

Sheaves on subanalytic sites セミナーノート

2022 年 4 月 6 日

目次

0	Preface	1
1	Sheaves on sites	1
1.1	Sites and sheaves	1
1.2	Subanalytic sites and sheaves	3
1.3	Sheaves on sites and \mathbb{R} -constructible sheaves	5
2	Appendix	6
2.1	Subanalytic set	6
2.2	\mathbb{R} -constructible sheaves	7

0 Preface

このノートでは, L. Prelli, Sheaves on Subanalytic Site [4] を参考にして, Subanalytic sites や, その上の層についてまとめる. また, 必要に応じて, Kashiwara-Schapira[1], [3] を参照する.

1 Sheaves on sites

1.1 Sites and sheaves

この節では, Kashiwara-Schapira, Ind-sheaves [2] も合わせて参照して, 景 (site) 上の層について述べる.

層は, 位相空間 X の開集合の圏 $\mathrm{Op}(X)$ に対して定められる. 景 (site) とは, 任意の圏に対して抽象的な被覆によって位相を入れたもので, これにより, 層の概念を拡張できる.

以降, 考える圏は, \mathcal{U} -small であり, 有限の積とファイバー積が存在するものとする. このような圏 \mathcal{C} では, 射 $V \rightarrow U$ の圏 \mathcal{C}_U も有限の積とファイバー積が存在する.

また, \mathcal{C} が終対象 (terminal object) を持てば,

$$\mathcal{C} \text{ が有限の積とファイバー積を持つ} \iff \mathcal{C} \text{ が有限の射影極限を持つ}$$

が成り立つ. さらに, このとき, 終対象を T として,

$$X \times Y = X \times_T Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{C})$$

である.

記号 射 $V \rightarrow U$ と $S \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$ に対して,

$$V \times_U S := \{V \times_U W \rightarrow V \mid W \in S\} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_V)$$

と定める.

注意 位相空間 X とし, $\mathcal{C} = \mathrm{Op}(X)$ とする. このとき, $V, W \in \mathcal{C}_U = \mathrm{Op}(U)$ に対して,

$$V \times_U W = V \cap W$$

である.

定義 1.1.1 $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$ に対して, S_1 が S_2 の細分 (refinement) とは, 任意の $V \rightarrow U \in S_1$ に対して, ある $V' \rightarrow U \in S_2$ が存在して, $V \rightarrow V' \rightarrow U$ と分解できることを言う. また, これを $S_1 \preceq S_2$ と書く.

定義 1.1.2 \mathcal{C} 上の Grothendieck 位相とは, $\text{Ob}(\mathcal{C}_U)$ の部分集合の族 $\{\text{Cov}(U)\}_{U \in \mathcal{C}}$ で, 次の公理を満たすものを言う:

- (GT1) $\{\text{id}_U : U \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ である.
- (GT2) $S_1, S_2 \subset \mathcal{C}_U$ とする. $S_1 \in \text{Cov}(U)$ かつ $S_1 \preceq S_2$ ならば, $S_2 \in \text{Cov}(U)$ である.
- (GT3) $S \in \text{Cov}(U)$ ならば, 任意の $V \rightarrow U$ に対して, $V \times_U S \in \text{Cov}(V)$ である.
- (GT4) $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$ が, $S_1 \in \text{Cov}(U)$ および $V \times_U S_2 \in \text{Cov}(V)$ ($\forall V \in S_1$) を満たせば, $S_2 \in \text{Cov}(U)$ である.

$S \in \text{Cov}(U)$ を U の被覆 (covering) という. 景 X とは, 圏 \mathcal{C}_X で, 有限の積とファイバー積が定義され, Grothendieck 位相が定められているものを言う.

\mathcal{C}_X に終対象が存在する場合は, \mathcal{C}_X を X と書くことにする.

定義 1.1.3 X, Y を景とする.

- (i) 関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$ が連続 (continuous) とは, 次の 2 条件が満たされることを言う.
 - (1) ファイバー積と可換である,
i.e. 任意の射 $V \rightarrow U, W \rightarrow U$ に対して, $f^t(V \times_U W) \xrightarrow{\sim} f^t(V) \times_{f^t(U)} f^t(W)$ である.
 - (2) 任意の $V \in \mathcal{C}_Y, S \in \text{Cov}(V)$ に対し, $f^t(S) \in \text{Cov}(f^t(V))$ である.
ただし, $f^t(S) := \{f^t(W) \rightarrow f^t(V) \mid W \in S\}$ とする.
- (ii) 景の間の射 $f : X \rightarrow Y$ とは, 連続な関手 $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$ である.

例 1.1.4 (i) 位相空間 X に対して, X の開集合に包含射で順序を付けた圏を $\text{Op}(X)$ とする. $U \in \text{Op}(X)$ に対して, $\text{Op}(X)_U = \text{Op}(U)$ である. 通常の被覆で Grothendieck 位相を入れた景を, X と書く (終対象は $X \in \text{Op}(X)$).

(ii) $f : X \rightarrow Y$ を位相空間の間の連続写像とする. 関手 $f^t : \text{Op}(Y) \rightarrow \text{Op}(X)$ を $V \mapsto f^{-1}(V)$ として, 景の間の射も $f : X \rightarrow Y$ と書ける. つまり, 位相空間を景とすると, 連続写像が景の間の関手となる ($f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$).

(iii) X を位相空間とする. $\text{Op}(X)$ には, 次のような位相も入る. $S \subset \text{Op}(U)$ は, U の被覆で, 有限部分被覆を持つとする. このような被覆の集合は, Grothendieck 位相となる. この景を X_f と書く.

(iv) X を局所コンパクトな位相空間とする. X_{lf} を, $\text{Op}(X)$ に次のような位相を入れた景とする:

$S \subset \text{Op}(X)$ が X_{lf} での被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限進ん集合 $S_0 \subset S$ で, $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する.

このとき, 自然な射 $U_{lf} \rightarrow U_{X_{lf}}$ が存在するが, 一般には同型でない事に注意する.

k -加群の層を定義する. ここで, k は, 可換環とする.

定義 1.1.5 X を景とする.

- (i) F が X 上の k -加群の前層 (presheaf) とは, 関手 $\mathcal{C}_X^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}(k)$ であり, 前層の間の射は関手の射として定める.
- (ii) $\text{Psh}(k_X)$ を X 上の k -加群の前層の圏とする. この圏はアーベル圏である.

(iii) X 上の k -加群の前層 F と $S \subset \mathcal{C}_U$ に対して,

$$F(S) := \text{Ker} \left(\prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'') \right)$$

と定める. (ただし, 二重矢印の核は, 2 つの射の差で定義される. ここでの 2 つの射は, $F(V') \rightarrow F(V' \times_U V'')$ と $F(V'') \rightarrow F(V' \times_U V'')$ である.)

(iv) X 上の k -加群の前層 F が分離的 (separated) (resp. 層 (sheaf) である) とは, 任意の $U \in \mathcal{C}_X$ と任意の被覆 $X \in \text{Cov}(U)$ に対して, 自然な射 $F(U) \rightarrow F(S)$ が monomorphism (resp. isomorphism) となることである.

(v) $\text{Mod}(k_X)$ を X 上の k -加群の層の圏とする. $\text{Mod}(k_X)$ は, $\text{Psh}(k_X)$ の加法的な充満部分圏 (full additive subcategory) である. また, $\text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}$ を Hom_{k_X} と略記する.

定義 1.1.6 (層化 (sheafification))

$$F^+(U) := \varinjlim_{S \in \text{Cov}(U)} F(S).$$

定理 1.1.7 (i) 関手 $(\cdot)^+ : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$ は, 左完全である.

(ii) 任意の $F \in \text{Psh}(k_X)$ に対して, F^+ は分離的な前層となる.

(iii) 任意の分離的前層 F に対して, F^+ は層となる.

(iv) 関手 $(\cdot)^{++} : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Mod}(k_X)$ は, 埋め込み関手 $\iota : \text{Mod}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$ の左随伴である.

(iv) は, ι を省いて, 次のように書かれることも多い:

$$\text{Hom}_{\text{Psh}(k_X)}(F, G) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}(F^{++}, G) \quad (F \in \text{Psh}(k_X), G \in \text{Mod}(k_X)).$$

1.2 Subanalytic sites and sheaves

定義 1.2.1 (subanalytic site) $\text{Op}(X_{sa})$ を X の subanalytic な部分集合の圏とする. この圏には, 次のような位相が入る:

$S \subset \text{Op}(X_{sa})$ が $U \in \text{Op}(X_{sa})$ の被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限部分集合 $S_0 \subset S$ で, $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$ となるものが存在する.

このような X_{sa} を subanalytic site と言う. また, $U_{X_{sa}}$ を, $\text{Op}(X_{sa}) \cap U$ に X_{sa} の位相から誘導される位相を入れたものとする. 一般に, U_{sa} と $U_{X_{sa}}$ は異なる.

例 1.2.2 $X = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とする. このとき, $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$ とすると, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cov}(U_{sa})$ であるが, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Cov}(U_{X_{sa}})$ である.

定義 1.2.3 $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$ を X_{sa} 上の層の圏とする.

定義 1.2.4 $\text{Op}^c(X_{sa})$ で, X の相対コンパクトな subanalytic 開集合のなす圏とし, X_{sa} から誘導される位相を入れたものを X_{sa}^c と書く. X_{sa}^c 上の前層 (resp. 層) の圏を $\text{Psh}(k_{X_{sa}^c})$ (resp. $\text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$) と書く.

命題 1.2.5 $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$ は, Grothendieck 圏である i.e. 生成元を持ち, small inductive limits と small filtrant inductive limits が完全となる圏である. 特に, Grothendieck 圏として, $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$ は, enough injective な対象を持つ.

命題 1.2.6 忘却関手 $\text{Mod}(k_{X_{sa}}) \rightarrow \text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ は圏同値を与える.

証明.

□

命題 1.2.7 $\{F_i\}_{i \in I}$ を $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$ の flitrant inductive system とし, $U \in \text{Op}^c(X_{sa})$ とする. このとき,

$$\varinjlim_{i \in I} \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \varinjlim_{i \in I} F_i)$$

が成り立つ.

証明. $\text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ で示せば十分である. “ \varinjlim ” F_i で, X_{sa}^c 上の前層 $V \mapsto \varinjlim_i \Gamma(U; F_i) = \varinjlim_i (F_i(U))$ を表す. $U \in \text{Op}^c(X_{sa})$ とし, S を U の有限被覆とする. 同型 (“ \varinjlim ” F_i)(S) $\rightarrow \varinjlim_i (F_i(S))$ が存在し, $F_i \in \text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ より, (“ \varinjlim ” F_i)(S) $\simeq \varinjlim_i (F_i(U)) =$ (“ \varinjlim ” F_i)(U) が成り立つ.

ここで, U の有限被覆の族 $\text{Cov}^f(U)$ は, $\text{Cov}(U)$ で cofinal なので, (“ \varinjlim ” F_i)(U) $\simeq \varinjlim_{S \in \text{Cov}^f(U)}$ (“ \varinjlim ” F_i)(S) $\simeq \varinjlim_{S \in \text{Cov}(U)}$ (“ \varinjlim ” F_i)(S) = (“ \varinjlim ” F_i)+(U) となる. よって,

$$\text{“}\varinjlim\text{”}F_i \xrightarrow{\sim} (\text{“}\varinjlim\text{”}F_i)^+ \xrightarrow{\sim} (\text{“}\varinjlim\text{”}F_i)^{++}$$

を得る. また, 層 $\varinjlim_i F_i$ の定義より, (“ \varinjlim ” F_i)+ = $\varinjlim_i F_i$ なので, “ \varinjlim ” $F_i = \varinjlim_i F_i$ が言える. これに $\Gamma(U; \bullet)$ を施せば, $\varinjlim_i \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \varinjlim_i F_i)$ となる. \square

命題 1.2.8 $F \in \text{Psh}(X_{sa}^c)$ が, 次の 2 条件を満たすとする.

- (i) $F(\emptyset) = 0$,
- (ii) 任意の $U, V \in \text{Op}^c(X_{sa})$ に対して,

$$0 \longrightarrow F(U \cup V) \longrightarrow F(U) \oplus F(V) \longrightarrow F(U \cap V)$$

は完全列である.

このとき, $F \in \text{Mod}(k_{X_{sa}^c}) \simeq \text{Mod}(k_{X_{sa}})$ である.

証明. $U \in \text{Op}^c(X_{sa})$ と U の有限被覆 $\{U_j\}_{j=1}^n$ とする. また, $U_{ij} = U_i \cap U_j$ と略記する. 次の列が完全であることを示せば良い.

$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq k \leq n} F(U_k) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} F(U_{ij}).$$

ただし, 2 番目の射は, $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$ を, $(s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}})_{1 \leq i < j \leq n}$ に対応させる射である.

n についての帰納法で示す. $n = 1$ は明らかで, $n = 2$ は仮定の (ii) そのものである. $1 \leq j \leq n-1$ では成り立つと仮定する. また, $U' = \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} U_k$ と略記する. このとき, 帰納法の仮定から, 完全列による可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F(U') \oplus F(U_n) & \longrightarrow & F(U' \cap U_n) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \bigoplus_{1 \leq k \leq n-1} F(U_k) \oplus F(U_n) & \longrightarrow & \bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} F(U_{in}) \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n-1} F(U_{ij}) & & \end{array}$$

を得る. この図式で diagram chasing を行えば, 目的の結果を得る. \square

1.3 Sheaves on sites and \mathbb{R} -constructible sheaves

$\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$ を X 上の \mathbb{R} -constructible な層の成すアーベル圏とする. また, \mathbb{R} -constructible で, 台がコンパクトな層は, その部分圏となり, $\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X)$ と書く.

$$\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X) \subset \text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X) \subset \text{Mod}(k_X)$$

である.

site 間の自然な射

$$\rho: X \rightarrow X_{sa}$$

が定まり, 次のような層の射 ρ_* , ρ^{-1} が取れる.

$$\text{Mod}(k_X) \xrightleftharpoons[\rho^{-1}]{\rho_*} \text{Mod}(k_{X_{sa}}).$$

ρ_* を $\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$ 及び $\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X)$ に制限したのも, ρ_* と書くこととする.

注意 1.3.1 任意の $F \in \text{Mod}(k_X)$ と $V \in \text{Op}^c(X_{sa})$ に対して,

$$\Gamma(V; \rho_*) \simeq \varinjlim_U \Gamma(V; \rho_* F_U) \simeq \Gamma(V; \varinjlim_U \rho_* F_U)$$

が成り立つ (U は X の相対コンパクトな subanalytic 開集合を動く). つまり, $\varinjlim_U \rho_* F_U \xrightarrow{\sim} \rho_* F$ である.

証明. $V \subset U$ ならば, $\Gamma(V; \rho_* F_U) \simeq \Gamma(V; \rho_* F)$ であることから分かる. □

注意 1.3.2 関手 ρ_* は filtrant inductive limits と可換でない.

証明. $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$ とすると, $\rho_* \varinjlim_n k_{V_n} \simeq \rho_* k_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ であるが, $0 \in \partial U$ なる $U \in \text{Op}^c(\mathbb{R}_{sa}^2)$ に対して, $\Gamma(U; \varinjlim_n \rho_* k_{V_n}) \simeq \varinjlim_n \Gamma(U; \rho_* k_{V_n}) = 0$ となる. □

命題 1.3.3 $U \in \text{Op}(X_{sa})$, $k_{U_{sa}} \in \text{Mod}(k_{X_{sa}})$ をとる. このとき, $k_{U_{sa}} \simeq \rho_* k_U$ である.

証明. $F \in \text{Psh}(k_{X_{sa}})$ を, $V \subset U$ のとき $F(V) = k$

$$F(V) = \begin{cases} k & (V \subset U), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

と定める. これは, separated であり, $k_{U_{sa}} = F^{++}$ である. さらに, $V \in \text{Op}(X_{sa})$ に対して, 埋め込み $F(V) \rightarrow \rho_* k_U(V)$ となるように射を作れる. $(\bullet)^{++}$ は完全関手なので, monomorphism $F^{++} \rightarrow \rho_* k_U$ を作れる. よって, epimorphism であることを示せば良い. これは, 次に紹介する命題を用いれば, 次のように示せる. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を U の連結成分の族とする.

$$\mathcal{T} := \left\{ W \in \text{Op}(X_{sa}) \mid \begin{array}{l} W : \text{連結}, \\ W \cap U_\lambda^c = \emptyset \ (\forall \lambda \in \Lambda) \end{array} \right\}$$

と定めれば, $\{U_\lambda\}_\lambda$ が局所有限であることから, \mathcal{T} は, X_{sa} の位相の基底 (basis for the topology of X) となる. 各 $W \in \mathcal{T}$ に対して,

$$F(W) \simeq \rho_* k_U(W) = \begin{cases} k & (W \subset U), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

となる. よって, $F^{++} \simeq \rho_* k_U$ となる. □

命題 1.3.4 $F, G \in \text{Mod}(k_{X_{sa}})$ とする.

$$\begin{aligned} & \varphi \in \text{Hom}_{k_{X_{sa}}}(F, G) \text{ が epimorphism である} \\ \iff & \forall V \in \text{Op}(X_{sa}), \exists \{V_i\}_{i \in I} \in \text{Cov}(V) \text{ s.t. } [\forall s \in G(V), \exists t_i \in F(V_i) \text{ s.t. } \varphi(t_i) = s|_{V_i} \ (i \in I)] \end{aligned}$$

であることは同値である.

証明. 証明は参考文献のどれにも書いていないような気がするので略. □

今回のセミナーでは, \mathcal{T} が任意の $V \in \text{Op}(X_{sa})$ の (X_{sa} の位相での) 被覆となれば, 命題の被覆を \mathcal{T} とすれば良いので, これを示した. X_{sa} の位相で基底となるというのは, おそらく, そのような事実から示せると思われる.

注意 (“基底になる”を無視した証明) \mathcal{T} は, $\{U_\lambda\}$ の局所有限性と X が実解析的多様体である事実から, (相対コンパクトな) 開集合からなる X の (通常の位相の) 被覆を含むことが示せる. これが示せると, 任意の $V \in \text{Op}(X_{sa})$ に対し, $\mathcal{T} \cap V$ が X_{sa} の被覆となることが, 次のように示せる.

任意の $V \in \text{Op}(X_{sa})$, コンパクト集合 $K \subset X$ をとる. $K \cap \bar{V}$ がコンパクトであり, \mathcal{T} が X の被覆なので, 有限部分集合 $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ で, $K \cap \bar{V}$ の被覆となるものが存在する. このとき, $S_0 = \mathcal{T}_0 \cap V$ とすれば, $K \cap \bigcup_{W \in S_0} W = K \cap V$ が成り立つ.

($K \cap \bigcup_{W' \in \mathcal{T}_0} W' \supset K \cap \bar{V}$ と $\bigcup_{W' \in \mathcal{T}_0} (W' \cap V) \subset V$ より $K \cap \bigcup_{W \in S_0} W = K \cap V$ である.)

注意 (\mathcal{T} が X の被覆であること) 任意の点 $x \in X$ に対して, 十分小さい相対コンパクトな subanalytic 開近傍 W を取る. このような近傍は, 例えば, W をある座標近傍の中に入るように作ればユークリッド空間で考えて良く, semi-analytic 開集合である開球を取れば簡単に作れる (同相写像で戻す).

ここで, \bar{W} はコンパクトであり, U の連結成分 $\{U_\lambda\}$ は局所有限なので, W と有限枚しか交わらない.

W と交わる連結成分 $\{U_i\}_{i: \text{finite}}$ から, x と異なる点 $u_i \in U_i$ を代表点として取る ($x \in U_i^c$ なら $W \cap U_i \neq \emptyset$ より必ず取れて, $x \in U_i$ の場合も X が多様体なので取れる).

選んだ有限個の代表点 u_i と x の最小距離 $r = \min_i \text{dist}(u_i, x)$ を考える (ユークリッド空間で考えても良いし計量を入れても良い). そこで, r 以下の半径を持つ x 中心の円を W として取り直す.

W は連結で, 相対コンパクトな subanalytic 開集合となっており, 未だ交わっている可能性のある U の連結成分に関しても, 選んだ代表点は含まれていないので, 完全には含んでいない.

よって, $W \in \mathcal{T}$ であり, 各点 x に対してこのような W_x を取れば, X の被覆となることが示せる.

証明を作る際, 間違いを起こしたのでメモしておく. 大したことは言っていないので読み飛ばし推奨.

メモ W に含まれている U_i の閉包を除けば, 有限枚の開集合の共通部分となり, 開集合になるが, 連結でなくなる例を簡単に作れる (半径 2 の円の中に, 2 つの半径 1 の円を, 内接するように書く).

また, 点 x に対して, $\min_i \text{dist}(x, U_i)$ とするのは, $x \in \bar{U}_i$ のときに 0 となるので注意が必要である.

$x \in \bar{U}_i$ を場合分けして考えると, W が U_i を含んでいないか考える必要があり, 結局, x と異なる U_i の点を, (実数の連続性から?) 取る必要が出てくる.

2 Appendix

2.1 Subanalytic set

この節では, subanalytic set について述べる.

2.1.1 Semi-analytic set

執筆中

2.1.2 Subanalytic set

執筆中

2.2 \mathbb{R} -constructible sheaves

この節では, \mathbb{R} -constructible な対象について述べる.

2.2.1 stratification

執筆中

2.2.2 \mathbb{R} -constructible

執筆中

参考文献

- [1] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*. No. 292 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1990.
- [2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Ind-sheaves*. No. 271 in Astérisque. Société mathématique de France, 2001.
- [3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Category and Sheaves*. No. 332 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2006.
- [4] Luca Prelli. *Sheaves on subanalytic sites*. No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.