

集合と位相

nukui

2016 年 11 月 8 日

第 I 部

集合と写像

1 集合とは

1.1

1. 成り立つ。 $\because Y$ に含まれる要素は全て X に含まれる。
2. 成り立つ。 $\because 3$ は W に含まれるが Z に含まれない。
3. 成り立つ。 $\because 4$ は V に含まれるが、 Y に含まれない。
4. 成り立たない。 $\because 4$ は V に含まれるが X には含まれない。
5. 成り立たない。 $\because 1$ は X に含まれるが W に含まれない。
6. 成り立たない。 $\because V$ の全ての要素は W に含まれる。
7. 成り立つ。 $\because V$ の全ての要素は Z に含まれる。
8. 成り立つ。 $\because 3$ は X に含まれるが Z に含まれない。
9. 成り立たない。 $\because Y$ に含まれる全ての要素は Z に含まれる。
10. 成り立たない。 $\because 3$ は W に含まれるが Y には含まれない。

1.2

1. D
2. B
3. C, E, F
4. B, D

1.3

1. 成り立たない。
2. 成り立つ。
3. 成り立つ。
4. 成り立つ。
5. 成り立たない。
6. 成り立つ。

1.4

集合 A が 1 個の元から成るとき、部分集合は A と \emptyset の 2 通り。よって $n = 1$ のとき、命題は成り立つ。
集合 A が n 個の元から成り、その部分集合は全部で 2^n 個から成るとする。今、集合 A に元 X を一つ加え、 $n+1$ 個の元から成る集合 B を考える。集合 B の部分集合は、

1. 集合 A の部分集合と一致。(2^n 個)
2. 集合 A の部分集合に元 X を加えたものに一致。(2^n 個)

のいずれかである。よって、集合 B の部分集合の個数は $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ 個になる。以上より、すべての自然数 n で命題は成り立つ。

2 集合の演算

2.1

意味を考えれば、確かに成り立つことがわかる。

2.2

1.

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (A \cap B) &= \{x | x \in (A - B) \text{ または } x \in (A \cap B)\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } x \in B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in B)\} \\ &= \{x | x \in A\} \\ &= A\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A - B) \cup B &= \{x | x \in (A - B) \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in B)\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B)\} \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}B \cap (A - B) &= \{x | x \in B \text{ かつ } x \in (A - B)\} \\ &= \{x | x \in B \text{ かつ } (x \in A \text{ かつ } x \notin B)\} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

2.3

1. $A_1 \subset A$ を仮定する。

$$x \in A_1 \text{ かつ } x \notin B \implies x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

なので、 $x \in A_1 - B$ とすると、 $x \in A - B$ が示せる。つまり、 $A_1 - B \subset A - B$ 。

2. $B_1 \subset B$ を仮定する。

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B \implies x \in A \text{ かつ } x \notin B_1$$

なので、 $x \in A - B$ とすると、 $x \in A - B_1$ が示せる。つまり、 $A - B \subset A - B_1$ 。

2.4

$$\begin{aligned} A - B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \notin B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

$$A = \{x | x \in A\}$$

なので、

$$A - B = A \iff A - B \supset A \iff A \cap B = \emptyset$$

となり、 $A - B = A$ と、 $A \cap B = \emptyset$ が同値であることを示せた。

2.5

1. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ B &= \{x | x \in B\} \end{aligned}$$

である。ここで、 $A \subset B$ を仮定すると、 $A \cup B = \{x | x \in B\} = B$ となる。逆に、 $A \cup B = B$ を仮定すると、 $A \cup B \subset B$ より、 $\forall x [x \in A \implies x \in B]$ となるので、 $A \subset B$ 。

2. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ A &= \{x | x \in A\} \end{aligned}$$

である。ここで、 $A \subset B$ を仮定すると、 $A \cap B = \{x | x \in A\} = A$ となる。逆に、 $A \cap B = A$ を仮定すると、 $A \cap B \supset A$ より、 $\forall x [x \in A \implies x \in B]$ となるので、 $A \subset B$ 。

3. 定義から

$$A - B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

である。ここで、 $A \subset B$ を仮定すると、 $\forall x [x \in A \implies x \in B]$ なので、 $A - B = \emptyset$ が成り立つ。逆に、 $A - B = \emptyset$ を仮定すると、 $\forall x [x \in A \implies x \in B]$ になるので、 $A \subset B$ が成り立つ。

4. 定義から

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= \{x | x \in A \text{ または } x \in (B - A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

よって、1 と本質的に同じ問題なので、成立する。

5. 定義から

$$\begin{aligned} B - (B - A) &= \{x | x \in B \text{ かつ } x \notin (B - A)\} \\ &= \{x | x \in B \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in A)\} \\ &= \{x | x \in B \text{ かつ } x \in A\} \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

よって、本質的に 2 と同じ問題なので、成立する。

2.6

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) &= ((A \cup B) \cap (A \cup C)) \cap (B \cup C) \\ &= ((A \cup B) \cap A) \cup ((A \cup B) \cap C) \cap (B \cup C) \\ &= (A \cup ((A \cap C) \cup (B \cap C))) \cap (B \cup C) \\ &= (A \cup (B \cap C)) \cap (B \cup C) \\ &= (A \cap (B \cup C)) \cup ((B \cap C) \cap (B \cup C)) \\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

2. 1 の結果を用いる。

$$\begin{aligned} &(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D) \\ &= ((A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)) \cap ((A \cup D) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D)) \\ &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap (D \cup (A \cap B \cap C)) \\ &= (((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap D) \cup (((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \cap (A \cap B \cap C)) \\ &= ((A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D)) \cup (A \cap B \cap C) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D) \cup (A \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

3 ド・モルガンの法則

3.1

1.

$$\begin{aligned} (A^c)^c &= (X - A)^c \\ &= \{x | x \in X - (X - A)\} \\ &= \{x \in X | x \notin X - A\} \\ &= \{x \in X | \text{「} x \in X \text{ かつ } x \notin A \text{」ではない}\} \\ &= \{x \in X | x \notin X \text{ または } x \in A\} \\ &= \{x \in X | x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

2.

$$X^c = X - X = \{x | x \in X \text{ かつ } x \notin X\} = \emptyset$$

3.

$$\emptyset^c = X - \emptyset = \{x|x \in X \text{ かつ } x \notin \emptyset\} = X$$

4.

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \{x|x \in A \text{ または } x \in A^c\} \\ &= \{x \in X|x \in A \text{ または } x \notin A\} \\ &= X \end{aligned}$$

5.

$$A \cap A^c = (A^c)^c \cap A^c = (A^c \cup A)^c = X^c = \emptyset$$

6.

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in X|x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x|x \in A \text{ かつ } x \in X - B\} \\ &= \{x|x \in A \text{ かつ } x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

7.

$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$$

3.2

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) - C &= \{x|x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x|x \in A - C \text{ または } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cup (B - C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (A \cap B) - C &= \{x|x \in A \cap B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x|x \in A - C \text{ かつ } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cap (B - C) \end{aligned}$$

3.3

1. (a)

$$\begin{aligned} A \circ B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \circ A \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(A \circ B) \circ C &= ((A \circ B) - C) \cup (C - (A \circ B)) \\
&= (((A - B) \cup (B - A)) - C) \cup (C - ((A - B) \cup (B - A))) \\
&= (((A - B) - C) \cup ((B - A) - C)) \cup ((C - (A - B)) \cap (C - (B - A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup (((C - A) \cup (C \cap B)) \cap ((C - B) \cup (C \cap A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup \\
&\quad ((C - A) \cap (C - B)) \cup ((C - A) \cap (C \cap A)) \cup ((C \cap B) \cap (C - B)) \cup ((C \cap B) \cap (C \cap A)) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup ((C - (A \cup B)) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap C)) \\
&= (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
C - (A - B) &= \{x | x \in C \text{ かつ } x \notin (A - B)\} \\
&= \{x | x \in C \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \in B)\} \\
&= \{x | (x \in C \text{ かつ } x \notin A) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \in B)\} \\
&= (C - A) \cup (C \cap B)
\end{aligned}$$

という結果を、3行目から4行目への変形で用いた。また、

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (C \cup D) &= (A \cap (C \cup D)) \cup (B \cap (C \cup D)) \\
&= (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)
\end{aligned}$$

という結果を、4行目から(5, 6行目)への変形で用いた。

さて、 $(A \circ B) \circ C = (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$ と変形できるので、 $(A \circ B) \circ C$ は、 A, B, C が全く同等で、任意の二つを入れ替えても同じ値であることがわかる。よって、 $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ 。

(c)

$$A \circ A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset$$

(d)

$$A \circ \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A$$

2.

$$\begin{aligned}
A \circ X &= B \\
&\iff (A \circ X) - B = \emptyset \text{ かつ } B - (A \circ X) = \emptyset \\
&\iff ((A \circ X) - B) \cup (B - (A \circ X)) = \emptyset \\
&\iff ((A \circ X) \circ B) = \emptyset \\
&\iff ((A \circ B) \circ X) = \emptyset \\
&\iff ((A \circ B) - X) \cup (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
&\iff ((A \circ B) - X) = \emptyset \text{ かつ } (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
&\iff A \circ B = X
\end{aligned}$$

ここで、 $((A \circ X) \circ B) = \emptyset \iff ((A \circ B) \circ X) = \emptyset$ という変形には、1の結果を用いた。以上より、集合 A, B を任意に与えたとき、 $A \circ X = B$ を満足する集合 X が $A \circ B$ と表せるので、 X はただ一つ存在することが示せた。

4 直積集合

4.1

1.

$$\begin{aligned}A \times (B \cup C) &= \{(x, y) | x \in A \text{ かつ } y \in (B \cup C)\} \\&= \{(x, y) | (x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\} \\&= \{(x, y) | (x, y) \in (A \times B) \text{ または } (x, y) \in (A \times C)\} \\&= (A \times B) \cup (A \times C)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}A \times (B \cap C) &= \{(x, y) | x \in A \text{ かつ } y \in (B \cap C)\} \\&= \{(x, y) | (x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ かつ } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\} \\&= \{(x, y) | (x, y) \in (A \times B) \text{ かつ } (x, y) \in (A \times C)\} \\&= (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(A \cup B) \times C &= \{(x, y) | x \in (A \cup B) \text{ かつ } y \in C\} \\&= \{(x, y) | (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\} \\&= \{(x, y) | (x, y) \in A \times C \text{ または } (x, y) \in B \times C\} \\&= (A \times C) \cup (B \times C)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(A \cap B) \times C &= \{(x, y) | x \in (A \cap B) \text{ かつ } y \in C\} \\&= \{(x, y) | (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\} \\&= \{(x, y) | (x, y) \in A \times C \text{ かつ } (x, y) \in B \times C\} \\&= (A \times C) \cap (B \times C)\end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned}(X \times Y) - (A \times B) &= \{(s, t) | (s, t) \in (X \times Y) \text{ かつ } (s, t) \notin (A \times B)\} \\&= \{(s, t) | (s \in (X - A) \text{ かつ } t \in Y) \\&\quad \text{または } (s \in X \text{ かつ } t \in (Y - B)))\} \\&= \{(s, t) | (s, t) \in ((X - A) \times Y) \text{ または } (s, t) \in (X \times (Y - B))\} \\&= ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - B))\end{aligned}$$

5 写像

5.1

1.

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = x^2 + 3$$

2.

$$(g \circ f)(x) = g(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

3.

$$(f \circ f)(x) = f(x+2) = x+4$$

4.

$$(g \circ g)(x) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

5.2

1.

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap B &= \{x | x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ かつ } x \in B\} \\ &= \{x | \exists \lambda \in \Lambda [x \in A_\lambda] \text{ かつ } x \in B\} \\ &= \{x | \exists \lambda \in \Lambda [x \in A_\lambda \text{ かつ } x \in B]\} \\ &= \{x | \exists \lambda \in \Lambda [x \in (A_\lambda \cap B)]\} \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cup B &= \{x | x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | \forall \lambda \in \Lambda [x \in A_\lambda] \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | \forall \lambda \in \Lambda [x \in A_\lambda \text{ または } x \in B]\} \\ &= \{x | \forall \lambda \in \Lambda [x \in (A_\lambda \cup B)]\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cup B) \end{aligned}$$

5.3

1.

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c &= (X - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ } \neg \exists \lambda \in \Lambda [x \in A_\lambda] \text{ ではない}\} \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ } \forall \lambda \in \Lambda [x \notin A_\lambda]\} \\ &= \{x | \forall \lambda \in \Lambda [x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^c) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c &= (X - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ } \neg \forall \lambda \in \Lambda [x \in A_\lambda] \text{ ではない}\} \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ } \exists \lambda \in \Lambda [x \notin A_\lambda]\} \\ &= \{x | \exists \lambda \in \Lambda [x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^c) \end{aligned}$$

5.4

1.

$$\begin{aligned}
 f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \{y \in Y \mid \exists x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)[f(x) = y]\} \\
 &= \{y \in Y \mid \exists \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x) = y]]\} \\
 &= \{y \in Y \mid \exists \lambda \in \Lambda[y \in f(A_\lambda)]\} \\
 &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)
 \end{aligned}$$

2.

$$y \in f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)$$

と仮定すると、

$$\exists x \in \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)[f(x) = y]$$

が言える。これは、

$$\exists x \in X[\forall \lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \quad \text{かつ} \quad f(x) = y]]$$

と同値。このとき、

$$\forall \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x) = y]]$$

がいえる^{*1}ので、

$$y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$$

3.

$$\begin{aligned}
 f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) &= \{x \in X \mid f(x) \in \left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right)\} \\
 &= \{x \in X \mid \exists \mu \in M[f(x) \in B_\mu]\} \\
 &= \{x \in X \mid \exists \mu \in M[x \in f^{-1}(B_\mu)]\} \\
 &= \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) &= \{x \in X \mid f(x) \in \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right)\} \\
 &= \{x \in X \mid \forall \mu \in M[f(x) \in B_\mu]\} \\
 &= \{x \in X \mid \forall \mu \in M[x \in f^{-1}(B_\mu)]\} \\
 &= \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)
 \end{aligned}$$

^{*1} 逆は必ずしも真ではない。つまり $\forall \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x) = y]]$ だからといって、 $\exists x \in X[\forall \lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \quad \text{かつ} \quad f(x) = y]]$ はいえない。

5.5

$n = 2$ のとき

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2$$

となり、主張は正しい。 $n = m$ のとき、主張が正しいと仮定する。つまり、

$$\bigcap_{1 \leq i < j \leq m} (A_i \cup A_j) = \bigcup_{1 \leq i \leq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m)$$

が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} & \bigcap_{1 \leq i < j \leq m+1} (A_i \cup A_j) \\ &= \left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq m} (A_i \cup A_j) \right) \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} (A_i \cup A_{m+1}) \right) \\ &= \left(\bigcup_{1 \leq i \leq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m) \right) \cap \left(\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i \right) \cup A_{m+1} \right) \\ &= \bigcup_{1 \leq i \leq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m \cap \left(\left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i \right) \cup A_{m+1} \right)) \\ &= \left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{1 \leq i \leq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1}) \right) \\ &= \bigcup_{1 \leq i \leq m+1} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1}) \end{aligned}$$

となり、 $n = m + 1$ のときも成り立つ。以上より、 $n \geq 2$ のすべての自然数 n で主張は成り立つ。

5.6

1.

$$x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$$

と仮定すると、定義より

$$\exists k \geq 1 [\forall n \geq k [x \in E_n]]$$

が成り立つ。よって、

$$\forall s \geq 1 [\exists k \geq 1 [(m \geq k \text{ かつ } m \geq s) \implies x \in E_m]]$$

となるので、

$$\forall s \geq 1 [\exists m \geq s [x \in E_m]]$$

定義より、

$$x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$$

2.

$$x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

と仮定すると、定義より、

$$\exists k \geq 1 [\forall n \geq k [x \in A_n]]$$

ここで、 $\forall n \in N [A_n \subset B_n]$ なので、

$$\exists k \geq 1 [\forall n \geq k [x \in B_n]]$$

が言える。結局、

$$x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$$

\limsup の場合も同様に示せる。

3.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) &= \{x | \forall k \geq 1 [\exists n \geq k [x \in (A_n \cup B_n)]]\} \\ &= \{x | \forall k \geq 1 [\exists n \geq k [x \in A_n \text{ または } x \in B_n]]\} \\ &= \{x | \forall k \geq 1 [(\exists n \geq k [x \in A_n]) \text{ または } (\exists m \geq k [x \in B_m])]\} \\ &= \{x | (\forall k \geq 1 [\exists n \geq k [x \in A_n]]) \text{ または } (\forall s \geq 1 [\exists m \geq s [x \in B_m]])\} \\ &= \{x | x \in (\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup (\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n)\} \\ &= (\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \cup (\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n) \end{aligned}$$

ここで、3 行目 \implies 4 行目 を示すには、「4 行目でない \implies 3 行目でない」を示せば良い。

4.

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) &= \{x | \exists k \geq 1 [\forall n \geq k [x \in (A_n \cap B_n)]]\} \\ &= \{x | \exists k \geq 1 [\forall n \geq k [x \in A_n \text{ かつ } x \in B_n]]\} \\ &= \{x | \exists k \geq 1 [(\forall n \geq k [x \in A_n]) \text{ かつ } (\forall m \geq k [x \in B_m])]\} \\ &= \{x | (\exists k \geq 1 [\forall n \geq k [x \in A_n]]) \text{ かつ } (\exists s \geq 1 [\forall m \geq s [x \in B_m]])\} \\ &= \{x | x \in (\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n)\} \\ &= (\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n) \end{aligned}$$

5.7

1.

各 $n \in N$ に対して、 $E_n \subset E_{n+1}$ のとき、 $\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \end{aligned}$$

2.

各 $n \in N$ に対して、 $E_n \supset E_{n+1}$ のとき、 $\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \end{aligned}$$

5.8

1. 問 5.6(3) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

2. 問 5.6(4) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

5.9

1.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n &= \{x | \forall k \geq 1 [\exists n \geq k [x \in E_n]]\} \\ &= \{x | \forall k \geq 1 [\exists n [2n - 1 \geq k \text{ かつ } (x \in E_{2n} \text{ または } x \in E_{2n-1})]]]\} \\ &= \{x | \forall k \geq 1 [\exists n [2n - 1 \geq k \text{ かつ } (x \in A \text{ または } x \in B)]]]\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n &= \{x | \exists k \geq 1 [\forall n \geq k [x \in E_n]]\} \\ &= \{x | \exists k \geq 1 [\forall n [2n - 1 \geq k \implies (x \in E_{2n-1} \text{ かつ } x \in E_{2n})]]]\} \\ &= \{x | \exists k \geq 1 [\forall n [2n - 1 \geq k \implies (x \in A \text{ かつ } x \in B)]]]\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

第 II 部

濃度の大小と二項関係

6 全射・単射

6.1

1. $f : A \rightarrow B$ が単射と仮定する。

(a)

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

と仮定すると、 $y = f(x)$ となる x が存在し、 $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ となる。(もしも $x \notin A_1$ または $x \notin A_2$ とすると、 f が単射でないことになってしまう。) よって、

$$y \in f(A_1 \cap A_2)$$

(b) 任意の x について $f^{-1}(f(x)) = x$ なので、 $x \in f^{-1}(f(A_1))$ と仮定すると $x \in A_1$ である。

(c)

$$y \in f(A_1 - A_2)$$

と仮定すると、 $f(x) = y$ となる $x \in A_1 - A_2$ がただ一つ存在する。よって、 $y \in f(A_1)$ かつ $y \notin f(A_2)$ である。

2.

$$f : A \rightarrow B$$

が全射とする。 $y \in B_1$ と仮定すると、 $f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B_1)$ が存在する。よって、 $y \in f(f^{-1}(B_1))$ 。

6.2

1. $g \circ f$ が単射と仮定すると、

$$\forall x_1, x_2 \in A [x_1 \neq x_2 \implies g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)]$$

ここで、 $f(x_1) = f(x_2) \implies g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ なので、

$$\forall x_1, x_2 \in A [x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)]$$

が成り立つ。よって、 f は単射である。

2. $g \circ f$ が全射と仮定すると、

$$\forall c \in C [\exists a \in A [g \circ f(a) = c]]$$

ここで、 $\forall a \in A [f(a) \in B]$ なので、

$$\forall c \in C [\exists b \in B [g(b) = c]]$$

6.3

$$\forall n \in \mathbb{N} [\forall x \in X [h^n(x) \neq x]]$$

と仮定すると、任意の $n \in \mathbb{N}, x \in X$ について、 $x, h(x), h^2(x), \dots, h^n(x)$ は互いに異なる値となる。つまり、 $h : X \rightarrow X$ より、 X に無限個の元が存在することになってしまい、矛盾。よって、

$$\exists n \in \mathbb{N} [\exists x \in X [h^n(x) = x]]$$

6.4

たとえば、 $y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$ は、条件を満たす。

6.5

f は全射かつ単射である。実際、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \text{ ならば、} x = 0 \\ y = \frac{1}{2^n} \quad (n = 2, 3, \dots) \text{ ならば、} x = 4y \\ \text{それ以外ならば、} x = y \end{cases}$$

というように、任意の y に関して、 $f(x) = y$ となる x がただ一つ存在するので、 f は全単射。

6.6

以下のように定義された写像 f は条件を満たす。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{x}{2}, & x = \frac{1}{2^n} (n = 0, 1, 2, \dots) \\ x, & x \neq 0, \frac{1}{2^n} (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$