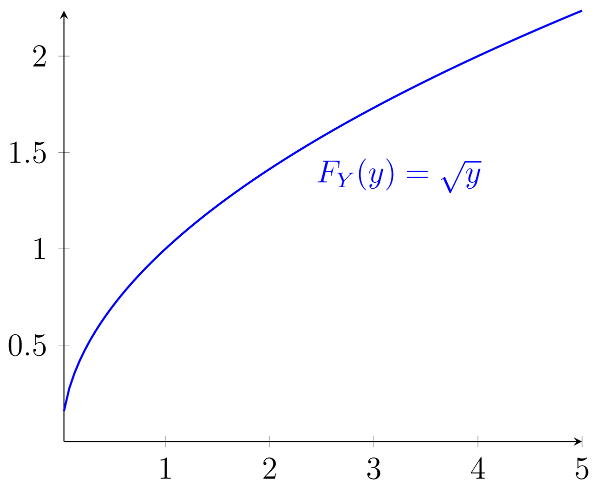
Chapter 1

Problem 1.6

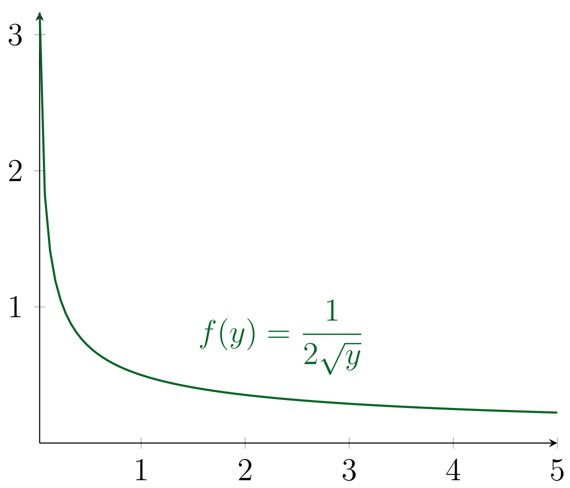
(a) CDF dari Y adalah

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\
&= P(\{-\sqrt{y} \leq X \leq 0\} \cup \{0 \leq X \leq \sqrt{y}\}) \\
&= P(-\sqrt{y} \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq \sqrt{y}) \\
&= \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} \\
&= \sqrt{y}
\end{aligned}$$



(b) PDF dari Y adalah

$$f(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



Problem 1.9 Perhatikan bahwa

$$P(Y > y) = 1 - P(Y \leq y) = 1 - \int_0^y \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - (-e^{-\lambda y} + 1) = e^{-\lambda y}$$

Maka, diperoleh sifat *memoryless* berikut.

$$\begin{aligned}
P(Y > t + s \mid Y > s) &= \frac{P(Y > t + s \cap Y > s)}{P(Y > s)} \\
&= \frac{P(Y > t + s)}{P(Y > s)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= P(Y > t)
\end{aligned}$$

Chapter 2

Problem 2.4 Soal ini ingin kita menunjukkan dua peubah acak $X = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$ dan $Y = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$ dari metode Box-Muller berdistribusi $N(0,1)$ dan saling bebas.

Misalkan $R = \sqrt{-2\ln U_1}$ dan $\Theta = 2\pi U_2$. Akan ditentukan pdf dari masing-masing R dan Θ. Tinjau

$$\begin{aligned}
P(R \leq r) &= P(\sqrt{-2\ln U_1} \leq r) = P(-2\ln U_1 \leq r^2) = P\left(\ln U_1 \geq -\frac{r^2}{2}\right) \\
&= 1 - P\left(\ln U_1 < -\frac{r^2}{2}\right) = 1 - P\left(U_1 < \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad r \in [0, \infty)
\end{aligned}$$

Maka, pdf dari R adalah

$$f_R(r) = \frac{d}{dr}\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right) = r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$$

Berikutnya, tinjau juga

$$P(\Theta \leq \theta) = P(2\pi U_2 \leq \theta) = P\left(U_2 \leq \frac{\theta}{2\pi}\right) = \frac{\theta}{2\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Maka, pdf dari Θ adalah

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

Lebih jauh, karena U_1, U_2 saling bebas, R dan Θ juga saling bebas dengan fungsi kepadatan peluang gabungan

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r) \times f_\Theta(\theta) = \frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$$

Amati bahwa X dan Y bisa dituliskan sebagai $X = R\cos\Theta$ dan $Y = R\sin\Theta$, sehingga $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Untuk memperoleh fungsi kepadatan peluang gabungan dari X, Y, hitung nilai dari Jacobian:

$$|J| = \left|\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}$$

Maka, diperoleh fkp gabungan

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{r}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)|J| = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

dengan $x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty)$.

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dengan cara serupa,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Mudah dilihat bahwa $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. Jadi, X, Y berdistribusi $N(0, 1)$ dan saling bebas.

Chapter 3

Problem 3.1

(a) Misalkan $Z \sim N(0,1)$, dengan fungsi pembangkit momen $m(\lambda)$,

$$m(\lambda) = E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2}.$$

Tinjau

$$\begin{aligned}
m'(\lambda) &= E[Ze^{\lambda Z}] = \lambda e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \\
m''(\lambda) &= E[Z^2 e^{\lambda Z}] = (\lambda^2 + 1)e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \\
m'''(\lambda) &= E[Z^3 e^{\lambda Z}] = (\lambda^3 + 3\lambda)e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \\
m^{(4)}(\lambda) &= E[Z^4 e^{\lambda Z}] = (\lambda^4 + 6\lambda^2 + 3)e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \\
m^{(5)}(\lambda) &= E[Z^5 e^{\lambda Z}] = (\lambda^5 + 10\lambda^3 + 15\lambda)e^{\frac{1}{2}\lambda^2} \\
m^{(6)}(\lambda) &= E[Z^6 e^{\lambda Z}] = (\lambda^6 + 15\lambda^4 + 45\lambda^2 + 15)e^{\frac{1}{2}\lambda^2}
\end{aligned}$$

Maka, karena $B_t \sim N(0,t)$,

$$E[B_t^6] = E[(\sqrt{t}Z)^6] = t^3 E[Z^6] = t^3 m^{(6)}(0) = 15t^3$$

(b) Perhatikan

$$\begin{aligned}
E[(B_{t_2} - B_{t_1})(B_{t_3} - B_{t_2})] &= E[B_{t_3}B_{t_2} - B_{t_2}B_{t_2} - B_{t_3}B_{t_1} + B_{t_2}B_{t_1}] \\
&= E[B_{t_3}B_{t_2}] - E[B_{t_2}B_{t_2}] - E[B_{t_3}B_{t_1}] + E[B_{t_2}B_{t_1}] \\
&= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
E[B_s^2 B_t^2] &= E[B_s^2(B_t - B_s + B_s)^2 \\
&= E[B_s^2((B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2] \\
&= E[B_s^2(B_t - B_s)^2] + 2E[B_s^3(B_t - B_s)] + E[B_s^4] \\
&= E[B_s^2]E[(B_t - B_s)^2] + 2E[B_s^3]E[B_t - B_s] + E[B_s^4] \\
&= sE[B_t^2 - 2B_tB_s + B_s^2] + E[(\sqrt{s}Z)^4] \\
&= s(t - 2s + s) + 3s^2 \\
&= 2s^2 + st
\end{aligned}$$

(d) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
E[B_sB_t^3] &= E[B_s(B_t - B_s)^3 + 3B_t^2B_s^2 - 3B_tB_s^3 + B_s^4] \\
&= E[B_s(B_t - B_s)^3] + 3E[B_t^2B_s^2] - 3E[B_tB_s^3] + E[B_s^4] \\
&= E[B_s]E[(B_t - B_s)^3] + 3E[B_t^2B_s^2] - 3E[(B_t - B_s)B_s^3 + B_s^4] + E[B_s^4] \\
&= 0 + 3(2s^2 + st) - 3E[B_t - B_s]E[B_s^3] - 3E[B_s^4] + E[B_s^4] \\
&= 6s^2 + 3st - 0 - 3(3s^2) + 3s^2 \\
&= 3st
\end{aligned}$$

(e) Misalkan $Y_t = -B_t$. Akan ditunjukkan bahwa Y_t memiliki distribusi yang sama dengan B_t. Misalkan $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$, dan $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ vektor distribusi berhingga dari Y_t. Karena kita tahu bahwa $-B_t$ adalah gerak Brown, maka $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ adalah vektor Gauss. Lebih jauh, untuk sembarang t_i, t_j,

$$E[Y_{t_i}] = E[-B_{t_i}] = 0$$

dan

$$\mathrm{Cov}(Y_{t_i}, Y_{t_j}) = E[Y_{t_i} Y_{t_j}] - E[Y_{t_i}]E[Y_{t_j}] = E[(-B_{t_i})(-B_{t_j})] = E[B_{t_i} B_{t_j}] = t_i \wedge t_j$$

Maka, $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ memiliki distribusi yang sama dengan $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$, tepatnya Gaussian dengan vektor *mean* $m = \mathbf{0}$ dan matriks kovariansi $C(i,j) = t_i \wedge t_j$.

Akibatnya, $E[B_s^{100} B_t^{101}] = E[Y_s^{100} Y_t^{101}]$. Tetapi,

$$E[Y_s^{100} Y_t^{101}] = E[(-B_s)^{100}(-B_t)^{101}] = -E[B_s^{100} B_t^{101}]$$

Jadi, haruslah $E[B_s^{100} B_t^{101}] = 0$.

Chapter 4

Problem 4.8 Misalkan $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$ suatu vektor Gauss dengan matriks kovariansi

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

Kita ingin mencari suatu peubah acak $\mathbf{Z}$ yang bebas terhadap $\mathbf{Y}_2$ untuk mempermudah perhitungan $E[\mathbf{Y}_1|\mathbf{Y}_2]$. Pilih $\mathbf{Z}$ sebagai kombinasi linearnya, $C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2$. Tanpa mengurangi keumuman, kita bisa pilih $C_1 = \mathbf{I}$. Kita inginkan

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_2) &= Cov(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) + Cov(C_2\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_2) \\ &= \Sigma_{12} + C_2 Cov(\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_2) \\ &= \Sigma_{12} + C_2\Sigma_{22} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Jika Σ_{22} invertibel, $C_2 = -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$

Mengikuti notasi tersebut, $\mathbf{Y}_1 = X_3$, $\mathbf{Y}_2 = (X_1, X_2)$, dan

$$\Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \Sigma_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka,

$$Z = X_3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_3 - \frac{1}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} E[X_3|X_1, X_2] &= E[Z + \tfrac{1}{3}X_1 + \tfrac{1}{3}X_2|X_1, X_2] \\ &= E[Z|X_1, X_2] + \tfrac{1}{3}E[X_1 + X_2|X_1, X_2] \\ &= E[Z] + \tfrac{1}{3}(X_1 + X_2) \qquad \text{(karena } Z \text{ bebas terhadap } (X_1, X_2)) \\ &= \tfrac{1}{3}X_1 + \tfrac{1}{3}X_2 \end{aligned}$$

Berikutnya, akan ditentukan $E[e^{aX_3}|X_1, X_2]$. Perhatikan

$$\begin{aligned} E[e^{aX_3}|X_1, X_2] &= E[e^{aX_3 - 1/3X_1 - 1/3X_2} e^a 1/3X_1 + 1/3X_2|X_1, X_2] \\ &= e^{a(1/3X_1 + 1/3X_2)} E[e^{aX_3 - 1/3X_1 - 1/3X_2}|X_1, X_2] \\ &= e^{a(1/3X_1 + 1/3X_2)} E[e^{aZ}|X_1, X_2] \\ &= e^{a(1/3X_1 + 1/3X_2)} E[e^{aZ}] \end{aligned}$$

Amati bahwa $E[e^{aZ}]$ adalah mgf untuk peubah acak $Z = X_3 - \frac{1}{3}X_1 - \frac{1}{3}X_2$. Karena $E[Z] = 0$ dan

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(X_3 - \tfrac{1}{3}X_1 - \tfrac{1}{3}X_2) = E[(X_3 - \tfrac{1}{3}X_1 - \tfrac{1}{3}X_2)^2] \\ &= E[X_3^2 + \tfrac{1}{9}X_1^2 + \tfrac{1}{9}X_2^2 + \tfrac{2}{9}X_1X_2 - \tfrac{2}{3}X_1X_3 - \tfrac{2}{3}X_2X_3] \\ &= 2 + \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{9} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Problem 4.12

(a) Kita ingin menunjukkan bahwa proses $M_t = tB_t - \frac{1}{3}B_t^3$ adalah martingale terhadap filtrasi $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$.

Pandang fungsi $\phi(x) = tx - \frac{1}{3}x^3$. Karena ϕ kontinu dan B_t terukur terhadap $\mathcal{F}_t$ (filtrasi natural-nya), maka $M_t = \phi(B_t) = tB_t - \frac{1}{3}B_t^3$ juga terukur terhadap $\mathcal{F}_t$.

Berikutnya, perhatikan bahwa $|M_t| = |tB_t - \frac{1}{3}B_t^3| \leq |t||B_t| + \frac{1}{3}|B_t|^3$ dengan ketaksamaan segitiga. Akibatnya,

$$E[|M_t|] \leq |t|E[|B_t|] + \tfrac{1}{3}E[|B_t|^3]$$

Tetapi,

$$\begin{aligned}
E[|B_t|^a] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^a \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{x^a}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx \quad (u = x^2/2t) \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{(2ut)^{\frac{a-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2}} e^{-u}\, du \\
&= \frac{(2t)^{\frac{a}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{\frac{a-1}{2}} e^{-u}\, du \\
&= \frac{(2t)^{\frac{a}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) < \infty
\end{aligned}$$

Jadi, $E[|M_t|] < \infty$.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa M_t memenuhi sifat martingale, yaitu

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = E[tB_t - \tfrac{1}{3}B_t^3|\mathcal{F}_s] = M_s$$

untuk $s \leq t$.

Perhatikan

$$B_t^3 = ((B_t - B_s) + B_s)^3 = (B_t - B_s)^3 + 3(B_t - B_s)^2 B_s + 3(B_t - B_s)B_s^2 + B_s^3$$

sehingga

$$\begin{aligned}
E[B_t^3|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^3|\mathcal{F}_s] + 3E[(B_t - B_s)^2 B_s|\mathcal{F}_s] \\
&\quad + 3E[(B_t - B_s)B_s^2|\mathcal{F}_s] + E[B_s^3|\mathcal{F}_s] \\
&= E[(B_t - B_s)^3|\mathcal{F}_s] + 3E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s]E[B_s|\mathcal{F}_s] \\
&\quad + 3E[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s]E[B_s^2|\mathcal{F}_s] + E[B_s^3|\mathcal{F}_s] \\
&= E[(B_t - B_s)^3] + 3B_s E[(B_t - B_s)^2] + 3B_s^2 E[B_t - B_s] + B_s^3
\end{aligned}$$

Tinjau

$$\begin{aligned}
E[(B_t - B_s)^3] &= E[B_t^3] - 3E[B_t^2 B_s] + 3E[B_t B_s^2] - E[B_s^3] \\
&= 3E[((B_t - B_s) + B_s)^2 B_s] + 3E[(B_t - B_s) + B_s)B_s^2] \\
&= 3\left(E[(B_t - B_s)^2]E[B_s] + 2E[B_t - B_s]E[B_s^2] + E[B_s^3]\right) \\
&\quad + 3\left(E[B_t - B_s]E[B_s^2] + E[B_s^3]\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dan

$$E[(B_t - B_s)^2] = E[B_t^2 - 2B_s B_t + B_s^2] = t - 2s + s = t - s$$

Diperoleh $E[B_t^3|\mathcal{F}_s] = 3B_s(t-s) + B_s^3$. Jadi,

$$\begin{aligned}
E[tB_t - \tfrac{1}{3}B_t^3|\mathcal{F}_s] &= tE[B_t|\mathcal{F}_s] - \tfrac{1}{3}E[B_t^3|\mathcal{F}_s] \\
&= tB_s - \tfrac{1}{3}(3(t-s)B_s + B_s^3) \\
&= tB_s - (t-s)B_s - \tfrac{1}{3}B_s^3 \\
&= sB_s - \tfrac{1}{3}B_s^3 \\
&= M_s
\end{aligned}$$

(b) Definisikan

$$\tau = \min\{t \geq 0 : B_t(\omega) \geq a \text{ atau } B_t(\omega) \leq -b\}$$

Pandang bahwa τ adalah waktu pertama kali gerak Brown B_t "keluar" dari interval $[-b, a]$.

Pertama, akan ditunjukkan $\tau < \infty$ dengan peluang 1 (dalam kata lain, B_t pasti mencapai a atau $-b$). Misalkan

$$E_n = \{|B_n - B_{n-1}| > a + b\}, \quad n \geq 1$$

Jika E_n terjadi, artinya gerak Brown "keluar" dari interval $[-b, a]$.

Perhatikan bahwa $P(E_n) = P(E_1)$ untuk setiap n karena $B_n - B_{n-1}$ memiliki distribusi yang sama dengan $B_1 - B_0$. Misalkan peluang tersebut sebagai p. Lebih jauh, karena E_n saling bebas untuk setiap n, maka

$$P(E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c) = P(E_1^c) \dots P(E_n^c) = (1-p)^n$$

Misalkan juga $F_n = E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c$. Amati bahwa

$$E_1^c \supseteq E_1^c \cap E_2^c \supseteq \cdots \supseteq E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c,$$

yaitu $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ adalah barisan kejadian yang turun. Maka,

$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n) = \lim_{n\to\infty} P(E_1^c \cap \cdots \cap E_n^c) = 0$$

Akibatnya, haruslah E_n terjadi untuk suatu n, yang berarti gerak Brown mencapai a atau $-b$.

Dengan demikian, $B_\tau(\omega)$ hanya punya dua nilai, yaitu $B_\tau = a$ atau $B_\tau = -b$. Akan ditentukan peluang $B_\tau = a$. Perhatikan bahwa

$$E[B_\tau] = aP(B_\tau = a) - b(1 - P(B_\tau = a))$$

Di lain sisi, menurut Doob's optional stopping theorem (Cororally 4.38), $E[B_\tau] = E[B_0] = 0$. Jadi,

$$aP(B_\tau = a) - b + bP(B_\tau = a)) = 0 \implies P(B_\tau = a) = \frac{b}{a+b}$$

Dengan cara serupa,

$$P(B_\tau = -b) = \frac{a}{a+b}$$

Maka, kita bisa peroleh nilai $E[\tau B_\tau]$ sebagai berikut. Menurut Doob's optional stopping theorem, $E[M_\tau] = 0$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} E[M_\tau] &= E[\tau B_\tau - \tfrac{1}{3}B_\tau^3] = E[\tau B_\tau] - \tfrac{1}{3}E[B_\tau^3] \\ &= E[\tau B_\tau] - \frac{1}{3}\left(a^3\frac{b}{a+b} + (-b)^3\frac{a}{a+b}\right) \\ &= E[\tau B_\tau] + \frac{ab}{3}(b-a) = 0 \end{aligned}$$

Jadi, $E[\tau B_\tau] = \dfrac{ab}{3}(a-b)$.

(c) Misalkan $Z_t = e^{aB_t - a^2t/2}$. Menurut Example 4.28, Z_t adalah martingale. Tetapi, seperti ditunjukkan Example 4.44, sifat $E[Z_\tau] = E[Z_0]$ tidak selalu berlaku. Maka, perlu didefinisikan suatu stopping process

$$Z_{t\wedge\tau} = \exp\left[aB_{t\wedge\tau} - \tfrac{1}{2}a^2(t\wedge\tau)\right]$$

Menurut Proposition 4.37, $Z_{t\wedge\tau}$ juga martingale, sehingga $E[Z_{t\wedge\tau}] = E[Z_0]$.

Kemudian, karena $\tau(\omega) < \infty$, $Z_{t\wedge\tau} = Z_\tau$ untuk setiap $t > \tau$. Akibatnya, $\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge\tau} = Z_\tau$. Maka,

$$E[Z_\tau] = E[\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge\tau}] = \lim_{t\to\infty} E[Z_{t\wedge\tau}] = E[Z_0] = e^0 = 1$$

Perhatikan bahwa $E[\lim_{t\to\infty} Z_{t\wedge\tau}] = \lim_{t\to\infty} E[Z_{t\wedge\tau}]$ menurut dominated convergence theorem (Theorem 4.40), karena $Z_{t\wedge\tau}$ terbatas oleh e^{aB_τ}.

Chapter 5

Problem 5.8 Misalkan $(t_j, j \leq n)$ partisi dari $[0, T]$ menjadi n interval. Menurut lemma 5.11, barisan fungsi

$$f^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\boldsymbol{\chi}_{(t_j, t_{j+1}]}(t)$$

adalah aproksimasi dari f.
Integral Ito dari $f^{(n)}$ adalah

$$I_t^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Karena $I_t^{(n)}$ adalah kombinasi linear $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ yang berdistribusi normal, $I_t^{(n)}$ juga berdistribusi normal. Khususnya

$$I_t^{(n)} \longrightarrow \int_0^t f(s)\, dB_s \quad \text{saat } n \to \infty$$

Perhatikan bahwa

$$E[I_t^{(n)}] = E\left[\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = 0$$

Akan ditunjukkan bahwa $E[I_t^{(n)}] \to E[I_t]$ dengan

$$I_t = \int_0^t f(s)\, dB_s$$

Menurut ketaksamaan Jensen,

$$|E[I_t^{(n)}] - E[I_t]| \leq E[|I_t^{(n)} - I_t|] \leq \sqrt{E[(I_t^{(n)} - I_t)^2]}$$

Karena $E[(I_t^{(n)} - I_t)^2] \to 0$, maka $E[I_t^{(n)}] \to E[I_t]$.

Jadi, I_t berdistribusi normal dengan $E[I_t] = 0$ dan

$$E[I_t I_{t'}] = \int_0^{t \wedge t'} E[f^2(s)] ds = \int_0^t f^2(s)\, ds$$

untuk $t < t'$.

(a) Misalkan $t < t'$. Maka, X_t berdistribusi normal dengan $E[X_t] = 0$ dan

$$E[X_t X_{t'}] = \int_0^t (1 - s)^2\, ds = \frac{1}{3}(t - 1)^3 + \frac{1}{3}$$

(b) Misalkan $t < t'$. Maka, Y_t berdistribusi normal dengan $E[Y_t] = 0$ dan

$$E[Y_t Y_{t'}] = \int_0^t (1+s)^2 \, ds = \frac{1}{3}(t+1)^3 - \frac{1}{3}$$

(c) Menurut Cororally 5.15,

$$E[X_t Y_t] = \int_0^t E[(1-s)(1+s)] \, ds = \int_0^t 1 - s^2 \, ds = t - \frac{1}{3}t^3$$

Maka, X_t dan Y_t tidak berkorelasi saat $t - \frac{1}{3}t^3 = 0$, yaitu saat $t = 0$ dan $t = \sqrt{3}$. Lebih jauh, karena X_t dan Y_t Gaussian, X_t dan Y_t juga saling bebas di waktu tersebut.