Rightarrow p(2) = 0,75.(1-0,75)^{2-1} = 0,75.0,25 = 0,1875$

■

Bài 23.7-chưa giải

Một công ty sẽ đưa ra một chính sách bảo hiểm để tai nạn xảy ra tại nhà máy sản xuất của mình. Xác suất mà một hoặc nhiều tai nạn sẽ xảy ra trong một tháng nào đó là $\frac{3}{5}$ Số vụ tai nạn xảy ra trong bất kỳ tháng nào là độc lập số vụ tai nạn xảy ra trong tất cả các tháng khác. Tính xác suất mà sẽ có ít nhất bốn tháng, trong đó không có tai nạn xảy ra trước tháng thứ tư, trong đó ít nhất một tai nạn xảy ra.

Bài giải

■

Bài 23.7

Một công ty đưa ra một chính sách bảo hiểm cho các tai nạn xảy ra trong nhà máy sản xuất. Xác suất có nhiều hơn 1 tai nạn xảy ra trong bất kì tháng nào là $\dfrac{3}{5}$.
Số tai nạn xảy ra trong các tháng là độc lập với nhau.
Tính xác suất có ít nhất 4 tháng mà trong đó không có tai nạn nào xảy ra trước khi tháng thứ tư có ít nhất 1 tai nạn xảy ra.

Bài giải

Gọi X là số tháng ít nhất không có tai nạn trước khi tháng thứ tư có ít nhất 1 tai nạn xảy ra.
Suy ra X có phân phối nhị thức âm với $r = 4$.
Xác suất có ít nhất 4 tháng mà trong đó không có tai nạn nào xảy ra trước khi tháng thứ tư có ít nhất 1 tai nạn xảy ra là

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{3} C_{3+x}^{x} \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^x \\ &= 0.2898. \end{aligned}$$

■

Bài 23.9

Một máy sản suất chip máy tính sản xuất ra 3% chip bị lỗi. Các chip máy tính sẽ được đóng hộp phân phối cho các cửa hàng bán lẻ, mỗi hộp có 20 chip.
Chọn ngẫu nhiên một hộp. Tính xác suất hộp được chọn có ít nhất 2 chip lỗi?

Bài giải

Gọi X là số chip lỗi trong mỗi hộp.
Khi đó:

$$X \sim B(20, 0.03)$$

Do đó xác suất hộp được chọn có ít nhất 2 chip lỗi là:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - (\mathrm{C}_{20}^{0}(0.03)^0(0.97)^{20} + \mathrm{C}_{20}^{1}(0.03)^1(0.97)^{19}) \\ &= 0.1198 \end{aligned}$$

■

Bài 23.10

Đặt X là phân phối nhị thức âm với r = 2 và p = 0.1. Tìm E(X) và σ_X.

Bài giải

E(X) = $\frac{r}{p} = 20$
$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{r(1-p)}{p^2}} = 13.41$

■

Bài 23.11

Giả sử rằng xác suất của một đứa trẻ tiếp xúc với bệnh cúm sẽ mắc bệnh cúm là 0.4. Xác suất đứa trẻ 10 tiếp xúc với bệnh cúm sẽ là đứa thứ 3 mắc bệnh?

Bài giải

Gọi X là số đứa trẻ tiếp xúc với bệnh cúm. X là một negative binomial random variable với tham số r = 3, p= 0.4.
Xác suất đứa trẻ thứ 10 tiếp xúc với bệnh cúm là đứa thứ 3 mắc bệnh là:
P(X=10) = $C_{10-1}^{3-1} \times 0.4^3 \times 0.6^7 = 0.0645$

■

Bài 23.12

Tung một con xúc xắc, tìm xác suất được mặt 3 3 lần trong n lần tung

Bài giải

Gọi X là biến cố tung được mặt 3 3 lần trong n lần tung
X có phân phối nhị thức âm do đó ta có
$P(X) = C^2_{n-1}.(\frac{1}{6})^3.(\frac{5}{6})^{n-3}$

■

Bài 23.13

Mỗi khi một cơn bão đến, một ngôi nhà mới có xác suất bị thiệt hại là 0.4. Những lần xuất hiện thiệt hại trong các cơn bão khác nhau là độc lập. Tính toán mode của số cơn bão làm cho nhà trải qua thiệt hại từ hai cơn bão. Gợi ý: mode của X là số nhằm tối đa hóa hàm khối lượng xác suất của X.

Bài giải

Đặt X là số lượng cơn bão làm cho nhà bị thiệt hại ($X \geqslant 2$)
$P(X = n) = C^{r-1}_{n-1}p^r(1-p)^{n-r} = (n-1)0.4^2 0.6^{n-2}$
Ta thấy rằng tỉ lệ:
$\dfrac{P(X = n+1)}{P(X = n)} = \dfrac{n.0.4^2 0.6^{n-1}}{(n-1)0.4^2 0.6^{n-2}} = \dfrac{0.6n}{n-1}$
Tỉ lệ này lớn hơn 1 khi và chỉ khi n=2 và nhỏ hơn 1 khi n=3. Do đó P(X=n) được tối đa khi n=3

■

Bài 24.1

Rút ngẫu nhiên 5 lá bài và không hoàn lại từ một bộ bài 52 lá. Tính xác suất nhận được chính xác 2 lá bài đen.

Bài giải

Gọi X là số lá bài đen nhận được, thì X là biến ngẫu nhiên có phân phối siêu bội với tham số $N = 52, r = 5, n = 26$
Vậy xác suất nhận được chính xác 2 lá bài đen là
$Pr(X = 2) = \dfrac{C^2_{26} \times C^3_{26}}{C^5_{52}} = 0.325$

■

Bài 24.2

Một hộp chứa 15 viên bi đỏ và 10 viên bi xanh. 7 viên bi được lấy ra ngẫu nhiên mà không hoàn lại. Tìm xác suất chọn được đúng 3 viên bi đỏ?

Bài giải

Gọi X là số bi đỏ trong 7 viên bi được lấy ra.
Khi đó, ta có: $X \sim H(7, 15, 25)$ nên:
$p(3) = Pr(X = 3) = \dfrac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \dfrac{C_{15}^3 C_{25-15}^{7-3}}{C_{25}^7} = 0.1988$

■

Bài 24.3

Một trò chơi xổ số kiến thiết chọn 6 con số, từ sáu số chính thức rút ra khỏi 53 số. Đặt X bằng số lần rút. Tìm hàm phân phối xác suất.

Bài giải

$$P(r) = \frac{C_k^n . C_{n-k}^{N-n}}{C_N^n}$$

Với n là 6 số được lấy ra và k là 1 trong 6 số đó.
Ta có:

k	0	1	2	3	4	5	6
Pr(X=k)	0,468	0,401	0,117	0,014	$7,06.10^{-4}$	$1,22.10^{-5}$	$4,36.10^{-8}$

■

Bài 24.4

Một gói 20 chip máy tính có chứa 4 chip bị lỗi. Ngẫu nhiên chọn 10 chip mà không cần thay thế. Tính xác suất để thu được đúng 3 chip bị lỗi.

Bài giải

Không gian mẫu: C_{20}^{10}
Xác suất để thu được đúng 3 chip bị lỗi: $\frac{C_4^3 C_{16}^7}{C_{20}^{10}}$=0.247678

■

Bài 24.4

Một cái túi có 20 con chip trong đó có 4 con chip bị lỗi. Chọn ngẫu nhiên 10 con chip không hoàn lại. Tính xác suất có đúng 3 con chip bị hỏng.

Bài giải

Gọi X là số con chip bị lỗi.
Xác suất bốc trúng 3 con chip bị lỗi trong 10 con chip được bốc ngẫu nhiên:
$P(X = 3) = \dfrac{C_4^3 C_{16}^7}{C_{20}^{10}} = \dfrac{80}{323} \approx 0.24768$

■

Bài 24.6

Một lô hàng có chứa 8 linh kiện trong đó 2 linh kiện hỏng và 6 linh kiện tốt.
Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại 4 linh kiện.
(a) Xác suất để 4 linh kiện được chọn đều tốt?
(b) Tính giá trị trung bình và phương sai của các linh kiện tốt

Bài giải

Gọi X là số linh kiện tốt trong số linh kiện được chọn.

$$X \sim H(4, 6, 8)$$

(a) Xác suất để 4 linh kiện được chọn đều tốt:

$$P(X = 4) = \frac{\mathrm{C}_6^4 \mathrm{C}_2^0}{\mathrm{C}_8^4} = 0.214$$

(b) Giá trị trung bình E(X):

$$E(X) = np = 4 \cdot \frac{6}{8} = 3$$

Phương sai Var(X):

$$Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = 4 \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{8-4}{8-1} = 0.429$$

■

Bài 24.7

Trong Texas tất cả các xe được kiểm tra hàng năm. Một Công ty vận chuyển có một đội 20 xe tải trong đó có 7 không đáp ứng các tiêu chuẩn qua cuộc kiểm tra. Năm xe được lựa chọn ngẫu nhiên để kiểm tra. Tìm xác suất không quá 2 xe được lựa chọn mà không đáp ứng các tiêu chuẩn qua cuộc kiểm tra ?

Bài giải

Đặt X là số xe được chọn không đáp ứng tiêu chuẩn.
$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{C_7^0.C_{13}^5}{C_{20}^5} + \frac{C_7^1.C_{13}^4}{C_{20}^5} + \frac{C_7^2.C_{13}^3}{C_{20}^5} = 0.793.$

■

Bài 24.8

Một nghiên cứu gần đây cho thấy, trong một thành phố 123.850 xe ra ngoài sẽ có 2.477 xe bị mất cắp. Cảnh sát trong thành phố đang cố gắng tìm những chiếc xe bị mất cắp. Giả sử 100 chiếc xe được lựa chọn ngẫu nhiên được kiểm tra bởi cảnh sát. Xác định xác suất chính xác 3 trong số những chiếc xe được lựa chọn đều bị đánh cắp. Bạn không cần phải cung cấp cho các giá trị số của biểu thức này.

Bài giải

Gọi X là số xe bị mất cắp. X là một hypergeometric random variable với tham số N = 123850, n = 2477, r = 100, k = 3
Xác suất chính xác 3 trong số những chiếc xe được lựa chọn đều bị đánh cắp là
P(X=3) $= \dfrac{C_n^k \times C_{N-n}^{r-k}}{C_N^r} = \dfrac{C_{2477}^3 \times C_{121373}^{97}}{C_{123850}^{100}}$

■

Bài 24.9

Xét một vali có 7 áo và 3 quần. Giả sử lấy 4 thứ trong vali không hoàn lại. Gọi X là tổng số áo được lấy ra. Tính $Pr(X \leq 1)$

Bài giải

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = P(X = 1) = \frac{C_33.C_7^1}{C_{10}4} = \frac{1}{30}$ (Do trong vali chỉ có 3 quần nên xác suất lấy được cả 4 quần =0)

■

Bài 24.10

Một nhóm gồm 4 phụ nữ và 20 đàn ông. Một hội đồng sáu người là được hình thành. Sử dụng phân phối siêu bội thích hợp, xác suất mà không có người phụ nữ nào trong hội đồng là gì?

Bài giải

Gọi X là số phụ nữ có trong hội đồng.
$P(X=0) = \dfrac{C_4^0 \times C_{20}^4}{C_{24}^4} = 0.2880$

∎

Bài 24.11

Một bình chứa 10 quả bóng trắng và 15 quả bóng đen. Gọi X là số quả bóng trắng nhận được trong một mẫu chọn ngẫu nhiên 10 quả bóng trong bình, không hoàn lại..
Tính $\dfrac{Var(X)}{E(X)}$

Bài giải

Theo giả thiết ta có X là số quả bóng trắng nhận được trong một mẫu chọn ngẫu nhiên 10 quả bóng, thì X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối siêu bội với tham số $N = 25, r = 10, n = 10$
Ta có $E(X) = \dfrac{nr}{N}$ và $VarX = \dfrac{nr}{N} \times \dfrac{N-r}{N} \times \dfrac{N-n}{N-1}$
Suy ra $\dfrac{Var(X)}{E(X)} = \dfrac{N-r}{N} \times \dfrac{N-n}{N-1} = \dfrac{25-10}{25} \times \dfrac{25-10}{25-1} = 0.375$
Vậy $\dfrac{Var(X)}{E(X)} = 0.375$

∎

Bài 24.12

Trong số 48 ứng viên cho vị trí kế toán bảo hiểm , có 30 ứng viên có bằng đại học về khoa học tính toán bảo hiểm. Có 10 ứng viên được lựa chọn ngẫu nhiên để phỏng vấn. Đặt X là số ứng viên trong số 10 người được chọn mà có bằng đại học về khoa học tính toán bảo hiểm. Tìm $Pr(X \leq 8)$

Bài giải

X là số ứng viên trong số 10 người được chọn mà có bằng đại học về khoa học tính toán bảo hiểm.
$\Rightarrow X \sim H(10, 30, 48)$.
Vậy $Pr(X \leq 8) = 1 - Pr(X > 8)$
$= 1 - [Pr(X = 9) + Pr(X = 10)]$
$= 1 - (\dfrac{C_{30}^{9}C_{48-30}^{10-9}}{C_{48}^{10}} + \dfrac{C_{30}^{10}C_{48-30}^{10-10}}{C_{48}^{10}})$
$= 0.956$.

■

Bài 25.1

Trong túi của bạn, bạn có một đồng 1 xu, hai đồng 5 xu, và hai đồng 10 xu. Bạn chọn 2 xu ngẫu nhiên (không hoàn lại). Đặt X là tổng số tiền của hai đồng xu mà chọn từ trong túi của bạn.

a) Tính hàm khối xác suất cho X.

b) Tìm hàm phân phối tích lũy $F(X)$.

c) Tính kỳ vọng?

Bài giải

a) Hàm phân phối xác suất:

k	2	6	10	11	15
Pr(X=k)	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2

b) Hàm phân phối tích lũy F(x):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0,1 & 2 \leq x < 6 \\ 0,5 & 6 \leq x < 10 \\ 0,6 & 10 \leq < 11 \\ 0,8 & 11 \leq < 15 \\ 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

c) Ta có:

$$2.0,1 + 6.0,4 + 10.0,1 + 11.0,2 + 15.0,2 = 8.8$$

■

Bài 25.2

Chúng tôi đang kiểm tra rất nhiều 25 pin, trong đó có 5 pin bị lỗi.Chúng tôi ngẫu nhiên chọn 3 pin. Cho X= số pin bị lỗi tìm thấy trong một mẫu 3. Cung cấp cho các chức năng phân phối tích lũy như một bảng.

Bài giải

$$Pr(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.495 & 0 \leq x < 1 \\ 0.909 & 1 \leq x < 2 \\ 0.996 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

■

Bài 25.2

Chúng ta tiến hành kiểm tra 25 pin trong đó có 5 pin bị lỗi. Chọn ngẫu nhiên 3 pin. Gọi X là số pin hư trong mẫu 3 pin vừa lấy ra. Viết hàm phân phối tích lũy của X dưới dạng bảng.

Bài giải

X	$(-\infty, 0)$	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3, $+\infty$)
$F_X(x)$ = P(X ≤ x)	0	$\frac{C_5^0C_{20}^3}{C_{25}^3}$	$\frac{C_5^1C_{20}^2}{C_{25}^3}$	$\frac{C_5^2C_{20}^1}{C_{25}^3}$	$\frac{C_5^3}{C_{25}^3}$

■

Bài 25.4

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X được cho bởi:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq x < 3.5 \\ 1 & 3.5 \leq x \end{cases}$$

Tính các xác suất của hàm mật độ.

Bài giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= F(1) = \frac{1}{2} \\
P(X=1) &= F(1) - F(1^-) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \\
P(X=2) &= F(2) - F(2^-) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \\
P(X=3) &= F(3) - F(3^-) = \frac{9}{10} - \frac{4}{5} = \frac{1}{10} \\
P(X=3.5) &= F(3.5) - F(3.5^-) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

■

Bài 25.5

Xét một biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối tích lũy được cho bởi:

$$\text{F(x)=} \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.1 & -2 \leq x < 1.1 \\ 0.3 & 1.1 \leq x < 2 \\ 0.6 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

1. Tìm hàm khối xác suất Pr(X) của X một cách rõ rãng.
2. Tính Pr(2< x <3).
3. Tính $Pr(X \geq 3)$.
4. $Pr(X \geq 3 \mid X \geq 0)$.

Bài giải

1. Hàm khối xác suất Pr(X) của X:

$$\text{Pr(x)=} \begin{cases} 0.1 & x = -2 \\ 0.2 & x = 1.1 \\ 0.3 & x = 2 \\ 0.4 & x = 3 \\ 0 & \# \end{cases}$$

2. Tính Pr(2< x <3):
   Pr(2< x <3) $= F(3^-) - F(2) = 0.6 - 0.6 = 0$

3. Tính $Pr(X \geq 3)$:
   $Pr(X \geq 3) = 1 - F(3^-) = 1 - 0.6 = 0.4$

■

Bài 25.7

Hàm phân phối tích lũy của X được cho bởi $F(x) = \begin{cases} 0 & x < -4 \\ 0,3 & -4 \leq x < 1 \\ 0,7 & 1 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$

(a) Tìm hàm mật độ xác suất của X
(b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn của X

Bài giải

(a) $f(x) = \begin{cases} 0,3 & x = -4, x = 4 \\ 0,4 & x = 1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$
(b) $E(X) = 0,3. - 4 + 0,3.4 + 0,4.1 = 0,4$
$E(X^2) = (-4)^2.0,3 + 4^2.0,3 + 0.4 = 10$
$Var(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2 = 9,84$
$SD(X) = \sqrt{Var(X)} \approx 3,137$

■

Bài 25.8

Trong trò chơi "búng xúc xắc", mỗi người chơi lật một đồng xu và thả một xúc xắc. Nếu đồng xu là mặt sấp, điểm số của bạn là số chấm hiển thị trên xúc xắc. Nếu đồng xu là mặt ngửa, điểm số của bạn gấp hai lần số chấm trên xúc xắc. (tức là, (sấp, 4) là giá trị 4 điểm, trong khi (ngửa, 3) được 6 điểm.) Cho X là số điểm của người chơi đầu tiên .
(a) Tìm các hàm khối lượng xác suất Pr (x).
(b) Tính cdf F(x) cho tất cả các số x.
(c) Tìm xác suất để X <4. Điều này có giống như F(4)?

Bài giải

a)Các sự kiện (H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6) đều có xác suất là $\frac{1}{2}$.
Các điểm số 1,3,5,8,10,12 chỉ có một và chỉ một cách trong khi đó 2,4,6 có thể có hai

cách vì thế:

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 1; \\ \dfrac{2}{12} & \text{nếu } x = 2; \\ \dfrac{1}{12} & \text{nếu } x = 3; \\ \dfrac{2}{12} & \text{nếu } x = 4; \\ \dfrac{1}{12} & \text{nếu } x = 5; \\ \dfrac{2}{12} & \text{nếu } x = 6; \\ \dfrac{1}{12} & \text{nếu } x = 8; \\ \dfrac{1}{12} & \text{nếu } x = 10; \\ \dfrac{1}{12} & \text{nếu } x = 12. \end{cases}$$

b)Từ công thức $F(x) = \sum_{x \leqslant a} f(x)$ chúng ta có

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1; \\ \dfrac{2}{12} & \text{nếu } 1 \leqslant x < 2; \\ \dfrac{3}{12} & \text{nếu } 2 \leqslant x < 3; \\ \dfrac{4}{12} & \text{nếu } 3 \leqslant x < 4; \\ \dfrac{6}{12} & \text{nếu } 4 \leqslant x < 5; \\ \dfrac{7}{12} & \text{nếu } 5 \leqslant x < 6; \\ \dfrac{9}{12} & \text{nếu } 6 \leqslant x < 8; \\ \dfrac{10}{12} & \text{nếu } 8 \leqslant x < 10; \\ \dfrac{11}{12} & \text{nếu } 10 \leqslant x < 12. \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 12; \end{cases}$$

c)$P(X < 4) = p(1) + p(2) + p(3) = \dfrac{4}{12} = 0.33$

ngoài ra:

$P(X < 4) = \lim_{x \to 4^-} \; Fx = \frac{4}{12}$

■

Bài 25.9

Biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối tích lũy

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1+x}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Tính $Pr(X = 0), Pr(X = 1), Pr(X = 2)$

b) Tính $Pr(\frac{1}{2} < X \leq 1)$

c) Tính $Pr(\frac{1}{2} \leq X < 1)$

d) Tính $Pr(X > 1.5)$

<u>*Bài giải*</u>

- câu a
  $Pr(X = 0) = 0$
  $Pr(X = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
  $Pr(X = 2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

- câu b
  $Pr(\frac{1}{2} < X \leq 1) = F(1) - F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$

- câu c
  $Pr(\frac{1}{2} \leq X < 1) = P(X < 1) - P(X < \frac{1}{2})$
  $= \lim_{n\to\infty} F(1 - \frac{1}{n}) - \lim_{n\to\infty} F(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

- câu d
  $Pr(X > 1.5) = 1 - Pr(X \leq 1.5) = 1 - F(1.5) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

■

Bài 25.10

Cho X là 1 biến ngẫu nhiên với hàm phân phối tích lũy sau:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ \alpha & x = \dfrac{1}{2} \\ 1 - 2^{-2x} & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(a) Tìm $Pr(X > \dfrac{3}{2})$.

(b) Tìm $Pr(\dfrac{1}{4} < X \le \dfrac{3}{4})$.

(c) Tìm α.

(d) Tìm $Pr(X = \dfrac{1}{2})$

(e) Vẽ đồ thị của $F(x)$

Bài giải

a) $Pr(X > \frac{3}{2}) = 1 - Pr(X \le \frac{3}{2}) = 1 - F(\frac{3}{2}) = 1 - (1 - 2^{-2.\frac{3}{2}}) = 0.125$.

b) $Pr(\frac{1}{4} < X \le \frac{3}{4}) = F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{4}) = 1 - (1 - 2^{-2.\frac{3}{4}}) - (\frac{1}{4})^2 = 0.584$.

c) $\alpha = \frac{1}{2}$.

d) $Pr(X = \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F((\frac{1}{2})^-) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 = 0.25$.

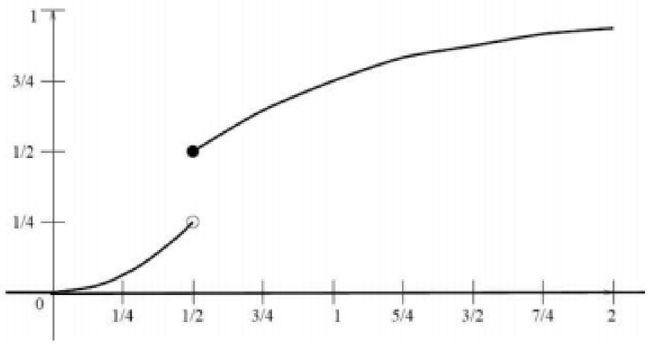
e) Đồ thị của $F(x)$ (Hình 7)

■

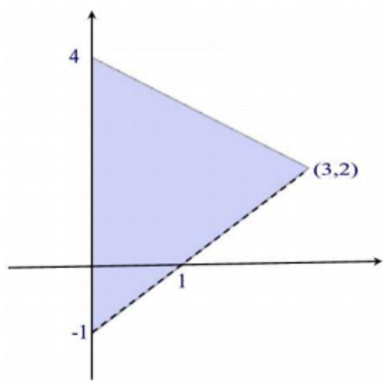
Bài 26.1

Xét biến ngẫu nhiên X với phân phối được xác định bởi:

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{10}(100 - x)^{\frac{1}{2}}, & 0 \le x \le 100 \\ 0, & x > 100 \end{cases}$$



Hình 10: Bài 25.10



Hình 11: Bài 27.5

a) Tìm hàm phân phối tích lũy $F(X)$.

b) Tính $\Pr(65 < X \leq 75)$.

Bài giải

a) Ta có: $S(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$

$$\Rightarrow F(x) = 1 - S(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{10}(100-x)^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq x \leq 100 \\ 1, & x > 100 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} P(65 < x \leq 75) &= F(75) - F(65) \\ &= S(65) - S(75) \\ &= \frac{1}{10}(100-65)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10}(100-75)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0,092 \end{aligned}$$

■

Bài 26.2

Cho X biểu thị tuổi chết của một cá nhân. Sự phân bố sống sót được cho bởi

$$S(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - \frac{x}{100} & 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & x > 100 \end{cases}$$

(a) Tìm xác suất mà một người chết trước khi đến 30 tuổi.
(b) Tìm xác suất mà một người sống hơn 70 năm.

Bài giải

(a) Xác suất mà một người chết trước khi đến 30 tuổi:
$Pr(X < 30) = Pr(X \leq 30) = 1 - S(30) = 0.3$

(b) Xác suất mà một người sống hơn 70 năm:
$Pr(X > 70) = S(70) = 0.3$

■

Bài 26.2

Đặt X là số tuổi lúc qua đời của một cá thể. Phân phối tồn tại được đưa bởi:

$$S(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{100} & 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 0 & x > 100 \end{cases}$$

(a) Tính xác suất một người qua đời trước tuổi 30.

(b) Tính xác suất một người sống hơn 70 năm

Bài giải

(a) Xác suất một người qua đời trước tuổi 30 là:
$P(X \leqslant 30) = 1 - P(X > 30) = 1 - S(30) = 1 - \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 0.3$

(b) Xác suất một người sống hơn 70 năm là:
$P(X > 70) = 1 - S(70) = 1 - \dfrac{70}{100} = 0.3$

■

Bài 26.4

X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm phân phối xác suất được cho bởi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

với $\lambda > 0$. Tìm hàm mật độ xác suất f(x).

Bài giải

Ta có:

- Với $x \leq 0 : F(x) = 0 \Rightarrow f(x) = F'(x) = 0$
- Với $x > 0 : F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Vậy hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

■

Bài 26.5

Cho hàm phân phối xác suất

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & : x \leqslant 0 \\ x & : 0 < x < 1 \\ 1 & : x =\geqslant 1 \end{cases}$$

Tìm S(X)

Bài giải

Ta có S(X) = 1- F(x)

$$\Rightarrow F_X(x) \begin{cases} 1 & : x \leqslant 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x =\geqslant 1 \end{cases}$$

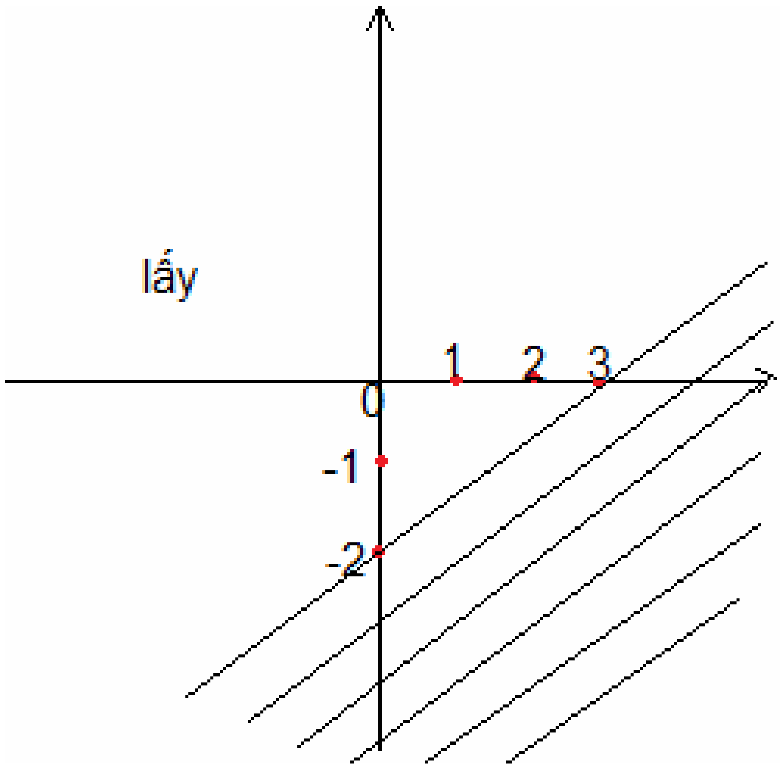
■

Bai 27.1

Phác họa phương trình $2x - 3y \leq 6$

Bài giải

Ta có $2x - 3y \leq 6$
Xét tại x = 0
$\Longrightarrow y \geq -2$
Xét tại y = 0
$\Longrightarrow x \leq 3$
Miền xác định:



■

Bài 27.2

Vẽ đồ thị x>3

Bài giải

Miền x>3 là miền gạch chéo

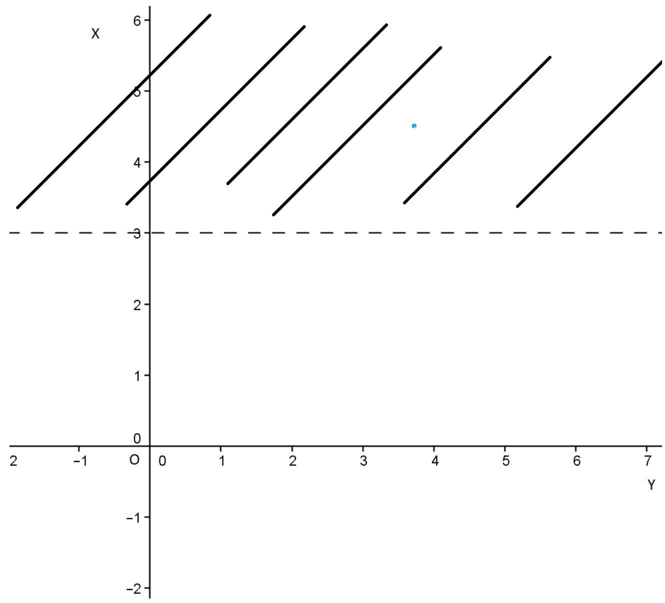
■

Bài 27.4

Giải bằng đồ thị $2x + 5y > 20$

Bài giải

Ta có $2x + 5y > 20$
Suy ra $y > 4 - \frac{2}{5}x$



Ta vẽ đường thẳng $y = 4 - \frac{2}{5}x$. Xét điểm $(0, 0)$, ta có $0 > 4$ (vô lý).
Vì vậy nửa mặt phẳng phía trên đường thẳng $y = 4 - \frac{2}{5}x$ (không kể biên) là tập nghiệm của phương trình.

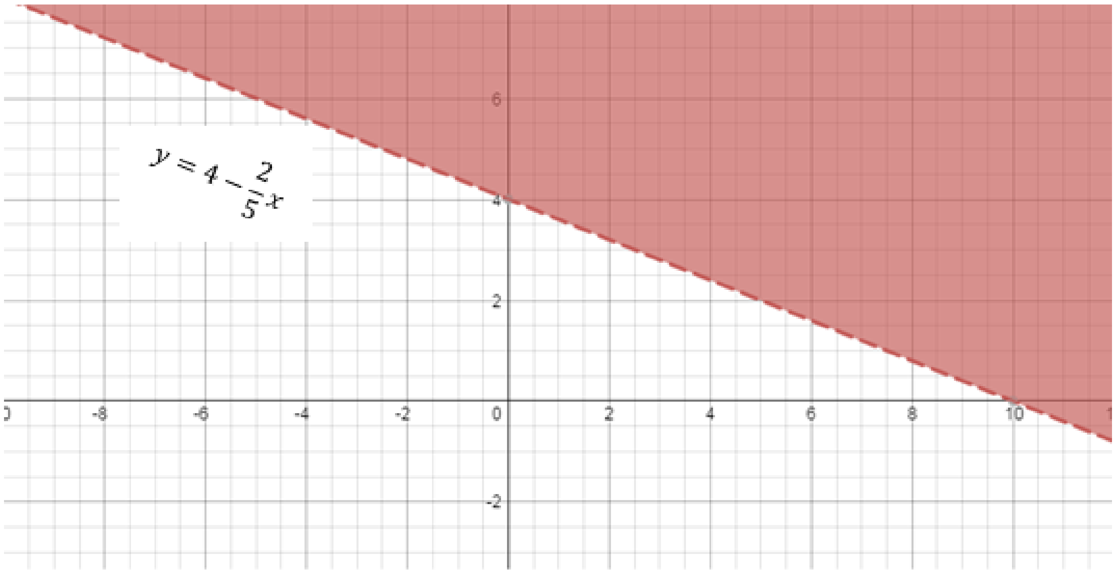
■

Bài 27.5

Chọn $d_1 : x - y = 1$
$d_2 : 2x + 3y = 12$
$d_3 : x = 0$.
$d_1 \cap d_2$ ta được điểm có tọa độ $(3, 2)$
$d_2 \cap d_3$ ta được điểm có tọa độ $(0, 4)$
$d_1 \cap d_3$ ta được điểm có tọa độ $(0, -1)$.
Giải hệ các bất phương trình:

$$\begin{cases} x - y < 1 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Miền giá trị của hệ bất phương trình được thể hiện trong Hình 8.



Bài 27.6

Tính hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ -3x + y < 5 \\ -x + 8y \geq -23 \end{cases}$$

Bài giải

Miền giá trị cần tìm là tam giác được giới hạn bởi 3 phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ -3x + y < 5 \\ -x + 8y \geq -23 \end{cases}$$

■

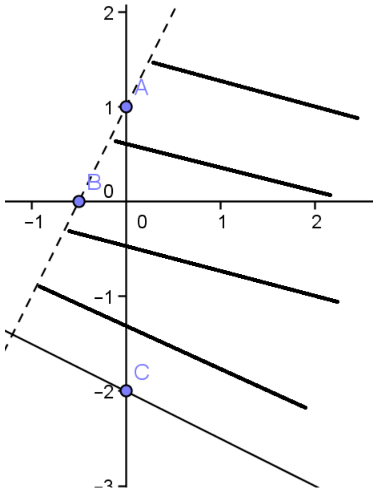
Bài 27.7

Vẽ đồ thị của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \text{y < 2x + 1} \\ \text{x + 2y} \geq \text{-4} \end{cases}$$

Bài giải

■

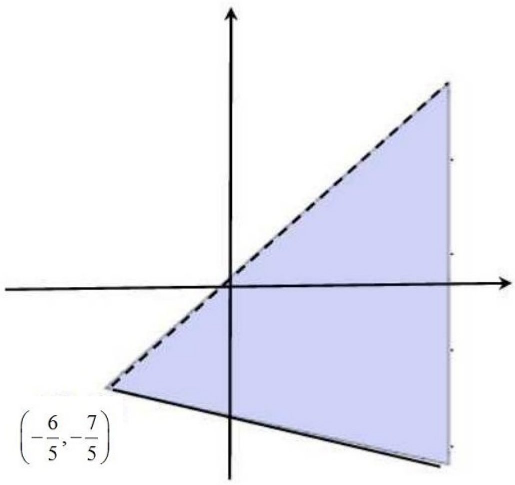


Bài 27.7

Giải hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} y < 2x + 1 \\ x + 2y \geq -4 \end{cases}$$

Bài giải



Hình 12: Hình biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình.

■

Bài 28.1

Xác định xem tích phân sau hội tụ hay phân kì. Nếu hội tụ thì tìm giá trị của nó.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

Bài giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-x}} &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-x}} \\ &= \lim_{a\to-\infty} [-2\sqrt{3-x}]_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty} (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3-a}) = \infty\end{aligned}$$

Do đó tích phân đã cho phân kì.

■

Bài 28.2

Xác định tích phân sau hội tụ hay phân kỳ. Nếu hội tụ thì tính giá trị của nó :
$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1} dx$

Bài giải

$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1} dx = \lim_{t\to0^-} \int_{-1}^{t} \frac{e^x}{e^x-1} dx + \lim_{t\to0^+} \int_{t}^{1} \frac{e^x}{e^x-1} dx$
Đặt u $= e^x + 1$
$\Rightarrow\ du = e^x$

x	-1	t
u	$e^{-1}-1$	e^t-1

$\Rightarrow \lim_{t\to0^-} \int_{-1}^{t} \frac{e^x}{e^x-1} dx = \lim_{t\to0-} \int_{e^{-1}-1}^{e^t-1} \frac{du}{u}$
$= \lim_{t\to0-} (ln\,|u|)|_{e^{-1}-1}^{e^t-1}$
$= \lim_{t\to0} (ln\left|e^t-1\right| - ln\left|e^{-1}-1\right|)$
$= \lim_{t\to0} (ln\left|e^t-1\right| - \lim_{t\to0} (ln\left|e^{-1}-1\right|)$
$=\propto -(-0,45) =\propto$
$\Rightarrow$Có 1 trong 2 cái lim không xác định
$\Rightarrow$ Div

■

Bài 28.3

Xác định tích phân sau đây là hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ tìm giá trị của nó.

$$\int_1^4 \frac{dx}{x-2}$$

<u>*Bài giải*</u>

$$\int_1^4 \frac{dx}{x-2} = \int_1^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^4 \frac{dx}{x-2}$$

Ta xét:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{t \longrightarrow 2^-} \int_1^t \frac{dx}{x-2} = \lim_{t \longrightarrow 2^-} \ln|x-2| \,|_1^t = \infty$$

$\Longrightarrow \int_1^2 \dfrac{dx}{x-2}$ phân kỳ
$\Longrightarrow \int_1^4 \dfrac{dx}{x-2}$ phân kỳ

■

Bài 28.4

Xác định tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu hội tụ, hãy tính giá trị
$\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt{10-x}}$

<u>*Bài giải*</u>

Đặt $t = \sqrt{10-x} \Leftrightarrow t^2 = 10 - x \Leftrightarrow 2tdt = -dx$
$\int_1^{10} \frac{dx}{\sqrt{10-x}} = \int_3^0 \frac{-2tdt}{t} = 6$
Vậy tích phân phân kì

■

Bài 28.6

Xét tích phân $\int_0^\infty \dfrac{dx}{x^2+4}$ hội tụ hay phân kì. Nếu tích phân hội tụ, xác định giá trị của tích phân

<u>*Bài giải*</u>

$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{2} arctan \frac{x}{2}|_0^a\right)$
$= \frac{1}{2} \lim_{a\to\infty} \left(arctan \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$
Vậy tích phân $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$ hội tụ và bằng $\frac{\pi}{4}$

■

Bài 28.7

Xác định tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu nó hội tụ, tìm giá trị hội tụ đó?

$$\int_{-\infty}^0 \mathbf{e^x} dx$$

Bài giải

Ta có:

$$\int_{-\infty}^0 \mathbf{e^x} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \mathbf{e^x} = \lim_{a\to-\infty} (e^x|_a^0) = \lim_{a\to-\infty} (1-e^a) = 1.$$

Vậy tích phân đã cho là hội tụ và nó hội tụ về 1.

■

Bài 28.8

Xác định tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu hội tụ hãy tính giá trị của tích phân:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x-5)^{\frac{1}{3}}}$$

Bài giải

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{(x-5)^{\frac{1}{3}}} &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{(x-5)^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \lim_{b\to\infty} (\frac{3}{2}(b-5)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}5^{\frac{2}{3}}) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{b^2-10b+5^2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tích phân trên hội tụ.

■

Bài 28.9

Xác định tích phân sau là hội tụ hay phân kỳ. Nếu là hội tụ thì tìm giá trị của nó.
$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

<u>*Bài giải*</u>

$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$
$\cdot \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^-}(\frac{-1}{x-1}) \quad \begin{vmatrix} t \\ 0 \end{vmatrix}$
$\lim_{t\to 1^-}(\frac{-1}{t-1}) - 1 = \infty$
$\Rightarrow$ Tích phân này là phân kỳ

■

Bài 28.9

Xác định xem tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu nó hội tụ thì hãy tìm giá trị của nó.

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

<u>*Bài giải*</u>

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(-\frac{1}{x-1}\Big|_0^t \right) + \lim_{t\to 1^+} \left(-\frac{1}{x-1}\Big|_t^2 \right)$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(-\frac{1}{t-1} - 1 \right) + \lim_{t\to 1^+} \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) = \infty$$

Vậy tích phân này phân kỳ.

■

Bài 28.12

Xác định tích phân sau hội tụ hay phân kỳ. Nếu hội tụ thì tính giá trị của nó :
$\int_0^\infty xe^{-x}$

<u>*Bài giải*</u>

I=$\int_0^\infty xe^{-x}dx$
$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a xe^{-x}dx$
Đặt u=x ⇒ du=dx
dv=$e^{-x} \Rightarrow v = e^{-x}$
$\Rightarrow I = \lim_{a\to\infty} \left(-xe^{-x}|_0^a + \int_0^a e^{-x}dx\right)$
$= \lim_{a\to\infty} \left(-ae^{-a} + e^{-a} + e^{-0}\right)$
$= \lim_{a\to\infty} [e^{-a}(-a+1)+1]$
=1 ⇒ *convergent*

■

Bài 28.13

Xác định tích phân sau đây là hộ tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ tìm giá trị của nó.

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$$

<u>*Bài giải*</u>

Đặt $t = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow dt = \dfrac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}dx$
Ta có:

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}} = \lim_{t\longrightarrow 1^-} \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}} = \lim_{t\longrightarrow 1^-} \int_1^0 \frac{-2}{3}dt = \lim_{t\longrightarrow 1^-} \frac{-2}{3}t|_1^0 = \frac{2}{3}$$

Tích phân này hội tụ

■

Bài 28.14

Xác định tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu hội tụ, hãy tính giá trị
$\int_1^2 \frac{x}{x-1}dx$

<u>*Bài giải*</u>

$\int_1^2 \frac{x}{x-1}dx = \int_1^2 (1+\frac{1}{x-1})dx = (x+ln(x-1))|_1^2 = \infty$
Vậy tích phân phân kì

■

Bài 28.16

Khảo sát sự hội tụ của tích phân $\int_1^{\infty} \frac{3+sinx}{\sqrt{x}}dx$

<u>*Bài giải*</u>

Ta có $\int_1^{\infty} \frac{3+sinx}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}dx$

Ta thấy $\frac{sinx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

Suy ra $\int_1^{\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Vì $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ phân kì

Do đó $\int_1^{\infty} \frac{sinx}{\sqrt{x}}dx$ phân kì (1)

Ta lại có $\int_1^{\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}dx$ phân kì (2)

Từ (1) và (2) ta có $\int_1^{\infty} \frac{3+sinx}{\sqrt{x}}dx$ phân kì

■

Bài 28.17

Kiểm tra sự hội tụ của

$$\int_1^{\infty} \mathbf{e^{-\frac{1}{2}x^2}}dx$$

<u>*Bài giải*</u>

Ta có: $x^2 \geq x \Rightarrow \frac{-x^2}{2} \leq \frac{x}{2}$

$\Rightarrow e^{\frac{-x^2}{2}} \leq e^{\frac{x}{2}}$

Đặt $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ và $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \int_1^{\infty} g(x)dx$$

Mà $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục và $\int_1^{\infty} g(x)dx$ hội tụ nên $\int_1^{\infty} f(x)dx$ hội tụ.
Vậy

$$\int_1^{\infty} \mathbf{e^{-\frac{1}{2}x^2}}dx$$

hội tụ.

■

Bài 29.1

Tìm công thức tích phân bội hai của $f(x, y)$ trong miền được định bởi:

$$0 < x < 1; x < y < x + 1$$

.

Bài giải

Công thức tính tích phân bội 2 của $f(x, y)$ trong miền được xác định bởi:

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x < y < x + 1 \end{cases}$$

Là:

$$\int_0^1 \int_x^{x+1} f(x, y)dydx$$

■

Bài 29.2

Thiết lập một tích phân bội f(x,y) trên một phần của khoảng $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$ trên $y \leq \frac{x}{2}$

Bài giải

$\int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} f(x, y)dydx$ hoặc $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{2y}^1 f(x, y)dxdy$

■

Bài 29.2

Thành lập một tích phân bội của $f(x, y)$ trên một phần của hình vuông đơn vị $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, trong đó $y \leq \dfrac{x}{2}$.

Bài giải

Tích phân cần tìm là $\displaystyle\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x, y)dydx$.

■

Bài 29.4

Thiết lập một tích phân lặp của hàm f(x,y) trong miền hình vuông đơn vị, trong đó có ít nhất một x hay y lớn hơn 0.5.

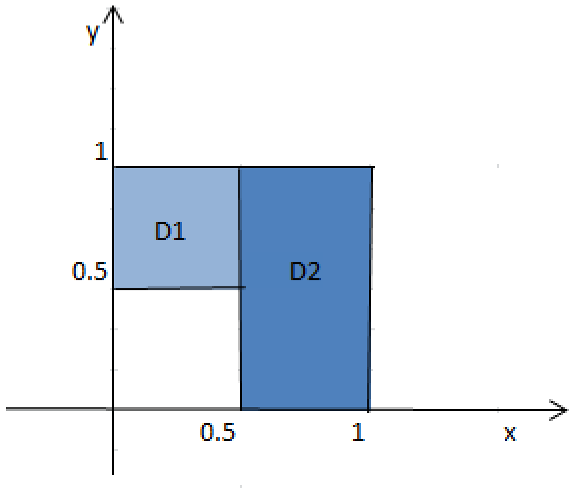
Bài giải

Gọi miền xác định của tích phân là $D = D1 \cup D2$ (như hình vẽ).
Trong đó,

$$D1 = \{(x, y)|0 < x < 0.5, 0.5 < y < 1\}$$

và

$$D2 = \{(x, y)|0.5 < x < 1, 0 < y < 1\}$$



Vậy tích phân cần tìm là:

$$I = \int_0^{0.5}\int_{0.5}^{1} f(x,y)dydx + \int_{0.5}^{1}\int_0^{1} f(x,y)dydx$$

■

Bài 29.5

Thiết lập tích phân bội cho bởi miền 0 < x < 50 - y <50. Mà trong đó cả x và y đều lớn hơn 20

Bài giải

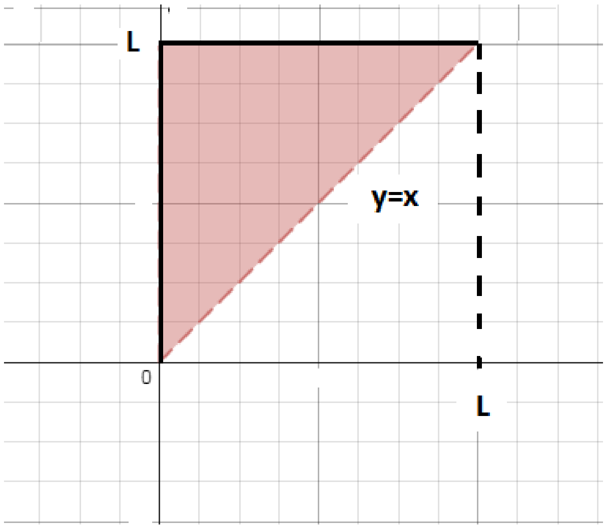
Ta có : 0 < x < 50 - y < 50
⇒ 0 < x < 50 - y và 0 < y < 50 - x
Mà x > 20 và y > 20
⇒ 20 < x < 50 - 20 và 20 < y < 50 - x
⇒ 20 < x < 30 và 20 < y < 50 - x
⇒ $\int_{20}^{30}\int_{20}^{50-x} f(x,y)dydx$

■

Bài 29.7

Cho $\iint_R e^{-x-y}dxdy$, trong đó R được giới hạn bởi góc phần tư thứ nhất và $x + y \leq 1$

Bài giải



$\iint_R e^{-x-y}dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-x-y}dxdy = \int_0^1(-e^{-x-y}|_0^{1-x})dx =$
$\int_0^1(-e^{-1}+e^{-x})dx = (-e^{-1}x - e^{-x})|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1$

■

Bài 29.9

Ước lượng $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
với R là miền $0 \le x \le y \le L$

Bài giải

Ta có $R = \{(x,y)|0 \le x \le y, 0 \le y \le L\}$
$\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^L \int_0^y (x^2+y^2)dxdy = \int_0^L \frac{4y^3}{3}dy = \frac{L^4}{3}$

■

Bài 29.10

Viết công thức tích phân bội hai của $f(x,y)$

$$\iint_R \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})dxdy$$

trong đó R là khu vực bên trong hình vuông đơn vị và cả hai tọa độ x, y đều lớn hơn 0.5.

<u>*Bài giải*</u>

Miền xác định $R = \{(x,y) \mid 0.5 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1\}$.
Vậy công thức tích phân bội hai của $f(x,y)$ là :

$$\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1} \mathbf{f(x,y)}dxdy.$$

■

Bài 29.11

Tính tích phân của :

$$\iint_R (x-y+1)dxdy$$

Với R là miền xác định bởi hình vuông đơn vị và $x+y \leq 0,5$

<u>*Bài giải*</u>

Ta có:$R_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 0,5; 0,5-x \leq y \leq 1\}$
$R_2 = \{(x,y) : 0,5 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$
$R = R_1 \bigcap R_2$
$\Rightarrow \iint_R (x-y+1)dxdy$

■

Bài 29.12

Tính giá trị của $\int_0^1\int_0^1 xmax(x,y)dydx$

<u>*Bài giải*</u>

$\int_0^1\int_0^1 xmax(x,y)dydx = \int_0^1\int_0^x xxdydx + \int_0^1\int_0^y xydxdy$
$= \int_0^1 (x^2y \left.\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix}\right|)dx + \int_0^1 (\frac{x^2y}{2} \left.\begin{matrix} y \\ 0 \end{matrix}\right|)dy$
$= \int_0^1 x^3dx + \int_0^1 \frac{y^3}{2}dy$
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

■

Bài 29.12

Tính

$$\int_0^1 \int_0^1 xmax(x,y)dydx$$

<u>*Bài giải*</u>

Đặt

$$A = \int_0^1 \int_0^1 xmax(x,y)dydx$$

Ta có 2 trường hợp sau:

1) $max(x,y) = x$

$$A = \int_0^1 \int_0^1 x^2 dydx = \frac{1}{4}$$

2) $max(x,y) = y$

$$A = \int_0^1 \int_0^1 xydydx = \frac{1}{8}$$

■

Bài 30.2

Cho biến X biểu thị độ dài thời gian (tính bằng phút) sử dụng máy tính trong thư viện công cộng với hàm mật độ xác suất được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(a) Tính xác suất thời gian sử dụng máy tính nhiều hơn 10 phút.
(b) Tìm xác suất thời gian sử dụng máy tính từ 5 đến 10 phút.
(c) Tìm hàm phân phối xác suất của X.

<u>*Bài giải*</u>

(a) Xác suất thời gian sử dụng máy tính nhiều hơn 10 phút:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = 0.135$$

(b) Xác suất thời gian sử dụng máy tính từ 5 đến 10 phút:

$$P(5 \leq X \leq 10) = \int_5^{10} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = 0.233$$

(c) Với $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} dt = -e^{-\frac{x}{5}} + 1$$

Với x < 0, ta có $F(x) = 0$
Vậy hàm phân phối xác suất của X là:

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{x}{5}} + 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

■

Bài 30.3

Học sinh đến trễ được tính là đến từ khoảng thời gian 10 phút sau khi bắt đầu buổi học. Gọi X là số phút học sinh tới trễ với hàm mật độ như sau :
f(x)=$\begin{cases} kx^2 & 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \neq \end{cases}$
Với k>0 là một hằng số. Tính giá trị của k và sau đó tình xác suất học sinh đến trễ ít hơn 3 phút sau khi bắt đầu buổi học

Bài giải

Do X là biến ngàu nhiên liên tục nên Ta có : $F_X x = \int_0^{10} kx^2 = 1$
$\Leftrightarrow k\frac{x^3}{3}|_0^{10} = 1$
$\Leftrightarrow k = 0.003$
$P(X \leqslant 3) = \int_0^3 0,003x^2 dx$
$= 0,003\frac{x^3}{3}|_0^{10}$
=0.0027

■

Bai 30.4

Tuổi thọ X của pin (tính bằng giờ) có hàm mật độ được cho bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4}, 2 < x < 3 \\ \text{0 ngược lại} \end{cases}$$

Tìm xác suất để pin có tuổi thọ nhiều hơn 15 phút?

Bài giải

Ta có F(x) $=P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} 2tdt = t^2|_0^x = x^2$

$\Longrightarrow F(x) = x^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Cho tuổi thọ của pin nhiều hơn 15 phút <=> $\dfrac{1}{4}$ giờ.

Xét $P(X > \dfrac{1}{4})$

$= 1 - P(X \leq \dfrac{1}{4}) = 1 - F(\dfrac{1}{4}) = 1 - (\dfrac{1}{4})^2 = 0.9375$

■

Bài 30.5

Đặt $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x+2}{6} & 1 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}.$

(a) Chứng minh rằng F đáp ứng các điều kiện (a), (b), (c), và (e) ở định lí 30.1

(b) Tìm hàm mật độ xác suất của f(x)

Bài giải

(a) Với $0 \leq x < 1$ thì $0 \leq \frac{x}{2} \leq 1$

Với $1 \leq x < 4$ thì $0 \leq \frac{x+2}{6} \leq 1$

Vậy $0 \leq F(x) \leq 1$

Do F(x) đồng biến nên nếu a<b thì $F(a) \leq F(b)$

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

(b) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \leq x < 4 \\ 0 & x \geq 4 \end{cases}.$

■

Bài 30.6

Lượng thời gian X (tính bằng phút) một người phải mất để đứng xếp hàng tại một bưu điện tới được quầy được mô tả bởi hàm xác suất liên tục:

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x} & \text{nếu } x > 0; \\ 0 & \text{nếu } otherwise; \end{cases}$$

k là một hằng số. (a) Xác định giá trị của k.

(b) Tìm xác suất mà một người phải mất hơn 1 phút để tới được quầy?

<u>*Bài giải*</u>

a)Tìm k:
$1 = \int_0^\infty kxe^{-x}dx = k$
$\Rightarrow k = 1$
b)$P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - \int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - (1 - \frac{2}{e}) = 0.736$

■

Bài 30.7

Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối tích lũy $F(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$
a) Tìm hàm phân phối xác suất
b) Tính $Pr(0 \leq X \leq 1)$

<u>*Bài giải*</u>

- câu a
  Ta có hàm phân phối xác suất $f(x) = F'(x) = \left(\dfrac{e^x}{e^x + 1}\right)' = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$
- câu b
  Ta có $Pr(0 \leq X \leq 1) = F(1) - F(0) = \dfrac{e}{e + 1} - \dfrac{1}{2} \approx 0.231$

■

Bài 30.8-chưa giải

Một nhà phân phối nước thường cung cấp nước cho một văn phòng với số lít nước xác định, mỗi tuần một lần. Giả sử rằng các nguồn cung cấp hàng tuần đến hàng chục lít là 1 ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4 & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Bằng một xấp xỉ, tính xem bao nhiêu lít nước sẽ được giao trong 1 tuần để xác suất của các nguồn cung cấp là 0.1.

<u>*Bài giải*</u>

content...

■

Bài 30.9

Sự thiệt hại do một đám cháy ở một khu thương mại được mô hình hóa bởi một biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} 0,005(20-x) & 0 < x < 20 \\ 0 & \text{giá trị khác.} \end{cases}$$

Giả sử rằng sự thiệt hại đó vượt quá 8, xác suất để sự thiệt hại đó vượt quá 16 là bao nhiêu?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là biến ngẫu nhiên mô tả thiệt hại của một đám cháy.
Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} P(X \leq 16 | X \leq 8) &= \frac{(X \leq 16, X \leq 8)}{P(X \leq 8)} \\ &= \frac{P(X \leq 16}{P(X \leq 8)} \\ &= \frac{\int_{16}^{20} 0,005(20-x)dx}{\int_{8}^{20} 0,05(20-x)dx} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

■

Bài 30.10

Vòng đời của một phần cái máy có phân phối liên tục trên khoảng (0,40) với hàm mật độ xác suất f, nơi mà f(x) tỉ lệ thuận với $(10+x)^{-2}$. Tính xác suất vòng đời của một phần máy thì ít hơn 6

<u>*Bài giải*</u>

$\int_0^{40} f(x)dx = \int_0^{40} (10+x)^{-2}dx = -\frac{1}{10+x} \left.\begin{matrix} 0 \\ 40 \end{matrix}\right| = 0.08$

$\int_0^{6} f(x)dx = \int_0^{6} (10+x)^{-2}dx = -\frac{1}{10+x} \left.\begin{matrix} 0 \\ 6 \end{matrix}\right| = 0.0375$

Do xác suất của f(x) không xảy ra hoàn toàn
P(X $\leq$ 6) = 0.0375 x 1 : 0.08 = 0.46875

■

Bài 30.10

Tuổi thọ của 1 chi tiết máy có phân phối liên tục trên khoảng $(0, 40)$ với hàm mật độ f, trong đó $f(x)$ là hàm tỉ lệ với $(10 + x)^{-2}$.
Tính xác suất tuổi thọ của chi tiết máy nhỏ hơn 6.

Bài giải

Vì hàm mật độ $f(x)$ là hàm tỉ lệ với $(10 + x)^{-2}$ nên ta có

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(10+x)^{-2}dx = \int\limits_{0}^{40} a(10+x)^{-2}d(10+x) = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{25}{2}.$$

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{25}{2}(10+x)^{-2}, & x \in (0, 40), \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Xác suất tuổi thọ của chi tiết máy nhỏ hơn 6 là

$$\begin{aligned} P(X < 6) = \int\limits_{-\infty}^{6} f(x)dx &= \int\limits_{0}^{6} \frac{25}{2}(10+x)^{-2}dx \\ &= \int\limits_{0}^{6} \frac{25}{2}(10+x)^{-2}d(10+x) \\ &= -\frac{25}{2}(10+x)^{-1}\Big|_{x=0}^{x=6} = 0.469. \end{aligned}$$

Vậy $P(X < 6) = 0.469$.

■

Bài 30.12

Cho X_1, X_2, X_3 là ba biến ngẫu nhiên độc lập, có cùng hàm mật độ được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Cho $Y = max\{X_1, X_2, X_3\}$.Tìm $P(Y > \frac{1}{2})$.

Bài giải

Ta có:
$$\{Y \leq \frac{1}{2}\} \Leftrightarrow \{X_1 \leq \frac{1}{2}, X_2 \leq \frac{1}{2}, X_3 \leq \frac{1}{2}\}$$
Do đó,
$$\begin{aligned}
P(Y > \frac{1}{2}) &= 1 - P(Y \leq \frac{1}{2}) \\
&= 1 - P(X_1 \leq \frac{1}{2}, X_2 \leq \frac{1}{2}, X_3 \leq \frac{1}{2}) \\
&= 1 - P(X_1 \leq \frac{1}{2})P(X_2 \leq \frac{1}{2})P(X_3 \leq \frac{1}{2}) \\
&= 1 - (F_X(x))^3 = 1 - \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2\Big)^3 \\
&= 1 - \Big(\frac{1}{8}\Big)^3 = \frac{511}{512}
\end{aligned}$$

■

Bài 30.13

Một chính sách bảo hiểm trả ngẫu nhiên cho một tổn thất X được chịu khấu trừ C, trong đó 0 <C <1. Các số tổn thất được mô phỏng như một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ

f(x)= $\begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & otherwise \end{cases}$

Cho một tổn thất X ngẫu nhiên, xác suất để thanh toán bảo hiểm ít hơn 0,5 bằng 0,64. Tính C

Bài giải

Đặt thanh toán bảo hiểm bởi các biến ngẫu nhiên Y:

Y= $\begin{cases} 0 & 0 < X \leq C \\ \\ X - C & C < X < 1 \end{cases}$

Pr(Y<0.5) = Pr($0 \leq X < 0.5 + C$) = $\int_0^{0+5+C} 2xdx = x^2 \mid_0^{0.5+C} = (0.5 + C)^2$

Pr(Y<0.5) = 0.64 = $(0.5 + C)^2$

⇒ C = -1.3 hoặc C = 0.3

mà 0< C <1

⇒ C = 0.3.

■

Bai 30.14

Cho 3 biến X_1, X_2, X_3 độc lập, cùng phân phối với hàm phân phối được cho:

$f(x) = \begin{cases} 3x^2, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ ngược lại} \end{cases}$

Lấy Y = $max\{X_1, X_2, X_3\}$. Tìm $P(Y > \dfrac{1}{2})$

<u>*Bài giải*</u>

Ta có F(x) =$P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} 3t^2 dt = t^3|_0^x = x^3$

$\Longrightarrow F(x) = x^3, 0 \leq x \leq 1$

Xét $P(Y > \dfrac{1}{2})$

$= 1 - P(Y \leq \dfrac{1}{2})$

$= 1 - P(max\{X_1, X_2, X_3\} \leq \dfrac{1}{2})$

$= 1 - P(X_i \leq \dfrac{1}{2} | i = 1, 2, 3)$

$= 1 - P(X_1 \leq \dfrac{1}{2})P(X_2 \leq \dfrac{1}{2})P(X_3 \leq \dfrac{1}{2})$

$= 1 - (F(\dfrac{1}{2}))^3$

$= 1 - ((\dfrac{1}{2})^3)^3 = \dfrac{511}{512}$

■

Bài 30.15

X có hàm mật độ xác suất là

$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

Nếu $Pr(X > 1) = \frac{7}{8}$. Tìm giá trị của θ

<u>*Bài giải*</u>

Ta có

$Pr(X > 1) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 1 - Pr(X \leq 1) = \frac{7}{8}$

$\Leftrightarrow Pr(X \leq 1) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{3x^2}{\theta^3} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\theta^3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \theta = 2$

Vậy $\theta = 2$

■

Bài 31.1

Cho X có hàm mật độ cho bởi:

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{nếu } -1 < x \leqslant 0; \\ 0.2 + cx & \text{nếu } 0 < x \leqslant 1; \\ 0 & \text{nếu } otherwise; \end{cases}$$

(a) Tìm giá trị của c.
(b) Tìm F (x).
(c) Tìm $Pr(0 \leqslant x \leqslant 0,5)$.
(d) Tìm E (X)

<u>*Bài giải*</u>

a)$1 = \int_{-1}^{0} 0.2dx + \int_{0}^{1} 0.2 + cxdx = 0.4 + \dfrac{c}{2}$
$\Rightarrow c = 1.2$
b) $x < -1 \Rightarrow F(x) = 0$
$-1 < x \leqslant 0$
$F(x) = \int_{-1}^{x} 0.2dt = 0.2x + 0.2$
$0 < x \leqslant 1$
$F(x) \int_{-1}^{x} 0.2dt + \int_{0}^{x} 0.2 + ctdt = 0.2 + 0.2x + 0.6x^2$
$x > 1 \Rightarrow F(x) = 1$ Vậy:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leqslant -1; \\ 0.2 + 0.2x & \text{nếu } -1 < x \leqslant 0; \\ 0.2 + 0.2x + 0.6x^2 & \text{nếu } 0 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{nếu } x > 1; \end{cases}$$

c)$P(0 \leqslant x \leqslant 0.5) = \int_{0}^{0.5} 0.2 + 1.2xdx = 0.25$
d)$E(X) = \int_{-1}^{0} 0.2xdx + \int_{0}^{1} 0.2x + 1.2x^2dx = 0.4$

■

Bài 31.2

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f_X(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Giả sử rằng $E(X) = \dfrac{3}{5}$
a) Tìm a và b

b) Với a và b vừa tìm được ở câu a. Tìm hàm mật độ $f_X(x)$ và hàm phân phối tích lũy $F_X(x)$

Bài giải

- câu a

$f(x)$ là hàm mật độ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a + bx^2 \geq 0 \\ \int_0^1 (a + bx^2)dx = 1 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a + bx^2 \geq 0 \\ \left(ax + \dfrac{bx^3}{3}\right) |_0^1 = 1 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a + bx^2 \geq 0 \\ a + \dfrac{b}{3} = 1 \end{cases}$$

(1)

Ta có $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(a + bx^2)dx = \int_0^1 (ax + bx^3)dx = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{4}$

Theo giả thiết ta có $E(X) = \dfrac{3}{5}$

Suy ra $\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{4} = \dfrac{3}{5}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a = \dfrac{3}{5}$ và $b = \dfrac{6}{5}$

- câu b

  Theo câu a ta có

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

  Ta có $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

  - Nếu $x < 0$
    $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
  - Nếu $0 \leq x \leq 1$
    $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{6t^2}{5}\right) dt = \dfrac{3x}{5} + \dfrac{2x^3}{5}$
  - Nếu $x > 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 \left(\frac{3}{5} + \frac{6t^2}{5}\right) dt + \int_1^x 0dt = 1$

$$VyF_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{3x}{5} + \dfrac{2x^3}{5} & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

■

Bài 31.3

Tính $E(X)$ của X có hàm mật độ cho bởi:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\, x\, e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} c\,(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x^2} & x > 5 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

<u>*Bài giải*</u>

Lưu ý:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!.$$

a)

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{1}{4} x e^{\frac{-1}{2}x} x dx = \int_0^\infty (\frac{x}{2})^2 e^{\frac{-x}{2}} dx = 2! = 4.$$

b)

$$E(X) = \int_{-1}^1 c(1-x^2)xdx = \int_{-1}^1 c(x-x^3)dx = c(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \mid_{-1}^1 = c(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 0.$$

c)

$$E(X) = \int_5^\infty \frac{5}{x^2}.xdx = \int_5^\infty \frac{5}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_5^b \frac{5}{x}dx = \lim_{b\to\infty} [(5ln \mid x \mid) \mid_5^b] = \lim_{b\to\infty} (5ln \mid \frac{b}{5} \mid) = \infty.$$

■

Bài 31.4

Một biến mẫu ngẫu nhiên liên tục có:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

Tính giá trị kì vọng và phương sai.

<u>*Bài giải*</u>

- Tính kỳ vọng:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 x(1 - \frac{x}{2})dx \\ &= \int_0^2 (x - \frac{x^2}{2})dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Tính phương sai:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_0^2 (1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{3})^2 dx \\ &= \int_0^2 (\frac{1}{3} - \frac{x}{2})^2 dx \\ &= -2\int_0^2 (\frac{1}{3} - \frac{x}{2})^2 d(\frac{1}{3} - \frac{x}{2}) \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

■

Bài 31.5

Cho X biểu thị suốt đời (tính theo năm) của một con chip máy tính. Hãy để cho hàm mật độ xác suất được đưa ra bởi

$$f(x) = \begin{cases} 4(1+x)^{-5} & x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(a) Tìm giá trị trung bình và độ lệch chuẩn.
(b) Xác suất mà một con chip máy tính chọn ngẫu nhiên hết hạn íthơn một năm là gì?

Bài giải

(a) Giá trị trung bình:

$$E(X)= \int_0^\infty 4x(1+x)^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Độ lệch chuẩn:

$$E(X^2) = \int_0^\infty 4x^2(1+x)^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow Var(x) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{9}$

(b)Xác suất mà một con chip máy tính chọn ngẫu nhiên hết hạn ít hơn một năm $Pr(X \leq 1)$

$$Pr(x \leq 1) = \int_0^1 4(1+x)^{-5}\,\mathrm{d}x = 0.938$$

■

Bài 31.5

Đặt X là tuổi thọ của một con chip (tính theo năm). Cho hàm mật độ xác suất có dạng như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 4(1+x)^{-5} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(a) Tìm trung bình và phương sai chuẩn.

(b) Xác suất chọn ngẫu nhiên một con chip mà tuổi thọ của nó ít hơn 1 năm.

Bài giải

(a) 1)

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty 4x(1+x)^{-5}dx = 4\int_0^\infty x(1+x)^{-5}dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (1+x)^{-5}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{(1+x)^{-4}}{-4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = 4\left[\left.\frac{x(1+x)^{-4}}{-4}\right|_0^\infty + \frac{1}{4}\int_0^\infty (1+x)^{-4}dx\right] = 4\frac{1}{4}\left.\frac{(1+x)^{-3}}{-3}\right|_0^\infty = \frac{1}{3}$$

2)

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \int_0^\infty 4x^2(1+x)^{-5}dx = 4\int_0^\infty x^2(1+x)^{-5}dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = (1+x)^{-5}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \dfrac{(1+x)^{-4}}{-4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = 4\left[\frac{x^2(1+x)^{-4}}{-4}\bigg|_0^\infty + \frac{2}{4}\int_0^\infty x(1+x)^{-4}dx\right] = 2\int_0^\infty x(1+x)^{-4}dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (1+x)^{-4}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{(1+x)^{-3}}{-3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = 2\left[\frac{x(1+x)^{-3}}{-3}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{3}\int_0^\infty x(1+x)^{-3}dx\right] = \frac{2}{3}\frac{(1+x)^{-2}}{-2}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{3}$$

3)

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow Sd = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0.4714$$

(b) Xác suất để chọn ngẫu nhiên 1 con chip có tuổi thọ ít hơn một năm là:

$$P(X < 1) = \int_0^1 4(1+x)^{-5}dx = -(1+x)^{-4}\bigg|_0^1 = 0.9375$$

■

Bài 31.8

Để X có hàm mật độ xác suất

f(x)= $\begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ \\ 0 & otherwise \end{cases}$

Tìm E(X) và Var của Y = X^2.

Bài giải

E(Y) = $\int_1^2 x^2dx = \frac{7}{3}$
E(Y^2) = $\int_1^2 x^4dx = \frac{31}{5}$
Var(Y) = $E(Y^2) - (E(Y))^2 \approx 0.756$

■

Bài 31.8

Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Tìm giá trị trung bình và phương sai của hàm $Y = X^2$

<u>*Bài giải*</u>

Hàm phân phối của Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

- Nếu y < 1: $F_Y(y) = 0$ nên $f_Y(y) = F'_Y(y) = 0$
- Nếu $1 < y < 4$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

  Do đó,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= [F_X(\sqrt{y})]' - [F_X(-\sqrt{y})]' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} F'_X(\sqrt{y}) - (-\frac{1}{2\sqrt{y}}) F'_X(-\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} [F'_X(\sqrt{y}) + (F'_X(-\sqrt{y})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + (f_X(-\sqrt{y})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} [1 + 0] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

- Nếu $y > 4$ thì $F_Y(y) = 1$ nên $f_Y(y) = F'_Y(y) = 0$
  Tóm lại,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{nếu } 1 < y < 4 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

  Khi đó, ta có:

$$E(Y) = \int_1^4 y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_1^4 \frac{\sqrt{y}}{2} dy = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_1^4 = \frac{7}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_1^4 y^2 \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_1^4 \frac{y\sqrt{y}}{2} dy = \frac{y^{\frac{5}{2}}}{5}\Big|_1^4 = \frac{31}{5}$$

$$\Rightarrow Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 0.756$$

Vậy $E(Y) = \frac{7}{3}$ và $Var(Y) = 0.756$

■

Bai 31.9

Cho X là một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{10}, -2 \leq x \leq 4 \\ 0, \text{ ngược lại} \end{cases}$$

Tính kì vọng của X.

<u>*Bài giải*</u>

Ta có kì vọng của X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-2}^{0} \frac{-x^2}{10} dx + \int_{0}^{4} \frac{x^2}{10} dx = \frac{-x^3}{30}|_{-2}^{0} + \frac{x^3}{30}|_0^4 = \frac{-8}{30} + \frac{64}{30} = 1.867$$

■

Bài 31.10

Một công ty bảo hiểm đảm bào giá trị một ô tô 15.000 một năm với chính sách khấu trừ 1000. Có 0.04 nguy cơ xe bị thiệt hại một phần và 0.02 nguy cơ xe bị thiệt hại hoàn toàn. Nếu một phần xe bị thiệt hại, X là số lượng thiệt hại tuân theo hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5003e^{-0.5x} & 0 < x < 15 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$$

Tiền bồi thường dự kiến là bao nhiêu?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi Y là số tiền bồi thường(đơn vị ngàn) với chính sách khấu trừ 1

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{nếu X<1, với xác suất là 1-0,04-0,02=0,94} \\ Max(0, X-1) & \text{nếu } 0 \leq X < 15 \text{ với xác suất là 0.04} \\ 14 & X \geq 15, \text{với xác suất là 0,02} \end{cases}$$

$E(Y) = 0,94.0 + \int_1^{15} 0.5003(x-1)e^{-0,5x}dx + 0,02.14 = 0,020012.(\int_1^{15} 0.5003xe^{-0,5x}dx - \int_1^{15} 0.5003e^{-0,5x}dx) + 0,28 = 0,020012.(-30e^{-7,55} + 2e^{-0,5} - 2e^{-7,5} + 2e^{-0,5}) + 0,28 =$

$0,32819$
vậy số tiền phải trả dự kiến là 328

■

Bài 31.11

Quyền đòi bồi thường hàng tháng của một công ty bảo hiểm được mô hình hóa bởi một biến dương ngẫu nhiên liên tục , có hàm mật độ xác suất tỷ lệ thuận $(1+x)^{-4}$, trong đó $0 < x < \infty$ và là 0 nếu ngược lại. Xác định quyền đòi bồi thường hàng tháng dự kiến của công ty.

Bài giải

Gọi c là một hằng số dương không biết.
Hàm mật độ xác suất có dạng:
$f(x) = c(1+x)^{-4}$. Trong đó c là hằng số dương chưa biết
$\int_0^\infty c(1+x)^{-4}dx = \frac{c}{3}$
Cho $\frac{c}{3} = 1 \Rightarrow c = 3$
$\Rightarrow f(x) = 3(1+x)^{-4}$
$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty 3(1+x)^{-4}dx$
Đặt $u = 1+x \Rightarrow du = dx$
$E(X) = \int_1^\infty 3\frac{u-1}{(u)^4}du = 3\int_1^\infty \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^4}du = \frac{1}{2}$

■

Bài 31.12

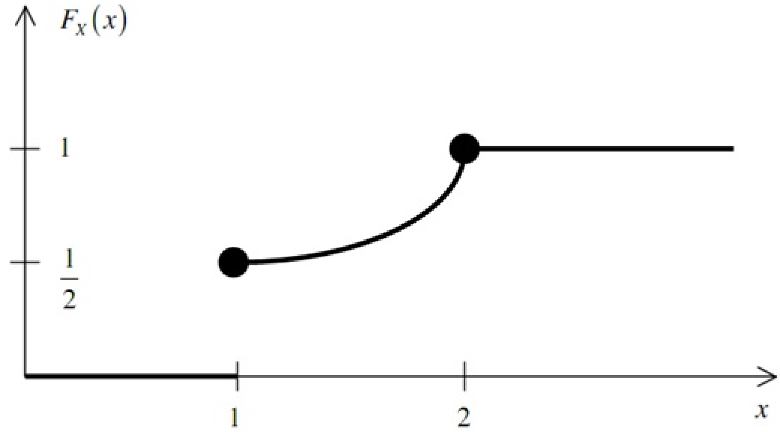
Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối tích lũy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Tính phương sai của X

Bài giải

Dựa vào đồ thị của hàm phân phối tích lũy ta nhận thấy rằng đây là hàm phân phối tích lũy của phân phối hỗn hợp.
Ta có công thức tổng quát cho hàm phân phối hỗn hợp



$$F_X(x) = aF_{X_1} + (1-a)F_{X_2}(x)$$
$$E(X) = aE(X_1) + (1-a)E(X_2)$$
$$E(X^2) = aE(X_1^2) + (1-a)E(X_2^2)$$

Với X_1 là biến ngẫu nhiên rời rạc

X_2 là biến ngẫu nhiên liên tục

a là xác suất X nhận giá trị là X_1

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$$

$a = P(X=1) = F(1) - \lim_{n\to\infty} F(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Vậy $F_X(x) = \frac{1}{2}F_{X_1} + \frac{1}{2}F_{X_2}(x)$

$$Suyra F_{X_2}(x) = 2F_X - F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ (x-1)^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

$E(X_1) = 1$ $\qquad$ $E(X_1^2) = 1$

$E(X_2) = \int_1^2 2x(x-1)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2\right)|_1^2 = \frac{5}{3}$

$E(X_2^2) = \int_1^2 2x^2(x-1)dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right)|_1^2 = \frac{17}{6}$

$$E(X) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times\frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}E(X_1^2) + \frac{1}{2}E(X_2^2) = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times\frac{17}{6} = \frac{23}{12}$$

Vậy $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{23}{12} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{36}$

■

Bài 31.13-chưa giải

Một công ty đồng ý chấp nhận 1 trong 4 đấu thầu kín cao nhất trên 1 tài sản. 4 hồ sơ dự thầu được coi là 4 biến ngẫu nhiên độc lập với chức năng chung hàm phân phối tích lũy:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\sin \pi x) & \frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2} \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Giá trị dự kiến của các thầu chấp nhận là bao nhiêu?

Bài giải

■

Bài 31.14

Một chính sách bảo hiểm trên một điện thoại di động trả tiền một lợi ích của 4000 nếu thiết bị thất bại trong năm đầu tiên. Số lượng các lợi ích giảm bởi 1000 mỗi năm tiếp theo cho đến khi nó đạt đến 0. Nếu thiết bị đã không thất bại bởi sự khởi đầu của bất kỳ năm, xác suất của sự thất bại trong năm đó là 0.4. Lợi ích dự kiến theo chính sách này là gì?

Bài giải

Gọi X là biến cố thiết bị bị hỏng trong năm đầu.
Y là biến cố lợi ích.
Ta có:

$$Y = \begin{cases} 4000 & X = 1 \\ 3000 & X = 2 \\ 2000 & X = 3 \\ 1000 & X = 4 \\ 0 & X \ge 5 \end{cases}$$

Và $P(X=n) = 0,6^{n-1}.0,4 \qquad n = 1, 2, ...$
$\Rightarrow E(Y) = 4000.0,4 + 3000.0,6.0,4 + 2000.0,6^2.0,4 + 1000.0,6^3.0,4 = 2694$

■

Bài 31.15

Cho X có hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\frac{2x}{k^2} & 0 \le x \le k \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Đối với những gì giá trị của k là phương sai của X bằng 2?

Bài giải

Xét f(x) có là hàm mật độ không?

$\int\limits_0^k \lambda\frac{2x}{\mathrm{k}^2}\,\mathrm{d}x = \lambda$ Suy ra: $\lambda = 1$

E(X)= $\int\limits_0^k x\frac{2x}{\mathrm{k}^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2k}{3}$

$E(X^2) = \int\limits_0^k x^2\frac{2x}{\mathrm{k}^2}\,\mathrm{d}x = \frac{k^2}{2}$

Var(X)=$E(X^2) - (EX)^2$=$\frac{k^2}{2}$-$\frac{4k^2}{9}$ $= 2 \Rightarrow k = 6$

■

Bài 31.15

Cho hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\dfrac{2x}{k^2}, & 0 \le x \le k, \\ \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Với giá trị nào của k thì $Var(X) = 2$.

Bài giải

Ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{k} \lambda \frac{2x}{k^2} dx = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2\lambda}{k^2} \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=k} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Suy ra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{k^2}, & 0 \le x \le k, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Ta có

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{2}{k^2} \int_{0}^{k} x^2 dx = \frac{2}{3}k.$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{2}{k^2} \int_{0}^{k} x^3 dx = \frac{k^2}{2}.$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)$$
$$= \frac{1}{18}k^2.$$

Suy ra

$$Var(X) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{18}k^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad k^2 = 36.$$

Vì $k > 0$ nên $k = 6$.
Vậy $k = 6$ thì $Var(X) = 2$.

■

Bài 32.2

Giả sử biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất
f(x)= $\begin{cases} e^{-x} & x \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$
Tìm mức phân vị mức 50%.

Bài giải

Ta có F(x) = $\int_0^x e^{-t}dt$
Q_2 là phân vị mức 50% nên
F(Q_2) = $\frac{1}{2}$
$\Rightarrow \int_{Q_2}^{\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow -e^{-t} \mid_{Q_2}^{\infty} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow e^{-Q_2} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow -Q_2 = ln(\frac{1}{2})$
$\Rightarrow Q \approx 0.693.$

■

Bài 32.2

Giả sử rằng biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm Med(X).

Bài giải

Để $m = Med(X)$ là trung vị thì:

$$\begin{aligned} F_X(m) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{m} f(t)dt = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \int_0^m e^{-t}dt = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - e^{-m} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-m} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad m = 0.693 \end{aligned}$$

■

Bài 32.4

X là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$
Tìm λ nếu trung vị của X là $\frac{1}{3}$

Bài giải

Do trung vị của X là $\frac{1}{3}$ nên
$P(X \leq \frac{1}{3}) = P(X \geq \frac{1}{3}) \Leftrightarrow P(X \leq \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{3}} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_0^{\frac{1}{3}} = -e^{-\frac{1}{3}\lambda} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\lambda = ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 3ln2$

■

Bài 32.5

Mọi người đang phân tán trên một dải bãi biển với một hàm mật độ $f(y) = 4y^3$, 0 <y <1, và 0 . Một nhà cung cấp kem muốn xác định vị trí xe của mình nằm ở giữa của các địa điểm (nơi mà một nửa số người dân sẽ được mỗi bên của cô). Cô ấy sẽ xác định vị trí xe của mình ở đâu?

Bài giải

Hàm cdf cho bởi:
$F(x) = \int_0^1 4y^3 dx$
$F(m) = 0.5$
Ta có: $0.5 = \int_0^m 4y^3 dy = m^4 \Rightarrow 0.5 = m^4 \Rightarrow m = 0.8409$

■

Bài 32.6

Một công ty bảo hiểm ô tô đưa ra chính sách một năm với một khoản khấu trừ là 500. Xác suất ô tô được bảo hiểm không có tai nạn là 0.8 và xác suất ô tô có nhiều hơn một tai nạn là 0.0. Nếu có một tai nạn, mức thiệt hại của công ty trước khi áp dụng khoản khấu trừ có phân phối mũ với trung bình là 3000. Tính phân vị thứ 95 của công ty bảo hiểm phải thanh toán theo chính sách này.

Bài giải

Gọi Y là "sô tiền công ty bảo hiểm phải thanh toán theo chính sách khấu trừ".
X là "mức thiệt hại của công ty khi có một tai nạn xảy ra"
Vì xác Suất ô tô được bảo hiểm có nhiều hơn một tai nạn là 0.0 nên xác suất ô tô được bảo hiểm có một tai nạn là 0.2

$X \sim Exp(\frac{1}{3000})$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3000} e^{-\frac{x}{3000}} & x > 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X - 500 & \text{p=0.2} \\ 0 & \text{p=0.8} \end{cases}$$

phân vị thứ 95 của công ty bảo hiểm phải thanh toán theo chính sách này là
$Pr(Y \leq y_{0.95}) = 0.95$
$\Rightarrow Pr(Y > y_{0.95}) = 0.05$
Ta có $Pr(X > y_{0.95} + 500) = \int_{500+y_{0.95}}^{\infty} \dfrac{1}{3000} e^{\frac{-x}{3000}} = -e^{-\frac{x}{3000}}|_{500+y_{0.95}}^{\infty} = e^{-\frac{500+y_{0.95}}{3000}}$

$= e^{\frac{-1}{6}} e^{\frac{-y_{0.95}}{3000}}$

$Pr(Y > y_{0.95}) = 0.2 \times Pr(X - 500 > y_{0.95}) = 0.2 \times Pr(X > y_{0.95} + 500) = 0.05$

$\Rightarrow 0.2 \times e^{\frac{-1}{6}} e^{\frac{-y_{0.95}}{3000}} = 0.05$

$\Rightarrow e^{\frac{-y_{0.95}}{3000}} = \dfrac{1}{4} e^{\frac{1}{6}}$

$\Rightarrow y_{0.95} = 3000 \left(ln(4) - \dfrac{1}{6} \right) \approx 3659$

■

Bài 32.7

Sử dụng từ ngữ, giải thích nghĩa của $F(1120) = 0.2$ về thành phần phần trăm và thành phần số lượng.

Bài giải

1120 là giá trị mà có nhiều nhất 20% số liệu nhỏ hơn nó và có nhiều nhất 80% số liệu lớn nó. 1120 là phân vị thứ $\frac{1}{5}$.

■

Bài 32.8

Cho X là một biến ngẫu nhiên rời rạc pmf:

$$p(n) = \begin{cases} (n-1)(0,4)^2(0,6)^{n-2} & ,n \leq 2 \\ 0 & \text{,giá trị khác} \end{cases}$$

Tìm mode X?

Bài giải

Bảng phân phối xác suất:
Max p(x) khi x=3 nên Mod=3.

■

X	2	3	4	5
P	0,16	0,192	0,1728	0,13824

Bài 32.9

Cho X là một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\frac{1}{g}x(4-x) & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm Mod(X):

<u>*Bài giải*</u>

Xét f(x) có là hàm mật độ không?

$\int\limits_0^3 \lambda\frac{1}{9}x(4-x)\,\mathrm{d}x = 1$=$\int\limits_0^3 \lambda\frac{4}{9}\,\mathrm{d}x$-$\int\limits_0^3 \frac{\lambda}{9}x^2\,\mathrm{d}x = 1$

$\Rightarrow \lambda = 1$

E(X)= $\int\limits_0^3 x\frac{1}{9}x(4-x)\,\mathrm{d}x$=$\int\limits_0^3 \frac{4x^2}{9}\,\mathrm{d}x$-$\int\limits_0^3 \frac{4x^3}{9}\,\mathrm{d}x$=$\frac{7}{4}$

$\Rightarrow E(X) \leq Mode \leq E(X)+1 \Leftrightarrow 1.75 \leq Mode \leq 2.75$

$\Rightarrow Mode = 2$

■

Bài 32.9

Cho X là một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\frac{1}{9}x(4-x) & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tính mode của X

<u>*Bài giải*</u>

$$f(x) = \frac{\lambda}{9}(4x-x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{4\lambda}{9} - \frac{2\lambda}{9}x = 0 \Rightarrow x = 2$$

Vậy mode(X)=2

■

Bài 32.12

Đặt X là một biến tổn thất ngẫu nhiên có hàm phân phối tích lũy

$$F(x)=\begin{cases} 1-(\frac{\theta}{\theta+x})^{\alpha} & x \geq 0 \\ \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Mức phân vị 10% là θ - k. Mức phân vị 90% là 5θ - 3k. Xác định giá trị của α.

Bài giải

Ta có F(x) $= 1-(\frac{\theta}{\theta+x})^{\alpha}$

Q_1 là phân vị mức 10%

$\Rightarrow$ F(Q_1) = 0.1

Q_2 là phân vị mức 90%

$\Rightarrow$ F(Q_2) = 0.9

Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 1-(\frac{\theta}{2\theta-k})^{\alpha}=0.1 \\ \\ 1-(\frac{\theta}{6\theta-3k})^{\alpha}=0.9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{\theta}{2\theta-k})^{\alpha}=0.9 \\ \\ 3^{-\alpha}(\frac{\theta}{2\theta-k})^{\alpha}=0.1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3^{\alpha}=9 \Leftrightarrow \alpha=2$

■

Bài 32.12

Cho X là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ được cho bởi

$$F(x)=\begin{cases} 1-\left(\frac{\theta}{\theta+x}\right)^{\alpha} & x \geq 0 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Phân vị thứ 10 là $\theta-k$. Phân vị thứ 90 là $5\theta-3k$. Xác định giá trị α.

Bài giải

Theo đề bài, ta có:

$$F(\theta-k)=0.1 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{\theta}{2\theta-k}\right)^{\alpha}=0.1 \Leftrightarrow \left(\frac{\theta}{2\theta-k}\right)^{\alpha}=0.9 \quad (1)$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}
F(5\theta-3k)=0.9 \quad &\Leftrightarrow \quad 1-\left(\frac{\theta}{6\theta-3k}\right)^{\alpha}=0.9\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\theta}{6\theta-3k}\right)^{\alpha}=0.1\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}\left(\frac{\theta}{2\theta-k}\right)^{\alpha}=0.1\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}(0.9)=0.1 \quad \text{(do (1))}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}=\frac{1}{9}\\
&\Leftrightarrow \quad \alpha=2
\end{aligned}$$

■

Bài 32.13

Cho X là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ:
$f(x)=\dfrac{4x}{(1+x^2)^3}, x>0$ và ngược lại thì f(x)= 0. Tính Mode của X.

Bài giải

Ta có f(x) đạt cực đại tại $f'(x)=0$
$f'(x)=\dfrac{4(1+x^2)^3-24x^2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^6}$
$f'(x)=\dfrac{4-20x^2}{(1+x^2)^4}$
vậy $f'(x)=0 <=> 4-20x^2=0 <=> x=\frac{1}{\sqrt{5}}$

■

Bài 32.14

X là biến ngẫu nhiên với $f(x)=(\frac{3}{5000})(\frac{5000}{x})^4$ nếu X>5000 và f(x)=0 ở những nơi khác. Xác định trung vị của X

Bài giải

Gọi m là trung vị của X
$P(X\le m)=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \int_0^m(\frac{3}{5000})(\frac{5000}{x})^4dx=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 3.5000^3.\frac{1}{m^3}=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{2.5000^3}=6299,6$

■

Bài 32.16

Một phân phối có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4} & x > 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tính phân vị thứ 95 của phân phối

Bài giải

Ta có $0.95 = P(X \leq x_{0.95}) = \int_1^{x_{0.95}} \dfrac{3}{t^4}dt = \dfrac{3}{-3t^3}|_1^{x_{0.95}} = \dfrac{-1}{x_{0.95}^3} + 1$

Giải phương trình $\dfrac{-1}{x_{0.95}^3} + 1 = 0.95$ theo x ta có

$$x_{0.95}^3 = \frac{1}{1-0.95} = 20$$

Suy ra $x_{0.95} = \sqrt[3]{20} \approx 2.71$

■

Bài 33.1

Cho X là tổng thời gian để xử lí 1 ứng dụng hộ chiếu của các bộ phận nhà nước. Biết rằng X được phân bố đồng đều giữa 3 và 7 tuần.

(a) Tìm $f(x)$

(b) Xác suất mà 1 ứng dụng sẽ được xử lí trong vòng ít hơn 3 tuần là bao nhiêu?

(c) Xác suất mà 1 ứng dụng sẽ được xử lí trong 5 tuần hoặc ít hơn là bao nhiêu?

Bài giải

a) Do $X \sim U([3,7])$ nên hàm mật độ xác suất của X có dạng:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Vậy:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x \in [3,7] \\ 0 & \text{khác .} \end{cases}$$

b) $Pr(X \leq 3) = Pr(X < 3) = 0$
Do $x < 3 \Rightarrow x \notin [3,7]$.

c)

$$Pr(X \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} f(x)dx = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx = \int_{3}^{5} f(x)dx = \int_{3}^{5} \frac{1}{4}dx = 0.5$$

.

■

Bài 33.2

Trong một quán bar sushi, khách phải trả cho số lượng sushi họ tiêu thụ. Giả sử rằng số lượng sushi tiêu thụ phân bố đồng đều giữa 5 ounce và 15 ounce. Cho X là biến ngẫu nhiên đại diện cho một tấm điền vào trọng lượng.

a) Tìm hàm mật độ xác suất của X.

b) Tìm thấy xác suất mà một khách hàng sẽ mất khoảng 12 và 15 ounce sushi?

c) Tìm $E(X)$ và $Var(X)$.

Bài giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx}E_X(x) = F'_X(x) \\ &= \frac{1}{b-a} = \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 5 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

b)

$$Pr(12 \leq X \leq 15) = \int_{12}^{15} \frac{1}{10}dx = 0,3$$

c)

$$E(X) = \int_{5}^{15} \frac{x}{10} = 10$$

$$Var(X) = \int_{5}^{15} (X - E(X))^2 dx = \int_{5}^{15} (x-10)^2 dx = 83,3$$

■

Bài 33.3

Giả sử X có phân bố đồng đều trên khoảng (0,1).
Tìm
(a) F(x)
(b) Chứng minh rằng:
$Pr(a \leq X \leq a+b)$ với $a, b \geq 0, a+b \leq 1$ chỉ phụ thuộc vào b.

<u>*Bài giải*</u>

(a) Ta có:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{b-a} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

(b) Ta có:
$Pr(a \leq X \leq a+b) = F(a+b)F(a) = a+b-a = b$

■

Bài 33.3

Giả sử X có phân phối đều trên khoảng $(0,1)$. Tìm

a) $F(x)$.

b) CMR: $P(a \leq X \leq a+b), \quad a, b \geq 0, \quad a+b \leq 1$, chỉ phụ thuộc vào b.

<u>*Bài giải*</u>

a) Ta có

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

- $x \leq 0: \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt = 0.$

- $0 < x < 1: \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} 1dt = x.$

- $x \geq 1: \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int\limits_{0}^{1} f(t)dt + \int\limits_{1}^{x} f(t)dt = 1.$

  Vậy

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq a+b) &= P(X \leq a+b) - P(X \leq a) \\ &= F(a+b) - F(a^-) \\ &= (a+b) - a = b \quad \text{(đpcm).} \end{aligned}$$

■

Bài 33.6

Một chuyến tàu tới ga tại một số thời điểm đó là phân phối đều giữa 10:00 AM - 10:30 AM. Cho X là thời gian chờ đợi tàu (tính theo phút). Tính xác suất mà bạn sẽ phải đợi lâu hơn 10 phút?

Bài giải

P(X>10) = 1 - P(X≤10) = 1 - $\frac{10}{30-0} = \frac{20}{30}$ = 0.667

■

Bài 33.6

Một chuyến tàu đến ga tại thời điểm có phân phối đều từ 10 giờ đến 10 giờ 30. Gọi X là thời gian đợi tàu đến (tính bằng phút). Tính xác suất bạn sẽ phải đợi tàu hơn 10 phút?

Bài giải

Theo đề bài, ta có:

$$X \sim U[0, 30]$$

Khi đó hàm phân phối của X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{30} & 0 \leq x \leq 30 \\ 1 & x > 30 \end{cases}$$

Vậy xác suất phải đợi tàu hơn 10 phút:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \frac{10}{30} = 0.667$$

■

Bài 33.8

Việc bào hành trên một máy xác định rằng nó sẽ bị thay thế lúc hỏng hoặc ở năm sử dụng thứ 4. tuổi của máy lúc hỏng, X, có hàm mật độ xác suất
$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 < x < 5 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$
Đặt Y là tuổi của máy lúc bị thay thế. Tìm phương sai của Y

Bài giải

Do lúc thay thế máy chỉ đạt tuổi cao nhất là 4 nên ta chỉ lấy tích phân trên khoảng (0,4)
$Var(Y) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^4 \frac{x^2}{5}dx - (\int_0^4 \frac{x}{5}dx)^2 = 1,707$

■

Bài 33.9

Chủ của một bảo hiểm ô tô chống thiệt hại bằng cách mua một chính sách bảo hiểm với mức khấu trừ là 250. Trong trường hợp ô tô bị hư hỏng, chi phí sửa chữa có thể được mô hình hóa bởi một biến ngẫu nhiên không đổi trên khoảng (0, 1500). Xác định độ lệch chuẩn của các khoản thanh toán bảo hiểm trong trường hợp các ô tô bị hư hỏng

Bài giải

Cho X và Y biểu thị chi phí sửa chữa và thanh toán bảo hiểm.
Ta cho rằng X được phân bố đồng đều trong khoảng (0,1500), do đó mật độ của X là$f(x) = \dfrac{1}{1500}$.

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 250; \\ X - 250 & \text{nếu } 250 < x \leqslant 1500. \end{cases}$$

$E(Y) = \int_{250}^{1500}(x-250)\dfrac{1}{1500}dx = \dfrac{1250^2}{3000} \approx 520.833$
$E(Y^2) = \int_{250}^{1500}(x-250)^2\dfrac{1}{1500}dx = \dfrac{1250^3}{4500} \approx 434.027$
$\sigma = \sqrt{E(Y^2) - (E(Y))^2} = 403.3$

■

Bài 33.10

Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên $[-1,1]$
a) Tính $E(e^{-X})$
b) Tính $Var(e^{-X})$

Bài giải

Theo giả thiết ta có hàm mật đô xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- câu a
$E(e^{-X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \times f(x)dx = \int_{-1}^{1} e^{-x} \times \dfrac{1}{2}dx$
$= \left(\dfrac{-e^{-x}}{2}\right)|_{-1}^{1} = \dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e} = \dfrac{e^2-1}{2e}$

- câu b
$E\left((e^{-X})^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x})^2 \times f(x)dx = \int_{-1}^{1} (e^{-x})^2 \times \dfrac{1}{2}dx$
$= \int_{-1}^{1} e^{-2x} \times \dfrac{1}{2}dx = \left(\dfrac{-e^{-2x}}{4}\right)|_{-1}^{1} = \dfrac{e^4-1}{4e^2}$
$Var(e^{-X}) = E\left((e^{-X})^2\right) - \left(E(e^{-X})\right)^2 = \dfrac{e^4-1}{4e^2} - \left(\dfrac{e^2-1}{2e}\right)^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^2}{2}$

■

Bài 33.11

Cho X là 1 biến ngẫu nhiên với 1 phân bố đều liên tục trên khoảng $(1,a)$, $a > 1$. Nếu $E(X) = 6.Var(X)$, thì giá trị của a bằng bao nhiêu?

Bài giải

Ta có: $X \sim U[(1,a)]$ nên :
$E(X) = \dfrac{1+a}{2} \qquad Var(X) = \dfrac{(a-1)^2}{12}$.
$\Rightarrow \dfrac{1+a}{2} = 6.\dfrac{(a-1)^2}{12}$
$\Leftrightarrow a+1 = (a-1)^2$
$\Leftrightarrow a = 0\,(\text{loại}) \quad \text{hoặc} \quad a = 3\,(\text{nhận})$.
Vậy $a = 3$ thỏa ycbt.

■

Bài 33.12

Cho X là một biến ngẫu nhiên với một phân phối đều liên tục trên đoạn (0, 10). Tìm $Pr(X + \frac{10}{X} > 7)$.

Bài giải

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx}E_X(x) = F'_X(x) \\ &= \frac{1}{b-a} = \frac{1}{10-0} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases} \rightarrow Pr(X + 10 > 7) = \int_0^7 \frac{1}{10}dx = \frac{7}{10}$$

■

Bài 34.1

Các điểm trên bài kiểm tra số liệu thống kê được phân phối thông thường với các thông số $\mu = 80, \sigma^2 = 196$. Tìm xác suất mà một số lựa chọn ngẫu nhiên là:
(a) Không lớn hơn 70
(b) Ít nhất 95
(c) Từ 70 đến 95.
(d) Khoảng, điểm số liệu tương ứng với một số điểm phần trăm là những gì 72%?

Bài giải

(a) Ta có: $Pr(X \leq 70)$

$$Pr(0 \leq X \leq 70) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{70} e^{-\frac{(x-80)^2}{2.14^2}} \mathrm{d}x = 0.2389$$

(b) Ta có: $\Pr(X \geq 95)$

$$Pr(X \geq 95) = P(\frac{X-80}{14} > \frac{95-80}{14}) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1)$$

$$Pr(0 \leq X \leq 95) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{95} e^{-\frac{(x-80)^2}{2.14^2}} \mathrm{d}x = 0.8577$$

$\Rightarrow Pr(X \geq 95) = 1 - 0.8577 = 0.1423$
(c) Ta có: $Pr(70 \leq X \leq 95)$

$$Pr(70 \leq X \leq 95) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{70}^{95} e^{-\dfrac{(x-80)^2}{2.14^2}}\,\mathrm{d}x = 0.6188$$

■

Bài 34.1

Số điểm của bài kiểm tra thống kê có phân phối chuẩn với tham số μ=80 và σ^2=196. Tìm xác suất để khi chọn một điểm số bất kì ta có:

(a) Số điểm đó không lớn hơn 70.

(b) Số điểm đó ít nhất là 95.

(c) Số điểm nằm trong khoảng 70 và 95.

(d) Hãy xấp xỉ số điểm thực tương ứng với mức phân vị 72%.

Bài giải

Gọi X là số điểm của bài kiểm tra thống kê.

$$X \sim N(80, 196)$$

(a) $P(X \leqslant 70) = P\left(\dfrac{X-80}{14} \leqslant \dfrac{70-80}{14}\right) = P\left(\dfrac{X-80}{14} \leqslant -\dfrac{5}{7}\right) = \varPhi\left(-\dfrac{5}{7}\right) = 0.23753$

(b) $P(X \geqslant 95) = 1 - P(X < 95) = 1 - P\left(\dfrac{X-80}{14} < \dfrac{95-80}{14}\right) = 1 - P\left(\dfrac{X-80}{14} < \dfrac{15}{14}\right) = 1 - \varPhi\left(\dfrac{15}{14}\right) = 1 - 0.85801 = 0.14199$

(c) $P(70 \leqslant X \geqslant 95) = P\left(\dfrac{70-80}{14} \leqslant \dfrac{X-80}{14} \geqslant \dfrac{95-80}{14}\right) = \varPhi\left(\dfrac{15}{14}\right) - \varPhi\left(-\dfrac{5}{7}\right) = 0.85801 - 0.23753 = 0.62048$

(d) $P(X \leqslant x) = P\left(\dfrac{X-80}{14} \leqslant \dfrac{x-80}{14}\right) = \varPhi\left(\dfrac{x-80}{14}\right) = 0.72$
$\Rightarrow \dfrac{x-80}{14} = 0.585 \Rightarrow x \approx 88$

■

Bài 34.4

Tuổi thọ của 1 bóng đèn được xác định bởi phân phối chuẩn với $\mu = 2000$ giờ và $\sigma = 200$ giờ.
a) Tính xác suất tuổi thọ của bóng đèn kéo dài từ 2000 đền 2400 giờ
b) Tính xác suất tuổi thọ của bóng đèn kéo dài dưới 1470 giờ

Bài giải

Gọi X là tuổi thọ của bóng đèn
$\Rightarrow X \sim N(2000, 200^2)$
a) Tính $P(2000 \leqslant X \leqslant 2400)$
$P(2000 \leqslant X \leqslant 2400) = \phi(\frac{2400-2000}{200}) - \phi(\frac{2000-2000}{200})$
$= \phi(2) - \phi(0)$
$=$ 0,47725
b) Tính $P(X \leqslant 1470)$
$P(X \leqslant 1470) = \phi(\frac{1470-2000}{200})$
$=\phi(-2.65)$
$=1 - \phi(2.65)$
$= 0.004$

■

Bài 34.4

Tuổi thọ của một bóng đèn có phân phối chuẩn với $\mu = 2000$ giờ và $\sigma = 200$ giờ.
(a) Tính xác suất tuổi thọ của bóng đèn từ 2000 đến 2400 giờ.
(b) Tính xác suất tuổi thọ của bóng đèn ít hơn 1470 giờ.

Bài giải

Gọi X là tuổi thọ của bóng đèn (tính bằng giờ). Khi đó:

$$X \sim N(2000, 200^2)$$

(a) Xác suất tuổi thọ của bóng đèn từ 2000 đến 2400 giờ:

$$P(2000 \leq X \leq 2400) = \phi\Big(\frac{2400 - 2000}{200}\Big) - \phi\Big(\frac{2000 - 2000}{200}\Big) = \phi(2) = 0.9772$$

(b) Xác suất tuổi thọ của bóng đèn ít hơn 1470 giờ:

$$P(X < 1470) = \phi\Big(\frac{1470 - 2000}{200}\Big) = \phi(-2.65) = 0.004$$

■

Bài 34.5

Cho x là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 100 và độ lệch chuẩn 15. Tìm P(X>130) căn cứ vào $\Phi(2) = 0.9772$

Bài giải

Trung bình $\mu = 100$
Độ lệch chuẩn $\sigma = 15 \Rightarrow$Phương sai $\sigma^2 = 225$
Ta có $X \sim N(100, 225) \Rightarrow \dfrac{X - 100}{15} \sim N(0, 1)$
$P(X > 130) = 1 - P(X \leq 130) = 1 - P(\dfrac{X - 100}{15} \leq \dfrac{130 - 100}{15}) = 1 - \Phi(2) = 0,0228$

■

Bài 34.6

X là tuổi thọ của một pin được chọn ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình là 50 và độ lệch chuẩn là 5.
(a) Tìm xác suất pin kéo dài ít nhất 42 giờ
(b) Tìm xác suất pin kéo dài từ 45 đến 60 giờ

Bài giải

(a) $X \sim N(50, 25)$
$P(X \geq 42) = 1 - P(X < 42) = 1 - P(\frac{X-50}{5} < \frac{42-50}{5}) = 1 - \phi(-1,6) = 0,945$
(b) $P(45 < X < 60) = \phi(\frac{60-50}{5}) - \phi(\frac{45-50}{5}) = 0,81859$

■

Bài 34.8

Cho X là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với $Pr(X < 500) = 0.5$ và $Pr(X > 650) = 0.0227$. Tìm độ lệch chuẩn của X?

Bài giải

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} \text{Pr(X<500)=0.5} \\ \text{Pr(X>650)=0.0227} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} Pr(\dfrac{X - \mu}{\sigma} < \dfrac{500 - \mu}{\sigma}) = 0.5 \\ 1 - Pr(\dfrac{X - \mu}{\sigma} < \dfrac{650 - \mu}{\sigma}) = 0.0227 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \phi(\dfrac{500-\mu}{\sigma}) = 0.5 \\ \phi(\dfrac{650-\mu}{\sigma}) = 0.9773 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{500-\mu}{\sigma} = 0 \\ \dfrac{650-\mu}{\sigma} = 2 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \mu = 500 \\ \sigma = 75 \end{cases}$$

Vậy độ lệch chuẩn của X là $\sigma = 75$

■

Bài 34.8

Cho X là một biến ngẫu nhiên chuẩn với$P(X < 500) = 0,5$ và $P(X > 650) = 0,0227$. Tìm độ lệch chuẩn của X.

Bài giải

$P(X < 500) = 0,5 \Rightarrow P([X - \mu]/\sigma \leqslant [500 - \mu]/\sigma) = 0.5$
$P(Z \leqslant [500 - \mu]/\sigma] = 0.5 = P(Z \leqslant 0)$
$\Rightarrow \dfrac{500-\mu}{\sigma} = 0 \Rightarrow \mu = 500(1)$
$P(X > 650) = 0,0227 \Rightarrow P([X - \mu]/\sigma \leqslant [650 - \mu]/\sigma) = 0.0227$
Từ (1) ta được :
$P(Z \leqslant [650 - 500]/\sigma) = 1 - 0.0227 = P(Z \leqslant 2.001)$
$\Rightarrow \dfrac{650-500}{\sigma} = 2.001 \Rightarrow \sigma = 74.96$

■

Bài 34.9

Giả sử rằng X là 1 biến ngẫu nhiên với các thông số $\mu = 5$, $\sigma^2 = 49$. Sử dụng bảng phân phối chuẩn tính:

(a) $Pr(X > 5.5)$

(b) $Pr(4 < X < 6.5)$

(c) $Pr(X < 8)$

(d) $Pr(| X - 7 | \geq 4)$

<u>*Bài giải*</u>

Ta có: $X \sim N(5, 49)$.

a) $Pr(X > 5.5) = 1 - Pr(X \leq 5.5) = 1 - Pr(\frac{X-5}{7} \leq \frac{5.5-5}{7}) = 1 - \Phi(\frac{1}{14}) \approx 0.4721$

b) $Pr(4 < X < 6.5) = Pr(\frac{4-5}{7} \leq \frac{X-5}{7} \leq \frac{6.5-5}{7}) = \Phi(\frac{3}{14}) - \Phi(\frac{-1}{4}) \approx 0.1389$

c) $Pr(X < 8) = Pr(\frac{X-5}{7} \leq \frac{8-5}{7}) = \Phi(\frac{3}{7}) \approx 0.6664$

d) $Pr(| X - 7 | \geq 4) \approx 0.58$

■

Bài 34.10

Cho X là một biến ngẫu nhiên bình thường có nghĩa là 1 và phương sai 4. Tìm $Pr(X^2 - 2X \leq 8)$

<u>*Bài giải*</u>

$$\begin{aligned}
Pr(X^2 - 2X \leq 8) &= P(X^2 - 2X + 1 \leq 9) \\
&= P((X-1)^2 \leq 9) = P(-3 \leq (X-1) \leq 3) \\
&= P(-\frac{3}{2} \leq \frac{(X-1)}{2} \leq \frac{3}{2}) \\
&= (-1,5 \leq Z \leq 1,5) \\
&= 2P(0 \leq Z \leq 1,5) \\
&= 2(0,4332) = 0,8664.
\end{aligned}$$

■

Bài 34.11

Cho X là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình là 360 và phương sai 16

(a) Tính P(X $<$ 355)

(b) Giả sử phương sai được giữ 16 nhưng trung bình được điều chỉnh để P(X $<$ 355) = 0.025. Tìm giá trị trung bình đã điều chỉnh.

Bài giải

X ∼ N(360,16)
P(X < 355) = P($\frac{X-360}{4}$ < $\frac{355-360}{4}$)
= P(Z < -1.25) = $\phi(-1.25)$ = 0.10565

■

Bài 34.11

Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kì vọng 360 và phương sai 16.

a) Tính $P(X < 355)$.

b) Giả sử phương sai vẫn là 16 nhưng kì vọng bị thay đổi sao cho $P(X < 355) = 0.025$. Tìm kì vọng thay đổi.

Bài giải

Ta có $X \sim N(360, 4^2)$.

a)

$$\begin{aligned} P(X < 355) &= P\left(\frac{X-360}{4} < \frac{355-360}{4}\right) \\ &= P(Z < -1.25) \\ &= \Phi(-1.25) \\ &= 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 1.1056. \end{aligned}$$

Vậy $P(X < 355) = 1.1056$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} P(X < 355) = 0.025 \quad &\Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{4} < \frac{355-\mu}{4}\right) = 0.025 \\ &\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{355-\mu}{4}\right) = 0.025 \\ &\Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{355-\mu}{4}\right) = 0.975 = \Phi(1.96) \\ &\Rightarrow \quad \frac{355-\mu}{4} = 1.96 \\ &\Rightarrow \quad \mu = 362.84. \end{aligned}$$

Vậy kì vọng sau khi thay đổi là $\mu = 362.84$.

■

Bài 35.2

Một cuột biểu quyết việc có nên sử dụng cần sa vào y tế đang diễn ra. Một công ty khảo sát 200 người xem có nên đưa ra luật mới cho sử dụng cần sa vào y tế. Xác suất một người phản đối luật mới là 53%. Sử dụng phân phối chuẩn để xấp xỉ phân phối nhị thức, với một sự hiệu chỉnh liên tục. Tìm xác suất để luật mới được áp dụng

Bài giải

Gọi X là số người ủng hộ luật mới
Xác suất một người ủng hộ là 100% - 53% = 47%
$\Rightarrow$X $\sim B(200, 0.47)$
Xấp xỉ qua phân phối chuẩn
Ta có : $E(X) = \mu = np = 94$ và $Var(X =)\sigma^2 = npq = 49.82$
$\Rightarrow X \sim N(94, 7.058^2)$
Để luật mới được áp dụng có nghĩa là số người đồng ý phải lớn hơn 100 người
$P(X > 100) = 1 - P(X \leqslant 100)$=1-$\phi\left(\frac{100+0.5-94}{7{,}058}\right) = 0.1788$

■

Bài 35.2

Một cuộc khảo sát xem có nên cho phép sử dụng cần sa y tế đang được tiến hành. Một tổ chức bỏ phiếu sẽ khảo sát 200 cá nhân để đánh giá mức độ ủng hộ luật mới này. Trong thực tế có 53% phản đối luật mới này, dùng xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn để xấp xỉ xác suất mà cuộc khảo sát này cho thấy rằng đa số đều ủng hộ.

Bài giải

Gọi X là số cá nhân ủng hộ luật mới.
Khi đó:

$$X \sim B(200, 0.47)$$

Ta kiểm tra điều kiện xấp xỉ:

$$\begin{aligned} p &= 0.47 \in (0.1, 0.9) \\ np &= 94 \geq 5 \\ np(1-p) &= 49.82 \geq 5 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$X \sim N(94, 49.82)$$

Vậy xác suất đa số đều ủng hộ luật mới:

$$\begin{aligned} P(X > 100) &= 1 - P(X \leq 100) = 1 - P(X < 100.5) \\ &= 1 - \phi\Big(\frac{100.5 - 94}{\sqrt{49.82}}\Big) = 1 - \phi(0.92) = 0.1788 \end{aligned}$$

■

Bài 35.3

Một công ty sản suất 50.000 bóng đèn mỗi ngày. Đối với mỗi 1000 bóng đèn sản suất có 50 bóng đèn bị lỗi. Xem xét thử nghiệm một mẫu ngẫu nhiên gồm 400 bóng đèn đã sản suất hôm nay. Tìm xác suất mà mẫu chứa:

a. Ít nhất 14 và không quá 25 bóng đèn bị lỗi.

b. Ít nhất 33 bóng đèn bị lỗi

Bài giải

Gọi X là số bóng đèn bị lỗi.
Ta có X có phân phối nhị thứ với n = 400, p = 0.05
Vì np = 20 $>$ 5, n(1-p) = 380 $>$ 5 nên ta có thể xấp xỉ X$\sim$N(20, 19)
a. Xác suất ít nhất 14 và không quá 25 bóng đèn bị lỗi:
$P(14 < X \leq 25) = P(15 \leq X \leq 25) = P(\dfrac{14.5-20}{\sqrt{19}} \leq \dfrac{X-20}{\sqrt{19}} \leq \dfrac{25.5-20}{\sqrt{19}}) \simeq \Phi(1,26) - \Phi(-1,26) = 0,8281$
b. Xác suất ít nhất 33 bóng đèn bị lỗi:
$P(X \geq 33) = 1 - P(X \leq 33) = 1 - P(\dfrac{X-20}{\sqrt{19}} \leq \dfrac{33.5-20}{\sqrt{19}}) = 1 - \Phi(3,097) = 0.0021$

■

Bài 35.4

Giả sử rằng xác suất của một gia đình có hai con trai là 0,25. Xét một mẫu ngẫu nhiên gồm 1000 gia đình có 2 con. Tìm xác suất nhiều nhất 220 gia đình có hai con trai

Bài giải

Gọi X là số gia đình có 2 con trai trong 1000 gia đình
$X \sim B(1000; 0,25)$
Do n lớn ta có thể xấp xỉ X thành phân phối chuẩn với trung bình =np=250, $\sigma^2 = np(1-p) = 187,5$
$P(X \leq 220) = P(\frac{X-250}{\sqrt{187.5}} \leq \frac{220-250}{\sqrt{187.5}}) = \phi(\frac{220+0,5-250}{\sqrt{187,5}}) = 0,0156$

■

Bài 36.1

Giả sử X có phân phối mũ với trung bình là 40. Tính $Pr(X < 36)$

Bài giải

Theo giả thiết ta có $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 40 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{40}$
Vậy X có hàm mật độ xác suất là

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} e^{\frac{-1}{40}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Ta có $Pr(X < 36) = \int_{-\infty}^{36} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{36} \dfrac{1}{40} e^{\frac{-1}{40}x} dx$
$= -e^{\frac{-1}{40}x}|_0^{36} = -e^{\frac{-9}{10}} + 1 = 0.593$

■

Bài 36.1

Cho X có phân phối mũ với một trung bình là 40. Tính Pr (X <36).

Bài giải

Với $\lambda = 40$
$P(X < 36) = \int_0^{36} 40e^{-40x}dx = 0.593$

■

Bài 36.2

Cho X là một hàm mũ với trung bình bằng 5. Vẽ đồ thị $f(x)$ và $F(x)$.

Bài giải

Theo đề ra ta có: $\lambda = 5$ và $X \sim Exp(5)$
$f(x) = 5e^{-5x} \qquad (x > 0)$
$F(x) = 1 - e^{-5x} \qquad (x > 0)$.
Đồ thị:

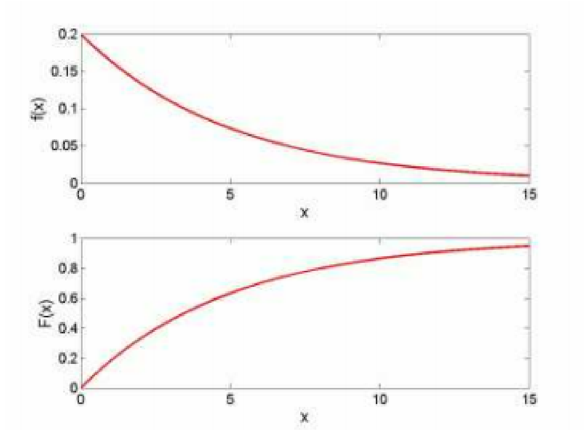
■

Bài 36.3

X là biến cố ngẫu nhiên liên tục có pdf như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

Tính $Pr(0 \leq X \leq 50)$



Hình 13: Bài 36.2

Bài giải

Vì X là biến ngẫu nhiên liên tục nên:

$$\begin{aligned} Pr(0 \leq X \leq 50) &= \int_0^{50} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx \\ &= -\int_0^{50} e^{-\frac{x}{100}} d(-\frac{x}{100}) \\ &= -e^{-\frac{1}{2}} + 1 \\ &= 0,393 \end{aligned}$$

■

Bài 36.4

Cho X là một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình là 4. Tìm P(X $\leq$ 0.5)

Bài giải

Ta có $\mu = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{4}$

P(X $\leq$ 0.5) $= \int_0^{0.5} \frac{1}{4} e^{\frac{-1}{4}x} dx = -e^{\frac{-1}{4}x} \begin{array}{c} 0 \\ 0.5 \end{array}\Big| = 0.1175$

■

Bài 36.4

Cho X là một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình bằng 4. Tính Pr$(X \leqslant 0.5)$.

<u>*Bài giải*</u>

Ta có $E(X) = 4 = \dfrac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{4}$

$$X \sim exp\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P(X \leqslant 0.5) = \int_0^{0.5} \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} dx = \frac{-4}{4} e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_0^{0.5} = 0.1175$$

■

Bài 36.7

Trong thời gian chờ (tính theo phút) của 1 xe lửa đến trạm có phân phối mũ với trung bình là 3 phút a) Tính xác suất chờ từ 6 phút trở đi b) Tính xác suất chờ từ phút thứ 4 đến phút thứ 7 c) Tính xác suất chờ ít nhất 9 phút

<u>*Bài giải*</u>

Đặt X là thời gian chờ
E(X)=3 $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$
X∼Exponentia($\frac{1}{3}$)
a) Xác suất chờ từ 6 phút trở đi là :
P(X$\geqslant$ 6)=1-P(X<6)=1-$\int_0^6 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.1353$
b) Xác suất chờ từ phút 4 đến phút 7 là :
$P(4 \leqslant X \leqslant 7)$=$\int_4^7 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.167$
c) Xác suất chờ ít nhất 9 phút :
P(X$\geqslant$ 9)=1-P(X$\leqslant$ 9)=1-$\int_0^9 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.05$

■

Bài 36.8

Tuổi thọ (tính bằng giờ) của pin được lắp đặt trong radio tuân theo phân phối mũ với tham số $\lambda = 0.01$. Tính xác suất để pin vẫn sử dụng được sau một tuần được lắp đặt.

<u>*Bài giải*</u>

Theo đề bài ta có:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.01x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Do đó xác suất để pin vẫn sử dụng được sau một tuần được lắp đặt là:

$$\begin{aligned} P(X > 168) &= 1 - P(X \leq 168) \\ &= 1 - F(168) \\ &= 1 - 0.814 = 0.136 \end{aligned}$$

■

Bài 36.9

Tuổi thọ của một pin radio theo giờ là một biến ngẫu nhiên có hàm phân phối mủ với tham số $\lambda = 0.01$. Xác suất pin sử dụng được hơn 1 tuần là bao nhiêu?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là tuổi thọ của pin
1 tuần có 168 giờ
$P(X > 168) = 1 - P(X \le 168) = 1 - \int_0^{168} 0,01e^{-0,01x}dx = 0,1863$

■

Bài 36.11

Tuổi thọ một máy in giá 200 có phân phối mũ với trung bình 2 năm. Các nhà sản xuất đồng ý trả một khoản hoàn lại đầy đủ cho người mua nếu máy in bị lỗi trong năm đầu tiên sau khi mua nó, và hoàn trả một nửa nếu máy in bị lỗi trong năm thứ hai. Nếu các nhà sản xuất bán 100 máy in, thì nhà sản suất phải hoàn phí bao nhiêu?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi Y "số tiền mà nhà sản suất phải hoàn trả"
X "tuổi thọ của một máy in"
$X \sim Exp(\lambda)$ với trung bình $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 2.$
Suy ra $\lambda = \dfrac{1}{2}$
Hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Xác suất máy in bị lỗi trong năm đầu tiên là
$P(X \le 1) = \int_0^1 \dfrac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}dx = 1 - e^{\frac{-1}{2}} = 0.3935$
Xác suất máy in bị lỗi trong năm thứ hai là
$P(1 < X \le 2) = \int_1^2 \dfrac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}dx = e^{\frac{-1}{2}} - e^{-1} = 0.2386$
Bảng phân phối xác suất

Y	0	100	200
$Pr(Y = y_i)$	$1 - 0.3935 - 0.2386$	0.2386	0.3935

Nếu các nhà sản xuất bán 100 máy in, thì nhà sản suất phải hoàn phí là

$E(100Y) = 100E(Y) =$
$100 \times (0 \times (1 - 0.3935 - 0.2386) + 100 \times (0.2386) + 200 \times (0.3935))$
$= 100 \times 102.56 = 10256$

■

Bài 36.11

Tuổi thọ một máy in chi phí là 200 được phân phối mũ với trung bình 2 năm. Các nhà sản xuất đồng ý trả một khoản hoàn lại đầy đủ cho người mua nếu máy in bị lỗi trong năm đầu tiên sau khi mua nó, và hoàn trả một nửa nếu nó không thành công trong năm thứ hai. Nếu các nhà sản xuất bán 100 máy in, họ sẽ phải trả hoàn phí là bao nhiêu?

Bài giải

Sự phân bố theo cấp số nhân với trung bình là 2 có mật độ $f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}$ và hàm phân phối tích lũy là $F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{2}}$ Xác suất một máy in bị lỗi trong năm đầu tiên là:
$P(X \leqslant 1) = F(1) = 1 - e^{\frac{-1}{2}} \approx 0.39347$
Do đó số lượng lỗi trong năm đầu tiên trong số 100 máy in là 39.347.Xác suất một máy in sẽ lỗi trong năm thứ hai là :
$P(1 < X \leqslant 2) = F(2) - F(1) = e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{-2}{2}} = 0.23865$ Do đó số lượng lỗi trong năm thứ hai trong số 100 máy in là 23.865.
Số tiền dự kiến nhà sản xuất phải hoàn phí là:
$200 \times 39.347 + 100 \times 23.865 = 10256$

■

Bài 36.12-chưa giải

Một thiết bị được đặt trong một khu vực nhất định để đo và ghi lại liên tục hoạt động địa chấn ở đây. Thời gian hư hại T của thiết bị này là một hàm phân phối mũ với trung bình là 3 năm. Từ khi thiết bị trên không được giám sát trong thời gian hai năm đầu tiên của dịch vụ, thời gian để phát hiện ra sự hư hại của nó là $X = max(T, 2)$. Xác định $E[X]$.

Bài giải

■

Bài 36.13

Một phần của thiết bị đang được bảo hiểm để chống lại sự hư hỏng sớm. Thời gian từ lúc mua đến lúc bị hỏng được phân phối theo cấp số nhân với trung bình là 10 năm. Bảo hiểm sẽ tra số tiền x nếu thiết bị bị hỏng trong quá trình hoạt động ở năm đầu tiên và sẽ trả số tiền là 0,5x nếu thiết bị bị hỏng ở năm thứ 2 hoặc thứ 3. Nếu thiết bị bị hỏng ở 3 năm sau đó thì không có thanh toán nào được thực hiện.
Tại mức X phải được thiết lập là gì nếu thanh toán dự kiến sẽ được thực hiện theo mức bảo hiểm này là 1000?

Bài giải

Gọi T là biến cố thời gian cho đến khi thiết bị hư.
X là biến cố được thanh toán.
Ta có: $X = x$ nếu $T \leq 1$

$$\Rightarrow X = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x & 1 \leq T \leq 3 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X) = xP(T \leq 1) + \frac{1}{2}xP(1 \leq T \leq 3)$$

Mà:

$$P(T \leq 1) = 1 - e^{-\frac{1}{10}} = 0,096$$

$$P(1 \leq T \leq 3) = e^{-\frac{1}{10}} - e^{-\frac{3}{10}} = 0,163$$

$$\Rightarrow E(X) = 0,096x + 0,5.0,163x = 0,177x$$

$$\Rightarrow x = 5644$$

Bài 36.14

Một chính sách bảo hiểm hoàn lại chi phí nha khoa, lợi ích tối đa lên đến 250. Cho hàm mật độ xác suất của X là:
f(x) = $\begin{cases} ce^{-0.004x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$
với c là hằng số. Tính lợi ích trung bình của chính sách này

Bài giải

$\int_0^{250} ce^{-0.004x}dx = c(-\frac{1}{-0.004}e^{-0.004x}) \Big|_0^{250} = c(-\frac{1}{-0.004}(e^{-1} - 1)) = 1$
$\Rightarrow c = \frac{1}{158}$

$\mathrm{P(X \le m)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^m \frac{1}{158} e^{-0.004x} dx = -\frac{125}{79}(e^{-0.004x}) \Big|_0^m$
$= -\frac{125}{79}(e^{-0.004m}) + \frac{125}{79} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow e^{-0.004m} = 0.684 \Rightarrow m = 94.94$

■

Bài 36.14

Một chính sách bảo hiểm hoàn trả chi phí nha khoa X, lợi nhuận lớn nhất lên đến 250. Hàm mật độ của X là

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-0.004x}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}, \quad c \text{ là hằng số.}$$

Tính trung bình lợi nhuận cho chính sách này.

<u>*Bài giải*</u>

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} ce^{-0.004x} dx = 1 \quad &\Rightarrow \quad \int_0^{\infty} ce^{-0.004x} dx = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{ce^{-0.004x}}{-0.004} \Bigg|_{x=0}^{x \to +\infty} = 1 \\ &\Rightarrow \quad c = 0.004. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 0.004e^{-0.004t} dt \\ &= -e^{-0.004t} \Bigg|_{t=0}^{t=x} = 1 - e^{-0.004x}. \end{aligned}$$

Trung bình lợi nhuận là số M sao cho

$$\begin{aligned} F_X(M) = 0.5 &\Leftrightarrow 1 - e^{-0.004M} = 0.5 \\ &\Leftrightarrow e^{-0.004M} = 0.5 \\ &\Leftrightarrow -0.004M = \ln(0.5) = -0.693 \\ &\Leftrightarrow M = 173.287. \end{aligned}$$

Vậy trung bình lợi nhuận thu được là 173.287.

■

Bài 36.17

Hàm phân phối tích lũy cho các chi phí chăm sóc sức khỏe có kinh nghiệm của một hợp đồng bảo hiểm được mô hình hóa bởi hàm:

F(x) = $\begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ Chính sách này có được khấu trừ của 20. Doanh nghiệp bảo hiểm bồi hoàn hợp đồng bảo hiểm cho 100% chi phí chăm sóc y tế giữa 20 và 120 trừ đi khấu trừ. Chi phí chăm sóc sức khỏe trên 120 được hoàn trả 50%. Cho G là hàm phân phối tích lũy của số tiền bồi hoàn cho rằng việc hoàn trả là tích cực. Tính G(115)

Bài giải

Gọi W là số tiền hoàn trả vô điều kiện, và Y số tiền được hoàn trả

W = $\begin{cases} 0 & x \leq 20 \\ X - 20 & 20 < X \leq 120 \\ (120 - 20) + 0.5(X - 120) = 40 + 0.5X & X > 120 \end{cases}$

Y = (W|X>20)

Y = $\begin{cases} X - 20 & 20 < X \leq 120 \\ 40 + 0.5X & X < 20 \cup X > 120 \end{cases}$

G(115) = Pr($Y \leq 115$) = Pr($(X \leq 120 | X > 20) \cup ((40 + 0.5X \leq 115) \cap (X > 120) | X > 20)$) = $\frac{Pr(20<X\leq 120)}{Pr(X>20)} + Pr((120 < X \leq 150 | X > 20)) = \frac{Pr(20<X\leq 120)}{Pr(X>20)} + \frac{Pr(120<X\leq 150)}{Pr(X>20)} = \frac{Pr(20<X\leq 150)}{Pr(X>20)} = Pr(X \leq 130) = F_X(130) = 1 - e^{-\frac{130}{100}} \approx 0.727$

■

Bài 37.1

Cho X có phân phối gamma với tham số (α, λ). Đặt Y = cX với c>0. Chứng minh:

$$F_Y(y) = \frac{(\lambda/c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y z^{\alpha-1} e^{-\lambda\frac{z}{c}} dz$$

Do đó Y là một phân phối gamma với tham số $(\alpha, \frac{\lambda}{c})$

Bài giải

X có phân phối Gamma với tham số (α, λ) nên X có hàm mật độ xác suất:

f(x) = $\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$, x > 0

Ta có Y = cX = h(X), c > 0

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(cX \leq y) = P(X \leq \frac{y}{c}) = F_X(\frac{y}{c})$

$\Longrightarrow f_Y(y) = f_X(\frac{y}{c}) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda\frac{y}{c})^{\alpha-1}e^{-\lambda\frac{y}{c}}$

$\Longrightarrow F_Y(y) = \int_0^y f_Y(y) = \dfrac{(\lambda/c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y z^{\alpha-1}e^{-\lambda\frac{z}{c}}dz$

■

Bài 37.1

Cho X có phân phối Gamma với các tham số (α, λ). Đặt $Y = cX$ với c > 0.
Chứng minh rằng:

$$F_Y(y) = \frac{(\lambda/c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y z^{\alpha-1} e^{-\lambda \frac{z}{c}} dz$$

Khi đó, Y có phân phối Gamma với các tham số $(\alpha, \frac{\lambda}{c})$.

<u>*Bài giải*</u>

Ta có:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(cX \le y) = P(X \le \frac{c}{y}) \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{y}{c}} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{z}{c} \Rightarrow dt = \frac{dz}{c}$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y \left(\frac{z}{c}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda \frac{z}{c}} \frac{dz}{c} \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y \frac{z^{\alpha-1}}{c^\alpha} e^{-\lambda \frac{z}{c}} dz \\ &= \frac{(\lambda/c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y z^{\alpha-1} e^{-\lambda \frac{z}{c}} dz \end{aligned}$$

Vậy

$$F_Y(y) = \frac{(\lambda/c)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y z^{\alpha-1} e^{-\lambda \frac{z}{c}} dz$$

Từ đó ta thấy Y có phân phối Gamma với các tham số $(\alpha, \frac{\lambda}{c})$

■

Bài 37.2

Nếu X có hàm mật độ xác suất được cho bởi

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$$

Tìm trung bình và phương sai.

<u>*Bài giải*</u>

X có phân phối gamma với $\lambda = 2$ và $\alpha = 3$ do đó trung bình của X là $\frac{\alpha}{\lambda} = 1,5$ và phương sai của X là $\frac{\alpha}{\lambda^2} = 0,75$

■

Bài 37.4

Giả sử biến ngẫu nhiên X là thời gian (trong nhiều giờ) mà chuyên gia kĩ thuật lắp đặt một máy tính có phân phối Gamma với tham số $\alpha = 3$và $\lambda = 0.5$ Tính xác suất có tối đa một máy tính được lắp đặt trong 1 giờ?

Bài giải

Theo giả thiết ta có $X \sim G(\alpha = 3, \lambda = 5)$
Hàm mật độ xác suất

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2} \times e^{\frac{-x}{2}} \times \left(\frac{x}{2}\right)^2}{\Gamma(3)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Xác suất có tối đa một máy tính được lắp đặt trong 1 giờ là

$P(X \leq 1) = \int_0^1 \dfrac{\frac{1}{2} \times e^{\frac{-x}{2}} \times \left(\frac{x}{2}\right)^2}{\Gamma(3)} dx = \int_0^1 \dfrac{\frac{1}{4} \times e^{\frac{-x}{2}} \times x^2}{2} dx$

$= \int_0^1 \dfrac{1}{16} \times x^2 \times e^{\frac{-x}{2}} dx = 0.014$

∎

Bài 37.4

Giả sử thời gian (tính theo giờ) được thực hiện bởi một kỹ thuật viên để sửa chữa một máy tính là một biến ngẫu nhiên X có phân phối gamma với các thông số $\alpha = 3$ và $\lambda = 0,5$. Xác suất mà phải mất không quá 1 giờ để sửa chữa một máy tính là gì?

Bài giải

$P(X \leqslant 1) = \int_0^1 \dfrac{1}{2^3\Gamma(3)} x^2 e^{\frac{-x}{2}} dx = \dfrac{1}{16} \int_0^1 x^2 e^{\frac{-x}{2}} dx$ (I)
Đặt $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$
$dv = e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow v = -2e^{\frac{-x}{2}}$
Dùng phương pháp tích phân từng phần:
$(I) = \dfrac{-1}{8} e^{\frac{-1}{2}} + \dfrac{1}{4} \int_0^1 xe^{\frac{-x}{2}} dx$
$\int_0^1 xe^{\frac{-x}{2}} dx = \dfrac{-1}{2} e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{-1}{2}} + 1$
$(I) = \dfrac{-1}{8} e^{\frac{-1}{2}} - \dfrac{-1}{2} e^{\frac{-1}{2}} - e^{\frac{-1}{2}} + 1 = e^{\frac{-1}{2}} (\dfrac{-1}{8} - \dfrac{1}{2} - 1) + 1 = 0,014$

$\blacksquare$

Bài 37.5-chưa giải

Giả sử biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}x^2e^{-\frac{x}{2}} & \text{nếu}\, x > 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

. Tìm $E(X^3)$.

Bài giải

content...

$\blacksquare$

Bài 37.6

X là một phân phối chuẩn hóa. Biểu diễn X^2 là một phân phối γ với $\alpha = \lambda = \dfrac{1}{2}$

Bài giải

Do $t \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} F_{x^2}(t) &= Pr(X^2 \leq t) = Pr(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) \\ &= \theta(\sqrt{t}) - \theta(-\sqrt{t}) \end{aligned}$$

Đạo hàm và sử dụng quy tắc dây chuyền, ta có:

$$f_{X^2}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\theta'(\sqrt{t}) + \frac{1}{2\sqrt{t}}\theta'(-\sqrt{t})\frac{1}{\sqrt{t}}\theta'(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}t^{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}$$

Hàm mật độ phân cố γ với $\lambda = \alpha = \dfrac{1}{2}$

$\blacksquare$

Bài 37.7

Cho X có phân phối gamma với tham số(α,λ). Tìm $E(e^{tX})$

Bài giải

$E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha}\int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{\lambda}-t)}x^{\alpha-1}dx$
Do $\frac{1}{\lambda} - t > 0 \Rightarrow t < \frac{1}{\lambda}$
Đặt: $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\lambda} - t \Rightarrow \varphi = \frac{\lambda}{1-\lambda t}$
$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha}\int_0^\infty e^{-x\frac{1}{\varphi}}x^{\alpha-1}dx$
$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\lambda^\alpha}(\Gamma(\alpha)\varphi^\alpha) = \left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{1-\lambda t}\right)^\alpha$

■

Bài 37.7

Cho X là một biến ngẫu nhiên có phân phối gamma với tham số (α, λ). Tìm $E(e^{tX})$

Bài giải

$$\mathit{\Gamma}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}dy$$

Hàm phân phối xác suất của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\mathit{\Gamma}(a)} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{\lambda e^{\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\mathit{\Gamma}(a)}dx = \frac{1}{\mathit{\Gamma}(a)}\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}dx = \frac{\lambda(\lambda)^{\alpha-1}}{\mathit{\Gamma}(a)}\int_0^\infty e^{tx}e^{-\lambda x}(x)^{\alpha-1}dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\mathit{\Gamma}(a)}\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}x^{\alpha-1}dx = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)(\lambda-t)^{\alpha-1}}\int_0^\infty \frac{(\lambda-t)e^{-(\lambda-t)x}[(\lambda-t)x]^{\alpha-1}}{\mathit{\Gamma}(a)}dx$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \qquad \lambda - t \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \geqslant t$$

■

Bài 37.10

Tìm hàm mật độ,kỳ vọng, phương sai cua hàm phân phối chi bình phương với bậc tự do n

Bài giải

f(x)=$\begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{\frac{x}{2}}}{\Gamma(1,2)2^{\frac{n}{2}}} & x > 0 \\ 0 & \neq \end{cases}$
Kỳ vọng E(X)=$\frac{n}{2}2 = n$
Phương sai Var(X)=$\frac{n}{2}2^2 = 2n$

■

Bài 38.1

Giả sử $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{\dfrac{-(x-\mu)^2}{2}}$ và đặt Y = aX + b. Tìm $f_Y(y)$

Bài giải

Trường hợp 1: a > 0
$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P(X \le \dfrac{y-b}{a}) = F_X(\dfrac{y-b}{a})$
$F'_Y(y) = f_Y(y) = \frac{1}{a}f_X(\dfrac{y-b}{a})$
Trường hợp 2: a < 0
$F_Y(y) = P(X \ge \dfrac{y-b}{a}) = 1 - P(X < \dfrac{y-b}{a}) = 1 - F_X(\dfrac{y-b}{a})$
$F'_Y(y) = f_Y(y) = \frac{-1}{a}f_X(\dfrac{y-b}{a})$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|}f_X(\dfrac{y-b}{a}) = \frac{1}{|a|}\dfrac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{\dfrac{-(\dfrac{y-b}{a}-\mu)^2}{2}}$$

■

Bài 38.1

Giả sử $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$ và đặt $Y = aX + b$. Tìm $f_Y(y)$

Bài giải

Xét $g(x) = ax + b$. Khi đó $g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f_Y(y) &= f_X[g^{-1}(y)]\Big|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\Big| \\
&= f_X\Big(\frac{y-b}{a}\Big)\Big|\frac{d}{dy}\frac{y-b}{a}\Big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2}}\Big|\frac{1}{a}\Big| \\
&= \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}}{}^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2}} \qquad (a \neq 0)
\end{aligned}
$$

■

Bài 38.2

X là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ xác suất là
$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$
Tìm hàm phân phối xác suất cho Y=3X-1

<u>*Bài giải*</u>

Với y<1 hoặc y>2 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3X - 1 < y) = 0$
$f_Y(y) = F'_Y(y) = 0$
Với $-1 \leq y \leq 2$
$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3X - 1 \leq y) = P(X \leq \frac{y+1}{3}) = F_X(\frac{y+1}{3})$
$f_Y(y) = (F_Y(y))' = (F_X(\frac{y+1}{3}))' = \frac{2}{9}(y+1)$
Vậy $f_{3X-1} = \begin{cases} \frac{2}{9}(y+1) & -1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

■

Bài 38.4

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của $Y = e^X$

<u>*Bài giải*</u>

Hàm phân phối của Y
$F_Y(y) = Pr(Y \leq y) = Pr(e^X \leq y) = Pr(X \leq ln(y))$

- Nếu $y < 1$ $\quad F_Y(y) = 0$ nên $f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = 0$
- Nếu $y \geq 1$
  $F_Y(y) = Pr(X \leq ln(y)) = F_X(ln(y))$
  Do đó
  $f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = \dfrac{1}{y} f_X(ln(y)) = \dfrac{1}{y}\lambda e^{-\lambda ln(y)} = \dfrac{1}{y}\lambda y^{-\lambda} = \lambda y^{-1-\lambda}$

Vậy hàm mật độ của $Y = e^X$ là

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda y^{-1-\lambda} & y \geq 1 \\ 0 & y < 1 \end{cases}$$

■

Bài 38.4

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên theo mũ với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu } x \leqslant 0; \\ 0 & \text{nếu } otherwise. \end{cases}$$

Hàm mật độ của $Y = eX$ là gì?

<u>*Bài giải*</u>

$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(e^X \leqslant y) = P(X \leqslant lny) = \int_0^{lny} \lambda e^{-\lambda x} dx$
Đặt $u = -\lambda x \Rightarrow du = -\lambda dx$
$F_Y(y) = -\int_0^{-\lambda lny} e^u du = -e^{-\lambda lny} + 1$
$f(y) = F_Y(y)^{'} = -(-\lambda lny)^{'} e^{-\lambda lny} = \dfrac{\lambda}{y} e^{-\lambda lny} = \dfrac{\lambda}{y} y^{-\lambda} = \lambda y^{-\lambda-1}$

■

Bài 38.5-chưa giải

Các phân tử khí di chuyển với vận tốc khác nhau , theo Luật Maxwell- Boltzmann , được biểu diễn bằng hàm mật độ xác suất

$$f(v) = cv^2 e^{-\beta v^2}, \qquad v \geq 0$$

Động năng được cho bởi $Y = E = \frac{1}{2}mv^2$, trong đó m là khối lượng .Tính hàm mật độ của Y?

Bài giải

■

Bài 38.6

Cho X là một biến ngẫu nhiên được phân bố đồng đều trong (0,1). Tìm hàm mật độ xác suất của $Y = -lnX$.

Bài giải

$g(x) = -\ln x$ thì $g^{-1}(y) = e^y$
$F_Y(y) = Pr(Y \leq y) = Pr(-\ln X \leq y) = Pr(X \geq e^{-y})$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

■

Bài 38.7

Cho X có phân phối đều trên [-π,π]. Đó là:
f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0 & otherwise \end{cases}$
Tìm hàm mật độ xác suất của Y = cosX

Bài giải

$A_1 = [-\pi; 0], A_2 = [0; \pi]$
$g(x) = cosX \Rightarrow g^{-1}(y) = arccosX$
$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) & y \in [-1; 1] \\ 0 & y \notin [-1; 1] \end{cases}$
$\begin{cases} -\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & y \in [-1; 1] \\ 0 & y \notin [-1; 1] \end{cases}$

■

Bài 38.7

Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên $[-\pi, \pi]$, có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & -\pi \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của $Y = \cos X$.

Bài giải

Ta có

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left[g^{-1}(y)\right]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| \\ &= f_X\left[\arccos(y)\right]\left|\frac{d}{dy}\arccos(y)\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1. \end{aligned}$$

Vậy $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ với $-1 < y < 1$.

■

Bài 38.10

Một tài khoản đầu tư kiếm được một mức lãi suất hàng năm R mà theo một phân bố đều trên khoảng (0.04, 0.08). Giá trị của một khoản đầu tư ban đầu 10.000 trong tài khoản này sau một năm được cho bởi V = 10. 000e^R. Xác định hàm phân phối tích lũy F$_V$(v) của V.

Bài giải

Ta có R phân bố đều trên khoảng (0.04, 0.08) và V = 10.000e^R. Do đó, hàm phân phối của V được cho bởi:

F(v) = Pr(V≤v) = Pr(10.000e^R $\le v$) = Pr($e^R \le \frac{v}{10.000}$) = Pr(R≤ $ln(\frac{v}{10.000})$) = $\int_{0.04}^{ln(\frac{v}{10.000})} \frac{1}{0.08-0.04}dr = \frac{ln(\frac{v}{10.000})-0.04}{0.08-0.04} = 25(ln(\frac{v}{10.000}) - 0.04)$

$$\mathrm{F}_V(\mathrm{v}) = \begin{cases} 25(ln(\frac{v}{10.000}) - 0.04) & 10.000e^{0.04} < v < 10.000e^{0.08} \\ 0 & v \le 10.000e^{0.04} \\ 1 & v \ge 10.000e^{0.08} \end{cases}$$

■

Bài 38.11

Một mô hình thống kê các đời của một thiết bị sử dụng có biến ngẫu nhiên $Y = 10X^{0,8}$, trong đó X là biến ngẫu nhiên theo cấp số nhân với trung bình là 1 năm. Xác định $f_Y(y)$ với y $>$ 0

Bài giải

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq (\frac{y}{10})^{1,25}) = F_X(\frac{y}{10})^{1,25}$
$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{8}(\frac{y}{10})^{0.25} e^{(\frac{y}{10})^{1,25}}$

■

Bài 38.11

Một mô hình thống kê tuổi thọ của thiết bị sử dụng biến ngẫu nhiên $Y = 10X^{0.8}$, với X là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình là 1 năm. Xác định hàm mật độ xác suất $f_Y(y)$ với y > 0 của biến ngẫu nhiên Y.

Bài giải

Theo đề bài, ta có:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ với } x \geq 0,\ \lambda > 0$$

và

$$\begin{aligned} E(X) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Xét $g(x) = 10x^{0.8}$. Khi đó $g^{-1}(y) = (\frac{y}{10})^{\frac{5}{4}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_Y(y) \quad &= \quad \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & \text{nếu } y > 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \\ &= \quad \begin{cases} f_X((\frac{y}{10})^{\frac{5}{4}}) \left| \frac{d}{dy} (\frac{y}{10})^{\frac{5}{4}} \right| & \text{nếu } y > 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \\ &= \quad \begin{cases} \frac{1}{8}(\frac{y}{10})^{\frac{1}{4}} e^{-(\frac{y}{10})^{\frac{5}{4}}} & \text{nếu } y > 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \end{aligned}$$

■

Bài 38.12

Để T là thời gian tính bằng phút của một dịch vụ đáp ứng 10 yêu cầu của khách hàng qua điện thoại. T phân bố đều từ 8 đến 12 phút. Để R biểu thị tốc độ trung bình của việc phục vụ khách hàng mỗi phút, mà dịch vụ đó đáp ứng yêu cầu. Tìm hàm mật độ $f_R(r)$ của R

Bài giải

$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x-8}{4} & x \in [8, 12] \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

Với R là tốc độ trung bình của việc phục vụ khách hàng mỗi phút nên với $r \in [\frac{5}{6}, \frac{5}{4}]$

$R = \frac{10}{X}$

$F_R(r) = P(R \leq r) = P(\frac{10}{X} \leq r) = 1 - P(X < \frac{10}{r}) = 1 - F_X(\frac{10}{r}) = -\frac{5}{2r} + 3$

$f_R(r) = [F_R(r)]' = \frac{5}{2r^2}$ khi $r \in [\frac{5}{6}, \frac{5}{4}]$

Ở nơi khác thì $F_X(x) = 0$ nên $f_R(r) = 0$

Vậy $f_R(r) = \begin{cases} \frac{5}{2r^2} & r \in [\frac{5}{6}, \frac{5}{4}] \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

■

Bài 38.14

Cho X có phân phối chuẩn với trung bình 1 và độ lệch chuẩn 2.

a) Tìm $Pr(|X| \leq 1)$

b) Cho $Y = e^X$. Tìm hàm mật độ xác suất $f_Y(y)$ của Y

Bài giải

- câu a

$$\begin{aligned} Pr(|X| \leq 1) = Pr(-1 \leq X \leq 1) &= Pr(\frac{-1-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{-1+\mu}{\sigma}) \\ &= \phi\left(\frac{-1+\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{-1-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{-1+1}{2}\right) - \phi\left(\frac{-1-1}{2}\right) \\ &= \phi(0) - \phi(-1) = \phi(0) - 1 + \phi(1) = 0.5 - 1 + 0.841 = 0.341 \end{aligned}$$

- câu b

Ta có $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{8}} \quad -\infty < x < \infty$

Hàm phân phối của Y

$F_Y(y) = Pr(Y \leq y) = Pr(e^X \leq y) = Pr(X \leq ln(y))$

  - Nếu $y \leq 0$ $\qquad F_Y(y) = 0$ nên $f_Y(y) = F_Y'(y) = 0$
  - Nếu $y > 0$

    $F_Y(y) = Pr(X \leq ln(y)) = F_X(ln(y))$

    Do đó

    $$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{y} f_X(ln(y)) = F_Y'(y) = \frac{1}{y}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(ln(y)-1)^2}{8}}$$

Vậy hàm mật độ của $Y = e^X$ là

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y\sqrt{2\pi}} e^{\dfrac{-(ln(y)-1)^2}{8}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

■

Bài 38.15-chưa giải

Cho X là một biến ngẫu nhiên phân bố đều trên khoảng (-1 , 1) .Chứng minh rằng $Y = X^2$ là một biến ngẫu nhiên phân bố đều trên khoảng ($\frac{1}{2}$,1).

Bài giải

content...

■

Bài 38.16

Cho X là một biến ngẫu nhiên với hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

a) Tìm pdf của Y = 3X.

b) Tìm pdf của Z = 3 - X.

Bài giải

a) Ta có:

$$F(y) = Pr(Y \le y) = Pr(3X \le y) = Pr(X \le \frac{y}{3})$$
$$= \int_0^{\frac{y}{3}} \frac{3}{2}x^2 = \frac{y^3}{54}$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = F'(y) = \frac{3y^2}{54} = \frac{y^2}{18}$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{18} & -3 \le y \le 3 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

b) Ta có: $0 < X \Rightarrow 0 < y$

$$F(y) = Pr(Y \leq y) = Pr(3 - X \leq y) = Pr(3 - y \leq X)$$
$$= \int_{3-y}^{1} \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}(\frac{3-y}{2})^2$$
$$\Rightarrow f_Y(y) = F'(y) = \frac{3(3-y)^2}{2}$$
$$\Rightarrow f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(3-y)^2 & 2 < y < 4 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

■

Bài 38.17

Cho X là một biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của $Y = X^2$

Bài giải

Hàm phân phối của Y:
$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$
Nếu $y \leq 0$: $F_Y(y) = 0$ nên $f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = 0$
Nếu $0 < y \leq 1$:

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Do đó:
$f_Y(y) = [F_Y(y)]^{'} = [F_X(\sqrt{y})]^{'} - [F_X(-\sqrt{y})]^{'} = \frac{1}{2\sqrt{y}}F_X^{'}(\sqrt{y})) - (-\frac{1}{2\sqrt{y}}F_X^{'}(-\sqrt{y})$
$= \frac{1}{2\sqrt{y}}[F_X^{'}(\sqrt{y}) + F_X^{'}(-\sqrt{y})] = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$
$= \frac{1}{2\sqrt{y}}[(1 - \sqrt{y}) + (1 - \sqrt{y})] = \frac{1}{\sqrt{y}}(1 - \sqrt{y})$
Nếu y>1: $F_Y(y) = 1$ nên $f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = 0$
Vậy

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}}(1 - \sqrt{y}) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

■

Bài 38.17

Cho X là một biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ của $Y = X^2$.

<u>*Bài giải*</u>

$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$
$f_Y(y) = [F_Y(y)]' = [F_X(\sqrt{y})]' - [F_X(-\sqrt{y})]' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} F'_X(\sqrt{y}) - \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right) F'_X(-\sqrt{y}) =$
$\dfrac{1}{2\sqrt{y}}[F'_X(\sqrt{y} + F'_X(-\sqrt{y})] = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y} + f_X(-\sqrt{y})] = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}(1 - |\sqrt{y}| + 1 - |\sqrt{y}|) =$
$\dfrac{2 - 2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} - 1$

■

Bài 39.1

Một cuộc kiểm tra an ninh tại sân bay có hai đường cao tốc. Giả sử X và Y biểu thị số lượng khách hàng trong dòng đầu tiên và thứ hai tại bất kỳ thời điểm nào. Hàm suất chung của X và Y, $p_{XY}(x, y)$, được tóm tắt bằng bảng dưới đây:

$\frac{X}{Y}$	0	1	2	3	$p_X(.)$
0	0.1	0.2	0	0	0.3
1	0.2	0.25	0.05	0	0.5
2	0	0.5	0.05	0.025	0.125
3	0	0	0.025	0.05	0.075
$p_Y(.)$	0.3	0.5	0.125	0.075	1

Bai 39.2

Cho :

$X\backslash Y$	1	2	3	$p_X(.)$
1	0.1	0.05	0.02	0.17
2	0.1	0.35	0.05	0.5
3	0.03	0.1	0.2	0.33
$p_Y(.)$	0.23	0.5	0.27	1

Tìm $P(X \geq 2, Y \geq 3)$

<u>*Bài giải*</u>

$P(X \geq 2, Y \geq 3) = P_{XY}(2,3) + P_{XY}(3,3) = 0.05 + 0.2 = 0.25$

■

Bài 39.2

Cho bảng sau:

$X \setminus Y$	1	2	3	$p_X(.)$
1	0.1	0.05	0.02	0.17
2	0.35	0.05	0.05	0.50
3	0.03	0.1	0.2	0.33
$p_Y(.)$	0.65	0.23	0.12	1

Tìm $P(X \geq 2, Y \geq 3)$

<u>*Bài giải*</u>

Dựa vào bảng ta có:

$$P(X \geq 2, Y \geq 3) = 0.05 + 0.2 = 0.25$$

■

Bài 39.3

Cho bảng:

$$\begin{bmatrix} \text{X/Y} & 0 & 1 & 2 & p_X(.) \\ 0 & 0,4 & 0,12 & 0,08 & 0,6 \\ 1 & 0,15 & 0,08 & 0,03 & 0,26 \\ 2 & 0,1 & 0,03 & 0,01 & 0,14 \\ p_Y(.) & 0,65 & 0,23 & 0,12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính

(a) Pr(X=0,Y=2)

(b) $Pr(X > 0, Y \leq 1)$

(c) $Pr(X \leq 1)$

(d) Pr(Y>0)

(e) Pr(X=0)

(f) Pr(Y=0)

(g) Pr(X=0,Y=0)

<u>*Bài giải*</u>

(a) Pr(X=0,Y=2)=0,08
(b) $Pr(X > 0, Y \leq 1) = 0,15 + 0,08 + 0,1 + 0,03 = 0,36$
(c) $Pr(X \leq 1) = 0,26 + 0,6 = 0,86$
(d) Pr(Y>0)=0,23+0,12=0,35
(e) Pr(X=0)=0,6
(f) Pr(Y=0)=0,65
(g) Pr(X=0,Y=0)=0,4

■

Bài 39.5

Giả sử biến ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{20-x-y}{375} & 0 \leq x, y \leq 5 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $Pr(1 \leq X \leq 2, 2 \leq Y \leq 3)$

Bài giải

Ta có $Pr(1 \leq X \leq 2, 2 \leq Y \leq 3) = \int_1^2 \int_2^3 \dfrac{20-x-y}{375} dydx$

$$= \int_1^2 \left[\frac{20-x}{375} \times y - \frac{y^2}{2 \times 375}\right] |_2^3 dx = \int_1^2 \left[\frac{20-x}{375} - \frac{1}{150}\right] dx = 0.0423$$

■

Bài 39.5

Giả sử biến ngẫu nhiên X và Y có một pdf đồng thời

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20-x-y}{375} & \text{nếu } 0 \leqslant x, y \leqslant 5; \\ 0 & \text{nếu } otherwise. \end{cases}$$

Tìm $Pr(1 \leqslant X \leqslant 2, 2 \leqslant Y \leqslant 3)$

Bài giải

$$\int_1^2 \int_2^3 \frac{20-x-y}{375} dydx = \frac{1}{375} \int_1^2 \int_2^3 (20-x-y) dydx = \frac{16}{375}$$

■

Bài 39.6

Giả sử hàm mật độ xác suất chung của X và Y là:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} xye^{-\frac{x^2-y^2}{2}} & 0 < x, y \\ 0 & \text{khác.} \end{cases}$$

a) Tìm $F_{XY}(x,y)$.

b) Tìm $f_X(x)$ và $f_Y(y)$.

<u>*Bài giải*</u>

a) Hàm phân phối xác suất của XY là:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,v)dudv = (\int_0^x ue^{\frac{-u^2}{2}}du)(\int_0^y ve^{\frac{-v^2}{2}}dv) = (1-e^{\frac{-x^2}{2}})(1-e^{\frac{-y^2}{2}}) \quad \text{với}\, x, y > 0$$

và bằng 0 trong các trường hợp khác.

b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^{\infty} xye^{\frac{-x^2+y^2}{2}}dy = xe^{\frac{-x^2}{2}}\, khi\, x > 0$$

và bằng 0 trong các trường hợp khác.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_0^{\infty} xye^{\frac{-x^2+y^2}{2}}dx = ye^{\frac{-y^2}{2}}\, khi\, y > 0$$

và bằng 0 trong các trường hợp khác.

■

Bài 39.7

Cho thấy rằng các hàm sau đây không phải là một hàm mật độ xác suất chung.

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x^a y^1 - a & x \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

trong đó 0 <a <1. Hệ số của tích phân bội này là gì $f_{XY}(x,y)$để làm cho nó là một hàm mật độ xác suất chung ?

<u>*Bài giải*</u>

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^a y^{1-a} dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^1 x^a y^{1-a} dxdy \\
&= (2+a-a^2)^{-1} \neq 1
\end{aligned}$$

Do đó, $f_{XY}(x,y)$ không phải hàm mật độ xác suất. Tuy nhiên, ta có thể nhân $f(x,y)$ với $(2+a-a^2)$ để trở thành hàm mật độ:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (2+a-a^2)x^a y^{1-a} & 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

■

Bài 39.8

Một thiết bị chạy cho đến khi một trong hai thành phần bị lỗi, lúc này các thiết bị ngừng hoạt động. Hàm mật độ chung của các kiếp sống của hai thành phần, cả đo bằng giờ, là:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8} & 0 < x,y < 2 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Xác suất mà các thiết bị không hoạt động trong giờ đầu tiên là?

Bài giải

Xác suất thiết bị không hoạt động trong giờ đầu tiên là:

$$Pr(1 \le x \le 2 | 0 \le y \le 2) = \int_0^2 \int_1^2 \frac{(x+y)}{8}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{5}{8}$$

■

Bài 39.8

Một thiết bị hoạt động cho đến khi cả 2 bộ phận của nó bị hỏng, tại thời điểm đó thiết bị ngừng hoạt động. Hàm mật độ đồng thời của tuổi thọ của 2 bộ phận (đơn vị: giờ) là

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{8}, & 0 < x,y < 2, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Tính xác suất thiết bị ngừng hoạt động trong giờ đầu tiên của chu trình.

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X, Y lần lượt là tuổi thọ của 2 bộ phận cấu thành nên thiết bị.
Xác suất thiết bị ngừng hoạt động trong giờ đầu tiên của chu trình là

$$\begin{aligned}
P\left[(X<1)\cup(Y<1)\right] &= 1-\int_1^2\int_1^2 \frac{x+y}{8}dxdy \\
&= 1-\int_1^2\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y}{8}x\Bigg|_{x=1}^{x=2}\right)dy \\
&= 1-\int_1^2\left(\frac{3}{16}+\frac{y}{8}\right)dy \\
&= 1-\left(\frac{3}{16}y+\frac{y^2}{16}\Bigg|_{y=1}^{y=2}\right) \\
&= 1-\frac{3}{8}=0.625.
\end{aligned}$$

Vậy xác suất thiết bị ngừng hoạt động ngay trong giờ đầu tiên của chu trình là 0.625.

■

Bài 39.11

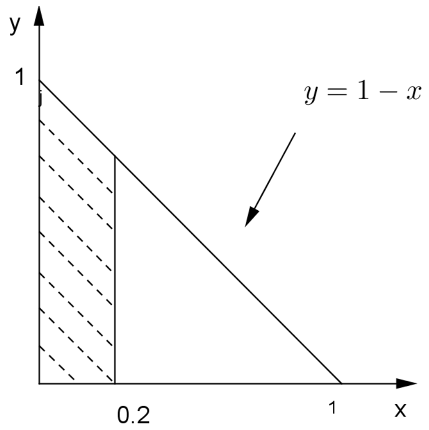
Một công ty đang xem xét bồi thường thiệt hại do cơn lốc theo một chính sách bảo hiểm nông nghiệp. Giả sử X là phần bồi thường thiệt hại về nhà và gọi Y là phần bồi thường thiệt hại tương tự đại diện cho phần còn lại của tài sản. Hàm mật độ chung của X và Y là

$$\mathrm{f}_{XY}(x,y)=\begin{cases} 6[1-(x+y)] & x>0, y>0, x+y<1 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

Xác định khả năng mà các phần bồi thường thiệt hại cho ngôi nhà nhỏ hơn 0,2.

<u>*Bài giải*</u>

Các khu vực có mật độ chung của X và Y được thể hiện ở hình bên dưới.



Pr(X<0.2) $= \int_0^{0.2}\int_0^{1-x} 6(1-(x+y))dydx = 6\int_0^{0.2}(y - xy - \frac{1}{2}y^2)\mid_0^{1-x} dx = 6\int_0^{0.2}(1 - x - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2)dx = 6\int_0^{0.2}((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2)dx = 6\int_0^{0.2}\frac{1}{2}(1-x)^2dx = -(1-x)^3\mid_0^{0.2} = -0.8^3 + 1 = 0.488$

■

Bài 39.12

Cho X và Y là biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ xác suất đồng thời:
$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 15y & x^2 \le y \le x \\ 0 & otherwise \end{cases}$
Tìm hàm mật độ lề của Y.

Bài giải

$f_Y(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 15ydx = 15y^{\frac{3}{2}}(1 - y^{\frac{1}{2}}), 0 < y < 1$
$f_Y(y) = 0$ với các trường hợp còn lại

■

Bài 39.12

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 15y & x^2 \le y \le x \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ lề của Y.

Bài giải

Ta có:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_y^{\sqrt{y}} 15y dx & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 15y(\sqrt{y} - y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

■

Bài 39.13

X là đại diện cho tuổi của xe có bảo hiểm bị tai nạn. Y là thời gian bảo hiểm xe của chủ sỡ hữu cho tới thời điểm bị tai nạn. Y và X có hàm mật độ xác suất đồng thời là $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{64}(10 - xy^2) & 2 \le x \le 10, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

Tính kì vọng của X

Bài giải

$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{64}(10 - xy^2)dy = \frac{1}{64}(10 - \frac{x}{3})$
$E(X) = \int_2^{10} x\frac{1}{64}(10 - \frac{x}{3})dx = 5,7778$

■

Bài 39.15

Tuổi thọ (theo tháng) của 2 linh kiện trong cùng một máy có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{6}{125000}(50 - x - y) \qquad 0 < x < 50 - y < 50$$

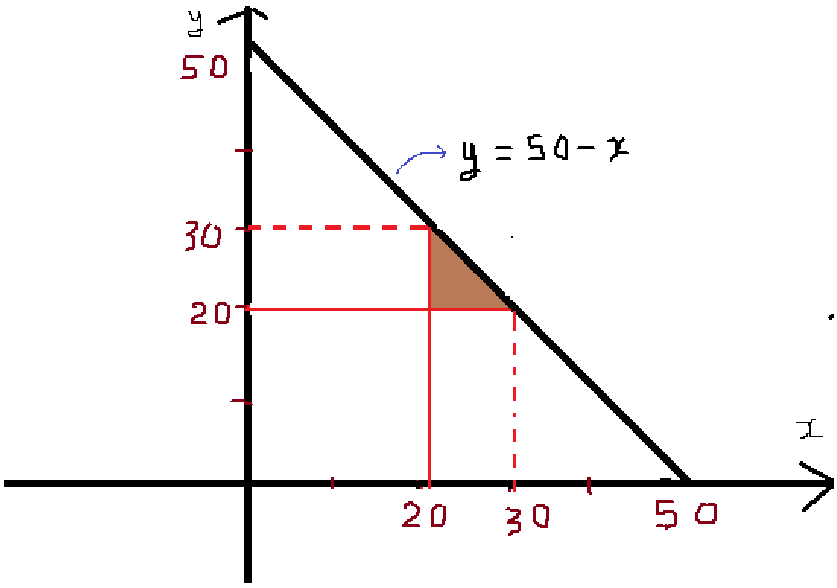
Tính xác suất để cả hai linh kiện hoạt động từ tháng 20 đến thời điểm hiện tại

Bài giải

Gọi X là "linh kiện 1"
Y là "linh kiện 2"
$C = (x,y)|20 \le x \le 30, 20 \le y < 50 - x$ Vậy xác suất để cả hai linh kiện hoạt động từ tháng 20 đến thời điểm hiện tại

$Pr((X,Y) \in C) = \int_{20}^{30}\int_{20}^{50-x} \frac{6}{125000}(50 - x - y)dydx$
$= \frac{6}{125000}\int_{20}^{30}\left(50y - xy - \frac{y^2}{2}\right)|_{20}^{50-x} = \frac{6}{125000}\int_{20}^{30}\left(\frac{1}{2}x^2 - 30x + 450\right) = 0.008$

■



Bài 39.16

Giả sử biến ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ xác suất:

$$f_{XY}(x,y) \begin{cases} x+y & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{khác} \ . \end{cases}$$

Tìm $Pr(X > \sqrt{Y})$.

Bài giải

$$Pr(X > \sqrt{Y}) = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y) dx dy = \int_0^1 ((\frac{x^2}{2} + xy) \mid_{\sqrt{y}}^1) dy = \int_0^1 (\frac{1}{2} + \frac{y}{2} - y\sqrt{y}) dy = (\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}) \mid_0^1 = \frac{7}{20}$$

■

Bài 39.17

Cho X và Y là thiệt hại ngẫu nhiên với hàm mật độ chung:

$$f_{XY}(x,y) = e^{-(x+y)}, x > 0, y > 0$$

Một chính sách bảo hiểm được viết từ việc hoàn trả X + Y. Tính xác suất để hoàn trả là ít hơn 1?

Bài giải

Xác suất để công ty bảo hiểm hoàn trả ít hơn 1 là:

$$Pr(X+Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{-(x+y)} dxdy$$
$$= \int_0^1 (-e^{-1} + e^{-y})dy = -2.e^1 + 1$$

■

Bài 39.18

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục với phân phối tích lũy
$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{250}(20xy - x^2y - xy^2)$ với $0 \leq x \leq 5$ và $0 \leq y \leq 5$
Tính Pr(X>2)

Bài giải

Ta có:

$$F_{XY}(x,y) = \frac{\sigma^2}{\sigma x \sigma y} f_{XY}(x, y = \frac{1}{250}(10 - x - y))$$

$$Pr(2 < x \leq 5 | 0 \leq y \leq 5) = \int\limits_0^5 \int\limits_2^5 \frac{1}{250}(10 - x - y) \text{ d}x \text{ d}y = \frac{12}{25}$$

■

Bài 39.18

Cho X và Y là 2 biến ngẫu nhiên liên tục có hàm phân phối đồng thời $F_{XY}(x,y) = \frac{1}{250}\left(20xy - x^2y - xy^2\right)$ với $0 \leqslant x \leqslant 5$ và $0 \leqslant y \leqslant 5$. Tính Pr($X > 2$).

Bài giải

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{XY}(x,y) = \frac{1}{250}(20 - 2x - 2y)$$

$$P(X > 2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^5 \int_2^5 \frac{1}{250}(20 - 2x - 2y)dxdy$$

$$= \frac{1}{250} \int_0^5 \left(20x - \frac{2x^2}{2} - 2xy\right)\Bigg|_2^5 dy = \frac{1}{250} \int_0^5 (39 - 6y)dy = \frac{1}{250}\left(39y - \frac{6y^2}{2}\right)\Bigg|_0^5$$

$$= \frac{120}{250} = 0.48$$

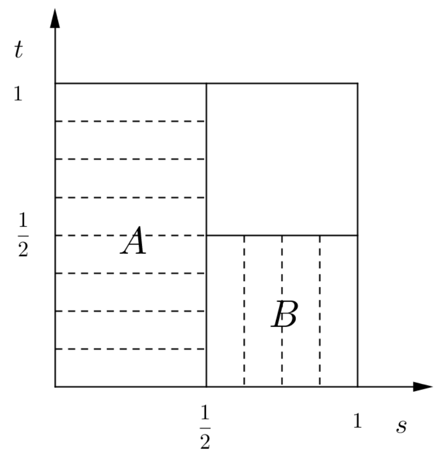
■

Bài 39.21

Một thiết bị bao gồm hai thành phần. Thiết bị này bị lỗi nếu một trong hai thành phần bị lỗi. Hàm mật độ chung của các thời gian hoạt động của mỗi thành phần, tính bằng giờ, là f(s,t), trong đó 0 < s < 1 và 0 < t <1. Tính xác suất mà thiết bị bị lỗi trong nửa giờ đầu tiên của hoạt động?

Bài giải

Các phần nét đứt là miền của mật độ thiết bị bị lỗi trong nửa giờ đầu tiên. Chúng ta chia nó thành hai vùng nhỏ: A và B, như được chỉ ra trong hình.



Xác suất cần tìm là:
$\Pr(S \leq \frac{1}{2} \cup T \leq \frac{1}{2}) = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} f(s,t)dsdt + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 f(s,t)dsdt$

■

Bai 39.22

Một khách hàng dành X phút trong phòng đợi của một đại lý bảo hiểm và Y phút cuộc họp với đại lý. Hàm mật độ chung của X và Y được mô hình hóa bởi:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{800} e^{\frac{x}{40} + \frac{y}{20}}, 0 < x, 0 < y \\ 0, \text{ ngược lại} \end{cases}$$
Tìm xác suất mà một khách hàng chi ít hơn 60 phút tại văn phòng của đại lý. Bạn không cần tính tích phân.

Bài giải

Một khách hàng chi ít hơn 60 phút tại đại lý.
$\Longrightarrow$ x + y $<$ 60
Khách hàng đó phải đợi x phút, sau đó họp y phút.
$\Longrightarrow$ x $<$ 60 và y $<$ 60 - x
Vậy xác suất cần tính là:

$$P = \frac{1}{800}\int_0^{60}\int_0^{60-x} e^{\frac{x}{40}+\frac{y}{20}}dydx$$

■

Bài 39.22

Một khách hàng dành X phút ngồi chờ trong phòng của một đại lý bảo hiểm và Y phút để gặp mặt đại lý. Hàm mật độ đồng thời của X và Y có thể được tả như sau:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{800}e^{\frac{x}{40}+\frac{y}{20}} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Tìm xác suất khách hàng này dành ít hơn 60 phút tại văn phòng của đại lý. Bạn không phải tính giá trị của tích phân.

Bài giải

Xác suất khách hàng này dành ít hơn 60 phút tại văn phòng của đại lý là:

$$\begin{aligned} P(X+Y<60) &= \iint\limits_{x+y<60} f_{X,Y}(x,y)dydx \\ &= \iint\limits_{x+y<60} \frac{1}{800}e^{\frac{x}{40}+\frac{y}{20}}dydx \\ &= \int_0^{60}\int_0^{60-x} \frac{1}{800}e^{\frac{x}{40}+\frac{y}{20}}dydx \\ &= \frac{1}{800}\int_0^{60}\int_0^{60-x} e^{\frac{x}{40}+\frac{y}{20}}dydx \end{aligned}$$

■

Bài 40.1

X và Y là biến ngẫu nhiên cho bởi hàm mật độ
$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 \le x, y \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

(a) X và Y có độc lập không?
(b) Tìm Pr(X<Y)
(c) Tìm Pr(X<a)

Bài giải

(a)$f_X(x) = \int_0^\infty e^{-(x+y)}dy = -\frac{1}{e^x}$
$f_Y(y) = \int_0^\infty e^{-(x+y)}dx = -\frac{1}{e^y}$
$Dof_{XY}(xy) = f_X(x).f_Y(y)$ nên X và Y độc lập
(b) $Pr(X < Y) = Pr(X - Y < 0) = \int_0^\infty \int_0^y e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^\infty(-e^{-2y} + e^{-y}) = \frac{1}{2}$
(c) $Pr(X < a) = \int_0^a -\frac{1}{e^x} = e^{-a} - 1$

■

Bài 40.3

Cho X và Y là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất đồng thời

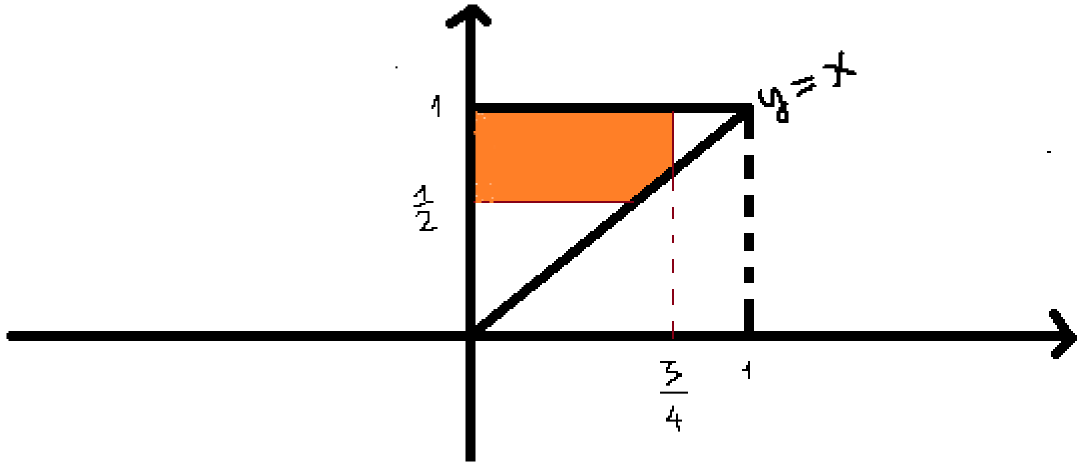
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6(1-y) & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

a) Tìm $Pr(X \le \dfrac{3}{4}, Y \ge \dfrac{1}{2})$
b) Tìm $f_X(x)$ và $f_Y(x)$
c) X và Y có độc lập không?

Bài giải

- câu a
  $Pr(X \le \dfrac{3}{4}, Y \ge \dfrac{1}{2}) = \int_0^1 \int_0^y 6(1-y)dxdy - \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^y 6(1-y)dxdy - \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_x^1 6(1-y)dydx$
  $= \int_0^1 6y(1-y)dy - \int_0^{\frac{1}{2}} 6y(1-y)dy - \int_{\frac{3}{4}}^1 (3 - 6x_3x^2)dx$
  $= 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{64} = \dfrac{31}{64} = 0.484375$
- câu b
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^1 6(1-y)dy = 3 - 6x + 3x^2$
  $f_Y(y) \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^y 6(1-y)dy = 6y - 6y^2$
- câu c
  Vì $f_X(x)f_Y(y) = (3 - 6x + 3x^2)(6y - 6y^2) \neq f_{X,Y}(x,y)$ nên X, Y không độc lập

■



Bài 40.3

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên với pdf đồng thời cho bởi

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6(1-y) & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1; \\ 0 & \text{nếu } \textit{otherwise}. \end{cases}$$

a)Tìm $f_X(x)$ và $f_Y(y)$
b)X và Y có độc lập không?

<u>*Bài giải*</u>

$f_X(x) = \int_x^1 6(1-y)dy = 3x^2 - 6x + 3, 0 \leqslant x \leqslant 1$ và 0 otherwise
$f_X(x) = \int_0^y 6(1-y)dy = 6y(1-y), 0 \leqslant x \leqslant 1$ và 0 otherwise
X và Y độc lập.

■

Bài 40.4

Cho X và Y có hàm mật độ xác suất:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{khác} . \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) Tìm $f_X(x)$ và $f_Y(y)$.

c) X và Y có độc lập với nhau không ?

Bài giải

a) Do $f_{XY}(x,y)$ là hàm mật độ xác suất nên:

$$\int_0^1 \int_0^1 kxydxdy = 1 \Leftrightarrow k(\frac{x^2}{2}) \mid_0^1 (\frac{y^2}{2}) \mid_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{4} = 1 \Leftrightarrow k = 4$$

b)

$$f_X(x) = \int_0^1 4xydy = 2x(y^2) \mid_0^1 = 2x \quad \text{khi}\, 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{và} \quad f_X(x) = 0\, \text{trường hợp khác.}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xydx = 2y(x^2) \mid_0^1 = 2y \quad \text{khi}\, 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{và} \quad f_X(x) = 0\, \text{trường hợp khác.}$$

c) Do $f_X(x).f_Y(y) = f_{XY}(x,y)$ nên X, Y độc lập.

■

Bài 40.5

Cho X và Y có mật độ chung:

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy^2 & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) Tính mật độ biên của X và Y.

c) Tính $Pr(Y > 2X)$.

d) Tính $Pr(|X - Y|) < 0,5$.

e) X và Y có độc lập không?

Bài giải

a) Ta có:

$$\int_0^1 \int_0^1 kxy^2 dxdy = \int_0^1 ky^2 \frac{1}{2} dy = \frac{k}{6}$$

Để $f(x)$ là hàm mật độ chung thì:

$$\frac{k}{6} = 1 \Rightarrow k = 6$$

b) Ta có:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^1 6xy^2 dy & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases} = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^1 6xy^2 dy & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases} = \begin{cases} 3y^2 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{giá trị khác} \end{cases}$$

c)

$$Pr(Y > 2X) = Pr(X < \frac{Y}{2}) = \int_0^1 \int_0^{\frac{y}{2}} 6xy^2 dxdy = \int_0^1 \frac{3y^4}{4} dy = 0,15$$

d)

$$Pr(|X - Y| < 0,5) = 0,875$$

e)

$$f_{XY}(x,y) = 6xy^2 = 2x.3y^2$$

Vậy X,Y độc lập.

■

Bài 40.6

Giả sử mật độ chung của các biến ngẫu nhiên X và Y được cho bởi

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kx^2y^{-3} & 1 \le x, y \le 2 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(a) Tìm k
(b) X và Y có độc lập với nhau không?

<u>*Bài giải*</u>

(a) Xét f(x) có là hàm mật độ không?
$\int\limits_1^2 \int\limits_1^2 kx^2y^{-3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \Leftrightarrow \frac{7}{3}k \int\limits_1^2 y^{-3}\,\mathrm{d}y{=}1$
$\Rightarrow \frac{7}{8}k = 1 \Rightarrow k = \frac{8}{7}$
(b) Xét X và Y độc lập
$f_X(x) = \int\limits_1^2 \dfrac{8}{7}x^2y^{-3}\,\mathrm{d}y = \dfrac{3}{7}x^2$
$f_Y(y) = \int\limits_1^2 \dfrac{8}{7}x^2y^{-3}\,\mathrm{d}x = \dfrac{8}{3}y^{-3}$
Ta đuọc:
$f_{XY}(x,y) = \frac{8}{7}x^2y^{-3} = f_X(x)f_Y(y)$
Suy ra X và Y độc lập

■

Bài 40.6

Giả sử hàm mật độ đồng thời của 2 biến ngẫu nhiên X và Y được cho như sau

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kx^2y^{-3}, & 1 \le x, y \le 2, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

a) Tìm k.

b) X và Y có độc lập không?

c) Tìm $P(X > Y)$.

Bài giải

a) Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1 \Leftrightarrow &\quad \int_{1}^{2}\int_{1}^{2} kx^2y^{-3}dxdy = 1\\
\Leftrightarrow &\quad \int_{1}^{2}\left(\frac{ky^{-3}x^3}{3}\Bigg|_{x=1}^{x=2}\right)dy = 1\\
\Leftrightarrow &\quad \int_{1}^{2}\frac{7}{3}ky^{-3}dy = 1\\
\Leftrightarrow &\quad -\frac{7}{6}ky^{-2}\Bigg|_{y=1}^{y=2} = 1\\
\Leftrightarrow &\quad k = \frac{8}{7}.
\end{aligned}$$

Vậy $k = \dfrac{8}{7}$.

b) Ta có

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{8}{7}x^2y^{-3}, & 1 \le x, y \le 2,\\ 0, & \text{nơi khác.}\end{cases}$$

Mà

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{1}^{2}\frac{8}{7}x^2y^{-3}dy = \frac{3}{7}x^2.$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{1}^{2}\frac{8}{7}x^2y^{-3}dx = \frac{8}{3}y^{-3}.$$

Suy ra

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{3}{7}x^2\right)\left(\frac{8}{3}y^{-3}\right) = \frac{8}{7}x^2y^{-3} = f_{XY}(x,y).$$

Vậy X và Y độc lập.

c) Ta có

$$
\begin{aligned}
P(X > Y) &= \int_1^2 \int_y^2 \frac{8}{7} x^2 y^{-3} dx dy \\
&= \int_y^2 \left(\frac{8}{7} \frac{x^3}{3} y^{-3} \Big|_{x=y}^{x=2} \right) dy \\
&= \int_1^2 \left(\frac{64}{21} y^{-3} - \frac{8}{21} \right) dy \\
&= -\left(\frac{64}{42} y^{-2} + \frac{84}{21} y \right) \Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{16}{21}.
\end{aligned}
$$

Vậy $P(X > Y) = \dfrac{16}{21}$.

■

Bài 40.9

Một khảo sát đang được tiến hành về sức khỏe của hai nhóm độc lập của mười người mua bảo hiểm đang được theo dõi trong thời gian một năm thời gian. Cá nhân tham gia vào khảo sát rút ra trước khi kết thúc khảo sát với xác suất 0.2 (độc lập của những người tham gia khác). Tính xác suất mà ít nhất 9 người tham gia hoàn thành khảo sát một trong hai nhóm, nhưng không phải trong cả hai nhóm?

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X là người tham gia nhóm 1 hoàn thành khảo sát.
Gọi Y là người tham gia nhóm 2 hoàn thành khảo sát.
X, Y độc lập
$\Pr(((X \geq 9) \cap (Y < 9)) \cup ((X < 9) \cap (Y \geq 9))) = \Pr((X \geq 9) \cap (Y < 9)) + ((X < 9) \cap (Y \geq 9))$
Do tính đối xứng và độc lập giữa X và Y ta có:
$2\Pr((X \geq 9) \cap (Y < 9)) = 2\Pr(X \geq 9) Pr(Y < 9)) = 2\Pr(X \geq 9) Pr(1 - Y \geq 9) = 2\Pr(X \geq 9) Pr(1 - X \geq 9) = 2(C_{10}^{9} 0.8^9 0.2 + C_{10}^{10} 0.8^{10})(1 - (C_{10}^{9} 0.8^9 0.2 + C_{10}^{10} 0.8^{10})) \approx 2 \times 0.376(1 - 0.376) \approx 0.469$

■

Bài 40.10

Thời gian chờ đợi hình thành yêu cầu bồi thường đầu tiên đối với một người tài xế tốt và thời gian hình thành yêu cầu bồi thường đầu tiên đối với một người tài xế xấu là độc lập và có phân phối mũ với trung bình 6 năm và 3 năm tương ứng. Xác suất mà các yêu cầu bồi thường đầu tiên từ một người lái xe tốt sẽ được nộp trong 3 năm và các yêu cầu bồi thường đầu tiên từ một người lái xấu sẽ được nộp trong 2 năm là gì?

Bài giải

Gọi X là thời gian chờ đợi hình thành yêu cầu bồi thường đầu tiên đối với người lái xe tốt.
Y là thời gian chờ đợi hình thành yêu cầu bồi thường đầu tiên đối với người lái xe xấu.
$\lambda_X = \frac{1}{6}$
$\lambda_Y = \frac{1}{3}$
$P(X \leq 3, Y \leq 2) = P(X \leq 3)P(Y \leq 2)$
$= \int_0^3 \lambda_X e^{-\lambda_X x} dx \times \int_0^2 \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} dy = 0.191$

■

Bài 40.10

Thời gian chờ đợi đối với khiếu nại lần đầu từ một người lái xe giỏi và thời gian chờ đợi đối với khiếu nại lần đầu từ một người lái xe tệ là độc lập và có phân phối mũ với trung bình lần lượt là 6 năm và 3 năm.
Tính xác suất mà các yêu cầu bồi thường lần đầu từ người lái xe giỏi sẽ được nộp trong vòng 3 năm và yêu cầu bồi thường lần đầu từ người lái xe tệ sẽ được nộp trong vòng 2 năm.

Bài giải

Gọi X, Y lần lượt là thời gian chờ đợi đối với khiếu nại lần đầu từ người lái xe giỏi và người lái xe tệ. Khi đó $E(X) = 6$ và $E(Y) = 3$.
Ta tìm $P(X \leq 3, Y \leq 2)$

$$\begin{aligned} E(X) = 6 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 6 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow f_X(x) = &\begin{cases} \frac{1}{6} e^{-\frac{x}{6}} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} E(Y) = 3 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} y\lambda e^{-\lambda x} dy = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 3 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}} & \text{nếu } y \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Vì X và Y độc lập nên ta có:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3, Y \leq 2) &= P(X \leq 3)P(Y \leq 2) \\ &= \int_0^3 \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}}dx \int_0^2 \frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}dy \\ &= -e^{-\frac{x}{6}}\Big|_0^3 (-e^{-\frac{y}{3}})\Big|_0^2 \\ &= 0.191 \end{aligned}$$

■

Bài 40.11-chưa làm

Bài 40.13

Một gia đình mua 2 loại bảo hiểm từ một công ty. Tổn thất của 2 loại bảo hiểm này là độc lập và có phân phối đều trên [0,10]. Loại 1 có khoản khấu trừ là 1, và loại 2 có khoản khấu trừ là 2. Theo thống kê, một gia đình có tổn thất đúng 1 loại bảo hiểm. Tính xác suất để tổng tiền bồi thường trả cho mỗi gia đình không vượt quá 5.

Bài giải

Gọi X_1 tổn thất bảo hiểm loại 1 có khoản khấu trừ là 1
X_2 tổn thất bảo hiểm loại 2 có khoản khấu trừ là 2
Tổng chi phí trả cho gia đình là $Z = X_1 - 1 + X_2 - 2 = X_1 + X_2 - 3$
$X_1 \sim U[0, 10]$

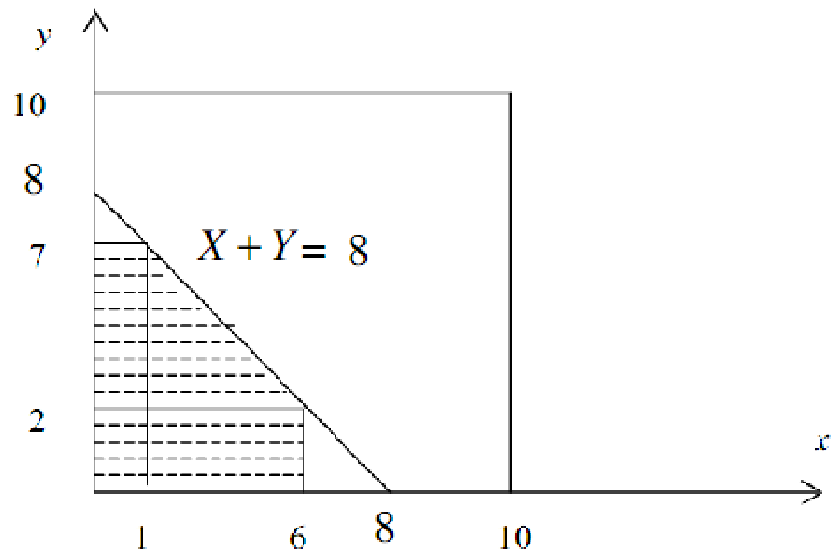
$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 0 \leq x_1 \leq 10 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

$X_2 \sim U[0, 10]$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 0 \leq x_2 \leq 10 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Vì X_1 và X_2 độc lập nên ta có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{100} & 0 \leq x_1, x_2 \leq 10 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$



$P(Z \le 5) = P(X_1 + X_2 - 3 \le 5) = P(X_1 + X_2 \le 8)$

$$= P(0 < X_1 < 6, 0 < X_2 < 2) + P(0 < X_1 < 1, 2 < X_2 < 7) + P(1 < X_1 < 6, 2 < X_2 < 8-x) \quad (1)$$

$$= \int_0^6 \int_0^2 \frac{1}{100} dydx + \int_0^1 \int_2^7 \frac{1}{100} dydx + \int_1^6 \int_2^{8-x} \frac{1}{100} dydx$$
$$= \frac{3}{25} + \frac{1}{200} + \int_1^6 \frac{1}{100}(6-x)dx = \frac{17}{100} + \frac{1}{8} = 0.295$$

■

Bài 40.14

Trong một thị trấn nhỏ , giả sử tổn thất hàng năm do bão, cháy nổ , và trộm cắp gây ra là độc lập với nhau, và là các biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với các giá trị trung bình tương ứng là 1.0, 1.5, và 2.4 .
Xác định xác suất lớn nhất của những thiệt hại vượt quá 3 .

Bài giải

Đặt x_1 là thiệt hại do bão gây ra
x_2 là thiệt hại do cháy gây ra
x_3 là thiệt hại do trộm cắp gây ra.
$Y = max\{X_1, X_2, X_3\}$.
$Pr(Y > 3) = 1 - Pr(Y \le 3)$
$= 1 - Pr(X_1 \le 3, X_2 \le 3, X_3 \le 3)$
$= 1 - Pr(X_1 \le 3).Pr(X_2 \le 3).Pr(X_3 \le 3)$

(Do X_1, X_2, X_3 độc lập).
Mà $X_1 \sim Exp(1.0), X_1 \sim Exp(1.5), X_1 \sim Exp(2.4)$ nên

$$Pr(X_1 \leq 3) = \int_0^3 1e^{-1x}dx = 1 - e^{-3}$$

$$Pr(X_2 \leq 3) = \int_0^3 1.5(e^{-1.5x})dx = 1 - e^{-4.5}$$

$$Pr(X_3 \leq 3) = \int_0^3 2.4(e^{-2.4x})dx = 1 - e^{-7.2}$$

Vậy $Pr(Y > 3) = 0.414$.

■

Bài 40.16-giải

Một công ty cung cấp bảo hiểm động đất. Phí bảo hiểm hàng năm được mô hình hóa bởi một biến ngẫu nhiên theo cấp số nhân với trung bình 2. Tuyên bố hàng năm được mô hình hóa bởi một biến ngẫu nhiên theo cấp số nhân với trung bình 1. Phí bảo hiểm và tuyên bố độc lập. Cho X biểu thị tỷ lệ của các yêu sách phí bảo hiểm.
Hàm mật độ của X là gì?

Bài giải

■

Bài 40.16

Một công ty đưa ra bảo hiểm xã hội. Phí bảo hiểm hằng năm là một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình là 2. Số tiền bồi thường hằng năm là một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với trung bình là 1. Phí bảo hiểm và tiền bồi thường độc lập nhau. Đặt X là tỉ lệ giữa số tiền bồi thường và phí bảo hiểm. Tính hàm mật độ của X.

Bài giải

Y_1: phí bảo hiểm hằng năm $\quad Y_1 \sim exp\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y_1} & y_1 \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Y_2: tiền bồi thường hằng năm $\quad Y_2 \sim exp(1)$

$$f_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} e^{-y_2} & y_2 \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P\left(\frac{Y_2}{Y_1} \leqslant x\right) = \iint_{\frac{y_2}{y_1} \leqslant x} f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \iint_{\frac{y_2}{y_1} \leqslant x} f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)dy_1dy_2$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{y_1x} f_{Y_2}(y_2)f_{Y_1}(y_1)dy_2dy_1 = \int_0^\infty \int_0^{y_1x} e^{-y_2}f_{Y_1}(y_1)dy_2dy_1 = \int_0^\infty \left(-e^{-y_2}\Big|_0^{y_1x}\right) f_{Y_1}(y_1)dy_1$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - e^{-y_1x}\right) \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y_1}dy_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[e^{-\frac{1}{2}y_1} - e^{-y1\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{1}{2}y_1}\Big|_0^\infty + \frac{1}{x+\dfrac{1}{2}}e^{-y1\left(x+\frac{1}{2}\right)}\Big|_0^\infty\right]$$

$$= \frac{2x}{2x+1}$$

■

Bài 40.19

Cho X và Y là biến ngẫu nhiên rời rạc theo bảng sau:

$Y \setminus X$	1	5
2	$\theta_1 + \theta_2$	$\theta_1 + 2\theta_2$
4	$\theta_1 + 2\theta_2$	$\theta_1 + \theta_2$

<u>Bài giải</u>

$Y \setminus X$	1	5	$f_Y(y)$
2	$\theta_1 + \theta_2$	$\theta_1 + 2\theta_2$	$2\theta_1 + 3\theta_2$
4	$\theta_1 + 2\theta_2$	$\theta_1 + \theta_2$	$2\theta_1 + 3\theta_2$
$f_X(x)$	$2\theta_1 + 3\theta_2$	$2\theta_1 + 3\theta_2$	1

Ta có :
$f_{X,Y}(1,2) = \theta_1 + \theta_2 = f_X(1)f_Y(2) = (2\theta_1 + 3\theta_2)^2$
$f_{X,Y}(5,2) = \theta_1 + 2\theta_2 = f_X(5)f_Y(2) = (2\theta_1 + 3\theta_2)^2$
$\Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 + 2\theta_2$
$\Rightarrow \theta_2 = 0$
Ta có : $2\theta_1 + 3\theta_2 + 2\theta_1 + 3\theta_2 = 1$
$\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{4}$
Vậy $\theta_1 = \frac{1}{4}$và $\theta_2 = 0$

■

Bài 41.1

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập với hàm mật độ được mô tả trong bảng bên dưới. Tìm hàm mật xác suất của hàm $Z = X + Y$

x	0	1	2	3
$p_X(x)$	0.10	0.20	0.30	0.40

y	0	1	2
$p_Y(y)$	0.25	0.40	0.35

Bài giải

Vì X và Y độc lập nên ta có:

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(X=0)P(Y=0) = (0.1)(0.25) = 0.025\\
P(Z=1) &= P(X=1)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=1)\\
&= (0.2)(0.25) + (0.1)(0.4) = 0.09\\
P(Z=2) &= P(X=2)P(Y=0) + P(X=1)P(Y=1) + P(X=0)P(Y=2)\\
&= (0.3)(0.25) + (0.2)(0.4) + (0.1)(0.35) = 0.19\\
P(Z=3) &= P(X=3)P(Y=0) + P(X=2)P(Y=1) + P(X=1)P(Y=2)\\
&= (0.4)(0.25) + (0.3)(0.4) + (0.4)(0.35) = 0.29\\
P(Z=4) &= P(X=3)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=2)\\
&= (0.4)(0.4) + (0.3)(0.35) = 0.265\\
P(Z=5) &= P(X=3)(Y=2) = (0.4)(0.35) = 0.14
\end{aligned}$$

Do đó hàm mật độ của $Z = X + Y$:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0.025, & z=0\\ 0.09, & z=1\\ 0.19, & z=2\\ 0.29, & z=3\\ 0.265, & z=4\\ 0.14, & z=5\\ 0, & \text{khác}\end{cases}$$

■

Bài 41.2

Giả sử X và Y là 2 biến ngẫu độc lập có phân phối lần lượt là B(20;0,2) và B(10;0,2). Tìm hàm mật độ xác suất (pmf) của X+Y

Bài giải

$f_X(x) = C_{20}^x.0,2^x.0,8^{20-x}$ khi $x = 1,2,...,20$ và 0 ở nơi khác
$f_Y(x) = C_{10}^x.0,2^x.0,8^{10-x}$ khi $x = 1,2,...,10$ và 0 ở nơi khác
Do X và Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối nhị thức với cùng xác suất nên $X+Y \sim N(30;0,2)$ Vậy $f_{X+Y}(x) = C_{30}^x.0,2^x.0,8^{30-x}$ khi $x = 1,2,...,30$ và 0 ở nơi khác

■

Bài 41.4

Xét hai thí nghiệm: X nhận các giá trị 0, 1, 2 và có cùng xác suất. Y nhận cá giá trị 3, 4 với xác suất lần lượt là $\frac{1}{4}$ và $\frac{3}{4}$. Biết X và Y độc lập nhau. Tìm hàm mật độ xác suất của $X+Y$

Bài giải

Bảng phân phối xác suất của X và Y

x	0	1	2
p(x)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

y	3	4
p(y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Vì X và Y là hai biến ngẫu nhiên rời rạc, độc lập nên
$p_{X+Y}(3) = p_X(0) \times p_Y(3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
$p_{X+Y}(4) = p_X(0) \times p_Y(4) + p_X(1) \times p_Y(3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$
$p_{X+Y}(5) = p_X(1) \times p_Y(4) + p_X(2) \times p_Y(3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$
$p_{X+Y}(6) = p_X(2) \times p_Y(4) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

■

Bài 41.4

Xét hai thí nghiệm sau: đầu tiên có kết quả X tham gia vào các giá trị 0, 1, 2 và với xác suất bằng nhau; kết quả thứ hai trong một (độc lập) kết quả Y tham gia vào các giá trị 3 với xác suất $\frac{1}{4}$ và 4 với xác suất $\frac{3}{4}$. Tìm các hàm xác suất của X + Y.

Bài giải

$P_{X+Y}(3) = P_X(0)P_Y(3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P_{X+Y}(4) = P_X(0)P_Y(4) + P_X(1)P_Y(3) = \frac{4}{12}$

$P_{X+Y}(5) = P_X(1)P_Y(4) + P_X(2)P_Y(3) = \frac{4}{12}$

$P_{X+Y}(6) = P_X(2)P_Y(4) = \frac{3}{12}$

■

Bài 41.7

Giả sử rằng X có phân phối Poisson với tham số λ và Y có phân phối hình học có tham số p và nó độc lập với X. Tìm công thức đơn giản cho λ và p với các xác suất sau.
(a) P(X + Y = 2)
(b) P(Y > X)

Bài giải

X ∼ P(λ)
Y ∼ G(p)
(a)P(X + Y = 2) = $\sum_{k=0}^{1} P(X = k)P(Y = 2 - k)$
$= P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 1)$
$= e^{-\lambda}p(1 - p) + e^{-\lambda}\lambda p$
(b)P(Y > X) = P(X < 1) = P(X = 0) = $e^{-\lambda}$

■

Bài 41.7

Giả sử X có phân phối Poisson với tham số λ và Y có phân phối hình học với tham số p và Y độc lập với X. Tìm công thức tối giản theo λ và p cho các xác suất sau

a) $P(X + Y = 2)$.

b) $P(Y > X)$.

Bài giải

a)

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=2) &= \sum_{k=0}^{1} P(X=k, \quad Y=2-k) \\
&= \sum_{k=0}^{1} P(X=k)P(Y=2-k) \quad (\text{vì} \quad X, Y \quad \text{độc lập}) \\
&= \sum_{k=0}^{1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}p(1-p)^{2-k-1} \\
&= e^{-\lambda}p(1-p) + e^{-\lambda}\lambda p.
\end{aligned}
$$

b) Ta có

$$
\begin{aligned}
&\rho_X(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0, \\
&\rho_Y(y) = (1-p)^{y-1}p, \quad y = 1, 2, \ldots, \quad 0 \le p \le 1. \\
\Rightarrow \quad &\rho_{XY}(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y(y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{y-1}p \quad (\text{vì} \quad X, Y \quad \text{độc lập}).
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
P(Y > X) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty} \rho_{XY}(x, y) &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{y-1}p \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\frac{(1-p)^x}{1-(1-p)}p \\
&= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p}.
\end{aligned}
$$

Vậy $P(Y > X) = e^{-\lambda p}$.

■

Bài 41.11

Cho X, Y, Z là biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối Poisson với E(X) = 3, E(Y) = 1 và E(Z) = 4. Tính $P(X + Y + Z \le 1)$

Bài giải

Vì X, Y, Z có phân phối Poisson nên:
$P(X+Y+Z \le 1) = P(X=0, Y=0, Z=0) + P(X=1, Y=0, Z=0) + P(X=0, Y=1, Z=0) + P(X=0, Y=0, Z=1)$

$= P(X=0) \times P(Y=0) \times P(Z=0) + P(X=1) \times P(Y=0) \times P(Z=0) + P(X=0) \times P(Y=1) \times P(Z=0) + P(X=0) \times P(Y=0) \times P(Z=1)$

$= e^{-3}\frac{3^0}{0!} \times e^{-1}\frac{1^0}{0!} \times e^{-4}\frac{4^0}{0!}$

$+ \sum_{k=0}^{1} e^{-3}\frac{3^k}{k!} \times e^{-1}\frac{1^0}{0!} \times e^{-4}\frac{4^0}{0!}$

$+ e^{-3}\frac{3^0}{0!} \times \sum_{k=0}^{1} e^{-1}\frac{1^0}{0!} \times e^{-4}\frac{4^0}{0!}$

$+ e^{-3}\frac{3^0}{0!} \times e^{-1}\frac{1^0}{0!} \times \sum_{k=0}^{1} e^{-4}\frac{4^0}{0!}$

$= 9e^{-8}$

■

Bài 41.11

Cho X, Y và Z là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối Possion với $E(X) = 3$, $E(Y) = 1$, $E(Z) = 4$. Tìm $P(X+Y+Z \le 1)$

Bài giải

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} \frac{3^x e^{-3}}{x!} & x = 0, 1, 2... \\ 0 & \text{khác} \end{cases} \\
f_Y(y) &= \begin{cases} \frac{e^{-1}}{y!} & y = 0, 1, 2... \\ 0 & \text{khác} \end{cases} \\
f_Z(z) &= \begin{cases} \frac{4^z e^{-4}}{z!} & z = 0, 1, 2... \\ 0 & \text{khác} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vì X, Y và Z độc lập nên ta có:

$$\begin{aligned}
P(X+Y+Z\le 1) &= P(X+Y+Z=0)+P(X+Y+Z=1)\\
&= P(X=0)P(Y=0)P(Z=0)+P(X=1)P(Y=0)P(Z=0)+\\
&\quad +P(X=0)P(Y=1)P(Z=0)+P(X=0)P(Y=0)P(Z=1)\\
&= \frac{3^0e^{-3}}{0!}\frac{e^{-1}}{0!}\frac{4^0e^{-4}}{0!}+\frac{3^1e^{-3}}{1!}\frac{e^{-1}}{0!}\frac{4^0e^{-4}}{0!}+\\
&\quad +\frac{3^0e^{-3}}{0!}\frac{e^{-1}}{1!}\frac{4^0e^{-4}}{0!}+\frac{3^0e^{-3}}{0!}\frac{e^{-1}}{0!}\frac{4^1e^{-4}}{1!}\\
&= e^{-8}+3e^{-8}+e^{-8}+4e^{-8}\\
&= 9e^{-8}
\end{aligned}$$

■

Bài 41.12

Số lượng cuộc gọi đến nhà điều hành trong thời gian 5 phút có phân phối Poisson với trung bình là λ. Tìm xác suất để tổng số cuộc gọi nhận được trong 10 lần 5 phút là 10

Bài giải

Gọi $X_1, X_2, ..., X_{10}$ là các biến ngẫu nhiên có phân phối possion với trung bình là λ
Hàm mật độ của $X_1 + X_2 + ... + X_{10}$ là
$f(X=k) = 10.\lambda^k.\frac{e^{-\lambda}}{k!}$
$f(X=10) = 10.\lambda^{10}.\frac{e^{-\lambda}}{10!}$

■

Bài 42.2

Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối mũ với tham số λ, và biến ngẫu nhiên Y có phân phối đều trên [0,1], độc lập với . Tìm hàm mật độ xác suất của X+Y.

Bài giải

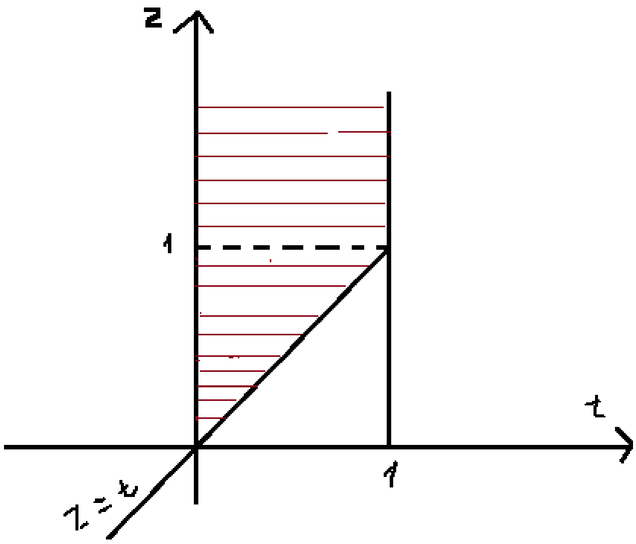
$X \sim Exp(\lambda)$ nên

$$f_X(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$Y \sim U[0,1]$ nên

$$f_Y(y) = \begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{nơi khác}\end{cases}$$

Vì X, Y độc lập nên ta có hàm mật độ xác suất đồng thời



$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 \le y \le 1, x > 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Đặt $Z = X + Y$
$T = Y$

Xét ánh xạ g : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (z,t) = (x+y, y)$

h : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$
$(z,t) \longmapsto (x,y) = (z-t, t)$

$$\nabla h(z,t) = \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1$$

$f_{Z,T}(z,t) = f_{X,Y}(h(z,t)) |det \nabla h(z,t)| = \lambda e^{-\lambda(z-t)}$

- Nếu $0 \le z \le 1$
  $f_Z(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-t)} dt = e^{-\lambda(z-t)}|_0^z = 1 - e^{-\lambda z}$
- Nếu $z > 1$
  $f_Z(z) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda(z-t)} dt = e^{-\lambda(z-t)}|_0^1 = e^{-\lambda z}\left(e^{\lambda} - 1\right)$

Vậy hàm mật độ xác suất đồng thời của $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z} & 0 \le z \le 1 \\ e^{-\lambda z}\left(e^{\lambda} - 1\right) & z > 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

■

Bài 42.5-chưa giải

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập và phân phối giống nhau với hàm mật độ: f(x) = $\begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ Tìm hàm mật độ của X + Y.

Bài giải

■

Bài 42.5

Cho X và Y là 2 biến có cùng phân phối và độc lập nhau với hàm mật độ như sau

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm hàm phân phối xác suất của $X + Y$.

Bài giải

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^1 f_X(a-y) f_Y(y) dy$$

1) $0 \leqslant a \leqslant 1$

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^a 2(a-y)2ydy = 4\int_0^a (ay-y^2)dy = \left(2ay^2 - \frac{4}{3}y^3\right)\Big|_0^a = 2a^3 - \frac{4}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$$

2) $1 \leqslant a \leqslant 2$

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(a) &= \int_{a-1}^1 2(a-y)2ydy = 4\int_{a-1}^1 (ay-y^2)dy = \left(2ay^2 - \frac{4}{3}y^3\right)\Big|_{a-1}^1 \\ &= 2a - \frac{4}{3} - 2a(a-1)^2 + \frac{4}{3}(a-1)^3 = -\frac{2}{3}a^3 + 4a - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Vậy

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} \frac{2}{3}a^3 & 0 \leqslant a \leqslant 1 \\ -\frac{2}{3}a^3 + 4a - \frac{8}{3} & 1 < a < 2 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

■

Bài 42.8

Cho X và Y là 2 biến ngầu nhiên độc lập với hàm mật độ lề như sau :

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \neq \end{cases}$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 3 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \neq \end{cases}$

Tìm hàm mật độ xác suất của tổng X+Y

<u>*Bài giải*</u>

Ta có :$f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-y) f_Y(y) dy$

$\begin{cases} -1 \leqslant x - y \leqslant 1 \\ \quad 3 \leqslant y \leqslant 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \leqslant y \leqslant x + 1 \\ \quad 3 \leqslant x - y \leqslant 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow max(3, x-1) \leqslant y \leqslant min(5, x+1)$

$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{max(3,x-1)}^{min(5,x+1)} \frac{1}{4} dy$

$= \frac{1}{4}[min(5, x+1) - max(3, x-1)]$

$= \begin{cases} \frac{1}{4}(x+1-3) & 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{1}{4}(5-x+1) & 4 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{1}{2} & 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{4} & 4 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$

■

Bài 42.9

Cho X và Y là biến ngẫu nhiên độc lập với hàm mật độ xác suất là:

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ Tìm hàm mật độ xác suất của X+Y

<u>*Bài giải*</u>

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$\Rightarrow f_{X+Y}(a) = \int_0^2 f_Y(a-x)\frac{1}{2}dx, 0 \leq a - x \leq 2$

Ta có $0 \leq a - x \leq 2 \Leftrightarrow a - 2 \leq x \leq 2$

Nếu $0 \leq a \leq 2$:

$f_{X+Y}(a) = \int_0^a f_Y(a-x)\frac{1}{2}dx = \frac{a^2}{8}$
Nếu $2 \leq a \leq 4$:
$f_{X+Y}(a) = \int_2^4 f_Y(a-x)\frac{1}{2}dx = \frac{-a^2}{8} + \frac{a}{2}$

■

Bài 42.10-chưa làm

X và Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập có hàm mật độ
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$
$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$
Tìm hàm mật độ xác suất của X+Y

Bài 42.10

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên với hàm mật độ được cho bởi

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

và

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Tìm hàm mật độ của $X+Y$.

Bài giải

Theo đề bài ta có:

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \text{và} \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Vì X và Y độc lập nên ta có:

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} \cdot e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} \\ &= e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

Do đó, hàm mật độ của $X+Y$:

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{(z-(\mu_1+\mu_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

■

Bài 42.12

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với trung bình bằng 1. Tìm hàm mật đồ xác suất của $Z = X + Y$

<u>*Bài giải*</u>

Vì $X, Y \sim Exp(\lambda)$ nên $E(X) = E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Vì X, Y độc lập nên ta có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x + y > 0 \\ 0 & x + y \leq 0 \end{cases}$$

Đặt $Z = X + Y$
$T = Y$
Xét ánh xạ g : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longmapsto (z, t) = (x + y, y)$
h : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$
$(z, t) \longmapsto (x, y) = (z - t, t)$

$$\nabla h(z,t) = \left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| = 1$$

$f_{Z,T}(z,t) = f_{X,Y}(h(z,t))|det\nabla h(z,t)| = f_{X,Y}(z - t, t) = I_{(0,\infty)}(z - t)I_{(0,\infty)}(t)$
$\Rightarrow$

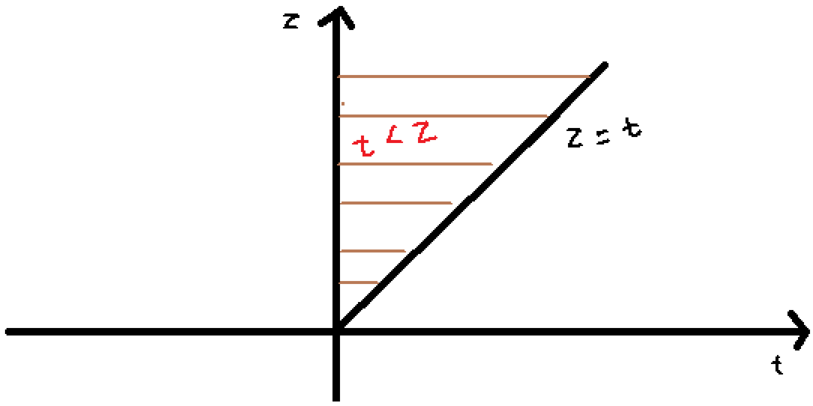
$$f_{Z,T}(z,t) = \begin{cases} e^{-z} & t > 0, z - t > 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

- Nếu $z > 0$
  $f_Z(z) = \int_0^z e^{-z}dt = te^{-z}|_0^z = ze^{-z}$

$$\text{Œ}t \begin{cases} u = t \\ dv = e^{-t(z+1)}dt \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} du = 1 \\ v = \dfrac{-1}{z+1}e^{-t(z+1)} \end{cases}$$



$$f_Z(z) = \frac{-t}{z+1}e^{-t(z+1)}|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{-1}{z+1}e^{-t(z+1)}dt = \frac{-1}{z+1}e^{-t(z+1)}|_0^\infty = \frac{1}{(z+1)^2}$$

- Nếu $z \leq 0$
  $f_Z(z) = 0$

Vậy hàm mật độ xác suất đồng thời của $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z+1)^2} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

■

Bài 42.12

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập theo hàm số mũ với trung bình của 1. Tìm pdf của $Z = X + Y$.

<u>*Bài giải*</u>

Với $\lambda = 1$
$f_X(z) = \lambda e^{-\lambda x} = e^{-x}$
$f_Y(z) = \lambda e^{-\lambda y} = e^{-y}$
$f_{X+Y}(z) = \int_0^z e^{-y}e^{-x}ds = e^{-y} = \int_0^z e^{-(y+x)}ds = \int_0^z e^{-z}ds = ze^{-z}$

■

Bài 43.2

Cho X là môt biến ngẫu nhiên với tập 1, 2, 3, 4, 5 và Y là một biến ngẫu nhiên với tập 1, 2, ... , X
(a) Tìm $\rho_{XY}(x, y)$
(b) Tìm $\rho_{X|Y}(x \mid y)$
(c) X và Y là độc lập?

<u>*Bài giải*</u>

X = 1; 2; 3; 4; 5
Y = 1; 2; ...; x
(a) $\rho_{XY}(x, y)$ = P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) =$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$
(b) Tìm $\rho_{X|Y}(x \mid y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{\frac{1}{5x}}{\sum_{k=y}^{5}\frac{1}{5k}}$ (c)X và Y không độc lập

■

Bài 43.2

Cho X là biến ngẫu nhiên với giá trị nằm trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ và Y là biến ngẫu nhiên với tập giá trị là $\{1, 2, \ldots, X\}$.

a) Tìm $p_{XY}(x, y)$.

b) Tim $p_{X|Y}(x \mid y)$.

c) X và Y có độc lập không?

<u>*Bài giải*</u>

a) Chú ý rằng phương pháp chọn mẫu này có 2 bước chính. Đầu tiên ta chọn giá trị của X, sau đó ta chọn giá trị của Y. Điều đó có nghĩa là, giá trị của Y phụ thuộc vào X. Do đó, áp dụng công thức Bayes, ta có

$$p_{Y|X}(y \mid x) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_X(x)}.$$

Do đó, $p_{XY}(x, y) = p_{Y|X}(y \mid x)p_X(x)$. Bắt đầu với $P_X(x = i)$. Trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, xác suất mỗi số được chọn làm giá trị của X là tương đương nhau, nên

$$P_X(x = i) = \frac{1}{5}.$$

Khi ta đã biết giá trị của X, ta chọn giá trị của Y không lớn hơn giá trị của X. Xác suất mỗi số được chọn trong tập $\{1, 2, \ldots, X\}$ là như nhau, nên

$$p_{Y|X}(y = j \mid x = i) = \frac{1}{j}, \quad 1 < j < i, \quad 1 < i < 5.$$

Vậy $p_{XY}(x, y) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{j}\right), \quad 1 < j < i, \quad 1 < i < 5.$

b)

c) X và Y không độc lập vì việc lựa chọn giá trị của Y bị ràng buộc bởi X.

■

Bài 43.6

Cho X và Y là biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm mật độ xác suất:
$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{n!y^x(pe^{-1})(1-p)^{n-y}}{n!(n-y)!x!} & y = 0,1,\dots,n; x = 0,1,\dots \\ 0 & otherwise \end{cases}$ a. Tìm $f_y(y)$ b. Tìm $f_{X|Y}(x|y)$ X, Y có độc lập với nhau không? Dẫn chứng

Bài giải

a. $f_Y(y) = C_n^y p^y (1-p)^{n-y}$
Y có phân phối nhị thức với tham số n và p
b.
Nếu $y = 0,1,\dots,n; x = 0,1,\dots$
$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$
$= \dfrac{dfracn!y^x(pe^{-1})(1-p)^{n-y}n!(n-y)!x!}{C_n^y p^y(1-p)^{n-y}} = \dfrac{y^x e^{-y}}{x!}, x = 0,1,\dots$
$f_{X|Y}(x|y) = 0$, otherwise

■

Bài 43.7

X và Y có bảng phân bố xác suất là
$$\begin{bmatrix} X/Y & 0 & 1 & p_X(x) \\ 0 & 1/18 & 3/18 & 4/18 \\ 1 & 4/18 & 3/18 & 7/18 \\ 2 & 6/18 & 1/18 & 7/18 \\ p_Y(y) & 11/18 & 7/18 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài giải

$p_{X|Y}(x,0) = \frac{p_{XY}(x,0)}{p_Y(0)} = \begin{cases} 1/11 & x = 0 \\ 4/11 & x = 1 \\ 6/11 & x = 2 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

$p_{X|Y}(x,1) = \frac{p_{XY}(x,1)}{p_Y(1)} = \begin{cases} 3/7 & x = 0 \\ 3/7 & x = 1 \\ 1/7 & x = 2 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

$p_{Y|X}(0,y) = \frac{p_{XY}(0,y)}{p_X(0)} = \begin{cases} 1/4 & y=0 \\ 3/4 & y=1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

$p_{Y|X}(1,y) = \frac{p_{XY}(1,y)}{p_X(1)} = \begin{cases} 4/7 & y=0 \\ 3/7 & y=1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

$p_{Y|X}(2,y) = \frac{p_{XY}(2,y)}{p_X(2)} = \begin{cases} 6/7 & y=0 \\ 1/7 & y=1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$

■

Bài 43.7

Cho X và Y có hàm mật độ đồng thời $p_{X,Y}(x,y)$ được mô tả dưới bảng sau:

$X \setminus Y$	0	1	$p_X(x)$
0	1/18	3/18	4/18
1	4/18	3/18	7/18
2	6/18	1/18	7/18
$p_Y(y)$	11/18	7/18	1

Tìm $p_{X|Y}(x|y)$ và $p_{Y|X}(y|x)$

Bài giải

$$p_{X|Y}(x|0) = \frac{p_{X,Y}(x,0)}{p_Y(0)} = \begin{cases} 1/11 & x=0 \\ 4/11 & x=1 \\ 6/11 & x=2 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

$$p_{X|Y}(x|1) = \frac{p_{X,Y}(x,1)}{p_Y(1)} = \begin{cases} 3/7 & x=0 \\ 3/7 & x=1 \\ 1/7 & x=2 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|0) = \frac{p_{X,Y}(0,y)}{p_X(0)} = \begin{cases} 1/4 & y=0 \\ 3/4 & y=1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|1) = \frac{p_{X,Y}(1,y)}{p_X(1)} = \begin{cases} 4/7 & y=0 \\ 3/7 & y=1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|2) = \frac{p_{X,Y}(2,y)}{p_X(2)} = \begin{cases} 6/7 & y=0 \\ 1/7 & y=1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

■

Bài 43.9

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối Poison với tham số λ. Tìm $Pr(X = k|X + Y = n)$

Bài giải

$$Pr(X = k|X + Y = n) = \frac{Pr(X = k, X + Y = n)}{Pr(X + Y = n)} = \frac{Pr(X = k, Y = n - k)}{Pr(X + Y = n)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \times \left(\frac{e^{-(\lambda+\lambda)}(\lambda+\lambda)^n}{n!}\right)^{-1} = \frac{e^{-2\lambda}\lambda^n}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{(2\lambda)^n e^{-2\lambda}}$$
$$= \frac{n!}{2^n k!(n-k)!} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad k = \overline{0, n}$$

■

Bài 44.1

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên với hàm mật độ:
$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 5x^2y & -1 < x < 1, 0 < y < |x| \\ 0 & otherwise \end{cases}$
Tìm $f_{X|Y}(x \mid y)$, là hàm mật độ xác suất có điều kiện của X cho bởi Y = y. Vẽ đồ thị của $f_{X|Y}(x \mid 0.5)$

Bài giải

Với $y \leq |x| \leq 1; 0 \leq y \leq 1$
$f_Y(y) = \int_{-1}^{-y} 5x^2ydx + \int_y^1 5x^2ydx$
$= \frac{5x^3y}{3}\Big|_{-1}^{-y} + \frac{5x^3y}{3}\Big|_{y}^{1} = \frac{5y}{3}(1 - y^3) + \frac{5y}{3}(1 - y^3) = \frac{10y}{3}(1 - y^3)$
$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{5x^2y}{\frac{10y}{3}(1-y^3)} = \frac{3x^2}{2(1-y^3)}$
$f_{X|Y}(x \mid 0.5) = \frac{3x^2}{2(1-0.5^3)} = \frac{12x^2}{7}$

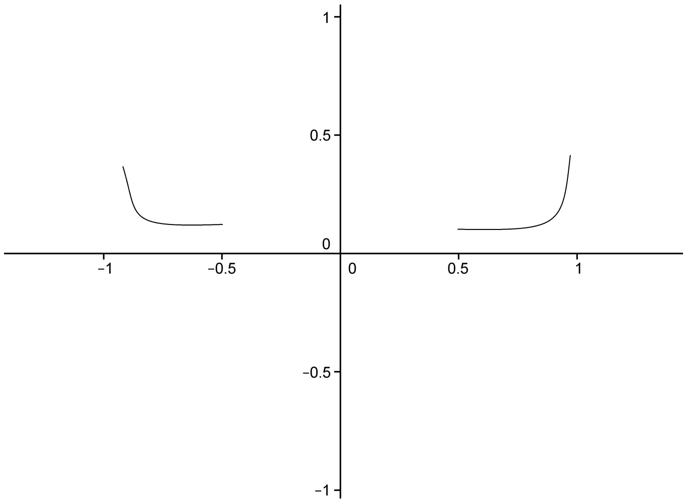
■

Bài 44.1

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ đồng thời:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 5x^2y & -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 < y \leqslant |x| \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm $f_{X|Y}(x|y)$, hàm mật độ xác suất của X được cho bởi $Y = y$. Vẽ đồ thị của $f_{X|Y}(x|0.5)$



Bài giải

$$f_Y(y) = \int_{-1}^{-yy} 5x^2y dx + \int_{y}^{1} 5x^2y dx = \frac{5}{3}x^3y\Big|_{-1}^{-y} + \frac{5}{3}5x^3y\Big|_{y}^{1} = \frac{10}{3}y(1-y^3)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{1-y^3}\right) \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 < y \leqslant |x|$$

Vậy

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{1-y^3}\right) & -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 < y \leqslant |x| \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

■

Bài 44.4

Hàm mật độ đồng thời của X và Y được cho bởi :
$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ 0 & \neq \end{cases}$
Tính hàm mật độ $f_{X,Y}(x|y)$ và $f_{X,Y}(y|x)$

Bài giải

- Tính $f_{X,Y}(x|y)$
  Ta co : $f_{X,Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$
  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$
  $= \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)}dx$

$= \lim_{a\to+\infty} \int_0^a xe^{-x(y+1)}dx$
Đặt u=x $\Rightarrow$ du=dx
$dv = e^{-x(y+1)} \Rightarrow v = \frac{e^-x(y+1)}{-(y+1)}$
$f_Y(y) = \lim_{a\to+\infty} \left(x\frac{xe^{-x(y+1)}}{-(y+1)}|_0^a - \int_0^a \frac{xe^{-x(y+1)}}{-(y+1)}dx \right)$
$= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{ae^{-a(y+1)}}{-(y+1)} - (\frac{e^{-x(y+1)}}{(y+1)^2}|_0^a) \right)$
$= lim_{a\to+\infty})$
$= \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{ae^{-a(y+1)}}{-(y+1)} - \left(\frac{e^{-a(y+1)}}{(y+1)^2)} - \frac{1}{(y+1)^2)} \right) \right)$
$= \frac{1}{(y+1)^2}$
$\Rightarrow f_{X,Y}(x|y) = (y+1)^2xe^{-x(y+1)}$

- Tính $f_{X,Y}(y|x)$
  Ta có :$f_{X,Y}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$
  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$
  $= \int_0^{+\infty} xe^{-x(y+1)}dy$
  $= lim_{a\to+\infty} \int_0 axe^{-x(y+1)}dy$
  $= lim_{a\to+\infty} \left(-e^{-x(y+1)}|_0^a)\right)$
  $= lim_{a\to+\infty}() - e^{-x(a+1)} + e^{-x})$
  $= e^{-x}$
  $\Rightarrow f_{X,Y}(y|x) = xe^{-xy}$

■

Bài 44.6

X, Y là 2 biến ngẫu nhiên với hàm mật độ xác suất
$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x) & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$
(a) Tìm $f_{X|Y}(x|y)$. X và Y có độc lập không?
(b) Tìm $Pr(Y < \frac{1}{2}|X > \frac{1}{2})$

Bài giải

(a) $f_X(x) = \int_0^1 12xy(1-x)dy = 6x(1-x)$
$f_Y(y) = \int_0^1 12xy(1-x)dx = 2y$
Do $f_X(x).f_Y(y) = f_{XY}(x,y)$ nên X, Y độc lập
$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) = 6x(1-x)$ với $x \in (0,1)$ và bằng 0 nơi khác.
(b)$Pr(Y < \frac{1}{2}|X > \frac{1}{2}) = Pr(Y < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2ydy = \frac{1}{4}$

■

Bài 44.6

Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời được cho bởi

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x) & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

(a) Tìm $f_{X|Y}(x|y)$. X và Y có độc lập không?
(b) Tìm $P(Y < \frac{1}{2}|X = \frac{1}{2})$

<u>*Bài giải*</u>

(a) Hàm mật độ lề của Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^1 12xy(1-x)dx = 2y$$

Do đó:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{12xy(1-x)}{2y} = 6x(1-x) \qquad 0 < x < 1$$

Hàm mật độ lề của X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 12xy(1-x)dy = 6x(1-x)$$

Ta thấy $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$. Do đó X và Y độc lập.
(b)

$$\begin{aligned} P\Big(Y < \frac{1}{2}\Big|X = \frac{1}{2}\Big) &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_{X|Y}(\frac{1}{2}, y)dy = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{f_{X,Y}(1/2, y)}{f_X(1/2)}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{3y}{3/2}dy = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} 2ydy = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

Bài 44.8

Cho X và Y là hai biên ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tính $Pr(Y < X|X = \dfrac{1}{3})$

Bài giải

Hàm mật độ lề của X
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{1-x} 24xydy = 12xy^2|_0^{1-x} = 12x(1-x)^2$
Ta có

$$Pr(Y < X|X = \frac{1}{3}) = \int_{y<\frac{1}{3}} f_{X,Y}(\frac{1}{3}, y)dy = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{f_{X,Y}(\frac{1}{3}, y)}{f_X(\frac{1}{3})}dy$$
$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{24 \times \frac{1}{3} \times y}{\frac{16}{9}}dy = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{2}ydy = \frac{1}{4}$$

■

Bài 44.8

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{nếu } 0 < x < 1, 0 < y < 1-x; \\ 0 & \text{nếu } otherwise. \end{cases}$$

Tính $P(Y < X|X = \frac{1}{3})$?

Bài giải

Nếu $x = \frac{1}{3}$ thì $0 < y < \frac{2}{3}$ vì thế:
$f_X(\frac{1}{3}) = \int_2^3 24\frac{1}{3}ydy = \int_2^3 8ydy = \frac{16}{9}$
$\Rightarrow f_Y(y|X = \frac{1}{3}) = \frac{f_{X,Y}(\frac{1}{3}, y)}{f_X(\frac{1}{3}} = \frac{9}{16}24\frac{1}{3}y = \frac{9}{2}y$

$P(Y < X|X = \frac{1}{3}) = P(Y < \frac{1}{3}|X = \frac{1}{3}) = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{2}ydy = \frac{1}{4}$

■

Bài 44.11-giải

Một chính sách bảo hiểm ô tô sẽ phải trả cho thiệt hại cho cả hai chiếc xe của bảo hiểm và chiếc xe lái xe khác trong trường hợp hợp đồng bảo hiểm có trách nhiệm cho một tai nạn. Kích thước của thanh toán thiệt hại cho bên bảo hiểm của xe, X; có một hàm mật

độ biên của 1 cho 0 <x <1: Cho X = x, các kích thước của thanh toán thiệt hại đến xe của người lái xe khác, Y; có điều kiện mật độ 1 cho x <y <x + 1:
Nếu hợp đồng bảo hiểm có trách nhiệm cho một tai nạn, xác suất để việc thanh toán thiệt hại đến xe của người lái xe khác sẽ được lớn hơn 0.5?

Bài giải

■

Bài 44.11

Một chính sách bảo hiểm tự động sẽ trả cho việc hư hỏng xe của cả người mua bảo hiểm và xe của người tham gia trong tai nạn nếu phần lỗi thuộc về người mua bảo hiểm. Chi phí cho hư hỏng xe của người mua bảo hiểm, X, có hàm mật độ lề là 1 với $0 < x < 1$. Cho $X = x$, chi phí cho hư hỏng xe của người tham gia tai nạn, Y, là hàm mật độ có điều kiện của 1, với $x < y < x + 1$.
Nếu người mua bảo hiểm chịu trách nhiệm về tai nạn xảy ra, xác suất mà chi phí hư hỏng phải trả cho người tham gia tai nạn lớn hơn 0.5 là bao nhiêu?

Bài giải

Ta có: $X \sim U[0, 1]$.
Cho $X = x$, suy ra $Y \sim U[x, x + 1]$.
Do đó,

$$\begin{cases} f_X(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \\ f_{Y|X}(y \mid x) = 1, \quad x \leq y \leq x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Suy ra

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y \mid x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq x + 1.$$

Đặc biệt, điều này có nghĩa là hàm mật độ đồng thời là đều trên miền hình bình hành giới hạn bởi $0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq x + 1$. Do đó, xác suất có thể được tính như tỉ lệ của diện tích các miền. Toàn bộ hình bình hành này có diện tích là 1, và phần của hình bình hành mà $y \geq 0.5$ có diện tích là $1 - \frac{1}{2} 0.5^2 = \frac{7}{8}$. Do đó,

$$P(Y \geq 0.5) = \frac{7/8}{1} = \frac{7}{8}.$$

■

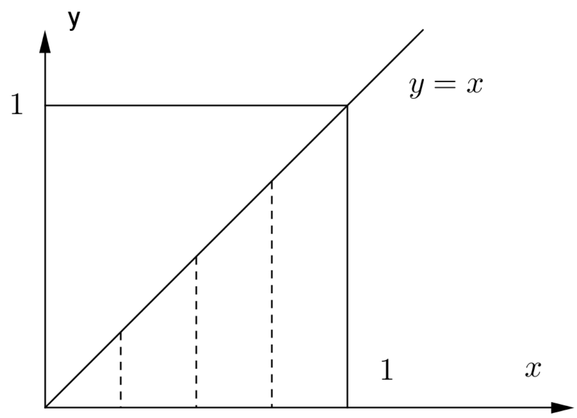
Bài 44.14

X, Y có phân phối đều trên đoạn [0,X]. Mật độ lề của X là:

$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$

Xác định mật độ có điều kiện của X, cho Y = y> 0

<u>*Bài giải*</u>



$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{\int_y^1 2dx} = \frac{2}{2-2y} = \frac{1}{1-y}$

■

Bài 44.16

Một công ty bào hiểm viết số tiền phải trả cho mất mác X có hàm mật độ

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$ Thời gian T(giờ) để xử lý yêu cầu bồi thường có kích thước x khi $0 \leq x \leq 2$ có phân phối đều trên đoạn [x,2x]. Tính xác suất chọn ngẫu nhiên tiền bồi thường nhiều hơn 3 giờ.

<u>*Bài giải*</u>

Tính $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$ với $y \in [x, 2x]$

$\Rightarrow f_{XY} = \frac{3x}{8}$

$P(Y \geq 3) = \frac{3}{8}\int_{3/2}^{2}\int_{3}^{2x} xdydx = 0,172$

■

Bài 44.16

Giả sử X có phân phối liên tục với hàm mật độ: $f_X(x) = 2x$ trong khoảng (0,1) và bằng 0 nơi khác. Giả sử Y là biến ngẫu nhiên liên tục với phân phối có điều kiện của Y khi $X = x$ là phân phối đều trong khoảng (0,x). Tìm trung bình và phương sai của Y.

<u>*Bài giải*</u>

Theo đề bài, ta có:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 2 & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^1 \int_0^x y.2dydx = \int_0^1 y^2\Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\ E(Y^2) &= \int_0^1 \int_0^x y^2.2dydx = \int_0^1 \frac{2}{3}y^3\Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^3 dx = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow Var(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

■

Bài 45.2

Cho X_1, X_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với tham số λ. Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời của $Y_1 = X_1 + X_2$ và $Y_2 = e^{X_2}$.

<u>*Bài giải*</u>

Vì $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ nên

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_1} & x_1 > 0 \\ 0 & x_1 \le 0 \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_2} & x_2 > 0 \\ 0 & x_2 \le 0 \end{cases}$$

Vì X_1, X_2 độc lập nên ta có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X_1,X_2(x_1,x_2)} = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)} & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Đặt $Y_1 = X_1 + X_2$

$Y_2 = e^{X_2}$

Xét ánh xạ g : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2) \longmapsto (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, e^{x_2})$

h : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

$(y_1, y_2) \longmapsto (x_1, x_2) = (y_1 - ln(y_2), ln(y_2))$

$$\nabla h(y_1, y_2) = \left| \begin{matrix} 1 & \frac{-1}{y_2} \\ 0 & \frac{1}{y_2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{y_2}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(h(y_1, y_2))|det\nabla h(y_1, y_2)| = f_{X_1,X_2}(y_1 - ln(y_2), ln(y_2)) \times \frac{1}{y_2}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda y_1}\frac{1}{y_2} \qquad y_1 > ln(y_2), \qquad y_2 > 1$$

Vậy $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \dfrac{\lambda^2}{y_2}e^{-\lambda y_1} \qquad y_1 > ln(y_2), \qquad y_2 > 1$

■

Bài 45.2

Cho X1 và X2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập hàm mũ có tham số λ. Tìm hàm mật độ chung của $Y_1 = X_1 + X_2$và $Y_2 = e^{X_2}$.

Bài giải

$Y_1 = X_1 + X_2$

$Y_2 = e^{X_2}$

$\Rightarrow X_1 = Y_1 - lnY_2$ và $X_2 = lnY_2$

Ma trận Jacobian:

$J(x_1, x_2) = e^{x_2} = e^{lny_2}$

$f_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = \dfrac{1}{y_2}(\lambda e^{-\lambda x_1}\lambda e^{-\lambda x_2}) = \dfrac{1}{y_2}\lambda^2 e^{-\lambda y_1}$

■

Bài 45.5

Nếu X và Y là gamma biến ngẫu nhiên độc lập với các thông số (α, λ) và (β, λ) tuong ứng, tính mật độ chung của U=X+Y và $V = \frac{X}{X+Y}$

Bài giải

Ta có:

$$f_{UV}(u, v) = \frac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{\alpha+\beta-1}}{\tau(\alpha + \beta)} \frac{v^{\alpha-1}(1 - v)^{\beta-1}\tau(\alpha + \beta)}{\tau(\alpha)\tau(\beta)}$$

Vì thế:
X+Y và $\frac{X}{X+Y}$ độc lập, với X+Y có phân phối gamma với các thông số $(\alpha+\beta,\lambda)$ và $\frac{X}{X+Y}$ có một phân phối beta với các thông số (α,β)

■

Bài 45.5

Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối Gamma với các tham số lần lượt là (α,λ) và (β,λ). Hãy tính hàm mật độ đồng thời của $U = X+Y$ và $V = \dfrac{X}{X+Y}$.

Bài giải

$$X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$$

$$Y \sim Gamma(\alpha,\lambda)$$

Đặt $\begin{cases} u = g_1(x,y) = x+y \\ v = g_2)x,y) = \dfrac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u - uv \end{cases}$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{-x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{(x+y)^2} - \frac{y}{(x+y)^2} = -\frac{1}{x+y}$$

$f_{XY}(x,y) = f_X(x).f_Y(y) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \times \dfrac{\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\lambda^{\alpha+\beta-2}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \dfrac{\lambda^{\alpha+\beta}e^{-\lambda(x+y)}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$

$f_{UV}(u,v) = (x+y)f_{XY}(uv, u-uv) = u.\dfrac{\lambda^{\alpha+\beta}e^{-\lambda(x+y)}x^{\alpha-1}y^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$
$= \dfrac{\lambda e^{-\lambda u}(\lambda u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\dfrac{v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$

■

Bài 45.10

X và Y là 2 biến ngẫu nhiên với hàm mật độ đồng thời f_{XY}. Tìm hàm phân phối tích lũy của U=Y-X

Bài giải

Nếu X, Y độc lập
$F_U(u) = P(Y - X \le u) = \iint_{y-x\le u} f_X(x)f_Y(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{u+x} f_X(x)f_Y(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(u+x)dx$
$f_U(u) = [F_U(u)]' = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(x+u)dx$
Nếu X, Y không độc lập
$F_U(u) = P(Y - X \le u) = \iint_{y-x\le u} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x+u} f_{XY}(x,y)dydx$
$f_U(u) = [F_U(u)]' = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,x+u)dx$

■

Bài 45.10

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên với hàm mật độ đồng thời $f_{X,Y}$. Tìm mật độ của $U = Y - X$.

Bài giải

Với $U = Y - X$ và $V = Y$:
Đặt $u = g_1(x,y) = y - x$ và $v = g_2(x,y) = y$. Khi đó $x = v - u$ và $y = v$.
Hơn nữa,

$$\mathbf{J(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Do đó,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v-u,v)$$
$$\Rightarrow f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v-u,v)dv$$

Vậy,

$$f_{Y-X}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(y-u,y)dy$$

Nếu X và Y độc lập, khi đó:

$$f_{Y-X}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y-u)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)f_Y(u+y)dy$$

■

Bài 45.12

Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với trung bình bằng 1. Tìm hàm phân phối của $\dfrac{X}{Y}$

Bài giải

Vì $X, Y \sim Exp(\lambda)$ nên $E(X) = E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Vì X, Y độc lập nên ta có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x + y > 0 \\ 0 & x + y \leq 0 \end{cases}$$

Đặt $Z = \dfrac{X}{Y}$
$T = Y$
Xét ánh xạ g : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$
$(x, y) \longmapsto (z, t) = (\dfrac{x}{y}, y)$
h : $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$
$(z, t) \longmapsto (x, y) = (zt, t)$

$$\nabla h(z,t) = \left| \begin{matrix} t & z \\ 0 & 1 \end{matrix} \right| = t$$

$$f_{Z,T}(z,t) = f_{X,Y}(h(z,t)) |det \nabla h(z,t)| = te^{-t(z+1)} \qquad z > 0, t > 0$$

- Nếu $z > 0$
  $f_Z(z) = \int_0^\infty te^{-t(z+1)} dt$

- Nếu $z \leq 0$
  $f_Z(z) = 0$

Vậy hàm mật độ xác suất đòng thời của $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \begin{cases} ze^{-z} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

■

Bài 46.3

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối đều trên đoạn $[0,1]$. Tính $E(|X-Y|)$.

<u>*Bài giải*</u>

Ta có

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1, \\ \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x, y \le 1, \\ \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} E(|X-Y|) &= E(X-Y|X>Y) + E(Y-X|X<Y) \\ &= \int_0^1 \int_0^x (x-y)dydx + \int_0^1 \int_0^y (y-x)dxdy \\ &= \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x} dx + \int_0^1 \left(yx - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 y^2dy \\ &= \frac{1}{6}\left(x^3+y^3\right)\Bigg|_{x=y=0}^{x=y=1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

Bài 46.4

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục với pdf

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm $E(X^2Y)$ và $E(X^2+Y^2)$

<u>*Bài giải*</u>

Tìm $E(X^2Y)$
Ta có:
$E(X^2Y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2x^2y(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \dfrac{7}{36}$
Tìm: $E(X^2+Y^2)$
$E(X^2+Y^2) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2x^2+y^2(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \dfrac{5}{6}$

■

Bài 46.9-chưa làm

John và Katie chọn ngẫu nhiên, độc lập 3 trong 10 đối tượng. Tìm số lượng dự kiến của các đối tượng (a) Được chọn bởi 2 người
(b) Không được lựa chọn bởi 2 người (c) Được lựa chọn bởi 1 người

Bài 46.9

John và Katie ngẫu nhiên và độc lập chọn 3 trong số 10 vật.
Tìm kì vọng của số vật
(a) được chọn bởi 2 người.
(b) không được chọn bởi 2 người.
(c) được chọn bởi đúng 1 trong 2 người.

<u>*Bài giải*</u>

Gọi X và Y lần lượt là số vật được chọn bởi John và Katie. Khi đó:
(a) Kì vọng của số vật được chọn bởi 2 người:

$$E(XY) = \sum \sum_{1\le i\ne j\le 10} X_iY_j = 10\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10} = 0.9$$

(b) Kì vọng của số vật không được chọn bởi 2 người:

$$E(\overline{X}\,\overline{Y}) = \sum \sum_{1\le i\ne j\le 10} \overline{X}_i\overline{Y}_j = 10\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10} = 4.9$$

(c) Kì vọng của số vật được chọn bởi đúng 1 trong 2 người:

$$E(X\overline{Y}) + E(\overline{X}Y) = \sum \sum_{1\le i\ne j\le 10} (X_i\overline{Y}_j + \overline{X}_iY_j) = 10(\frac{3}{10}\frac{7}{10} + \frac{7}{10}\frac{3}{10}) = 4.2$$

■

Bài 46.10

Nếu $E(X) = 1$ và $Var(X) = 5$ tìm
a) $E[(2+X)^2]$
b) $Var(1+3X)$

<u>*Bài giải*</u>

- câu a
  $E[(2+X)^2] = E(4+4X+X^2) = E(4)+E(4X)+E(X^2) =$
  $4+4+Var(X)+[E(X)]^2 = 8+5+1 = 14$
- câu b
  $Var(1+3X) = Var(4)+Var(3X) = 0+9Var(X) = 9\times 5 = 45$

■

Bài 46.10

Nếu $E(X) = 1$ và $Var(X) = 5$ tìm
(a) $E[(2+X)^2]$
(b)$Var(4+3X)$

<u>*Bài giải*</u>

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \Rightarrow E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 5+1 = 6$
$E[(2+X)^2] = E(4+4X+X^2] = E(4)+E(4X)+E(X^2) = 4+4+6 = 14$
$Var(4+3X) = Var(3X) = 9Var(X) = 9\times 5 = 45$

■

Bài 46.13

Cho X và Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập với $\mu_X = 1, \mu_Y = -1, \sigma_X^2 = \dfrac{1}{2}, \sigma_Y^2 = 2$. Tính $E[(X+1)^2(Y-1)^2]$

<u>*Bài giải*</u>

$\mu_X = 1, \sigma_X^2 = \dfrac{1}{2}$
$\mu_Y = -1, \sigma_Y^2 = 2$

$E[(X+1)^2(Y-1)^2] = E[(X+1)^2]E[(Y-1)^2] = E(X^2+2X+1)E(Y^2-2Y+1) = [E(X^2)+2E(X)+1][E(Y^2)-2E(Y)+1] = [Var(X)+(E(X))^2+2E(X)+1][Var(Y)+(E(Y))^2-2E(Y)+1] = \left(\dfrac{1}{2}+1+2+1\right)(2+1+2+1) = 27$

■

Bài 46.14

Một máy bao gồm hai thành phần, có thời gian thọ theo mật độ hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{50} & x>0, y>0, x+y<10 \\ 0 & \text{nếu khác0} \end{cases}$$

Máy hoạt động cho đến khi cả hai thành phần không hoạt động. Tính dự kiến thời gian hoạt động của máy

Bài giải

Ta có:

$$f(x,y) = \int\limits_0^{10} \int\limits_0^{10-x} \frac{xy}{50}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 5$$

■

Bài 47.5-chưa làm

Θ là biến ngẫu nhiên phân phối đều trong khoảng $[0, 2\pi]$. Giả sử rằng biến ngẫu nhiên $X = cox\Theta$ và $Y = sin\Theta$. Chứng minh rằng Cov(X,Y)=0 khi X và Y phụ thuốc nhau

Bài 47.5

Cho biến ngẫu nhiên θ có phân phối đều trong đoạn $[0, 2\pi]$. Xét các biến ngẫu nhiên $X = \cos\theta$ và $Y = \sin\theta$. Chứng minh rằng $Cov(X,Y) = 0$ mặc dù X và Y không độc lập. Điều này nghĩa là có hệ thức yếu giữa X và Y.

Bài giải

Theo đề bài ta có:

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Ta lại có với $X = \cos\theta$ và $Y = \sin\theta$ thì X và Y rõ ràng không độc lập (chẳng hạn khi $X = 1$ thì bắt buộc $Y = 0$ và ngược lại).
Hơn nữa,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = 0 \\ E(Y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \\ E(XY) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ mặc dù X và Y không độc lập

$\blacksquare$

Bài 47.6

Nếu các biến ngẫu nhiên X_1, X_2, X_3, X_4 đôi một độc lập, có trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1. Tính hệ số tương quan của
a) $X_1 + X_2$ và $X_2 + X_3$
b) $X_1 + X_2$ và $X_3 + X_4$

Bài giải

$E(X_i) = 0$ và $Var(X_i) = 1$ $\forall i = \overline{1,4}$
Vì X_1, X_2, X_3, X_4 đôi một độc lập nên

$$Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_3) = Cov(X_1, X_4) = Cov(X_2, X_3)$$
$$= Cov(X_2, X_4) = Cov(X_3, X_4) = 0$$

- câu a

$$Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = Cov(X_1, X_2 + X_3) + Cov(X_2, X_2 + X_3)$$
$$= Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) + Cov(X_2, X_2) + Cov(X_2, X_3)$$
$$= 0 + 0 + Var(X_2) + 0 = 1$$
$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 1 + 1 = 2$$
$$Var(X_2 + X_3) = Var(X_2) + Var(X_3) = 1 + 1 = 2$$

Hệ số tương quan của $X_1 + X_2$ và $X_2 + X_3$ là

$$\rho\left(X_1 + X_2, X_2 + X_3\right) = \frac{Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)}{\sqrt{Var(X_1 + X_2)Var(X_2 + X_3)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{1}{2}$$

- câu b

$$Cov(X_1 + X_2, X_3 + X_4) = Cov(X_1, X_3 + X_4) + Cov(X_2, X_3 + X_4)$$
$$= Cov(X_1, X_3) + Cov(X_1, X_4) + Cov(X_2, X_3) + Cov(X_2, X_4)$$
$$= 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$
$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 1 + 1 = 2$$
$$Var(X_3 + X_4) = Var(X_3) + Var(X_4) = 1 + 1 = 2$$

Hệ số tương quan của $X_1 + X_2$ và $X_3 + X_4$ là

$$\rho\left(X_1 + X_2, X_3 + X_4\right) = \frac{Cov(X_1 + X_2, X_3 + X_4)}{\sqrt{Var(X_1 + X_2)Var(X_3 + X_4)}} = \frac{0}{\sqrt{2 \times 2}} = 0$$

$\blacksquare$

Bài 47.6

Nếu X1, X2, X3, X4 (cặp) các biến ngẫu nhiên không tương quan có trung bình là 0 và phương sai là 1, tính toán các mối tương quan của
(a)$X_1 + X_2$ và $X_2 + X_3$.
(b)$X_1 + X_2$ và $X_3 + X_4$.

<u>*Bài giải*</u>

a)$Cor(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = \frac{Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)}{\sqrt{Var(X_1 + X_2)Var(X_2 + X_3}})$
$= \frac{E((X_1 + X_2)(X_2 + X_3)) - E(X_1 + X_2)E(X_2 + X_3)}{\sqrt{2 \times 2}}$
$= \frac{E((X_1 + X_2)(X_2 + X_3))}{2} = \frac{E(X_1X_2 - X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3}{)} 2 = \frac{1}{2}$
b)$Cor(X_1+X_2, X_3+X_4) = \frac{E((X_1 + X_2)(X_3 + X_4))}{\sqrt{2 \times 2}} = \frac{E(X_1X_3 - X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4)}{2} =$
$\frac{0}{2} = 0$

■

Bài 47.9

Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

Tìm $Cov(X, Y)$ và $\rho(X, Y)$.

<u>*Bài giải*</u>

Ta có

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^x 3xdy = 3x^2. \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_y^1 3xdx = \frac{3}{2}(1-y^2). \\
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x3x^2dx = \frac{3}{4}. \\
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 3x^2dx = \frac{3}{5}. \\
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{80}. \\
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 y\frac{3}{2}(1-y^2)dy = \frac{3}{8}. \\
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2f_Y(y)dy = \int_0^1 y^2\frac{3}{2}(1-y^2)dy = \frac{1}{5}. \\
Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{19}{320}. \\
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x,y)dydx = \int_0^1\int_0^x xy(3x)dydx = \frac{3}{10}. \\
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{160}. \\
\rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = 0.397.
\end{aligned}$$

■

Bài 47.10-chưa giải

Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên với Cov(X,Y)=3. Tìm Cov(2X-5,4Y+2)

Bài giải

■

Bài 47.13

Một công ty có hai máy phát điện. Thời gian hỏng cho mỗi máy phát là một phân phối mũ với trung bình 10. Công ty sẽ bắt đầu sử dụng máy phát điện thứ hai ngay sau khi một hỏng. Tính phương sai của tổng số thời gian mà các máy phát điện sản xuất điện?

Bài giải

Cho X và Y biểu thị thời gian mà hai máy phát điện có thể hoạt động. Phương sai của một biến ngẫu nhiên theo hàm mũ với trung bình μ là μ^2.
Var(X) = Var(Y) = 10^2 = 100. Giả sử X và Y là độc lập.
Var (X + Y) = Var (X) + Var (Y) = 100 + 100 = 200.

■

Bài 47.15

Cho X và Y là 2 biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời
$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{3}xy & 0 \le x \le 1, x \le y \le 2x \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$
Tìm Cov(X,Y)

Bài giải

$f_X(x) = \int_x^{2x} \frac{8}{3}xydy = 4x^3$
$E(X) = \int_0^1 4x^4 = \frac{4}{5}$
$f_y(y) = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{8}{3}xydx & 0 \le x \le 1 \\ \int_{\frac{y}{2}}^{1} \frac{8}{3}xydx & 1 < y \le 2 \end{cases} = \begin{cases} y^3 & 0 \le y \le 1 \\ \frac{4}{3}y(1-\frac{y^2}{4}) & 1 < y \le 2 \end{cases}$
$E(Y) = \int_0^1 y^4dy + \int_1^2 y.\frac{4}{3}y(1-\frac{y^2}{4})dy = \frac{56}{45}$
$E(XY) = \int_0^1 \int_x^{2x} xy\frac{8}{3}xydydx = \frac{28}{27}$
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{28}{27} - \frac{4}{5}.\frac{56}{45} = 0,0415$

■

Bài 47.15

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{8}{3}xy & 0 \le x \le 1, x \le y \le 2x \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm Cov(X,Y).

Bài giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 \int_x^2 x f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^1 \int_x^2 \frac{8}{3}x^2 ydydx \\
&= \int_0^1 \frac{4}{3}x^2y^2\Big|_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{5} \\
E(Y) &= \int_0^1 \int_x^2 y f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^1 \int_x^2 \frac{8}{3}xy^2 dydx \\
&= \int_0^1 \frac{8}{9}xy^3\Big|_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 \frac{56}{9}x^4 dx = \frac{56}{45} \\
E(XY) &= \int_0^1 \int_x^2 xy f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^1 \int_x^2 \frac{8}{3}x^2y^2 dydx \\
&= \int_0^1 \frac{8}{9}x^2y^3\Big|_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 \frac{56}{9}x^5 dx = \frac{56}{54} \\
\Rightarrow Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{56}{54} - \frac{4}{5}\cdot\frac{56}{45} = 0.04
\end{aligned}$$

■

Bài 47.16

Cho X và Y biểu thị giá trị của hai cổ phiếu (thời hạn 5 năm) vào khoảng thời điểm cuối của thời hạn. X có phân phối đều trên khoảng $(0,12)$. Với $X = x$, Y có phân phối đều trên khoảng $(0,x)$. Xác định $Cov(X,Y)$ theo mô hình này.

Bài giải

$X \sim U(0,12) \qquad \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{12} \qquad 0 < x < 12$

$Y|X = x \sim U(0,x) \qquad \Rightarrow f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} \qquad 0 < y \le x < 12$

$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) \times f_X(x) = \frac{1}{12x} \qquad 0 < y \le x < 12,$

$E(XY) =$

$\int_0^{12}\int_0^x xy\frac{1}{12x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{12}\int_0^x \frac{y}{12}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{12} \frac{y^2}{24}|_0^x dx = \int_0^{12} \frac{x^2}{24}dx = \frac{x^3}{72}|_0^{12} = 24$

$E(Y|X = x) = \int_0^x y\frac{1}{12x}dy = \frac{y^2}{24x}|_0^x = \frac{x}{24}$

Suy ra $E(Y|X) = \frac{X}{24}$

$E(Y) = E[E(Y|X)] = \int_0^{12} \frac{x}{24}dx = \frac{x^2}{48}|_0^{12} = 3$

$X \sim U(0,12)$ nên $E(X) = \frac{0+12}{2} = 6$

Vậy $Cov(X,Y) = E(XY) - E(Y)E(X) = 24 - 3 \times 6 = 6$

■

Bài 47.16

Cho X và Y biểu thị các giá trị của hai cổ phiếu vào cuối khoảng thời gian năm năm. X được phân phối đều trên khoảng (0, 12). Với X = x, Y được phân phối đều trên khoảng (0, x). Xác định Cov(X, Y) theo mô hình này

Bài giải

Ta có $E(X) = 6$ và $Var(X) = \dfrac{12^2}{12} = 12$ (vì X là phân phối đều trong khoảng (0,12))
$E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 48$ với điều kiên Y là phân phối đều trên khoảng (0,x) nên ta có $E(Y|X) = \dfrac{X}{2}$
$\Rightarrow E(Y) = E_X(E_Y(Y|X)) = E_X(\dfrac{X}{2}) = 3$
$E(X,Y) = E_X(E_Y(XY|X)) = E_X(XE_Y(Y|X)) = E_X(\dfrac{X^2}{2}) = \dfrac{48}{2} = 24$
$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y) = 24 - 6 \times 3 = 6$

■

Bài 47.19

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập có các hàm mật độ sau:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ đồng thời $f_{XY}(x,y)$.

(b) Đặt $Z = X + Y$. Tìm hàm mật độ $f_Z(a)$. Đơn giản hóa nhất có thể.

(c) Tính kỳ vọng $E(X)$ và phương sai $Var(X)$. Lập lại cho Y.

(d) Tính kỳ vọng $E(Z)$ và phương sai $Var(Z)$.

Bài giải

(a) $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \dfrac{1}{2}$

Vậy

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(b) $Z = X + Y$

$$f_Z(a) = f_{X+Y}(a) = \int_0^2 f_X(a-y)f_Y(y)dy$$

* $0 < a \leqslant 1$

$$f_Z(a) = f_{X+Y}(a) = \int_0^a \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_0^a = \frac{a}{2}$$

* $1 < a \leqslant 2$

$$f_Z(a) = f_{X+Y}(a) = \int_0^1 \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

* $2 < a \leqslant 3$

$$f_Z(a) = f_{X+Y}(a) = \int_{a-2}^2 \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_{a-1}^2 = \frac{3-a}{2}$$

Vậy

$$f_Z(a) = \begin{cases} 0 & a \leqslant 0, a > 3 \\ \frac{a}{2} & 0 < a \leqslant 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < a \leqslant 2 \\ \frac{3-a}{2} & 2 < a \leqslant 3 \end{cases}$$

(c)

$$E(X) = \int_0^1 xf_X(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2f_X(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{1}{12}$

$$E(Y) = \int_0^2 yf_Y(y)dy = \int_0^2 \frac{1}{2}ydy = \frac{y^2}{4}\Big|_0^2 = 1$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 y^2f_Y(y)dy = \int_0^2 \frac{1}{2}y^2dx = \frac{y^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{3}$$

(d) $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$Var(Z) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

■

Bài 47.20

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên với pdf

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0, y > 0, x + y < 2 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(a) Cho Z=X+Y. Tìm pdf của Z
(b) Tìm pdf của X và pdf của Y
(c) Tìm kì vọng và phương sai của X
(d) Tìm các hiệp phương sai Cov(X,Y)

Bài giải

(a)Ta có:
$f_Z(z) = \frac{dFz}{dz}(z) = \frac{z}{2}$, 0<z<2 và 0 nếu khác.
(b)Ta có:
$f_X(x) = 1 - \frac{x}{2}$, 0<x<2 và 0 nếu khác
$f_Y(y) = 1 - \frac{y}{2}, 0 < y < 2$ và 0 nếu khác.
(c) Ta có:
E(X)=$\frac{2}{3}vVar(X) = \frac{2}{9}$
(d) Ta có:
Cov(X,Y)=$-\frac{1}{9}$

■

Bài 47.25-chưa làm

Cho X và Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn với trung bình 1 và phương sai 1. Tìm c để E[c|X-Y|]=1

Bài 47.25

Cho X_1, X_2, X_3 là ba biến ngẫu nhiên độc lập có cùng trung bình là 0 và phương sai 1. Đặt $X = 2X_1 - X_3$ và $Y = 2X_2 + X_3$. Tìm $p(X,Y)$.

<u>*Bài giải*</u>

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} E(X_1) &= E(X_2) = E(X_3) = 0 \\ Var(X_1) &= Var(X_2) = Var(X_3) = 1 \\ \Rightarrow E(X_1^2) &= E(X_2^2) = E(X_3^2) = 1 \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(2X_1 - X_3) = 2E(X_1) - E(X_3) = 0 \\ E(Y) &= E(2X_2 + X_3) = 2E(X_2) + X_3 = 0 \\ E(XY) &= E((2X_1 - X_3)(2X_2 + X_3)) \\ &= E(4X_1X_2 + 2X_1X_3 - 2X_2X_3 - X_3^2) \\ &= 4E(X_1)E(X_2) + 2E(X_1)E(X_3) - 2E(X_2)E(X_3) - E(X_3^2) \\ &= -1 \\ \Rightarrow Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = -1 \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(2X_1 - X_3) = 4Var(X_1) + Var(X_3) = 5 \quad (Var(-X_3) = Var(X_3)) \\ Var(Y) &= Var(2X_2 + X_3) = 4Var(X_2) + Var(X_3) = 5 \end{aligned}$$

Do đó,

$$p(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-1}{5}$$

■

Bài 47.26

Cho X, Y và Z là các biến ngẫu nhiên với $E(X) = 1, E(Y) = 2, E(Z) = 3$ và $Var(X) = 4, Var(Y) = 5, Var(Z) = 9$. $Cov(X,Y) = 2, Cov(X,Z) = 3, Cov(Y,Z) = 1$. Tính phương sai và tung bình của $W = 3X + 2Y - Z$

<u>*Bài giải*</u>

$E(W) = E(3X + 2Y - Z) = 3E(X) + 2E(Y) - E(Z) = 3 \times 1 + 2 \times 2 - 3 = 4$
$Var(W) = Var(3X + 2Y - Z)$
$= 9Var(X) + 4Var(Y) + Var(Z) + 12Cov(X,Y) - 6Cov(X,Z) - 4Cov(Y,Z)$
$= 9 \times 4 + 4 \times 5 + 1 \times 9 + 12 \times 2 - 6 \times 3 - 4 \times 1 = 67$

■

Bài 47.26

Cho X, Y và Z là các biến ngẫu nhiên với các trung bình là 1,2 và 3 tương ứng, và phương sai 4,5, và 9 tương ứng. Ngoài ra, Cov(X, Y) = 2, Cov(X, Z) = 3, và Cov(Y, Z) = 1.Tìm giá trị trung bình và phương sai tương ứng của các biến ngẫu nhiên $W = 3X + 2Y - Z$?

Bài giải

$E(W) = E(3X + 2Y - Z) = 3E(X) + 2E(Y) - E(Z) = 3 \times 1 + 2 \times 2 - 3 = 4$
$Var(3X+2Y-Z) = Var(3X)+Var(2Y)+Var(-Z)+2Cov(3X, 2Y)+2Cov(3X, -Z)+2Cov(2Y, -Z)$
$= 9Var(X) + 4Var(Y) + Var(Z) + 12Cov(X, Y) - 6Cov(X, Z) - 4Cov(Y, Z)$
$= 36 + 20 + 9 + 12 \times 2 - 6 \times 3 - 4 = 67$

■

Bài 47.29

Cho n biến ngẫu nhiên độc lập $X_1, \dots, X_n$ có cùng phương sai σ^2. Đặt $U = 2X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$ và $V = X_2 + X_3 + \dots + X_{n-1} + 2X_n$. Tìm $\rho(U, V)$.

Bài giải

Vì $X_1, \dots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập nên

$$\begin{aligned}
Var(U) &= Var(2X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}) \\
&= 4Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_{n-1}) = (n+2)\sigma^2. \\
Var(V) &= Var(X_2 + X_3 + \dots + X_{n-1} + 2X_n) \\
&= Var(X_2) + Var(X_3) + \dots + Var(X_{n-1}) + 4Var(X_n) = (n+2)\sigma^2. \\
Var(U+V) &= Var(2X_1 + 2X_2 + \dots + 2X_{n-1} + 2X_n) \\
&= 4n\sigma^2. \\
Cov(U, V) &= \frac{1}{2}\left(Var(U+V) - Var(U) - Var(V)\right) \\
&= \frac{1}{2}(4n\sigma^2 - 2(n+2)\sigma^2) = (n-2)\sigma^2. \\
\rho(U, V) &= \frac{Cov(U, V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}} = \frac{(n-2)\sigma^2}{(n+2)\sigma^2} = \frac{n-2}{n+2}.
\end{aligned}$$

■

X \ Y	0	1	2
0	0.25	0.08	0.05
1	0.12	0.20	0.10
2	0.03	0.07	0.10

Bài 47.30-chưa giải

Cho bảng phân phối xác suất của hai biến ngẫu nhiên X và Y sau:
(a) Cho phân phối biên độ của X và Y.
(b) Tìm E(X) và E(Y)
(c) Tìm Cov(X,Y)
(d) Tìm E(100X + 75X)

Bài giải

■

Bài 48.3

Cho X và Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với các tham số μ và λ. TÌM P(X>Y)

Bài giải

$P(X > Y) = 1 - P(X \leqslant Y)$
$= 1 - \int_0^\infty \int_0^y f_X(x) f_Y(y) dx dy$
$= 1 - \int_0^\infty \int_0^y \mu\lambda e^{-\mu x - \lambda y} dx dy$
$= 1 - \int_0^\infty \mu\lambda (\frac{-1}{\mu}) e^{-\mu x - \lambda y}|_0^y dy$
$= 1 - \int_0^\infty \lambda (e^{-\mu y - \lambda y} - e^{-\lambda y}) dy$
$= 1 - \lambda (\frac{-1}{\mu+\lambda} e^{-\mu y - \lambda y} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y})|_0^\infty$
$= 1 - \lambda (\frac{1}{\mu+\lambda} - \frac{1}{\lambda})$
$= 1 - \frac{-\lambda}{\mu+\lambda} + 1$
$= 1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda}$
$= \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$

■

Bài 48.5

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc với hàm mật độ có điều kiện là

$$f_{Y|X}(y|2) = \begin{cases} 0.2 & y = 1 \\ 0.3 & y = 2 \\ 0.5 & y = 3 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$$

Tính E(Y|X=2)

<u>*Bài giải*</u>

E(Y|X=2)=0,2.1+0,3.2+0,5.3=2,3

■

Bài 48.6

Cho X,Y là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y & x^2 < y < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $E(Y|X)$

<u>*Bài giải*</u>

Hàm mật độ lề của X

$f_X(x) = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2y dy = \frac{21}{8}x^2y^2|_{x^2}^1 = \frac{21}{8}x^2(1-x^4)$

Ta có $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4}$

$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{x^2}^1 y\frac{2y}{1-x^4}dy = \frac{1}{1-x^4}\frac{2}{3}y^3|_{x^2}^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1-x^6}{1-x^4}\right)$

Vậy $E(Y|X) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-X^6}{1-X^4}\right)$

■

Bài 48.6

Cho X và Y có hàm mật độ đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y & x^2 < y < 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Tìm E(Y|X)

<u>*Bài giải*</u>

Ta có:

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy} \\
&= \frac{(21/4)x^2y}{\int_{x^2}^{1}(21/4)x^2ydy} \\
&= \frac{(21/4)x^2y}{(21/8)x^2(1-x^4)} \\
&= \frac{2y}{1-x^4}
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
E(Y|X=x) &= \int_{x^2}^{1} \frac{2y^2}{1-x^4}dy \\
&= \frac{2}{1-x^4}\int_{x^2}^{1} y^2dy \\
&= \frac{2}{3(1-x^4)}y^3\Big|_{y=x^2}^{y=1} \\
&= \frac{2}{3}\Big(\frac{1-x^6}{1-x^4}\Big)
\end{aligned}$$

Vậy,

$$E(Y|X) = \frac{2}{3}\Big(\frac{1-X^6}{1-X^4}\Big)$$

■

Bài 48.9

Cho X là một biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với $\lambda = 5$ và Y là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trong khoảng $(-3, X)$. Tính $E(Y)$

<u>*Bài giải*</u>

$$X \sim exp(5)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

$$Y \sim U(-3, X)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+3} & -3 < y < x \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x).f_Y(y) = 5e^{-5x}.\frac{1}{x+3} = \frac{5e^{-5x}}{x+3} \qquad -3 < y < x, x \geqslant 0$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{5e^{-5x}}{x+3}.\frac{1}{5e^{-5x}} = \frac{1}{x+3}$$

$$E(Y|X=x) = \int_{-3}^{x} y f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-3}^{x} \frac{y}{x+3}dy = \left.\frac{y^2}{2(x+3)}\right|_{-3}^{x} = \frac{-9}{2(x+3)} = \frac{x-3}{2}$$

$$E(Y) = E(E(Y|X=x)) = \int_0^\infty E(Y|X=x)f_X(x)dx = \int_0^\infty \frac{5e^{-5x}(x-3)}{2} = \frac{5}{2}\int_0^\infty x5e^{-5x} - 3e^{-5x}dx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-5x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{1}{5}e^{-5x} \end{cases}$

$$E(Y) = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{5}xe^{-5x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{5}\int_0^\infty e^{-5x}dx - \frac{3}{5}e^{-5x}\Big|_0^\infty\right) = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{25}e^{-5x}\Big|_0^\infty - \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{25} - \frac{3}{5}\right) = -1.4$$

■

Bài 48.10-chưa giải

Trong một trung tâm, một khảo sát cho thấy số lượng người đã đi qua JCPenney 4:00-17:00 là một biến ngẫu nhiên Poisson với tham số = 100. Giả sử rằng mỗi người có thể vào cửa hàng, độc lập nhau, với một xác suất p = 0.15. Tìm kỳ vọng của số người mà đi vào của hàng trong khoảng thời gian đó?

Bài giải

■

Bài 48.13

Giá cổ phiếu của hai công ty vào cuối bất cứ năm nào được mô hình hóa với các biến ngẫu nhiên X và Y là theo hàm mật độ đồng thời sau :

$$\begin{cases} 2x & 0 < x < 1; x < y < x+1 \\ 0 & \neq \end{cases}$$

Tính Var(Y|X=x)

Bài giải

■

Bài 48.15

Cho X là biến ngẫu nhiên với trung bình 3 và phương sai 2, Y là biến ngẫu nhiên cho mỗi x, phân phối có điều kiện của Y cho X=x có trung bình là trung bình của x và phương sai của x2: phương sai hàm mật độ lề của Y là gì?

Bài 48.16

Cho X,Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Với $0 < x < 1$. Tính $Var(Y|X = x)$

Bài giải

Ta có $Var(Y|X = x) = E[(Y - E(Y|X = x))^2|X = x]$
$= E[(Y^2 - 2YE(Y|X = x) + (E(Y|X = x))^2)|X = x]$
$= E(Y^2|X = x) - 2E(Y|X = x)E(Y|X = x) + [E(Y|X = x)]^2$
$= E(Y^2|X = x) - [E(Y|X = x)]^2$
Hàm mật độ lề của X $f_X(x) = \int_x^1 2dy = 2y|_x^1 = 2(1 - x)$
$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{2}{2(1-x)} = \dfrac{1}{1-x}$
$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy = \int_x^1 y\dfrac{1}{1-x}dy = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{y^2}{2}|_x^2 = \dfrac{1}{2}(1+x)$
$E(Y^2|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|X}(y|x)dy = \int_x^1 y^2\dfrac{1}{1-x}dy = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{y^3}{3}|_x^2 = \dfrac{1+x+x^2}{3}$
Vậy
$Var(Y|X = x) = E(Y^2|X = x) - [E(Y|X = x)]^2 = \dfrac{1+x+x^2}{3} - \dfrac{1}{2}(1+x) = \dfrac{(x-1)^2}{12}$

■

Bài 48.16

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{khác} \end{cases}$$

Tìm $Var(Y|X = x)$, với $0 < x < 1$.

Bài giải

Với $0 < x < 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy} \\
&= \frac{2}{\int_x^1 2dy} \\
&= \frac{2}{2(1-x)} \\
&= \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
E(Y|X=x) &= \int_x^1 \frac{y}{1-x}dy \\
&= \frac{1}{2(1-x)}y^2\Big|_{y=x}^{y=1} \\
&= \frac{1+x}{2}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
E(Y^2|X=x) &= \int_x^1 \frac{y^2}{1-x}dy \\
&= \frac{1}{3(1-x)}y^3\Big|_{y=x}^{y=1} \\
&= \frac{1}{3}\Big(\frac{1-x^3}{1-x}\Big) \\
&= \frac{1}{3}(1+x+x^2)
\end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned}
Var(Y|X=x) &= E(Y^2|X=x) - (E(Y|X=x))^2 \\
&= \frac{1}{3}(1+x+x^2) - \frac{1}{4}(1+x)^2 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \\
&= \frac{1}{12} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x^2 \\
&= \frac{(1-x)^2}{12}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Bài 48.19

Số tai nạn lao động, N, xảy ra ở 1 nhà máy trong 1 ngày bất kỳ cho trước có phân phối Poisson với trung bình λ. Tham số λ là một biến ngẫu nhiên được xác định bởi mức độ của các hoạt động trong nhà máy, và có phân phối đều trên đoạn $[0, 3]$. Tính $Var(N)$.

Bài giải

Ta có: $(N \mid \lambda) \sim$ Poisson(λ) nên $E(N \mid \lambda) = Var(N \mid \lambda) = \lambda$.
Do đó

$$Var(N) = E\left[Var(N \mid \lambda)\right] + Var\left[E(N \mid \lambda)\right] = E(\lambda) + Var(\lambda).$$

Vì $\lambda \sim$ U$[0, 3]$ nên

$$E(\lambda) = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}.$$
$$Var(\lambda) = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{9}{12}.$$

Vậy $Var(N) = \dfrac{9}{4} = 2.25$.

■

Bài 48.20-giải

Tung một con xúc sắc nhiều lần. Cho X là số lần tung được là 5 và Y là số lần tung được là 6. Tính E($X \mid Y = 2$)

Bài giải

■

Bài 48.25

Cho X và Y là biến ngẫu nhiên với hàm mật độ đồng thời là
$fXY = \begin{cases} \alpha xy & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{Nơi khác} \end{cases}$
Khi $\alpha > 0$. Xác định ước lương tốt nhất g(x) của Y cho bởi X

Bài giải

$f_X(x) = \int_x^1 \alpha xy dy = \alpha(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2})$
$f_{Y|X}(y|x) = \frac{2y}{1-x^2}$
$g(y) = E(Y|X) = \int_x^1 \frac{2y^2}{1-x^2} dy = \frac{2(1-x^3)}{3(1-x^2)}$

■

Bài 49.1

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{1, 2, ..., n\}$ sao cho hàm mật độ xác suất của X có dạng $p_X(j) = \dfrac{1}{n}$ với $1 \leq j \leq n$. Tính E(X) và Var(X) bằng cách sử dụng hàm sinh moment

<u>*Bài giải*</u>

Ta có bảng phân phối xác suất

X	1	2	...	n
$p_X(X=j)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

$M_X(t) = E(e^{Xt}) = \displaystyle\sum_{x=1}^{n} e^{xt} p_X(X=j) = \frac{1}{n}e^t + \frac{1}{n}e^{2t} + ... + \frac{1}{n}e^{nt}$

$M_X'(t) = \dfrac{1}{n}e^t + \dfrac{2}{n}e^{2t} + ... + \dfrac{n}{n}e^{nt}$

$M_X''(t) = \dfrac{1}{n}e^t + \dfrac{4}{n}e^{2t} + ... + \dfrac{n^2}{n}e^{nt}$

Ta có $E(X) = M_X'(0) = \dfrac{1}{n}(1 + 2 + ... + n) = \dfrac{1}{n}\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2}$

$E(X^2) = M_X''(0) = \dfrac{1}{n}(1 + 4 + ... + n^2) = \dfrac{1}{n}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$

■

Bài 49.2

Cho X có phân phối hình học với hàm mật độ $f_X(n) = p(1-p)^{n-1}$. Dùng hàm sinh moment tìm kỳ vọng và phương sai của X.

<u>*Bài giải*</u>

Đặt $q = 1 - p$. Khi đó,

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty}(e^t q)^k$$

Do đó,

$$M_X'(t) = \frac{p}{q}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}(e^t q)^k\Big)' = \frac{p}{q}\Big(\frac{1}{1-e^t q}\Big)' = \frac{p}{q}\cdot\frac{e^t q}{(1-e^t q)^2} = \frac{e^t p}{(1-e^t q)^2}$$

và

$$\begin{aligned}
M''_X(t) &= \frac{e^t p(1-e^t q)^2 - e^t p.2(1-e^t q)(-e^t q)}{(1-e^t q)^4} \\
&= \frac{e^t p(1-e^t q) + 2e^{t^2} pq}{(1-e^t q)^3} \\
\Rightarrow E(X) &= M'_X(0) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \\
E(X^2) &= M''_X(0) = \frac{p(1-q)+2pq}{(1-q)^3} = \frac{p^2+2p(1-p)}{p^3} \\
&= \frac{-p^2+2p}{p^3} = \frac{-p+2}{p^2} \\
\Rightarrow Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{-p+2}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

■

Bài 49.4

Cho X là một biến ngẫu nhiên Gamma với tham số α và λ. Tìm giá trị kì vọng và phương sai của X bằng cách sử dụng hàm sinh moment.

Bài giải

$$X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$$

Hàm phân phối xác suất của X là:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{\lambda e^{\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}dx$$

$$= \frac{\lambda(\lambda)^{\alpha-1}}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{tx}e^{-\lambda x}(x)^{\alpha-1}dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty e^{(t-\lambda)x}x^{\alpha-1}dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)(\lambda-t)^{\alpha-1}}\int_0^\infty \frac{(\lambda-t)e^{-(\lambda-t)x}[(\lambda-t)x]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \qquad \lambda - t \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \geqslant t$$

$$\Rightarrow M'_X(t) = [\lambda^\alpha(\lambda-t)^{-\alpha}]' = \alpha\lambda^\alpha(\lambda-t)^{-\alpha-1}$$

$M''_X(t) = [\alpha\lambda^\alpha(\lambda - t)^{-\alpha-1}]' = \alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha(\lambda - t)^{-\alpha-2}$

$\Rightarrow E(X) = M'_X(0) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$

$E(X^2) = M''_X(0) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$

■

Bài 49.5-chưa giải

Chỉ ra rằng tổng của mỗi n biến ngẫu nhiên phân phối mũ độc lập với tham số λ và biến ngẫu nhiên phân phối gamma với hai tham số n và λ

Bài giải

■

Bài 49.10

Cho X và Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập với hàm sinh moment $M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$. Đặt $W = X + Y$ và $Z = X - Y$. Xác định hàm sinh moment đồng thời, $M(t_1, t_2)$ của W và Z

Bài giải

$M_{W,Z}(t_1, t_2) = E(e^{t_1 W + t_2 Z}) = E(e^{t_1(X+Y)+t_2(X-Y)}) = E(e^{(t_1+t_2)X}e^{(t_1-t_2)Y}) = E(e^{(t_1+t_2)X}).E(e^{(t_1-t_2)Y}) = e^{\frac{1}{2}(t_1+t_2)^2}.e^{\frac{1}{2}(t_1-t_2)^2} = e^{t_1^2+t_2^2}$

■

Bài 49.11

Chuyên gia bảo hiểm xác định khoản tiền bồi thường dành cho một loại tai nạn là biến ngẫu nhiên X với hàm sinh moment

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-2500t)^4}$$

Tính độ lệch chuẩn của khoản tiền bồi thường cho loại tai nạn này

Bài giải

Ta có $M_X(t) = \dfrac{1}{(1-2500t)^4}$
$M_X^{'}(t) = \dfrac{10000}{(1-2500t)^5}$
$M_X^{"}(t) = \dfrac{125000000}{(1-2500t)^6}$
$E(X) = M_X^{'}(0) = 10000$
$E(X^2) = M_X^{"}(0) = 125000000$
$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 125000000 - (10000)^2 = 25000000$
Vậy độ lệch chuẩn của khoản tiền bồi thường cho loại tai nạn này là
$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{25000000} = 5000$

■

Bài 49.11

Một chuyên gia tính toán xác định rằng quy mô yêu cầu bồi thường cho một loại chắc chắn tai nạn là một biến ngẫu nhiên X, với hàm sinh các moment:
$M_X(t) = \dfrac{1}{(1-2500t)^4}$
Xác định độ lệch chuẩn của các quy mô yêu cầu bồi thường cho loại tai nạn này

Bài giải

$M_X(t) = (1-2500t)^{-4}$
$M_X^{'}(t) = 10^4(1-2500t)^{-5}$
$M_X^{"}(t) = 1,25.10^8(1-2500t)^{-6}$
$E(X) = M_X^{'}(0) = 10^4$
$E(X^2) = M_X^{"}(0) = 1,25.10^8$
$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2,5.10^7$
$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2,5.10^7} = 5000$

■

Bài 49.12

Một công ty bảo hiểm nhà ở ba thành phố J, K và L. Khoảng cách giữa các thành phố là hợp lý để có thể giả định rằng sự thiệt hại xảy ra ở ba thành phố là độc lập. Hàm sinh moment cho mức độ thiệt hại ở các thành phố là:

$$M_J(t) = (1-2t)^{-3}$$

$$M_K(t) = (1-2t)^{-2.5}$$

$$M_L(t) = (1-2t)^{-4.5}$$

X là đại diện cho khoản thiêt hại ở ba thành phố. Tìm $E(X^3)$

<u>*Bài giải*</u>

Vì J, K và L độc lập nên ta có:

$$M_{J+K+L}(t) = M_J(t)M_K(t)M_L(t) = (1-2t)^{-10}$$

Khi đó,

$$\frac{d}{dt}M_{J+K+L}(t) = 20(1-2t)^{-11}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}M_{J+K+L}(t) = 440(1-2t)^{-12}$$
$$\frac{d^3}{dt^3}M_{J+K+L}(t) = 10560(1-2t)^{-13}$$

Vậy,

$$E(X^3) = M^{(3)}_{J+K+L}(0) = 10560$$

■

Bài 49.14

Hai dụng cụ được dùng để đo chiều cao, h, của 1 tòa tháp. Sai số bởi dụng cụ kém chính xác hơn có phân phối chuẩn với trung bình 0 và độ lệch chuẩn là $0.0056h$. Sai số bởi dụng cụ chính xác nhiều hơn có phân phối chuẩn với trung bình 0 và độ lệch chuẩn $0.0044h$.
Giả sử 2 độ đo là các biến ngẫu nhiên độc lập. Tính xác suất để giá trị trung bình nằm trong khoảng $0.005h$ chiều cao của tòa tháp.

<u>*Bài giải*</u>

Đặt X_1 và X_2 lần lượt là sai số trong đo đạc của dụng cụ thứ nhất và thứ hai.
Ta có: $E(X_1) = E(X_2) = 0$, $Var(X_1) = (0.0056h)^2, Var(X_2) = (0.0044h)^2$.
Trung bình của X_1 và X_2 là biến ngẫu nhiên $\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ với

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{2}E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 0.$$
$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{4}Var(X_1 + X_2) \approx (0.00356h)^2.$$

Giá trị trung bình nằm trong khoảng $0.005h$ của tòa tháp khi và chỉ khi giá trị tuyệt đối của sai số cho giá trị trung bình bé hơn $0.005h$. Do đó, ta cần tìm $P(|\bar{X}| < 0.005h) =$

$P(-0.005h < \bar{X} < 0.005h)$.
Ta có

$$P(-0.005h < \bar{X} < 0.005h) = P\left(\frac{-0.005h - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} < \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}} < \frac{0.005h - E(\bar{X})}{\sqrt{Var(\bar{X})}}\right)$$
$$= P\left(\frac{-0.005h - 0}{0.00356h} < \frac{\bar{X} - 0}{0.00356h} < \frac{0.005h - 0}{0.00356h}\right) \approx P(-1.4 < Z < 1.4)$$
$$= 2\Phi(1.4) - 1$$
$$= 2 \times 0.9192 - 1 = 0.8384.$$

■

Bài 49.15-chưa giải

Cho X_1, X_2,..., X_n là mỗi biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối hình học với tham số ρ. Đặt Y = X_1 + X_2 + ... + X_n

Bài giải

■

Bài 49.20

Cho X là biến ngẫu nhiên với hàm sinh moment là $M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{tj-1}}{j!}$. Tìm Pr(X=2)

Bài giải

$M_X(t) = \sum_x^{\infty} e^{tx} Pr(x) = \sum_x^{\infty} \frac{e^{t(x-1)}}{x!}$
$\Rightarrow e^{xt}.PrX = 2 = \sum_x^{\infty} \frac{e^t}{2!}$
$\Rightarrow Pr(X = 2) = \frac{1}{2e}$

■

Bài 49.21

Nếu X có phân phối chuẩn hóa và $Y = e^X$. Tìm moment cấp k của Y?

Bài giải

$X \sim N(0,1) \qquad Y = e^X \Rightarrow X = logY \sim N(0,1)$
$E(Y^k) = E(e^{kX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{kx - \frac{-x^2}{2}} dx$
$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-k)^2}{2} + \frac{k^2}{2}} dx = e^{\frac{k^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-k)^2}{2}} dx$

$= e^{\frac{k^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-k)^2}{2}} d(x-k) = e^{\frac{k^2}{2}} \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-k)^2}{2}} d(x-k) = 1 \right)$

Vì $E(Y^k) \forall k > 0$ tồn tại nên $E(Y^k) = e^{\frac{k^2}{2}}$ chính là moment cấp k của Y

Vậy moment cấp k của Y là $E(Y^k) = e^{\frac{k^2}{2}}$

■

Bài 49.22

Cho biến ngẫu nhiên X có phân phối mũ với tham số b. Tìm b nếu $M_X(-b^2) = 0.2$

Bài giải

Ta có:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} b e^{-bx} dx = b \int_0^{\infty} e^{(-b-t)x} dx = \frac{b}{b-t}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} M_X(-b^2) = 0.2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{b}{b+b^2} = 0.2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+b} = 0.2 \\ &\Leftrightarrow \quad b = 4 \end{aligned}$$

■

Bài 49.24

Hàm sinh moment cho phân phối đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X và Y là $M(t_1, t_2) = \frac{1}{3(1-t_2)} + \frac{2}{3} e^{t_1} . \frac{2}{(2-t_2)}, \quad t_2 < 1$. Tìm $Var(X)$

Bài giải

* $E(X) = \frac{\partial^2}{\partial t_1} M(t_1, t_2) = \left. \frac{4e^{t_1}}{3(2-t_2} \right|_{(0,0)} = \frac{2}{3}$

* $E(X^2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1} M(t_1, t_2) = \left. \frac{4e^{t_1}}{3(2-t_2} \right|_{(0,0)} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow Var(X) = E(X^2 0 - [E(X)]^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

■

Bài 49.25-chưa giải

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập với thời điểm phát chức năng
$M_X(t) = e^{t^2+2t}$ và $M_Y(t) = e^{3t^2+t}$
Xác định chức năng thời điểm tạo của X+2Y

Bài giải

■

Bài 49.30

Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập với hàm sinh moment của X+Y là
$M(t) = 0.09e^{-2t} + 0.24e^{-t} + 0.34 + 0.24e^{t} + 0.09e^{2t}, -\infty < t < \infty$
Tính $Pr(X \leq 0)$

Bài 50.1

Cho $\epsilon > 0$. X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{-\epsilon, \epsilon\}$ và hàm mật độ xác suất cho bởi $Pr(-\epsilon) = \dfrac{1}{2}$ và$Pr(\epsilon) = \dfrac{1}{2}$ và bằng 0 nơi khác. Chứng minh rằng

Bài giải

Ta có bảng phân phối xác suất

X	$-\epsilon$	ϵ
$p_X(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$E(X) = -\epsilon \times \dfrac{1}{2} + \epsilon \times \dfrac{1}{2} = 0$
$E(X^2) = (-\epsilon)^2 \times \dfrac{1}{2} + (\epsilon)^2 \times \dfrac{1}{2} = \epsilon^2$
$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \epsilon^2 - (0)^2 = \epsilon^2$
Theo bất đẳng thức Chebyshev
$Pr(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\epsilon^2}$
$\Rightarrow Pr(|X - 0| \geq \epsilon) \leq \dfrac{\epsilon^2}{\epsilon^2}$
$\Rightarrow Pr(|X| \geq \epsilon) \leq 1$

■

Bài 50.2

Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ có phân phối Benoulli với xác suất thành công là 0.3 và xác suất thất bại là 0.7. Đặt $X_i = 1$ nếu lần thứ i thành công và bằng 0 nếu lần thứ i thất bại. Tìm n để $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq 0.1\right) \leq 0.21$, với $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Bài giải

Ta có:

$$Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)}{n^2} = \frac{n(0.3)(0.7)}{n^2} = \frac{0.21}{n}$$

Áp dụng BĐT Chebyshev, khi đó:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{0.1^2} = 0.21$$

$$\Rightarrow \frac{0.21}{n} = (0.21)(0.1^2) \Rightarrow n = 100$$

■

Bài 50.4

Cho X là biến ngẫu nhiên với $E(X) = 10^3$. Tìm chặn trên cho xác suất rằng X bé nhất là bằng 10^4.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Markov, ta có

$$P(X \geq 10^4) \leq \frac{10^3}{10^4} = 0.1.$$

■

Bài 50.5

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên với trung bình và phương sai bằng cả hai 20. Điều gì có thể nói về Pr(0<X<40)

Bài giải

Ta có:
$Pr(0 < x < 40) = Pr(|X - 20| < 20) = 1 - Pr(|X - 20| \geq 20) \geq 1 - \frac{20}{20^2} = \frac{19}{20}$

■

Bài 50.10

Cho X là biến ngẫu nhiên với trung bình là $\frac{1}{2}$ và phương sai là 25×10^{-7}. Có thể nói được gì về $Pr(0.475 \leq X \leq 0.525)$?

Bài giải

$Pr(0,475 \leq X \leq 0,525) = Pr(|X - 0,5| \geq 0,025) = 1 - P(|X - 0,5| < 0,025) = 1 - \frac{\sigma^2}{0,025^2} = 0,996$

■

Bài 50.11

Cho $X \geq 0$, là biến ngẫu nhiên có trung bình là μ. Chứng minh rằng $Pr(X \geq 2\mu) \leq \dfrac{1}{2}$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Markov ta có
$Pr(X \geq 2\mu) \leq \dfrac{E(X)}{2\mu} = \dfrac{\mu}{2\mu} = \dfrac{1}{2}$
Vậy $Pr(X \geq 2\mu) \leq \dfrac{1}{2}$

■

Bài 50.12

Một nhà máy DVD dự kiến sản xuất hàng ngày là 100 DVD.
(a) Tìm một chặn trên cho xác suất nhà máy sản xuất nhiều hơn 120 DVD trong ngày.
(b) Giả sử rằng phương sai của sản xuất hàng ngày là 5. Tìm một chặn dưới cho xác suất nhà máy sản xuất từ 70 đến 130 DVD trong ngày.

Bài giải

Gọi X là số DVD sản xuất trong ngày.
(a) Nhà máy sản suất nhiều hơn 120 DVD cũng đồng nghĩa với việc sản xuất ít nhất là 121 DVD trong ngày.
Áp dụng BĐT MarKov ta có:

$$P(X \geq 121) \leq \frac{E(X)}{121} = \frac{100}{121}$$

(b) Áp dụng BĐT Chebyshev, ta có:

$$P(|X - 100| \geq 30) \leq \frac{\sigma^2}{30^2} = \frac{5}{900} = \frac{1}{180}$$

$$\Rightarrow P(|X-100|<30)=1-P(|X-100|\geq 30)=\frac{179}{180}$$

Do đó, xác suất nhà máy sản xuất từ 70 đến 130 DVD trong ngày không nhỏ hơn $\frac{179}{180}$

■

Bài 50.14

Cho $X_1,\ldots,X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng hàm mật độ xác suất sau:

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{nếu khác}\end{cases}$$

Chứng minh rằng $\bar{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}}{n}$ hội tụ theo xác suất về một hằng số khi $n\to\infty$ và tìm hằng số đó.

Bài giải

$$E(X)=\int_0^1 xf_X(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}<\infty$$

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2f_X(x)dx=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}<\infty$$

$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{18}<\infty$

Áp dụng dạng yếu của luật số lớn ta có $E(\bar{X})\to\infty$ theo xác suất và hằng số là $\dfrac{2}{3}$

■

Bài 50.15

Cho $X_1,...,X_n$ được thống nhất độc lập và phân phối giống nhau (0,1). Cho Y_n là tối thiểu của $X_1,...,X_n$.

(a) Tìm phân phối tích lũy của Y_n

(b) Hiển thị rằng Y_n hội tụ trong xác suất về 0 bằng cách hiển thị cho rằng tùy tiện $\xi>0$

$$\lim_{n\to\infty} Pr|(Y_n-0)|\leq\xi)=1$$

Bài giải

Ta có:
$F_{Y_n}(x) = Pr(Y_n \le x) = 1 - Pr(Y_n > x) = 1 - Pr(X_1 > x, X_2 > x, ..., X_n > x)$
$= 1 - (1-x)^n$ *khi* 0<x<1
Lúc đó ta có:
$F_{Y_n}(x) = 0$ khi $x \le 0$
$F_{Y_n}(x) = 1$ khi $x \ge 1$
(b) Cho ξ >0.
Khi đó: $Pr(|Y_n - 0| < \xi) = Pr(Y_n \le \xi) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 1-(1-\xi)^n & 0 < x < 1 \end{cases}$
Xem xét các trường hợp không tầm thường: $0 < \xi < 1$.
Ta tìm: $\lim\limits_{x\to\infty} Pr(|Y_n - 0| \le \xi) = \lim\limits_{x\to\infty}[1-(1-\xi)^n] = 1 - \lim\limits_{x\to\infty} 1 - 0 = 1$.
Do đó:$Y_n \to 0$ hôi tụ trong xác suất.

■

Bài 51.3

Một nhà sản xuất pin vô tuyến tuyên bố rằng tuổi thọ của pin của nó có một trung bình 54 ngày và độ lệch chuẩn 6 ngày. Một mẫu ngẫu nhiên gồm 50 pin đã được chọn để thử nghiệm. Giả sử các tuyên bố của nhà sản xuất là đúng, tính xác suất mà mẫu có thời gian hoạt động trung bình ít hơn 52 ngày?

Bài 51.6

Giả sử $X_i, i = 1, 2, .., 100$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối mũ với tham số $\lambda = \dfrac{1}{1000}$. Biết rằng $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}$. Tính xấp xỉ $Pr(950 \le X \le 1050)$

Bài giải

Vì $X_i \sim Exp(\lambda)$ với $\lambda = \dfrac{1}{1000}$ nên
$E(X_i) = \dfrac{1}{\lambda} = 1000$
$E(\overline{X}) = E\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}\right) = \dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} E(X_i) = E(X_i) = 1000$
$Var(X_i) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 1000^2$
$Var(\overline{X}) = Var\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}\right) = \dfrac{1}{100^2}\sum_{i=1}^{100} Var(X_i) = \dfrac{1}{100} Var(X_i) = 10000$
Áp dụng định lý giới hạn trung tâm ta có
$Pr(950 \le \overline{X} \le 1050) = Pr\left(\dfrac{950 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}} \le \dfrac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}} \le \dfrac{1050 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}}\right)$

$$= \phi\left(\frac{1050 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}}\right) - \phi\left(\frac{950 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}}\right) = \phi\left(\frac{1050 - 1000}{\sqrt{10000}}\right) - \phi\left(\frac{950 - 1000}{\sqrt{10000}}\right)$$
$$= \phi(0.5) - \phi(-0.5) = 2\phi(0.5) - 1 = 2 \times 0.691 - 1 = 0.382$$

■

Bài 51.7

Một đội bóng chày chơi 100 trận độc lập. Xác suất chiến thắng mỗi trận là 0.8. Tính xác suất đội sẽ giành chiến thắng ít nhất 90 trận.

Bài giải

Gọi X là số trận thắng của đội.
Khi đó, $X \sim B(100, 0.8)$.
Hơn nữa, ta thấy:

$$\begin{aligned} p &= 0.8 \in (0.1, 0.9) \\ np &= 100(0.8) = 80 \geq 5 \\ np(1-p) &= 100(0.8)(0.2) = 16 \geq 5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow X \sim N(80, 16)$
Do đó, xác suất đội sẽ giành chiến thắng ít nhất 90 trận là:

$$\begin{aligned} P(X \geq 90) &= 1 - P(X < 90) \\ &= 1 - P(X < 89.5) \\ &\approx \phi\Big(\frac{89.5 - 80}{\sqrt{16}}\Big) \\ &= \phi(2.375) = 0.0088 \end{aligned}$$

■

Bài 51.9

Cho n biến ngẫu nhiên độc lập $X_1, X_2, \ldots, X_n$ có cùng kì vọng là 100 và độ lệch chuẩn là 30. X là tổng của n biến ngẫu nhiên trên. Tìm n sao cho $P(X > 2000) \geq 0.95$.

Bài giải

Ta có: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ và $E(X_i) = 100, Var(X_i) = 30^2$.
Suy ra $E(X) = 100n, Var(X) = 30^2 n$.

Do đó

$$\begin{aligned}
P(X > 2000) \geq 0.95 &\Leftrightarrow P(X \leq 2000) \leq 0.05 \\
&\Leftrightarrow P\left(\frac{X - 100n}{30\sqrt{n}} \leq \frac{2000 - 100n}{30\sqrt{n}}\right) \leq 0.05 \\
&\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{2000 - 100n}{30\sqrt{n}}\right) \leq \Phi(-1.64) \\
&\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{2000 - 100n}{30\sqrt{n}}\right) \leq \Phi(-1.64) \\
&\Leftrightarrow \frac{100n - 2000}{30\sqrt{n}} \geq 1.64 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 4.72 \\
&\Leftrightarrow \geq 22.27
\end{aligned}$$

Vậy giá trị của n ít nhất phải bằng 23 thì $P(X > 2000) \geq 0.95$.

■

Bài 51.10-chưa giải

Một tổ chức từ thiện nhận 2025 đóng góp. Đóng góp được giả định là độc lập và phân phối hệt với trung bình 3125 và độ lệch chuẩn 250. Tính gần đúng 90 phần trăm cho sự phân bố của tổng số đóng góp nhận được.

Bài giải

■

Bài 51.13

Cho X và Y là số giờ mà người được lựa chọn ngẫu nhiên xem phim ảnh và sự kiện thể thao, tương ứng trong một khoảng thời gian ba tháng. Các thông tin sau đây được biết về X và Y:
E (X) = 50, E (Y) = 20, Var (X) = 50, Var (Y) = 30, Cov(X,Y) = 10.
Một trăm người được lựa chọn ngẫu nhiên và được quan sát ba tháng. Gọi T là tổng số giờ mà những một trăm người xem phim hoặc các sự kiện thể thao trong thời gian ba tháng này. Gần đúng giá trị của Pr (T <7100).

Bài giải

E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 50 + 20 = 70.
Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 50 + 30 + 20 = 100
E(T) = 100×70 = 7000.
Var(T) = 100 × 100 = 100^2.
Pr(T<7100) = Pr($\frac{T-7000}{100} < \frac{7100-7000}{100}$) $\approx Pr(Z < 1) = 0.8413$

■

Bài 51.16

a) Tính xấp xỉ phân phối mẫu với số liệu dựa trên quan sát các biến ngẫu nhiên độc lập $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}$, $E(X_i = 100)$, $Var(X_i) = 400$
b) Tính xấp xỉ $Pr(96 \leq \overline{X} \leq 104)$

Bài giải

- câu a
$E(\overline{X}) = E\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}\right) = \dfrac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} E(X_i) = E(X_i) = 100$
$Var(\overline{X}) = Var\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}\right) = \dfrac{1}{100^2}\sum_{i=1}^{100} Var(X_i) = \dfrac{1}{100}Var(X_i) = 4$

- câu b
Áp dụng định lý giới hạn trung tâm ta có
$Pr(96 \leq \overline{X} \leq 104) = Pr\left(\dfrac{96 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}} \leq \dfrac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}} \leq \dfrac{104 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}}\right)$
$= \phi\left(\dfrac{104 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}}\right) - \phi\left(\dfrac{96 - E(\overline{X})}{\sqrt{Var(\overline{X})}}\right) = \phi\left(\dfrac{104 - 100}{\sqrt{4}}\right) - \phi\left(\dfrac{96 - 100}{\sqrt{4}}\right)$
$= \phi(2) - \phi(-2) = 2\phi(2) - 1 = 2 \times 0.977 - 1 = 0.954$

■

Bài 51.17

Một đồng xu không cân đối có 30% là xuất hiện mặt ngửa. Tung đồng xu 400 lần. Đặt X là số lần đồng xu xuất hiện mặt ngửa trong 400 lần tung.
(a) Dùng BĐT Chebyshev tìm một chặn cho xác suất X nằm trong khoảng từ 100 đến 140
(b) Dùng xấp xỉ chuẩn để tính xác suất X nằm trong khoảng từ 100 đến 140.

Bài giải

Ta có $X \sim B(400, 0.3)$.
Khi đó, $E(X) = 120$ và $Var(X) = 400(0.3)(0.7) = 84$.
(a) Áp dụng BĐT chebyshev, ta có:

$$P(|X - 120| \leq 20) = 1 - P(|X - 120| > 20) \leq \frac{84}{20^2} = 0.79$$

(b) Ta tìm $P(100 \leq X \leq 140)$ dựa vào xấp xỉ chuẩn.
$\mu = E(X) = 120$ và $\sigma^2 = Var(X) = 84 \Rightarrow \sigma = 9.165$
$X \sim N(120, 84)$.
Khi đó,

$$\begin{aligned} P(100 \leq X \leq 140) &= P\Big(\frac{100-120}{9.165} < \frac{X-120}{9.165} < \frac{140-120}{9.165}\Big) \\ &\approx P(-2.182 < Z < 2.182) \\ &= \phi(2.182) - \phi(-2.182) \\ &= 0.9709 \end{aligned}$$

■

Bài 52.2

Tìm cận Chernoff cho một biến ngẫu nhiên X có phân phối nhị thức với tham số (n, p)

<u>*Bài giải*</u>

$$f(x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

$$M(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^t)^x (1-p)^{n-x} = (pe^t + 1 - p)^n$$

* $P(X \geqslant a) \leqslant e^{-ta} M(t) = e^{-ta}(pe^t + 1 - p)^n, \quad t > 0$

* $P(X \leqslant a) \leqslant e^{-ta} M(t) = e^{-ta}(pe^t + 1 - p)^n, \quad t > 0$

■

Bài 52.3-chưa giải

Giả sử rằng số trung bình của các trẻ em bị bệnh trong một lớp pre - k là ba mỗi ngày. Giả sử rằng phương sai của các số trẻ em bị bệnh ở các lớp trong một ngày là 9. Hãy cho một ước tính xác suất để ít nhất ve đứa trẻ sẽ bị bệnh vào ngày mai.

<u>*Bài giải*</u>

■

Bài 52.6

Cho X là một biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình 20.

1. Sử dụng bất đẳng thức của Markov để có được một giới hạn trên p = Pr($X \geq 26$)
2. Sử dụng giới hạn Chernoff để có được một giới hạn trên p

Bài giải

1. Theo bất đẳng thức của Markov: $P(X \geq 26) \leq \frac{E(X)}{26} = \frac{10}{13}\mu 0.7692$
2. $\mu = \lambda = 20; \sigma^2 = \lambda = 20$
   $P(X \geq 26) = P(X \geq 25.5) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{25.5-\mu}{\sigma}) = P(Z \geq 1.2298) \approx 0.1094$

■

Bài 52.9

Giả sử $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là tập các số dương. Chứng minh rằng

$$(x_1.x_2...x_n)^{\frac{2}{n}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}$$

Bài giải

Đặt X là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị $\{x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\}$ với xác suất $Pr(X = x_i^2) = \dfrac{1}{n}$ với $1 \leq i \leq n$. Đặt $g(X) = ln(X = x_i^2)$

Ta có bảng phân phối xác suất như sau

X	x_1^2	x_2^2	...	x_n^2
$Pr(X = x_i^2)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$
$g(X) = ln(X = x_i^2)$	$ln(x_1^2)$	$ln(x_2^2)$	...	$ln(x_n^2)$

Theo bảng phân phối xác suất trên ta tính được

$E(X) = \frac{1}{n}x_1^2 + \frac{1}{n}x_2^2 + ... + \frac{1}{n}.x_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2$

$E[g(X)] = E[ln(X = x_i^2)] = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n ln(x_i^2) = \dfrac{2}{n}ln(x_1.x_2....x_n)$

$g[E(X)] = ln[E(X)] = ln(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2) = ln\dfrac{1}{n}.(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$

Vì $-ln(X = x_i^2)$ là hàm lồi nên $g(X) = ln(X = x_i^2), X > 0$ là hàm lõm.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$E[g(X)] \leq g[E(X)]$$
$$\Rightarrow \frac{2}{n}ln(x_1.x_2....x_n) \leq ln\frac{1}{n}.(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$$

$\Rightarrow ln\,(x_1.x_2....x_n)^{\frac{2}{n}} \leq ln\frac{1}{n}.(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$

$\Rightarrow (x_1.x_2....x_n)^{\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{n}.(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$

Vậy $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là tập các số dương ta có $(x_1.x_2...x_n)^{\frac{2}{n}} \leq \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}$

■

Bài 52.9

Giả sử x1, x2, • • •, xn là một tập hợp các số dương. Chứng minh
$(x_1.x_2....x_n) \leqslant \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}$

Bài giải

Đặt X là một biến ngẫu nhiên để $P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}$ với $1 \leqslant x \leqslant n$
Đặt $g(x) = lnx^2$. Sử dụng bất đẳng thức Jensen's chúng ta có X>0
$E[-ln(X^2)] \geqslant -ln[E(X^2)]$
$\Rightarrow E[ln(X^2)] \geqslant ln[E(X^2)]$
$E[ln(X^2)] = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnx_i^2 = \dfrac{1}{n}ln(x_1.x_2...x_n)^2$
Và $ln[E(X^2)] = ln(\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n})$
$\Rightarrow ln(x_1.x_2.....x_n)^{\frac{2}{n}} \leqslant ln(\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n})$
$\Rightarrow (x_1.x_2.....x_n)^{\frac{2}{n}} \leqslant (\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n})$

■

Bài 53.1

Xét một chính sách với khoản khấu trừ là 200 và giới hạn mức lợi nhuận là 5000. Công ty bảo hiểm sẽ chi trả 90% mức độ tổn thất của khấu trừ của chủ thể như là quyền lợi.
(a) Công ty bảo hiểm sẽ nhận được bao nhiêu nếu chủ thể bị tổn thất là 4000?
(b) Công ty bảo hiểm sẽ nhận được bao nhiêu nếu chủ thể bị tổn thất là 5750?
(c) Công ty bảo hiểm sẽ nhận được bao nhiêu nếu chủ thể bị tổn thất là 5780?

Bài giải

(a) Công ty bảo hiểm sẽ nhận đươc: $(4000 - 200)(0.9) = 3420$
(b) Công ty bảo hiểm sẽ nhận được: $(5750 - 200)(0.9) = 4995$
(c) Công ty bảo hiểm sẽ nhận được: $(5780 - 200)(0.9) = 5020$, nhưng do mức lợi nhuận giới hạn là 5000 nên tóm lại công ty sẽ nhận được 5000.

■

Bài 53.3

Báo cáo về thiệt hại ô tô của 1 công ty bảo hiểm là độc lập và có phân phối đều trên $[0, 20000]$. Mỗi trường hợp thiệt hại được công ty khấu trừ 5000. Tính xác suất tổng tiền khấu trừ cho 200 ô tô bị thiệt hại nằm trong khoảng 1000000 đến 1200000.

Bài giải

Vì lượng chi trả cho thiệt hại là lớn (bao gồm cả trường hợp chi trả là 0 khi thiệt hại dưới mức khấu trừ) và các thiệt hại là độc lập, cùng phân phối, ta có thể áp dụng Định lý Giới hạn trung tâm và giả sử rằng tổng số tiền thanh toán S có phân phối chuẩn. Vì mức khấu trừ là 5000 nên nếu thiệt hại bé hơn 5000 thì công ty bảo hiểm không phải trả bất kỳ một khoảng nào, tương ứng với xác suất 0.25, nếu thiệt hại trong khoảng từ 5000 đến 20000 thì công ty bảo hiểm phải trả 1 khoảng phí tương ứng với mức thiệt hại, với xác suất 0.75. Tổng phí bồi thường thiệt hại mà công ty phải chi trả có phân phối đều trên $[0, 15000]$.
Gọi X là tổng phí bồi thường thiệt hại, ta có

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0.25 \times 0 + 0.75 \times \frac{15000 + 0}{2} = 5625. \\
E(X^2) &= 0.25 \times 0^2 + 0.75 \times \left(7500^2 + \frac{15000^2}{12}\right) = 56250000. \\
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 24609375.
\end{aligned}$$

Áp dụng định lý giới hạn trung tâm, ta có

$$\begin{aligned}
P(1000000 < S < 1200000) &= P\left(\frac{1000000 - 200 \times 5625}{\sqrt{200 \times 24609375}} < \frac{S - 200 \times 5625}{\sqrt{200 \times 24609375}} < \frac{1200000 - 200 \times 5625}{\sqrt{200 \times 24609375}}\right) \\
&\approx P(-1.7817 < Z < 1.0690) = \Phi(1.0690) - \Phi(-1.7817) \\
&= \Phi(1.0690) + \Phi(1.7817) - 1 \\
&\approx 0.8577 + 0.9625 - 1 = 0.8202.
\end{aligned}$$

■

Bài 54.4-chưa giải

Lượng một tuyên bố rằng một công ty bảo hiểm xe hơi trả tiền ra sau một phân phối mũ. Bằng cách áp đặt một khoản khấu trừ của d; các công ty bảo hiểm làm giảm thanh toán bồi thường dự kiến 10 %. Tính giảm tỷ lệ phần trăm trên các phương sai của việc thanh toán bồi thường.

<u>*Bài giải*</u>

■