

2. Cho hàm số:

$$f(x, y, z) = \frac{x + 2y + 3z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}.$$

Hãy tính các giá trị $f(0, 0, 0)$, $f(1, -1, 1)$, $f(3, 2, -2)$, $f(a, 2a, 3a)$.

3. Tìm MXĐ của các hàm số:

a) $u = \ln(xy)$

b) $u = \frac{x + y}{\sqrt{x - y}}$

c) $u = \arccos \frac{x^2 + y^2}{4}$

d) $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$

4. Tìm MXĐ của các hàm số:

a) $u = \frac{xyz}{x + y + z}$

b) $u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$

5. Hãy viết phương trình đường mức đi qua điểm $A(0, 1)$ của hàm số:

$$u = \frac{x^2 + y^2}{2x + 6y}.$$

6. Hãy viết phương trình mặt mức đi qua điểm $A(1, 1, 1)$ của hàm số:

$$u = x + y + z.$$

7. Lập hàm hợp của các hàm số sau:

$$w = u^2 + v^2, u = \sin x + \sin y + \sin z, v = \cos x + \cos y + \cos z.$$

8. Tìm biểu thức hàm số $f(x, y)$, cho biết:

$$f(x + y, x - y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

9. Một công ty cạnh tranh sản xuất một loại sản phẩm với hàm sản xuất $Q = 5\sqrt[3]{K} \cdot \sqrt{L}$, với Q, K, L được tính hàng ngày.

a) Hãy viết phương trình đường đồng lượng ứng với mức sản lượng $Q = 200$.

b) Hãy biểu diễn tổng doanh thu, tổng chi phí và tổng lợi nhuận hàng ngày của công ty theo K và L , cho biết giá sản phẩm trên thị trường là \$4, giá tư

Chương 8: Hàm số nhiều biến số

bản là \$15, giá lao động là \$8 và mỗi ngày công ty phải trả \$50 chi phí khác.

10. Một nhà sản xuất độc quyền có hàm sản xuất $Q = 40K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{5}{6}}$ và tiêu thụ sản phẩm trên thị trường có hàm cầu $D(p) = 350 - 3p$. Hãy lập hàm số biểu diễn tổng doanh thu theo K và L .

11. Một công ty độc quyền sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp (Q_i là lượng sản phẩm i):

$$TC = 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 4Q_2^2.$$

a) Lượng chi phí mà công ty phải bỏ ra để sản xuất 4 đơn vị sản phẩm thứ nhất và 2 đơn vị sản phẩm thứ hai là bao nhiêu?

b) Cho biết hàm cầu đối với sản phẩm 1 là $D_1(p_1) = 320 - 5p_1$, hàm cầu đối với sản phẩm 2 là $D_2(p_2) = 150 - 2p_2$. Hãy lập hàm số biểu diễn tổng lợi nhuận của công ty theo Q_1, Q_2 .

12. Giả sử người tiêu dùng có hàm lợi ích như sau:

$$U = xy + 4y,$$

trong đó x là lượng hàng hoá A, y là lượng hàng hoá B.

a) Viết phương trình đường bàng quan, cho biết một trong các túi hàng thuộc đường bàng quan đó là $(x = 4, y = 3)$.

b) Hãy cho biết trong 2 túi hàng $(x = 4, y = 3)$ và $(x = 5, y = 2)$, túi hàng nào được ưa chuộng hơn?

c) Giả sử người tiêu dùng đang có 8 hàng hoá A, 3 hàng hoá B và có người đề nghị đổi cho chị ta một số hàng hoá A để lấy 1 hàng hoá B. Hỏi người đó phải đổi ít nhất bao nhiêu hàng hoá A thì chị ta mới bằng lòng đổi.

BÀI TẬP

20. Cho hàm số:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + xy + 3y^2}{x + y} & \text{khi } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$$

Hãy tính $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$.

21. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

a) $u = x^3y - y^3x$

b) $u = (5x^2y - y^2 + 7)^3$

c) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

d) $u = e^{-\frac{x}{y}}$

e) $u = \arctan \frac{y}{x}$

f) $u = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$

22. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

a) $u = xy + yz + zx$

b) $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$

c) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

d) $u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)}$

23. Sử dụng quy tắc tính đạo hàm của hàm hợp, hãy tính z'_x, z'_y , cho biết:

$$z = u^2 + v^3, u = y \sin x, v = x \cos y$$

24. Cho $f(u)$ là một hàm số khả vi và $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$. Hãy chứng minh:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

25. Hãy tính $f'_y(x^2 + y^2, xy)$ và $[f(x^2 + y^2, xy)]'_y$, cho biết $f(x, y) = \sqrt{xy}$.

26. Chứng minh rằng hàm số $u = f(x^2 + y^2)$, với f là hàm số khả vi, thỏa mãn phương trình:

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

27. Chứng minh rằng hàm số $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, với f là hàm số khả vi, thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

28. Cho hàm số $f(x, y) = xy^2$. Hãy tính $\Delta f(1, 1)$ và $df(1, 1)$ khi:

a) $\Delta x = 0,1$ và $\Delta y = 0,2$

b) $\Delta x = 5$ và $\Delta y = 2$

29. Lập biểu thức vi phân toàn phần của các hàm số:

a) $u = \frac{3x + 4y}{2x - y}$

b) $u = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

c) $u = \arctan(xy)$

d) $u = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$

30. Lập biểu thức vi phân toàn phần của các hàm số:

a) $u = \frac{x^2 y^3}{z^4}$

b) $u = x^{yz}$

31. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 và lập biểu thức vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số:

a) $u = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$

b) $u = \ln(x + y^2)$

c) $u = \frac{2x - 3y}{x + 2y}$

d) $u = \arctan \frac{y}{x}$

32. Cho hàm số:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{khi } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = y = 0 \end{cases}$$

Hãy tính $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yx}(0, 0)$.

33. Chứng minh rằng hàm số $u = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ thoả mãn phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

34. Lập ma trận Hess và viết biểu thức vi phân toàn phần cấp 2 của hàm số $u = x^3 y^2 z^4$.

35. Tìm $df(1, 1, 1)$ và $d^2f(1, 1, 1)$, cho biết $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$.

36. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất như sau: $Q = 12\sqrt[3]{K^2} \cdot \sqrt{L}$.

a) Hãy tính MPP_K và MPP_L tại điểm $(K = 125, L = 100)$ và giải thích ý nghĩa;

b) Chứng tỏ rằng MPP_K giảm khi K tăng và L không đổi;

c) Chứng tỏ rằng MPP_L giảm khi L tăng và K không đổi.

37. Cho biết hàm lợi ích của người tiêu dùng $U = x^{0,4} y^{0,7}$, trong đó x là lượng hàng hoá A, y là lượng hàng hoá B.

a) Hãy lập các hàm số biểu diễn lợi ích cận biên của mỗi hàng hoá. Hàm lợi ích này có phù hợp với quy luật lợi ích cận biên giảm dần hay không?

b) Nếu lượng hàng hoá A tăng 1% và lượng hàng hoá B không đổi thì lợi ích tăng bao nhiêu %?

38. Một doanh nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm với hàm chi phí kết hợp như sau:

$$TC = 45 + 125Q_1 + 84Q_2 - 6Q_1^2 Q_2^2 + 0,8Q_1^3 + 1,2Q_2^3.$$

Hãy lập các hàm số biểu diễn chi phí cận biên của mỗi sản phẩm.

39. Cho biết hàm cầu đối với một mặt hàng như sau:

$$Q = 35 - 0,4p + 0,15m + 0,12p_s,$$

trong đó Q , p là lượng cầu và giá của hàng hoá đó, m là thu nhập, p_s là giá hàng hoá thay thế. Hãy lập hàm số biểu diễn:

a) Hệ số co giãn của cầu theo giá p ;

b) Hệ số co giãn của cầu theo thu nhập;

c) Hệ số co giãn của cầu theo giá hàng hoá thay thế.