集合と位相

nukui

2016 年 10 月 6 日

第 I 部
集合と写像

1 集合とは

1.1

1. 成り立つ。∵ Y に含まれる要素は全て X に含まれる。
2. 成り立つ。∵ 3 は W に含まれるが Z に含まれない。
3. 成り立つ。∵ 4 は V に含まれるが、Y に含まれない。
4. 成り立たない。∵4 は V に含まれるが X には含まれない。
5. 成り立たない。∵ 1 は X に含まれるが W に含まれない。
6. 成り立たない。∵ V の全ての要素は W に含まれる。
7. 成り立つ。∵ V の全ての要素は Z に含まれる。
8. 成り立つ。 ∵ 3 は X に含まれるが Z に含まれない。
9. 成り立たない。 ∵ Y に含まれる全ての要素は Z に含まれる。
10. 成り立たない。∵ 3 は W に含まれるが Y には含まれない。

1.2

1. D
2. B
3. C,E,F
4. B,D

1.3

1. 成り立たない。
2. 成り立つ。
3. 成り立つ。
4. 成り立つ。
5. 成り立たない。
6. 成り立つ。

1.4

集合 A が 1 個の元から成るとき、部分集合は A と $\emptyset$ の 2 通り。よって $n = 1$ のとき、命題は成り立つ。
集合 A が n 個の元から成り、その部分集合は全部で 2^n 個から成るとする。今、集合 A に元 X を一つ加え、n+1 個の元から成る集合 B を考える。集合 B の部分集合は、

1. 集合 A の部分集合と一致。(2^n 個)
2. 集合 A の部分集合に元 X を加えたものに一致。(2^n 個)

のいずれかである。よって、集合 B の部分集合の個数は $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ 個になる。以上より、すべての自然数 n で命題は成り立つ。

2 集合の演算

2.1

意味を考えれば、確かに成り立つことがわかる。

2.2

1.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(A\cap B) &= \{x|x\in(A-B) \text{ または } x\in(A\cap B)\} \\ &= \{x|(x\in A \text{ かつ } x\notin B) \text{ または } (x\in A \text{ かつ } x\in B)\} \\ &= \{x|x\in A \text{ かつ } (x\notin B \text{ または } x\in B)\} \\ &= \{x|x\in A\} \\ &= A\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup B &= \{x|x\in(A-B) \text{ または } x\in B\} \\ &= \{x|(x\in A \text{ かつ } x\notin B) \quad \text{ または } x\in B\} \\ &= \{x|(x\in A \text{ または } x\in B) \text{ かつ } (x\notin B \text{ または } x\in B)\} \\ &= \{x|(x\in A \text{ または } x\in B)\} \\ &= A\cup B\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}B\cap(A-B) &= \{x|x\in B \text{ かつ } x\in(A-B)\} \\ &= \{x|x\in B \text{ かつ } (x\in A \text{ かつ } x\notin B)\} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

2.3

1. $A_1 \subset A$ を仮定する。

$$x\in A_1\text{かつ } x\notin B \Longrightarrow x\in A \text{ かつ } x\notin B$$

なので、$x\in A_1 - B$ とすると、$x\in A-B$ が示せる。つまり、$A_1 - B\subset A-B$。

2. $B_1 \subset B$ を仮定する。

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B_1$$

なので、$x \in A - B$ とすると、$x \in A - B_1$ が示せる。つまり、$A - B \subset A - B_1$。

2.4

$$\begin{aligned} A - B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \notin B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

$$A = \{x | x \in A\}$$

なので、

$$A - B = A \Longleftrightarrow A - B \supset A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

となり、$A - B = A$ と、$A \cap B = \emptyset$ が同値であることを示せた。

2.5

1. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ B &= \{x | x \in B\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cup B = \{x | x \in B\} = B$ となる。逆に、$A \cup B = B$ を仮定すると、$A \cup B \subset B$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

2. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ A &= \{x | x \in A\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cap B = \{x | x \in A\} = A$ となる。逆に、$A \cap B = A$ を仮定すると、$A \cap B \supset A$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

3. 定義から

$$A - B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ なので、$A - B = \emptyset$ が成り立つ。逆に、$A - B = \emptyset$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ になるので、$A \subset B$ が成り立つ。

4. 定義から

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= \{x | x \in A \text{ または } x \in (B - A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

よって、1 と本質的に同じ問題なので、成立する。

5. 定義から

$$\begin{aligned}
B-(B-A) &= \{x|x\in B \text{ かつ } x\notin (B-A)\}\\
&= \{x|x\in B \text{ かつ } (x\notin B \text{ または } x\in A)\}\\
&= \{x|x\in B \text{ かつ } x\in A\}\\
&= A\cap B
\end{aligned}$$

よって、本質的に 2 と同じ問題なので、成立する。

2.6

1.

$$\begin{aligned}
(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C) &= ((A\cup B)\cap(A\cup C))\cap(B\cup C)\\
&= ((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C))\cap(B\cup C)\\
&= (A\cup((A\cap C)\cup(B\cap C)))\cap(B\cup C)\\
&= (A\cup(B\cap C))\cap(B\cup C)\\
&= (A\cap(B\cup C))\cup((B\cap C)\cap(B\cup C))\\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\cup(B\cap C)\\
&= (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)
\end{aligned}$$

2. 1 の結果を用いる。

$$\begin{aligned}
&(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup C)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D)\\
&= ((A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C))\cap((A\cup D)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D))\\
&= ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(D\cup(A\cap B\cap C))\\
&= (((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap D)\cup(((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(A\cap B\cap C))\\
&= ((A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D))\cup(A\cap B\cap C)\\
&= (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D)
\end{aligned}$$