# VÉC TƠ NGẪU NHIÊN

Nguyễn Văn Thìn

BỘ MÔN THỐNG KÊ TOÁN HỌC
KHOA TOÁN - TIN HỌC
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN TP.HCM

Tháng 2 năm 2016

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

## Outline



VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

## Outline

1 VT NN
2 VT NN RR
3 VT NN LT
4 PP lề, sự ĐL của các BNN.
5 Hàm của VT NN
6 KV, moment, sự TQ
- Kỳ vọng
- Moment
- Sự tương quan
7 PP và KV có ĐK
- PP có ĐK
- KV có ĐK
8 Hàm sinh Moment

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

## Vector ngẫu nhiên

**Định nghĩa 1**

Một bộ có thứ tự $(X_1, \dots, X_n)$ của $n$ biến ngẫu nhiên $X_1, \dots, X_n$ được gọi là một vector ngẫu nhiên $n$ chiều.

**Định nghĩa 2**

Hàm

$$\begin{aligned} F_{X_1,\dots,X_n} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow [0,1] \\ (x_1,\dots,x_n) &\longmapsto P(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n) = P(\omega \in \Omega : X_1(\omega) \le x_1,\dots,X_n(\omega) \le x_n) \end{aligned}$$

được gọi là hàm phân phối đồng thời của vector ngẫu nhiên $(X_1, \dots, X_n)$.

## Outline



VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh Moment

## Vector ngẫu nhiên rời rạc

Bây giờ, ta xét trường hợp vector ngẫu nhiên hai chiều rời rạc có hữu hạn giá trị. Để biểu diễn các giá trị $f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \quad \forall i = 1, \dots, m$ và $j = 1, \dots, n$, người ta thường viết dưới dạng bảng phân phối xác suất như sau:

| X \ Y | $y_1$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ | $y_n$ | Tổng dòng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f(x_1, y_1)$ | $\cdots$ | $f(x_1, y_j)$ | $\cdots$ | $f(x_1, y_n)$ | $f(x_1, \bullet)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $f(x_i, y_1)$ | $\cdots$ | $f(x_i, y_j)$ | $\cdots$ | $f(x_i, y_n)$ | $f(x_i, \bullet)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_m$ | $f(x_m, y_1)$ | $\cdots$ | $f(x_m, y_j)$ | $\cdots$ | $f(x_m, y_n)$ | $f(x_m, \bullet)$ |
| Tổng cột | $f(\bullet, y_1)$ | $\cdots$ | $f(\bullet, y_j)$ | $\cdots$ | $f(\bullet, y_n)$ | 1 |

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

## Vector ngẫu nhiên rời rạc - Ví dụ

**Ví dụ 3**

Tung ngẫu nhiên 3 đồng xu 1, 2, 3. Gọi $X$ là số mặt ngửa xuất hiện ở hai đồng xu 1, 2; $Y$ là số mặt ngửa xuất hiện ở cả ba đồng xu.
Lập bảng phân phối xác suất (đồng thời) của $(X, Y)$.

Giải.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

## Vector ngẫu nhiên rời rạc - Phân phối đa thức

Dưới đây là một ví dụ về vector ngẫu nhiên rời rạc nhiều chiều.

**Ví dụ 4 (Phân phối đa thức)**

Giả sử $n$ phép thử giống nhau và độc lập được thực hiện, mỗi phép thử có thể xảy ra một trong $r$ kết quả, với xác suất tương ứng $p_1, p_2, \dots, p_r, \sum_{i=1}^r p_i = 1$. Nếu ta đặt $X_i$ là số phép thử trong $n$ phép thử xảy ra kết quả $i$, thì

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_r = n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r} \tag{1}$$

với $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Phân phối đồng thời có hàm xác suất đồng thời được xác định như phương trình (1) được gọi là *phân phối đa thức*. Chú ý rằng khi $r = 2$, phân phối đa thức suy giảm về phân phối nhị thức.

## Vector ngẫu nhiên rời rạc - Phân phối đa thức

### Chứng minh (1)

Một dãy bất kỳ các kết quả của $n$ phép thử độc lập có kết quả $i$ xuất hiện $n_i$ lần với $i = 1, 2, \ldots, r$ sẽ có xác suất xuất hiện là $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$. Hơn nữa, có $n!/(n_1!n_2! \ldots n_r!)$ dãy kết quả như vậy (có $n!/(n_1!n_2! \ldots n_r!)$ hoán vị khác nhau của $n$ kết quả trong đó $n_1$ kết quả giống nhau, $n_2$ kết quả giống nhau,..., $n_r$ kết quả giống nhau). Do đó, ta có phương trình (1)

### Nhận xét 5

Tổng của một tập bất kỳ các $X_i$ sẽ có phân phối nhị thức. Tức là, nếu $N \subset \{1, 2, \ldots, r\}$, thì $\sum_{i \in N} X_i$ là biến ngẫu nhiên nhị thức với các tham số $n$ và $p = \sum_{i \in N} p_i$. Điều này là do $\sum_{i \in N} X_i$ là số phép thử có kết quả thuộc tập $N$, và mỗi phép thử độc lập có kết quả như vậy với xác suất $\sum_{i \in N} p_i$.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh Moment

## Vector ngẫu nhiên rời rạc - Phân phối đa thức

### Ví dụ 6 (Phân phối đa thức)

Giả sử một con xúc sắc cân đối được tung 9 lần. Xác suất mặt 1 xuất hiện ba lần, mặt 2 và 3 mỗi mặt xuất hiện hai lần, mặt 4 và 5 mỗi mặt một lần, và mặt 6 không xuất hiện là bao nhiêu?

Giải.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

## Outline



VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

## Vector ngẫu nhiên liên tục

### Định nghĩa 7

Vector ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ được gọi là liên tục tuyệt đối nếu tồn tại hàm $f_{X_1,\ldots,X_n}$ không âm thỏa một trong hai điều kiện sau

(i) $P\left[(X_1, \ldots, X_n) \in B\right] = \int \cdots \int_B f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

(ii) Với mọi số thực $a_1, \ldots, a_n$,

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1$$

Hàm $f_{X_1,\ldots,X_n}$ được gọi là hàm mật độ xác suất của vector ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$

**Nhận xét 8**

- Mọi hàm $f(x, y)$ không âm và thỏa $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$ đều là hàm mật độ xác suất của một vector ngẫu nhiên $(X, Y)$ nào đó.
- Nếu ta biết $F_{X,Y}$ và $F_{X,Y}$ khả vi thì hàm mật độ xác suất

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn

## Outline



## Phân phối lề

Nếu biết được phân phối xác suất của một vector ngẫu nhiên thì ta cũng xác định được phân phối của các biến ngẫu nhiên thành phần. Các phân phối này gọi là phân phối lề.

**Định nghĩa 9**

Trường hợp vector ngẫu nhiên rời rạc.
Giả sử vector ngẫu nhiên $(X, Y)$ có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{X,Y}(x, y)$ thì hàm mật độ xác suất lề của $X$ và $Y$ là

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$
$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

## Phân phối lề

**Định nghĩa 10**

Trường hợp vector ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối.
Cho vector ngẫu nhiên $(X, Y)$ có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{X,Y}(x, y)$. Hàm mật độ xác suất lề và hàm phân phối lề của $X$ và $Y$ được xác định như sau:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx$$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v)\, dvdu$$
$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v)\, dudv$$

## Phân phối lề - Ví dụ

**Ví dụ 11**

Cho vector ngẫu nhiên $(X, Y)$ có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{nếu } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ lề và phân phối lề của $X$ và $Y$.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

## Sự độc lập

**Định nghĩa 12**

Các biến ngẫu nhiên $X_1, \ldots, X_n$ được định nghĩa trên cùng không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ được gọi là độc lập nếu

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \ldots P(X_n \in B_n) \quad \forall B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

**Định nghĩa 13**

Họ các biến ngẫu nhiên $(X_i)_{i \in I}$ được gọi là độc lập nếu với mọi họ con hữu hạn $(X_i)_{i \in J \subset I}$ là độc lập.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

## Sự độc lập

**Định lí 14**

*Cho $(X_1, \ldots, X_n)$ là vector ngẫu nhiên liên tục. Khi đó, $X_1, \ldots, X_n$ độc lập nếu và chỉ nếu*

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n) \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

**Bổ đề 15**

*Cho $(X_1, \ldots, X_n)$ là một vector ngẫu nhiên liên tục. Khi đó, $X_1, \ldots, X_n$ độc lập nếu và chỉ nếu tồn tại các hàm $g_1, \ldots, g_n$ sao cho*

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \ldots g_n(x_n) \quad \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

## Chứng minh Định lí 14

($\Rightarrow$) Vì $X_1, \ldots, X_n$ độc lập nên hàm phân phối đồng thời của $X_1, \ldots, X_n$ có thể được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \\ &= P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n) \\ &= F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm riêng theo tất cả các biến $x_1, \ldots, x_n$, ta được hàm mật độ đồng thời

$$\begin{aligned} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\partial^n F_{X_1,\ldots,X_n}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \frac{\partial F_{X_1}}{x_1}(x_1) \cdots \frac{\partial F_{X_n}}{\partial x_n}(x_n) \\ &= f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

## Chứng minh Định lí 14 (tt)

($\Leftarrow$) Với mọi $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) &= \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)dx_n \cdots dx_1 \\ &= \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n)dx_n \cdots x_1 \\ &= P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n) \end{aligned}$$

Vậy $X_1, \dots, X_n$ độc lập.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

## Chứng minh Bổ đề 15

($\Rightarrow$) Chọn $g_i \equiv f_{X_i}$ với mọi $i = 1, \dots, n$. ($\Leftarrow$) Đặt $c_i = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(x_i)dx_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Các $c_i$ có tính chất

$$\begin{aligned} c_1 \dots c_n &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x_1)dx_1\right) \dots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x_n)dx_n\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x_1) \dots g_n(x_n)dx_1 \dots x_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1 \dots x_n \\ &= 1 \end{aligned}$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

## Chứng minh Bổ đề 15 (tt)

Hàm mật độ lề của các $X_i$ là

$$\begin{aligned} f_{X_i}(x_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1 \dots dx_{i-1}dx_{i+1} \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x_1) \cdots g_n(x_n)dx_1 \dots dx_{i-1}dx_{i+1} \dots dx_n \\ &= (c_1 \dots c_{i-1}c_{i+1} \dots c_n)g_i(x_i) \\ &= \frac{1}{c_i}g_i(x_i) \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) &= g_1(x_1) \dots g_n(x_n) \\ &= \frac{1}{c_1}g_1(x_1) \dots \frac{1}{c_n}g_n(x_n) \\ &= f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vậy, theo định lí 14, $X_1, \dots, X_n$ độc lập.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

## Sự độc lập

**Định lí 16**

*Nếu $X_1, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và $g_1, \dots, g_n$ là các hàm đo được thì $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.*

**Chứng minh.**

Với mọi $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & P(g_1(X_1) \in B_1, \dots, g_n(X_n) \in B_n) \\ = \; & P(X_1 \in B'_1, \dots, X_n \in B'_n) \quad \text{với } B'_1, \dots, B'_n \text{ nào đó} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ = \; & P(X_1 \in B'_1) \dots P(X_n \in B'_n) \\ = \; & P(g_1(X_1) \in B_1) \dots P(g_n(X_n) \in B_n) \end{aligned}$$

$\square$

## Sự độc lập

### Ví dụ 17

Hãy kiểm tra sự độc lập của $X_1$ và $X_2$ nếu

(a)

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2 & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

(b)

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

## Tổng hai biến ngẫu nhiên

### Định lí 18

*Cho $X_1, X_2$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập có hàm phân phối lần lượt là $F_1$ và $F_2$. Khi đó, hàm phân phối của tổng $X_1 + X_2$ được xác định bởi*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-u)dF_2(u) \tag{2}$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

### Chứng minh.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X_1 + X_2 \le x) \\ &= \iint_{t+u\le x} f_{X_1,X_2}(t,u)dtdu \\ &= \iint_{t+u\le x} f_{X_1}(t)f_{X_2}(u)dtdu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x-u} f_{X_1}(t)f_{X_2}(u)dtdu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(u)F_1(x-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-u)dF_2(u) \end{aligned}$$

□

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

## Tổng hai biến ngẫu nhiên

### Hệ quả 19

*Cho $X_1, X_2$ là hai biến ngẫu nhiên độc lập có hàm mật độ lần lượt là $f_1$ và $f_2$. Khi đó, hàm mật độ của tổng $X_1 + X_2$ được xác định bởi*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)f_2(u)du \tag{3}$$

### Chứng minh.

Lấy đạo hàm theo $x$ hai vế của (2), ta được

$$f(x) = F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_1}{dx}(x-u)f_2(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)f_2(u)du$$

□

## Tổng hai biến ngẫu nhiên



**Ví dụ 20**

Cho 2 biến ngẫu nhiên $X_1, X_2$ độc lập nhau và có cùng phân phối đều trên khoảng $[0,1]$. Tìm hàm mật độ xác suất của $Y = X_1 + X_2$?

## Outline

VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment



## Hàm của vectơ ngẫu nhiên

VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Định lí 21**

*Giả sử $g$ là 1 ánh xạ khả nghịch xác định trên 1 tập mở của $\mathbb{R}^n$ chứa giá trị của vectơ ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Trong đó, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là vectơ ngẫu nhiên liên tục tuyệt đối có hàm mật độ đồng thời $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}$. Giả sử $h = g^{-1}$ là ánh xạ khả vi liên tục với Jacobian $\neq 0$. Khi đó vectơ ngẫu nhiên $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ có hàm mật độ đồng thời là:*

$$f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(h(y_1, y_2, \ldots, y_n)) \left|\det \nabla h(y_1, y_2, \ldots, y_n)\right|$$

*Trong đó,*

$$\nabla h(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} g : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & (y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & U \\ (y_1, y_2, \ldots, y_n) & \longmapsto & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}$$

## Hàm của vectơ ngẫu nhiên

VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Ví dụ 22**

Cho $X, Y$ là các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, $X \sim U(0,1)$. Tìm hàm mật độ đồng thời của $(U, V) = (X, XY)$

**Giải**

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases}$$

Vì $X, Y$ độc lập, cùng phân phối nên

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x) f_Y(y) \\ &= \begin{cases} 1 & (x, y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0 & (x, y) \notin (0,1) \times (0,1) \end{cases} \end{aligned}$$

### Giải (tt)

Đặt

$$\begin{aligned} g : (0,1) \times (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) = (x, xy) \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u, v) &\longmapsto \left(u, \frac{v}{u}\right) \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\nabla h(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad |\det \nabla h(u, v)| = \left|\frac{1}{u}\right|$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

### Giải (tt)

Áp dụng định lí 21,

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(h(u, v)) \left|\frac{1}{u}\right| = f_{X,Y}\left(u, \frac{v}{u}\right) \frac{1}{|u|}$$

Vậy

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \begin{cases} \dfrac{1}{|u|} & 0 < u < 1, 0 < \dfrac{v}{u} < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{u} & 0 < v < u < 1 \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases} \end{aligned}$$

## Hàm của vectơ ngẫu nhiên

### Phân phối chuẩn nhiều chiều

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

Phân phối chuẩn một chiều có hai tham số là $\mu$ và $\sigma^2$. Trong phiên bản nhiều chiều, $\mu$ là một vector và $\sigma^2$ được thay bằng một ma trận $\Sigma$. Gọi

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}$$

với $Z_1, \ldots, Z_k \sim N(0, 1)$ là độc lập. Hàm mật độ của $Z$ là

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{j=1}^{k} f(z_j) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} z_j^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} exp\left\{-\frac{1}{2} z^T z\right\}. \end{aligned}$$

## Hàm của vectơ ngẫu nhiên

### Phân phối chuẩn nhiều chiều

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

Hàm mật độ của $Z$ là

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{j=1}^{k} f(z_j) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} z_j^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} exp\left\{-\frac{1}{2} z^T z\right\}. \end{aligned}$$

Ta nói rằng $Z$ có *phân phối chuẩn tắc nhiều chiều*, và viết $Z \sim N(0, I)$ với 0 là một vector không $k$ chiều và $I$ là ma trận đơn vị $k \times k$.

## Hàm của vectơ ngẫu nhiên
### Phân phối chuẩn nhiều chiều

Đặt $X = \Sigma^{1/2} Z + \mu$, với $\mu$ là một vector $k$ chiều, $\Sigma = \Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}$ là một ma trận đối xứng, xác định dương. Bây giờ ta sẽ tìm hàm mật độ đồng thời $f_X(x; \mu, \Sigma)$ của $X$. Đặt

$$h(x) = \Sigma^{-1/2}(x - \mu)$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} Z &= h(X), \\ \nabla h(x) &= \Sigma^{-1/2}, \\ det(\nabla h(x)) &= det(\Sigma^{-1/2}) = det(\Sigma)^{-1/2} \equiv |\Sigma|^{-1/2}. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý (21), ta được

VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh Moment

## Hàm của vectơ ngẫu nhiên
### Phân phối chuẩn nhiều chiều

Áp dụng Định lý (21), ta được

$$\begin{aligned} f_X(x; \mu, \Sigma) &= f_Z(h(x))|det(\nabla h(x))| \\ &= f_Z(\Sigma^{-1/2}(x-\mu))|\Sigma|^{-1/2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \end{aligned}$$

Ta nói rằng $X$ có *phân phối chuẩn nhiều chiều*, và viết $X \sim N(\mu, \Sigma)$. Khi $\mu = 0$ và $\Sigma = I$ thì ta được phân phối chuẩn tắc nhiều chiều.

VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

## Outline



VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

## Kỳ vọng của hàm theo vector ngẫu nhiên

**Định lí 23**

*Nếu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là vector ngẫu nhiên rời rạc, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đo được thì*

$$\begin{aligned} &E\left(g\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right) \\ &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\ &= \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\right) \end{aligned}$$

*theo nghĩa nếu một trong hai vế tồn tại thì vế kia cũng tồn tại và bằng nhau.*

## Kỳ vọng của hàm theo vector ngẫu nhiên



**Định lí 24**

*Nếu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là vector ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời $f_{X_1,\ldots,X_n}$ và $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm đo được thì*

$$E\left(g\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 \ldots dx_n$$

*theo nghĩa nếu vế này tồn tại thì vế kia cũng tồn tại và bằng nhau.*

## Moment

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

**Định nghĩa 25**

Moment cấp $k$ của biến ngẫu nhiên $X$ là giá trị $\alpha_k = E\left(X^k\right)$ ($k$ không nhất thiết nguyên) nếu kỳ vọng bên phải tồn tại. Đặc biệt, $\alpha_1$ chính là kì vọng của $X$ và thường được kí hiệu là $m$ hoặc $\mu$

**Định nghĩa 26**

Cho biến ngẫu nhiên $X$ có kì vọng, $m$, hữu hạn. Khi đó, moment trung tâm cấp $k\,(k > 0)$ của $X$ là

$$\beta_k = E\left(X - m\right)^k$$

nếu kỳ vọng phía bên phải tồn tại.
Đặc biệt, $\beta_2$ chính là phương sai của $X$ và thường được kí hiệu là $\sigma^2$.

## Moment đồng thời, moment trung tâm đồng thời

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Định nghĩa 27**

Moment đồng thời của $X_1, X_2$ là đại lượng

$$\alpha_{jk} = E\left(X_1^j X_2^k\right) \quad j, k > 0$$

Moment trung tâm đồng thời là

$$\beta_{jk} = E\left[\left(X_1 - EX_1\right)^j \left(X_2 - EX_2\right)^k\right]$$

## Hiệp phương sai

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Đặc biệt**

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= E\left[\left(X_1 - EX_1\right)\left(X_2 - EX_2\right)\right] \\
&= E\left[X_1X_2 - X_1E\left(X_2\right) - X_2E\left(X_1\right) + E\left(X_1\right)E\left(X_2\right)\right] \\
&= E\left(X_1X_2\right) - E\left(X_1\right)E\left(X_2\right)
\end{aligned}$$

được gọi là hiệp phương sai của hai biến ngẫu nhiên $X_1, X_2$ và kí hiệu là $\mathbb{C}ov\left(X_1, X_2\right)$

## Hiệp phương sai



**Mệnh đề 28 (Một số tính chất của hiệp phương sai)**

(i) *Nếu $X$ và $Y$ độc lập thì* $\mathbb{C}ov(X, Y) = 0$.
(ii) $\mathbb{C}ov\,(X, Y) = \mathbb{C}ov\,(Y, X)$
(iii) $\mathbb{C}ov\,(X, X) = \mathbb{V}ar\,(X)$
(iv) $\mathbb{C}ov\,(aX + bY, Z) = a\mathbb{C}ov\,(X, Z) + b\mathbb{C}ov(Y, Z)$ *với* $a$, $b$ *là các hằng số.*

**Chứng minh.**

Sử dụng định nghĩa hiệp phương sai. □

## Sự tương quan

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

**Bổ đề 29**

*Cho biến ngẫu nhiên $X$ không âm thỏa $EX = 0$. Khi đó, $P(X = 0) = 1$.*

Ta chỉ cần chứng minh rằng $P(X > 0) = 0$. Thật vậy, do $(X > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \geq 1/n)$. Theo tính liên tục của xác suất,

$$P(X > 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \geq 1/n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(X \geq 1/n)$$

Mặt khác,

$$0 \leq P(X \geq 1/n) = \int_{1/n}^{\infty} x f_X(x)dx \leq \int_0^{\infty} x f_X(x)dx = EX = 0$$

Do đó, $P(X > 0) = 0$.

## Sự tương quan

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Định lí 30**

*Nếu $X, Y$ là các biến ngẫu nhiên có các moment cấp 2 thì tồn tại $E(XY)$ và*

(i) $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.
(ii) *Đẳng thức $(E(XY))^2 = E(X^2)E(Y^2)$ xảy ra nếu và chỉ nếu $\exists t \in \mathbb{R}$ sao cho $P(tX + Y = 0) = 1$ hoặc $P(X + tY = 0) = 1$.*

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Chứng minh**

(i) Từ bất đẳng thức Cauchy - Schwartz $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ta suy ra, nếu $X, Y$ là các biến ngẫu nhiên rời rạc,

$$\begin{aligned}\sum_i\sum_j |x_iy_j| f_{X,Y}(x_i, y_j) &\leq \frac{1}{2}\sum_i\sum_j (x_i^2 + y_j^2) f_{X,Y}(x_i, y_j)\\ &= \frac{1}{2}E(X^2 + Y^2) = \frac{1}{2}(E(X^2) + E(Y^2)) < \infty\end{aligned}$$

Vậy nếu tồn tại $E(X^2)$, $E(Y^2)$ thì tồn tại $E(XY)$.
Khi $X, Y$ liên tục việc chứng minh tương tự, chỉ thay các dấu tổng bằng các dấu tích phân.
Với mọi $t \in \mathbb{R}$ ta xét tam thức bậc 2 theo $t$:

$$0 \leq E(tX + Y)^2 = t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

tức là, $\Delta' = (E(XY))^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$, và do đó $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.

### Chứng minh (tt)

(ii) ($\Leftarrow$) Hiển nhiên. Vì khi đó tồn tại $t$ sao cho tam thức bậc 2 bằng không. Do đó, $\Delta' = 0$ tức là ta có đẳng thức xảy ra.
($\Rightarrow$) Khi $(E(XY))^2 = E(X^2)E(Y^2)$ suy ra $\Delta' = 0$, nên tam thức bậc 2 theo $t$ có nghiệm kép $t_0$ và lúc đó $E(t_0X + Y)^2 = 0$. Vì $(t_0X + Y)^2 \geq 0$ nên theo bổ đề 29 thì $P(t_0X + Y = 0) = 1$.
Khi bắt đầu từ $0 \leq E(X + tY)^2$, ta có nếu $(E(XY))^2 = E(X^2)E(Y^2)$ thì $\exists t_1 \in \mathbb{R}$ để $P(X + t_1Y = 0) = 1$.

## Sự tương quan

### Định nghĩa 31

Hệ số tương quan giữa hai biến ngẫu nhiên $X$ và $Y$ được xác định bởi công thức

$$r(X,Y) = \frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

### Mệnh đề 32

(i) $|r(X,Y)| \leq 1$.
(ii) $r(X,Y) = 1$ *khi và chỉ khi có* $a > 0 (a \in \mathbb{R})$ *sao cho* $Y - EY = a(X - EX)$ *hầu khắp nơi.*
(iii) $r(X,Y) = -1$ *khi và chỉ khi có* $b < 0 (b \in \mathbb{R})$ *sao cho* $Y - EY = b(X - EX)$ *hầu khắp nơi.*
(iv) *Nếu* $X$ *và* $Y$ *độc lập thì* $r(X,Y) = 0$.

### Chứng minh.

(i) Áp dụng định lí 30 (i), ta được $Cov(X,Y)^2 = E[(X - EX)(Y - EY)]^2 \leq E(X - EX)^2E(Y - EY)^2 = Var(X)Var(Y)$ tức là, $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$ và ta có đpcm.
(ii) ($\Rightarrow$) Giả sử $r(X,Y) = 1$, thì $r(X,Y)^2 = 1$. Theo định lí 30(ii) thì tồn tại $a$ sao cho $Y - EY = a(X - EX)$ (hầu khắp nơi). Vì $r(X,Y) = 1$ nên $0 < Cov(X,Y) = E[(X - EX)(a(X - EX))] = aE[(X - EX)^2]$. Do đó $a > 0$.
($\Leftarrow$) Nếu $Y - EY = a(X - EX)$ với $a > 0$. Khi đó, $r(X,Y)^2 = 1$. Mặt khác, $Cov(X,Y) = E[(X - EX)a(X - EX)] = aVar(X) > 0$ nên $r(X,Y) > 0$. Do đó, $r(X,Y) = 1$.
(iii) Tương tự (ii)
(iv) Nếu $X$ và $Y$ độc lập thì $E(XY) = EXEY$. Do đó, $Cov(X,Y) = 0$ và ta có đpcm.

□

### Nhận xét 33

Hệ số tương quan là số đo mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa hai biến ngẫu nhiên. Nếu $|r(X,Y)|$ càng gần 1 thì mức độ phụ thuộc giữa chúng càng chặt. Nếu $r(X,Y) > 0$, $X$ và $Y$ có liên hệ thuận chiều ; nếu $r(X,Y) < 0$, $X$ và $Y$ có liên hệ ngược chiều; $r(X,Y)$ càng gần 0 thì sự phụ thuộc càng lỏng lẻo. Nếu hai biến độc lập thì $r(X,Y) = 0$. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng (chẳng hạn, $X \sim N(0,1)$ và $Y = X^2 - 1$).

## Outline





## Phân phối có điều kiện

**Định nghĩa 34**

Cho $X, Y$ là hai biến ngẫu nhiên rời rạc, hàm xác suất có điều kiện của $Y$ khi biết $X$ nhận giá trị $x$, ký hiệu $f_{Y|X}(y|x)$, được xác định bởi:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \text{ nếu } f_X(x) > 0$$

**Định nghĩa 35**

Cho $X, Y$ là hai biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ đồng thời $f_{X,Y}(x,y)$, hàm mật độ xác suất có điều kiện của $Y$ khi biết $X$ nhận giá trị $x$, ký hiệu $f_{Y|X}(y|x)$, được xác định bởi:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \text{ nếu } f_X(x) > 0$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh Moment

## Phân phối có điều kiện

**Nhận xét 36**

Từ định nghĩa trên ta suy ra:

- Nếu $X, Y$ là biến ngẫu nhiên rời rạc thì:

$$P(Y \in B|X = x) = \sum_{y \in B} P(Y = y|X = x) = \sum_{y \in B} f_{Y|X}(y|x)$$

- Nếu $X, Y$ là biến ngẫu nhiên liên tục thì:

$$P(Y \in B|X = x) = \int_B f_{Y|X}(y|x)\, dy$$

Trong một số trường hợp ta không chỉ rõ $f_{Y|X}$ nhưng cho biết phân phối có điều kiện của $Y$ khi biết $X = x$.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

## Phân phối có điều kiện - Ví dụ

**Ví dụ 37**

Cho $X, Y$ là hai biến ngẫu nhiên có hàm mật độ đồng thời:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Tìm $P(X < 1/4 | Y = 1/3)$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh

# Phân phối có điều kiện - Ví dụ



Giải.

# Kỳ vọng có điều kiện

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh Moment

**Định nghĩa 38**

Cho hai biến ngẫu nhiên $X, Y$. Kỳ vọng có điều kiện của $Y$ khi biết $X$ nhận giá trị $x$, ký hiệu $E(Y|X=x)$, là

$$E\left(Y|X=x\right)=\begin{cases}\sum_i y_i f_{Y|X}\left(y_i|x\right) & \text{nếu } X, Y \text{ rời rạc}\\ \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}\left(y|x\right)dy & \text{nếu } X, Y \text{ liên tục}\end{cases}$$

**Nhận xét 39**

Kỳ vọng có điều kiện của $Y$ đối với $X$ ký hiệu $E\left(Y|X\right)$ là một biến ngẫu nhiên có giá trị là $E\left(Y|X=x\right)$ trên tập $\{X=x\}$

$$E\left(g\left(X,Y\right)|X=x\right)=\begin{cases}\sum g\left(x,y_i\right) f_{Y|X}\left(y_i|x\right) & \text{nếu } X, Y \text{ rời rạc}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x,y\right) f_{Y|X}\left(y|x\right)dy & \text{nếu } X, Y \text{ liên tục}\end{cases}$$

# Kỳ vọng có điều kiện - Ví dụ

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Ví dụ 40**

Cho $X\sim\mathcal{U}\left(0,1\right), Y|X=x\sim\mathcal{U}\left(x,1\right)$. Tính $E\left(Y|X=x\right), E\left(Y|X\right)$

Giải.

# Kỳ vọng có điều kiện

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK
Hàm sinh

**Định lí 41**

*Cho $X, Y$ là các biến ngẫu nhiên sao cho $E\left(X\right), E\left(Y\right)$ tồn tại. Khi đó,*

(i) $E\left(X\right)=E[E(X|Y)]$
(ii) $E[g(X,Y)]=E[E(g(X,Y)|X)]=E[E(g(X,Y)|Y)]$
(iii) $E[YE(X|Y)]=E(XY)$
(iv) $E[XE(X|Y)]=E\{[E(X|Y)]^2\}$

## Chứng minh

Ta chứng minh cho trường hợp $X, Y$ liên tục. Trường hợp $X, Y$ rời rạc chỉ cần thay các dấu tích phân bằng tổng.

(i)

$$\begin{aligned} E[E(X|Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y=y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= EX \end{aligned}$$

## Chứng minh (tt)

(ii) Vì vai trò của $X$ và $Y$ là như nhau nên ta chỉ cần chứng minh dấu bằng đầu tiên.

$$\begin{aligned} E[E(g(X,Y)|X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(g(X,Y)|X=x) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= E[g(X,Y)] \end{aligned}$$

## Chứng minh(tt)

(iii)

$$\begin{aligned} E[YE(X|Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} yE(X|Y=y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= E(XY) \end{aligned}$$

## Chứng minh (tt)

(iv)

$$\begin{aligned} E[XE(X|Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xE(X|Y=y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xE(X|Y=y) f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y=y) f_Y(y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx\right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [E(X|Y=y)]^2 f_Y(y) dy = E\{[E(X|Y)]^2\} \end{aligned}$$

## Phương sai có điều kiện

**Định nghĩa 42**

Nếu $E(X|Y)$ tồn tại thì phương sai có điều kiện của biến ngẫu nhiên $X$ đối với $Y$ được xác định bởi

$$Var(X|Y) = E\left[(X - E(X|Y))^2 |Y\right]$$

**Định lí 43**

$$Var(X) = E[Var(X|Y)] + Var[E(X|Y)]$$

VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK
Hàm sinh Moment

## Phương sai có điều kiện

**Chứng minh**

$$\begin{aligned}
E[Var(X|Y)] &= E\left\{E\left[(X - E(X|Y))^2 |Y\right]\right\} \\
&= E\left[(X - E(X|Y))^2\right] \\
&= E\left[X^2 - 2XE(X|Y) + (E(X|Y))^2\right] \\
&= E(X^2) - 2E[XE(X|Y)] + E\left\{[E(X|Y)]^2\right\} \\
&= E(X^2) - E\left\{[E(X|Y)]^2\right\} \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2 - \left(E\left\{[E(X|Y)]^2\right\} - \{E[E(X|Y)]\}^2\right) \\
&= Var(X) - Var(E(X|Y))
\end{aligned}$$

VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK

## Outline



VÉC_TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có DK
PP có DK
KV có DK

## Hàm sinh Moment

**Định nghĩa 44**

Hàm sinh moment của biến ngẫu nhiên $X$, kí hiệu $M_X(t)$, là

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

nếu kì vọng bên phải tồn tại với mọi $t$ thuộc một lân cận nào đó của 0. Tức là, tồn tại $h > 0$ sao cho với mọi $t$ thuộc $(-h, h)$, $E(e^{tX})$ tồn tại. Nếu kì vọng không tồn tại trong một lân cận của 0, ta nói rằng hàm sinh moment không tồn tại.

## Hàm sinh Moment

**Định nghĩa 45**

Hàm sinh moment của vector ngẫu nhiên $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, kí hiệu $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$, là

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E\left(e^{<\mathbf{t},\mathbf{X}>}\right) = E\left(e^{t_1X_1+\ldots+t_nX_n}\right)$$

nếu kì vọng bên phải tồn tại với mọi $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ thuộc một lân cận nào đó của 0. Nếu kì vọng không tồn tại trong một lân cận của 0, ta nói rằng hàm sinh moment không tồn tại.

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK

## Hàm sinh Moment - Ví dụ

**Ví dụ 46**

Chứng minh rằng

(a) Nếu $X \sim B(1,p)$ thì $M_X(t) = e^t p + q$.

(b) Nếu $X \sim B(n,p)$ thì $M_X(t) = \left(e^t p + q\right)^n$

(c) Nếu $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ thì $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

(d) Nếu $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ thì $M_X(t) = \dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

(e) Nếu $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ thì $M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK

Giải.

(a) $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = e^{0t}P(X=0) + e^{1t}P(X=1) = e^t p + q$.

(b)

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^t p\right)^k q^{n-k} = \left(e^t p + q\right)^n \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(e^t\lambda\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} = e^{\lambda\left(e^t-1\right)} \end{aligned}$$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự DL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK

Giải (tt).

(d)

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}dx = \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$$

(e)

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}+tx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2tx+t^2\right)+\frac{t^2}{2}}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

## Hàm sinh Moment



**Định lí 47**

*Nếu $X$ có hàm sinh moment $M_X(t)$, thì*

$$E(X^n) = M_X^{(n)}(0)$$

*trong đó,*

$$M_X^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}$$

## Hàm sinh Moment

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK

**Chứng minh**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} M_X(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} e^{tx} \right) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x e^{tx}) f_X(x) dx \\
&= E(X e^{tX}).
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = E(X e^{tX})\big|_{t=0} = EX$$

Tương tự,

$$\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0} = E(X^n e^{tX})\big|_{t=0} = E(X^n)$$

## Hàm sinh Moment - Ví dụ

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK

**Ví dụ 48**

Tìm $E(X^n)$ với $n \in \mathbb{N}$. Biết rằng

(a) $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

(b) $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK

Giải.

(a)

Giải (tt).
(b)



## Hàm sinh Moment

**Mệnh đề 49**

(i) *Nếu* $Y = aX + b$ *thì* $M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$

(ii) *Nếu* $X_1, \dots, X_n$ *là các biến ngẫu nhiên độc lập và* $S = X_1 + \cdots + X_n$ *thì*

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)\dots M_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

**Chứng minh.**

(i) $M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{(aX+b)t}\right) = e^{bt}E\left(e^{atX}\right) = e^{bt}M_X(at)$

(ii)

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left(e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1}\dots e^{tX_n}\right) \\ &= E\left(e^{tX_1}\right)\dots E\left(e^{tX_n}\right) = M_{X_1}(t)\dots M_{X_n}(t) \end{aligned}$$



## Hàm sinh Moment

**Định lí 50**

*Cho* $X, Y$ *là các biến ngẫu nhiên sao cho mọi moment đều tồn tại.*

(i) *Nếu* $X$ *và* $Y$ *có giá bị chặn (nghĩa là, hai tập* $\{x : f_X(x) > 0\}$ *và* $\{y : f_Y(y) > 0\}$ *bị chặn), thì* $F_X(u) = F_Y(u)$ *với mọi* $u$ *nếu và chỉ nếu* $E(X^r) = E(Y^r)$ *với mọi số nguyên* $r = 0, 1, 2, \dots$.

(ii) *Nếu các hàm sinh moment tồn tại và* $M_X(t) = M_Y(t)$ *với mọi* $t$ *thuộc một lân cận nào đó của 0, thì* $F_X(u) = F_Y(u)$ *với mọi* $u$.



## Hàm sinh Moment - Ví dụ

**Ví dụ 51**

Cho $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i), i = \overline{1,n}$ và $X_i$ là các biến ngẫu nhiên độc lập. Đặt $Y = X_1 + \cdots + X_n$. Tìm phân phối của $Y$.

Giải.

# Hàm sinh Moment - Ví dụ



**Ví dụ 52**

Cho $X, N$ là hai biến ngẫu nhiên thỏa $X|(N = n) \sim B(n, p), N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Tìm phân phối của $X$.

Giải.

# Hàm sinh Moment

VÉC TƠ NGẪU NHIÊN
Nguyễn Văn Thìn
VT NN
VT NN RR
VT NN LT
PP lề, sự ĐL của các BNN.
Hàm của VT NN
KV, moment, sự TQ
Kỳ vọng
Moment
Sự tương quan
PP và KV có ĐK
PP có ĐK
KV có ĐK

**Định lí 53**

*Giả sử $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên, có hàm sinh moment là $M_{X_n}(t)$. Hơn nữa, giả sử rằng*

$$\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_X(t), \quad \text{với mọi } t \text{ trong một lân cận của } 0,$$

*và $M_X(t)$ là hàm sinh moment. Khi đó, tồn tại duy nhất hàm phân phối $F_X$ có các moment được xác định bởi $M_X(t)$ và, với mọi $x$ sao cho $F_X(x)$ liên tục, ta có*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

*tức là, sự hội tụ, với $|t| < h$, của hàm sinh moment dẫn đến sự hội tụ của hàm phân phối.*