

THUẬT NGỮ THEN CHỐT

Hàm ẩn

Hàm ẩn n biến

Định thức Jacobi

Tỷ lệ thay thế cận biên

BÀI TẬP

44. Hãy tính đạo hàm $y'(x)$ của hàm số $y = y(x)$ cho dưới dạng hàm ẩn:

a) $x^3y - y^3x = a^4$

b) $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$

c) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$

d) $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\arctan \frac{y}{x}} \quad (a > 0)$

45. Tính đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của hàm số $y = y(x)$ xác định bởi phương trình:

a) $y^2 = 2px$

b) $x^2 - xy + y^2 = 0$

c) $y^2 + 2\ln y = x^4$

d) $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$

46. Tính các đạo hàm riêng của hàm số $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

b) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$

c) $z^3 + 3xyz = a^3$

d) $e^z - xyz = 0$

47. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm ẩn $z = z(x, y)$, xác định bởi phương trình:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

b) $x + y + z = e^z$

48. Cho hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

Hãy tính $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$ khi $x = 1, y = -2, z = 1$.

49. Lập các biểu thức dz, d^2z của hàm số $z = z(x, y)$ xác định bởi phương trình:

$$xyz = x + y + z.$$

50. Hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 36 \\ 2x + 3y + 4z = 20 \end{cases}$$

xác định 2 hàm số $y = y(x)$, $z = z(x)$. Hãy tính y'_x , z'_x .

51. Hệ phương trình

$$\begin{cases} xu - yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$$

xác định 2 hàm số $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Hãy tính $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

52. Hệ phương trình

$$\begin{cases} e^u + u \sin v = x \\ e^u - u \cos v = y \end{cases}$$

xác định 2 hàm số $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Hãy tính $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

53. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất như sau:

$$Q = 5K^{1/2}L^{1/3}.$$

Hãy tính tỷ lệ thay thế kỹ thuật cận biên vốn cho lao động khi ($K = 90$, $L = 30$) và khi ($K = 90$, $L = 500$). Giải thích ý nghĩa của kết quả tìm được.

54. Xét mô hình cân bằng thị trường một loại hàng hóa thông thường với hàm cung và hàm cầu như sau:

$$Q_s = S(p), Q_d = D(p, m).$$

Mô hình cân bằng được xem xét với giả thiết rằng khi $p > 0$ và $m > 0$ ta luôn có:

$$S'(p) > 0, D'_p(p, m) < 0, D'_m(p, m) > 0.$$

Giả sử điểm cân bằng tồn tại mỗi mức thu nhập m . Qua phân tích tĩnh so sánh, hãy phân tích ảnh hưởng của biến ngoại sinh m đối với giá cân bằng và lượng cân bằng.

Điểm dừng
Điểm cực tiểu

Điểm cực đại
Giá trị cực tiểu

Giá trị cực đại

BÀI TẬP

1. Tìm các điểm cực trị của hàm số:

a) $u = 10x^2 + y^2 - 6xy - 24x$

b) $u = 4xy - x^2 - 7y^2 + 36y$

c) $u = 13x^2 + y^2 - 5xy - 2x - 10y + 1$

d) $u = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

e) $u = 18xy - 8x^3 - 27y^3$

2. Tìm các điểm cực trị của các hàm số sau với $x > 0, y > 0$:

a) $u = x^2y^3(6 - x - y)$

b) $u = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

3. Tìm các điểm cực trị của hàm số:

a) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 10y - 12z$

b) $u = 6xz - 3x^2 - 2y^2 - 9z^2 + 8x + 12y$

c) $u = x^2 + 5y^2 + 10z^2 - 4xy - 6yz - 10z + 1$

d) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$

4. Tìm các điểm cực trị của hàm số $z = z(x, y)$, xác định bởi phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

5. Chọn (x, y) để hàm số

$$u = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 16y + 125$$

đạt giá trị nhỏ nhất trong toàn bộ \mathbb{R}^2 .

6. Chọn (x, y, z) để hàm số

$$u = 4xy - x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 12y + 36z + 1$$

đạt giá trị lớn nhất trong toàn bộ \mathbb{R}^3 .

THUẬT NGỮ THEN CHỐT

Biến chọn

Hàm số Lagrange

Hàm mục tiêu

Nhân tử Lagrange

BÀI TẬP

7. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 3x^2 + 5xy$, với điều kiện:

$$x + y = 16$$

8. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ($a > 0, b > 0$), với điều kiện:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

9. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 2x + 9y + 1$, với điều kiện:

$$x^2 + 3y^2 = 31.$$

10. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = x^{0,3}y^{0,7}$, với điều kiện:

$$5x + 4y = 200.$$

11. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 2x^{0,9}y^{0,6}$, với điều kiện:

$$3x + 5y = 600.$$

12. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = x - 2y + 2z$, với điều kiện:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

13. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 5x + 4y + 3z$, với điều kiện:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36.$$

14. Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = xy^2z^3$, với điều kiện:

$$x + 2y + 3z = 18 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

9.3. CÁC BÀI TOÁN

VỀ SỰ LỰA CHỌN CỦA NGƯỜI TIÊU DÙNG

9.3.1. Bài toán tối đa hóa lợi ích

a. Đặt vấn đề

... trường là tổng lượng cầu c

Phương trình Slutsky

BÀI TẬP

15. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng:

$$U = (x_1 + 3)x_2,$$

trong đó x_1 là lượng hàng hoá A, x_2 là lượng hàng hoá B. Hãy chọn túi hàng lợi ích tối đa trong điều kiện giá hàng hoá A là \$5, giá hàng hoá B là \$20, ngân sách tiêu dùng là \$185.

GIÁO TRÌNH TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

16. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng:

$$U = x_1 x_2 + x_1 + 2x_2.$$

Trong điều kiện hàng hoá thứ nhất được bán với giá \$2, hàng hoá thứ hai được bán với giá \$5 và thu nhập dành cho tiêu dùng là \$51, hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa hoá lợi ích của mình.

17. Cho biết hàm lợi ích tiêu dùng:

$$U = x_1^{0.6} x_2^{0.25}.$$

Trong điều kiện hàng hoá thứ nhất được bán với giá \$8, hàng hoá thứ hai được bán với giá \$5 và thu nhập dành cho tiêu dùng là \$680, hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa hoá lợi ích của mình.

18. Lập các hàm cầu Marshall của người tiêu dùng, cho biết hàm lợi ích:

$$U = x_1 x_2 + 3x_1.$$

19. Lập các hàm cầu Marshall của người tiêu dùng, cho biết hàm lợi ích:

$$U = x_1^{0.7} x_2^{0.3}.$$

20. Với hàm lợi ích và giá của hai loại hàng hoá cho ở bài tập 15, hãy xác định túi hàng chi phí tối thiểu đảm bảo mức lợi ích $U = 196$.

9.4. CÁC BÀI TOÁN VỀ SỰ LỰA CHỌN CỦA NHÀ SẢN XUẤT

9.4.1. Lựa chọn tối ưu mức sử dụng các yếu tố sản xuất

a. Bài toán tối đa hoá...

Điều kiện cần của bài toán cực trị có điều kiện là:

$$\begin{cases} L_1 = 200 - 20Q_1 - 10\lambda = 0 \\ L_2 = 115 - 5Q_2 + 2,5\lambda = 0 \\ L_\lambda = 85 - 10Q_1 + 2,5Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{Q}_1 = 13,4 \\ \bar{Q}_2 = 19,6 \\ \bar{\lambda} = -6,8 \end{cases}$$

Điều kiện đủ của cực đại có điều kiện trong trường hợp này cũng được thoả mãn với mọi Q_1, Q_2 . Vậy nếu không được phép phân biệt giá bán ở hai thị trường thì nhà sản xuất thu được lợi nhuận tối đa khi bán 13,4 sản phẩm ở thị trường thứ nhất và 19,6 sản phẩm ở thị trường thứ hai. Giá tối ưu là $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = 76$, và lợi nhuận thu được là $\bar{\pi} = 178$.

BÀI TẬP

21. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất:

$$Q = 2K^{0,3}L^{0,5}.$$

a) Hãy đánh giá hiệu quả của việc tăng quy mô sản xuất.

b) Giả sử giá thuê tư bản là \$6, giá thuê lao động là \$2 và doanh nghiệp tiến hành sản xuất ngân sách cố định \$4800. Hãy cho biết doanh nghiệp đó sử dụng bao nhiêu đơn vị tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động thì thu được sản lượng tối đa?

22. Hãy trả lời các câu hỏi ở bài tập 21, với hàm sản xuất:

$$Q = 10K^{0,8}L^{0,6},$$

giá thuê tư bản là \$30, giá thuê lao động là \$10 và doanh nghiệp tiến hành sản xuất ngân sách cố định \$2100.

23. Một công ty sản xuất một loại sản phẩm với hàm sản xuất như sau:

$$Q = K(L + 5).$$

Công ty này nhận được hợp đồng cung cấp 5600 sản phẩm. Hãy cho biết phương án sử dụng các yếu tố K, L sao cho việc sản xuất lượng sản phẩm theo hợp đồng tốn ít chi phí nhất, trong điều kiện giá thuê tư bản $w_K = 70$ và giá thuê lao động $w_L = 20$.

24. Một doanh nghiệp cạnh tranh thuần túy sản xuất kết hợp 2 loại sản phẩm với hàm chi phí như sau (Q_i là lượng sản phẩm i):

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 10.$$

Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa khi giá sản phẩm 1 là \$160 và giá sản phẩm 2 là \$120.

25. Hãy trả lời câu hỏi ở bài tập 24 khi:

Hàm chi phí: $TC = Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 7$;

Giá sản phẩm 1: $p_1 = \$32$; Giá sản phẩm 2: $p_2 = \$16$.

26. Một công ty độc quyền sản xuất kết hợp 2 loại sản phẩm với hàm chi phí (Q_i là lượng sản phẩm i):

$$TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 55.$$

Hãy chọn mức sản lượng kết hợp (Q_1, Q_2) và giá bán các sản phẩm để doanh nghiệp có được lợi nhuận tối đa, khi cầu của thị trường đối với các sản phẩm của công ty như sau:

Sản phẩm 1: $Q_1 = 50 - 0,5p_1$; Sản phẩm 2: $Q_2 = 76 - p_2$.

27. Hãy trả lời câu hỏi ở bài tập 26 khi:

Hàm chi phí: $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20$;

Cầu đối với sản phẩm 1: $Q_1 = 25 - 0,5p_1$,

Cầu đối với sản phẩm 2: $Q_2 = 30 - p_2$.

28. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại hai nhà máy với hàm chi phí cận biên như sau (Q_i là lượng sản phẩm sản xuất ở nhà máy i , MC_i là chi phí cận biên của nhà máy i ; $i = 1, 2$):

$$MC_1 = 2 + 0,1Q_1, MC_2 = 4 + 0,08Q_2.$$

Công ty đó bán sản phẩm trên thị trường với biểu cầu $p = 58 - 0,05Q$. Nếu công ty đó muốn tối đa hoá lợi nhuận thì phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và bán với giá bao nhiêu?

29. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm tại bốn nhà máy với hàm chi phí cận biên như sau (Q_i là lượng sản phẩm sản xuất ở nhà máy i , MC_i là chi phí cận biên của nhà máy i ; $i = 1, 2$):

$$MC_1 = 20 + Q_1, MC_2 = 40 + 0,5Q_2, MC_3 = 40 + Q_3, MC_4 = 60 + 0,5Q_4.$$

Công ty đó bán sản phẩm trên thị trường với biểu cầu $p = 580 - 0,3Q$. Nếu công ty đó muốn tối đa hoá lợi nhuận thì phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và bán với giá bao nhiêu?

30. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó tại hai thị trường khác nhau. Cho biết hàm chi phí

$$TC = 35 + 40Q \quad (Q = Q_1 + Q_2)$$

và cầu của các thị trường đối với sản phẩm của công ty:

$$\text{Thị trường 1: } Q_1 = 24 - 0,2p_1,$$

$$\text{Thị trường 2: } Q_2 = 10 - 0,05p_2.$$

Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu lợi nhuận tối đa.

31. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó tại hai thị trường khác nhau. Cho biết hàm chi phí cận biên

$$MC = 1,75 + 0,05Q \quad (Q = Q_1 + Q_2)$$

và cầu của các thị trường đối với sản phẩm của công ty:

$$\text{Thị trường 1: } p_1 = 12 - 0,15Q_1;$$

$$\text{Thị trường 2: } p_2 = 9 - 0,075Q_2.$$

Hãy xác định sản lượng và giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu lợi nhuận tối đa.

32. Một nhà sản xuất độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán sản phẩm đó cho hai loại khách hàng. Cho biết hàm chi phí:

$$TC = 90 + 20Q.$$

Nếu nhà sản xuất đưa Q_1 sản phẩm ra bán cho loại khách hàng thứ nhất thì các khách hàng này bằng lòng trả giá $p_1 = 50 - 5Q_1$ USD cho mỗi sản phẩm. Nếu nhà sản xuất đưa Q_2 sản phẩm ra bán cho loại khách hàng thứ hai thì các khách hàng này bằng lòng trả giá $p_2 = 100 - 10Q_2$ USD cho mỗi sản phẩm. Hãy cho biết lượng cung tối ưu và giá tối ưu cho mỗi loại khách hàng.