Sheaves on subanalytic sites セミナーノート

2022 年 4 月 1 日

目次

0 Preface 1

1 Subanalytic set 1

1.1 Semi-analytic set 1

2 Sheaves on Sites 1

2.1 Definition of Sites 1

0 Preface

このノートでは, R. Prelli, Sheaves on Subanalytic Site [4] を参考にして, Subanalytic sites や, その上の層についてまとめる. また, 必要に応じて, Kashiwara-Schapira[1], [3] を参照する.

1 Subanalytic set

この節では, subanalytic set について述べる.

1.1 Semi-analytic set

2 Sheaves on Sites

この節では, Kashiwara-Schapira, Ind-sheaves [2] も合わせて参照して, 景 (site) 上の層について述べる.

2.1 Definition of Sites

層は, 位相空間 X の開集合の圏 $\mathrm{Op}(X)$ に対して定められる. 景 (site) とは, 任意の圏に対して抽象的な被覆によって位相を入れたもので, これにより, 層の概念を拡張できる.

以降, 考える圏は, $\mathcal{U}$-small であり, 有限の積とファイバー積が存在するものとする. このような圏 $\mathcal{C}$ では, 射 $V \to U$ の圏 $\mathcal{C}_U$ も有限の積とファイバー積が存在する.

また, $\mathcal{C}$ が終対象 (terminal object) を持てば,

$$\mathcal{C} \text{ が有限の積とファイバー積を持つ} \iff \mathcal{C} \text{ が有限の射影極限を持つ}$$

が成り立つ. さらに, このとき, 終対象を T として,

$$X \times Y = X \times_T Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{C})$$

である.

記号 射 $V \to U$ と $S \subset \mathrm{Ob}(C_U)$ に対して,

$$V \times_U S := \{V \times_U W \to V \mid W \in S\} \subset \mathrm{Ob}(C_V)$$

と定める.

注意 位相空間 X とし, $\mathcal{C} = \mathrm{Ob}(X)$ とする．このとき, $V, W \in \mathcal{C}_U$ に対して,

$$V \times_U W = V \cap W$$

である．

定義 2.1.1 $S_1, S_2 \subset \mathrm{Ob}(C_U)$ に対して, S_1 が S_2 の細分 (refinement) とは, 任意の $V \to U \in S_1$ に対して, ある $V' \to U \in S_2$ が存在して, $V \to V' \to U$ と分解できることを言う．また, これを $S_1 \preceq S_2$ と書く．

定義 2.1.2 $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck 位相とは, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$ の部分集合の族 $\{\mathrm{Cov}(U)\}_{U \in \mathcal{C}}$ で, 次の公理を満たすものを言う:

(GT1) $\{\mathrm{id}_U : U \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ である．

(GT2) $S_1, S_2 \subset \mathcal{C}_U$ とする．$S_1 \in \mathrm{Cov}(U)$ かつ $S_1 \preceq S_2$ ならば, $S_2 \in \mathrm{Cov}(U)$ である．

(GT3) $S \in \mathrm{Cov}(U)$ ならば, 任意の $V \to U$ に対して, $V \times_U S \in \mathrm{Cov}(V)$ である．

(GT4) $S_1, S_2 \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$ が, $S_1 \in \mathrm{Cov}(U)$ および $V \times_U S_2 \in \mathrm{Cov}(V)$ $(\forall V \in S_1)$ を満たせば, $S_2 \in \mathrm{Cov}(U)$ である．

$S \in \mathrm{Cov}(U)$ を U の被覆 (covering) という．景 X とは, 圏 $\mathcal{C}_X$ で, 有限の積とファイバー積が定義され, Grothendieck 位相が定められているものを言う．
$\mathcal{C}_X$ に終対象が存在する場合は, $\mathcal{C}_X$ を X と書くことにする．

定義 2.1.3 X, Y を景とする．

(i) 関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$ が連続 (continuous) とは, 次の 2 条件が満たされることを言う．
   (1) ファイバー積と可換である,
   i.e. 任意の射 $V \to U$, $W \to U$ に対して, $f^t(V \times_U W) \xrightarrow{\sim} f^t(V) \times_{f^t(U)} f^t(W)$ である．
   (2) 任意の $V \in \mathcal{C}_Y$, $S \in \mathrm{Cov}(V)$ に対し, $f^t(S) \in \mathrm{Cov}(f^t(V))$ である．
   ただし, $f^t(S) \coloneqq \{f^t(W) \to f^t(V) \mid W \in S\}$ とする．

(ii) 景の間の射 $f : X \to Y$ とは, 連続な関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$ である．

例 2.1.4 (i) 位相空間 X に対して, X の開集合に包含射で順序を付けた圏を $\mathrm{Op}(X)$ とする．$U \in \mathrm{Op}(X)$ に対して, $\mathrm{Op}(X)_U = \mathrm{Op}(U)$ である．通常の被覆で Grothedieck 位相を入れた景を, X と書く (終対象は $X \in \mathrm{Op}(X)$).

(ii) $f : X \to Y$ を位相空間の間の連続写像とする．関手 $f^t : \mathrm{Op}(Y) \to \mathrm{Op}(X)$ を $V \mapsto f^{-1}(V)$ として, 景の間の射も $f : X \to Y$ と書ける．つまり, 位相空間を景とすると, 連続写像が景の間の関手となる $(f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W))$.

(iii) X を位相空間とする．$\mathrm{Op}(X)$ には, 次のような位相も入る．$S \subset \mathrm{Op}(U)$ は, U の被覆で, 有限部分被覆を持つとする．このような被覆の集合は, Grothendieck 位相となる．この景を X_f と書く．

(iv) X を局所コンパクトな位相空間とする．X_{lf} を, $\mathrm{Op}(X)$ に次のような位相を入れた景とする: $S \subset \mathrm{Op}(X)$ が X_{lf} での被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある $S_0 \in S$ で, $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する．
このとき, 自然な射 $U_{lf} \to U_{X_{lf}}$ が存在するが, 一般には同型でない事に注意する．

k-加群の層を定義する．ここで, k は, 可換環とする．

定義 2.1.5 X を景とする．

(i) F が X 上の k-加群の前層 (presheaf) とは, 関手 $\mathcal{C}_X^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(k)$ であり, 前層の間の射は関手の射として定める．

(ii) $\mathrm{Psh}(k_X)$ を X 上の k-加群の前層の圏とする．この圏はアーベル圏である．

(iii) X 上の k-加群の前層 F と $S \subset \mathcal{C}_U$ に対して，

$$F(S) \coloneqq \mathrm{Ker}\left(\prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'')\right)$$

と定める．(ただし，二重矢印の核は，2 つの射の差で定義される．ここでの 2 つの射は，$F(V') \to F(V' \times_U V'')$ と $F(V') \to F(V' \times_U V'')$ である.)

(iv) X 上の k-加群の前層 F が分離的 (separated) (resp. 層 (sheaf) である) とは，任意の $U \in \mathcal{C}_X$ と任意の被覆 $X \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して，自然な射 $F(U) \to F(S)$ が monomorphism(resp. isomorphism) となることである．

(v) $\mathrm{Mod}(k_X)$ を X 上の k-加群の層の圏とする．$\mathrm{Mod}(k_X)$ は，$\mathrm{Psh}(k_X)$ の加法的な充満部分圏 (full additive subcategory) である．また，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k_X)}$ を Hom_{k_X} と略記する．

定義 2.1.6 (層化 (sheafification))

$$F^+(U) \coloneqq \varinjlim_{S \in \mathrm{Cov}(U)} F(S).$$

定理 2.1.7 (i) 関手 $(\cdot)^+ : \mathrm{Psh}(k_X) \to \mathrm{Psh}(k_X)$ は，左完全である．

(ii) 任意の $F \in \mathrm{Psh}(k_X)$ に対して，F^+ は分離的な前層となる．

(iii) 任意の分離的前層 F に対して，F^+ は層となる．

(iv) 関手 $(\cdot)^{++} : \mathrm{Psh}(k_X) \to \mathrm{Mod}(k_X)$ は，埋め込み関手 $\iota : \mathrm{Mod}(k_X) \to \mathrm{Psh}(k_X)$ の左随伴である．

(iv) は，ι を省いて，次のように書かれることも多い:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(k_X)}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k_X)}(F^{++}, G) \ (F \in \mathrm{Psh}(k_X),\ G \in \mathrm{Mod}(k_X)).$$

参考文献

[1] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*. No. 292 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1990.

[2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Ind-sheaves*. No. 271 in Astérisque. Société mathématique de France, 2001.

[3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Category and Sheaves*. No. 332 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2006.

[4] Luca Prelli. *Sheaves on subanalytic sites*. No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.