

# Sheaves on subanalytic sites セミナーノート

2022 年 4 月 1 日

## 目次

0	Preface	1
1	Subanalytic set	1
1.1	Semi-analytic set . . . . .	1
2	Sheaves on sites	1
2.1	Sites and sheaves . . . . .	1
2.2	Subanalytic sites and sheaves . . . . .	3

## 0 Preface

このノートでは, R. Prelli, Sheaves on Subanalytic Site [4] を参考にして, Subanalytic sites や, その上の層についてまとめる. また, 必要に応じて, Kashiwara-Schapira[1], [3] を参照する.

## 1 Subanalytic set

この節では, subanalytic set について述べる.

### 1.1 Semi-analytic set

## 2 Sheaves on sites

### 2.1 Sites and sheaves

この節では, Kashiwara-Schapira, Ind-sheaves [2] も合わせて参照して, 景 (site) 上の層について述べる.

層は, 位相空間  $X$  の開集合の圏  $\text{Op}(X)$  に対して定められる. 景 (site) とは, 任意の圏に対して抽象的な被覆によって位相を入れたもので, これにより, 層の概念を拡張できる.

以降, 考える圏は,  $\mathcal{U}$ -small であり, 有限の積とファイバー積が存在するものとする. このような圏  $\mathcal{C}$  では, 射  $V \rightarrow U$  の圏  $\mathcal{C}_U$  も有限の積とファイバー積が存在する.

また,  $\mathcal{C}$  が終対象 (terminal object) を持てば,

$$\mathcal{C} \text{ が有限の積とファイバー積を持つ} \iff \mathcal{C} \text{ が有限の射影極限を持つ}$$

が成り立つ. さらに, このとき, 終対象を  $T$  として,

$$X \times Y = X \times_T Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{C})$$

である.

記号 射  $V \rightarrow U$  と  $S \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$  に対して,

$$V \times_U S := \{V \times_U W \rightarrow V \mid W \in S\} \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_V)$$

と定める.

**注意** 位相空間  $X$  とし,  $\mathcal{C} = \text{Ob}(X)$  とする. このとき,  $V, W \in \mathcal{C}_U$  に対して,

$$V \times_U W = V \cap W$$

である.

**定義 2.1.1**  $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$  に対して,  $S_1$  が  $S_2$  の細分 (refinement) とは, 任意の  $V \rightarrow U \in S_1$  に対して, ある  $V' \rightarrow U \in S_2$  が存在して,  $V \rightarrow V' \rightarrow U$  と分解できることを言う. また, これを  $S_1 \preceq S_2$  と書く.

**定義 2.1.2**  $\mathcal{C}$  上の Grothendieck 位相とは,  $\text{Ob}(\mathcal{C}_U)$  の部分集合の族  $\{\text{Cov}(U)\}_{U \in \mathcal{C}}$  で, 次の公理を満たすものを言う:

- (GT1)  $\{\text{id}_U : U \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$  である.
- (GT2)  $S_1, S_2 \subset \mathcal{C}_U$  とする.  $S_1 \in \text{Cov}(U)$  かつ  $S_1 \preceq S_2$  ならば,  $S_2 \in \text{Cov}(U)$  である.
- (GT3)  $S \in \text{Cov}(U)$  ならば, 任意の  $V \rightarrow U$  に対して,  $V \times_U S \in \text{Cov}(V)$  である.
- (GT4)  $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$  が,  $S_1 \in \text{Cov}(U)$  および  $V \times_U S_2 \in \text{Cov}(V)$  ( $\forall V \in S_1$ ) を満たせば,  $S_2 \in \text{Cov}(U)$  である.

$S \in \text{Cov}(U)$  を  $U$  の被覆 (covering) という. 景  $X$  とは, 圏  $\mathcal{C}_X$  で, 有限の積とファイバー積が定義され, Grothendieck 位相が定められているものを言う.

$\mathcal{C}_X$  に終対象が存在する場合は,  $\mathcal{C}_X$  を  $X$  と書くことにする.

**定義 2.1.3**  $X, Y$  を景とする.

- (i) 関手  $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$  が連続 (continuous) とは, 次の 2 条件が満たされることを言う.
  - (1) ファイバー積と可換である,  
i.e. 任意の射  $V \rightarrow U, W \rightarrow U$  に対して,  $f^t(V \times_U W) \xrightarrow{\sim} f^t(V) \times_{f^t(U)} f^t(W)$  である.
  - (2) 任意の  $V \in \mathcal{C}_Y, S \in \text{Cov}(V)$  に対し,  $f^t(S) \in \text{Cov}(f^t(V))$  である.  
ただし,  $f^t(S) := \{f^t(W) \rightarrow f^t(V) \mid W \in S\}$  とする.
- (ii) 景の間の射  $f : X \rightarrow Y$  とは, 連続な関手  $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$  である.

**例 2.1.4** (i) 位相空間  $X$  に対して,  $X$  の開集合に包含射で順序を付けた圏を  $\text{Op}(X)$  とする.  $U \in \text{Op}(X)$  に対して,  $\text{Op}(X)_U = \text{Op}(U)$  である. 通常の被覆で Grothendieck 位相を入れた景を,  $X$  と書く (終対象は  $X \in \text{Op}(X)$ ).

(ii)  $f : X \rightarrow Y$  を位相空間の間の連続写像とする. 関手  $f^t : \text{Op}(Y) \rightarrow \text{Op}(X)$  を  $V \mapsto f^{-1}(V)$  として, 景の間の射も  $f : X \rightarrow Y$  と書ける. つまり, 位相空間を景とすると, 連続写像が景の間の関手となる ( $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$ ).

(iii)  $X$  を位相空間とする.  $\text{Op}(X)$  には, 次のような位相も入る.  $S \subset \text{Op}(U)$  は,  $U$  の被覆で, 有限部分被覆を持つとする. このような被覆の集合は, Grothendieck 位相となる. この景を  $X_f$  と書く.

(iv)  $X$  を局所コンパクトな位相空間とする.  $X_{lf}$  を,  $\text{Op}(X)$  に次のような位相を入れた景とする:

$S \subset \text{Op}(X)$  が  $X_{lf}$  での被覆であるとは,  $X$  の任意のコンパクト集合  $K$  に対して, ある有限部分集合  $S_0 \subset S$  で,  $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$  となるものが存在する.

このとき, 自然な射  $U_{lf} \rightarrow U_{X_{lf}}$  が存在するが, 一般には同型でない事に注意する.

**定義 2.1.5** (subanalytic site)  $\text{Op}(X_{sa})$  を  $X$  の subanalytic な部分集合の圏とする. この圏には, 次のような位相が入る:

$S \subset \text{Op}(X)$  が  $U \in \text{Op}(X_{sa})$  の被覆であるとは,  $X$  の任意のコンパクト集合  $K$  に対して, ある有限部分集合  $S_0 \subset S$  で,  $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$  となるものが存在する.

このような  $X_{sa}$  を subanalytic site と言う。また,  $U_{X_{sa}}$  を,  $\text{Op}(X_{sa}) \cap U$  に  $X_{sa}$  の位相から誘導される位相を入れたものとする。一般に,  $U_{sa}$  と  $U_{X_{sa}}$  は異なる。

**例 2.1.6**  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  とする。このとき,  $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$  とすると,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cov}(U_{sa})$  であるが,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Cov}(U_{X_{sa}})$  である。

$k$ -加群の層を定義する。ここで,  $k$  は, 可換環とする。

**定義 2.1.7**  $X$  を景とする。

- (i)  $F$  が  $X$  上の  $k$ -加群の前層 (presheaf) とは, 関手  $\mathcal{C}_X^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}(k)$  であり, 前層の間の射は関手の射として定める。
- (ii)  $\text{Psh}(k_X)$  を  $X$  上の  $k$ -加群の前層の圏とする。この圏はアーベル圏である。
- (iii)  $X$  上の  $k$ -加群の前層  $F$  と  $S \subset \mathcal{C}_U$  に対して,

$$F(S) := \text{Ker} \left( \prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'') \right)$$

と定める。(ただし, 二重矢印の核は, 2つの射の差で定義される。ここでの2つの射は,  $F(V') \rightarrow F(V' \times_U V'')$  と  $F(V'') \rightarrow F(V' \times_U V'')$  である。)

- (iv)  $X$  上の  $k$ -加群の前層  $F$  が分離的 (separated) (resp. 層 (sheaf) である) とは, 任意の  $U \in \mathcal{C}_X$  と任意の被覆  $X \in \text{Cov}(U)$  に対して, 自然な射  $F(U) \rightarrow F(S)$  が monomorphism (resp. isomorphism) となることである。
- (v)  $\text{Mod}(k_X)$  を  $X$  上の  $k$ -加群の層の圏とする。 $\text{Mod}(k_X)$  は,  $\text{Psh}(k_X)$  の加法的な充満部分圏 (full additive subcategory) である。また,  $\text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}$  を  $\text{Hom}_{k_X}$  と略記する。

**定義 2.1.8** (層化 (sheafification))

$$F^+(U) := \varinjlim_{S \in \text{Cov}(U)} F(S).$$

**定理 2.1.9** (i) 関手  $(\cdot)^+ : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$  は, 左完全である。

- (ii) 任意の  $F \in \text{Psh}(k_X)$  に対して,  $F^+$  は分離的な前層となる。
- (iii) 任意の分離的前層  $F$  に対して,  $F^+$  は層となる。
- (iv) 関手  $(\cdot)^{++} : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Mod}(k_X)$  は, 埋め込み関手  $\iota : \text{Mod}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$  の左随伴である。

(iv) は,  $\iota$  を省いて, 次のように書かれることも多い:

$$\text{Hom}_{\text{Psh}(k_X)}(F, G) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}(F^{++}, G) \quad (F \in \text{Psh}(k_X), G \in \text{Mod}(k_X)).$$

## 2.2 Subanalytic sites and sheaves

**定義 2.2.1** (subanalytic site)  $\text{Op}(X_{sa})$  を  $X$  の subanalytic な部分集合の圏とする。この圏には, 次のような位相が入る:

$S \subset \text{Op}(X)$  が  $U \in \text{Op}(X_{sa})$  の被覆であるとは,  $X$  の任意のコンパクト集合  $K$  に対して, ある有限部分集合  $S_0 \subset S$  で,  $K \cap (\bigcup_{V \in S_0} V) = K \cap U$  となるものが存在する。

このような  $X_{sa}$  を subanalytic site と言う。また,  $U_{X_{sa}}$  を,  $\text{Op}(X_{sa}) \cap U$  に  $X_{sa}$  の位相から誘導される位相を入れたものとする。一般に,  $U_{sa}$  と  $U_{X_{sa}}$  は異なる。

**例 2.2.2**  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  とする。このとき,  $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$  とすると,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cov}(U_{sa})$  であるが,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Cov}(U_{X_{sa}})$  である。

## 参考文献

- [1] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*. No. 292 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1990.
- [2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Ind-sheaves*. No. 271 in Astérisque. Société mathématique de France, 2001.
- [3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Category and Sheaves*. No. 332 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2006.
- [4] Luca Prelli. *Sheaves on subanalytic sites*. No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.