Sheaves on subanalytic sites セミナーノート

2022 年 4 月 4 日

目次

0 Preface

このノートでは, L. Prelli, Sheaves on Subanalytic Site [4] を参考にして, Subanalytic sites や, その上の層についてまとめる. また, 必要に応じて, Kashiwara-Schapira[1], [3] を参照する.

1 Subanalytic set

この節では, subanalytic set について述べる.

1.1 Semi-analytic set

2 Sheaves on sites

2.1 Sites and sheaves

この節では, Kashiwara-Schapira, Ind-sheaves [2] も合わせて参照して, 景 (site) 上の層について述べる.

層は, 位相空間 X の開集合の圏 $\mathrm{Op}(X)$ に対して定められる. 景 (site) とは, 任意の圏に対して抽象的な被覆によって位相を入れたもので, これにより, 層の概念を拡張できる.

以降, 考える圏は, $\mathcal{U}$-small であり, 有限の積とファイバー積が存在するものとする. このような圏 $\mathcal{C}$ では, 射 $V \to U$ の圏 $\mathcal{C}_U$ も有限の積とファイバー積が存在する.

また, $\mathcal{C}$ が終対象 (terminal object) を持てば,

$$\mathcal{C} \text{ が有限の積とファイバー積を持つ} \iff \mathcal{C} \text{ が有限の射影極限を持つ}$$

が成り立つ. さらに, このとき, 終対象を T として,

$$X \times Y = X \times_T Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{C})$$

である.

記号 射 $V \to U$ と $S \subset \mathrm{Ob}(C_U)$ に対して,

$$V \times_U S := \{V \times_U W \to V \mid W \in S\} \subset \mathrm{Ob}(C_V)$$

と定める.

注意 位相空間 X とし, $\mathcal{C} = \mathrm{Op}(X)$ とする. このとき, $V, W \in \mathcal{C}_U = \mathrm{Op}(U)$ に対して,

$$V \times_U W = V \cap W$$

である.

定義 2.1.1 $S_1, S_2 \subset \mathrm{Ob}(C_U)$ に対して, S_1 が S_2 の細分 (refinement) とは, 任意の $V \to U \in S_1$ に対して, ある $V' \to U \in S_2$ が存在して, $V \to V' \to U$ と分解できることを言う. また, これを $S_1 \preceq S_2$ と書く.

定義 2.1.2 $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck 位相とは, $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$ の部分集合の族 $\{\mathrm{Cov}(U)\}_{U \in \mathcal{C}}$ で, 次の公理を満たすものを言う:

(GT1) $\{\mathrm{id}_U : U \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ である.
(GT2) $S_1, S_2 \subset \mathcal{C}_U$ とする. $S_1 \in \mathrm{Cov}(U)$ かつ $S_1 \preceq S_2$ ならば, $S_2 \in \mathrm{Cov}(U)$ である.
(GT3) $S \in \mathrm{Cov}(U)$ ならば, 任意の $V \to U$ に対して, $V \times_U S \in \mathrm{Cov}(V)$ である.
(GT4) $S_1, S_2 \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$ が, $S_1 \in \mathrm{Cov}(U)$ および $V \times_U S_2 \in \mathrm{Cov}(V)$ $(\forall V \in S_1)$ を満たせば, $S_2 \in \mathrm{Cov}(U)$ である.

$S \in \mathrm{Cov}(U)$ を U の被覆 (covering) という. 景 X とは, 圏 $\mathcal{C}_X$ で, 有限の積とファイバー積が定義され, Grothendieck 位相が定められているものを言う.
$\mathcal{C}_X$ に終対象が存在する場合は, $\mathcal{C}_X$ を X と書くことにする.

定義 2.1.3 X, Y を景とする.

(i) 関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$ が連続 (continuous) とは, 次の 2 条件が満たされることを言う.
  (1) ファイバー積と可換である,
  i.e. 任意の射 $V \to U$, $W \to U$ に対して, $f^t(V \times_U W) \xrightarrow{\sim} f^t(V) \times_{f^t(U)} f^t(W)$ である.
  (2) 任意の $V \in \mathcal{C}_Y$, $S \in \mathrm{Cov}(V)$ に対し, $f^t(S) \in \mathrm{Cov}(f^t(V))$ である.
  ただし, $f^t(S) \coloneqq \{f^t(W) \to f^t(V) \mid W \in S\}$ とする.
(ii) 景の間の射 $f : X \to Y$ とは, 連続な関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$ である.

例 2.1.4 (i) 位相空間 X に対して, X の開集合に包含射で順序を付けた圏を $\mathrm{Op}(X)$ とする. $U \in \mathrm{Op}(X)$ に対して, $\mathrm{Op}(X)_U = \mathrm{Op}(U)$ である. 通常の被覆で Grothedieck 位相を入れた景を, X と書く (終対象は $X \in \mathrm{Op}(X)$).
(ii) $f : X \to Y$ を位相空間の間の連続写像とする. 関手 $f^t : \mathrm{Op}(Y) \to \mathrm{Op}(X)$ を $V \mapsto f^{-1}(V)$ として, 景の間の射も $f : X \to Y$ と書ける. つまり, 位相空間を景とすると, 連続写像が景の間の関手となる $(f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W))$.
(iii) X を位相空間とする. $\mathrm{Op}(X)$ には, 次のような位相も入る. $S \subset \mathrm{Op}(U)$ は, U の被覆で, 有限部分被覆を持つとする. このような被覆の集合は, Grothendieck 位相となる. この景を X_f と書く.
(iv) X を局所コンパクトな位相空間とする. X_{lf} を, $\mathrm{Op}(X)$ に次のような位相を入れた景とする:
$S \subset \mathrm{Op}(X)$ が X_{lf} での被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限進ん集合 $S_0 \subset S$ で, $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する.
このとき, 自然な射 $U_{lf} \to U_{X_{lf}}$ が存在するが, 一般には同型でない事に注意する.

k-加群の層を定義する. ここで, k は, 可換環とする.

定義 2.1.5 X を景とする.

(i) F が X 上の k-加群の前層 (presheaf) とは, 関手 $\mathcal{C}_X^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(k)$ であり, 前層の間の射は関手の射として

定める.

(ii) $\mathrm{Psh}(k_X)$ を X 上の k-加群の前層の圏とする. この圏はアーベル圏である.

(iii) X 上の k-加群の前層 F と $S \subset \mathcal{C}_U$ に対して,

$$F(S) \coloneqq \mathrm{Ker}\left(\prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'')\right)$$

と定める. (ただし, 二重矢印の核は, 2 つの射の差で定義される. ここでの 2 つの射は, $F(V') \to F(V' \times_U V'')$ と $F(V'') \to F(V' \times_U V'')$ である.)

(iv) X 上の k-加群の前層 F が分離的 (separated) (resp. 層 (sheaf) である) とは, 任意の $U \in \mathcal{C}_X$ と任意の被覆 $X \in \mathrm{Cov}(U)$ に対して, 自然な射 $F(U) \to F(S)$ が monomorphism(resp. isomorphism) となることである.

(v) $\mathrm{Mod}(k_X)$ を X 上の k-加群の層の圏とする. $\mathrm{Mod}(k_X)$ は, $\mathrm{Psh}(k_X)$ の加法的な充満部分圏 (full additive subcategory) である. また, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k_X)}$ を Hom_{k_X} と略記する.

定義 2.1.6 (層化 (sheafification))

$$F^+(U) \coloneqq \varinjlim_{S \in \mathrm{Cov}(U)} F(S).$$

定理 2.1.7 (i) 関手 $(\cdot)^+ : \mathrm{Psh}(k_X) \to \mathrm{Psh}(k_X)$ は, 左完全である.

(ii) 任意の $F \in \mathrm{Psh}(k_X)$ に対して, F^+ は分離的な前層となる.

(iii) 任意の分離的前層 F に対して, F^+ は層となる.

(iv) 関手 $(\cdot)^{++} : \mathrm{Psh}(k_X) \to \mathrm{Mod}(k_X)$ は, 埋め込み関手 $\iota : \mathrm{Mod}(k_X) \to \mathrm{Psh}(k_X)$ の左随伴である.

(iv) は, ι を省いて, 次のように書かれることも多い:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(k_X)}(F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k_X)}(F^{++}, G) \ (F \in \mathrm{Psh}(k_X),\, G \in \mathrm{Mod}(k_X)).$$

2.2 Subanalytic sites and sheaves

定義 2.2.1 (subanalytic site) $\mathrm{Op}(X_{sa})$ を X の subanalytic な部分集合の圏とする. この圏には, 次のような位相が入る:

$S \subset \mathrm{Op}(X_{sa})$ が $U \in \mathrm{Op}(X_{sa})$ の被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限部分集合 $S_0 \subset S$ で, $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する.

このような X_{sa} を subanalytic site と言う. また, $U_{X_{sa}}$ を, $\mathrm{Op}(X_{sa}) \cap U$ に X_{sa} の位相から誘導される位相を入れたものとする. 一般に, U_{sa} と $U_{X_{sa}}$ は異なる.

例 2.2.2 $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とする. このとき, $V_n = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| > \frac{1}{n}\right\}$ とすると, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{Cov}(U_{sa})$ であるが, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \mathrm{Cov}(U_{X_{sa}})$ である.

定義 2.2.3 $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ を X_{sa} 上の層の圏とする.

定義 2.2.4 $\mathrm{Op}^c(X_{sa})$ で, X の相対コンパクトな subanalytic 開集合のなす圏とし, X_{sa} から誘導される位相を入れたものを X^c_{sa} と書く. X^c_{sa} 上の前層 (resp. 層) の圏を $\mathrm{Psh}(k_{X^c_{sa}})$(resp. $\mathrm{Mod}(k_{X^c_{sa}})$) と書く.

命題 2.2.5 $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ は, Grothendieck 圏である i.e. 生成元を持ち, small inductive limits と small filtrant inductive limits が完全となる圏である. 特に, Grothendieck 圏として, $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ は, enough injective な対象を持つ.

命題 2.2.6 忘却関手 $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \to \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ は圏同値を与える.

証明. $\square$

命題 2.2.7 $\{F_i\}_{i\in I}$ を $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ の filitrant inductive system とし, $U \in \mathrm{Op}^c(X_{sa})$ とする. このとき,

$$\varinjlim_{i\in I} \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \varinjlim_{i\in I} F_i)$$

が成り立つ.

証明. $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ で示せば十分である. "$\varinjlim_i$"F_i で, X_{sa}^c 上の前層 $V \mapsto \varinjlim_i \Gamma(U; F_i) = \varinjlim_i(F_i(U))$ を表す. $U \in \mathrm{Op}^c(X_{sa})$ とし, S を U の有限被覆とする. 同型 ("$\varinjlim_i$"$F_i)(S) \to \varinjlim_i(F_i(S))$ が存在し, $F_i \in \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ より, ("$\varinjlim_i$"$F_i)(S) \simeq \varinjlim_i(F_i(U)) =$ ("$\varinjlim_i$"$F_i)(U)$ が成り立つ.

ここで, U の有限被覆の族 $\mathrm{Cov}^f(U)$ は, $\mathrm{Cov}(U)$ で cofinal なので, "$\varinjlim_i$"$F_i \simeq \varinjlim_{S\in\mathrm{Cov}^f(U)}$ ("$\varinjlim_i$"$F_i)(S) \simeq \varinjlim_{S\in\mathrm{Cov}(U)}$ ("$\varinjlim_i$"$F_i)(S) =$ ("$\varinjlim_i$"$F_i)^+$ となる. よって,

$$\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i \xrightarrow{\sim} (\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i)^+ \xrightarrow{\sim} (\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i)^{++}$$

を得る. また, 層 $\varinjlim_i F_i$ の定義より, ("$\varinjlim_i$"$F_i)^{++} = \varinjlim_i F_i$ なので, "$\varinjlim_i$"$F_i = \varinjlim_i F_i$ が言える. これに $\Gamma(U; \bullet)$ を施せば, $\varinjlim_i \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \varinjlim_i F_i)$ となる. $\square$

命題 2.2.8 $F \in \mathrm{Psh}(X_{sa}^c)$ が, 次の 2 条件を満たすとする.

(i) $F(\emptyset) = 0$,

(ii) 任意の $U, V \in \mathrm{Op}^c(X_{sa})$ に対して,

$$0 \longrightarrow F(U \cup V) \longrightarrow F(U) \oplus F(V) \longrightarrow F(U \cap V)$$

は完全列である.

このとき, $F \in \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}^c}) \simeq \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ である.

証明. $U \in \mathrm{Op}^c(X_{sa})$ と U の有限被覆 $\{U_j\}_{j=1}^n$ とする. また, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ と略記する. 次の列が完全であることを示せば良い.

$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow \bigoplus_{1\le k\le n} F(U_k) \longrightarrow \bigoplus_{1\le i<j\le n} F(U_{ij}) \ .$$

ただし, 2 番目の射は, $(s_k)_{1\le k\le n}$ を, $(s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}})_{1\le i<j\le n}$ に対応させる射である.

n についての帰納法で示す. $n = 1$ は明らかで, $n = 2$ は仮定の (ii) そのものである. $1 \le j \le n-1$ では成り立つと仮定する. また, $U' = \bigcup_{1\le k\le n-1} U_k$ と略記する. このとき, 帰納法の仮定から, 完全列による可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & F(U) \arrow[r] & F(U') \oplus F(U_n) \arrow[r] \arrow[d] & F(U' \cap U_n) \arrow[d] \\
 & & \bigoplus_{1\le k\le n-1} F(U_k) \oplus F(U_n) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{1\le i\le n-1} F(U_{in}) \\
 & & \bigoplus_{1\le i<j\le n-1} F(U_{ij}) &
\end{tikzcd}$$

を得る. この図式で diagram chasing を行えば, 目的の結果を得る. $\square$

参考文献

[1] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds.* No. 292 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1990.

[2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Ind-sheaves.* No. 271 in Astérisque. Société mathématique de France, 2001.

[3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Category and Sheaves.* No. 332 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2006.

[4] Luca Prelli. *Sheaves on subanalytic sites.* No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.