集合と位相

nukui

2017 年 8 月 8 日

第 I 部
集合と写像

1　集合とは

1.1

1. 成り立つ。∵ Y に含まれる要素は全て X に含まれる。
2. 成り立つ。∵ 3 は W に含まれるが Z に含まれない。
3. 成り立つ。∵ 4 は V に含まれるが、Y に含まれない。
4. 成り立たない。∵4 は V に含まれるが X には含まれない。
5. 成り立たない。∵ 1 は X に含まれるが W に含まれない。
6. 成り立たない。∵ V の全ての要素は W に含まれる。
7. 成り立つ。∵ V の全ての要素は Z に含まれる。
8. 成り立つ。 ∵ 3 は X に含まれるが Z に含まれない。
9. 成り立たない。 ∵ Y に含まれる全ての要素は Z に含まれる。
10. 成り立たない。∵ 3 は W に含まれるが Y には含まれない。

1.2

1. D
2. B
3. C,E,F
4. B,D

1.3

1. 成り立たない。
2. 成り立つ。
3. 成り立つ。
4. 成り立つ。
5. 成り立たない。
6. 成り立つ。

1.4

集合 A が 1 個の元から成るとき、部分集合は A と $\emptyset$ の 2 通り。よって $n=1$ のとき、命題は成り立つ。
集合 A が n 個の元から成り、その部分集合は全部で 2^n 個から成ると仮定する。今、集合 A に元 $X(X\notin A)$ を一つ加え、$n+1$ 個の元から成る集合 $B(B=A\cup\{X\})$ を考える。集合 B の部分集合は、

1. 集合 A の部分集合と一致。(2^n 個)
2. 集合 A の部分集合に元 X を加えたものに一致。(2^n 個)

のいずれかである。よって、集合 B の部分集合の個数は $2^n+2^n=2^{n+1}$ 個になる。以上より、すべての自然数 n で命題は成り立つ。

2 集合の演算

2.1

意味を考えれば、確かに成り立つことがわかる。

2.2

1.

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cup(A\cap B) &= \{x|x\in(A-B)\ \text{または}\ x\in(A\cap B)\}\\
&= \{x|(x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B)\ \text{または}\ (x\in A\ \text{かつ}\ x\in B)\}\\
&= \{x|x\in A\ \text{かつ}\ (x\notin B\ \text{または}\ x\in B)\}\\
&= \{x|x\in A\}\\
&= A
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cup B &= \{x|x\in(A-B)\ \text{または}\ x\in B\}\\
&= \{x|(x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B)\quad \text{または}\ x\in B\}\\
&= \{x|(x\in A\ \text{または}\ x\in B)\ \text{かつ}\ (x\notin B\ \text{または}\ x\in B)\}\\
&= \{x|(x\in A\ \text{または}\ x\in B)\}\\
&= A\cup B
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
B\cap(A-B) &= \{x|x\in B\ \text{かつ}\ x\in(A-B)\}\\
&= \{x|x\in B\ \text{かつ}\ (x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B)\}\\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

2.3

1. $A_1\subset A$ を仮定する。

$$x\in A_1\text{かつ}\ x\notin B\Longrightarrow x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B$$

なので、$x\in A_1-B$ とすると、$x\in A-B$ が示せる。つまり、$A_1-B\subset A-B$。

2. $B_1 \subset B$ を仮定する。

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B_1$$

なので、$x \in A - B$ とすると、$x \in A - B_1$ が示せる。つまり、$A - B \subset A - B_1$。

2.4

$$\begin{aligned} A - B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \notin B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

$$A = \{x | x \in A\}$$

なので、

$$A - B = A \Longleftrightarrow A - B \supset A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

となり、$A - B = A$ と、$A \cap B = \emptyset$ が同値であることを示せた。

2.5

1. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ B &= \{x | x \in B\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cup B = \{x | x \in B\} = B$ となる。逆に、$A \cup B = B$ を仮定すると、$A \cup B \subset B$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

2. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ A &= \{x | x \in A\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cap B = \{x | x \in A\} = A$ となる。逆に、$A \cap B = A$ を仮定すると、$A \cap B \supset A$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

3. 定義から

$$A - B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ なので、$A - B = \emptyset$ が成り立つ。逆に、$A - B = \emptyset$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ になるので、$A \subset B$ が成り立つ。

4. 定義から

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= \{x | x \in A \text{ または } x \in (B - A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

よって、1 と本質的に同じ問題なので、成立する。

5. 定義から

$$\begin{aligned}
B-(B-A) &= \{x|x \in B \text{ かつ } x \notin (B-A)\} \\
&= \{x|x \in B \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in A)\} \\
&= \{x|x \in B \text{ かつ } x \in A\} \\
&= A \cap B
\end{aligned}$$

よって、本質的に 2 と同じ問題なので、成立する。

2.6

1.

$$\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C) &= ((A\cup B)\cap(A\cup C))\cap(B\cup C) \\
&= ((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cup((A\cup B)\cap C))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cup((A\cap C)\cup(B\cap C)))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cup(B\cap C))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cap(B\cup C))\cup((B\cap C)\cap(B\cup C)) \\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\cup(B\cap C) \\
&= (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)
\end{aligned}$$

2. 1 の結果を用いる。

$$\begin{aligned}
&(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup C)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D) \\
&= ((A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C))\cap((A\cup D)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D)) \\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(D\cup(A\cap B\cap C)) \\
&= (((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap D)\cup(((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(A\cap B\cap C)) \\
&= ((A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D))\cup(A\cap B\cap C) \\
&= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D)
\end{aligned}$$

3 ド・モルガンの法則

3.1

1.

$$\begin{aligned}
(A^c)^c &= (X-A)^c \\
&= \{x|x \in X-(X-A)\} \\
&= \{x \in X|x \notin X-A\} \\
&= \{x \in X|\text{「}x \in X \text{ かつ } x \notin A\text{」ではない}\} \\
&= \{x \in X|x \notin X \text{ または } x \in A\} \\
&= \{x \in X|x \in A\} \\
&= A
\end{aligned}$$

2.

$$X^c = X - X = \{x|x \in X \text{ かつ } x \notin X\} = \emptyset$$

3.

$$\emptyset^c = X - \emptyset = \{x|x \in X \text{ かつ } x \notin \emptyset\} = X$$

4.

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \{x|x \in A \text{ または } x \in A^c\} \\ &= \{x \in X|x \in A \text{ または } x \notin A\} \\ &= X \end{aligned}$$

5.

$$A \cap A^c = (A^c)^c \cap A^c = (A^c \cup A)^c = X^c = \emptyset$$

6.

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in X|x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x|x \in A \text{ かつ } x \in X - B\} \\ &= \{x|x \in A \text{ かつ } x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

7.

$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$$

3.2

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) - C &= \{x|x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x|x \in A - C \text{ または } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cup (B - C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (A \cap B) - C &= \{x|x \in A \cap B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x|x \in A - C \text{ かつ } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cap (B - C) \end{aligned}$$

3.3

1. (a)

$$\begin{aligned} A \circ B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \circ A \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(A \circ B) \circ C &= ((A \circ B) - C) \cup (C - (A \circ B))\\ &= (((A - B) \cup (B - A)) - C) \cup (C - ((A - B) \cup (B - A)))\\ &= (((A - B) - C) \cup ((B - A) - C)) \cup ((C - (A - B)) \cap (C - (B - A)))\\ &= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup (((C - A) \cup (C \cap B)) \cap ((C - B) \cup (C \cap A)))\\ &= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup\\ &\qquad ((C - A) \cap (C - B)) \cup ((C - A) \cap (C \cap A)) \cup ((C \cap B) \cap (C - B)) \cup ((C \cap B) \cap (C \cap A))\\ &= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup ((C - (A \cup B)) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap C))\\ &= (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}C - (A - B) &= \{x | x \in C \text{ かつ } x \notin (A - B)\}\\ &= \{x | x \in C \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \in B))\}\\ &= \{x | (x \in C \text{ かつ } x \notin A) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \in B)\}\\ &= (C - A) \cup (C \cap B)\end{aligned}$$

という結果を、３行目から４行目への変形で用いた。また、

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (C \cup D) &= (A \cap (C \cup D)) \cup (B \cap (C \cup D))\\ &= (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)\end{aligned}$$

という結果を、４行目から（５, ６行目）への変形で用いた。
さて、$(A \circ B) \circ C = (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$ と変形できるので、$(A \circ B) \circ C$ は、A,B,C が全く同等で、任意の二つを入れ替えても同じ値であることがわかる。よって、$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$。

(c)

$$A \circ A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset$$

(d)

$$A \circ \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A$$

2.

$$\begin{aligned}& A \circ X = B\\ \Longleftrightarrow\ & (A \circ X) - B = \emptyset \text{ かつ } B - (A \circ X) = \emptyset\\ \Longleftrightarrow\ & ((A \circ X) - B) \cup (B - (A \circ X)) = \emptyset\\ \Longleftrightarrow\ & ((A \circ X) \circ B) = \emptyset\\ \Longleftrightarrow\ & ((A \circ B) \circ X) = \emptyset\\ \Longleftrightarrow\ & ((A \circ B) - X) \cup (X - (A \circ B)) = \emptyset\\ \Longleftrightarrow\ & ((A \circ B) - X) = \emptyset \text{ かつ } (X - (A \circ B)) = \emptyset\\ \Longleftrightarrow\ & A \circ B = X\end{aligned}$$

ここで、$((A \circ X) \circ B) = \emptyset \iff ((A \circ B) \circ X) = \emptyset$ という変形には、1 の結果を用いた。以上より、集合 A,B を任意に与えたとき、$A \circ X = B$ を満足する集合 X が $A \circ B$ と表せるので、X はただ一つ存在することが示せた。

4 直積集合

4.1

1.

$$\begin{aligned}A\times(B\cup C)&=\{(x,y)|x\in A \text{ かつ } y\in(B\cup C)\}\\&=\{(x,y)|(x\in A \text{ かつ } y\in B) \text{ または } (x\in A \text{ かつ } y\in C)\}\\&=\{(x,y)|(x,y)\in(A\times B) \text{ または } (x,y)\in(A\times C)\}\\&=(A\times B)\cup(A\times C)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}A\times(B\cap C)&=\{(x,y)|x\in A \text{ かつ } y\in(B\cap C)\}\\&=\{(x,y)|(x\in A \text{ かつ } y\in B) \text{ かつ } (x\in A \text{ かつ } y\in C)\}\\&=\{(x,y)|(x,y)\in(A\times B) \text{ かつ } (x,y)\in(A\times C)\}\\&=(A\times B)\cap(A\times C)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(A\cup B)\times C&=\{(x,y)|x\in(A\cup B) \text{ かつ } y\in C\}\\&=\{(x,y)|(x\in A \text{ かつ } y\in C) \text{ または } (x\in B \text{ かつ } y\in C)\}\\&=\{(x,y)|(x,y)\in A\times C \text{ または } (x,y)\in B\times C\}\\&=(A\times C)\cup(B\times C)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(A\cap B)\times C&=\{(x,y)|x\in(A\cap B) \text{ かつ } y\in C\}\\&=\{(x,y)|(x\in A \text{ かつ } y\in C) \text{ かつ } (x\in B \text{ かつ } y\in C)\}\\&=\{(x,y)|(x,y)\in A\times C \text{ かつ } (x,y)\in B\times C\}\\&=(A\times C)\cap(B\times C)\end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned}(X\times Y)-(A\times B)&=\{(s,t)|(s,t)\in(X\times Y) \text{ かつ } (s,t)\notin(A\times B)\}\\&=\{(s,t)|(s\in(X-A) \text{ かつ } t\in Y)\\&\qquad\qquad \text{ または } (s\in X \text{ かつ } t\in(Y-B))\}\\&=\{(s,t)|(s,t)\in((X-A)\times Y) \text{ または } (s,t)\in(X\times(Y-B))\}\\&=((X-A)\times Y)\cup(X\times(Y-B))\end{aligned}$$

5 写像

5.1

1.

$$(f\circ g)(x)=f(x^2+1)=x^2+3$$

2.
$$(g \circ f)(x) = g(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

3.
$$(f \circ f)(x) = f(x+2) = x + 4$$

4.
$$(g \circ g)(x) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

5.2

1.
$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cap B &= \{x | x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{かつ } x \in B\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ かつ } x \in B\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{かつ } x \in B]\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cap B)]\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cup B &= \{x | x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{または } x \in B\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ または } x \in B\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{または } x \in B]\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cup B)]\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)
\end{aligned}$$

5.3

1.
$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ「} \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ } \forall\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda^c)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ「} \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ } \exists\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda^c)
\end{aligned}$$

5.4

1.

$$\begin{aligned} f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) &= \{y \in Y | \exists x \in (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)[f(x) = y]\} \\ &= \{y \in Y | \exists \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x) = y]]\} \\ &= \{y \in Y | \exists \lambda \in \Lambda[y \in f(A_\lambda)]\} \\ &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \end{aligned}$$

2.

$$y \in f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$$

と仮定すると、

$$\exists x \in (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)[f(x) = y]$$

が言える。これは、

$$\exists x \in X[\forall \lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \quad \text{かつ } f(x) = y]]$$

と同値。このとき、

$$\forall \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x) = y]]$$

がいえる[*1]ので、

$$y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

3.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) &= \{x \in X | f(x) \in (\bigcup_{\mu\in M} B_\mu)\} \\ &= \{x \in X | \exists \mu \in M[f(x) \in B_\mu]\} \\ &= \{x \in X | \exists \mu \in M[x \in f^{-1}(B_\mu)]\} \\ &= \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) &= \{x \in X | f(x) \in (\bigcap_{\mu\in M} B_\mu)\} \\ &= \{x \in X | \forall \mu \in M[f(x) \in B_\mu]\} \\ &= \{x \in X | \forall \mu \in M[x \in f^{-1}(B_\mu)]\} \\ &= \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu) \end{aligned}$$

[*1] 逆は必ずしも真ではない。つまり $\forall \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x) = y]]$ だからといって、$\exists x \in X[\forall \lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \quad \text{かつ } f(x) = y]]$ はいえない。

5.5

$n=2$ のとき

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2$$

となり、主張は正しい。$n=m$ のとき、主張が正しいと仮定する。つまり、

$$\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m} (A_i \cup A_j) = \bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m)$$

が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m+1} (A_i \cup A_j) \\
&= (\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m} (A_i \cup A_j)) \cap (\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} (A_i \cup A_{m+1})) \\
&= (\bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m)) \cap ((\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup A_{m+1}) \\
&= \bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m \cap ((\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup A_{m+1})) \\
&= (\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup (\bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1})) \\
&= \bigcup_{1 \leqq i \leqq m+1} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1})
\end{aligned}$$

となり、$n=m+1$ のときも成り立つ。以上より、$n \geqq 2$ のすべての自然数 n で主張は成り立つ。

5.6

1.

$$x \in \liminf_{n\to\infty} E_n$$

と仮定すると、定義より

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in E_n]]$$

が成り立つ。よって、

$$\forall s \geqq 1[\exists k \geq 1[(m \geq k \text{ かつ } m \geq s) \Longrightarrow x \in E_m]]$$

となるので、

$$\forall s \geq 1[\exists m \geq s[x \in E_m]]$$

定義より、

$$x \in \limsup_{n\to\infty} E_n$$

2.

$$x \in \liminf_{n\to\infty} A_n$$

と仮定すると、定義より、

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n]]$$

ここで、$\forall n \in N[A_n \subset B_n]$ なので、

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in B_n]]$$

が言える。結局、

$$x \in \liminf_{n\to\infty} B_n$$

$\limsup$ の場合も同様に示せる。

3.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) &= \{x|\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in (A_n \cup B_n)]]\} \\
&= \{x|\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in A_n \text{または } x \in B_n]]\} \\
&= \{x|\forall k \geqq 1[(\exists n \geqq k[x \in A_n]) \text{ または } (\exists m \geqq k[x \in B_m])]\} \\
&= \{x|(\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in A_n]]) \text{ または } (\forall s \geqq 1[\exists m \geqq s[x \in B_m]])\} \\
&= \{x|x \in (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n)\} \\
&= (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n)
\end{aligned}$$

ここで、3 行目 $\Longrightarrow$ 4 行目 を示すには、「4 行目でない $\Longrightarrow$3 行目でない」を示せば良い。

4.

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &= \{x|\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in (A_n \cap B_n)]]\} \\
&= \{x|\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n \text{かつ } x \in B_n]]\} \\
&= \{x|\exists k \geqq 1[(\forall n \geqq k[x \in A_n]) \text{ かつ } (\forall m \geqq k[x \in B_m])]\} \\
&= \{x|(\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n]]) \text{ かつ } (\exists s \geqq 1[\forall m \geqq s[x \in B_m]])\} \\
&= \{x|x \in (\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n)\} \\
&= (\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n)
\end{aligned}$$

5.7

1.

各 $n \in N$ に対して、$E_n \subset E_{n+1}$ のとき、$\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k
\end{aligned}$$

2.

各 $n \in N$ に対して、$E_n \supset E_{n+1}$ のとき、$\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k
\end{aligned}$$

5.8

1. 問 5.6(3) より、

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n$$

2. 問 5.6(4) より、

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cap \lim_{n\to\infty} B_n$$

5.9

1.

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} E_n &= \{x|\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in E_n]]\} \\ &= \{x|\forall k \geqq 1[\exists n[2n-1 \geqq k \text{ かつ } (x \in E_{2n} \text{または } x \in E_{2n-1})]]\} \\ &= \{x|\forall k \geqq 1[\exists n[2n-1 \geqq k \text{ かつ } (x \in A \text{ または } x \in B)]]\} \\ &= \{x|x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} E_n &= \{x|\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in E_n]]\} \\ &= \{x|\exists k \geqq 1[\forall n[2n-1 \geqq k \Longrightarrow (x \in E_{2n-1}\text{かつ } x \in E_{2n})]]\} \\ &= \{x|\exists k \geqq 1[\forall n[2n-1 \geqq k \Longrightarrow (x \in A \text{ かつ } x \in B)]]\} \\ &= \{x|x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

第 II 部
濃度の大小と二項関係

6　全射・単射

6.1

1. $f : A \to B$ が単射と仮定する。

(a)

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

と仮定すると、$y = f(x)$ となる x が存在し、$x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ となる。(もしも $x \notin A_1$ または $x \notin A_2$ とすると、f が単射でないことになってしまう。) よって、

$$y \in f(A_1 \cap A_2)$$

(b) 任意の x について $f^{-1}(f(x)) = x$ なので、$x \in f^{-1}(f(A_1))$ と仮定すると $x \in A_1$ である。

(c)

$$y \in f(A_1 - A_2)$$

と仮定すると、$f(x) = y$ となる $x \in A_1 - A_2$ がただ一つ存在する。よって、$y \in f(A_1)$ かつ $y \notin f(A_2)$ である。

2.

$$f : A \to B$$

が全射とする。$y \in B_1$ と仮定すると、$f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B_1)$ が存在する。よって、$y \in f(f^{-1}(B_1))$。

6.2

1. $g \circ f$ が単射と仮定すると、

$$\forall x_1, x_2 \in A[x_1 \neq x_2 \Longrightarrow g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)]$$

ここで、$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ なので、

$$\forall x_1, x_2 \in A[x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

が成り立つ。よって、f は単射である。

2. $g \circ f$ が全射と仮定すると、

$$\forall c \in C[\exists a \in A[g \circ f(a) = c]]$$

ここで、$\forall a \in A[f(a) \in B]$ なので、

$$\forall c \in C[\exists b \in B[g(b) = c]]$$

6.3

$$\forall n \in \mathbb{N}[\forall x \in X[h^n(x) \neq x]]$$

と仮定すると、任意の $n \in \mathbb{N}, x \in X$ について、$x, h(x), h^2(x), \ldots, h^n(x)$ は互いに異なる値となる。つまり、$h : X \to X$ より、X に無限個の元が存在することになってしまい、矛盾。よって、

$$\exists n \in \mathbb{N}[\exists x \in X[h^n(x) = x]]$$

6.4

たとえば、$y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$ は、条件を満たす。

6.5

f は全射かつ単射である。実際、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \text{ならば、} x = 0 \\ y = \frac{1}{2^n} \quad (n = 2, 3, \ldots) \text{ ならば、} x = 4y \\ \text{それ以外ならば、} x = y \end{cases}$$

というように、任意の y に関して、$f(x) = y$ となる x がただ一つ存在するので、f は全単射。

6.6

以下のように定義された写像 f は条件を満たす。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{x}{2}, & x = \frac{1}{2^n}(n = 0, 1, 2, \dots) \\ x, & x \neq 0, \frac{1}{2^n}(n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

7　濃度の大小

7.1

1. 恒等写像 $1_A : A \to A$ は全単射である。
2. $A \sim B$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ が存在する。ここで、f の逆写像 f^{-1} も全単射である。よって、$B \sim A$。
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ と、$g : B \to C$ が存在する。ここで、$g \circ f : A \to C$ も全単射である。よって、$A \sim C$。

7.2

$F(A \times B, C)$ の元である写像 $f : A \times B \to C$ が与えられた時、$F(A, F(B, C))$ の元である写像 $g : A \to F(B, C)$ を以下のように定義することで対応させるとする。

$$(g(a))(b) = f(a, b)$$

このとき、任意の $g : A \to F(B, C)$ に対して、対応する $f : A \times B \to C$ がただ一つ存在する。実際、任意の g に対して、$f(a, b) = (g(a))(b)$ という $f : A \times B \to C$ がただ一つ存在する。よって、$F(A \times B, C)$ の元と $F(A, F(B, C))$ の元が一対一に対応付けできた。以上より、$F(A \times B, C) \sim F(A, F(B, C))$ が示された。

7.3

1. $A \sim A'$ かつ $B \sim B'$ と仮定すると、全単射の写像 $f_1 : A \to A'$ と $f_2 : B \to B'$ が存在する。今 $g : A \times B \to A' \times B'$ を $g(a, b) = (f_1(a), f_2(b))$ として定義すれば、これは全単射の写像である。
   また、$h_1 \in F(A, B)$ に対して、$h_2(a') = f_2(h_1(f_1^{-1}(a')))$ として定義された $h_2 \in F(A', B')$ を対応づけるとする。このとき、任意の $h_2 \in F(A', B')$ に対して、$h_1 \in F(A, B)$ がただ一つ存在する。実際、任意の h_2 に対して、$h_1(a) = f_2^{-1}(h_2(f_1(a)))$ という $h_1 \in F(A', B')$ がただ一つ存在している。以上より、$F(A, B) \sim F(A', B')$ が示された。
2. $A \sim B$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ が存在する。今、$g : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$ を、

   $$g(A') = \{b \in B | a \in A' \text{かつ } b = f(a)\}$$

   と定義する（ここで $A' \subset A$）。このとき、g は全単射である。実際、逆写像 g^{-1} が以下のように定義できる。

   $$g^{-1}(B') = \{a \in A | b \in B' \text{かつ } b = f(a)\}$$

7.4

1. 関数 $f(n)$ は自然数から偶数への全単射の写像。よって、偶数全体の集合は可算集合。

$$f(n) = \begin{cases} -n+1 & (n \text{ は奇数}) \\ n & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

2. 関数 $f(n)$ は自然数から奇数への全単射の写像。よって、奇数全体の集合は可算集合。

$$f(n) = \begin{cases} n & (n \text{ は奇数}) \\ -n+1 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

3. 関数 $f(n)$ は自然数から整数への全単射の写像。よって、整数全体の集合は可算集合。

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n+1}{2} & (n \text{ は奇数}) \\ \frac{n}{2} & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

4. 以下のように、直積を並べ、順番に $1, 2, \ldots$ と番号を振る。
$(0,0),(1,0),(1,1),(0,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(1,-1),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),(1,2),(0,2),\ldots$
この規則性を図に表すと、図 1 のようになる。このとき、それぞれの点の番号と点の位置の関係は、自然数全体の集合から $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ への全単射の写像になっている。

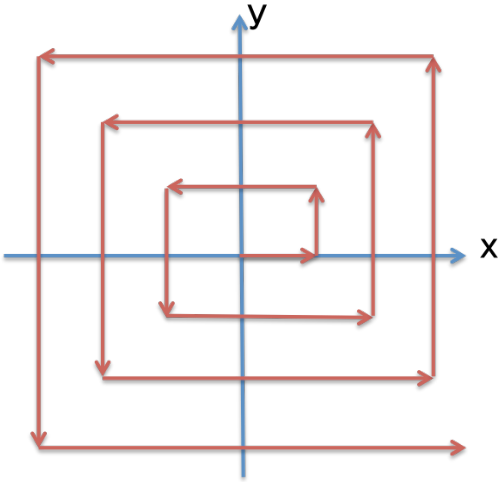

図 1

5. 4 と同様に、直積を順番に考え、今度は (x, y) の代わりに $\frac{x}{y}$ として並べる。つまり

$$\frac{0}{0},\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{-1}{1},\frac{-1}{0},\frac{-1}{-1},\frac{0}{-1},\frac{1}{-1},\frac{2}{-1},\frac{2}{0},\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{2},\frac{0}{2},\frac{-1}{2},\frac{-2}{2},\frac{-2}{1},\frac{-2}{0},\frac{-2}{-1},\frac{-2}{-2},\frac{-1}{-2},\frac{0}{-2},\cdots$$

ここで、
(a) 分母が 0 になっているものを削除。
(b) 約分すると同じ値になるものは、後に出現しているものを削除。
という操作をして、並べ直すと、
$$\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{-1}{1},\frac{2}{-1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\cdots$$

ここで、それぞれの分数の現れる順番と分数の値の関係は、自然数の集合から有理数全体の集合への全単射の写像になっている。よって、有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合。

6. ある集合 A が可算集合とする。このとき、A の無限部分集合 $X(X \subset A)$ について考える。A は可算集合なので、自然数から A への全単射の写像 $f : \mathbb{N} \to A$ が存在する。ここで、A の集合を以下のように並べる。
$$f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$$
さらに、この順番を保ちながら、X に含まれていない要素を取り除き、順番に番号を振る。この番号とそれぞれの要素の対応は、自然数の集合から X への全単射になっている。

7.5

$f : A \to \mathfrak{P}(A)$ が全射とする。
$$X = \{b \in A | b \notin f(b)\} \tag{7.5.1}$$
とすると、$X \in \mathfrak{P}(A)$ かつ f が全射なので、$f(x) = X$ となる $x \in A$ が存在する。
もし、$x \in X$ と仮定すると、x は (7.5.1) の条件を満たすはずなので、$x \notin X$ となり、矛盾。
もし、$x \notin X$ と仮定すると、x は (7.5.1) の条件を満たさないはずなので、$x \in f(x)$ となり、矛盾。
いずれにしても矛盾するので、f は全射ではないことが示された。

7.6

$\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ を次のような三つの部分集合族 P_1, P_2, P_3 に分割する。$\mathbb{N}$ の有限部分集合の全体を P_1、$\mathbb{N}$ の部分集合で補集合が有限集合であるものの全体を P_2、それ以外の $\mathbb{N}$ の部分集合の全体を P_3 とする。P_1, P_2および $P_1 \cup P_2$ は加算集合である。実際、$f_1 : \mathbb{N} \to P_1$ を以下のように定義する。
$$\begin{aligned}
&f_1(1) = \emptyset \\
&f_1(2) = \{1\} \\
&f_1(3) = \{2\} \\
&f_1(4) = \{1, 2\} \\
&f_1(5) = \{3\} \\
&f_1(6) = \{1, 3\} \\
&f_1(7) = \{2, 3\} \\
&f_1(8) = \{1, 2, 3\} \\
&f_1(9) = \{4\} \\
&\quad\cdots
\end{aligned}$$
このとき、f_1 は全単射になる。
また、$f_2 : \mathbb{N} \to P_2$ を $f_2(n) = \mathbb{N} - f_1(n)$ と定義すれば、これは全単射になる。
さらに $g : \mathbb{N} \to P_1 \cup P_2$ を
$$g(n) = \begin{cases} f_1(\frac{n}{2}) & (n \text{ が偶数}) \\ f_2(\frac{n+1}{2}) & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$
と定義すれば、これは全単射になる。
$P_1 \cup P_2 \sim \mathbb{N}$ かつ、$P_2 \sim \mathbb{N}$ なので、$P_1 \cup P_2 \sim P_2$。$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ なので、結局、$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \sim P_2 \cup P_3$。
また、$I = (0, 1]$ とすると、$\mathbb{R} \sim I$ であることが 6 章の議論でわかるので、以下では、$P_2 \cup P_3 \sim I$ を証明する。

今、$x \in (0,1]$ を $x = 0.11010100\dots$ のように 2 進数で表示することにする。ただし、$x = 0.1$ は $x = 0.0\dot{1}$ のように、必ず無限小数で表すことにする[*2]。
$h : (0,1] \to P_2 \cup P_3$ を以下のように定義する。

$$h(x) = \{n \in \mathbb{N} | x \text{ を 2 進数表示したときの小数第 } n \text{ 位が 1 となる }\}$$

h は全単射となるので、$P_2 \cup P_3 \sim I$ が示された[*3]。結局、$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$ が示された。

7.7

1.
$$f : \mathbb{Z} \times (0,1] \to \mathbb{R}$$
を
$$f(x,y) = x + y$$
と定義すれば、f は全単射である。よって、$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{Z} \times (0,1] \sim \mathbb{R}$。

2. $\mathfrak{P}(A) \sim F(A, \{0,1\})$ である。実際、任意の $X \in \mathfrak{P}(A)$ に対して、
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & (x \in X) \\ 0 & (x \notin X) \end{cases}$$
と定義される $f_X \in F(A, \{0,1\})$ を対応させればこれは全単射になる。よって、$\mathfrak{P}(A) \sim F(A, \{0,1\})$ がわかる。
また、問 7.2 により、$F(A \times B, C) \sim F(A, F(B, C))$ である。以上より、
$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\sim F(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{N})) \\ &\sim F(\mathbb{R}, F(\mathbb{N}, \{0,1\})) \\ &\sim F(\mathbb{R} \times \mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\sim F(\mathbb{R}, \{0,1\}) \\ &\sim \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

7.8

実数値連続関数 f_1, f_2 が任意の $x \in \mathbb{Q}$ で $f_1(x) = f_2(x)$ ならば、f_1 と f_2 は同一である。よって、実数値連続関数全体の集合と $F(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ は濃度が等しい。
問 7.4 より、$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ かつ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ なので、$\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ である。

$$\begin{aligned} F(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) &\sim F(\mathbb{Q}, \mathfrak{P}(\mathbb{N})) \\ &\sim F(\mathbb{Q}, F(\mathbb{N}, \{0,1\})) \\ &\sim F(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\sim F(\mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\sim \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \\ &\sim \mathbb{R} \end{aligned}$$

[*2] 任意の $x \in (0,1]$ が、この無限小数の形式で一意に表現できることは、証明すべきことだと思う。ここでは省略する。
[*3] $h(x)$ が無限集合なので、$P_1 \cup P_2 \cup P_3$ でなく、$P_2 \cup P_3$ を考える必要があった。

7.9

整数係数の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

に対して、

$$H(f) = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

とおく。$H(f)$ は 2 以上の自然数である。今、自然数 $h \geq 2$ に対して、整数係数の多項式の集合 F_h を

$$F_h = \{f | H(f) = h\}$$

と定義する。F_h は有限集合である。また、n 次多項式の根は高々 n 個なので、F_h に属する多項式の根となるような複素数の集合も有限集合である。つまり、$h \geq 2$ に対して、F_h に属する多項式の根を一列に並べることができる[*4]。以上の議論より、任意の代数的数に対して、自然数 $n \in \mathbb{N}$ を対応させる全単射の写像を作ることができることがわかる。よって、代数的数全体の集合は可算集合である。

7.10

z を整数係数の多項式 $f(x)$ の根とする。よって、

$$f(z) = 0$$

p を自然数とすれば

$$f(px) = a_0 + a_1px + a_2p^2x^2 + \cdots + a_np^nx^n$$

は整数係数の多項式になり、$\frac{z}{p}$ は $f(px)$ の根である。したがって、α をある超越数とすれば、全ての自然数 p に対して $p\alpha$ も超越数であることがわかる[*5]。代数的数であるような実数の全体は可算集合であり、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は非可算であるから、超越数の存在がわかる。その一つを α とする。$\mathbb{R}$ を次のような三つの部分集合 A_1, A_2, A_3 に分割する。代数的数であるような実数の全体を A_1 とする。

$$A_2 = \{p\alpha | p \in \mathbb{N}\}$$

とする。A_1, A_2 に属さない実数の全体を A_3 とする。
$A_2 \cup A_3$ は超越数全体の集合である。A_1 は問 7.9 で証明したように加算集合である。

$$g_1(n) = \alpha n$$

という関数 $g_1 : \mathbb{N} \to A_2$ が全単射になるので、A_2 は加算集合である。$g_2 : \mathbb{N} \to A_1$ を全単射の写像とすると、

$$h(n) = \begin{cases} g_1(\frac{n+1}{2}) & (n \text{ が奇数}) \\ g_2(\frac{n}{2}) & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

という写像 $h : \mathbb{N} \to A_1 \cup A_2$ が全単射になるので、$A_1 \cup A_2$ も可算集合である。特に、$A_1 \cup A_2 \sim A_2$ となる。
よって、$\mathbb{R} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \sim A_2 \cup A_3$。

[*4] たとえば、複素数の実部で昇順に並べて、そのあと虚部で昇順に並べるなどの方法が考えられる

[*5] $p\alpha$ が超越数でない、つまり代数的数であると仮定すると、α も代数的数であることになってしまい矛盾。

8　二項関係

8.1

1. $G(\rho_1) = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0\}$ について
   (a) 反射律　満たさない
   $x = -1$ のとき、$x\rho_1 x$ を満たさない。
   (b) 対称律　満たす
   $x \geq 0, y \geq 0$ ならば、$y \geq 0, x \geq 0$ である。
   (c) 推移律　満たす
   $x \geq 0, y \geq 0$ かつ $y \geq 0, z \geq 0$ ならば $x \geq 0, z \geq 0$ である。
   (d) 反対称律　満たさない
   $x = 1, y = 2$ のとき、$x \geq 0, y \geq 0$ かつ $y \geq 0, x \geq 0$ だが、$x \neq y$。
2. $G(\rho_2) = \{(x, y)|x \leq y\}$ について
   (a) 反射律　満たす
   $x \leq x$ である。
   (b) 対称律　満たさない
   $x = 1, y = 2$ のとき、$x \leq y$ だが、$y \leq x$ でない。
   (c) 推移律　満たす
   $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば、$x \leq z$。
   (d) 反対称律　満たす
   $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$ である。
3. $G(\rho_3) = \{(x, y)|(x - y)(x + y - 1) = 0\}$ について
   $f(x, y) = (x - y)(x + y - 1)$ とおく。
   (a) 反射律　満たす
   $x - x = 0$ なので $f(x, x) = 0$ である。
   (b) 対称律　満たす
   $f(x, y) = 0$ のとき、$f(y, x) = (y - x)(y + x - 1) = -f(x, y) = 0$。
   (c) 推移律　満たす
   $f(x, y) = 0$ と $f(y, z) = 0$ を仮定する。
      i. $x - y = 0, y - z = 0$ のとき
      $x - z = 0$ となるので、$f(x, z) = 0$。
      ii. $x - y = 0, y + z - 1 = 0$ のとき
      $x + z - 1 = 0$ となるので、$f(x, z) = 0$。
      iii. $x + y - 1 = 0, y - z = 0$ のとき
      $x + z - 1 = 0$ とのあるので、$f(x, z) = 0$。
      iv. $x + y - 1 = 0, y + z - 1 = 0$ のとき
      $x - z = 0$ となるので、$f(x, z) = 0$。
   (d) 反対称律　満たさない
   $x = 0.7, y = 0.3$ のとき、$f(x, y) = 0$ かつ $f(y, x) = 0$ だが、$x \neq y$。
4. $G(\rho_4) = \{(x, y)|(x - y)(x - y + 1)(x - y - 1) = 0\}$ について
   $g(x, y) = (x - y)(x - y + 1)(x - y - 1)$ とおく。

(a) 反射律　満たす

$x-x=0$ なので $g(x,x)=0$。

(b) 対称律　満たす

$g(x,y)=0$ のとき、$g(y,x)=(y-x)\{(y-x)^2-1\}=-g(x,y)=0$。

(c) 推移律　満たさない

$x=2, y=1, z=0$ のとき、$g(x,y)=0$ かつ $g(y,z)=0$ だが、$g(x,z)\neq 0$。

(d) 反対称律　満たさない

$x=2, y=1$ のとき、$g(x,y)=0$ かつ $g(y,x)=0$ だが、$x\neq y$。

8.2

定義より、$A\rho B \iff (A-B)\cup(B-A)$ が有限集合。

1. 反射律
   $A-A=\emptyset$ なので、$A\rho A$。
2. 対称律
   $(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)$ なので、$A\rho B$ ならば $B\rho A$。
3. 推移律
   $(A-B)\cup(B-A)=X, (B-C)\cup(C-B)=Y$ が有限集合とする。

$$
\begin{aligned}
(A-C)\cup(C-A) &= \{x|(x\in A \text{ かつ } x\notin C) \text{ または } (x\in C \text{ かつ } x\notin A)\}\\
&= \{x|(x\in A \text{ かつ } x\in B \text{ かつ } x\notin C) \text{ または } (x\in A \text{ かつ } x\notin B \text{ かつ } x\notin C) \text{ または}\\
&\qquad (x\in C \text{ かつ } x\in B \text{ かつ } x\notin A) \text{ または } (x\in C \text{ かつ } x\notin B \text{ かつ } x\notin A)\}\\
&\subset \{x|(x\in B \text{ かつ } x\notin C) \text{ または } (x\in A \text{ かつ } x\notin B) \text{ または}\\
&\qquad (x\in B \text{ かつ } x\notin A) \text{ または } (x\in C \text{ かつ } x\notin B)\}\\
&= \{x|x\in X \text{ または } x\in Y\}\\
&= X\cup Y
\end{aligned}
$$

よって、$(A-C)\cup(C-A)$ も有限集合

8.3

1. 反射律
$$\forall x\in X[f(x)=f(x)]$$
2. 対称律
$$\forall x,y\in X[f(x)=f(y)\Longrightarrow f(y)=f(x)]$$
3. 推移律
$$\forall x,y,z\in X[f(x)=f(y) \text{ かつ } f(y)=f(z)\Longrightarrow f(x)=f(z)]$$

よって、$G(\rho)$ は反射律、対称律、推移律を満たす。
今、$C(x)=\{a\in X|f(a)=f(x)\}$ なので、$\forall a\in C(x)[f(a)=f(x)]$。よって、$g(C(x))=f(x)$ とすれば、関数 $g:X/\rho\to Y_1$ が一意に定義できる。
g は全射である。実際、$f(X)=\{f(x)\in Y|x\in X\}=Y_1$ だから、任意の $y\in Y_1$ に対して、$f(x)=y$ となる x が存在する。よって、任意の $y\in Y_1$ に対して、$g(C(x))=y$ となる $C(x)\neq\emptyset$ が存在する。

g は単射である。実際、$g(A) = g(B) = f(x)$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$ となる。A と B が交わっているので、$A = B$。

8.4

図 2、図 3、図 4、図 5 がそれぞれ答え。

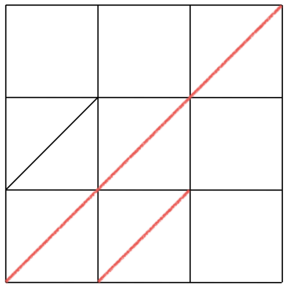

図 2　反射律と対称律を満足するもの

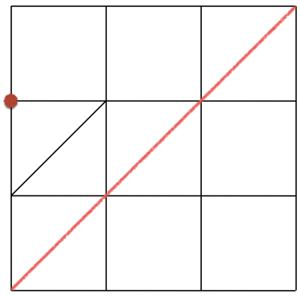

図 3　反射律と推移律を満足するもの

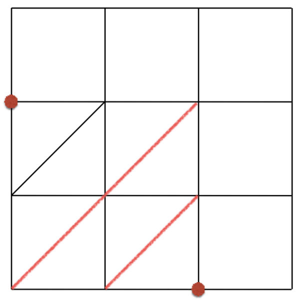

図 4　対称律と推移律を満足するもの

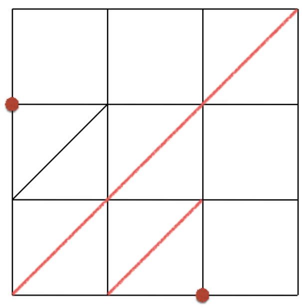

図 5　同値関係であるもの

8.5

$\mathfrak{P}(A)$ の任意の部分集合 $\mathfrak{U}$ に対して、

$$\inf \mathfrak{U} = \bigcap (E | E \in \mathfrak{U})$$

$$\sup \mathfrak{U} = \bigcup (E | E \in \mathfrak{U})$$

と定義すれば、確かに

$$\forall B \in \mathfrak{U} [\inf \mathfrak{U} \subset B]$$

$$\forall B \in \mathfrak{U} [B \subset \sup \mathfrak{U}]$$

が成り立つ。

8.6

5 元束と 6 元束については、巻末の解答を参照。7 元束は図 6 のように 53 種類考えられる[*6]。

[*6] 点の色に特別に意味はない。場合分けの際にわかりやすくするために色付けした。

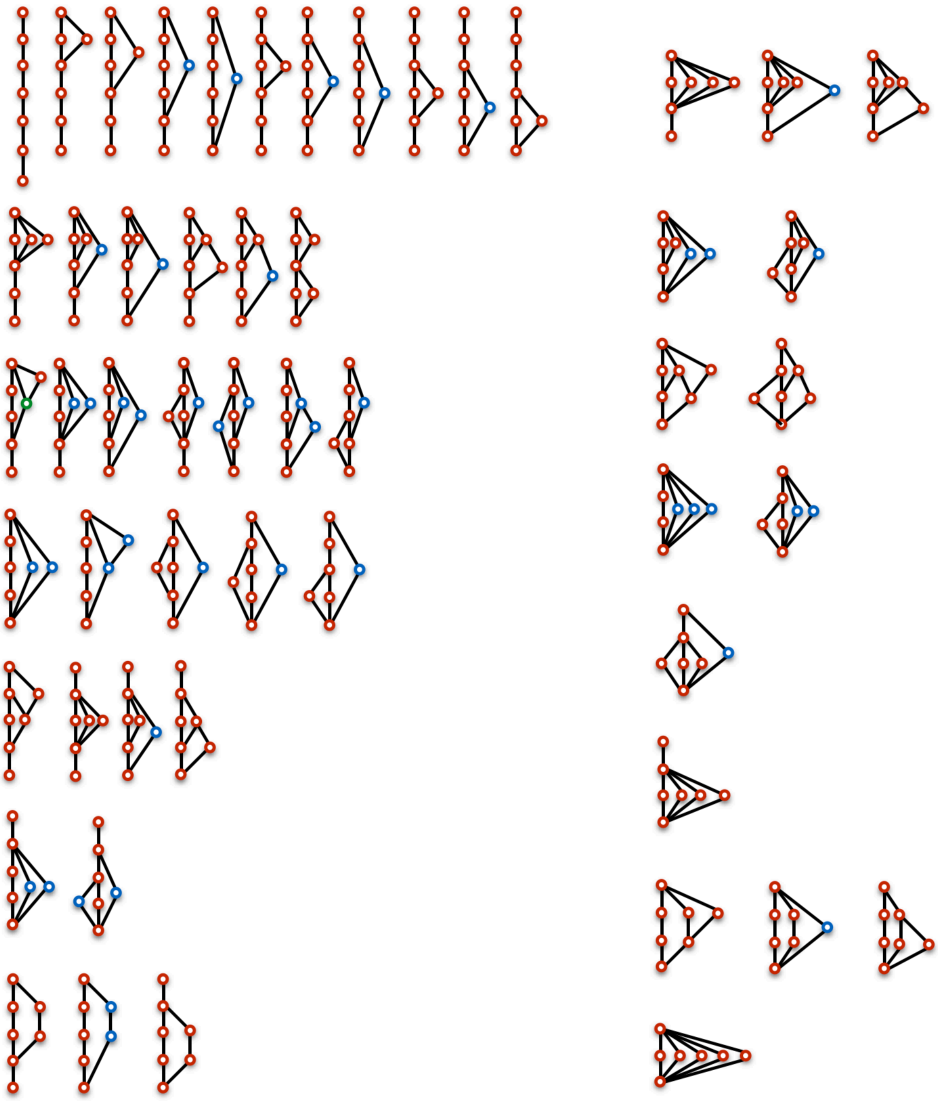

図 6　7 元束

8.7

$\mathfrak{U} = \{A \in X | A \subset \varphi(A)\}$ とする。$\emptyset \subset \varphi(\emptyset)$ なので、$\mathfrak{U}$ は空集合にはならない。$E_0 = \bigcup(A|A \in \mathfrak{U})$ とおけば、$\forall A \in \mathfrak{U}[A \subset \varphi(A) \subset \varphi(E_0)]$ なので、$E_0 \subset \varphi(E_0)$ である。$E_0 \subsetneq \varphi(E_0)$ とすると、$\varphi(E_0) \in \mathfrak{U}$ であることに矛盾。よって、$E_0 = \varphi(E_0)$ である。

第 III 部
整列集合と選択公理

9　整列集合

9.1

$$
\begin{aligned}
(X\langle a\rangle)\langle b\rangle &= \{x \in X\langle a\rangle | x < b\} \\
&= \{x \in X | x \in X\langle a\rangle \text{ かつ } x < b\} \\
&= \{x \in X | x < a \text{ かつ } x < b\} \\
&= \{x \in X | x < b\} \\
&= X\langle b\rangle
\end{aligned}
$$

ここで、$b < a$ という前提により、「$x < a$ かつ $x < b \Longleftrightarrow x < b$」という関係を用いた。実際、$x < b$ であって、$a \leq x$ と仮定すると、$a \leq b$ となり矛盾してしまう。

9.2

9.2.1　整列集合は、そのいかなる切片とも順序同型にならない

ある切片 $a \in X$ に対して、$(X, \leq) \simeq (X\langle a\rangle, \leq)$ が成り立つと仮定すると、順序を保つ全単射 $f : X \to X\langle a\rangle$ が存在することになる。f は単射なので、定理 9.1 により

$$\forall x \in X[x \leq f(x)]$$

が成り立つはずである。しかし、$f(a) \in X\langle a\rangle$ なので、$f(a) < a$ となってしまい矛盾。結局、$(X, \leq) \simeq (X\langle a\rangle, \leq)$ ではないことがわかる。

9.2.2　整列集合の相異なる二つの切片は互いに順序同型にならない

整列集合の部分集合は整列集合である。今、Y を整列集合とし、$a, b(a < b, a \in Y, b \in Y)$ に対して、

$$X = Y\langle b\rangle$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
X\langle a\rangle &= \{x \in X | x < a\} \\
&= \{x \in Y\langle b\rangle | x < a\} \\
&= \{x \in Y | x < a \text{ かつ } x < b\} \\
&= \{x \in Y | x < a\} \\
&= Y\langle a\rangle
\end{aligned}
$$

となり、$X\langle a\rangle = Y\langle a\rangle$ が成り立つ。すると、9.2.1 と同様に、$(Y\langle a\rangle, \leq) \simeq (Y\langle b\rangle, \leq)$ にはならないことが証明できる。

9.3

$(A, \leq)$ および $(B, \leq)$ を整列集合とし、$f : A \to B$ を順序同型写像とする。今、f は全単射なので、

$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$

が成り立つ[*7]。よって、任意の $a \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} f(A\langle a\rangle) &= \{f(x) \in B | x \in A\langle a\rangle\} \\ &= \{f(x) \in B | x < a \text{ かつ } x \in A\} \\ &= \{f(x) \in B | f(x) < f(a) \text{ かつ } x \in A\} \\ &= \{y \in B | y < f(a)\} \\ &= B\langle f(a)\rangle \end{aligned}$$

9.4

以下では、$\varphi : X_1 \to Y_1$ が順序同型写像であることを証明するため、φ が全単射の写像であることと、φ が順序を保つ写像であることを証明する。定義より、X_1, Y_1 はそれぞれ、

$$X_1 = \{a \in X | \exists b \in Y[X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle]\}$$

$$Y_1 = \{b \in Y | \exists a \in X[X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle]\}$$

このとき、各元 $a \in X_1$ に対して、$X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle$ となる $b \in Y_1$ がただ一つ存在する。実際、$b_1, b_2 \in Y_1$ が $X\langle a\rangle \simeq Y\langle b_1\rangle$ かつ $X\langle a\rangle \simeq Y\langle b_2\rangle$ となると仮定すると、$Y\langle b_1\rangle \simeq Y\langle b_2\rangle$ であり、順序同型写像 $f : Y\langle b_1\rangle \to Y\langle b_2\rangle$ が存在する。$b_1 < b_2$ と仮定すると、順序を保つ単射 f に対して、$f(b_1) < b_2$ となり、定理 9.1 に矛盾する。$b_1 > b_2$ としてもやはり矛盾が生じるので、$b_1 = b_2$ になるはずである。結局、$X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle$ となる b がただ一つ存在することがわかった。さて、以上の議論を逆に b を中心に展開すると、任意の $b \in Y_1$ に対して、$X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle$ となる a がただ一つ存在することになる。よって、$b = \varphi(a)$ と定義される写像 φ は全単射である。

$a_1, a_2 \in X_1$ が $a_1 \leq a_2$ であると仮定する。$X\langle a_1\rangle \simeq Y\langle\varphi(a_1)\rangle$ の順序同型写像 ψ_1

$$\psi_1 : Y\langle\varphi(a_1)\rangle \to X\langle a_1\rangle$$

は順序を保つ全単射の写像である。また、$X\langle a_2\rangle \simeq Y\langle\varphi(a_2)\rangle$ の順序同型写像 ψ_2

$$\psi_2 : X\langle a_2\rangle \to Y\langle\varphi(a_2)\rangle$$

も順序を保つ全単射の写像である。よって、$\psi = \psi_2 \circ \psi_1$

$$\psi : Y\langle\varphi(a_1)\rangle \to Y\langle\varphi(a_2)\rangle$$

は順序を保つ単射の写像である[*8]ので、定理 9.1 より、$\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$ である[*9]。結局

$$a_1 \leq a_2 \Longleftrightarrow \varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$$

となり、φ が順序を保つ写像であることが証明できた。

以上より、$\varphi : X_1 \to Y_1$ は順序同型写像である。

[*7] 左から右へは、f が順序を保ちかつ単射であることから証明できる。右から左へは、f が全射であることと、逆写像 f^{-1} が存在することから証明できる。

[*8] $X\langle a_1\rangle \subset X\langle a_2\rangle$ なので ψ は全射とは限らない。

[*9] $\varphi(a_1) > \varphi(a_2)$ と仮定すると、$\psi(\varphi(a_2)) < \varphi(a_2)$ となり、定理 9.1 に反する

9.5

(1) と (2) が同時に成り立つと仮定し、順序同型 $X \simeq Y, X \simeq Y\langle b\rangle$ が成り立つとする。すると、$Y \simeq Y\langle b\rangle$ が成り立つ。$Y \simeq Y\langle b\rangle$ の順序同型写像を $f: Y \to Y\langle b\rangle$ とすると、$f(b) < b$ となり、定理 9.1 に矛盾する。従って、(1) と (2) は同時には成り立たない。

(1) と (3) が同時に成り立たないことも同様に証明できる。

10 選択公理

10.1

f を集合 A の上の一つの選択関数とする。f は A の空でない部分集合の全体 $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}(A) - \{\emptyset\}$ から、A への写像であり、$f(B) \in B \subset A$ である。$m < n$ と仮定すると

$$a_n = f(A - \{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_{n-1}\})$$

となり、$a_m \notin A - \{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_{n-1}\}$ なので、$a_m \neq a_n$。$n < m$ の場合も同様に証明できる。

10.2

W_∞ の一つの上界が W_∞ に含まれるならば、それは W_∞ の最大限になる。以下では、$w \in W_\infty$ であることを背理法で証明する。

$w \notin W_\infty$ と仮定し、

$$\Delta_\infty = \{x \in X | a \in W_\infty \text{ならば } a < x\}$$

とおく。$w \notin W_\infty$ であり、w が W_∞ の上界であることから $w \in \Delta_\infty$。よって $\Delta_\infty \neq \emptyset$ である。そこで、$z = f(\Delta_\infty)$ とおく。このとき、$W_* = W_\infty \cup \{z\}$ は整列集合である。$W_\infty = W_*\langle z\rangle$ であるから、$\Delta_\infty = \Delta(W_*, z)$ であり、W_* も f-列になる[*10]。

これは W_∞ が最大 f-列であることに矛盾する。したがって、$w \in W_\infty$ であることがわかった。よって、w は W_∞ の最大限である。

---

*10

1. $a \in W_\infty$ のとき、

$$\begin{aligned}\Delta(W_*, a) &= \{x \in X | b \in W_*\langle a\rangle \text{ ならば } b < x\} \\ &= \{x \in X | b \in W_\infty\langle a\rangle \text{ ならば } b < x\} \\ &= \Delta(W_\infty, a)\end{aligned}$$

なので、$f(\Delta(W_*, a)) = f(\Delta(W_\infty, a)) = f(a)$ である。

2. $a = z$ のとき、

$$\begin{aligned}\Delta(W_*, z) &= \{x \in X | b \in W_*\langle z\rangle \text{ ならば } b < x\} \\ &= \{x \in X | b \in W_\infty \text{ならば } b < x\} \\ &= \Delta_\infty\end{aligned}$$

なので、$f(\Delta(W_*, z)) = f(\Delta_\infty) = z$ である。

11　整列可能定理

11.1

11.1.1

$W = \bigcup (W_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ の 2 元 x, y に対して、

$$x \in W_\lambda, \quad y \in W_\lambda$$

となる元 $\lambda \in \Lambda$ が存在しないと仮定する。すると、ある $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対して

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$x \in W_{\lambda_1}, \quad x \notin W_{\lambda_2}, \quad y \in W_{\lambda_2}, \quad y \notin W_{\lambda_1}$$

が成り立つことになる。これは「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定に反する。

11.1.2

「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定により、ある $\lambda \in \Lambda$ に対して、$x, y \in W_\lambda$かつ $x \leq_\lambda y$ が成り立つならば、任意の $\lambda' \in \Lambda$ に対しても、

$$x, y \in W_{\lambda'} \Longrightarrow x \leq_{\lambda'} y$$

が成り立つ。

11.1.3

W の上の二項関係 $\leq$ は順序関係であることを証明する。

1. 反射律
   $\forall \lambda \in \Lambda [x \in W_\lambda \Longrightarrow x \leq_\lambda x]$ なので、$\forall x \in W[x \leq x]$ が成り立つ。
2. 推移律
   11.1.1 と同様の議論により、任意の 3 元 $x, y, z \in W$ に対して

   $$x \in W_\lambda, \quad y \in W_\lambda, \quad z \in W_\lambda$$

   となる元 $\lambda \in \Lambda$ が存在することがわかる。$\leq_\lambda$ が順序関係なので、

   $$x \leq_\lambda y \text{ かつ } y \leq_\lambda z \text{ ならば } x \leq_\lambda z$$

   が成り立つ。よって、$\leq$ も

   $$x \leq y \text{ かつ } y \leq z \text{ ならば } x \leq z$$

   が成り立つ。
3. 反対称律
   11.1.1 により、任意の 2 元 $x, y \in W$ に対して

   $$x \in W_\lambda, \quad y \in W_\lambda$$

となる元 $\lambda \in \Lambda$ が存在する。$\leq_\lambda$ が順序関係なので、

$$x \leq_\lambda y \text{ かつ } y \leq_\lambda x \text{ ならば } x = y$$

が成り立つ。よって、$\leq$ も

$$x \leq y \text{ かつ } y \leq x \text{ ならば } x = y$$

が成り立つ。

以上より、W の上の二項関係 $\leq$ は順序関係であることがわかった。

W は整列集合になることを証明する。
W の空でない部分集合を U とする。U の元 x に対して、$x \in W_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。W_λ は整列集合なので、$W_\lambda \cap U$ には最小値 $y = \min(W_\lambda \cap U)$ が存在する。この y は U の最小値でもある。実際、もしも $z < y$ となる $z \in U$ が存在すると仮定すると、$z < y$ にも関わらず、$z \notin W_\lambda$ かつ $y \in W_\lambda$ となってしまう。$z \in W$ なので、$z \in W_{\lambda'}$ という $\lambda' \in \Lambda$ が存在するはずだが、これは「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定に矛盾する。結局、$y = \min(W_\lambda \cap U)$ は U の最小値でもある。半順序集合 $(W, \leq)$ の任意の部分集合 U に対して最小値が存在するので、W は整列集合である。

11.1.4

11.1.2 により、$\forall \lambda \in \Lambda$ に対して、

$$x \leq_\lambda y \Longrightarrow x \leq y$$

が成り立つ。また、定義より $\forall \lambda \in \Lambda[W_\lambda \subset W]$ が成り立つ。よって、「各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、$(W_\lambda, \leq_\lambda)$ は $(W, \leq)$ に一致するかまたは $(W, \leq)$ の切片になる」ということを証明するためには、

$$\forall x \in W - W_\lambda[\forall y \in W_\lambda[y < x]]$$

が成り立つことを証明すればよい。ある $x \in W - W_\lambda$ に対して、$x \leq y$ となる $y \in W_\lambda$ が存在すると仮定すると、$x \leq y$ にも関わらず、$x \notin W_\lambda$ かつ $y \in W_\lambda$ となってしまい、「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定に矛盾する。以上より、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、$(W_\lambda, \leq_\lambda)$ は $(W, \leq)$ に一致するかまたは $(W, \leq)$ の切片になっている。

11.2

11.2.1 **例** 11.1

A の部分集合 W と単射の関数 $f : W \to B$ の組 (W, f) 全体の集合を $\mathfrak{U}$ とおく。$\mathfrak{U}$ は空ではない。実際、A の一つの元 a だけからなる集合 $W = \{a\}$ から B への写像 $f : \{a\} \to B$ は単射である。$\mathfrak{U}$ の元 $(W, f), (W', f')$ に対して、$(W, f) \leq (W', f')$ を以下のように定義する。

$$W \subset W' \text{かつ } \forall x \in W[f(x) = f'(x)]$$

このとき、$(\mathfrak{U}, \leq)$ は帰納的半順序集合になる。実際、半順序集合になることは反射律、推移律、反対称律を確かめることでわかる。また、全順序部分集合 $\mathfrak{W}$ に対して、

$$X = \bigcup_{(W, f_W) \in \mathfrak{W}} W$$

と X を定義する。さらに、$f_X : X \to B$ を、$x \in W$ となる $(W, f_W) \in \mathfrak{W}$ が存在するときに $f_X(x) = f_W(x)$ と定義する。$\mathfrak{W}$ が全順序集合であることから、f_X は一意に定義されている。このとき、(X, f_X) は $\mathfrak{W}$ の上界になる。実際、任意の $(W, f_W) \in \mathfrak{W}$ に対して、$W \subset X$ と、$\forall x \in W[f_W(x) = f_X(x)]$ が成り立つので、任意の $(W, f_W) \in \mathfrak{W}$ に対して $(W, f_W) \leq (X, f_X)$ が成り立つ。結局、(X, f_X) は $\mathfrak{W}$ の上界である。
ツォルンの補題により帰納的半順序集合は極大元を持つので、$(W, f) \in \mathfrak{U}$ を一つの極大元とすれば、$W = A$ または $f(W) = B$ のいずれかが成り立つ。$W = A$ のときは A から B への単射が存在し、$f(W) = B$ のときは B から A への単射が存在する。

11.2.2 例 11.2

$\mathbb{R}$ の部分集合 B は、B に属する有限個の実数が常に $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとき、$\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合という。$\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合の全体を $\mathfrak{B}$ とする。$\mathfrak{B}$ は空でない。実際、たとえば $\{1\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合である。$X, Y \in \mathfrak{B}$ に対して、$X \leq Y$ を以下のように定義する。

$$X \leq Y \iff X \subset Y$$

このとき、$(\mathfrak{B}, \leq)$ は帰納的半順序集合になる。実際、全順序部分集合 $\mathfrak{A}$ に対して、

$$U = \bigcup_{X \in \mathfrak{A}} X$$

とおけば、$U \in \mathfrak{B}$ であり[*11]、任意の $X \in \mathfrak{A}$ に対して、$X \subset U$、つまり $X \leq U$ が成り立ち、U は上界になっている。よって、任意の全順序部分集合に対して上界が存在するので、$(\mathfrak{B}, \leq)$ は帰納的半順序集合になっている。B を $\mathfrak{B}$ の一つの極大元とする。すなわち B は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な極大集合である。このとき、任意の実数は B に属する有限個の実数の $\mathbb{Q}$ 上一次結合になる[*12]。よって、B は一つのハメル基である。

第 IV 部
距離空間

12 ユークリッド空間

12.1

12.1.1 $(M^i)^i = M^i$ の証明

定義より $a \in M^i$ とは

$$\exists \epsilon > 0[B_n(a; \epsilon) \subset M]$$

のことであり、$a \in (M^i)^i$ とは

$$\exists \epsilon > 0[B_n(a; \epsilon) \subset M^i]$$

のことである。$(M^i)^i \subset M^i$ は定義より成り立つ。以下では、$M^i \subset (M^i)^i$ を示す。
$x \in M^i$ と仮定すると、$B_n(x; \epsilon) \subset M$ が成り立つような、$\epsilon > 0$ が存在する。点 $y \in B_n(x; \epsilon)$ に対して、

[*11] $\mathfrak{A}$ は全順序部分集合なので、任意の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_r \in U$ に対して、ある $X \in \mathfrak{A}$ が存在し、$x_1, x_2, \ldots, x_r \in X$ となるはずである。X は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合なので、$x_1, x_2, \ldots, x_r$ は一次独立であり、$U \in \mathfrak{B}$ であることがわかる。

[*12] ある実数 x が B に属する有限個の実数の $\mathbb{Q}$ 上一次結合にならなければ、$B \cup \{X\}$ も $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合のはずである。これは B が $\mathbb{Q}$ 上一次独立な極大集合であることに矛盾してしまう。

$\delta = \epsilon - d^{(n)}(x, y)$ とおくと、$\delta > 0$。今、点 $z \in B_n(y; \delta)$ について

$$\begin{aligned} d^{(n)}(x, z) &\leq d^{(n)}(x, y) + d^{(n)}(y, z) \\ &< d^{(n)}(x, y) + \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

これより、$z \in B_n(x; \epsilon)$ であり、$z \in M$ が示せた。

$$\exists \delta > 0 [B_n(y, \delta) \subset M]$$

なので、$y \in M^i$ であり、

$$\exists \epsilon > 0 [B_n(x; \epsilon) \subset M^i]$$

なので、$x \in (M^i)^i$ である。

12.1.2　$(M^a)^a = M^a$ の証明

$M^a \subset (M^a)^a$ は定義から成り立つ。よって、以下では $(M^a)^a \subset M^a$ を示す。
$x \in (M^a)^a$ を仮定すると、任意の $\epsilon > 0$ について、

$$B_n(x; \epsilon) \cap M^a \neq \emptyset$$

が成り立つ。これを書き換えて、

$$B_n(x; \epsilon) \cap (M^i \cup M^f) \neq \emptyset$$

つまり、

$$B_n(x; \epsilon) \cap M^i \neq \emptyset \quad \text{または} \quad B_n(x; \epsilon) \cap M^f \neq \emptyset$$

が成り立つ。以下ではこれら 2 つの場合で分けて考える。

1. $B_n(x; \epsilon) \cap M^i \neq \emptyset$ が成り立つとき
   $B_n(x; \epsilon) \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。
2. $B_n(x; \epsilon) \cap M^f \neq \emptyset$ が成り立つとき
   ある点 $y \in (B_n(x; \epsilon) \cap M^f)$ が存在する。$y \in M^f$ なので、任意の $\delta > 0$ について, $B_n(y; \delta) \cap M \neq \emptyset$ である。ここで、$\delta = \epsilon - d^{(n)}(x, y)$ とおくと、$\delta > 0$ である。点 $z \in B_n(y; \delta)$ について

$$\begin{aligned} d^{(n)}(x, z) &\leq d^{(n)}(x, y) + d^{(n)}(y, z) \\ &< d(x, y) + \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

   となるので、$B_n(y; \delta) \subset B_n(x; \epsilon)$。よって、$B_n(x; \epsilon) \cap M \neq \emptyset$ が示せた。

いずれの場合でも、 $B_n(x; \epsilon) \cap M \neq \emptyset$ が成り立つので、$x \in M^a$ が成り立つ。

12.2

12.2.1

$M = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n)$ とおく。また、ある $x = (x_1, .., x_n) \in M$ に対して、

$$l = \min(b_1 - x_1, x_1 - a_1, b_2 - x_2, x_2 - a_2, ..., b_n - x_n, x_n - a_n)$$

とおく。このとき、$l > 0$ である。
今、$y = (y_1, ..., y_n) \in B_n(x; l)$ とする。$d^{(n)}(x, y) < l$ だから、各 $i = 1, 2, ..., n$ について、

$$x_i - (a_i - x_i) \leq x_i - l < y_i < x_i + l \leq x_i + (b_i - x_i)$$

つまり、

$$a_i < y_i < b_i$$

が成り立つ。以上より、$y \in M$。
$\forall x \in M[\exists l > 0[B_n(x; l) \subset M]]$ なので、M は開集合である。

12.2.2

$M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ とおく。$M = \bar{M}$ を示すためには、$\bar{M} \subset M$ を示せば十分。そのために、$x \notin M$ を仮定して、$x \notin \bar{M}$ を導く。
$x \notin M$ と仮定する。すると少なくとも一つの $i(= 1, .., n)$ で $x_i < a_i$ または $b_i < x_i$ が成り立つ。

1. $x_i < a_i$ の場合
   $y = (y_1, ..., y_n) \in B_n(x; a_i - x_i)$ とすると、

   $$y_i < x_i + (a_i - x_i) = a_i$$

   となり、$y \notin M$。よって、$a_i - x_i > 0$ に対して、$B_n(x; a_i - x_i) \cap M = \emptyset$ となるので、$x \notin \bar{M}$
2. $b_i < x_i$ の場合
   $z = (z_1, ..., z_n) \in B_n(x; x_i - b_i)$ とすると、

   $$x_i - (x_i - b_i) < z_i$$

   となり、$b_i < z_i$。よって、$z \notin M$。$x_i - b_i > 0$ に対して $B_n(x; x_i - b_i) \cap M = \emptyset$ となるので、$x \notin \bar{M}$

以上より、$x \notin M$ を仮定して、$x \notin \bar{M}$ を示せた。よって、$\bar{M} \subset M$。

12.3

12.3.1

$\mathbb{R}^n \in \mathfrak{U}$ である。実際、$(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ なので、$(\mathbb{R}^n)^f = (\mathbb{R}^n)^e = \emptyset$ である。よって、$(\mathbb{R}^n)^a = \mathbb{R}^n$。
また、$\emptyset \in \mathfrak{U}$ である。実際、$\emptyset^i = \emptyset$ であり、 $\emptyset^f = \emptyset$ である。よって、$\emptyset^a = \emptyset$

12.3.2

$A_1, ..., A_k \in \mathfrak{U}$ とし、$A = A_1 \cup ... \cup A_k$ とする。
$x \in A^a$ とすれば、

$$\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap A \neq \emptyset]$$

つまり、

$$\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \neq \emptyset]$$

このとき、

$$\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap A_j \neq \emptyset]$$

となる $j(1 \leq j \leq k)$ が存在する。なぜなら、そのような j が存在しないとすると、ある $m(1 \leq m \leq k)$、$\epsilon_0 < \epsilon_1$ に対して、

$$B_n(x; \epsilon_0) \cap A_m \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad B_n(x; \epsilon_1) \cap A_m = \emptyset$$

となることになってしまい、これは不合理。
これより、x は A_j の触点であり、$A_j \in \mathfrak{U}$ だから、$x \in A_j$ である。よって、$x \in A$。以上より $A^a \subset A$ なので $A \in \mathfrak{U}$。

12.3.3

$$\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \neq \emptyset]$$

これを書き換えて、

$$\forall \epsilon > 0[\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (B_n(x; \epsilon) \cap A_\lambda) \neq \emptyset]$$

これから以下のことが言える ($\Longrightarrow$)

$$\forall \epsilon > 0[\forall \lambda \in \Lambda[B_n(x; \epsilon) \cap A_\lambda \neq \emptyset]]$$

よって、

$$\forall \lambda \in \Lambda[\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap A_\lambda \neq \emptyset]]$$

任意の $\lambda \in \Lambda$ について、$A_\lambda \in \mathfrak{U}$ なので、

$$\forall \lambda \in \lambda[x \in A_\lambda]$$

よって、$x \in A$ だから、$A^a \subset A$。以上より、$A \in \mathfrak{U}$。

12.4

12.4.1

M に包まれる開集合 N で、$N - M^i \neq \emptyset$ となるものが存在すると仮定する。$x \in N - M^i$ とすると N は開集合なので、x は N の内点であり、

$$\exists \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \subset N]$$

となる。$N \subset M$ なので、

$$\exists \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \subset M]$$

のはずだが、これは x が M の内点となることを意味し、$x \notin M^i$ に矛盾する。以上より、M^i は M に包まれる最大の開集合である。

12.4.2

M を包む閉集合 N で、$\bar{M} - N \neq \emptyset$ となるものが存在すると仮定する。$x \in \bar{M} - N$ とすると $N = \bar{N}$ なので、$x \notin \bar{N}$ つまり、x は N の外点であり、

$$\exists \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap N = \emptyset]$$

である。ここで、$M \subset N$ であるので、

$$\exists \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap M = \emptyset]$$

x は M の外点でもあることになってしまい、$x \in \bar{M}$ に矛盾する。以上より、$\bar{M}$ は M を包む最小の閉集合である。