

Sheaves on subanalytic sites セミナーノート

2022 年 4 月 1 日

目次

0	Preface	1
1	Subanalytic set	1
1.1	Semi-analytic set	1
2	Sheaves on sites	1
2.1	Sites and sheaves	1
2.2	Subanalytic sites and sheaves	3

0 Preface

このノートでは, R. Prelli, Sheaves on Subanalytic Site [4] を参考にして, Subanalytic sites や, その上の層についてまとめる. また, 必要に応じて, Kashiwara-Schapira[1], [3] を参照する.

1 Subanalytic set

この節では, subanalytic set について述べる.

1.1 Semi-analytic set

2 Sheaves on sites

2.1 Sites and sheaves

この節では, Kashiwara-Schapira, Ind-sheaves [2] も合わせて参照して, 景 (site) 上の層について述べる.

層は, 位相空間 X の開集合の圏 $\text{Op}(X)$ に対して定められる. 景 (site) とは, 任意の圏に対して抽象的な被覆によって位相を入れたもので, これにより, 層の概念を拡張できる.

以降, 考える圏は, \mathcal{U} -small であり, 有限の積とファイバー積が存在するものとする. このような圏 \mathcal{C} では, 射 $V \rightarrow U$ の圏 \mathcal{C}_U も有限の積とファイバー積が存在する.

また, \mathcal{C} が終対象 (terminal object) を持てば,

$$\mathcal{C} \text{ が有限の積とファイバー積を持つ} \iff \mathcal{C} \text{ が有限の射影極限を持つ}$$

が成り立つ. さらに, このとき, 終対象を T として,

$$X \times Y = X \times_T Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{C})$$

である.

記号 射 $V \rightarrow U$ と $S \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$ に対して,

$$V \times_U S := \{V \times_U W \rightarrow V \mid W \in S\} \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_V)$$

と定める.

注意 位相空間 X とし, $\mathcal{C} = \text{Op}(X)$ とする. このとき, $V, W \in \mathcal{C}_U = \text{Op}(U)$ に対して,

$$V \times_U W = V \cap W$$

である.

定義 2.1.1 $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$ に対して, S_1 が S_2 の細分 (refinement) とは, 任意の $V \rightarrow U \in S_1$ に対して, ある $V' \rightarrow U \in S_2$ が存在して, $V \rightarrow V' \rightarrow U$ と分解できることを言う. また, これを $S_1 \preceq S_2$ と書く.

定義 2.1.2 \mathcal{C} 上の Grothendieck 位相とは, $\text{Ob}(\mathcal{C}_U)$ の部分集合の族 $\{\text{Cov}(U)\}_{U \in \mathcal{C}}$ で, 次の公理を満たすものを言う:

- (GT1) $\{\text{id}_U : U \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ である.
- (GT2) $S_1, S_2 \subset \mathcal{C}_U$ とする. $S_1 \in \text{Cov}(U)$ かつ $S_1 \preceq S_2$ ならば, $S_2 \in \text{Cov}(U)$ である.
- (GT3) $S \in \text{Cov}(U)$ ならば, 任意の $V \rightarrow U$ に対して, $V \times_U S \in \text{Cov}(V)$ である.
- (GT4) $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$ が, $S_1 \in \text{Cov}(U)$ および $V \times_U S_2 \in \text{Cov}(V)$ ($\forall V \in S_1$) を満たせば, $S_2 \in \text{Cov}(U)$ である.

$S \in \text{Cov}(U)$ を U の被覆 (covering) という. 景 X とは, 圏 \mathcal{C}_X で, 有限の積とファイバー積が定義され, Grothendieck 位相が定められているものを言う.

\mathcal{C}_X に終対象が存在する場合は, \mathcal{C}_X を X と書くことにする.

定義 2.1.3 X, Y を景とする.

- (i) 関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$ が連続 (continuous) とは, 次の 2 条件が満たされることを言う.
 - (1) ファイバー積と可換である,
i.e. 任意の射 $V \rightarrow U, W \rightarrow U$ に対して, $f^t(V \times_U W) \xrightarrow{\sim} f^t(V) \times_{f^t(U)} f^t(W)$ である.
 - (2) 任意の $V \in \mathcal{C}_Y, S \in \text{Cov}(V)$ に対し, $f^t(S) \in \text{Cov}(f^t(V))$ である.
ただし, $f^t(S) := \{f^t(W) \rightarrow f^t(V) \mid W \in S\}$ とする.
- (ii) 景の間の射 $f : X \rightarrow Y$ とは, 連続な関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$ である.

例 2.1.4 (i) 位相空間 X に対して, X の開集合に包含射で順序を付けた圏を $\text{Op}(X)$ とする. $U \in \text{Op}(X)$ に対して, $\text{Op}(X)_U = \text{Op}(U)$ である. 通常の被覆で Grothendieck 位相を入れた景を, X と書く (終対象は $X \in \text{Op}(X)$).

(ii) $f : X \rightarrow Y$ を位相空間の間の連続写像とする. 関手 $f^t : \text{Op}(Y) \rightarrow \text{Op}(X)$ を $V \mapsto f^{-1}(V)$ として, 景の間の射も $f : X \rightarrow Y$ と書ける. つまり, 位相空間を景とすると, 連続写像が景の間の関手となる ($f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$).

(iii) X を位相空間とする. $\text{Op}(X)$ には, 次のような位相も入る. $S \subset \text{Op}(U)$ は, U の被覆で, 有限部分被覆を持つとする. このような被覆の集合は, Grothendieck 位相となる. この景を X_f と書く.

(iv) X を局所コンパクトな位相空間とする. X_{lf} を, $\text{Op}(X)$ に次のような位相を入れた景とする:

$S \subset \text{Op}(X)$ が X_{lf} での被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限進ん集合 $S_0 \subset S$ で, $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する.

このとき, 自然な射 $U_{lf} \rightarrow U_{X_{lf}}$ が存在するが, 一般には同型でない事に注意する.

定義 2.1.5 (subanalytic site) $\text{Op}(X_{sa})$ を X の subanalytic な部分集合の圏とする. この圏には, 次のような位相が入る:

$S \subset \text{Op}(X)$ が $U \in \text{Op}(X_{sa})$ の被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限部分集合 $S_0 \subset S$ で, $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する.

このような X_{sa} を subanalytic site と言う。また, $U_{X_{sa}}$ を, $\text{Op}(X_{sa}) \cap U$ に X_{sa} の位相から誘導される位相を入れたものとする。一般に, U_{sa} と $U_{X_{sa}}$ は異なる。

例 2.1.6 $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とする。このとき, $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$ とすると, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cov}(U_{sa})$ であるが, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Cov}(U_{X_{sa}})$ である。

k -加群の層を定義する。ここで, k は, 可換環とする。

定義 2.1.7 X を景とする。

- (i) F が X 上の k -加群の前層 (presheaf) とは, 関手 $\mathcal{C}_X^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}(k)$ であり, 前層の間の射は関手の射として定める。
- (ii) $\text{Psh}(k_X)$ を X 上の k -加群の前層の圏とする。この圏はアーベル圏である。
- (iii) X 上の k -加群の前層 F と $S \subset \mathcal{C}_U$ に対して,

$$F(S) := \text{Ker} \left(\prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'') \right)$$

と定める。(ただし, 二重矢印の核は, 2つの射の差で定義される。ここでの2つの射は, $F(V') \rightarrow F(V' \times_U V'')$ と $F(V'') \rightarrow F(V' \times_U V'')$ である。)

- (iv) X 上の k -加群の前層 F が分離的 (separated) (resp. 層 (sheaf) である) とは, 任意の $U \in \mathcal{C}_X$ と任意の被覆 $X \in \text{Cov}(U)$ に対して, 自然な射 $F(U) \rightarrow F(S)$ が monomorphism (resp. isomorphism) となることである。
- (v) $\text{Mod}(k_X)$ を X 上の k -加群の層の圏とする。 $\text{Mod}(k_X)$ は, $\text{Psh}(k_X)$ の加法的な充満部分圏 (full additive subcategory) である。また, $\text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}$ を Hom_{k_X} と略記する。

定義 2.1.8 (層化 (sheafification))

$$F^+(U) := \varinjlim_{S \in \text{Cov}(U)} F(S).$$

定理 2.1.9 (i) 関手 $(\cdot)^+ : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$ は, 左完全である。

- (ii) 任意の $F \in \text{Psh}(k_X)$ に対して, F^+ は分離的な前層となる。
- (iii) 任意の分離的前層 F に対して, F^+ は層となる。
- (iv) 関手 $(\cdot)^{++} : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Mod}(k_X)$ は, 埋め込み関手 $\iota : \text{Mod}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$ の左随伴である。

(iv) は, ι を省いて, 次のように書かれることも多い:

$$\text{Hom}_{\text{Psh}(k_X)}(F, G) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}(F^{++}, G) \quad (F \in \text{Psh}(k_X), G \in \text{Mod}(k_X)).$$

2.2 Subanalytic sites and sheaves

定義 2.2.1 (subanalytic site) $\text{Op}(X_{sa})$ を X の subanalytic な部分集合の圏とする。この圏には, 次のような位相が入る:

$S \subset \text{Op}(X)$ が $U \in \text{Op}(X_{sa})$ の被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限部分集合 $S_0 \subset S$ で, $K \cap (\bigcup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する。

このような X_{sa} を subanalytic site と言う。また, $U_{X_{sa}}$ を, $\text{Op}(X_{sa}) \cap U$ に X_{sa} の位相から誘導される位相を入れたものとする。一般に, U_{sa} と $U_{X_{sa}}$ は異なる。

例 2.2.2 $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とする。このとき, $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$ とすると, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cov}(U_{sa})$ であるが, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Cov}(U_{X_{sa}})$ である。

参考文献

- [1] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*. No. 292 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1990.
- [2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Ind-sheaves*. No. 271 in Astérisque. Société mathématique de France, 2001.
- [3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Category and Sheaves*. No. 332 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2006.
- [4] Luca Prelli. *Sheaves on subanalytic sites*. No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.