# Sheaves on subanalytic sites セミナーノート

# 2022年4月6日

# 目次

0	Preface	1
1	Sheaves on sites	1
1.1	Sites and sheaves	1
1.2	Subanalytic sites and sheaves	3
1.3	Sheaves on sites and $\mathbb{R}$ -constructible sheaves	5
2	Appendix	6
2.1	Subanalytic set	6
2.2	$\mathbb{R}$ -constructible sheaves	7

#### 0 Preface

このノートでは、L. Prelli, Sheaves on Subanalytic Site [4] を参考にして、Subanalytic sites や、その上の層についてまとめる。また、必要に応じて、Kashiwara-Schapira[1]、[3] を参照する.

#### 1 Sheaves on sites

# 1.1 Sites and sheaves

この節では、Kashiwara-Schapira、Ind-sheaves [2] も合わせて参照して、景 (site) 上の層について述べる.

層は、位相空間 X の開集合の圏  $\operatorname{Op}(X)$  に対して定められる。景 (site) とは、任意の圏に対して抽象的な被覆によって位相を入れたもので、これにより、層の概念を拡張できる。

以降、考える圏は、U-small であり、有限の積とファイバー積が存在するものとする.このような圏 C では、射  $V \to U$  の圏  $C_U$  も有限の積とファイバー積が存在する.

また, C が終対象 (terminal object) を持てば,

C が有限の積とファイバー積を持つ  $\iff$  C が有限の射影極限を持つ

が成り立つ. さらに、このとき、終対象をTとして、

$$X \times Y = X \times_T Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{C})$$

である.

記号 射  $V \to U$  と  $S \subset \mathrm{Ob}(C_U)$  に対して、

$$V \times_U S := \{V \times_U W \to V \mid W \in S\} \subset \mathrm{Ob}(C_V)$$

と定める.

注意 位相空間 X とし,  $C = \operatorname{Op}(X)$  とする. このとき,  $V, W \in C_U = \operatorname{Op}(U)$  に対して,

$$V \times_U W = V \cap W$$

である.

定義 1.1.1  $S_1, S_2 \subset \mathrm{Ob}(C_U)$  に対して,  $S_1$  が  $S_2$  の細分 (refinement) とは, 任意の  $V \to U \in S_1$  に対して, ある  $V' \to U \in S_2$  が存在して,  $V \to V' \to U$  と分解できることを言う. また, これを  $S_1 \preceq S_2$  と書く.

定義 1.1.2  $\mathcal{C}$  上の Grothendieck 位相とは,  $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$  の部分集合の族  $\{\mathrm{Cov}(U)\}_{U\in\mathcal{C}}$  で, 次の公理を満たすもの を言う:

- (GT1)  $\{id_U: U \to U\} \in Cov(U)$  である.
- (GT2)  $S_1, S_2 \subset \mathcal{C}_U$  とする.  $S_1 \in \text{Cov}(U)$  かつ  $S_1 \leq S_2$  ならば,  $S_2 \in \text{Cov}(U)$  である.
- (GT3)  $S \in Cov(U)$  ならば、任意の  $V \to U$  に対して、 $V \times_U S \in Cov(V)$  である.
- (GT4)  $S_1, S_2 \subset Ob(\mathcal{C}_U)$  が、 $S_1 \in Cov(U)$  および  $V \times_U S_2 \in Cov(V)$   $(\forall V \in S_1)$  を満たせば、 $S_2 \in Cov(U)$  である.

 $S \in \text{Cov}(U)$  を U の被覆 (covering) という. 景 X とは, 圏  $\mathcal{C}_X$  で, 有限の積とファイバー積が定義され, Grothendieck 位相が定められているものを言う.

 $C_X$  に終対象が存在する場合は、 $C_X$  を X と書くことにする.

#### **定義 1.1.3** *X,Y* を景とする.

- (i) 関手  $f^t: \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$  が連続 (continuous) とは、次の 2 条件が満たされることを言う.
  - (1) ファイバー積と可換である, i.e. 任意の射  $V \to U$ ,  $W \to U$  に対して, $f^t(V \times_U W) \xrightarrow{\sim} f^t(V) \times_{f^t(U)} f^t(W)$  である.
  - (2) 任意の  $V \in \mathcal{C}_Y$ ,  $S \in \text{Cov}(V)$  に対し,  $f^t(S) \in \text{Cov}(f^t(V))$  である. ただし,  $f^t(S) \coloneqq \{f^t(W) \to f^t(V) \mid W \in S\}$  とする.
- (ii) 景の間の射  $f: X \to Y$  とは、連続な関手  $f^t: \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$  である.
- 例 1.1.4 (i) 位相空間 X に対して, X の開集合に包含射で順序を付けた圏を  $\mathrm{Op}(X)$  とする.  $U \in \mathrm{Op}(X)$  に対して,  $\mathrm{Op}(X)_U = \mathrm{Op}(U)$  である. 通常の被覆で Grothedieck 位相を入れた景を, X と書く (終対象は  $X \in \mathrm{Op}(X)$ ).
- (ii)  $f:X\to Y$  を位相空間の間の連続写像とする. 関手  $f^t:\operatorname{Op}(Y)\to\operatorname{Op}(X)$  を  $V\mapsto f^{-1}(V)$  として、 景の間の射も  $f:X\to Y$  と書ける. つまり、位相空間を景とすると、連続写像が景の間の関手となる  $(f^{-1}(V\cap W)=f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W))$ .
- (iii) X を位相空間とする.  $\operatorname{Op}(X)$  には、次のような位相も入る.  $S \subset \operatorname{Op}(U)$  は、U の被覆で、有限部分被覆を持つとする. このような被覆の集合は、Grothendieck 位相となる. この景を  $X_f$  と書く.
- (iv) X を局所コンパクトな位相空間とする.  $X_{lf}$  を,  $\operatorname{Op}(X)$  に次のような位相を入れた景とする:  $S \subset \operatorname{Op}(X)$  が  $X_{lf}$  での被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限進ん集合  $S_0 \subset S$  で,  $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$  となるものが存在する. このとき, 自然な射  $U_{lf} \to U_{X_{lf}}$  が存在するが, 一般には同型でない事に注意する.

k-加群の層を定義する. ここで, k は, 可換環とする.

# **定義 1.1.5** *X* を景とする.

- (i) F が X 上の k-加群の前層 (presheaf) とは、関手  $\mathcal{C}_X^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(k)$  であり、前層の間の射は関手の射として 定める.
- (ii)  $Psh(k_X)$  を X 上の k-加群の前層の圏とする. この圏はアーベル圏である.

(iii) X 上の k-加群の前層 F と  $S \subset \mathcal{C}_U$  に対して,

$$F(S) := \operatorname{Ker} \left( \prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'') \right)$$

と定める. (ただし, 二重矢印の核は, 2 つの射の差で定義される. ここでの 2 つの射は,  $F(V') \to F(V' \times_U V'')$  と  $F(V'') \to F(V' \times_U V'')$  である.)

- (iv) X 上の k-加群の前層 F が分離的 (separated) (resp. 層 (sheaf) である) とは、任意の  $U \in \mathcal{C}_X$  と任意の 被覆  $X \in \mathrm{Cov}(U)$  に対して、自然な射  $F(U) \to F(S)$  が monomorphism(resp. isomorphism) となることである.
- (v)  $\operatorname{Mod}(k_X)$  を X 上の k-加群の層の圏とする.  $\operatorname{Mod}(k_X)$  は,  $\operatorname{Psh}(k_X)$  の加法的な充満部分圏 (full additive subcategory) である. また,  $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}(k_X)}$  を  $\operatorname{Hom}_{k_X}$  と略記する.

# 定義 1.1.6 (層化 (sheafification))

$$F^+(U) := \varinjlim_{S \in Cov(U)} F(S).$$

**定理 1.1.7** (i) 関手  $(\cdot)^+$ :  $Psh(k_X) \to Psh(k_X)$  は, 左完全である.

- (ii) 任意の  $F \in Psh(k_X)$  に対して,  $F^+$  は分離的な前層となる.
- (iii) 任意の分離的前層 F に対して,  $F^+$  は層となる.
- (iv) 関手  $(\cdot)^{++}$ :  $Psh(k_X) \to Mod(k_X)$  は、埋め込み関手  $\iota: Mod(k_X) \to Psh(k_X)$  の左随伴である.
  - (iv) は、 $\iota$  を省いて、次のように書かれることも多い:

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Psh}(k_X)}(F,G) \simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Mod}(k_X)}(F^{++},G) \ (F \in \operatorname{Psh}(k_X), \ G \in \operatorname{Mod}(k_X)).$$

#### 1.2 Subanalytic sites and sheaves

定義 1.2.1 (subanalytic site)  $Op(X_{sa})$  を X の subanalytic な部分集合の圏とする. この圏には, 次のような位相が入る:

 $S \subset \operatorname{Op}(X_{sa})$  が  $U \in \operatorname{Op}(X_{sa})$  の被覆であるとは, X の任意のコンパクト集合 K に対して, ある有限部分集合  $S_0 \subset S$  で,  $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$  となるものが存在する.

このような  $X_{sa}$  を subanalytic site と言う. また,  $U_{X_{sa}}$  を,  $\operatorname{Op}(X_{sa})\cap U$  に  $X_{sa}$  の位相から誘導される位相を入れたものとする. 一般に,  $U_{sa}$  と  $U_{X_{sa}}$  は異なる.

例 1.2.2  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  とする. このとき,  $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$  とすると,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cov}(U_{sa})$  であるが,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Cov}(U_{X_{sa}})$  である.

定義 1.2.3  $\operatorname{Mod}(k_{X_{sa}})$  を  $X_{sa}$  上の層の圏とする.

定義 1.2.4  $\operatorname{Op}^c(X_{sa})$  で、X の相対コンパクトな subanalytic 開集合のなす圏とし、 $X_{sa}$  から誘導される位相 を入れたものを  $X_{sa}^c$  と書く、 $X_{sa}^c$  上の前層 (resp. 層) の圏を  $\operatorname{Psh}(k_{X_{sa}^c})$ (resp.  $\operatorname{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ ) と書く.

命題 1.2.5  $\operatorname{Mod}(k_{X_{sa}})$  は、Grothendieck 圏である i.e. 生成元を持ち、small inductive limits と small filtrant inductive limits が完全となる圏である。特に、Grothendieck 圏として、 $\operatorname{Mod}(k_{X_{sa}})$  は、enough injective な対象を持つ。

命題 1.2.6 忘却関手  $\operatorname{Mod}(k_{X_{sa}}) \to \operatorname{Mod}(k_{X_{sa}^c})$  は圏同値を与える.

**証明.** そのうち執筆

命題 1.2.7  $\{F_i\}_{i\in I}$  を  $\operatorname{Mod}(k_{X_{sa}})$  の filitrant inductive system とし,  $U\in\operatorname{Op}^c(X_{sa})$  とする. このとき,

$$\underset{i \in I}{\underline{\lim}} \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \underset{i \in I}{\underline{\lim}} F_i)$$

が成り立つ.

証明.  $\operatorname{Mod}(k_{X_{sa}^c})$  で示せば十分である. " $\varinjlim_i$ " $F_i$  で、 $X_{sa}^c$  上の前層  $V \mapsto \varinjlim_i \Gamma(U; F_i) = \varinjlim_i (F_i(U))$  を表す.  $U \in \operatorname{Op}^c(X_{sa})$  とし、S を U の有限被覆とする. 同型 (" $\varinjlim_i$ " $F_i$ ) $(S) \to \varinjlim_i (F_i(S))$  が存在し、 $F_i \in \operatorname{Mod}(k_{X_{sa}^c})$  より、(" $\varinjlim_i$ " $F_i$ ) $(S) \simeq \varinjlim_i (F_i(U)) = ("<math>\varinjlim_i$ " $F_i$ )(U) が成り立つ.

ここで、U の有限被覆の族  $\mathrm{Cov}^f(U)$  は、 $\mathrm{Cov}(U)$  で cofinal なので、(" $\varinjlim_i$ " $F_i$ )(U)  $\simeq \varinjlim_{S \in \mathrm{Cov}^f(U)}$  (" $\varinjlim_i$ " $F_i$ )(S)  $\simeq$ 

 $\varinjlim_{S \in \operatorname{Cov}(U)} (``\varinjlim_i"F_i)(S) = (``\varinjlim_i"F_i)^+(U) となる. よって,$ 

$$"\varinjlim_{i}"F_{i} \xrightarrow{\sim} ("\varinjlim_{i}"F_{i})^{+} \xrightarrow{\sim} ("\varinjlim_{i}"F_{i})^{++}$$

を得る。また、層  $\varinjlim_i F_i$  の定義より、(" $\varinjlim_i "F_i$ )++ =  $\varinjlim_i F_i$  なので、" $\varinjlim_i "F_i$  =  $\varinjlim_i F_i$  が言える。これに  $\Gamma(U; \bullet)$  を施せば、 $\varinjlim_i \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \varinjlim_i F_i)$  となる。

**命題 1.2.8**  $F \in Psh(X_{sa}^c)$  が、次の 2 条件を満たすとする.

- (i)  $F(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) 任意の  $U, V \in \operatorname{Op}^c(X_{sa})$  に対して,

$$0 \longrightarrow F(U \cup V) \longrightarrow F(U) \oplus F(V) \longrightarrow F(U \cap V)$$

は完全列である.

このとき,  $F \in \operatorname{Mod}(k_{X_{sa}^c}) \simeq \operatorname{Mod}(k_{X_{sa}})$  である.

**証明.**  $U \in \operatorname{Op}^c(X_{sa})$  と U の有限被覆  $\{U_j\}_{j=1}^n$  とする. また,  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  と略記する. 次の列が完全であることを示せば良い.

$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow \bigoplus_{1 \le k \le n} F(U_k) \longrightarrow \bigoplus_{1 \le i < j \le n} F(U_{ij}) .$$

ただし、2 番目の射は、 $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$  を、 $(s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}})_{1 \leq i < j \leq n}$  に対応させる射である.

n についての帰納法で示す. n=1 は明らかで, n=2 は仮定の (ii) そのものである.  $1\leq j\leq n-1$  では成り立つと仮定する. また,  $U'=\bigcup_{1\leq k\leq n-1}U_k$  と略記する. このとき, 帰納法の仮定から, 完全列による可換図式

$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow F(U') \oplus F(U_n) \longrightarrow F(U' \cap U_n)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\bigoplus_{1 \le k \le n-1} F(U_k) \oplus F(U_n) \longrightarrow \bigoplus_{1 \le i \le n-1} F(U_{in})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\bigoplus_{1 \le i < j \le n-1} F(U_{ij})$$

を得る. この図式で diagram chasing を行えば、目的の結果を得る.

#### 1.3 Sheaves on sites and $\mathbb{R}$ -constructible sheaves

 $\operatorname{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$  を X 上の  $\mathbb{R}$ -constructible な層の成すアーベル圏とする. また,  $\mathbb{R}$ -constructible で, 台がコンパクトな層は, その部分圏となり,  $\operatorname{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X)$  と書く.

$$\operatorname{Mod}_{\mathbb{R}_{-\mathsf{C}}}^c(k_X) \subset \operatorname{Mod}_{\mathbb{R}_{-\mathsf{C}}}(k_X) \subset \operatorname{Mod}(k_X)$$

である.

site 間の自然な射

$$\rho: X \to X_{sa}$$

が定まり、次のような層の射  $\rho_*$ ,  $\rho^{-1}$  が取れる.

$$\operatorname{Mod}(k_X) \xrightarrow{\rho_*} \operatorname{Mod}(k_{X_{sa}})$$
.

 $ho_*$  を  $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$  及び  $\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X)$  に制限したものも,  $ho_*$  と書くこととする.

注意 1.3.1 任意の  $F \in \operatorname{Mod}(k_X)$  と  $V \in \operatorname{Op}^c(X_{sa})$  に対して,

$$\Gamma(V; \rho_*) \simeq \varinjlim_U \Gamma(V; \rho_* F_U) \simeq \Gamma(V; \varinjlim_U \rho_* F_U)$$

が成り立つ (U は X の相対コンパクトな subanalytic 開集合を動く). つまり、  $\varinjlim_U \rho_* F_U \xrightarrow{\sim} \rho_* F$  である.

証明.  $V \subset U$  ならば,  $\Gamma(V; \rho_* F_U) \simeq \Gamma(V; \rho_* F)$  であることから分かる.

注意 1.3.2 関手  $\rho_*$  は filtrant inductive limits と可換でない.

証明.  $V_n = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| > \frac{1}{n}\right\}$  とすると,  $\rho_* \varinjlim_n k_{V_n} \simeq \rho_* k_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$  であるが,  $0 \in \partial U$  なる  $U \in \operatorname{Op}^c(\mathbb{R}^2_{sa})$  に対して,  $\Gamma(U; \varinjlim_n \rho_* k_{V_n}) \simeq \varinjlim_n \Gamma(U; \rho_* k_{V_n}) = 0$  となる.

命題 1.3.3  $U \in \operatorname{Op}(X_{sa}), k_{U_{sa}} \in \operatorname{Mod}(k_{X_{sa}})$  をとる. このとき,  $k_{U_{sa}} \simeq \rho_* k_U$  である.

証明.  $F \in Psh(k_{X_{sa}})$  を,  $V \subset U$  のとき F(V) = k

$$F(V) = \begin{cases} k & (V \subset U), \\ 0 & (otherwise), \end{cases}$$

と定める.これは、separated であり、 $k_{U_{sa}}=F^{++}$  である.さらに、 $V\in {\rm Op}(X_{sa})$  に対して、埋め込み  $F(V)\to \rho_*k_U(V)$  となるように射を作れる.( $\bullet$ ) $^{++}$  は完全関手なので、monomorphism  $F^{++}\to \rho_*k_U$  を作れる.よって、epimorphism であることを示せば良い.これは、次に紹介する命題を用いれば、次のように示せる.  $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$  を U の連結成分の族とする.

$$\mathcal{T} := \left\{ W \in \operatorname{Op}(X_{sa}) \middle| \begin{array}{c} W : \text{ \underline{a}}\text{!} \text{!} \\ W \cap U_{\lambda}{}^{c} = \emptyset \ (\forall \lambda \in \Lambda) \end{array} \right\}$$

と定めれば、 $\{U_{\lambda}\}_{\lambda}$  が局所有限であることから、 $\mathcal{T}$  は、 $X_{sa}$  の位相の基底 (basis for the topology of X) となる. 各  $W \in \mathcal{T}$  に対して、

$$F(W) \simeq \rho_* k_U(W) = \begin{cases} k & (W \subset U), \\ 0 & (otherwise), \end{cases}$$

となる. よって,  $F^{++} \simeq \rho_* k_U$  となる.

命題 1.3.4  $F, G \in \text{Mod}(k_{X_{sq}})$  とする.

 $arphi\in \operatorname{Hom}_{k_{X_{sa}}}(F,G)$  స్ epimorphism ొచ్చి  $\ \Leftrightarrow \forall V\in \operatorname{Op}(X_{sa}),\ \exists \{V_i\}_{i\in I}\in \operatorname{Cov}(V)\ \mathrm{s.t.}\ \left[\forall s\in G(V),\exists t_i\in F(V_i)\ \mathrm{s.t.}\ arphi(t_i)=s|_{V_i}\ (i\in I)
ight]$ 

であることは同値である.

証明. 証明は参考文献のどれにも書いていないような気がするので略.

今回のセミナーでは、任意の  $V \in \operatorname{Op}(X_{sa})$  に対し、 $\mathcal{T} \cap V$  が  $(X_{sa}$  の位相での)V の被覆となれば、命題の被覆を  $\mathcal{T} \cap V$  とすれば良いので、これを示した。  $X_{sa}$  の位相で基底となると言うのは、おそらく、そのような事実から示せると思われる。

注意 ("基底になる"を無視した証明)  $\mathcal{T}$  は,  $\{U_{\lambda}\}$  の局所有限性と X が実解析的多様体である事実から, (相対コンパクトな) 開集合からなる X の (通常の位相の) 被覆を含むことが示せる. これが示せると, 任意の $V \in \operatorname{Op}(X_{sa})$  に対し,  $\mathcal{T} \cap V$  が  $X_{sa}$  の被覆となることが, 次のように示せる.

任意の  $V \in \operatorname{Op}(X_{sa})$ , コンパクト集合  $K \subset X$  をとる.  $K \cap \overline{V}$  がコンパクトであり,  $\mathcal{T}$  が X の被覆なので, 有限部分集合  $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$  で,  $K \cap \overline{V}$  の被覆となるものが存在する. このとき,  $S_0 = \mathcal{T}_0 \cap V$  とすれば,  $K \cap \bigcup_{W \in S_0} W = K \cap V$  が成り立つ.

 $(K\cap \bigcup_{W'\in\mathcal{T}_0}W'\supset K\cap\overline{V}$  と  $\bigcup_{W'\in\mathcal{T}_0}(W'\cap V)\subset V$  より  $K\cap \bigcup_{W\in S_0}W=K\cap V$  である.)

**注意** (T が X の被覆であること) 任意の点  $x \in X$  に対して、十分小さい相対コンパクトな subanalytic 開近傍 W を取る.このような近傍は、例えば、W をある座標近傍の中に入るように作ればユークリッド空間で考えて良く、semi-analytic 開集合である開球を取れば簡単に作れる (同相写像で戻す).

ここで,  $\overline{W}$  はコンパクトであり, U の連結成分  $\{U_{\lambda}\}$  は局所有限なので, W と有限枚しか交わらない.

W と交わる連結成分  $\{U_i\}_{i:\text{finite}}$  から、x とは異なる点  $u_i \in U_i$  を代表点として取る  $(x \in U_i^c$  なら  $W \cap U_i \neq \emptyset$  より必ず取れて、 $x \in U_i$  の場合も X が多様体なので取れる).

選んだ有限個の代表点  $u_i$  と x の最小距離  $r=\min_i \operatorname{dist}(u_i,x)$  を考える (ユークリッド空間で考えても良いし計量を入れても良い). そこで, r 以下の半径を持つ x 中心の円を W として取り直す.

W は連結で、相対コンパクトな subanalytic 開集合となっており、未だ交わっている可能性のある U の連結成分に関しても、選んだ代表点は含まれていないので、完全には含んでいない.

よって,  $W \in \mathcal{T}$  であり, 各点 x に対してこのような  $W_x$  を取れば, X の被覆となることが示せる.

証明を作る際, 間違いを起こしたのでメモしておく. 大したことは言ってないので読み飛ばし推奨.

メモ W に含まれている  $U_i$  の閉包を除けば、有限枚の開集合の共通部分となり、開集合になるが、連結でなくなる例を簡単に作れる (半径 2 の円の中に、2 つの半径 1 の円を、内接するように書く).

また, 点x に対して,  $\min_i \operatorname{dist}(x, U_i)$  とするのは,  $x \in \overline{U_i}$  のときに 0 となるので注意が必要である.

 $x \in \overline{U_i}$  を場合分けして考えると, W が  $U_i$  を含んでいないか考える必要があり, 結局, x と異なる  $U_i$  の点を, (正規空間であることから?実数の連続性から?) 取る必要が出てくる.

# 2 Appendix

#### 2.1 Subanalytic set

この節では、subanalytic set について述べる.

# 2.1.1 Semi-analytic set

執筆中

#### 2.1.2 Subanalytic set

執筆中

#### 2.2 $\mathbb{R}$ -constructible sheaves

この節では、ℝ-constructible な対象について述べる.

#### 2.2.1 stratification

執筆中

#### 2.2.2 $\mathbb{R}$ -constructible

執筆中

# 参考文献

- [1] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. Sheaves on manifolds. No. 292 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1990.
- [2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Ind-sheaves*. No. 271 in Astérisque. Société mathématique de France, 2001.
- [3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Category and Sheaves*. No. 332 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2006.
- [4] Luca Prelli. Sheaves on subanalytic sites. No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.