集合と位相

nukui

2016 年 11 月 15 日

第 I 部
集合と写像

1　集合とは

1.1

1. 成り立つ。∵ Y に含まれる要素は全て X に含まれる。
2. 成り立つ。∵ 3 は W に含まれるが Z に含まれない。
3. 成り立つ。∵ 4 は V に含まれるが、Y に含まれない。
4. 成り立たない。∵4 は V に含まれるが X には含まれない。
5. 成り立たない。∵ 1 は X に含まれるが W に含まれない。
6. 成り立たない。∵ V の全ての要素は W に含まれる。
7. 成り立つ。∵ V の全ての要素は Z に含まれる。
8. 成り立つ。 ∵ 3 は X に含まれるが Z に含まれない。
9. 成り立たない。 ∵ Y に含まれる全ての要素は Z に含まれる。
10. 成り立たない。∵ 3 は W に含まれるが Y には含まれない。

1.2

1. D
2. B
3. C,E,F
4. B,D

1.3

1. 成り立たない。
2. 成り立つ。
3. 成り立つ。
4. 成り立つ。
5. 成り立たない。
6. 成り立つ。

1.4

集合 A が 1 個の元から成るとき、部分集合は A と $\emptyset$ の 2 通り。よって $n = 1$ のとき、命題は成り立つ。集合 A が n 個の元から成り、その部分集合は全部で 2^n 個から成ると仮定する。今、集合 A に元 $X(X \notin A)$ を一つ加え、$n + 1$ 個の元から成る集合 $B(B = A \cup \{X\})$ を考える。集合 B の部分集合は、

1. 集合 A の部分集合と一致。(2^n 個)
2. 集合 A の部分集合に元 X を加えたものに一致。(2^n 個)

のいずれかである。よって、集合 B の部分集合の個数は $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ 個になる。以上より、すべての自然数 n で命題は成り立つ。

2 集合の演算

2.1

意味を考えれば、確かに成り立つことがわかる。

2.2

1.

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (A \cap B) &= \{x | x \in (A - B) \text{ または } x \in (A \cap B)\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } x \in B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in B)\} \\ &= \{x | x \in A\} \\ &= A\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A - B) \cup B &= \{x | x \in (A - B) \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \quad \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in B)\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B)\} \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}B \cap (A - B) &= \{x | x \in B \text{ かつ } x \in (A - B)\} \\ &= \{x | x \in B \text{ かつ } (x \in A \text{ かつ } x \notin B)\} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

2.3

1. $A_1 \subset A$ を仮定する。

$$x \in A_1 \text{かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

なので、$x \in A_1 - B$ とすると、$x \in A - B$ が示せる。つまり、$A_1 - B \subset A - B$。

2. $B_1 \subset B$ を仮定する。

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B_1$$

なので、$x \in A - B$ とすると、$x \in A - B_1$ が示せる。つまり、$A - B \subset A - B_1$。

2.4

$$\begin{aligned} A - B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \notin B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

$$A = \{x | x \in A\}$$

なので、

$$A - B = A \Longleftrightarrow A - B \supset A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

となり、$A - B = A$ と、$A \cap B = \emptyset$ が同値であることを示せた。

2.5

1. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ B &= \{x | x \in B\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cup B = \{x | x \in B\} = B$ となる。逆に、$A \cup B = B$ を仮定すると、$A \cup B \subset B$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

2. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ A &= \{x | x \in A\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cap B = \{x | x \in A\} = A$ となる。逆に、$A \cap B = A$ を仮定すると、$A \cap B \supset A$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

3. 定義から

$$A - B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ なので、$A - B = \emptyset$ が成り立つ。逆に、$A - B = \emptyset$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ になるので、$A \subset B$ が成り立つ。

4. 定義から

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= \{x | x \in A \text{ または } x \in (B - A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

よって、1 と本質的に同じ問題なので、成立する。

5. 定義から

$$
\begin{aligned}
B-(B-A) &= \{x|x \in B \text{ かつ } x \notin (B-A)\} \\
&= \{x|x \in B \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in A)\} \\
&= \{x|x \in B \text{ かつ } x \in A\} \\
&= A \cap B
\end{aligned}
$$

よって、本質的に 2 と同じ問題なので、成立する。

2.6

1.

$$
\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C) &= ((A\cup B)\cap(A\cup C))\cap(B\cup C) \\
&= ((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cup((A\cap C)\cup(B\cap C)))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cup(B\cap C))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cap(B\cup C))\cup((B\cap C)\cap(B\cup C)) \\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\cup(B\cap C) \\
&= (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)
\end{aligned}
$$

2. 1 の結果を用いる。

$$
\begin{aligned}
&(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup C)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D) \\
&= ((A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C))\cap((A\cup D)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D)) \\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(D\cup(A\cap B\cap C)) \\
&= (((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap D)\cup(((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(A\cap B\cap C)) \\
&= ((A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D))\cup(A\cap B\cap C) \\
&= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D)
\end{aligned}
$$

3　ド・モルガンの法則

3.1

1.

$$
\begin{aligned}
(A^c)^c &= (X-A)^c \\
&= \{x|x \in X-(X-A)\} \\
&= \{x \in X|x \notin X-A\} \\
&= \{x \in X|\text{「}x \in X \text{ かつ } x \notin A\text{」ではない}\} \\
&= \{x \in X|x \notin X \text{ または } x \in A\} \\
&= \{x \in X|x \in A\} \\
&= A
\end{aligned}
$$

2.

$$
X^c = X - X = \{x|x \in X \text{ かつ } x \notin X\} = \emptyset
$$

3.

$$\emptyset^c = X - \emptyset = \{x | x \in X \text{ かつ } x \notin \emptyset\} = X$$

4.

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \{x | x \in A \text{ または } x \in A^c\} \\ &= \{x \in X | x \in A \text{ または } x \notin A\} \\ &= X \end{aligned}$$

5.

$$A \cap A^c = (A^c)^c \cap A^c = (A^c \cup A)^c = X^c = \emptyset$$

6.

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in X | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in X - B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

7.

$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$$

3.2

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) - C &= \{x | x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x | x \in A - C \text{ または } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cup (B - C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (A \cap B) - C &= \{x | x \in A \cap B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x | x \in A - C \text{ かつ } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cap (B - C) \end{aligned}$$

3.3

1. (a)

$$\begin{aligned} A \circ B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \circ A \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(A \circ B) \circ C &= ((A \circ B) - C) \cup (C - (A \circ B)) \\
&= (((A-B) \cup (B-A)) - C) \cup (C - ((A-B) \cup (B-A))) \\
&= (((A-B) - C) \cup ((B-A) - C)) \cup ((C - (A-B)) \cap (C - (B-A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup (((C-A) \cup (C \cap B)) \cap ((C-B) \cup (C \cap A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup \\
&\qquad ((C-A) \cap (C-B)) \cup ((C-A) \cap (C \cap A)) \cup ((C \cap B) \cap (C-B)) \cup ((C \cap B) \cap (C \cap A)) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup ((C - (A \cup B)) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap C)) \\
&= (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
C - (A - B) &= \{x | x \in C \text{ かつ } x \notin (A - B)\} \\
&= \{x | x \in C \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \in B))\} \\
&= \{x | (x \in C \text{ かつ } x \notin A) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \in B)\} \\
&= (C - A) \cup (C \cap B)
\end{aligned}
$$

という結果を、３行目から４行目への変形で用いた。また、

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (C \cup D) &= (A \cap (C \cup D)) \cup (B \cap (C \cup D)) \\
&= (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)
\end{aligned}
$$

という結果を、４行目から（５, ６行目）への変形で用いた。
さて、$(A \circ B) \circ C = (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$ と変形できるので、$(A \circ B) \circ C$ は、A,B,C が全く同等で、任意の二つを入れ替えても同じ値であることがわかる。よって、$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$。

(c)

$$A \circ A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset$$

(d)

$$A \circ \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A$$

2.

$$
\begin{aligned}
& A \circ X = B \\
\iff\ & (A \circ X) - B = \emptyset \text{ かつ } B - (A \circ X) = \emptyset \\
\iff\ & ((A \circ X) - B) \cup (B - (A \circ X)) = \emptyset \\
\iff\ & ((A \circ X) \circ B) = \emptyset \\
\iff\ & ((A \circ B) \circ X) = \emptyset \\
\iff\ & ((A \circ B) - X) \cup (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
\iff\ & ((A \circ B) - X) = \emptyset \text{ かつ } (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
\iff\ & A \circ B = X
\end{aligned}
$$

ここで、$((A \circ X) \circ B) = \emptyset \iff ((A \circ B) \circ X) = \emptyset$ という変形には、1 の結果を用いた。以上より、集合 A,B を任意に与えたとき、$A \circ X = B$ を満足する集合 X が $A \circ B$ と表せるので、X はただ一つ存在することが示せた。

4　直積集合

4.1

1.

$$\begin{aligned}A \times (B \cup C) &= \{(x,y)|x \in A \text{ かつ } y \in (B \cup C)\}\\&= \{(x,y)|(x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\}\\&= \{(x,y)|(x,y) \in (A \times B) \text{ または } (x,y) \in (A \times C)\}\\&= (A \times B) \cup (A \times C)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}A \times (B \cap C) &= \{(x,y)|x \in A \text{ かつ } y \in (B \cap C)\}\\&= \{(x,y)|(x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ かつ } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\}\\&= \{(x,y)|(x,y) \in (A \times B) \text{ かつ } (x,y) \in (A \times C)\}\\&= (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= \{(x,y)|x \in (A \cup B) \text{ かつ } y \in C\}\\&= \{(x,y)|(x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\}\\&= \{(x,y)|(x,y) \in A \times C \text{ または } (x,y) \in B \times C\}\\&= (A \times C) \cup (B \times C)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(A \cap B) \times C &= \{(x,y)|x \in (A \cap B) \text{ かつ } y \in C\}\\&= \{(x,y)|(x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\}\\&= \{(x,y)|(x,y) \in A \times C \text{ かつ } (x,y) \in B \times C\}\\&= (A \times C) \cap (B \times C)\end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned}(X \times Y) - (A \times B) &= \{(s,t)|(s,t) \in (X \times Y) \text{ かつ } (s,t) \notin (A \times B)\}\\&= \{(s,t)|(s \in (X - A) \text{ かつ } t \in Y)\\&\qquad\qquad \text{ または } (s \in X \text{ かつ } t \in (Y - B))\}\\&= \{(s,t)|(s,t) \in ((X - A) \times Y) \text{ または } (s,t) \in (X \times (Y - B))\}\\&= ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - B))\end{aligned}$$

5　写像

5.1

1.

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = x^2 + 3$$

2.

$$(g \circ f)(x) = g(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

3.

$$(f \circ f)(x) = f(x+2) = x + 4$$

4.

$$(g \circ g)(x) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

5.2

1.

$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cap B &= \{x | x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{かつ } x \in B\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ かつ } x \in B\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{かつ } x \in B]\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cap B)]\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cup B &= \{x | x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{または } x \in B\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ または } x \in B\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{または } x \in B]\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cup B)]\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)
\end{aligned}$$

5.3

1.

$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ「} \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ } \forall\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda^c)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ「} \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ } \exists\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda^c)
\end{aligned}$$

5.4

1.

$$
\begin{aligned}
f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) &= \{y\in Y | \exists x \in (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)[f(x)=y]\} \\
&= \{y\in Y | \exists \lambda\in\Lambda[\exists x\in A_\lambda[f(x)=y]]\} \\
&= \{y\in Y | \exists \lambda\in\Lambda[y\in f(A_\lambda)]\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)
\end{aligned}
$$

2.

$$y\in f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$$

と仮定すると、

$$\exists x\in(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)[f(x)=y]$$

が言える。これは、

$$\exists x\in X[\forall\lambda\in\Lambda[x\in A_\lambda \quad \text{かつ } f(x)=y]]$$

と同値。このとき、

$$\forall\lambda\in\Lambda[\exists x\in A_\lambda[f(x)=y]]$$

がいえる[*1]ので、

$$y\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

3.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) &= \{x\in X | f(x)\in(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu)\} \\
&= \{x\in X | \exists\mu\in M[f(x)\in B_\mu]\} \\
&= \{x\in X | \exists\mu\in M[x\in f^{-1}(B_\mu)]\} \\
&= \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) &= \{x\in X | f(x)\in(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu)\} \\
&= \{x\in X | \forall\mu\in M[f(x)\in B_\mu]\} \\
&= \{x\in X | \forall\mu\in M[x\in f^{-1}(B_\mu)]\} \\
&= \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)
\end{aligned}
$$

[*1] 逆は必ずしも真ではない。つまり $\forall\lambda\in\Lambda[\exists x\in A_\lambda[f(x)=y]]$ だからといって、$\exists x\in X[\forall\lambda\in\Lambda[x\in A_\lambda \quad \text{かつ } f(x)=y]]$ はいえない。

5.5

$n = 2$ のとき

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2$$

となり、主張は正しい。$n = m$ のとき、主張が正しいと仮定する。つまり、

$$\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m} (A_i \cup A_j) = \bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m)$$

が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m+1} (A_i \cup A_j) \\
&= (\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m} (A_i \cup A_j)) \cap (\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} (A_i \cup A_{m+1})) \\
&= (\bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m)) \cap ((\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup A_{m+1}) \\
&= \bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m \cap ((\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup A_{m+1})) \\
&= (\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup (\bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1})) \\
&= \bigcup_{1 \leqq i \leqq m+1} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1})
\end{aligned}$$

となり、$n = m + 1$ のときも成り立つ。以上より、$n \geqq 2$ のすべての自然数 n で主張は成り立つ。

5.6

1.

$$x \in \liminf_{n \to \infty} E_n$$

と仮定すると、定義より

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in E_n]]$$

が成り立つ。よって、

$$\forall s \geqq 1[\exists k \geq 1[(m \geq k \text{ かつ } m \geq s) \Longrightarrow x \in E_m]]$$

となるので、

$$\forall s \geq 1[\exists m \geq s[x \in E_m]]$$

定義より、

$$x \in \limsup_{n \to \infty} E_n$$

2.

$$x \in \liminf_{n \to \infty} A_n$$

と仮定すると、定義より、

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n]]$$

ここで、$\forall n \in N[A_n \subset B_n]$ なので、

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in B_n]]$$

が言える。結局、

$$x \in \liminf_{n\to\infty} B_n$$

$\limsup$ の場合も同様に示せる。

3.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) &= \{x|\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in (A_n \cup B_n)]]\} \\
&= \{x|\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in A_n \text{または} x \in B_n]]\} \\
&= \{x|\forall k \geqq 1[(\exists n \geqq k[x \in A_n]) \text{ または } (\exists m \geqq k[x \in B_m])]\} \\
&= \{x|(\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in A_n]]) \text{ または } (\forall s \geqq 1[\exists m \geqq s[x \in B_m]])\} \\
&= \{x|x \in (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n)\} \\
&= (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n)
\end{aligned}$$

ここで、3 行目 $\Longrightarrow$ 4 行目 を示すには、「4 行目でない $\Longrightarrow$3 行目でない」を示せば良い。

4.

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &= \{x|\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in (A_n \cap B_n)]]\} \\
&= \{x|\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n \text{かつ} x \in B_n]]\} \\
&= \{x|\exists k \geqq 1[(\forall n \geqq k[x \in A_n]) \text{ かつ } (\forall m \geqq k[x \in B_m])]\} \\
&= \{x|(\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n]]) \text{ かつ } (\exists s \geqq 1[\forall m \geqq s[x \in B_m]])\} \\
&= \{x|x \in (\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n)\} \\
&= (\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n)
\end{aligned}$$

5.7

1.

各 $n \in N$ に対して、$E_n \subset E_{n+1}$ のとき、$\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k
\end{aligned}$$

2.

各 $n \in N$ に対して、$E_n \supset E_{n+1}$ のとき、$\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k
\end{aligned}$$

5.8

1. 問 5.6(3) より、

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n$$

2. 問 5.6(4) より、

$$\lim_{n\to\infty}(A_n\cap B_n)=\liminf_{n\to\infty}(A_n\cap B_n)=\liminf_{n\to\infty}A_n\cap\liminf_{n\to\infty}B_n=\lim_{n\to\infty}A_n\cap\lim_{n\to\infty}B_n$$

5.9

1.

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}E_n&=\{x|\forall k\geqq 1[\exists n\geqq k[x\in E_n]]\}\\&=\{x|\forall k\geqq 1[\exists n[2n-1\geqq k\text{ かつ }(x\in E_{2n}\text{または }x\in E_{2n-1})]]\}\\&=\{x|\forall k\geqq 1[\exists n[2n-1\geqq k\text{ かつ }(x\in A\text{ または }x\in B)]]\}\\&=\{x|x\in A\text{ または }x\in B\}\\&=A\cup B\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}E_n&=\{x|\exists k\geqq 1[\forall n\geqq k[x\in E_n]]\}\\&=\{x|\exists k\geqq 1[\forall n[2n-1\geqq k\Longrightarrow(x\in E_{2n-1}\text{かつ }x\in E_{2n})]]\}\\&=\{x|\exists k\geqq 1[\forall n[2n-1\geqq k\Longrightarrow(x\in A\text{ かつ }x\in B)]]\}\\&=\{x|x\in A\text{ かつ }x\in B\}\\&=A\cap B\end{aligned}$$

第 II 部
濃度の大小と二項関係

6 全射・単射

6.1

1. $f:A\to B$ が単射と仮定する。

(a)

$$y\in f(A_1)\cap f(A_2)$$

と仮定すると、$y=f(x)$ となる x が存在し、$x\in A_1$ かつ $x\in A_2$ となる。(もしも $x\notin A_1$ または $x\notin A_2$ とすると、f が単射でないことになってしまう。) よって、

$$y\in f(A_1\cap A_2)$$

(b) 任意の x について $f^{-1}(f(x))=x$ なので、$x\in f^{-1}(f(A_1))$ と仮定すると $x\in A_1$ である。

(c)

$$y\in f(A_1-A_2)$$

と仮定すると、$f(x)=y$ となる $x\in A_1-A_2$ がただ一つ存在する。よって、$y\in f(A_1)$ かつ $y\notin f(A_2)$ である。

2.

$$f : A \to B$$

が全射とする。$y \in B_1$ と仮定すると、$f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B_1)$ が存在する。よって、$y \in f(f^{-1}(B_1))$。

6.2

1. $g \circ f$ が単射と仮定すると、

$$\forall x_1, x_2 \in A[x_1 \neq x_2 \implies g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)]$$

ここで、$f(x_1) = f(x_2) \implies g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ なので、

$$\forall x_1, x_2 \in A[x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)]$$

が成り立つ。よって、f は単射である。

2. $g \circ f$ が全射と仮定すると、

$$\forall c \in C[\exists a \in A[g \circ f(a) = c]]$$

ここで、$\forall a \in A[f(a) \in B]$ なので、

$$\forall c \in C[\exists b \in B[g(b) = c]]$$

6.3

$$\forall n \in \mathbb{N}[\forall x \in X[h^n(x) \neq x]]$$

と仮定すると、任意の $n \in \mathbb{N}, x \in X$ について、$x, h(x), h^2(x), \ldots, h^n(x)$ は互いに異なる値となる。つまり、$h : X \to X$ より、X に無限個の元が存在することになってしまい、矛盾。よって、

$$\exists n \in \mathbb{N}[\exists x \in X[h^n(x) = x]]$$

6.4

たとえば、$y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$ は、条件を満たす。

6.5

f は全射かつ単射である。実際、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \text{ならば、} x = 0 \\ y = \frac{1}{2^n} \quad (n = 2, 3, \ldots) \text{ ならば、} x = 4y \\ \text{それ以外ならば、} x = y \end{cases}$$

というように、任意の y に関して、$f(x) = y$ となる x がただ一つ存在するので、f は全単射。

6.6

以下のように定義された写像 f は条件を満たす。

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{x}{2}, & x=\frac{1}{2^n}(n=0,1,2,\dots)\\ x, & x\neq 0,\frac{1}{2^n}(n=0,1,2,\dots)\end{cases}$$

7 濃度の大小

7.1

1. 恒等写像 $1_A : A \to A$ は全単射である。
2. $A \sim B$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ が存在する。ここで、f の逆写像 f^{-1} も全単射である。よって、$B \sim A$。
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ と、$g : B \to C$ が存在する。ここで、$g \circ f : A \to C$ も全単射である。よって、$A \sim C$。

7.2

$F(A \times B, C)$ の元である写像 $f : A \times B \to C$ が与えられた時、$F(A, F(B, C))$ の元である写像 $g : A \to F(B, C)$ を以下のように定義することで対応させるとする。

$$(g(a))(b) = f(a, b)$$

このとき、任意の $g : A \to F(B, C)$ に対して、対応する $f : A \times B \to C$ がただ一つ存在する。実際、任意の g に対して、$f(a, b) = (g(a))(b)$ という $f : A \times B \to C$ がただ一つ存在する。よって、$F(A \times B, C)$ の元と $F(A, F(B, C))$ の元が一対一に対応付けできた。以上より、$F(A \times B, C) \sim F(A, F(B, C))$ が示された。

7.3

1. $A \sim A'$ かつ $B \sim B'$ と仮定すると、全単射の写像 $f_1 : A \to A'$ と $f_2 : B \to B'$ が存在する。今 $g : A \times B \to A' \times B'$ を $g(a, b) = (f_1(a), f_2(b))$ として定義すれば、これは全単射の写像である。
   また、$h_1 \in F(A, B)$ に対して、$h_2(a') = f_2(h_1(f_1^{-1}(a')))$ として定義された $h_2 \in F(A', B')$ を対応づけるとする。このとき、任意の $h_2 \in F(A', B')$ に対して、$h_1 \in F(A, B)$ がただ一つ存在する。実際、任意の h_2 に対して、$h_1(a) = f_2^{-1}(h_2(f_1(a)))$ という $h_1 \in F(A', B')$ がただ一つ存在している。以上より、$F(A, B) \sim F(A', B')$ が示された。
2. $A \sim B$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ が存在する。今、$g : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$ を、

   $$g(A') = \{b \in B | a \in A' \text{かつ } b = f(a)\}$$

   と定義する（ここで $A' \subset A$)。このとき、g は全単射である。実際、逆写像 g^{-1} が以下のように定義できる。

   $$g^{-1}(B') = \{a \in A | b \in B' \text{かつ } b = f(a)\}$$