Prepoznavanje rukom pisanih znamenki koristeći tenzorski SVD

Marina Matešić, Tomislav Novak, Timotej Repak

Matrične i tentorske metode u analizi podataka

Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu

3. ožujka 2025.

Sadržaj

Tenzori

- $\mathcal{A} = (a_{ijk}) \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$
- $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} a_{ijk} b_{ijk}$
- $\mathcal{A}(:, j, k)$, $\mathcal{A}(i, :, k)$ i $\mathcal{A}(i, j, :)$ niti u modu 1, 2 i 3
- Matricizacija u n-tom modu tenzora $\mathcal{A}$ je matrica $A_{(n)}$ koju dobijemo tako da niti od $\mathcal{A}$ stavimo kao retke matrice $A_{(n)}$

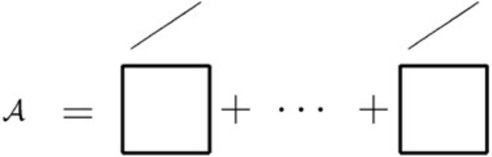
Množenje tenzora i matrice

- Množenjem tenzora $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ matricom $F \in \mathbb{R}^{L \times I}$ u modu 1 dobije se tenzor $\mathbb{R}^{L \times J \times K} \ni \mathcal{B} = \mathcal{A} \times_1 F, \quad \mathcal{B}(l, j, k) = \sum_{i=1}^{I} \mathcal{A}(i, j, k) F(l, i)$
- Množenjem tenzora $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ matricom $F \in \mathbb{R}^{L \times J}$ u modu 2 dobije se tenzor $\mathbb{R}^{I \times L \times K} \ni \mathcal{B} = \mathcal{A} \times_2 F, \quad \mathcal{B}(i, l, k) = \sum_{j=1}^{J} \mathcal{A}(i, j, k) F(l, j)$
- Množenjem tenzora $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ matricom $F \in \mathbb{R}^{L \times K}$ u modu 3 dobije se tenzor $\mathbb{R}^{I \times J \times L} \ni \mathcal{B} = \mathcal{A} \times_3 F, \quad \mathcal{B}(i, j, l) = \sum_{k=1}^{K} \mathcal{A}(i, j, k) F(l, k)$

HOSVD

- Tenzor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$ se može zapisati kao produkt $\mathcal{A} = \mathscr{S} \times_1 U \times_2 V \times_3 W$
- $U \in \mathbb{R}^{I \times I}$, $V \in \mathbb{R}^{J \times J}$ i $W \in \mathbb{R}^{K \times K}$ ortogonalne matrice
- $\mathscr{S}$ je realni tenzor istih dimenzija kao i $\mathcal{A}$ td. vrijede potpuna ortogonalnost i uređenost

Klasifikacija pomoću HOSVD-a



- $\mathcal{A} = \sum_{v=1}^{K} A_v \times_3 w_v$
- $R(\mu) = \|D - \sum_{v=1}^{k} \hat{\alpha}_v^{\mu} A_v^{\mu}\|^2 = \left\langle D - \sum_{v=1}^{k} \hat{\alpha}_v^{\mu} A_v^{\mu}, D - \sum_{v=1}^{k} \hat{\alpha}_v^{\mu} A_v^{\mu} \right\rangle = \langle D, D\rangle - \sum_{v=1}^{k} \langle D, A_v^{\mu}\rangle^2 = 1 - \sum_{v=1}^{k} \langle D, A_v^{\mu}\rangle^2$

Klasifikacija pomoću HOSVD-a s kompresijom

- Reduciramo dimenziju prikaza znamenaka na p te broj znamenaka u svakoj klasi na q
- $\mathcal{D} = \mathscr{S} \times_1 U \times_2 V \times_3 W \approx \mathcal{F} \times_1 U_p \times_2 V_q$
- $\mathcal{F} = \mathcal{D} \times_1 U_p^T \times_2 V_q^T$
- $F^\mu = [B^\mu (B^\mu)^\perp] \Sigma^\mu (Q^\mu)^T, \quad \mu = 0, 1, \dots, 9$
- Tražimo μ koji minimizira $R(\mu) = \| D_p - B^\mu (B^\mu)^T D_p \|$