集合と位相

nukui

2016 年 10 月 29 日

第 I 部
集合と写像

1　集合とは

1.1

1. 成り立つ。∵ Y に含まれる要素は全て X に含まれる。
2. 成り立つ。∵ 3 は W に含まれるが Z に含まれない。
3. 成り立つ。∵ 4 は V に含まれるが、Y に含まれない。
4. 成り立たない。∵4 は V に含まれるが X には含まれない。
5. 成り立たない。∵ 1 は X に含まれるが W に含まれない。
6. 成り立たない。∵ V の全ての要素は W に含まれる。
7. 成り立つ。∵ V の全ての要素は Z に含まれる。
8. 成り立つ。 ∵ 3 は X に含まれるが Z に含まれない。
9. 成り立たない。 ∵ Y に含まれる全ての要素は Z に含まれる。
10. 成り立たない。∵ 3 は W に含まれるが Y には含まれない。

1.2

1. D
2. B
3. C,E,F
4. B,D

1.3

1. 成り立たない。
2. 成り立つ。
3. 成り立つ。
4. 成り立つ。
5. 成り立たない。
6. 成り立つ。

1.4

集合 A が 1 個の元から成るとき、部分集合は A と $\emptyset$ の 2 通り。よって $n=1$ のとき、命題は成り立つ。
集合 A が n 個の元から成り、その部分集合は全部で 2^n 個から成るとする。今、集合 A に元 X を一つ加え、n+1 個の元から成る集合 B を考える。集合 B の部分集合は、

1. 集合 A の部分集合と一致。(2^n 個)
2. 集合 A の部分集合に元 X を加えたものに一致。(2^n 個)

のいずれかである。よって、集合 B の部分集合の個数は $2^n+2^n=2^{n+1}$ 個になる。以上より、すべての自然数 n で命題は成り立つ。

2　集合の演算

2.1

意味を考えれば、確かに成り立つことがわかる。

2.2

1.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(A\cap B) &= \{x|x\in(A-B) \text{ または } x\in(A\cap B)\}\\ &= \{x|(x\in A \text{ かつ } x\notin B) \text{ または } (x\in A \text{ かつ } x\in B)\}\\ &= \{x|x\in A \text{ かつ } (x\notin B \text{ または } x\in B)\}\\ &= \{x|x\in A\}\\ &= A\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup B &= \{x|x\in(A-B) \text{ または } x\in B\}\\ &= \{x|(x\in A \text{ かつ } x\notin B) \quad \text{ または } x\in B\}\\ &= \{x|(x\in A \text{ または } x\in B) \text{ かつ } (x\notin B \text{ または } x\in B)\}\\ &= \{x|(x\in A \text{ または } x\in B)\}\\ &= A\cup B\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}B\cap(A-B) &= \{x|x\in B \text{ かつ } x\in(A-B)\}\\ &= \{x|x\in B \text{ かつ } (x\in A \text{ かつ } x\notin B)\}\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

2.3

1. $A_1\subset A$ を仮定する。

$$x\in A_1 \text{かつ } x\notin B \Longrightarrow x\in A \text{ かつ } x\notin B$$

なので、$x\in A_1-B$ とすると、$x\in A-B$ が示せる。つまり、$A_1-B\subset A-B$。

2. $B_1 \subset B$ を仮定する。

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B_1$$

なので、$x \in A - B$ とすると、$x \in A - B_1$ が示せる。つまり、$A - B \subset A - B_1$。

2.4

$$\begin{aligned} A - B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \notin B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

$$A = \{x | x \in A\}$$

なので、

$$A - B = A \Longleftrightarrow A - B \supset A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

となり、$A - B = A$ と、$A \cap B = \emptyset$ が同値であることを示せた。

2.5

1. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ B &= \{x | x \in B\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cup B = \{x | x \in B\} = B$ となる。逆に、$A \cup B = B$ を仮定すると、$A \cup B \subset B$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

2. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ A &= \{x | x \in A\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cap B = \{x | x \in A\} = A$ となる。逆に、$A \cap B = A$ を仮定すると、$A \cap B \supset A$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

3. 定義から

$$A - B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ なので、$A - B = \emptyset$ が成り立つ。逆に、$A - B = \emptyset$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ になるので、$A \subset B$ が成り立つ。

4. 定義から

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= \{x | x \in A \text{ または } x \in (B - A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

よって、1 と本質的に同じ問題なので、成立する。

5. 定義から

$$\begin{aligned}
B-(B-A) &= \{x|x \in B \text{ かつ } x \notin (B-A)\} \\
&= \{x|x \in B \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in A)\} \\
&= \{x|x \in B \text{ かつ } x \in A\} \\
&= A \cap B
\end{aligned}$$

よって、本質的に 2 と同じ問題なので、成立する。

2.6

1.

$$\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C) &= ((A\cup B)\cap(A\cup C))\cap(B\cup C) \\
&= ((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cup((A\cap C)\cup(B\cap C)))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cup(B\cap C))\cap(B\cup C) \\
&= (A\cap(B\cup C))\cup((B\cap C)\cap(B\cup C)) \\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\cup(B\cap C) \\
&= (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)
\end{aligned}$$

2. 1 の結果を用いる。

$$\begin{aligned}
&(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup C)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D) \\
&= ((A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C))\cap((A\cup D)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D)) \\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(D\cup(A\cap B\cap C)) \\
&= (((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap D)\cup(((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(A\cap B\cap C)) \\
&= ((A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D))\cup(A\cap B\cap C) \\
&= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D)
\end{aligned}$$

3　ド・モルガンの法則

3.1

1.

$$\begin{aligned}
(A^c)^c &= (X-A)^c \\
&= \{x|x \in X-(X-A)\} \\
&= \{x \in X|x \notin X-A\} \\
&= \{x \in X|\text{「}x \in X \text{ かつ } x \notin A\text{」ではない}\} \\
&= \{x \in X|x \notin X \text{ または } x \in A\} \\
&= \{x \in X|x \in A\} \\
&= A
\end{aligned}$$

2.

$$X^c = X - X = \{x|x \in X \text{ かつ } x \notin X\} = \emptyset$$

3.

$$\emptyset^c = X - \emptyset = \{x | x \in X \text{ かつ } x \notin \emptyset\} = X$$

4.

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \{x | x \in A \text{ または } x \in A^c\} \\ &= \{x \in X | x \in A \text{ または } x \notin A\} \\ &= X \end{aligned}$$

5.

$$A \cap A^c = (A^c)^c \cap A^c = (A^c \cup A)^c = X^c = \emptyset$$

6.

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in X | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in X - B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

7.

$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$$

3.2

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) - C &= \{x | x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x | x \in A - C \text{ または } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cup (B - C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (A \cap B) - C &= \{x | x \in A \cap B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x | x \in A - C \text{ かつ } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cap (B - C) \end{aligned}$$

3.3

1. (a)

$$\begin{aligned} A \circ B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \circ A \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(A \circ B) \circ C &= ((A \circ B) - C) \cup (C - (A \circ B)) \\
&= (((A - B) \cup (B - A)) - C) \cup (C - ((A - B) \cup (B - A))) \\
&= (((A - B) - C) \cup ((B - A) - C)) \cup ((C - (A - B)) \cap (C - (B - A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup (((C - A) \cup (C \cap B)) \cap ((C - B) \cup (C \cap A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup \\
&\qquad ((C - A) \cap (C - B)) \cup ((C - A) \cap (C \cap A)) \cup ((C \cap B) \cap (C - B)) \cup ((C \cap B) \cap (C \cap A)) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup ((C - (A \cup B)) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap C)) \\
&= (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
C - (A - B) &= \{x | x \in C \text{ かつ } x \notin (A - B)\} \\
&= \{x | x \in C \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \in B))\} \\
&= \{x | (x \in C \text{ かつ } x \notin A) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \in B)\} \\
&= (C - A) \cup (C \cap B)
\end{aligned}
$$

という結果を、３行目から４行目への変形で用いた。また、

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (C \cup D) &= (A \cap (C \cup D)) \cup (B \cap (C \cup D)) \\
&= (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)
\end{aligned}
$$

という結果を、４行目から（５, ６行目）への変形で用いた。

さて、$(A \circ B) \circ C = (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$ と変形できるので、$(A \circ B) \circ C$ は、A,B,C が全く同等で、任意の二つを入れ替えても同じ値であることがわかる。よって、$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$。

(c)

$$A \circ A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset$$

(d)

$$A \circ \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A$$

2.

$$
\begin{aligned}
& A \circ X = B \\
\iff & (A \circ X) - B = \emptyset \text{ かつ } B - (A \circ X) = \emptyset \\
\iff & ((A \circ X) - B) \cup (B - (A \circ X)) = \emptyset \\
\iff & ((A \circ X) \circ B) = \emptyset \\
\iff & ((A \circ B) \circ X) = \emptyset \\
\iff & ((A \circ B) - X) \cup (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
\iff & ((A \circ B) - X) = \emptyset \text{ かつ } (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
\iff & A \circ B = X
\end{aligned}
$$

ここで、$((A \circ X) \circ B) = \emptyset \iff ((A \circ B) \circ X) = \emptyset$ という変形には、1 の結果を用いた。以上より、集合 A,B を任意に与えたとき、$A \circ X = B$ を満足する集合 X が $A \circ B$ と表せるので、X はただ一つ存在することが示せた。

4　直積集合

4.1

1.

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= \{(x,y) | x \in A \text{ かつ } y \in (B \cup C)\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in (A \times B) \text{ または } (x,y) \in (A \times C)\} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x,y) | x \in A \text{ かつ } y \in (B \cap C)\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ かつ } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in (A \times B) \text{ かつ } (x,y) \in (A \times C)\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \times C &= \{(x,y) | x \in (A \cup B) \text{ かつ } y \in C\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in A \times C \text{ または } (x,y) \in B \times C\} \\ &= (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (A \cap B) \times C &= \{(x,y) | x \in (A \cap B) \text{ かつ } y \in C\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in A \times C \text{ かつ } (x,y) \in B \times C\} \\ &= (A \times C) \cap (B \times C) \end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned} (X \times Y) - (A \times B) &= \{(s,t) | (s,t) \in (X \times Y) \text{ かつ } (s,t) \notin (A \times B)\} \\ &= \{(s,t) | (s \in (X - A) \text{ かつ } t \in Y) \\ &\qquad \text{または } (s \in X \text{ かつ } t \in (Y - B))\} \\ &= \{(s,t) | (s,t) \in ((X - A) \times Y) \text{ または } (s,t) \in (X \times (Y - B))\} \\ &= ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - B)) \end{aligned}$$

5　写像

5.1

1.

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = x^2 + 3$$

2.
$$(g \circ f)(x) = g(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

3.
$$(f \circ f)(x) = f(x+2) = x + 4$$

4.
$$(g \circ g)(x) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

5.2

1.
$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap B &= \{x | x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{かつ } x \in B\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ かつ } x \in B\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{かつ } x \in B]\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cap B)]\} \\
&= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cup B &= \{x | x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{または } x \in B\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ または } x \in B\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{または } x \in B]\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cup B)]\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cup B)
\end{aligned}$$

5.3

1.
$$\begin{aligned}
(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ「}\exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ } \forall\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\
&= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^c)
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ「}\forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\
&= \{x | x \in X \text{ かつ } \exists\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\
&= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\
&= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^c)
\end{aligned}$$

5.4

1.

$$
\begin{aligned}
f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) &= \{y \in Y | \exists x \in (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)[f(x) = y]\} \\
&= \{y \in Y | \exists \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x) = y]]\} \\
&= \{y \in Y | \exists \lambda \in \Lambda[y \in f(A_\lambda)]\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)
\end{aligned}
$$