集合と位相

nukui

2016 年 10 月 6 日

第 I 部
集合と写像

1　集合とは

1.1

1. 成り立つ。∵ Y に含まれる要素は全て X に含まれる。
2. 成り立つ。∵ 3 は W に含まれるが Z に含まれない。
3. 成り立つ。∵ 4 は V に含まれるが、Y に含まれない。
4. 成り立たない。∵4 は V に含まれるが X には含まれない。
5. 成り立たない。∵ 1 は X に含まれるが W に含まれない。
6. 成り立たない。∵ V の全ての要素は W に含まれる。
7. 成り立つ。∵ V の全ての要素は Z に含まれる。
8. 成り立つ。 ∵ 3 は X に含まれるが Z に含まれない。
9. 成り立たない。 ∵ Y に含まれる全ての要素は Z に含まれる。
10. 成り立たない。∵ 3 は W に含まれるが Y には含まれない。

1.2

1. D
2. B
3. C,E,F
4. B,D

1.3

1. 成り立たない。
2. 成り立つ。
3. 成り立つ。
4. 成り立つ。
5. 成り立たない。
6. 成り立つ。

1.4

集合 A が 1 個の元から成るとき、部分集合は A と $\emptyset$ の 2 通り。よって $n = 1$ のとき、命題は成り立つ。
集合 A が n 個の元から成り、その部分集合は全部で 2^n 個から成るとする。今、集合 A に元 X を一つ加え、n+1 個の元から成る集合 B を考える。集合 B の部分集合は、

1. 集合 A の部分集合と一致。(2^n 個)
2. 集合 A の部分集合に元 X を加えたものに一致。(2^n 個)

のいずれかである。よって、集合 B の部分集合の個数は $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ 個になる。以上より、すべての自然数 n で命題は成り立つ。

2　集合の演算

2.1

意味を考えれば、確かに成り立つことがわかる。

2.2

1.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(A\cap B) &= \{x|x\in(A-B)\ \text{または}\ x\in(A\cap B)\}\\ &= \{x|(x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B)\ \text{または}\ (x\in A\ \text{かつ}\ x\in B)\}\\ &= \{x|x\in A\ \text{かつ}\ (x\notin B\ \text{または}\ x\in B)\}\\ &= \{x|x\in A\}\\ &= A\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup B &= \{x|x\in(A-B)\ \text{または}\ x\in B\}\\ &= \{x|(x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B)\quad \text{または}\ x\in B\}\\ &= \{x|(x\in A\ \text{または}\ x\in B)\ \text{かつ}\ (x\notin B\ \text{または}\ x\in B)\}\\ &= \{x|(x\in A\ \text{または}\ x\in B)\}\\ &= A\cup B\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}B\cap(A-B) &= \{x|x\in B\ \text{かつ}\ x\in(A-B)\}\\ &= \{x|x\in B\ \text{かつ}\ (x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B)\}\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

2.3

1. $A_1 \subset A$ を仮定する。

$$x\in A_1\text{かつ}\ x\notin B \Longrightarrow x\in A\ \text{かつ}\ x\notin B$$

なので、$x \in A_1 - B$ とすると、$x \in A - B$ が示せる。つまり、$A_1 - B \subset A - B$。

2. $B_1 \subset B$ を仮定する。

$$x \in A \text{ かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B_1$$

なので、$x \in A - B$ とすると、$x \in A - B_1$ が示せる。つまり、$A - B \subset A - B_1$。

2.4

$$\begin{aligned} A - B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \notin B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

$$A = \{x | x \in A\}$$

なので、

$$A - B = A \Longleftrightarrow A - B \supset A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$