

# Sheaves on subanalytic sites セミナーノート

2022 年 4 月 6 日

## 目次

0	Preface	1
1	Sheaves on sites	1
1.1	Sites and sheaves . . . . .	1
1.2	Subanalytic sites and sheaves . . . . .	3
1.3	Sheaves on sites and $\mathbb{R}$ -constructible sheaves . . . . .	5
2	Appendix	6
2.1	Subanalytic set . . . . .	6
2.2	$\mathbb{R}$ -constructible sheaves . . . . .	7

## 0 Preface

このノートでは, L. Prelli, Sheaves on Subanalytic Site [4] を参考にして, Subanalytic sites や, その上の層についてまとめる. また, 必要に応じて, Kashiwara-Schapira[1], [3] を参照する.

## 1 Sheaves on sites

### 1.1 Sites and sheaves

この節では, Kashiwara-Schapira, Ind-sheaves [2] も合わせて参照して, 景 (site) 上の層について述べる.

層は, 位相空間  $X$  の開集合の圏  $\mathrm{Op}(X)$  に対して定められる. 景 (site) とは, 任意の圏に対して抽象的な被覆によって位相を入れたもので, これにより, 層の概念を拡張できる.

以降, 考える圏は,  $\mathcal{U}$ -small であり, 有限の積とファイバー積が存在するものとする. このような圏  $\mathcal{C}$  では, 射  $V \rightarrow U$  の圏  $\mathcal{C}_U$  も有限の積とファイバー積が存在する.

また,  $\mathcal{C}$  が終対象 (terminal object) を持てば,

$$\mathcal{C} \text{ が有限の積とファイバー積を持つ} \iff \mathcal{C} \text{ が有限の射影極限を持つ}$$

が成り立つ. さらに, このとき, 終対象を  $T$  として,

$$X \times Y = X \times_T Y \quad (\forall X, Y \in \mathcal{C})$$

である.

記号 射  $V \rightarrow U$  と  $S \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$  に対して,

$$V \times_U S := \{V \times_U W \rightarrow V \mid W \in S\} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_V)$$

と定める.

**注意** 位相空間  $X$  とし,  $\mathcal{C} = \mathrm{Op}(X)$  とする. このとき,  $V, W \in \mathcal{C}_U = \mathrm{Op}(U)$  に対して,

$$V \times_U W = V \cap W$$

である.

**定義 1.1.1**  $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$  に対して,  $S_1$  が  $S_2$  の細分 (refinement) とは, 任意の  $V \rightarrow U \in S_1$  に対して, ある  $V' \rightarrow U \in S_2$  が存在して,  $V \rightarrow V' \rightarrow U$  と分解できることを言う. また, これを  $S_1 \preceq S_2$  と書く.

**定義 1.1.2**  $\mathcal{C}$  上の Grothendieck 位相とは,  $\text{Ob}(\mathcal{C}_U)$  の部分集合の族  $\{\text{Cov}(U)\}_{U \in \mathcal{C}}$  で, 次の公理を満たすものを言う:

- (GT1)  $\{\text{id}_U : U \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$  である.
- (GT2)  $S_1, S_2 \subset \mathcal{C}_U$  とする.  $S_1 \in \text{Cov}(U)$  かつ  $S_1 \preceq S_2$  ならば,  $S_2 \in \text{Cov}(U)$  である.
- (GT3)  $S \in \text{Cov}(U)$  ならば, 任意の  $V \rightarrow U$  に対して,  $V \times_U S \in \text{Cov}(V)$  である.
- (GT4)  $S_1, S_2 \subset \text{Ob}(\mathcal{C}_U)$  が,  $S_1 \in \text{Cov}(U)$  および  $V \times_U S_2 \in \text{Cov}(V)$  ( $\forall V \in S_1$ ) を満たせば,  $S_2 \in \text{Cov}(U)$  である.

$S \in \text{Cov}(U)$  を  $U$  の被覆 (covering) という. 景  $X$  とは, 圏  $\mathcal{C}_X$  で, 有限の積とファイバー積が定義され, Grothendieck 位相が定められているものを言う.

$\mathcal{C}_X$  に終対象が存在する場合は,  $\mathcal{C}_X$  を  $X$  と書くことにする.

**定義 1.1.3**  $X, Y$  を景とする.

- (i) 関手  $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$  が連続 (continuous) とは, 次の 2 条件が満たされることを言う.
  - (1) ファイバー積と可換である,  
i.e. 任意の射  $V \rightarrow U, W \rightarrow U$  に対して,  $f^t(V \times_U W) \xrightarrow{\sim} f^t(V) \times_{f^t(U)} f^t(W)$  である.
  - (2) 任意の  $V \in \mathcal{C}_Y, S \in \text{Cov}(V)$  に対し,  $f^t(S) \in \text{Cov}(f^t(V))$  である.  
ただし,  $f^t(S) := \{f^t(W) \rightarrow f^t(V) \mid W \in S\}$  とする.
- (ii) 景の間の射  $f : X \rightarrow Y$  とは, 連続な関手  $f^t : \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$  である.

**例 1.1.4** (i) 位相空間  $X$  に対して,  $X$  の開集合に包含射で順序を付けた圏を  $\text{Op}(X)$  とする.  $U \in \text{Op}(X)$  に対して,  $\text{Op}(X)_U = \text{Op}(U)$  である. 通常の被覆で Grothendieck 位相を入れた景を,  $X$  と書く (終対象は  $X \in \text{Op}(X)$ ).

(ii)  $f : X \rightarrow Y$  を位相空間の間の連続写像とする. 関手  $f^t : \text{Op}(Y) \rightarrow \text{Op}(X)$  を  $V \mapsto f^{-1}(V)$  として, 景の間の射も  $f : X \rightarrow Y$  と書ける. つまり, 位相空間を景とすると, 連続写像が景の間の関手となる ( $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$ ).

(iii)  $X$  を位相空間とする.  $\text{Op}(X)$  には, 次のような位相も入る.  $S \subset \text{Op}(U)$  は,  $U$  の被覆で, 有限部分被覆を持つとする. このような被覆の集合は, Grothendieck 位相となる. この景を  $X_f$  と書く.

(iv)  $X$  を局所コンパクトな位相空間とする.  $X_{lf}$  を,  $\text{Op}(X)$  に次のような位相を入れた景とする:

$S \subset \text{Op}(X)$  が  $X_{lf}$  での被覆であるとは,  $X$  の任意のコンパクト集合  $K$  に対して, ある有限進ん集合  $S_0 \subset S$  で,  $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$  となるものが存在する.

このとき, 自然な射  $U_{lf} \rightarrow U_{X_{lf}}$  が存在するが, 一般には同型でない事に注意する.

$k$ -加群の層を定義する. ここで,  $k$  は, 可換環とする.

**定義 1.1.5**  $X$  を景とする.

- (i)  $F$  が  $X$  上の  $k$ -加群の前層 (presheaf) とは, 関手  $\mathcal{C}_X^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod}(k)$  であり, 前層の間の射は関手の射として定める.
- (ii)  $\text{Psh}(k_X)$  を  $X$  上の  $k$ -加群の前層の圏とする. この圏はアーベル圏である.

(iii)  $X$  上の  $k$ -加群の前層  $F$  と  $S \subset \mathcal{C}_U$  に対して,

$$F(S) := \text{Ker} \left( \prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'') \right)$$

と定める. (ただし, 二重矢印の核は, 2 つの射の差で定義される. ここでの 2 つの射は,

$F(V') \rightarrow F(V' \times_U V'')$  と  $F(V'') \rightarrow F(V' \times_U V'')$  である.)

(iv)  $X$  上の  $k$ -加群の前層  $F$  が分離的 (separated) (resp. 層 (sheaf) である) とは, 任意の  $U \in \mathcal{C}_X$  と任意の被覆  $X \in \text{Cov}(U)$  に対して, 自然な射  $F(U) \rightarrow F(S)$  が monomorphism (resp. isomorphism) となることである.

(v)  $\text{Mod}(k_X)$  を  $X$  上の  $k$ -加群の層の圏とする.  $\text{Mod}(k_X)$  は,  $\text{Psh}(k_X)$  の加法的な充満部分圏 (full additive subcategory) である. また,  $\text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}$  を  $\text{Hom}_{k_X}$  と略記する.

**定義 1.1.6** (層化 (sheafification))

$$F^+(U) := \varinjlim_{S \in \text{Cov}(U)} F(S).$$

**定理 1.1.7** (i) 関手  $(\cdot)^+ : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$  は, 左完全である.

(ii) 任意の  $F \in \text{Psh}(k_X)$  に対して,  $F^+$  は分離的な前層となる.

(iii) 任意の分離的前層  $F$  に対して,  $F^+$  は層となる.

(iv) 関手  $(\cdot)^{++} : \text{Psh}(k_X) \rightarrow \text{Mod}(k_X)$  は, 埋め込み関手  $\iota : \text{Mod}(k_X) \rightarrow \text{Psh}(k_X)$  の左随伴である.

(iv) は,  $\iota$  を省いて, 次のように書かれることも多い:

$$\text{Hom}_{\text{Psh}(k_X)}(F, G) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod}(k_X)}(F^{++}, G) \quad (F \in \text{Psh}(k_X), G \in \text{Mod}(k_X)).$$

## 1.2 Subanalytic sites and sheaves

**定義 1.2.1** (subanalytic site)  $\text{Op}(X_{sa})$  を  $X$  の subanalytic な部分集合の圏とする. この圏には, 次のような位相が入る:

$S \subset \text{Op}(X_{sa})$  が  $U \in \text{Op}(X_{sa})$  の被覆であるとは,  $X$  の任意のコンパクト集合  $K$  に対して, ある有限部分集合  $S_0 \subset S$  で,  $K \cap (\cup_{V \in S_0} V) = K \cap U$  となるものが存在する.

このような  $X_{sa}$  を subanalytic site と言う. また,  $U_{X_{sa}}$  を,  $\text{Op}(X_{sa}) \cap U$  に  $X_{sa}$  の位相から誘導される位相を入れたものとする. 一般に,  $U_{sa}$  と  $U_{X_{sa}}$  は異なる.

**例 1.2.2**  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  とする. このとき,  $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$  とすると,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Cov}(U_{sa})$  であるが,  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Cov}(U_{X_{sa}})$  である.

**定義 1.2.3**  $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$  を  $X_{sa}$  上の層の圏とする.

**定義 1.2.4**  $\text{Op}^c(X_{sa})$  で,  $X$  の相対コンパクトな subanalytic 開集合のなす圏とし,  $X_{sa}$  から誘導される位相を入れたものを  $X_{sa}^c$  と書く.  $X_{sa}^c$  上の前層 (resp. 層) の圏を  $\text{Psh}(k_{X_{sa}^c})$  (resp.  $\text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$ ) と書く.

**命題 1.2.5**  $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$  は, Grothendieck 圏である i.e. 生成元を持ち, small inductive limits と small filtrant inductive limits が完全となる圏である. 特に, Grothendieck 圏として,  $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$  は, enough injective な対象を持つ.

**命題 1.2.6** 忘却関手  $\text{Mod}(k_{X_{sa}}) \rightarrow \text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$  は圏同値を与える.

証明.

□

**命題 1.2.7**  $\{F_i\}_{i \in I}$  を  $\text{Mod}(k_{X_{sa}})$  の flitrant inductive system とし,  $U \in \text{Op}^c(X_{sa})$  とする. このとき,

$$\varinjlim_{i \in I} \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \varinjlim_{i \in I} F_i)$$

が成り立つ.

**証明.**  $\text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$  で示せば十分である. “ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$  で,  $X_{sa}^c$  上の前層  $V \mapsto \varinjlim_i \Gamma(U; F_i) = \varinjlim_i (F_i(U))$  を表す.  $U \in \text{Op}^c(X_{sa})$  とし,  $S$  を  $U$  の有限被覆とする. 同型 (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )( $S$ )  $\rightarrow \varinjlim_i (F_i(S))$  が存在し,  $F_i \in \text{Mod}(k_{X_{sa}^c})$  より, (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )( $S$ )  $\simeq \varinjlim_i (F_i(U)) =$  (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )( $U$ ) が成り立つ.

ここで,  $U$  の有限被覆の族  $\text{Cov}^f(U)$  は,  $\text{Cov}(U)$  で cofinal なので, (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )( $U$ )  $\simeq \varinjlim_{S \in \text{Cov}^f(U)}$  (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )( $S$ )  $\simeq \varinjlim_{S \in \text{Cov}(U)}$  (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )( $S$ ) = (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )+( $U$ ) となる. よって,

$$\text{“}\varinjlim_i\text{”} F_i \xrightarrow{\sim} (\text{“}\varinjlim_i\text{”} F_i)^+ \xrightarrow{\sim} (\text{“}\varinjlim_i\text{”} F_i)^{++}$$

を得る. また, 層  $\varinjlim_i F_i$  の定義より, (“ $\varinjlim_i$ ”  $F_i$ )+ =  $\varinjlim_i F_i$  なので, “ $\varinjlim_i$ ”  $F_i = \varinjlim_i F_i$  が言える. これに  $\Gamma(U; \bullet)$  を施せば,  $\varinjlim_i \Gamma(U; F_i) \simeq \Gamma(U; \varinjlim_i F_i)$  となる.  $\square$

**命題 1.2.8**  $F \in \text{Psh}(X_{sa}^c)$  が, 次の 2 条件を満たすとする.

- (i)  $F(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) 任意の  $U, V \in \text{Op}^c(X_{sa})$  に対して,

$$0 \longrightarrow F(U \cup V) \longrightarrow F(U) \oplus F(V) \longrightarrow F(U \cap V)$$

は完全列である.

このとき,  $F \in \text{Mod}(k_{X_{sa}^c}) \simeq \text{Mod}(k_{X_{sa}})$  である.

**証明.**  $U \in \text{Op}^c(X_{sa})$  と  $U$  の有限被覆  $\{U_j\}_{j=1}^n$  とする. また,  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  と略記する. 次の列が完全であることを示せば良い.

$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq k \leq n} F(U_k) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} F(U_{ij}) .$$

ただし, 2 番目の射は,  $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$  を,  $(s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}})_{1 \leq i < j \leq n}$  に対応させる射である.

$n$  についての帰納法で示す.  $n = 1$  は明らかで,  $n = 2$  は仮定の (ii) そのものである.  $1 \leq j \leq n-1$  では成り立つと仮定する. また,  $U' = \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} U_k$  と略記する. このとき, 帰納法の仮定から, 完全列による可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F(U) & \longrightarrow & F(U') \oplus F(U_n) & \longrightarrow & F(U' \cap U_n) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \bigoplus_{1 \leq k \leq n-1} F(U_k) \oplus F(U_n) & \longrightarrow & \bigoplus_{1 \leq i \leq n-1} F(U_{in}) \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n-1} F(U_{ij}) & & \end{array}$$

を得る. この図式で diagram chasing を行えば, 目的の結果を得る.  $\square$

### 1.3 Sheaves on sites and $\mathbb{R}$ -constructible sheaves

$\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$  を  $X$  上の  $\mathbb{R}$ -constructible な層の成すアーベル圏とする. また,  $\mathbb{R}$ -constructible で, 台がコンパクトな層は, その部分圏となり,  $\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X)$  と書く.

$$\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X) \subset \text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X) \subset \text{Mod}(k_X)$$

である.

site 間の自然な射

$$\rho: X \rightarrow X_{sa}$$

が定まり, 次のような層の射  $\rho_*$ ,  $\rho^{-1}$  が取れる.

$$\text{Mod}(k_X) \xrightleftharpoons[\rho^{-1}]{\rho_*} \text{Mod}(k_{X_{sa}}).$$

$\rho_*$  を  $\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$  及び  $\text{Mod}_{\mathbb{R}\text{-c}}^c(k_X)$  に制限したのも,  $\rho_*$  と書くこととする.

**注意 1.3.1** 任意の  $F \in \text{Mod}(k_X)$  と  $V \in \text{Op}^c(X_{sa})$  に対して,

$$\Gamma(V; \rho_*) \simeq \varinjlim_U \Gamma(V; \rho_* F_U) \simeq \Gamma(V; \varinjlim_U \rho_* F_U)$$

が成り立つ ( $U$  は  $X$  の相対コンパクトな subanalytic 開集合を動く). つまり,  $\varinjlim_U \rho_* F_U \xrightarrow{\sim} \rho_* F$  である.

**証明.**  $V \subset U$  ならば,  $\Gamma(V; \rho_* F_U) \simeq \Gamma(V; \rho_* F)$  であることから分かる. □

**注意 1.3.2** 関手  $\rho_*$  は filtrant inductive limits と可換でない.

**証明.**  $V_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > \frac{1}{n}\}$  とすると,  $\rho_* \varinjlim_n k_{V_n} \simeq \rho_* k_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$  であるが,  $0 \in \partial U$  なる  $U \in \text{Op}^c(\mathbb{R}_{sa}^2)$  に対して,  $\Gamma(U; \varinjlim_n \rho_* k_{V_n}) \simeq \varinjlim_n \Gamma(U; \rho_* k_{V_n}) = 0$  となる. □

**命題 1.3.3**  $U \in \text{Op}(X_{sa})$ ,  $k_{U_{sa}} \in \text{Mod}(k_{X_{sa}})$  をとる. このとき,  $k_{U_{sa}} \simeq \rho_* k_U$  である.

**証明.**  $F \in \text{Psh}(k_{X_{sa}})$  を,  $V \subset U$  のとき  $F(V) = k$

$$F(V) = \begin{cases} k & (V \subset U), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

と定める. これは, separated であり,  $k_{U_{sa}} = F^{++}$  である. さらに,  $V \in \text{Op}(X_{sa})$  に対して, 埋め込み  $F(V) \rightarrow \rho_* k_U(V)$  となるように射を作れる.  $(\bullet)^{++}$  は完全関手なので, monomorphism  $F^{++} \rightarrow \rho_* k_U$  を作れる. よって, epimorphism であることを示せば良い. これは, 次に紹介する命題を用いれば, 次のように示せる.  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $U$  の連結成分の族とする.

$$\mathcal{T} := \left\{ W \in \text{Op}(X_{sa}) \mid \begin{array}{l} W : \text{連結}, \\ W \cap U_\lambda^c = \emptyset \ (\forall \lambda \in \Lambda) \end{array} \right\}$$

と定めれば,  $\{U_\lambda\}_\lambda$  が局所有限であることから,  $\mathcal{T}$  は,  $X_{sa}$  の位相の基底 (basis for the topology of  $X$ ) となる. 各  $W \in \mathcal{T}$  に対して,

$$F(W) \simeq \rho_* k_U(W) = \begin{cases} k & (W \subset U), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

となる. よって,  $F^{++} \simeq \rho_* k_U$  となる. □

**命題 1.3.4**  $F, G \in \text{Mod}(k_{X_{sa}})$  とする.

$$\begin{aligned} & \varphi \in \text{Hom}_{k_{X_{sa}}}(F, G) \text{ が epimorphism である} \\ \iff & \forall V \in \text{Op}(X_{sa}), \exists \{V_i\}_{i \in I} \in \text{Cov}(V) \text{ s.t. } [\forall s \in G(V), \exists t_i \in F(V_i) \text{ s.t. } \varphi(t_i) = s|_{V_i} (i \in I)] \end{aligned}$$

であることは同値である.

**証明.** 証明は参考文献のどれにも書いていないような気がするので略. □

今回のセミナーでは,  $\mathcal{T}$  が任意の  $V \in \text{Op}(X_{sa})$  の ( $X_{sa}$  の位相での) 被覆となれば, 命題の被覆を  $\mathcal{T}$  とすれば良いので, これを示した.  $X_{sa}$  の位相で基底となるというのは, おそらく, そのような事実から示せると思われる.

**注意** (“基底になる”を無視した証明)  $\mathcal{T}$  は,  $\{U_\lambda\}$  の局所有限性と  $X$  が実解析的多様体である事実から, (相対コンパクトな) 開集合からなる  $X$  の (通常の位相の) 被覆を含むことが示せる. これが示せると, 任意の  $V \in \text{Op}(X_{sa})$  に対し,  $\mathcal{T} \cap V$  が  $X_{sa}$  の被覆となることが, 次のように示せる.

任意の  $V \in \text{Op}(X_{sa})$ , コンパクト集合  $K \subset X$  をとる.  $K \cap \bar{V}$  がコンパクトであり,  $\mathcal{T}$  が  $X$  の被覆なので, 有限部分集合  $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$  で,  $K \cap \bar{V}$  の被覆となるものが存在する. このとき,  $S_0 = \mathcal{T}_0 \cap V$  とすれば,  $K \cap \bigcup_{W \in S_0} W = K \cap V$  が成り立つ.

( $K \cap \bigcup_{W' \in \mathcal{T}_0} W' \supset K \cap \bar{V}$  と  $\bigcup_{W' \in \mathcal{T}_0} (W' \cap V) \subset V$  より  $K \cap \bigcup_{W \in S_0} W = K \cap V$  である.)

**注意** ( $\mathcal{T}$  が  $X$  の被覆であること) 任意の点  $x \in X$  に対して, 十分小さい相対コンパクトな subanalytic 開近傍  $W$  を取る. このような近傍は, 例えば,  $W$  をある座標近傍の中に入るように作ればユークリッド空間で考えて良く, semi-analytic 開集合である開球を取れば簡単に作れる (同相写像で戻す).

ここで,  $\bar{W}$  はコンパクトであり,  $U$  の連結成分  $\{U_\lambda\}$  は局所有限なので,  $W$  と有限枚しか交わらない.

$W$  と交わる連結成分  $\{U_i\}_{i: \text{finite}}$  から,  $x$  と異なる点  $u_i \in U_i$  を代表点として取る ( $x \in U_i^c$  なら  $W \cap U_i \neq \emptyset$  より必ず取れて,  $x \in U_i$  の場合も  $X$  が多様体なので取れる).

選んだ有限個の代表点  $u_i$  と  $x$  の最小距離  $r = \min_i \text{dist}(u_i, x)$  を考える (ユークリッド空間で考えても良いし計量を入れても良い). そこで,  $r$  以下の半径を持つ  $x$  中心の円を  $W$  として取り直す.

$W$  は連結で, 相対コンパクトな subanalytic 開集合となっており, 未だ交わっている可能性のある  $U$  の連結成分に関しても, 選んだ代表点は含まれていないので, 完全には含んでいない.

よって,  $W \in \mathcal{T}$  であり, 各点  $x$  に対してこのような  $W_x$  を取れば,  $X$  の被覆となることが示せる.

証明を作る際, 間違いを起こしたのでメモしておく. 大したことは言っていないので読み飛ばし推奨.

**メモ**  $W$  に含まれている  $U_i$  の閉包を除けば, 有限枚の開集合の共通部分となり, 開集合になるが, 連結でなくなる例を簡単に作れる (半径 2 の円の中に, 2 つの半径 1 の円を, 内接するように書く).

また, 点  $x$  に対して,  $\min_i \text{dist}(x, U_i)$  とするのは,  $x \in \bar{U}_i$  のときに 0 となるので注意が必要である.

$x \in \bar{U}_i$  を場合分けして考えると,  $W$  が  $U_i$  を含んでいないか考える必要があり, 結局,  $x$  と異なる  $U_i$  の点を, (実数の連続性から?) 取る必要が出てくる.

## 2 Appendix

### 2.1 Subanalytic set

この節では, subanalytic set について述べる.

### 2.1.1 Semi-analytic set

執筆中

### 2.1.2 Subanalytic set

執筆中

## 2.2 $\mathbb{R}$ -constructible sheaves

この節では,  $\mathbb{R}$ -constructible な対象について述べる.

### 2.2.1 stratification

執筆中

### 2.2.2 $\mathbb{R}$ -constructible

執筆中

## 参考文献

- [1] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*. No. 292 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1990.
- [2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Ind-sheaves*. No. 271 in Astérisque. Société mathématique de France, 2001.
- [3] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Category and Sheaves*. No. 332 in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2006.
- [4] Luca Prelli. *Sheaves on subanalytic sites*. No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.