集合と位相

nukui

2018 年 4 月 22 日

第 I 部
集合と写像

1　集合とは

1.1

1. 成り立つ。∵ Y に含まれる要素は全て X に含まれる。
2. 成り立つ。∵ 3 は W に含まれるが Z に含まれない。
3. 成り立つ。∵ 4 は V に含まれるが、Y に含まれない。
4. 成り立たない。∵4 は V に含まれるが X には含まれない。
5. 成り立たない。∵ 1 は X に含まれるが W に含まれない。
6. 成り立たない。∵ V の全ての要素は W に含まれる。
7. 成り立つ。∵ V の全ての要素は Z に含まれる。
8. 成り立つ。 ∵ 3 は X に含まれるが Z に含まれない。
9. 成り立たない。 ∵ Y に含まれる全ての要素は Z に含まれる。
10. 成り立たない。∵ 3 は W に含まれるが Y には含まれない。

1.2

1. D
2. B
3. C, E, F
4. B,D

1.3

1. 成り立たない。
2. 成り立つ。
3. 成り立つ。
4. 成り立つ。
5. 成り立たない。
6. 成り立つ。

1.4

集合 A が 1 個の元から成るとき、部分集合は A と $\emptyset$ の 2 通り。よって $n=1$ のとき、命題は成り立つ。
集合 A が n 個の元から成り、その部分集合は全部で 2^n 個から成ると仮定する。今、集合 A に元 $x(x \notin A)$ を一つ加え、$n+1$ 個の元から成る集合 $B(B = A \cup \{x\})$ を考える。集合 B の部分集合は、

1. 集合 A の部分集合と一致。(2^n 個)
2. 集合 A の部分集合に元 x を加えたものに一致。(2^n 個)

のいずれかである。よって、集合 B の部分集合の個数は $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ 個になる。以上より、すべての自然数 n で命題は成り立つ。

2 集合の演算

2.1

意味を考えれば、確かに成り立つことがわかる。

2.2

1.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup(A\cap B) &= \{x | x \in (A-B) \text{ または } x \in (A\cap B)\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } x \in B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in B)\} \\ &= \{x | x \in A\} \\ &= A\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A-B)\cup B &= \{x | x \in (A-B) \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \quad \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in B)\} \\ &= \{x | (x \in A \text{ または } x \in B)\} \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}B\cap(A-B) &= \{x | x \in B \text{ かつ } x \in (A-B)\} \\ &= \{x | x \in B \text{ かつ } (x \in A \text{ かつ } x \notin B)\} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

2.3

1. $A_1 \subset A$ を仮定する。

$$x \in A_1 \text{かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B$$

なので、$x \in A_1 - B$ とすると、$x \in A - B$ が示せる。つまり、$A_1 - B \subset A - B$。

2. $B_1 \subset B$ を仮定する。
$$x \in A \text{ かつ } x \notin B \Longrightarrow x \in A \text{ かつ } x \notin B_1$$
なので、$x \in A - B$ とすると、$x \in A - B_1$ が示せる。つまり、$A - B \subset A - B_1$。

2.4

$$\begin{aligned} A - B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \notin B)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin A \cap B\} \end{aligned}$$

$$A = \{x | x \in A\}$$

なので、
$$A - B = A \Longleftrightarrow A - B \supset A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$$
となり、$A - B = A$ と、$A \cap B = \emptyset$ が同値であることを示せた。

2.5

1. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ B &= \{x | x \in B\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cup B = \{x | x \in B\} = B$ となる。逆に、$A \cup B = B$ を仮定すると、$A \cup B \subset B$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

2. 定義から、

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\ A &= \{x | x \in A\} \end{aligned}$$

である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$A \cap B = \{x | x \in A\} = A$ となる。逆に、$A \cap B = A$ を仮定すると、$A \cap B \supset A$ より、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ となるので、$A \subset B$。

3. 定義から
$$A - B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$
である。ここで、$A \subset B$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ なので、$A - B = \emptyset$ が成り立つ。逆に、$A - B = \emptyset$ を仮定すると、$\forall x[x \in A \Longrightarrow x \in B]$ になるので、$A \subset B$ が成り立つ。

4. 定義から

$$\begin{aligned} A \cup (B - A) &= \{x | x \in A \text{ または } x \in (B - A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin A)\} \\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

よって、1 と本質的に同じ問題なので、成立する。

5. 定義から

$$\begin{aligned} B-(B-A) &= \{x | x \in B \text{ かつ } x \notin (B-A)\} \\ &= \{x | x \in B \text{ かつ } (x \notin B \text{ または } x \in A)\} \\ &= \{x | x \in B \text{ かつ } x \in A\} \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

よって、本質的に 2 と同じ問題なので、成立する。

2.6

1.

$$\begin{aligned} (A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C) &= ((A\cup B)\cap(A\cup C))\cap(B\cup C) \\ &= ((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C))\cap(B\cup C) \\ &= (A\cup((A\cup B)\cap C))\cap(B\cup C) \\ &= (A\cup((A\cap C)\cup(B\cap C)))\cap(B\cup C) \\ &= (A\cup(B\cap C))\cap(B\cup C) \\ &= (A\cap(B\cup C))\cup((B\cap C)\cap(B\cup C)) \\ &= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\cup(B\cap C) \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C) \end{aligned}$$

2. 1 の結果を用いる。

$$\begin{aligned} &(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup C)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D) \\ =& ((A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C))\cap((A\cup D)\cap(B\cup D)\cap(C\cup D)) \\ =& ((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(D\cup(A\cap B\cap C)) \\ =& (((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap D)\cup(((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))\cap(A\cap B\cap C)) \\ =& ((A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D))\cup(A\cap B\cap C) \\ =& (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)\cup(A\cap C\cap D)\cup(B\cap C\cap D) \end{aligned}$$

3　ド・モルガンの法則

3.1

1.

$$\begin{aligned} (A^c)^c &= (X-A)^c \\ &= \{x | x \in X-(X-A)\} \\ &= \{x \in X | x \notin X-A\} \\ &= \{x \in X | \text{「} x \in X \text{ かつ } x \notin A \text{」ではない}\} \\ &= \{x \in X | x \notin X \text{ または } x \in A\} \\ &= \{x \in X | x \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

2.

$$X^c = X - X = \{x|x \in X \text{ かつ } x \notin X\} = \emptyset$$

3.

$$\emptyset^c = X - \emptyset = \{x|x \in X \text{ かつ } x \notin \emptyset\} = X$$

4.

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \{x|x \in A \text{ または } x \in A^c\} \\ &= \{x \in X|x \in A \text{ または } x \notin A\} \\ &= X \end{aligned}$$

5.

$$A \cap A^c = (A^c)^c \cap A^c = (A^c \cup A)^c = X^c = \emptyset$$

6.

$$\begin{aligned} A - B &= \{x \in X|x \in A \text{ かつ } x \notin B\} \\ &= \{x|x \in A \text{ かつ } x \in X - B\} \\ &= \{x|x \in A \text{ かつ } x \in B^c\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

7.

$$(A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B$$

3.2

1.

$$\begin{aligned} (A \cup B) - C &= \{x|x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x|x \in A - C \text{ または } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cup (B - C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (A \cap B) - C &= \{x|x \in A \cap B \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \in B) \text{ かつ } x \notin C\} \\ &= \{x|(x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } x \notin C)\} \\ &= \{x|x \in A - C \text{ かつ } x \in B - C\} \\ &= (A - C) \cap (B - C) \end{aligned}$$

3.3

1. (a)

$$\begin{aligned} A \circ B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \circ A \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(A \circ B) \circ C &= ((A \circ B) - C) \cup (C - (A \circ B)) \\
&= (((A - B) \cup (B - A)) - C) \cup (C - ((A - B) \cup (B - A))) \\
&= (((A - B) - C) \cup ((B - A) - C)) \cup ((C - (A - B)) \cap (C - (B - A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup (((C - A) \cup (C \cap B)) \cap ((C - B) \cup (C \cap A))) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup \\
&\qquad ((C - A) \cap (C - B)) \cup ((C - A) \cap (C \cap A)) \cup ((C \cap B) \cap (C - B)) \cup ((C \cap B) \cap (C \cap A)) \\
&= ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C))) \cup ((C - (A \cup B)) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap C)) \\
&= (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
C - (A - B) &= \{x | x \in C \text{ かつ } x \notin (A - B)\} \\
&= \{x | x \in C \text{ かつ } (x \notin A \text{ または } x \in B)\} \\
&= \{x | (x \in C \text{ かつ } x \notin A) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \in B)\} \\
&= (C - A) \cup (C \cap B)
\end{aligned}
$$

という結果を、３行目から４行目への変形で用いた。また、

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (C \cup D) &= (A \cap (C \cup D)) \cup (B \cap (C \cup D)) \\
&= (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)
\end{aligned}
$$

という結果を、４行目から（５, ６行目）への変形で用いた。

さて、$(A \circ B) \circ C = (A - (B \cup C)) \cup (B - (C \cup A)) \cup (C - (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$ と変形できるので、$(A \circ B) \circ C$ は、A,B,C が全く同等で、任意の二つを入れ替えても同じ値であることがわかる。よって、$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$。

(c)

$$A \circ A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset$$

(d)

$$A \circ \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A$$

2.

$$
\begin{aligned}
& A \circ X = B \\
\Longleftrightarrow\ & (A \circ X) - B = \emptyset \text{ かつ } B - (A \circ X) = \emptyset \\
\Longleftrightarrow\ & ((A \circ X) - B) \cup (B - (A \circ X)) = \emptyset \\
\Longleftrightarrow\ & ((A \circ X) \circ B) = \emptyset \\
\Longleftrightarrow\ & ((A \circ B) \circ X) = \emptyset \\
\Longleftrightarrow\ & ((A \circ B) - X) \cup (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
\Longleftrightarrow\ & ((A \circ B) - X) = \emptyset \text{ かつ } (X - (A \circ B)) = \emptyset \\
\Longleftrightarrow\ & A \circ B = X
\end{aligned}
$$

ここで、$((A \circ X) \circ B) = \emptyset \iff ((A \circ B) \circ X) = \emptyset$ という変形には、1 の結果を用いた。以上より、集合 A,B を任意に与えたとき、$A \circ X = B$ を満足する集合 X が $A \circ B$ と表せるので、X はただ一つ存在することが示せた。

4 直積集合

4.1

1.

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= \{(x,y) | x \in A \text{ かつ } y \in (B \cup C)\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in (A \times B) \text{ または } (x,y) \in (A \times C)\} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{(x,y) | x \in A \text{ かつ } y \in (B \cap C)\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in B) \text{ かつ } (x \in A \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in (A \times B) \text{ かつ } (x,y) \in (A \times C)\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \times C &= \{(x,y) | x \in (A \cup B) \text{ かつ } y \in C\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ または } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in A \times C \text{ または } (x,y) \in B \times C\} \\ &= (A \times C) \cup (B \times C) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (A \cap B) \times C &= \{(x,y) | x \in (A \cap B) \text{ かつ } y \in C\} \\ &= \{(x,y) | (x \in A \text{ かつ } y \in C) \text{ かつ } (x \in B \text{ かつ } y \in C)\} \\ &= \{(x,y) | (x,y) \in A \times C \text{ かつ } (x,y) \in B \times C\} \\ &= (A \times C) \cap (B \times C) \end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned} (X \times Y) - (A \times B) &= \{(s,t) | (s,t) \in (X \times Y) \text{ かつ } (s,t) \notin (A \times B)\} \\ &= \{(s,t) | (s \in (X - A) \text{ かつ } t \in Y) \\ &\qquad\qquad \text{ または } (s \in X \text{ かつ } t \in (Y - B))\} \\ &= \{(s,t) | (s,t) \in ((X - A) \times Y) \text{ または } (s,t) \in (X \times (Y - B))\} \\ &= ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - B)) \end{aligned}$$

5 写像

5.1

1.

$$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = x^2 + 3$$

2.

$$(g \circ f)(x) = g(x+2) = (x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5$$

3.

$$(f \circ f)(x) = f(x+2) = x + 4$$

4.

$$(g \circ g)(x) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

5.2

1.

$$\begin{aligned}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cap B &= \{x | x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{かつ } x \in B\} \\ &= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ かつ } x \in B\} \\ &= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{かつ } x \in B]\} \\ &= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cap B)]\} \\ &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \cup B &= \{x | x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{または } x \in B\} \\ &= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ または } x \in B\} \\ &= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \text{または } x \in B]\} \\ &= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in (A_\lambda \cup B)]\} \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)\end{aligned}$$

5.3

1.

$$\begin{aligned}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ「} \exists\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ } \forall\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\ &= \{x | \forall\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda^c)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c &= (X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ「} \forall\lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda] \text{ ではない」}\} \\ &= \{x | x \in X \text{ かつ } \exists\lambda \in \Lambda[x \notin A_\lambda]\} \\ &= \{x | \exists\lambda \in \Lambda[x \in X \text{ かつ } x \notin A_\lambda]\} \\ &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda^c)\end{aligned}$$

5.4

1.

$$
\begin{aligned}
f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) &= \{y \in Y | \exists x \in (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)[f(x)=y]\} \\
&= \{y \in Y | \exists \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x)=y]]\} \\
&= \{y \in Y | \exists \lambda \in \Lambda[y \in f(A_\lambda)]\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)
\end{aligned}
$$

2.

$$y \in f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$$

と仮定すると、

$$\exists x \in (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)[f(x)=y]$$

が言える。これは、

$$\exists x \in X[\forall \lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \quad \text{かつ}\ f(x)=y]]$$

と同値。このとき、

$$\forall \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x)=y]]$$

がいえる[*1]ので、

$$y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

3.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\bigcup_{\mu\in M} B_\mu) &= \{x \in X | f(x) \in (\bigcup_{\mu\in M} B_\mu)\} \\
&= \{x \in X | \exists \mu \in M[f(x) \in B_\mu]\} \\
&= \{x \in X | \exists \mu \in M[x \in f^{-1}(B_\mu)]\} \\
&= \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\bigcap_{\mu\in M} B_\mu) &= \{x \in X | f(x) \in (\bigcap_{\mu\in M} B_\mu)\} \\
&= \{x \in X | \forall \mu \in M[f(x) \in B_\mu]\} \\
&= \{x \in X | \forall \mu \in M[x \in f^{-1}(B_\mu)]\} \\
&= \bigcap_{\mu\in M} f^{-1}(B_\mu)
\end{aligned}
$$

[*1] 逆は必ずしも真ではない。つまり $\forall \lambda \in \Lambda[\exists x \in A_\lambda[f(x)=y]]$ だからといって、$\exists x \in X[\forall \lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda \quad \text{かつ}\ f(x)=y]]$ はいえない。

5.5

$n=2$ のとき

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2$$

となり、主張は正しい。$n=m$ のとき、主張が正しいと仮定する。つまり、

$$\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m} (A_i \cup A_j) = \bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m)$$

が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m+1} (A_i \cup A_j) \\
&= (\bigcap_{1 \leqq i < j \leqq m} (A_i \cup A_j)) \cap (\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} (A_i \cup A_{m+1})) \\
&= (\bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m)) \cap ((\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup A_{m+1}) \\
&= \bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_m \cap ((\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup A_{m+1})) \\
&= (\bigcap_{1 \leqq i \leqq m} A_i) \cup (\bigcup_{1 \leqq i \leqq m} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1})) \\
&= \bigcup_{1 \leqq i \leqq m+1} (A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{m+1})
\end{aligned}$$

となり、$n=m+1$ のときも成り立つ。以上より、$n \geqq 2$ のすべての自然数 n で主張は成り立つ。

5.6

1.

$$x \in \liminf_{n \to \infty} E_n$$

と仮定すると、定義より

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in E_n]]$$

が成り立つ。よって、

$$\forall s \geqq 1[\exists k \geq 1[(m \geq k \text{ かつ } m \geq s) \Longrightarrow x \in E_m]]$$

となるので、

$$\forall s \geq 1[\exists m \geq s[x \in E_m]]$$

定義より、

$$x \in \limsup_{n \to \infty} E_n$$

2.

$$x \in \liminf_{n \to \infty} A_n$$

と仮定すると、定義より、

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n]]$$

ここで、$\forall n \in N[A_n \subset B_n]$ なので、

$$\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in B_n]]$$

が言える。結局、

$$x \in \liminf_{n\to\infty} B_n$$

$\limsup$ の場合も同様に示せる。

3.

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) &= \{x | \forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in (A_n \cup B_n)]]\} \\
&= \{x | \forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in A_n \text{または } x \in B_n]]\} \\
&= \{x | \forall k \geqq 1[(\exists n \geqq k[x \in A_n]) \text{ または } (\exists m \geqq k[x \in B_m])]\} \\
&= \{x | (\forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in A_n]]) \text{ または } (\forall s \geqq 1[\exists m \geqq s[x \in B_m]])\} \\
&= \{x | x \in (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n)\} \\
&= (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n)
\end{aligned}$$

ここで、3 行目 $\Longrightarrow$ 4 行目 を示すには、「4 行目でない $\Longrightarrow$3 行目でない」を示せば良い。

4.

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &= \{x | \exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in (A_n \cap B_n)]]\} \\
&= \{x | \exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n \text{かつ } x \in B_n]]\} \\
&= \{x | \exists k \geqq 1[(\forall n \geqq k[x \in A_n]) \text{ かつ } (\forall m \geqq k[x \in B_m])]\} \\
&= \{x | (\exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in A_n]]) \text{ かつ } (\exists s \geqq 1[\forall m \geqq s[x \in B_m]])\} \\
&= \{x | x \in (\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n)\} \\
&= (\liminf_{n\to\infty} A_n) \cap (\liminf_{n\to\infty} B_n)
\end{aligned}$$

5.7

1.

各 $n \in N$ に対して、$E_n \subset E_{n+1}$ のとき、$\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \\
&= \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k
\end{aligned}$$

2.

各 $n \in N$ に対して、$E_n \supset E_{n+1}$ のとき、$\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = E_k$ なので、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k
\end{aligned}$$

5.8

1. 問 5.6(3) より、

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n$$

2. 問 5.6(4) より、

$$\lim_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cap \lim_{n\to\infty} B_n$$

5.9

1.

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} E_n &= \{x | \forall k \geqq 1[\exists n \geqq k[x \in E_n]]\}\\ &= \{x | \forall k \geqq 1[\exists n[2n-1 \geqq k \text{ かつ } (x \in E_{2n} \text{または } x \in E_{2n-1})]]\}\\ &= \{x | \forall k \geqq 1[\exists n[2n-1 \geqq k \text{ かつ } (x \in A \text{ または } x \in B)]]\}\\ &= \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}\\ &= A \cup B\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} E_n &= \{x | \exists k \geqq 1[\forall n \geqq k[x \in E_n]]\}\\ &= \{x | \exists k \geqq 1[\forall n[2n-1 \geqq k \Longrightarrow (x \in E_{2n-1} \text{かつ } x \in E_{2n})]]\}\\ &= \{x | \exists k \geqq 1[\forall n[2n-1 \geqq k \Longrightarrow (x \in A \text{ かつ } x \in B)]]\}\\ &= \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}\\ &= A \cap B\end{aligned}$$

第 II 部
濃度の大小と二項関係

6 全射・単射

6.1

1. $f : A \to B$ が単射と仮定する。
   (a)

$$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

   と仮定すると、$y = f(x)$ となる x が存在し、$x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ となる。(もしも $x \notin A_1$ または $x \notin A_2$ とすると、f が単射でないことになってしまう。) よって、

$$y \in f(A_1 \cap A_2)$$

   (b) 任意の x について $f^{-1}(f(x)) = x$ なので、$x \in f^{-1}(f(A_1))$ と仮定すると $x \in A_1$ である。

   (c)

$$y \in f(A_1 - A_2)$$

   と仮定すると、$f(x) = y$ となる $x \in A_1 - A_2$ がただ一つ存在する。よって、$y \in f(A_1)$ かつ $y \notin f(A_2)$ である。

2.

$$f : A \to B$$

が全射とする。$y \in B_1$ と仮定すると、$f(x) = y$ となる $x \in f^{-1}(B_1)$ が存在する。よって、$y \in f(f^{-1}(B_1))$。

6.2

1. $g \circ f$ が単射と仮定すると、

$$\forall x_1, x_2 \in A[x_1 \neq x_2 \Longrightarrow g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)]$$

ここで、$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ なので、

$$\forall x_1, x_2 \in A[x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

が成り立つ。よって、f は単射である。

2. $g \circ f$ が全射と仮定すると、

$$\forall c \in C[\exists a \in A[g \circ f(a) = c]]$$

ここで、$\forall a \in A[f(a) \in B]$ なので、

$$\forall c \in C[\exists b \in B[g(b) = c]]$$

6.3

$$\forall n \in \mathbb{N}[\forall x \in X[h^n(x) \neq x]]$$

と仮定すると、任意の $n \in \mathbb{N}, x \in X$ について、$x, h(x), h^2(x), \ldots, h^n(x)$ は互いに異なる値となる。つまり、$h : X \to X$ より、X に無限個の元が存在することになってしまい、矛盾。よって、

$$\exists n \in \mathbb{N}[\exists x \in X[h^n(x) = x]]$$

6.4

たとえば、$y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$ は、条件を満たす。

6.5

f は全射かつ単射である。実際、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \text{ならば、} x = 0 \\ y = \frac{1}{2^n} \quad (n = 2, 3, \ldots) \text{ ならば、} x = 4y \\ \text{それ以外ならば、} x = y \end{cases}$$

というように、任意の y に関して、$f(x) = y$ となる x がただ一つ存在するので、f は全単射。

6.6

以下のように定義された写像 f は条件を満たす。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{x}{2}, & x = \frac{1}{2^n}(n = 0, 1, 2, \dots) \\ x, & x \neq 0, \frac{1}{2^n}(n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

7 濃度の大小

7.1

1. 恒等写像 $1_A : A \to A$ は全単射である。
2. $A \sim B$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ が存在する。ここで、f の逆写像 f^{-1} も全単射である。よって、$B \sim A$。
3. $A \sim B$ かつ $B \sim C$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ と、$g : B \to C$ が存在する。ここで、$g \circ f : A \to C$ も全単射である。よって、$A \sim C$。

7.2

$F(A \times B, C)$ の元である写像 $f : A \times B \to C$ が与えられた時、$F(A, F(B, C))$ の元である写像 $g : A \to F(B, C)$ を以下のように定義することで対応させるとする。

$$(g(a))(b) = f(a, b)$$

このとき、任意の $g : A \to F(B, C)$ に対して、対応する $f : A \times B \to C$ がただ一つ存在する。実際、任意の g に対して、$f(a, b) = (g(a))(b)$ という $f : A \times B \to C$ がただ一つ存在する。よって、$F(A \times B, C)$ の元と $F(A, F(B, C))$ の元が一対一に対応付けできた。以上より、$F(A \times B, C) \sim F(A, F(B, C))$ が示された。

7.3

1. $A \sim A'$ かつ $B \sim B'$ と仮定すると、全単射の写像 $f_1 : A \to A'$ と $f_2 : B \to B'$ が存在する。今 $g : A \times B \to A' \times B'$ を $g(a, b) = (f_1(a), f_2(b))$ として定義すれば、これは全単射の写像である。
また、$h_1 \in F(A, B)$ に対して、$h_2(a') = f_2(h_1(f_1^{-1}(a')))$ として定義された $h_2 \in F(A', B')$ を対応づけるとする。このとき、任意の $h_2 \in F(A', B')$ に対して、$h_1 \in F(A, B)$ がただ一つ存在する。実際、任意の h_2 に対して、$h_1(a) = f_2^{-1}(h_2(f_1(a)))$ という $h_1 \in F(A', B')$ がただ一つ存在している。以上より、$F(A, B) \sim F(A', B')$ が示された。
2. $A \sim B$ と仮定すると、全単射の写像 $f : A \to B$ が存在する。今、$g : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(B)$ を、

$$g(A') = \{b \in B | a \in A' \text{かつ } b = f(a)\}$$

と定義する（ここで $A' \subset A$)。このとき、g は全単射である。実際、逆写像 g^{-1} が以下のように定義できる。

$$g^{-1}(B') = \{a \in A | b \in B' \text{かつ } b = f(a)\}$$

7.4

1. 関数 $f(n)$ は自然数から偶数への全単射の写像。よって、偶数全体の集合は可算集合。

$$f(n) = \begin{cases} -n+1 & (n \text{ は奇数}) \\ n & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

2. 関数 $f(n)$ は自然数から奇数への全単射の写像。よって、奇数全体の集合は可算集合。

$$f(n) = \begin{cases} n & (n \text{ は奇数}) \\ -n+1 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

3. 関数 $f(n)$ は自然数から整数への全単射の写像。よって、整数全体の集合は可算集合。

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n+1}{2} & (n \text{ は奇数}) \\ \frac{n}{2} & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

4. 以下のように、直積を並べ、順番に $1, 2, \ldots$ と番号を振る。
   $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1), (0,-1), (1,-1), (2,-1), (2,0), (2,1), (2,2), (1,2), (0,2), \ldots$
   この規則性を図に表すと、図 1 のようになる。このとき、それぞれの点の番号と点の位置の関係は、自然数全体の集合から $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ への全単射の写像になっている。

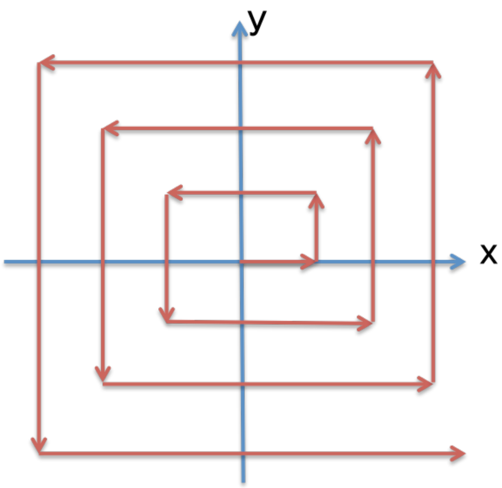

図 1

5. 4 と同様に、直積を順番に考え、今度は (x, y) の代わりに $\frac{x}{y}$ として並べる。つまり

$$\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{0}, \frac{-1}{-1}, \frac{0}{-1}, \frac{1}{-1}, \frac{2}{-1}, \frac{2}{0}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{-2}{0}, \frac{-2}{-1}, \frac{-2}{-2}, \frac{-1}{-2}, \frac{0}{-2}, \ldots$$

   ここで、
   (a) 分母が 0 になっているものを削除。
   (b) 約分すると同じ値になるものは、後に出現しているものを削除。
   という操作をして、並べ直すと、

$$\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{-1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \ldots$$

ここで、それぞれの分数の現れる順番と分数の値の関係は、自然数の集合から有理数全体の集合への全単射の写像になっている。よって、有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合。

6. ある集合 A が可算集合とする。このとき、A の無限部分集合 $X(X \subset A)$ について考える。A は可算集合なので、自然数から A への全単射の写像 $f : \mathbb{N} \to A$ が存在する。ここで、A の集合を以下のように並べる。
$$f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$$
さらに、この順番を保ちながら、X に含まれていない要素を取り除き、順番に番号を振る。この番号とそれぞれの要素の対応は、自然数の集合から X への全単射になっている。

7.5

$f : A \to \mathfrak{P}(A)$ が全射とする。
$$X = \{b \in A | b \notin f(b)\} \tag{7.5.1}$$
とすると、$X \in \mathfrak{P}(A)$ かつ f が全射なので、$f(x) = X$ となる $x \in A$ が存在する。
もし、$x \in X$ と仮定すると、x は (7.5.1) の条件を満たすはずなので、$x \notin X$ となり、矛盾。
もし、$x \notin X$ と仮定すると、x は (7.5.1) の条件を満たさないはずなので、$x \in f(x)$ となり、矛盾。
いずれにしても矛盾するので、f は全射ではないことが示された。

7.6

$\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ を次のような三つの部分集合族 P_1, P_2, P_3 に分割する。$\mathbb{N}$ の有限部分集合の全体を P_1、$\mathbb{N}$ の部分集合で補集合が有限集合であるものの全体を P_2、それ以外の $\mathbb{N}$ の部分集合の全体を P_3 とする。P_1, P_2および $P_1 \cup P_2$ は加算集合である。実際、$f_1 : \mathbb{N} \to P_1$ を以下のように定義する。
$$\begin{aligned}
&f_1(1) = \emptyset \\
&f_1(2) = \{1\} \\
&f_1(3) = \{2\} \\
&f_1(4) = \{1, 2\} \\
&f_1(5) = \{3\} \\
&f_1(6) = \{1, 3\} \\
&f_1(7) = \{2, 3\} \\
&f_1(8) = \{1, 2, 3\} \\
&f_1(9) = \{4\} \\
&\quad \cdots
\end{aligned}$$
このとき、f_1 は全単射になる。
また、$f_2 : \mathbb{N} \to P_2$ を $f_2(n) = \mathbb{N} - f_1(n)$ と定義すれば、これは全単射になる。
さらに $g : \mathbb{N} \to P_1 \cup P_2$ を
$$g(n) = \begin{cases} f_1(\frac{n}{2}) & (n \text{ が偶数}) \\ f_2(\frac{n+1}{2}) & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$
と定義すれば、これは全単射になる。
$P_1 \cup P_2 \sim \mathbb{N}$ かつ、$P_2 \sim \mathbb{N}$ なので、$P_1 \cup P_2 \sim P_2$。$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ なので、結局、$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \sim P_2 \cup P_3$。
また、$I = (0, 1]$ とすると、$\mathbb{R} \sim I$ であることが 6 章の議論でわかるので、以下では、$P_2 \cup P_3 \sim I$ を証明する。

今、$x \in (0,1]$ を $x = 0.11010100\ldots$ のように 2 進数で表示することにする。ただし、$x = 0.1$ は $x = 0.0\dot{1}$ のように、必ず無限小数で表すことにする[*2]。
$h : (0,1] \to P_2 \cup P_3$ を以下のように定義する。

$$h(x) = \{n \in \mathbb{N} | x \text{ を 2 進数表示したときの小数第 } n \text{ 位が 1 となる }\}$$

h は全単射となるので、$P_2 \cup P_3 \sim I$ が示された[*3]。結局、$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$ が示された。

7.7

1.
$$f : \mathbb{Z} \times (0,1] \to \mathbb{R}$$
を
$$f(x,y) = x + y$$
と定義すれば、f は全単射である。よって、$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{Z} \times (0,1] \sim \mathbb{R}$。
2. $\mathfrak{P}(A) \sim F(A, \{0,1\})$ である。実際、任意の $X \in \mathfrak{P}(A)$ に対して、
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & (x \in X) \\ 0 & (x \notin X) \end{cases}$$
と定義される $f_X \in F(A, \{0,1\})$ を対応させればこれは全単射になる。よって、$\mathfrak{P}(A) \sim F(A, \{0,1\})$ がわかる。
また、問 7.2 により、$F(A \times B, C) \sim F(A, F(B,C))$ である。以上より、
$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\sim F(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{N})) \\ &\sim F(\mathbb{R}, F(\mathbb{N}, \{0,1\})) \\ &\sim F(\mathbb{R} \times \mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\sim F(\mathbb{R}, \{0,1\}) \\ &\sim \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

7.8

実数値連続関数 f_1, f_2 が任意の $x \in \mathbb{Q}$ で $f_1(x) = f_2(x)$ ならば、f_1 と f_2 は同一である。よって、実数値連続関数全体の集合と $F(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ は濃度が等しい。
問 7.4 より、$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ かつ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ なので、$\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ である。

$$\begin{aligned} F(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) &\sim F(\mathbb{Q}, \mathfrak{P}(\mathbb{N})) \\ &\sim F(\mathbb{Q}, F(\mathbb{N}, \{0,1\})) \\ &\sim F(\mathbb{Q} \times \mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\sim F(\mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\sim \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \\ &\sim \mathbb{R} \end{aligned}$$

[*2] 任意の $x \in (0,1]$ が、この無限小数の形式で一意に表現できることは、証明すべきことだと思う。ここでは省略する。
[*3] $h(x)$ が無限集合なので、$P_1 \cup P_2 \cup P_3$ でなく、$P_2 \cup P_3$ を考える必要があった。

7.9

整数係数の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

に対して、

$$H(f) = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

とおく。$H(f)$ は 2 以上の自然数である。今、自然数 $h \geq 2$ に対して、整数係数の多項式の集合 F_h を

$$F_h = \{f | H(f) = h\}$$

と定義する。F_h は有限集合である。また、n 次多項式の根は高々 n 個なので、F_h に属する多項式の根となるような複素数の集合も有限集合である。つまり、$h \geq 2$ に対して、F_h に属する多項式の根を一列に並べることができる[*4]。以上の議論より、任意の代数的数に対して、自然数 $n \in \mathbb{N}$ を対応させる全単射の写像を作ることができることがわかる。よって、代数的数全体の集合は可算集合である。

7.10

z を整数係数の多項式 $f(x)$ の根とする。よって、

$$f(z) = 0$$

p を自然数とすれば

$$f(px) = a_0 + a_1px + a_2p^2x^2 + \cdots + a_np^nx^n$$

は整数係数の多項式になり、$\frac{z}{p}$ は $f(px)$ の根である。したがって、α をある超越数とすれば、全ての自然数 p に対して $p\alpha$ も超越数であることがわかる[*5]。代数的数であるような実数の全体は可算集合であり、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は非可算であるから、超越数の存在がわかる。その一つを α とする。$\mathbb{R}$ を次のような三つの部分集合 A_1, A_2, A_3 に分割する。代数的数であるような実数の全体を A_1 とする。

$$A_2 = \{p\alpha | p \in \mathbb{N}\}$$

とする。A_1, A_2 に属さない実数の全体を A_3 とする。
$A_2 \cup A_3$ は超越数全体の集合である。A_1 は問 7.9 で証明したように加算集合である。

$$g_1(n) = \alpha n$$

という関数 $g_1 : \mathbb{N} \to A_2$ が全単射になるので、A_2 は加算集合である。$g_2 : \mathbb{N} \to A_1$ を全単射の写像とすると、

$$h(n) = \begin{cases} g_1(\frac{n+1}{2}) & (n \text{ が奇数}) \\ g_2(\frac{n}{2}) & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

という写像 $h : \mathbb{N} \to A_1 \cup A_2$ が全単射になるので、$A_1 \cup A_2$ も可算集合である。特に、$A_1 \cup A_2 \sim A_2$ となる。
よって、$\mathbb{R} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \sim A_2 \cup A_3$。

[*4] たとえば、複素数の実部で昇順に並べて、そのあと虚部で昇順に並べるなどの方法が考えられる

[*5] $p\alpha$ が超越数でない、つまり代数的数であると仮定すると、α も代数的数であることになってしまい矛盾。

8　二項関係

8.1

1. $G(\rho_1) = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ について
   (a) 反射律　満たさない
   $x = -1$ のとき、$x\rho_1 x$ を満たさない。
   (b) 対称律　満たす
   $x \geq 0, y \geq 0$ ならば、$y \geq 0, x \geq 0$ である。
   (c) 推移律　満たす
   $x \geq 0, y \geq 0$ かつ $y \geq 0, z \geq 0$ ならば $x \geq 0, z \geq 0$ である。
   (d) 反対称律　満たさない
   $x = 1, y = 2$ のとき、$x \geq 0, y \geq 0$ かつ $y \geq 0, x \geq 0$ だが、$x \neq y$。
2. $G(\rho_2) = \{(x, y) | x \leq y\}$ について
   (a) 反射律　満たす
   $x \leq x$ である。
   (b) 対称律　満たさない
   $x = 1, y = 2$ のとき、$x \leq y$ だが、$y \leq x$ でない。
   (c) 推移律　満たす
   $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば、$x \leq z$。
   (d) 反対称律　満たす
   $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$ である。
3. $G(\rho_3) = \{(x, y) | (x - y)(x + y - 1) = 0\}$ について
   $f(x, y) = (x - y)(x + y - 1)$ とおく。
   (a) 反射律　満たす
   $x - x = 0$ なので $f(x, x) = 0$ である。
   (b) 対称律　満たす
   $f(x, y) = 0$ のとき、$f(y, x) = (y - x)(y + x - 1) = -f(x, y) = 0$。
   (c) 推移律　満たす
   $f(x, y) = 0$ と $f(y, z) = 0$ を仮定する。
      i. $x - y = 0, y - z = 0$ のとき
      $x - z = 0$ となるので、$f(x, z) = 0$。
      ii. $x - y = 0, y + z - 1 = 0$ のとき
      $x + z - 1 = 0$ となるので、$f(x, z) = 0$。
      iii. $x + y - 1 = 0, y - z = 0$ のとき
      $x + z - 1 = 0$ とのあるので、$f(x, z) = 0$。
      iv. $x + y - 1 = 0, y + z - 1 = 0$ のとき
      $x - z = 0$ となるので、$f(x, z) = 0$。
   (d) 反対称律　満たさない
   $x = 0.7, y = 0.3$ のとき、$f(x, y) = 0$ かつ $f(y, x) = 0$ だが、$x \neq y$。
4. $G(\rho_4) = \{(x, y) | (x - y)(x - y + 1)(x - y - 1) = 0\}$ について
   $g(x, y) = (x - y)(x - y + 1)(x - y - 1)$ とおく。

(a) 反射律　満たす

$x - x = 0$ なので $g(x, x) = 0$。

(b) 対称律　満たす

$g(x, y) = 0$ のとき、$g(y, x) = (y - x)\{(y - x)^2 - 1\} = -g(x, y) = 0$。

(c) 推移律　満たさない

$x = 2, y = 1, z = 0$ のとき、$g(x, y) = 0$ かつ $g(y, z) = 0$ だが、$g(x, z) \neq 0$。

(d) 反対称律　満たさない

$x = 2, y = 1$ のとき、$g(x, y) = 0$ かつ $g(y, x) = 0$ だが、$x \neq y$。

8.2

定義より、$A\rho B \iff (A - B) \cup (B - A)$ が有限集合。

1. 反射律
   $A - A = \emptyset$ なので、$A\rho A$。
2. 対称律
   $(A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B)$ なので、$A\rho B$ ならば $B\rho A$。
3. 推移律
   $(A - B) \cup (B - A) = X, (B - C) \cup (C - B) = Y$ が有限集合とする。

$$
\begin{aligned}
(A - C) \cup (C - A) &= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \notin A)\} \\
&= \{x | (x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } x \notin B \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } \\
&\qquad (x \in C \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \notin A) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \notin B \text{ かつ } x \notin A)\} \\
&\subset \{x | (x \in B \text{ かつ } x \notin C) \text{ または } (x \in A \text{ かつ } x \notin B) \text{ または } \\
&\qquad (x \in B \text{ かつ } x \notin A) \text{ または } (x \in C \text{ かつ } x \notin B)\} \\
&= \{x | x \in X \text{ または } x \in Y\} \\
&= X \cup Y
\end{aligned}
$$

よって、$(A - C) \cup (C - A)$ も有限集合

8.3

1. 反射律
$$\forall x \in X[f(x) = f(x)]$$
2. 対称律
$$\forall x, y \in X[f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x)]$$
3. 推移律
$$\forall x, y, z \in X[f(x) = f(y) \text{ かつ } f(y) = f(z) \Longrightarrow f(x) = f(z)]$$

よって、$G(\rho)$ は反射律、対称律、推移律を満たす。
今、$C(x) = \{a \in X | f(a) = f(x)\}$ なので、$\forall a \in C(x)[f(a) = f(x)]$。よって、$g(C(x)) = f(x)$ とすれば、関数 $g : X/\rho \to Y_1$ が一意に定義できる。
g は全射である。実際、$f(X) = \{f(x) \in Y | x \in X\} = Y_1$ だから、任意の $y \in Y_1$ に対して、$f(x) = y$ となる x が存在する。よって、任意の $y \in Y_1$ に対して、$g(C(x)) = y$ となる $C(x) \neq \emptyset$ が存在する。

g は単射である。実際、$g(A) = g(B) = f(x)$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$ となる。A と B が交わっているので、$A = B$。

8.4

図 2、図 3、図 4、図 5 がそれぞれ答え。

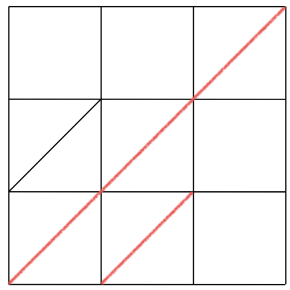

図 2　反射律と対称律を満足するもの

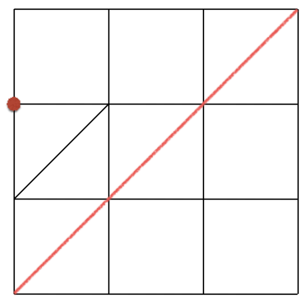

図 3　反射律と推移律を満足するもの

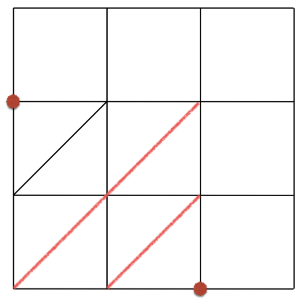

図 4　対称律と推移律を満足するもの

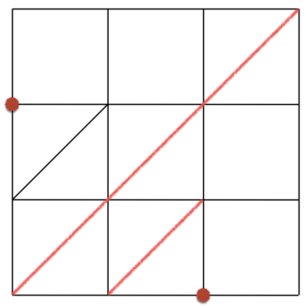

図 5　同値関係であるもの

8.5

$\mathfrak{P}(A)$ の任意の部分集合 $\mathfrak{U}$ に対して、

$$\inf \mathfrak{U} = \bigcap (E | E \in \mathfrak{U})$$

$$\sup \mathfrak{U} = \bigcup (E | E \in \mathfrak{U})$$

と定義すれば、確かに

$$\forall B \in \mathfrak{U} [\inf \mathfrak{U} \subset B]$$

$$\forall B \in \mathfrak{U} [B \subset \sup \mathfrak{U}]$$

が成り立つ。

8.6

5 元束と 6 元束については、巻末の解答を参照。7 元束は図 6 のように 53 種類考えられる[*6]。

[*6] 点の色に特別に意味はない。場合分けの際にわかりやすくするために色付けした。

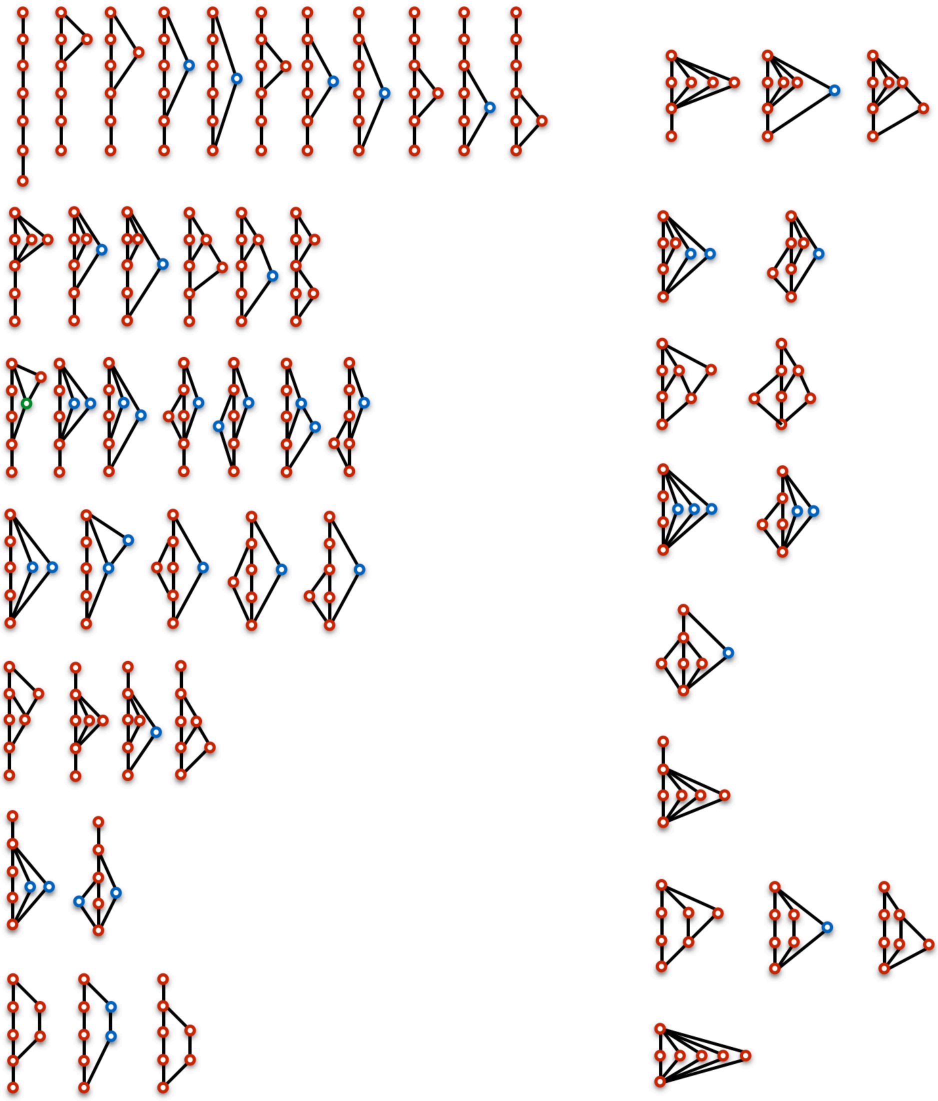

図 6　7 元束

8.7

$\mathfrak{U}=\{A\in X|A\subset\varphi(A)\}$ とする。$\emptyset\subset\varphi(\emptyset)$ なので、$\mathfrak{U}$ は空集合にはならない。$E_0=\bigcup(A|A\in\mathfrak{U})$ とおけば、$\forall A\in\mathfrak{U}[A\subset\varphi(A)\subset\varphi(E_0)]$ なので、$E_0\subset\varphi(E_0)$ である。$E_0\subsetneq\varphi(E_0)$ とすると、$\varphi(E_0)\in\mathfrak{U}$ であることに矛盾。よって、$E_0=\varphi(E_0)$ である。

第 III 部
整列集合と選択公理

9　整列集合

9.1

$$
\begin{aligned}
(X\langle a\rangle)\langle b\rangle &= \{x \in X\langle a\rangle | x < b\} \\
&= \{x \in X | x \in X\langle a\rangle \text{ かつ } x < b\} \\
&= \{x \in X | x < a \text{ かつ } x < b\} \\
&= \{x \in X | x < b\} \\
&= X\langle b\rangle
\end{aligned}
$$

ここで、$b < a$ という前提により、「$x < a$ かつ $x < b \Longleftrightarrow x < b$」という関係を用いた。実際、$x < b$ であって、$a \leq x$ と仮定すると、$a \leq b$ となり矛盾してしまう。

9.2

9.2.1　整列集合は、そのいかなる切片とも順序同型にならない

ある切片 $a \in X$ に対して、$(X, \leq) \simeq (X\langle a\rangle, \leq)$ が成り立つと仮定すると、順序を保つ全単射 $f : X \to X\langle a\rangle$ が存在することになる。f は単射なので、定理 9.1 により

$$\forall x \in X[x \leq f(x)]$$

が成り立つはずである。しかし、$f(a) \in X\langle a\rangle$ なので、$f(a) < a$ となってしまい矛盾。結局、$(X, \leq) \simeq (X\langle a\rangle, \leq)$ ではないことがわかる。

9.2.2　整列集合の相異なる二つの切片は互いに順序同型にならない

整列集合の部分集合は整列集合である。今、Y を整列集合とし、$a, b(a < b, a \in Y, b \in Y)$ に対して、

$$X = Y\langle b\rangle$$

とおくと、

$$
\begin{aligned}
X\langle a\rangle &= \{x \in X | x < a\} \\
&= \{x \in Y\langle b\rangle | x < a\} \\
&= \{x \in Y | x < a \text{ かつ } x < b\} \\
&= \{x \in Y | x < a\} \\
&= Y\langle a\rangle
\end{aligned}
$$

となり、$X\langle a\rangle = Y\langle a\rangle$ が成り立つ。すると、9.2.1 と同様に、$(Y\langle a\rangle, \leq) \simeq (Y\langle b\rangle, \leq)$ にはならないことが証明できる。

9.3

$(A, \leq)$ および $(B, \leq)$ を整列集合とし、$f : A \to B$ を順序同型写像とする。今、f は全単射なので、

$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$

が成り立つ[*7]。よって、任意の $a \in A$ に対して、

$$\begin{aligned} f(A\langle a\rangle) &= \{f(x) \in B | x \in A\langle a\rangle\} \\ &= \{f(x) \in B | x < a \text{ かつ } x \in A\} \\ &= \{f(x) \in B | f(x) < f(a) \text{ かつ } x \in A\} \\ &= \{y \in B | y < f(a)\} \\ &= B\langle f(a)\rangle \end{aligned}$$

9.4

以下では、$\varphi : X_1 \to Y_1$ が順序同型写像であることを証明するため、φ が全単射の写像であることと、φ が順序を保つ写像であることを証明する。定義より、X_1, Y_1 はそれぞれ、

$$X_1 = \{a \in X | \exists b \in Y [X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle]\}$$

$$Y_1 = \{b \in Y | \exists a \in X [X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle]\}$$

このとき、各元 $a \in X_1$ に対して、$X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle$ となる $b \in Y_1$ がただ一つ存在する。実際、$b_1, b_2 \in Y_1$ が $X\langle a\rangle \simeq Y\langle b_1\rangle$ かつ $X\langle a\rangle \simeq Y\langle b_2\rangle$ となると仮定すると、$Y\langle b_1\rangle \simeq Y\langle b_2\rangle$ であり、順序同型写像 $f : Y\langle b_1\rangle \to Y\langle b_2\rangle$ が存在する。$b_1 < b_2$ と仮定すると、順序を保つ単射 f に対して、$f(b_1) < b_2$ となり、定理 9.1 に矛盾する。$b_1 > b_2$ としてもやはり矛盾が生じるので、$b_1 = b_2$ になるはずである。結局、$X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle$ となる b がただ一つ存在することがわかった。さて、以上の議論を逆に b を中心に展開すると、任意の $b \in Y_1$ に対して、$X\langle a\rangle \simeq Y\langle b\rangle$ となる a がただ一つ存在することになる。よって、$b = \varphi(a)$ と定義される写像 φ は全単射である。

$a_1, a_2 \in X_1$ が $a_1 \leq a_2$ であると仮定する。$X\langle a_1\rangle \simeq Y\langle \varphi(a_1)\rangle$ の順序同型写像 ψ_1

$$\psi_1 : Y\langle \varphi(a_1)\rangle \to X\langle a_1\rangle$$

は順序を保つ全単射の写像である。また、$X\langle a_2\rangle \simeq Y\langle \varphi(a_2)\rangle$ の順序同型写像 ψ_2

$$\psi_2 : X\langle a_2\rangle \to Y\langle \varphi(a_2)\rangle$$

も順序を保つ全単射の写像である。よって、$\psi = \psi_2 \circ \psi_1$

$$\psi : Y\langle \varphi(a_1)\rangle \to Y\langle \varphi(a_2)\rangle$$

は順序を保つ単射の写像である[*8]ので、定理 9.1 より、$\varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$ である[*9]。結局

$$a_1 \leq a_2 \Longleftrightarrow \varphi(a_1) \leq \varphi(a_2)$$

となり、φ が順序を保つ写像であることが証明できた。

以上より、$\varphi : X_1 \to Y_1$ は順序同型写像である。

[*7] 左から右へは、f が順序を保ちかつ単射であることから証明できる。右から左へは、f が全射であることと、逆写像 f^{-1} が存在することから証明できる。

[*8] $X\langle a_1\rangle \subset X\langle a_2\rangle$ なので ψ は全射とは限らない。

[*9] $\varphi(a_1) > \varphi(a_2)$ と仮定すると、$\psi(\varphi(a_2)) < \varphi(a_2)$ となり、定理 9.1 に反する

9.5

(1) と (2) が同時に成り立つと仮定し、順序同型 $X \simeq Y, X \simeq Y\langle b\rangle$ が成り立つとする。すると、$Y \simeq Y\langle b\rangle$ が成り立つ。$Y \simeq Y\langle b\rangle$ の順序同型写像を $f : Y \to Y\langle b\rangle$ とすると、$f(b) < b$ となり、定理 9.1 に矛盾する。従って、(1) と (2) は同時には成り立たない。

(1) と (3) が同時に成り立たないことも同様に証明できる。

10 選択公理

10.1

f を集合 A の上の一つの選択関数とする。f は A の空でない部分集合の全体 $\mathfrak{U} = \mathfrak{P}(A) - \{\emptyset\}$ から、A への写像であり、$f(B) \in B \subset A$ である。$m < n$ と仮定すると

$$a_n = f(A - \{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_{n-1}\})$$

となり、$a_m \notin A - \{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_{n-1}\}$ なので、$a_m \neq a_n$。$n < m$ の場合も同様に証明できる。

10.2

W_∞ の一つの上界が W_∞ に含まれるならば、それは W_∞ の最大限になる。以下では、$w \in W_\infty$ であることを背理法で証明する。

$w \notin W_\infty$ と仮定し、

$$\Delta_\infty = \{x \in X | a \in W_\infty \text{ならば } a < x\}$$

とおく。$w \notin W_\infty$ であり、w が W_∞ の上界であることから $w \in \Delta_\infty$。よって $\Delta_\infty \neq \emptyset$ である。そこで、$z = f(\Delta_\infty)$ とおく。このとき、$W_* = W_\infty \cup \{z\}$ は整列集合である。$W_\infty = W_*\langle z\rangle$ であるから、$\Delta_\infty = \Delta(W_*, z)$ であり、W_* も f-列になる[*10]。

これは W_∞ が最大 f-列であることに矛盾する。したがって、$w \in W_\infty$ であることがわかった。よって、w は W_∞ の最大限である。

---

*10

1. $a \in W_\infty$ のとき、

$$\begin{aligned}\Delta(W_*, a) &= \{x \in X | b \in W_*\langle a\rangle \text{ ならば } b < x\}\\ &= \{x \in X | b \in W_\infty\langle a\rangle \text{ ならば } b < x\}\\ &= \Delta(W_\infty, a)\end{aligned}$$

なので、$f(\Delta(W_*, a)) = f(\Delta(W_\infty, a)) = f(a)$ である。

2. $a = z$ のとき、

$$\begin{aligned}\Delta(W_*, z) &= \{x \in X | b \in W_*\langle z\rangle \text{ ならば } b < x\}\\ &= \{x \in X | b \in W_\infty \text{ならば } b < x\}\\ &= \Delta_\infty\end{aligned}$$

なので、$f(\Delta(W_*, z)) = f(\Delta_\infty) = z$ である。

11　整列可能定理

11.1

11.1.1

$W = \bigcup(W_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ の 2 元 x, y に対して、

$$x \in W_\lambda, \quad y \in W_\lambda$$

となる元 $\lambda \in \Lambda$ が存在しないと仮定する。すると、ある $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対して

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$x \in W_{\lambda_1}, \quad x \notin W_{\lambda_2}, \quad y \in W_{\lambda_2}, \quad y \notin W_{\lambda_1}$$

が成り立つことになる。これは「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定に反する。

11.1.2

「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定により、ある $\lambda \in \Lambda$ に対して、$x, y \in W_\lambda$かつ $x \leq_\lambda y$ が成り立つならば、任意の $\lambda' \in \Lambda$ に対しても、

$$x, y \in W_{\lambda'} \Longrightarrow x \leq_{\lambda'} y$$

が成り立つ。

11.1.3

W の上の二項関係 $\leq$ は順序関係であることを証明する。

1. 反射律
   $\forall \lambda \in \Lambda[x \in W_\lambda \Longrightarrow x \leq_\lambda x]$ なので、$\forall x \in W[x \leq x]$ が成り立つ。
2. 推移律
   11.1.1 と同様の議論により、任意の 3 元 $x, y, z \in W$ に対して

   $$x \in W_\lambda, \quad y \in W_\lambda, \quad z \in W_\lambda$$

   となる元 $\lambda \in \Lambda$ が存在することがわかる。$\leq_\lambda$ が順序関係なので、

   $$x \leq_\lambda y \text{ かつ } y \leq_\lambda z \text{ ならば } x \leq_\lambda z$$

   が成り立つ。よって、$\leq$ も

   $$x \leq y \text{ かつ } y \leq z \text{ ならば } x \leq z$$

   が成り立つ。
3. 反対称律
   11.1.1 により、任意の 2 元 $x, y \in W$ に対して

   $$x \in W_\lambda, \quad y \in W_\lambda$$

となる元 $\lambda \in \Lambda$ が存在する。$\leq_\lambda$ が順序関係なので、

$$x \leq_\lambda y \text{ かつ } y \leq_\lambda x \text{ ならば } x = y$$

が成り立つ。よって、$\leq$ も

$$x \leq y \text{ かつ } y \leq x \text{ ならば } x = y$$

が成り立つ。

以上より、W の上の二項関係 $\leq$ は順序関係であることがわかった。

W は整列集合になることを証明する。
W の空でない部分集合を U とする。U の元 x に対して、$x \in W_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。W_λ は整列集合なので、$W_\lambda \cap U$ には最小値 $y = \min(W_\lambda \cap U)$ が存在する。この y は U の最小値でもある。実際、もしも $z < y$ となる $z \in U$ が存在すると仮定すると、$z < y$ にも関わらず、$z \notin W_\lambda$ かつ $y \in W_\lambda$ となってしまう。$z \in W$ なので、$z \in W_{\lambda'}$ という $\lambda' \in \Lambda$ が存在するはずだが、これは「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定に矛盾する。結局、$y = \min(W_\lambda \cap U)$ は U の最小値でもある。半順序集合 $(W, \leq)$ の任意の部分集合 U に対して最小値が存在するので、W は整列集合である。

11.1.4

11.1.2 により、$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して、

$$x \leq_\lambda y \Longrightarrow x \leq y$$

が成り立つ。また、定義より $\forall\lambda \in \Lambda[W_\lambda \subset W]$ が成り立つ。よって、「各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、$(W_\lambda, \leq_\lambda)$ は $(W, \leq)$ に一致するかまたは $(W, \leq)$ の切片になる」ということを証明するためには、

$$\forall x \in W - W_\lambda[\forall y \in W_\lambda[y < x]]$$

が成り立つことを証明すればよい。ある $x \in W - W_\lambda$ に対して、$x \leq y$ となる $y \in W_\lambda$ が存在すると仮定すると、$x \leq y$ にも関わらず、$x \notin W_\lambda$ かつ $y \in W_\lambda$ となってしまい、「Λ の異なる 2 元 α, β に対しては、常に $(W_\alpha, \leq_\alpha), (W_\beta, \leq_\beta)$ の中のいずれか一方は他方の切片になっている」という仮定に矛盾する。以上より、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、$(W_\lambda, \leq_\lambda)$ は $(W, \leq)$ に一致するかまたは $(W, \leq)$ の切片になっている。

11.2

11.2.1　**例** 11.1

A の部分集合 W と単射の関数 $f : W \to B$ の組 (W, f) 全体の集合を $\mathfrak{U}$ とおく。$\mathfrak{U}$ は空ではない。実際、A の一つの元 a だけからなる集合 $W = \{a\}$ から B への写像 $f : \{a\} \to B$ は単射である。$\mathfrak{U}$ の元 $(W, f), (W', f')$ に対して、$(W, f) \leq (W', f')$ を以下のように定義する。

$$W \subset W' \text{かつ } \forall x \in W[f(x) = f'(x)]$$

このとき、$(\mathfrak{U}, \leq)$ は帰納的半順序集合になる。実際、半順序集合になることは反射律、推移律、反対称律を確かめることでわかる。また、全順序部分集合 $\mathfrak{W}$ に対して、

$$X = \bigcup_{(W, f_W) \in \mathfrak{W}} W$$

と X を定義する。さらに、$f_X : X \to B$ を、$x \in W$ となる $(W, f_W) \in \mathfrak{W}$ が存在するときに $f_X(x) = f_W(x)$ と定義する。$\mathfrak{W}$ が全順序集合であることから、f_X は一意に定義されている。このとき、(X, f_X) は $\mathfrak{W}$ の上界になる。実際、任意の $(W, f_W) \in \mathfrak{W}$ に対して、$W \subset X$ と、$\forall x \in W[f_W(x) = f_X(x)]$ が成り立つので、任意の $(W, f_W) \in \mathfrak{W}$ に対して $(W, f_W) \leq (X, f_X)$ が成り立つ。結局、(X, f_X) は $\mathfrak{W}$ の上界である。
ツォルンの補題により帰納的半順序集合は極大元を持つので、$(W, f) \in \mathfrak{U}$ を一つの極大元とすれば、$W = A$ または $f(W) = B$ のいずれかが成り立つ。$W = A$ のときは A から B への単射が存在し、$f(W) = B$ のときは B から A への単射が存在する。

11.2.2　例 11.2

$\mathbb{R}$ の部分集合 B は、B に属する有限個の実数が常に $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるとき、$\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合という。$\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合の全体を $\mathfrak{B}$ とする。$\mathfrak{B}$ は空でない。実際、たとえば $\{1\}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合である。$X, Y \in \mathfrak{B}$ に対して、$X \leq Y$ を以下のように定義する。

$$X \leq Y \Longleftrightarrow X \subset Y$$

このとき、$(\mathfrak{B}, \leq)$ は帰納的半順序集合になる。実際、全順序部分集合 $\mathfrak{A}$ に対して、

$$U = \bigcup_{X \in \mathfrak{A}} X$$

とおけば、$U \in \mathfrak{B}$ であり[*11]、任意の $X \in \mathfrak{A}$ に対して、$X \subset U$、つまり $X \leq U$ が成り立ち、U は上界になっている。よって、任意の全順序部分集合に対して上界が存在するので、$(\mathfrak{B}, \leq)$ は帰納的半順序集合になっている。B を $\mathfrak{B}$ の一つの極大元とする。すなわち B は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な極大集合である。このとき、任意の実数は B に属する有限個の実数の $\mathbb{Q}$ 上一次結合になる[*12]。よって、B は一つのハメル基である。

第 IV 部
距離空間

12　ユークリッド空間

12.1

12.1.1　$(M^i)^i = M^i$ の証明

定義より $a \in M^i$ とは

$$\exists \epsilon > 0[B_n(a; \epsilon) \subset M]$$

のことであり、$a \in (M^i)^i$ とは

$$\exists \epsilon > 0[B_n(a; \epsilon) \subset M^i]$$

のことである。$(M^i)^i \subset M^i$ は定義より成り立つ。以下では、$M^i \subset (M^i)^i$ を示す。
$x \in M^i$ と仮定すると、$B_n(x; \epsilon) \subset M$ が成り立つような、$\epsilon > 0$ が存在する。点 $y \in B_n(x; \epsilon)$ に対して、

[*11] $\mathfrak{A}$ は全順序部分集合なので、任意の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_r \in U$ に対して、ある $X \in \mathfrak{A}$ が存在し、$x_1, x_2, \ldots, x_r \in X$ となるはずである。X は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合なので、$x_1, x_2, \ldots, x_r$ は一次独立であり、$U \in \mathfrak{B}$ であることがわかる。
[*12] ある実数 x が B に属する有限個の実数の $\mathbb{Q}$ 上一次結合にならなければ、$B \cup \{X\}$ も $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合のはずである。これは B が $\mathbb{Q}$ 上一次独立な極大集合であることに矛盾してしまう。

$\delta = \epsilon - d^{(n)}(x,y)$ とおくと、$\delta > 0$。今、点 $z \in B_n(y;\delta)$ について

$$\begin{aligned} d^{(n)}(x,z) &\leq d^{(n)}(x,y) + d^{(n)}(y,z) \\ &< d^{(n)}(x,y) + \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

これより、$z \in B_n(x;\epsilon)$ であり、$z \in M$ が示せた。

$$\exists \delta > 0 [B_n(y,\delta) \subset M]$$

なので、$y \in M^i$ であり、

$$\exists \epsilon > 0 [B_n(x;\epsilon) \subset M^i]$$

なので、$x \in (M^i)^i$ である。

12.1.2 $(M^a)^a = M^a$ の証明

$M^a \subset (M^a)^a$ は定義から成り立つ。よって、以下では $(M^a)^a \subset M^a$ を示す。
$x \in (M^a)^a$ を仮定すると、任意の $\epsilon > 0$ について、

$$B_n(x;\epsilon) \cap M^a \neq \emptyset$$

が成り立つ。これを書き換えて、

$$B_n(x;\epsilon) \cap (M^i \cup M^f) \neq \emptyset$$

つまり、

$$B_n(x;\epsilon) \cap M^i \neq \emptyset \quad \text{または} \quad B_n(x;\epsilon) \cap M^f \neq \emptyset$$

が成り立つ。以下ではこれら 2 つの場合で分けて考える。

1. $B_n(x;\epsilon) \cap M^i \neq \emptyset$ が成り立つとき
   $B_n(x;\epsilon) \cap M \neq \emptyset$ が成り立つ。
2. $B_n(x;\epsilon) \cap M^f \neq \emptyset$ が成り立つとき
   ある点 $y \in (B_n(x;\epsilon) \cap M^f)$ が存在する。$y \in M^f$ なので、任意の $\delta > 0$ について, $B_n(y;\delta) \cap M \neq \emptyset$ である。ここで、$\delta = \epsilon - d^{(n)}(x,y)$ とおくと、$\delta > 0$ である。点 $z \in B_n(y;\delta)$ について

$$\begin{aligned} d^{(n)}(x,z) &\leq d^{(n)}(x,y) + d^{(n)}(y,z) \\ &< d(x,y) + \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

   となるので、$B_n(y;\delta) \subset B_n(x;\epsilon)$。よって、$B_n(x;\epsilon) \cap M \neq \emptyset$ が示せた。

いずれの場合でも、 $B_n(x;\epsilon) \cap M \neq \emptyset$ が成り立つので、$x \in M^a$ が成り立つ。

12.2

12.2.1

$M = (a_1,b_1) \times (a_2,b_2) \times ... \times (a_n,b_n)$ とおく。また、ある $x = (x_1,..,x_n) \in M$ に対して、

$$l = \min(b_1 - x_1, x_1 - a_1, b_2 - x_2, x_2 - a_2, ..., b_n - x_n, x_n - a_n)$$

とおく。このとき、$l > 0$ である。
今、$y = (y_1, ..., y_n) \in B_n(x; l)$ とする。$d^{(n)}(x, y) < l$ だから、各 $i = 1, 2, ..., n$ について、

$$x_i - (a_i - x_i) \leq x_i - l < y_i < x_i + l \leq x_i + (b_i - x_i)$$

つまり、

$$a_i < y_i < b_i$$

が成り立つ。以上より、$y \in M$。
$\forall x \in M[\exists l > 0[B_n(x; l) \subset M]]$ なので、M は開集合である。

12.2.2

$M = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ とおく。$M = \bar{M}$ を示すためには、$\bar{M} \subset M$ を示せば十分。そのために、$x \notin M$ を仮定して、$x \notin \bar{M}$ を導く。
$x \notin M$ と仮定する。すると少なくとも一つの $i(= 1, .., n)$ で $x_i < a_i$ または $b_i < x_i$ が成り立つ。

1. $x_i < a_i$ の場合
   $y = (y_1, ..., y_n) \in B_n(x; a_i - x_i)$ とすると、

   $$y_i < x_i + (a_i - x_i) = a_i$$

   となり、$y \notin M$。よって、$a_i - x_i > 0$ に対して、$B_n(x; a_i - x_i) \cap M = \emptyset$ となるので、$x \notin \bar{M}$
2. $b_i < x_i$ の場合
   $z = (z_1, ..., z_n) \in B_n(x; x_i - b_i)$ とすると、

   $$x_i - (x_i - b_i) < z_i$$

   となり、$b_i < z_i$。よって、$z \notin M$。$x_i - b_i > 0$ に対して $B_n(x; x_i - b_i) \cap M = \emptyset$ となるので、$x \notin \bar{M}$

以上より、$x \notin M$ を仮定して、$x \notin \bar{M}$ を示せた。よって、$\bar{M} \subset M$。

12.3

12.3.1

$\mathbb{R}^n \in \mathfrak{U}$ である。実際、$(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ なので、$(\mathbb{R}^n)^f = (\mathbb{R}^n)^e = \emptyset$ である。よって、$(\mathbb{R}^n)^a = \mathbb{R}^n$。
また、$\emptyset \in \mathfrak{U}$ である。実際、$\emptyset^i = \emptyset$ であり、 $\emptyset^f = \emptyset$ である。よって、$\emptyset^a = \emptyset$

12.3.2

$A_1, ..., A_k \in \mathfrak{U}$ とし、$A = A_1 \cup ... \cup A_k$ とする。
$x \in A^a$ とすれば、

$$\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap A \neq \emptyset]$$

つまり、

$$\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \neq \emptyset]$$

このとき、

$$\forall \epsilon > 0[B_n(x; \epsilon) \cap A_j \neq \emptyset]$$

となる $j(1 \leq j \leq k)$ が存在する。なぜなら、そのような j が存在しないとすると、ある $m(1 \leq m \leq k)$、$\epsilon_0 < \epsilon_1$ に対して、

$$B_n(x; \epsilon_0) \cap A_m \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad B_n(x; \epsilon_1) \cap A_m = \emptyset$$

となることになってしまい、これは不合理。
これより、x は A_j の触点であり、$A_j \in \mathfrak{U}$ だから、$x \in A_j$ である。よって、$x \in A$。以上より $A^a \subset A$ なので $A \in \mathfrak{U}$。

12.3.3

$$\forall\epsilon > 0[B_n(x;\epsilon) \cap (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \neq \emptyset]$$

これを書き換えて、

$$\forall\epsilon > 0[\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B_n(x;\epsilon) \cap A_\lambda) \neq \emptyset]$$

これから以下のことが言える ($\Longrightarrow$)

$$\forall\epsilon > 0[\forall\lambda \in \Lambda[B_n(x;\epsilon) \cap A_\lambda \neq \emptyset]]$$

よって、

$$\forall\lambda \in \Lambda[\forall\epsilon > 0[B_n(x;\epsilon) \cap A_\lambda \neq \emptyset]]$$

任意の $\lambda \in \Lambda$ について、$A_\lambda \in \mathfrak{U}$ なので、

$$\forall\lambda \in \lambda[x \in A_\lambda]$$

よって、$x \in A$ だから、$A^a \subset A$。以上より、$A \in \mathfrak{U}$。

12.4

12.4.1

　M に包まれる開集合 N で、$N - M^i \neq \emptyset$ となるものが存在すると仮定する。$x \in N - M^i$ とすると N は開集合なので、x は N の内点であり、

$$\exists\epsilon > 0[B_n(x;\epsilon) \subset N]$$

となる。$N \subset M$ なので、

$$\exists\epsilon > 0[B_n(x;\epsilon) \subset M]$$

のはずだが、これは x が M の内点となることを意味し、$x \notin M^i$ に矛盾する。以上より、M^i は M に包まれる最大の開集合である。

12.4.2

　M を包む閉集合 N で、$\bar{M} - N \neq \emptyset$ となるものが存在すると仮定する。$x \in \bar{M} - N$ とすると $N = \bar{N}$ なので、$x \notin \bar{N}$ つまり、x は N の外点であり、

$$\exists\epsilon > 0[B_n(x;\epsilon) \cap N = \emptyset]$$

である。ここで、$M \subset N$ であるので、

$$\exists\epsilon > 0[B_n(x;\epsilon) \cap M = \emptyset]$$

x は M の外点でもあることになってしまい、$x \in \bar{M}$ に矛盾する。以上より、$\bar{M}$ は M を包む最小の閉集合である。

13 距離空間

13.1

$[D_1]$ $|f(x)-g(x)| \geq 0$ なので、任意の $f, g \in B[a,b]$ について、$d(f,g) \geq 0$。$f = g$ ならば、$d(f,g) = \sup\{0\} = 0$。逆に、$d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} = 0$ ならば、$\forall x(a \leq x \leq b)[f(x) = g(x)]$ となるので、$f = g$ である。

$[D_2]$ 任意の $f, g \in B[a,b]$ について、

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup\{|f(x)-g(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} \\ &= \sup\{|g(x)-f(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} \\ &= d(g,f) \end{aligned}$$

$[D_3]$ 任意の $f, g, h \in B[a,b]$ について、

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sup\{|f(x)-h(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} \\ &= \sup\{|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} \\ &\leq \sup\{|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} \\ &\leq \sup\{|f(x)-g(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} + \sup\{|g(x)-h(x)|,\ \ a \leq x \leq b\} \\ &= d(f,g) + d(g,h) \end{aligned}$$

以上より

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$$

13.2

任意の $x, y \in l^2$ に対して、

$$\begin{aligned} \{d_\infty(x,y)\}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 - 2x_ny_n + y_n^2) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 + 2\max(x_n^2, y_n^2) + y_n^2) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 + 2(x_n^2 + y_n^2) + y_n^2) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(3x_n^2 + 3y_n^2) < \infty \end{aligned}$$

よって、$d_\infty(x,y) < \infty$。

$[D_1]$ 任意の $x, y \in l^2$ に対して、$d_\infty(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} \geq 0$ である。$d_\infty(x,y) = 0$ と仮定すると、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、$x_n = y_n$ となるので、$x = y$。逆に、$x = y$ と仮定すると、$d_\infty(x,y) = 0$ であることが定義からわかる。

$[D_2]$ 任意の $x, y \in l^2$ に対して、

$$d_\infty(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - x_n)^2} = d_\infty(y,x)$$

$[D_3]$ 任意の $x, y, z \in l^2$ に対して、

$$\begin{aligned}
\{d_\infty(x,z)\}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - z_n)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n + y_n - z_n)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\{(x_n - y_n)^2 + (y_n - z_n)^2 + 2(x_n - y_n)(y_n - z_n)\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n - z_n)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)(y_n - z_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n - z_n)^2 + 2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - z_n)^2} \\
&= (\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2})^2 \\
&= \{d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)\}^2
\end{aligned}$$

ただし、上記の式変形の不等号の部分で、シュワルツの不等式を用いた。無限次元の場合もシュワルツの不等式が成り立つことを証明する。任意の実数列 $a = (a_n | n \in \mathbb{N}),\ b = (b_n | n \in \mathbb{N})$ に対して、

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2)(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2) - (\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i)^2 &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

以上より、$d_\infty(x,z) \leq d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$ が成り立つ。

13.3

$A = N(a;\epsilon)$ について、

$$\begin{aligned}
A^i &= \{x \in X \mid d(a,x) < \epsilon\} \equiv A \\
A^e &= \{x \in X \mid d(a,x) > \epsilon\} \\
A^f &= \{x \in X \mid d(a,x) = \epsilon\}
\end{aligned}$$

が成り立っていることを証明する。

13.3.1 $A^i = \{x \in X \mid d(a,x) < \epsilon\}$ の証明

X の点 b' について、$d(a,b') < \epsilon$ ならば $b' \in A^i$ となることを示す。
X の点 b' について、$d(a,b') < \epsilon$ が成り立つと仮定する。$\delta = \epsilon - d(a,b')$ は正の実数である。点 b' の近傍

$N(b';\delta)$ に属する点 x について、

$$d(a,x) \leq d(a,b') + d(b',x) < d(a,b') + \delta = \epsilon$$

よって、$N(b';\delta) \subset N(a;\epsilon) = A$ となるので、$b' \in A^i$。したがって、$A \subset A^i$ となる。一方、X の任意の部分集合 A に対して $A^i \subset A$ が成り立っているので、$A = N(a;\epsilon)$ に対して $A = A^i$ となる。

13.3.2 $\{x \in X \mid d(a,x) > \epsilon\} \subset A^e$ の証明

X の点 b'' について、$d(a,b'') > \epsilon$ が成り立っていると仮定する。$\delta = d(a,b'') - \epsilon$ とおけば、δ は正の実数である。$N(b'',\delta)$ に属する任意の点 x に対して、

$$\begin{aligned} d(a,x) &\geq d(a,b'') - d(b'',x) \\ &> d(a,b'') - \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$N(b'';\delta) \cap A = \emptyset$ となることが示されたので、$b'' \in A^e$ である。

13.3.3 $A^f \subset \{x \in X \mid d(a,x) = \epsilon\}$ の証明

$A^i,\ A^e,\ A^f$ は互いに交わりを持たず、$A^i \cup A^e \cup A^f = X$ と $A^i = \{x \in X \mid d(a,x) < \epsilon\}$ が成り立つので、

$$A^e \cup A^f = \{x \in X \mid d(a,x) \geq \epsilon\}$$

である。また、$\{x \in X \mid d(a,x) > \epsilon\} \subset A^e$ が成り立つので、

$$A^f \subset \{x \in X \mid d(a,x) = \epsilon\}$$

が成り立つ。

13.3.4 補足

$A^e \subset \{x \in X \mid d(a,x) > \epsilon\}$ や $\{x \in X \mid d(a,x) = \epsilon\} \subset A^f$ は必ずしも成り立たない。実際、

$$X = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \leq 0 \text{ または } u \geq 1\}$$

とおき、X の 2 元 $x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$ に対して、$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ とすれば、(X,d) は距離空間である。$\epsilon = 1,\ a = (0,0),\ b = (1,0),\ A = N(a;\epsilon)$ とすれば、$d(a,b) = \epsilon$ かつ $b \in A^e$ である。

13.4

距離空間 (X,d) において、A を開集合とすれば、$A = A^i$ であり、そのとき

$$A^c = A^e \cup A^f = (A^c)^i \cup (A^c)^f = (A^c)^a$$

が成り立つので、A^c は閉集合である。次に、A を閉集合とすれば、$A = A^a = A^i \cup A^f$ であり、そのとき

$$A^c = A^e = (A^c)^i$$

が成り立つので、A^c は開集合である。

13.5

13.5.1 $X \in \mathfrak{O},\ \emptyset \in \mathfrak{O}$ の証明

X に属する任意の点 x について、$N(x;\epsilon) \subset X$ が成り立つので X は開集合である。また、$\emptyset^i = \emptyset$ であるから、$\emptyset$ も開集合である。

13.5.2 $O_1,\ O_2,\ ...,\ O_k \in \mathfrak{O} \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \cap ... \cap O_k \in \mathfrak{O}$ の証明

$O_1,\ O_2,\ ...,\ O_k \in \mathfrak{O}$ と仮定し、$O = O_1 \cap ... \cap O_k$ とする。$a \in O$ とすれば各 $j\ (1 \leq j \leq k)$ に対して $a \in O_j$ であり、$O_j \in \mathfrak{O}$ だから、$N(a; \epsilon_j) \subset O_j$ となる正の実数 ϵ_j が存在する。そこで、$\epsilon = \min(\epsilon_1, ..., \epsilon_k)$ とおけば、各 j に対して $N(a; \epsilon) \subset O$ となり、a は O の内点となる。すなわち $O \subset O^i$ が示された。従って $O \in \mathfrak{O}$ となる。

13.5.3 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ の証明

$(O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathfrak{O}$ の元から成る集合系とし、$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ とおく。$a \in O$ とすれば、$a \in O_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在し、$O_\lambda \in \mathfrak{O}$ だから、$N(a; \epsilon) \subset O_\lambda$ となる正の実数 ϵ が存在する。従って $N(a; \epsilon) \subset O_\lambda \subset O$ となり、a は O の内点となる。すなわち $O \subset O^i$ が示された。従って $O \in \mathfrak{O}$ となる。

13.6

13.6.1 $X \in \mathfrak{U},\ \emptyset \in \mathfrak{U}$ の証明

$X \in \mathfrak{U}$ である。実際、$X^c = \emptyset$ なので、$X^f = X^e = \emptyset$ である。よって、$X^a = X$。
また、$\emptyset \in \mathfrak{U}$ である。実際、$\emptyset^i = \emptyset$ であり、 $\emptyset^f = \emptyset$ である。よって、$\emptyset^a = \emptyset$。

13.6.2 $A_1, ...,\ A_k \in \mathfrak{U} \Longrightarrow A_1 \cup ... \cup A_k \in \mathfrak{U}$ の証明

$A_1, ..., A_k \in \mathfrak{U}$ とし、$A = A_1 \cup ... \cup A_k$ とする。
$x \in A^a$ とすれば、

$$\forall \epsilon > 0[N(x; \epsilon) \cap A \neq \emptyset]$$

つまり、

$$\forall \epsilon > 0[N(x; \epsilon) \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) \neq \emptyset]$$

このとき、

$$\forall \epsilon > 0[N(x; \epsilon) \cap A_j \neq \emptyset]$$

となる $j(1 \leq j \leq k)$ が存在する。なぜなら、そのような j が存在しないとすると、ある $m(1 \leq m \leq k)$、$\epsilon_0 < \epsilon_1$ に対して、

$$N(x; \epsilon_0) \cap A_m \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad N(x; \epsilon_1) \cap A_m = \emptyset$$

となることになってしまい、これは不合理。
これより、x は A_j の触点であり、$A_j \in \mathfrak{U}$ だから、$x \in A_j$ である。よって、$x \in A$ である。以上より $A^a \subset A$ なので $A \in \mathfrak{U}$ となる。

13.6.3 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{U}$ の証明

$(A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathfrak{U}$ の元から成る集合系とし、$A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とおく。$x \in A^a$ とすれば、

$$\forall \epsilon > 0[N(x; \epsilon) \cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \neq \emptyset]$$

これを書き換えて、

$$\forall \epsilon > 0[\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (N(x; \epsilon) \cap A_\lambda) \neq \emptyset]$$

これから以下のことが言える ($\Longrightarrow$)

$$\forall \epsilon > 0[\forall \lambda \in \Lambda[N(x; \epsilon) \cap A_\lambda \neq \emptyset]]$$

よって、

$$\forall \lambda \in \Lambda[\forall \epsilon > 0[N(x;\epsilon) \cap A_\lambda \neq \emptyset]]$$

任意の $\lambda \in \Lambda$ について、$A_\lambda \in \mathfrak{U}$ なので、

$$\forall \lambda \in \Lambda[x \in A_\lambda]$$

よって、$x \in A$ だから、$A^a \subset A$。以上より、$A \in \mathfrak{U}$。

13.7

13.7.1

A に包まれる開集合 B で、$B - A^i \neq \emptyset$ となるものが存在すると仮定する。$x \in B - A^i$ とすると B は開集合なので、x は B の内点であり、

$$\exists \epsilon > 0[N(x;\epsilon) \subset B]$$

となる。$B \subset A$ なので、

$$\exists \epsilon > 0[N(x;\epsilon) \subset A]$$

のはずだが、これは x が A の内点となることを意味し、$x \notin A^i$ に矛盾する。以上より、A^i は A に包まれる最大の開集合である。

13.7.2

A を包む閉集合 B で、$\bar{A} - B \neq \emptyset$ となるものが存在すると仮定する。$x \in \bar{A} - B$ とすると $B = \bar{B}$ なので、$x \notin \bar{B}$ つまり、x は B の外点であり、

$$\exists \epsilon > 0[N(x;\epsilon) \cap B = \emptyset]$$

である。ここで、$A \subset B$ であるので、

$$\exists \epsilon > 0[N(x;\epsilon) \cap A = \emptyset]$$

x は A の外点でもあることになってしまい、$x \in \bar{A}$ に矛盾する。以上より、$\bar{A}$ は A を包む最小の閉集合である。

13.8

13.8.1 $(A \cap B)^i = A^i \cap B^i$ の証明

まず、$(A \cap B)^i \subset A^i \cap B^i$ を証明する。$x \in (A \cap B)^i$ を仮定する。すると、ある $\epsilon > 0$ が存在して、$N(x;\epsilon) \subset A \cap B$ とできる。よって、$N(x;\epsilon) \subset A$ かつ $N(x;\epsilon) \subset B$ が成り立つので、$x \in A^i \cap B^i$。

次に、$A^i \cap B^i \subset (A \cap B)^i$ を証明する。$x \in A^i \cap B^i$ を仮定する。すると、$x \in A^i$ より、ある $\epsilon > 0$ が存在し、$N(x;\epsilon) \subset A$ とできる。また、$x \in B^i$ より、ある $\delta > 0$ が存在し、$N(x;\delta) \subset B$ とできる。よって、$\min(\epsilon, \delta) > 0$ に対して、$N(x; \min(\epsilon, \delta)) \subset A \cap B$ が成り立つので、$x \in (A \cap B)^i$ が成り立つ。

13.8.2 $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$ の証明

まず、$(A \cup B)^a \subset A^a \cup B^a$ を証明する。$x \in (A \cup B)^a$ を仮定する。すると、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$N(x;\epsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ が成り立つ。これを書き換えると、

$$\forall \epsilon > 0\ [N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ または } N(x;\epsilon) \cap B \neq \emptyset]$$

ここで、$\epsilon_1 < \epsilon_2$ には、$N(x;\epsilon_1) \subset N(x;\epsilon_2)$ という関係があるので、

$$\forall \epsilon > 0\ [N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset] \quad \text{または} \quad \forall \delta > 0\ [N(x;\delta) \cap B \neq \emptyset]$$

よって、$x \in A^a$ または $x \in B^a$ が成り立つので、$x \in A^a \cup B^a$ が成り立つ。

次に、$A^a \cup B^a \subset (A \cup B)^a$ を証明する。$x \in A^a \cup B^a$ を仮定する。すると、$x \in A^a$ または $x \in B^a$ が成り立つので、

$$\forall\epsilon > 0\ [N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset]\ \text{ または }\ \forall\delta > 0\ [N(x;\delta) \cap B \neq \emptyset]$$

これより、

$$\forall\epsilon > 0\ [N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ または } N(x;\epsilon) \cap B \neq \emptyset]$$

が成り立つので、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$N(x;\epsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ が成り立つ。結局、$x \in (A \cup B)^a$ である。

13.8.3 $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$ の証明

まず、$(A \cup B)^d \subset A^d \cup B^d$ を証明する。$x \in (A \cup B)^d$ を仮定する。すると、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$N(x;\epsilon) \cap (A \cup B - \{x\}) \neq \emptyset$ が成り立つ。$A \cup B - \{x\} = (A - \{x\}) \cup (B - \{x\})$ が成り立つので、

$$\forall\epsilon > 0\ [\ N(x;\epsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \text{ または } N(x;\epsilon) \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset\ ]$$

ここで、$\epsilon_1 < \epsilon_2$ には、$N(x;\epsilon_1) \subset N(x;\epsilon_2)$ という関係があるので、

$$\forall\epsilon > 0\ [N(x;\epsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset]\ \text{ または }\ \forall\delta > 0\ [N(x;\delta) \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset]$$

よって、$x \in A^d$ または $x \in B^d$ が成り立つので、$x \in A^d \cup B^d$ が成り立つ。

次に、$A^d \cup B^d \subset (A \cup B)^d$ を証明する。$x \in A^d \cup B^d$ を仮定する。すると、$x \in A^d$ または $x \in B^d$ が成り立つので、

$$\forall\epsilon > 0\ [N(x;\epsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset]\ \text{ または }\ \forall\delta > 0\ [N(x;\delta) \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset]$$

これより、

$$\forall\epsilon > 0\ [\ N(x;\epsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \text{ または } N(x;\epsilon) \cap (B - \{x\}) \neq \emptyset\ ]$$

が成り立つ。$(A - \{x\}) \cup (B - \{x\}) = A \cup B - \{x\}$ なので、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$N(x;\epsilon) \cap (A \cup B - \{x\}) \neq \emptyset$ が成り立つ。結局、$x \in (A \cup B)^d$ である。

13.9

距離空間 (X, d) に対して、$d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ と定義する。この d' もまた、集合 X 上の距離関数である。

[D_1] 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \geq 0$ なので、任意の $x, y \in X$ に対して $d'(x, y) \geq 0$ である。また、$d'(x, y) = 0$ となるのは、$d(x, y) = 0$ のとき、そのときに限る。よって、$d(x, y) = 0$ となるのは、$x = y$ のとき、そのときに限る。

[D_2] 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d'(y, x)$$

[D_3] 任意の $x, y, z \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
&d'(x, y) + d'(y, z) - d'(x, z) \\
=&(\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}) + (\frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)}) - (\frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)}) \\
=&\frac{d(x, y) + d(y, z) - d(x, z) + 2d(x, y)d(y, z) + d(x, y)d(y, z)d(z, x)}{(1 + d(x, y))(1 + d(y, z))(1 + d(x, z))}
\end{aligned}$$

d は距離関数なので、$d(x,y)+d(y,z)-d(x,z)\geq 0$ である。よって、$d'(x,z)\leq d'(x,y)+d'(y,z)$ が成り立つ。

このとき、(X,d) の開集合系と (X,d') の開集合系は一致することを示す。
$f(t)=\frac{t}{1+t}$ という関数は、$f(t)=0$ で、$t>0$ で単調に増加するので、$d(x,y)$ と $d'(x,y)$ は 1 対 1 に対応し、大小関係を維持する。つまり、任意の $w,x,y,z\in X$ に対して、

$$d(w,x)<d(y,z)\Longleftrightarrow d'(w,x)<d'(y,z)$$

という関係が存在する。
$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ という関係があるので、(X,d) における $N(x,\epsilon)=\{y\in X|d(x,y)<\epsilon\}$ は (X,d') における $N'(x,\frac{\epsilon}{1+\epsilon})=\{y\in X|d'(x,y)<\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\}$ に一致する。また、$d'(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ を $d(x,y)$ について解くと、$d(x,y)=\frac{d'(x,y)}{1-d'(x,y)}$ となるので、(X,d') における $N'(x,\epsilon)=\{y\in X|d'(x,y)<\epsilon\}$ は (X,d) における $N(x,\frac{\epsilon}{1-\epsilon})=\{y\in X|d(x,y)<\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\}$ に一致する。そのため、X の部分集合 A において、$x\in A$ が距離空間 (X,d) における A の内点のとき、そのときに限り $x\in A$ は距離空間 (X,d') における A の内点である。以上より、(X,d) の開集合系と (X,d') の開集合系は一致する。

14　近傍系と連続写像

14.1

x が X の点とする。任意の正の実数 ϵ に対して、$y\in X$ を $d(x,y)<\epsilon$ となるように選べば、定理 13.3(1) より

$$d^{(1)}(f(x),f(y))=|f(x)-f(y)|=|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)<\epsilon$$

となるので、写像 $f:X_1\to X_2$ は X の点 x で連続である。

14.2

以下では段階を追って、U と V の性質を証明する。

14.2.1　U と V の定義

U と V を以下のように定義する。

$$U=\bigcup_{a\in A}N(a;\frac{d(a,B)}{2})$$

$$V=\bigcup_{b\in B}N(b;\frac{d(b,A)}{2})$$

14.2.2　U は B と交わらない開集合である。V は A と交わらない開集合である。

U が B と交わらない開集合であることを証明する。A に属する任意の点 a において、a は B の触点ではないので、$d(a,B)>0$ が成り立つ。このとき、$N(a;\frac{d(a,B)}{2})$ が開集合なので、U は開集合である。

また、U に属する任意の y について、$y \in N(x; \frac{d(x,B)}{2})$ となる $x \in A$ が存在するので、

$$\begin{aligned}
d(y,B) &= \inf\{\ d(y,b) \mid b \in B\ \} \\
&\geq \inf\{\ d(x,b) - d(x,y) \mid b \in B\ \} \\
&= \inf\{\ d(x,b) \mid b \in B\ \} - d(x,y) \\
&> d(x,B) - \frac{d(x,B)}{2} \\
&= \frac{d(x,b)}{2} > 0
\end{aligned}$$

が成り立つので、U に属する任意の点は B の触点ではない、つまり U は B と交わらない。
同様にして、V は A と交わらない開集合である。

14.2.3 U と V は互いに交わらない。

以下では U と V が交わらないことを背理法で証明する。
今、$U \cap V \neq \emptyset$ と仮定すると、ある点 $x \in U \cap V$ が存在する。このとき、$x \in U$ よりある $a \in A$ が存在して、$x \in N(a; \frac{d(a,B)}{2})$ となる。また、$x \in V$ より、ある $b \in B$ が存在して、$x \in N(b; \frac{d(b,A)}{2})$ が成立する。よって、

$$\begin{aligned}
d(a,b) &\leq d(a,x) + d(x,b) \\
&< \frac{d(a,B)}{2} + \frac{d(b,A)}{2} \\
&= \inf\{\frac{d(a,b')}{2} | b' \in B\} + \inf\{\frac{d(b,a')}{2} | a' \in A\} \\
&\leq d(a,b)
\end{aligned}$$

$d(a,b) < d(a,b)$ となり、矛盾している。結局、U と V は交わらないことがわかる。

14.3

$X = \mathbb{R} - 0,\ d(x,y) = |x-y|$ と定義すると、(X,d) は距離空間である。
このとき、A, B を $A = \{a \in X | a > 0\},\ B = \{b \in X | b < 0\}$ と定義すれば、互いに交わらない空でない閉集合となるが、$d(A,B) = 0$ である。

14.4

g は X の各点 x で連続である。つまり、どんな正の実数 ϵ に対しても、$\delta = \epsilon \times (d(x,A) + d(x,B)) > 0$ と δ を選んで、$d(x,y) < \delta$ なる X の点 y に対して、常に $d^{(1)}(g(x), g(y)) < \epsilon$ が成り立つようにできる。実際、

$d(x,y) < \delta$ とすれば、

$$\begin{aligned}
d^{(1)}(g(x),g(y)) &= |g(x)-g(y)| \\
&= |\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} - \frac{d(y,A)}{d(y,A)+d(y,B)}| \\
&= \frac{|d(x,A)(d(y,A)+d(y,B)) - d(y,A)(d(x,A)+d(x,B))|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&= \frac{|d(x,A)d(y,B) - d(y,A)d(x,B)|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&= \frac{|d(y,B)(d(x,A)-d(y,A)) + d(y,A)(d(y,B)-d(x,B))|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&\leq \frac{|d(y,B)(d(x,A)-d(y,A))|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} + \frac{|d(y,A)(d(y,B)-d(x,B))|}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&\leq \frac{d(y,B)d(x,y)}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} + \frac{d(y,A)d(x,y)}{(d(x,A)+d(x,B))(d(y,A)+d(y,B))} \\
&= \frac{d(x,y)}{d(x,A)+d(x,B)} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

となる。ここで、$|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$ という関係を用いた。
$d(x,A) \geq 0,\ d(x,B) \geq 0$ なので、$0 \leq g(x) \leq 1$ である。
A は閉集合なので、$x \in A$ のとき、またそのときに限り、$d(x,A)=0$、つまり、$g(x)=0$ である。
B は閉集合なので、$x \in B$ のとき、またそのときに限り、$d(x,B)=0$、つまり、$g(x)=1$ である。

第 V 部
位相空間

15　位相

15.1

表 1 で ◯ のついている集合を元とする集合族は、X の上の位相となる。全部で 29 種類ある。

15.2

離散位相は常に距離化可能である。実際、d を

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \\ 0 & (x = y \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義すると、(X,d) は距離空間である。このとき、集合 X 上の離散位相 $\mathfrak{P}(X)$ に属する任意の集合 Y は開集合である。実際、Y に属する任意の点 y に対して、$N(y;0.5) = \{z \in X | d(y,z) < 0.5\} = \{y\} \subset Y$ となるので、y は Y の内点である。結局、(X,d) の開集合系 $\mathcal{O}$ と、$\mathfrak{P}(X)$ は一致するので、離散位相は距離化可能であることがわかった。
密着位相は一般に距離化可能でない。例として、$X = \{x,y\}$ という集合を考える。$\mathcal{O} = \{X, \emptyset\}$ が密着位相となるには、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$d(x,y) < \epsilon$ である必要があるが、これは距離関数の満たすべき条件である $d(x,y) > 0$ $(x \neq y)$ に反する。

表 1

番号	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
1	◯							◯
2	◯	◯						◯
3	◯		◯					◯
4	◯			◯				◯
5	◯				◯			◯
6	◯					◯		◯
7	◯						◯	◯
8	◯	◯			◯			◯
9	◯	◯				◯		◯
10	◯	◯					◯	◯
11	◯		◯		◯			◯
12	◯		◯			◯		◯
13	◯		◯				◯	◯
14	◯			◯	◯			◯
15	◯			◯		◯		◯
16	◯			◯			◯	◯
17	◯	◯	◯		◯			◯
18	◯	◯		◯		◯		◯
19	◯		◯	◯			◯	◯
20	◯	◯			◯	◯		◯
21	◯		◯		◯		◯	◯
22	◯			◯		◯	◯	◯
23	◯	◯	◯		◯	◯		◯
24	◯	◯	◯		◯		◯	◯
25	◯	◯		◯	◯	◯		◯
26	◯	◯		◯		◯	◯	◯
27	◯		◯	◯	◯		◯	◯
28	◯		◯	◯		◯	◯	◯
29	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯	◯

15.3

1. $\emptyset \in \mathcal{O}$ なので、$X \in \mathcal{U}$ である。
   $X \in \mathcal{O}$ なので、$\emptyset \in \mathcal{U}$ である。
2. $F_1, ..., F_k \in \mathcal{U}$ ならば、$F_1 = X - O_1,\ \dots\ ,\ F_k = X - O_k$ となる、$O_1, ..., O_k \in \mathcal{O}$ が存在する。

$$\begin{aligned} F_1 \cup ... \cup F_k &= (X - O_1) \cup ... \cup (X - O_k) \\ &= X - (O_1 \cap ... \cap O_k) \end{aligned}$$

   $O_1 \cap ... \cap O_k$ は開集合なので、$F_1 \cup ... \cup F_k$ は閉集合である。

3. $(F_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ を $\mathcal{U}$ の元から成る集合系とすれば、$O_\lambda = X - F_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ と定義した $(O_\lambda|\lambda \in \Lambda)$ は $\mathcal{O}$ の元から成る集合系である。

$$\begin{aligned}\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda &= \{x \in X|\forall\lambda \in \Lambda[x \in F_\lambda]\}\\ &= \{x \in X|\forall\lambda \in \Lambda[x \notin O_\lambda]\}\\ &= \{x \in X|\text{「}\exists\lambda \in \Lambda[x \in O_\lambda]\text{」ではない}\}\\ &= X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\end{aligned}$$

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ は開集合なので、$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は閉集合である。

15.4

定義から、距離空間 (X, d) における開集合と、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における開集合の意味は等しい。

15.4.1 内部について

$A^i_{\text{距離}}$ を距離空間の意味での内部とし、$A^i_{\text{位相}}$ を位相空間の意味での内部とする。
x を $A^i_{\text{距離}}$ に属する点と仮定すると、ある正の実数 ϵ が存在し、

$$N(x;\epsilon) \subset A$$

とすることができる。$N(x;\epsilon)$ は開集合なので、点 x は A に包まれる開集合に含まれる点である。$x \in A^i_{\text{位相}}$ が示せたので、$A^i_{\text{距離}} \subset A^i_{\text{位相}}$ である。
逆に、$A^i_{\text{位相}}$ に属する任意の点 x に対して、$x \in O$ であり、$O \subset A$ であるようなある開集合 O が存在する。O が開集合であることから、ある正の実数 ϵ が存在し、$N(x;\epsilon) \subset O$ とできる。結局、$N(x;\epsilon) \subset A$ とできるので、$x \in A^i_{\text{距離}}$ であり、$A^i_{\text{位相}} \subset A^i_{\text{距離}}$ である。

15.4.2 閉包について

位相空間においても、距離空間においても、閉集合は開集合の補集合として定義できるので、その意味は等しい。
$\bar{A}_{\text{距離}}$ を距離空間の意味での閉包とし、$\bar{A}_{\text{位相}}$ を位相空間の意味での閉包とする。
$x \in \bar{A}_{\text{距離}}$ であると仮定すると、定義から

$$\forall\delta > 0\ [\ N(x;\delta) \cap A \neq \emptyset]$$

が成り立つが、$A \subset \bar{A}_{\text{位相}}$ なので、

$$\forall\delta > 0\ [\ N(x;\delta) \cap \bar{A}_{\text{位相}} \neq \emptyset]$$

も成り立つことになる。これは x が $\bar{A}_{\text{位相}}$ の触点であることを意味するが、$\bar{A}_{\text{位相}}$ は距離空間の意味で閉集合のはずなので $x \in \bar{A}_{\text{位相}}$ である。よって、$\bar{A}_{\text{距離}} \subset \bar{A}_{\text{位相}}$ である。
逆に、$x \in \bar{A}_{\text{位相}}$ であると仮定すると、定義から、A を包む任意の閉集合 U に対して、$x \in U$ が成り立つ。今、閉集合 $\bar{A}_{\text{距離}}$ は $A \subset \bar{A}_{\text{距離}}$ なので、$x \in \bar{A}_{\text{距離}}$ が成り立つ。よって、$\bar{A}_{\text{位相}} \subset \bar{A}_{\text{距離}}$ である。

15.5

15.5.1 $(A^i)^c = (A^c)^a$ の証明

定義から、$(A^i)^c$ は「A に包まれる最大の開集合」の補集合である。開集合の補集合なので、$(A^i)^c$ は閉集合である。また、$A^i \subset A$ なので、$A^c \subset (A^i)^c$ である。$(A^i)^c$ が A^c を包む閉集合になっていることがわかったので、以下では $(A^i)^c$ が A^c を包む最小の閉集合になっていることを背理法で示す。
閉集合 U で $A^c \subset U$ かつ $U \subset (A^i)^c$ で $(A^i)^c \neq U$ が成り立っているものがあると仮定する。このとき、開集合 U^c に対して、$U^c \subset A$ と $A^i \subset U^c$ と $A^i \neq U^c$ が成り立つはずだが、これは A^i が A に包まれる最大の開集合であることに矛盾する。よって、$(A^i)^c$ は A^c を包む最小の閉集合であり、$(A^c)^a$ に一致する。

15.5.2 $(A^c)^i = (A^a)^c$ の証明

定義から、$(A^a)^c$ は「A を包む最小の閉集合」の補集合である。閉集合の補集合なので、$(A^a)^c$ は開集合である。また、$A \subset A^a$ なので、$(A^a)^c \subset A^c$ である。$(A^a)^c$ が A^c に包まれる開集合であることがわかったので、以下では $(A^a)^c$ が A^c に包まれる最大の開集合になっていることを背理法で示す。
開集合 O で $O \subset A^c$ かつ $(A^a)^c \subset O$ で $(A^a)^c \neq O$ が成り立っているものがあると仮定する。このとき、閉集合 O^c に対して $A \subset O^c$ と $O^c \subset A^a$ と $O \neq A^a$ が成り立つはずだが、これは A^a が A を包む最小の閉集合であることに矛盾する。よって、$(A^a)^c$ は A^c に包まれる最大の開集合であり、$(A^c)^i$ に一致する。

15.6

もし与えられた写像 i が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開核作用子と一致するならば、X の部分集合 M について、$M \in \mathcal{O}$ であることと、$i(M) = M$ であることとは同等である。従って、集合 X 上に条件を満足する位相 $\mathcal{O}$ が存在すれば、この位相 $\mathcal{O}$ は

$$\mathcal{O} = \{M \in \mathfrak{P}(X) \mid i(M) = M\} \tag{$*$}$$

という等式によって定義されなければならない。これは条件を満足する位相 $\mathcal{O}$ の一意性を示している。

次に、上の等式 $(*)$ によって $\mathfrak{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ を与えたとき、$\mathcal{O}$ が集合 X の位相になることを示そう。$[I_1]$ によって、$X \in \mathcal{O}$ となる。$[I_2]$ によって、$i(\emptyset) \subset \emptyset$ となるので、$\emptyset \in \mathcal{O}$ となる。従って、$[O_1]$ が成り立つ。$M_1,\ M_2, ...,\ M_k \in \mathcal{O}$ とすれば、$i(M_j) = M_j\ (j = 1, ..., k)$ であるから、$[I_3]$ によって、

$$i(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k) = i(M_1) \cap i(M_2) \cap ... \cap i(M_k) = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k$$

となり、$[O_2]$ が成り立つ。

次に、$(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathcal{O}$ の元から成る集合系とし、$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ とおく。条件 $[I_3]$ によって、X の部分集合 $A,\ B$ について、$A \subset B$ ならば $i(A) \subset i(B)$ であることがわかる。各 $\lambda \in \Lambda$ について、$M_\lambda \subset M$ であり、$M_\lambda \in \mathcal{O}$ であるから、

$$M_\lambda = i(M_\lambda) \subset i(M)$$

が成り立つ。よって、

$$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} i(M_\lambda) \subset i(M)$$

となる。一方 $[I_2]$ によって、$i(M) \subset M$ であるから、$i(M) = M$ となり、ゆえに $M \in \mathcal{O}$ となる。従って、$[O_3]$ が成り立つ。以上で等式 $(*)$ によって定義される $\mathfrak{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{O}$ は集合 X の位相であることがわかった。

最後に、この位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における開核作用子が、与えられた写像 i に一致することを示そう。A を X

の部分集合とし、位相空間 $(X,\mathcal{O})$ における A の開核を A^i で表す。A^i は $\mathcal{O}$-開集合であり、$\mathcal{O}$ の定義 $(*)$ から、$i(A^i)=A^i$ となる。また、$A^i \subset A$ より $i(A^i) \subset i(A)$ となるので、$A^i \subset i(A)$ が成り立つ。一方、$[I_4]$ によって、$i(A)$ は位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の開集合である。$[I_2]$ によって、$i(A)$ は A に包まれる $\mathcal{O}$-開集合であり、A^i は A に包まれる最大の $\mathcal{O}$-開集合であるから、$i(A) \subset A^i$ が成り立つ。結局、$A^i = i(A)$ が X のすべての部分集合 A に対して成り立ち、位相空間 $(X,\mathcal{O})$ における開核作用子が、与えられた写像 i に一致することがわかった。

15.7

15.7.1　$(Y \cap \bar{A}) = \tilde{A}$ の証明

部分空間 $(Y,\mathcal{O})$ における A の閉包を $\tilde{A}$ で表そう。$\tilde{A}$ は $(Y,\mathcal{O}_Y)$ における閉集合である。$Y-\tilde{A} \in \mathcal{O}_Y$ なので、$Y-\tilde{A} = Y \cap M$ となる $\mathcal{O}$-開集合の M が存在する。

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= Y - Y \cap M \\ &= Y - M\end{aligned}$$

なので、$\tilde{A} = Y \cap (X-M)$ である。$X-M$ は A を包む $\mathcal{O}$-閉集合なので、$\bar{A} \subset X-M$ が成り立ち、$Y \cap \bar{A} \subset Y \cap (X-M) = \tilde{A}$ である。
一方、$\bar{A}$ は $\mathcal{O}$-閉集合なので、$Y \cap (X-\bar{A})$ は $\mathcal{O}_Y$-開集合である。

$$Y \cap (X-\bar{A}) = Y - (Y \cap \bar{A})$$

となるので、$(Y \cap \bar{A})$ は $\mathcal{O}_Y$-閉集合である。$(Y \cap \bar{A})$ は A を包むので、$\tilde{A} \subset (Y \cap \bar{A})$ である。以上より、$(Y \cap \bar{A}) = \tilde{A}$ が成り立つ。

15.7.2

$$\begin{aligned}X &= \mathbb{R}^2 \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \\ A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}\end{aligned}$$

と定義する。このとき、$(X,\mathcal{O})$ における内部と境界は

$$\begin{aligned}A^i &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1, y > 0\} \\ A^f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2 = 1, y \geq 0) \text{ または } (-1 < x < 1, y = 0)\}\end{aligned}$$

と定義される。一方、$(Y,\mathcal{O}_Y)$ における内部と境界は

$$\begin{aligned}A^i &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1, y \geq 0\} \\ A^f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1, y \geq 0\}\end{aligned}$$

と定義され、両者は異なる。

16　近傍系と連続写像

16.1

$x \in \bar{A}$ と仮定する。$x \in \overline{A-\{x\}}$ となるならば、つまり点 x が集合 $A-\{x\}$ の触点であるならば、定義から x は集積点となるので、$x \in A^d$ である。$x \notin \overline{A-\{x\}}$ となるならば、$\bar{A} \neq \overline{A-\{x\}}$ であるので、x は A に属

する点である。よって、$x \in A$ である。以上より、$\bar{A} \subset A \cup A^d$ である。
逆に、$x \in A \cup A^d$ と仮定する。$x \in A$ ならば、$x \in \bar{A}$ が成り立つ。$x \in A^d$ ならば、$x \in \overline{A - \{x\}} \subset \bar{A}$ となるので、$x \in \bar{A}$ であり、$\bar{A} \supset A \cup A^d$ が成り立つ。以上より $\bar{A} = A \cup A^d$ である。

16.2

定義から、距離空間 (X, d) における開集合と、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における開集合の意味は等しい。
$A^i_{\text{距離}}$ を距離空間の意味での内部とし、$A^i_{\text{位相}}$ を位相空間の意味での内部とする。
$A \subset X$ が距離空間における a の近傍であると仮定すると、$x \in A^i_{\text{距離}}$ である。すると、ある正の実数 ϵ が存在し、

$$N(a;\epsilon) \subset A$$

とすることができる。$N(a;\epsilon)$ は開集合であり、点 a は A に包まれる開集合に含まれる点であるので、$a \in A^i_{\text{位相}}$ である。よって、距離空間の意味で近傍ならば、位相空間の意味でも近傍である。
逆に、$A \subset X$ が位相空間における a の近傍であると仮定する。点 a は $A^i_{\text{位相}}$ に属するので、$a \in O$ であり、$O \subset A$ であるようなある開集合 O が存在する。O が開集合であることから、ある正の実数 ϵ が存在し、$N(a;\epsilon) \subset O$ とできる。結局、$N(a;\epsilon) \subset A$ とできるので、$a \in A^i_{\text{距離}}$ である。よって、位相空間の意味で近傍ならば、距離空間の意味でも近傍である。

16.3

定義から、距離空間の開集合と位相空間の開集合は一致する。
また、f が $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への連続写像であるとは、距離空間においても位相空間においても、「(X_2, d_2) の開集合 (つまり $\mathcal{O}_2$-開集合)O に対して、f による逆像 $f^{-1}(O)$ は常に (X_1, d_1) の開集合 (つまり $\mathcal{O}_1$-開集合) である」と定義されるので、両者は一致する。

16.4

16.4.1　(a, b) と (c, d) が常に同相であることの証明

$f : (a, b) \to (c, d)$ を

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$$

と定義する。このとき、f は全単射であり、

$$f^{-1}(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a$$

となる。
また、f は連続である。実際、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\delta = \frac{b-a}{d-c}$ と定義すれば、$|y - x| < \delta$ となる $y \in (a, b)$ に対して、

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |\{\ \frac{d-c}{b-a}(y-a) + c\ \} - \{\ \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c\ \}| \\ &= \frac{d-c}{b-a}|y-x| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

となる。よって、f は連続である。f^{-1} の連続性も同様に示せる。

16.4.2 $[a,b]$ と $[c,d]$ が常に同相であることの証明

16.4.1 と同様に証明可能。

16.4.3 (a,b) と $\mathbb{R}$ が常に同相であることの証明

$f:(a,b)\to(-\pi,\pi)$ を

$$f(x)=\frac{2\pi}{b-a}(x-a)-\pi$$

と定義すると f は同相写像である。
また、$g:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ を

$$g(x)=\tan x$$

と定義すると g は同相写像である。このとき $g\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ は同相写像になる。ここで、f や g が連続であること、および全単射であることは、グラフを書くことでわかるため省略する。

16.5

写像 f が $(X,\mathcal{O})$ から $(X',\mathcal{O}')$ への連続写像であると仮定する。すると、$\mathcal{O}'$-開集合の M に対して、$f^{-1}(M)$ は開集合である。ここで、

$$\begin{aligned} f_A^{-1}(M) &= \{x\in X \mid x\in A \text{ かつ } f(x)\in M\} \\ &= A\cap f^{-1}(M) \end{aligned}$$

$f^{-1}(M)\in\mathcal{O}$ なので、$f_A^{-1}(M)\in\mathcal{O}_A$ である。同様に、$f_B^{-1}(M)\in\mathcal{O}_B$ である。以上より、写像 $f_A:A\to X'$ と写像 $f_B:B\to X'$ も連続写像である。

逆に、写像 $f_A:A\to X'$ と写像 $f_B:B\to X'$ が連続であると仮定する。N を $\mathcal{O}'$-閉集合と仮定すると、$f_A^{-1}(N)$ は $\mathcal{O}_A$-閉集合である。$A-f_A^{-1}(N)$ は $\mathcal{O}_A$-開集合なので、$A-f_A^{-1}(N)=A\cap O_1$ となる $O_1\in\mathcal{O}$ が存在する。このとき

$$\begin{aligned} f_A^{-1}(N) &= \{x\in X|x\in A \text{ かつ } x\notin O_1\} \\ &= A\cap(X-O_1) \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に、$f_B^{-1}(N)$ に対しても、$f_B^{-1}(N)=B\cap(X-O_2)$ となる $O_2\in\mathcal{O}$ が存在する。これを用いることで、

$$\begin{aligned} f^{-1}(N) &= \{x\in X|f(x)\in N\} \\ &= \{x\in X|(f(x)\in N \text{ かつ } x\in A) \text{ または } (f(x)\in N \text{ かつ } x\in B)\} \\ &= f_A^{-1}(N)\cup f_B^{-1}(N) \\ &= (A\cap(X-O_1))\cup(B\cap(X-O_2)) \end{aligned}$$

が成り立つ。$A,\ B,\ (X-O_1),\ (X-O_2)$ がそれぞれ閉集合なので、$f^{-1}(N)$ も閉集合である。以上より、f は連続写像である。

16.6

A^d を位相空間 $(X,\mathcal{O})$ における A の導集合とし、$A^{\tilde{d}}$ を部分空間 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ における A の導集合とする。
また、$\overline{M}$ を位相空間 $(X,\mathcal{O})$ における M の閉包とし、$\overline{M}^Y$ を部分空間 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ における M の閉包とする。

問 15.7 より、Y の部分集合 M に対して、$\overline{M}^{Y} = \overline{M} \cap Y$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} A^{\tilde{d}} &= \{x \in Y \mid x \in \overline{A - \{x\}}^{Y}\} \\ &= \{x \in X \mid x \in \overline{A - \{x\}} \cap Y\} \\ &= A^{d} \cap Y \end{aligned}$$

が成り立つ。

17　開基と基本近傍系

17.1

上限位相をもった位相空間 $\mathbb{R}$ において、$\mathcal{B}_u$ は開基であるので、その元である左半開区間 $(a, b]$ は上限位相の開集合となる。以下では $(a, b]$ が閉集合であることを証明する。

$$(-\infty, a] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a - n, a]$$

$$(b, \infty] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b, b + n]$$

となるので、$(-\infty, a]$ と (b, ∞) はどちらも開集合である。

$$\begin{aligned} (a, b] &= (a, \infty) \cap (-\infty, b] \\ &= (\mathbb{R} - (-\infty, a]) \cap (\mathbb{R} - (b, \infty)) \end{aligned}$$

$(a, b]$ が 2 つの閉集合の共通部分として表現できるので、$(a, b]$ は閉集合である。
同様にして、下限位相を持った位相空間 $\mathbb{R}$ においても、右半開区間 $[a, b)$ は開集合であると同時に閉集合であることが示せる。
さらに、上限位相をもった位相空間 $\mathbb{R}$ において、

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - \frac{b - a}{2n}]$$

と表現できるので、(a, b) は開集合である。

17.2

通常の位相を $\mathcal{O}$ とすると、任意の $\mathcal{O}$-開集合 O について、$x \in O$ ならば、ある正の実数 ϵ が存在して、$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset O$ とすることができる。$(x - \epsilon, x + \epsilon)$ は上限位相における開集合である。つまり

$$\forall O \in \mathcal{O}[\exists \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_u[O = \bigcup \mathcal{B}_0]]$$

である。通常の位相に属する任意の開集合が、上限位相における開集合となるので、上限位相は通常の位相より大きい位相である。下限位相の場合も同様に示せる。
ある位相 $\mathcal{O}$ が、上限位相および下限位相のいずれよりも大きい位相であるとする。ここで、任意の $x \in \mathbb{R}$ について、$(x - 1, x] \in \mathcal{B}_u$ であり、$([x, x + 1) \in \mathcal{B}_l$ であるから、$(x - 1, x] \cap [x, x + 1) = x$ も $\mathcal{O}$-開集合である。$\mathbb{R}$ の任意の開集合は点 $x \in \mathbb{R}$ の和集合で表現できるので、$\mathcal{O}$ は離散位相 $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ である。

17.3

$\mathcal{T} = \{(a, +\infty), (-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$ とする。$\mathcal{O}$-開集合 O の任意の点 x について $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset O$ となる正の実数 ϵ が存在する。このとき、$x \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ である。今、$(x-\epsilon, x+\epsilon) = (-\infty, x+\epsilon) \cap (x-\epsilon, +\infty)$ と表せるので、$\mathcal{T}$ は $\mathcal{O}$ の準開基である。

一方、$-\infty < a < b < +\infty$ を満たす任意の実数 a, b について、$(a, b) \in \mathcal{O}$ が成り立つが、$U \subset (a, b)$ となる $U \in \mathcal{T}$ が存在しないので、$\mathcal{T}$ は $\mathcal{O}$ の開基ではない。

17.4

$\mathcal{B} = \{\bigcap \mathfrak{U} \in \mathfrak{P}(X) \mid \mathfrak{U}$ は $\mathcal{T}$ の有限部分集合 $\}$ とおく。このとき、$\mathcal{B}$ がある位相 $\mathcal{O}$ の開基となることと、$\mathcal{T}$ がその位相 $\mathcal{O}$ の準開基となることは同等である。

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\bigcap \mathfrak{U} \in \mathfrak{P}(X) \mid \mathfrak{U} \text{ は } \mathcal{T} \text{ の有限部分集合 } \} \\ &= \{\{1,2,3,4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{4\}, \{2\}, \emptyset\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{\bigcup \mathfrak{U} \mid \mathfrak{U} \subset \mathcal{B}\} \\ &= \{\{1,2,3,4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{4\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{2,4\}, \emptyset\}\end{aligned}$$

17.5

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が第 2 可算公理を満足すると仮定する。すると、位相 $\mathcal{O}$ は高々可算個の開集合からなる開基 $\mathcal{B}$ をもつ。X の点 x について、高々可算集合 $\mathcal{B}'$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{B}' = \{U \in \mathcal{B} | x \in U\}$$

x の任意の近傍 N に対して、$x \in N^i$ が成り立つので、$x \in U$ かつ $U \subset N^i$ が成り立つ $U \in \mathcal{B}'$ が存在する。よって、$\mathcal{B}'$ は x の基本近傍系である。以上より、位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は第 1 可算公理を満足する。

以下では、第 2 可算公理を満たす位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が、可分な位相空間であることを示す。位相 $\mathcal{O}$ は高々可算個の開集合からなる開基 $\mathcal{B}$ をもつ。ここで、開集合 O に対して O 中の一つの点 x_O を返す関数を f とし[*13]、高々可算個から成る点の集合 Y を以下のように定義する。

$$Y = \{f(O) \in O \mid O \in (\mathcal{B} - \{\emptyset\})\ \}$$

$\emptyset$ でない任意の開集合 O に対して、$O \cap Y \neq \emptyset$ である。よって、$(Y^c)^i = \emptyset$ が成り立つ。$(Y^c)^i = (Y^a)^c$ なので[*14]、$(Y^a)^c = \emptyset$ であり、$Y^a = X$ となる。以上より、Y は稠密な高々可算部分集合であるので、$(X, \mathcal{O})$ は可分な位相空間である。

17.6

距離化可能で可分な位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を考える。$(X, \mathcal{O})$ は可分な位相空間のため、高々可算部分集合が存在し $A^\alpha = X$ となる。A の元 x に対して、集合 $M(x)$ を以下のように定義する。

$$M(x) = \{N(x; q) \mid q > 0,\ q \in \mathbb{Q}\}$$

[*13] このような関数 f が存在することは、選択公理が保証する。
[*14] 問 15.5 参照。

このような $M(x)$ の和集合 $\bigcup_{x\in A} M(x)$ も可算集合である。以下では、$\bigcup_{x\in A} M(x)$ が開基になっていることを証明する。開集合 U の点 x について、ある $\epsilon > 0$ が存在し、$N(x;\epsilon) \subset U$ が成り立つ。このとき、$A^\alpha = X$ なので、$y \in N(x;\frac{\epsilon}{2})$ となる $y \in A$ が存在する。$d(x,y) < \delta < \frac{\epsilon}{2}$ を満たす有理数を δ とおけば、$N(y;\delta)$ 中の任意の点 z について

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &< d(x,y) + \delta \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、$x \in N(y;\delta)$, $N(y;\delta) \subset N(x,\epsilon)$ が成り立つ。結局、$N(y;\delta) \subset U$ が成り立つので、$\bigcup_{x\in A} M(x)$ は開基である。

17.7

17.7.1

X の各点 $x = (s,t)$ に対して、$\mathfrak{B}_x$ を以下のように定義する。

$$\mathfrak{B}_x = \{[s,b) \times [t,d) \mid b,d \in \mathbb{Q}, s < b, t < d\}$$

$\mathfrak{B}$ は高々加算集合である。
ここで、X のある部分集合 N が点 x の近傍であると仮定する。$\mathcal{B}$ は開基であるので、$x \in M, M \subset N$ となる開集合 $M \in \mathcal{B}$ が存在する。$M = [\alpha,\beta) \times [\gamma,\delta)$ と表されるとすると、$\alpha \leq s < \beta, \gamma \leq t < \delta$ であるので、$x \in U,\ U \subset M \subset N$ となる元 $U \in \mathfrak{B}_x$ が存在する。以上より、$\mathfrak{B}_x$ は点 x における高々加算個の近傍から成る基本近傍系になっている。よって、位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第一可算公理を満足する。
また、$A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ と定義すると、A は稠密な高々可算部分集合である。実際、任意の $U \in \mathcal{B}$ について、$x \in U$ となる、$x \in \mathbb{Q}$ が存在するので、$(A^\alpha)^c = (A^c)^i = \emptyset$ である。以上より、$A^\alpha = \mathbb{R}^2$ であるので、位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は可分な位相空間である。

17.7.2

A に含まれる点 $s = (x,y)$ に対して、$U = [x, x+1) \times [y, y+1) \in \mathcal{B}$ とおくと、$s = A \cap U$ と表されるので、A の相対位相は離散位相である。

17.7.3

開基 $\mathcal{B} = \{[a,b) \times [c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}; a < b, c < d\}$ は非加算集合である。別の開基 $\mathcal{B}'$ が $\mathcal{O}$ の開基であるためには、開基 $\mathcal{B}$ の任意の元 $U = [a,b) \times [c,d)$ に対して、$M \in \mathcal{B}'$ が存在し、$(a,c) \in M$ であり、$x < a, y < c$ ならば $(x,y) \notin M$ となることが少なくとも必要である。しかし、点 $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ の組み合わせが非可算個存在するので、このような M を集めた集合 $\mathcal{B}'$ は非可算集合となる。

17.8

$\mathcal{T}$ に属する X_2 の部分集合の f による逆像が常に $\mathcal{O}_1$ に属すと仮定する。このとき、任意の $\mathcal{O}_2$-開集合 O と点 $x \in O$ に対して、常に有限個の $\mathcal{T}$ の元 $N_{x1}, ..., N_{xr_x}$ を選んで、$x \in N_{x1} \cap ... \cap N_{xr_x}$ かつ $N_{x1} \cap ... \cap N_{xr_x} \subset O$

が成り立つようにできる[*15]。よって、$f^{-1}(O)$ は、

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= f^{-1}(\bigcup_{x\in O}(N_{x1}\cap ...\cap N_{xr_x})) \\ &= \{a\in X_1 \mid f(a)\in \bigcup_{x\in O}(N_{x1}\cap ...\cap N_{xr_x})\} \\ &= \bigcup_{x\in O} f^{-1}(N_{x1}\cap ...\cap N_{xr_x}) \\ &= \bigcup_{x\in O}\bigcap_{s=1}^{r_x} f^{-1}(N_{xs}) \end{aligned}$$

と表現できる。上式で、N_{xs} は $\mathcal{T}$ に属するので、$f^{-1}(N_{xs})$ は $\mathcal{O}_1$-開集合であり、$\bigcup_{x\in O}\bigcap_{s=1}^{r_x} f^{-1}(N_{xs})$ も $\mathcal{O}_1$-開集合である。よって、f は位相空間 $(X_1,\mathcal{O}_1)$ から $(X_2,\mathcal{O}_2)$ への連続写像になる。
逆に、f が位相空間 $(X_1,\mathcal{O}_1)$ から $(X_2,\mathcal{O}_2)$ への連続写像になることを仮定すると、準開基 $\mathcal{T}$ に属する X_2 の部分集合 O は $\mathcal{O}_2$ 開集合なので、その f による逆像 $f^{-1}(O)$ は常に $\mathcal{O}_1$ に属す。

17.9

$\mathcal{B}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R};\ a<b\}$ は通常の位相 $\mathcal{O}$ の準開基である[*16]。また、$\mathcal{B}_u=\{(a,b]\mid a,b\in\mathbb{R};\ a<b\}$ は上限位相 $\mathcal{O}_u$ の準開基である[*17]。

17.9.1

$B=(0,2)\in\mathcal{B}$ の逆像 $f^{-1}(B)$ は、$f^{-1}(B)=(0,1]\notin\mathcal{O}$ であるので、f は連続でない。

17.9.2

$B_u=(a,b]\in\mathcal{B}_u,\ a<b$ として、a,b の値を場合分けして、それぞれについて考える。

1. $b\leq 1$ のとき $f^{-1}((a,b])=(a,b]\in\mathcal{O}_u$ となる。
2. $1<b\leq 3$ のとき
   (a) $a<1$ のとき $f^{-1}((a,b])=(a,1]\in\mathcal{O}_u$ となる。
   (b) $1\leq a$ のとき $f^{-1}((a,b])=\emptyset\in\mathcal{O}_u$ となる。
3. $3<b$ のとき
   (a) $a<1$ のとき $f^{-1}((a,b])=(a,b-2]\in\mathcal{O}_u$ となる。
   (b) $1\leq a$ のとき $f^{-1}((a,b])=(1,b-2]\in\mathcal{O}_u$ となる。

結局、任意の $\mathcal{B}_u$ に属する部分集合の f による逆像が常に $\mathcal{O}_u$ に属すので、問 17.8 より f は連続である。

17.9.3

$B_u=(0,2]\in\mathcal{B}_u$ の逆像 $f^{-1}(B_u)$ は、$f^{-1}(B_u)=(0,1]\notin\mathcal{O}$ であるので、f は連続でない。

17.9.4

$B=(a,b)\in\mathcal{B},\ a<b$ として、a,b の値を場合分けして、それぞれについて考える。

[*15] r_x は x に応じて決まる自然数。
[*16] 開基でもある。
[*17] 開基でもある。

1. $b \le 1$ のとき $f^{-1}((a,b)) = (a,b) \in \mathcal{O}_u$ となる。
2. $1 < b \le 3$ のとき
   (a) $a < 1$ のとき $f^{-1}((a,b)) = (a,1] \in \mathcal{O}_u$ となる。
   (b) $1 \le a$ のとき $f^{-1}((a,b)) = \emptyset \in \mathcal{O}_u$ となる。
3. $3 < b$ のとき
   (a) $a < 1$ のとき $f^{-1}((a,b)) = (a,b-2) \in \mathcal{O}_u$ となる。
   (b) $1 \le a$ のとき $f^{-1}((a,b)) = (1,b-2) \in \mathcal{O}_u$ となる。

結局、任意の $\mathcal{B}$ に属する部分集合の f による逆像が常に $\mathcal{O}$ に属すので、問 17.8 より f は連続である。

18 点列連続性

18.1

位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において、X の点列 $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ が点 $x \in X$ に収束すると仮定する。正の実数 ϵ に対して、$N(x;\epsilon)$ は x の近傍であるので、ある番号 n_0 を選んで、$n > n_0$ ならば $x_n \in N(x;\epsilon)$ とできる。つまり、$n > n_0$ ならば、$d(x,x_n) < \epsilon$ とできるので、$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$ である。

逆に、実数列 $(d(x,x_n) \mid n \in \mathbb{N})$ について、$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$ と仮定する。X の部分集合 M が点 x の近傍であるとすると、$N(x;\epsilon) \subset M$ となるある正の実数 ϵ が存在する。$\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$ なので、ある番号 n_0 を選んで、$n > n_0$ ならば、$d(x,x_n) < \epsilon$ とできる。つまり、$n > n_0$ ならば、$x_n \in N(x;\epsilon) \subset M$ であるようにできるので、X の点列 $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ は点 $x \in X$ に収束する。

18.2

$\mathcal{O}_c = \{A \subset \mathbb{R} \mid A = \emptyset$ または $\mathbb{R} - A$ が高々可算集合 $\}$ について、以下が成り立つ。

1. $\emptyset \in \mathcal{O}_c$ かつ $\mathbb{R} \in \mathcal{O}_c$ が成り立つ。
2. $O_1, .., O_k \in \mathcal{O}$ と仮定する。$\mathbb{R} - (O_1 \cap ... \cap O_k) = (\mathbb{R} - O_1) \cup ... \cup (\mathbb{R} - O_k)$ は、高々可算集合の有限個の和集合なので、やはり高々可算集合である。よって、$O_1 \cap ... \cap O_k \in \mathcal{O}_c$ が成り立つ。
3. $(O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を $\mathcal{O}_c$ の元から成る集合系とすれば、任意の $\lambda' \in \Lambda$ について、$\mathbb{R} - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset \mathbb{R} - O_{\lambda'}$ が成り立ち、$\mathbb{R} - O_{\lambda'}$ は高々可算集合なので、$\mathbb{R} - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ も高々可算集合である。よって、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_c$ が成り立つ。

以上より、$\mathcal{O}_c$ は $\mathbb{R}$ の位相である。

18.3

写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ から位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O}_c)$ の上への同相写像であると仮定する。
今、位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ において、点列 $(\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N})$ について考える。点 $0 \in \mathbb{R}$ のどんな近傍 N に対しても、ある正の実数 ϵ が存在して、$(-\epsilon,\epsilon) \subset N$ とできる。このとき、$\frac{1}{n_0} \le \epsilon$ となるようなある番号 n_0 を選んで $n > n_0$ ならば $\frac{1}{n} \in N$ であるように出来るので、点列 $(\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N})$ は位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ において点 $0 \in \mathbb{R}$ に収束する。

次に、点列 $(f(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N})$ について考える。$M = (\mathbb{R} - \{f(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}) \cup \{f(0)\}$ は点 $f(0)$ の $\mathcal{O}_c$-開近傍である。ゆえに、位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O}_c)$ において、点列 $(f(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N})$ が点 $f(0)$ に収束するためには、ある番号 n_0 を選んで、$n > n_0$ ならば $f(\frac{1}{n}) = f(0)$ となることが必要である。これは f が単射であることに矛盾する。よって、点列 $(f(\frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N})$ は $f(0)$ に収束しないことになり、f は点 0 において点列連続でない。これは定

理 18.1 の、写像 f が点 $0 \in \mathbb{R}$ で連続ならば、f が点 0 で点列連続になることに、矛盾する。結局、f は同相写像ではないことがわかった。

18.4

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A と X の点 x について、$x \in \bar{A}$ と仮定する。このとき、x の近傍系を $\mathfrak{N}(a)$ として、$\Gamma = \mathfrak{N}(a)$ とすると、各元 $N \in \Gamma$ について、$x \in O \subset N$ となる $\mathcal{O}$-開集合 O が存在する。もし、O と A が交わらないならば、$U = \bar{A} - O$ は A を包む $\bar{A}$ よりも小さい閉集合になる。これは $\bar{A}$ が A を包む最小の閉集合であることに矛盾する。よって、$N \cap A \neq \emptyset$ である。選択公理を使って、A の有向点列 $(x_N \mid N \in \Gamma)$ で、各 $N \in \Gamma$ に対して $x_N \in N \cap A$ となるようなものを選ぶことができる。この有向点列は点 x に収束する。

逆に、$x \notin \bar{A}$ であると仮定する。A のある有向点列 $(x_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ について、もしこの有向点列が点 x に収束するならば、x の開近傍 $N = X - \bar{A}$ に対して、ある元 $\delta \in \Gamma$ を選んで、$\delta \leq \alpha$ であるようなすべての $\alpha \in \Gamma$ について、$x_\alpha \in N$ となるようにできる。だが、有向点列 $(x_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ は A の中で定義されており、任意の $\alpha \in \Gamma$ について $x_\alpha \notin N$ となり矛盾する。結局、$x \notin \bar{A}$ ならば、すべての A の有向点列 $(x_\alpha \mid \alpha \in \Gamma)$ は x に収束しない。

第 VI 部
積空間と商空間

19　積空間

19.1

直積 $X_1 \times X_2$ の 2 元 $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$ に対して、

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

と定義する。

[D_1] 任意の $x, y \in X_1 \times X_2$ について $d(x, y) \geq 0$ である。また、$d(x, y) = 0$ となるのは $d_1(x_1, y_1) = 0$ かつ $d_2(x_2, y_2) =$ のとき、そのときに限る。つまり $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときそのときに限る。

[D_2] 任意の $x, y \in X_1 \times X_2$ に対して、

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} \\ &= \sqrt{d_2(x_2, y_2)^2 + d_1(x_1, y_1)^2} = d(y, x) \end{aligned}$$

となるので、$d(x, y) = d(y, x)$ である。

[D_3] $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ z = (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$ とする。
確かめるべきことは、$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ となることであるが、関数 d は常に正なので、両辺 2 乗した $d(x, z)^2 \leq \{d(x, y) + d(y, z)\}^2$ を確かめれば良い。
$f(x, y, z) = \{d(x, y) + d(y, z)\}^2 - d(x, z)^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \{\sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} + \sqrt{d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2}\}^2 - \{d_1(x_1, z_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2\} \\ &= d_1(x_1, y_1)^2 + d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 + d_2(y_2, z_2)^2 \\ &\quad - d_1(x_1, z_1)^2 - d_2(x_2, z_2)^2 + 2\sqrt{(d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2)(d_1(y_1, z_1)^2 + d_2(y_2, z_2)^2)} \end{aligned}$$

ここで、$d_1,\ d_2$ は距離関数なので

$$d_1(x_1,z_1) \leq d_1(x_1,y_1) + d_1(y_1,z_1)$$
$$d_2(x_2,z_2) \leq d_2(x_2,y_2) + d_2(y_2,z_2)$$

が成り立つので、両辺２乗して足し合わせ、移項した式

$$\{d_1(x_1,y_1)+d_1(y_1,z_1)\}^2 + \{d_2(x_2,y_2)+d_2(y_2,z_2)\}^2 - d_1(x_1,z_1)^2 + d_2(x_2,z_2)^2$$

は正である。この正の値を $f(x,y,z)$ から引いたものを $g(x,y,z)$ とおくと、

$$g(x,y,z) = 2(\sqrt{(d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2)(d_1(y_1,z_1)^2+d_2(y_2,z_2)^2)} - (d_1(x_1,y_1)d_1(y_1,z_1)+d_2(x_2,y_2)d_2(y_2,z_2)))$$

となる。今、

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= \sqrt{(d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2)(d_1(y_1,z_1)^2+d_2(y_2,z_2)^2)} \\ g_2(x,y,z) &= (d_1(x_1,y_1)d_1(y_1,z_1)+d_2(x_2,y_2)d_2(y_2,z_2)) \end{aligned}$$

とおくと、$g_1(x,y,z) \geq 0,\ g_2(x,y,z) \geq 0$ であり、$g(x,y,z) = 2(g_1(x,y,z) - g_2(x,y,z))$ である。$g_1(x,y,z)$ を２乗すると、

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z)^2 &= (d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2)(d_1(y_1,z_1)^2+d_2(y_2,z_2)^2) \\ &= d_1(x_1,y_1)^2 d_1(y_1,z_1)^2 + d_1(x_1,y_1)^2 d_2(y_2,z_2)^2 + d_2(x_2,y_2)^2 d_1(y_1,z_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2 d_2(y_2,z_2)^2 \end{aligned}$$

となる。また、$g_2(x,y,z)$ を２乗すると、

$$\begin{aligned} g_2(x,y,z) &= (d_1(x_1,y_1)d_1(y_1,z_1)+d_2(x_2,y_2)d_2(y_2,z_2))^2 \\ &= d_1(x_1,y_1)^2 d_1(y_1,z_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2 d_2(y_2,z_2)^2 + 2d_1(x_1,y_1)d_1(y_1,z_1)d_2(x_2,y_2)d_2(y_2,z_2) \end{aligned}$$

となる。結局、

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z)^2 - g_2(x,y,z)^2 &= d_1(x_1,y_1)^2 d_2(y_2,z_2)^2 + d_2(x_2,y_2)^2 d_1(y_1,z_1)^2 - 2d_1(x_1,y_1)d_1(y_1,z_1)d_2(x_2,y_2)d_2(y_2,z_2) \\ &= (d_1(x_1,y_1)d_2(y_2,z_2) - d_2(x_2,y_2)d_1(y_1,z_1))^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となるので、$g(x,y,z)$ は常に０以上である。つまり、$f(x,y,z)$ も常に０以上となるので、$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ が成り立つ。

以上より、関数 $d(x,y)$ は距離関数である。

次に、積位相 $\mathcal{O}_1\#\mathcal{O}_2$ が d から定まる集合 $X_1 \times X_2$ 上の距離位相に一致することを示す。
$O \in \mathcal{O}_1\#\mathcal{O}_2$ と仮定する。O に属する点 $x=(x_1,x_2)$ に対して、$x \in M_1 \times M_2$ であり、$M_1 \times M_2 \subset O$ となる $M_1 \in \mathcal{O}_1,\ M_2 \in \mathcal{O}_2$ が存在する。このとき、

$$N_1(x_1;\epsilon) = \{y_1 \in X_1 \mid d_1(x_1,y_1) < \epsilon\} \subset M_1$$
$$N_2(x_2;\epsilon) = \{y_2 \in X_2 \mid d_2(x_2,y_2) < \epsilon\} \subset M_2$$

となる $\epsilon > 0$ が存在する。このとき、

$$\begin{aligned} N(x;\epsilon) &= \{y \in X_1 \times X_2 \mid d(x,y) < \epsilon\} \\ &= \{y \in X_1 \times X_2 \mid \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2} < \epsilon\} \\ &\subset \{y \in X_1 \times X_2 \mid d_1(x_1,y_1) < \epsilon \text{ かつ } d_2(x_2,y_2) < \epsilon\} \\ &= N_1(x_1;\epsilon) \times N_2(x_2;\epsilon) \\ &\subset M_1 \times M_2 \subset O \end{aligned}$$

となるので、点 x は d から定まる距離位相において O の内点になっている。結局、積位相 $\mathcal{O}_1 \# \mathcal{O}_2$ の開集合は、d から定まる距離位相の開集合になっている。
逆に、O が d から定まる距離位相の開集合であると仮定する。このとき、O に属する点 $x = (x_1, x_2)$ について、

$$N(x; \epsilon) = \{y \in X_1 \times X_2 \mid d(x, y) < \epsilon\} \subset O$$

となる $\epsilon > 0$ が存在する。

$$\begin{aligned} N_1(x_1; \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}) \times N_2(x_2; \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}) &= \{y \in X_1 \times X_2 \mid d(x_1, y_1) < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \text{ かつ } d(x_2, y_2) < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\} \\ &\subset \{y \in X_1 \times X_2 \mid \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} < \epsilon\} \\ &= N(x; \epsilon) \end{aligned}$$

となるので、d から定まる距離位相の開集合は積位相 $\mathcal{O}_1 \# \mathcal{O}_2$ の開集合になっている。

19.2

skip

19.3

射影 $p_i : X \times X \to X$ を $p_i((x_1, x_2)) = x_i$ と定義すれば、積空間 $(X, \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O})$ を生成する準開基は

$$\mathcal{T} = \{p_i^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{O};\ i \in \{1, 2\}\}$$

と表現できる。$V \in \mathcal{O}$ に対して、$\Delta^{-1}(p_i^{-1}(V))$ は $\emptyset$ ($V \neq X$ のとき) または X ($V = X$ のとき) のいずれかになるが、どちらも $\mathcal{O}$-開集合である。問 17.8 により、Δ は連続写像である。

19.4

skip

19.5

skip

19.6

skip

19.7

skip

20　商空間

20.1

[O_1] $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{O}$ なので $Y \in \mathcal{O}(f)$。
$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}$ なので $\emptyset \in \mathcal{O}(f)$。

[O_2] $O_1, ..., O_k \in \mathcal{O}(f)$ と仮定すると、$f^{-1}(O_1), ..., f^{-1}(O_k) \in \mathcal{O}$ なので、

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(O_1 \cap ... \cap O_k) \\
=&\{x \in X | f(x) \in O_1 \cap ... \cap O_k\} \\
=&\{x \in X | f(x) \in O_1 \text{かつ} ... \text{かつ } f(x) \in O_k\} \\
=&f^{-1}(O_1) \cap ... \cap f^{-1}(O_k) \in \mathcal{O}
\end{aligned}$$

よって、$O_1 \cap ... \cap O_k \in \mathcal{O}(f)$ が成り立つ。

[O_3] $((O_\lambda | \lambda \in \Lambda)$ を $\mathcal{O}(f)$ の元から成る集合系とすれば、$(f^{-1}(O_\lambda) | \lambda \in \Lambda)$ は $\mathcal{O}$ の元から成る集合系である。

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda) &= \{x \in X | \exists \lambda \in \Lambda [f(x) \in O_\lambda]\} \\
&= \{x \in X | \exists \lambda \in \Lambda [x \in f^{-1}(O_\lambda)]\} \\
&= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda) \in \mathcal{O}
\end{aligned}$$

よって、$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}(f)$ が成り立つ。

以上より、$\mathcal{O}(f)$ は位相の条件を満足する。

付録 A　有理数から実数へ

A.1　有理数列 $\{x_n\}$ が有理数 x に収束していれば、$\{x_n\}^* = x^*$ となることを確かめよ。

A.1.1　$\{x_n\}^* \subset x^*$ の証明

有理数列 $\{x'_n\}$ について $\{x'_n\} \in \{x_n\}^*$ と仮定する。任意の $\epsilon > 0$ に対して、以下の議論が成り立つ。$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$,$\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$ とおく。$\{x'_n\}$ は $\{x_n\}$ と同値なので、

$$n \geq n_1 \Longrightarrow |x'_n - x_n| < \epsilon_1$$

となるような n_1 が存在する。また、$\{x_n\}$ は、x に収束するので、

$$n \geq n_2 \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon_2$$

となるような n_2 が存在する。$n_0 = \max(n_1, n_2)$ とおくことで、任意の $n \geq n_0$ に対して、

$$|x'_n - x| \leq |x'_n - x_n| + |x_n - x| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$$

よって、$\{x'_n\} \in x^*$ となる。以上より、$\{x_n\}^* \subset x^*$。

A.1.2　$x^* \subset \{x_n\}^*$ の証明

有理数列 $\{x'_n\}$ について $\{x'_n\} \in x^*$ と仮定する。任意の $\epsilon > 0$ に対して、以下の議論が成り立つ。$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$,$\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2}$ とおく。$\{x'_n\}$ は x に収束するので、

$$n \geq n_1 \Longrightarrow |x'_n - x| < \epsilon_1$$

となるような n_1 が存在する。また、$\{x_n\}$ は、x に収束するので、

$$n \geq n_2 \Longrightarrow |x_n - x| < \epsilon_2$$

となるような n_2 が存在する。$n_0 = \max(n_1, n_2)$ とおくことで、任意の $n \geq n_0$ に対して、

$$|x'_n - x_n| \leq |x'_n - x| + |x_n - x| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$$

よって、$\{x'_n\} \in \{x_n\}^*$ となる。以上より、$x^* \subset \{x_n\}^*$。

A.2　実数の四則演算について、減法、除法、乗法の定義が可能であることを示せ。

A.2.1　減法について

1. 基本列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して、有理数列 $\{x_n - y_n\}$ が基本列であることを示す。
   $\{x_n\}, \{y_n\}$ が基本列であると仮定すると、任意の正の有理数 ϵ に対して、ある番号 n_1 を選んで、$m \geq n_1$ かつ $n \geq n_1$ であるすべての番号 m, n に対して、

   $$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |y_m - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

   が成り立つようにできる。このような m, n に対して

   $$|(x_m - y_m) - (x_n - y_n)| \leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   が成り立つので、$\{x_n + y_n\}$ も基本列である。

2. $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ かつ $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ であれば、$\{x_n - y_n\} \sim \{x'_n - y'_n\}$ が成り立つことを示す。
$\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ かつ $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ であると仮定すると、任意の正の有理数 ϵ に対して、ある番号 n_2 を選んで、$n \geq n_2$ である全ての番号 n に対して

$$|x_n - x'_n| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |y_n - y'_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つようにできる。このような n に対して、

$$|(x_n - y_n) - (x'_n - y'_n)| \leq |x_x - x'_n| + |y_n - y'_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つので、$\{x_n - y_n\} \sim \{x'_n - y'_n\}$ となる。

A.2.2 乗法について

1. 基本列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して、有理数列 $\{x_n \cdot y_n\}$ が基本列であることを示す。
$\{x_n\}, \{y_n\}$ が基本列であると仮定すると、ある番号 n_1 を選んで、$m \geq n_1$ かつ $n \geq n_1$ であるすべての番号 m, n に対して、

$$|x_m - x_n| < 1, \quad |y_m - y_n| < 1$$

が成り立つようにできる。$|a - b| < 1$ ならば $|(|a| - |b|)| < 1$ なので [*18]、$m, n \geq n_1$ のとき、

$$|x_m| < |x_{n_1}| + 1, \quad |y_n| < |y_{n_1}| + 1$$

が成り立つようにできる。よって、任意の正の有理数 δ に対して、ある番号 $n_2(\geq n_1)$ を選んで、$m \geq n_2$ かつ $n \geq n_2$ であるすべての番号 m, n に対して、

$$|x_m(y_m - y_n)| < (|x_{n_1}| + 1)|y_m - y_n| < \frac{\delta}{2}, \quad |y_n(x_m - x_n)| < (|y_{n_1}| + 1)|x_m - x_n| < \frac{\delta}{2}$$

とすることができる。このような m, n に対して

$$|(x_m \cdot y_m) - (x_n \cdot y_n)| = |x_m(y_m - y_n) + y_n(x_m - x_n)| \leq |x_m(y_m - y_n)| + |y_n(x_m - x_n)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

が成り立つので、$\{x_n \cdot y_n\}$ も基本列である。

2. $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ かつ $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ であれば、$\{x_n \cdot y_n\} \sim \{x'_n \cdot y'_n\}$ が成り立つことを示す。
$\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ かつ $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ であると仮定すると、$\{x_n\}$, $\{y'_n\}$ は基本列なので、ある番号 n_3 を選んで、$m, n \geq n_3$ であるすべての番号 m, n に対して、

$$|x_m - x_n| < 1, \quad |y'_m - y'_n| < 1$$

が成り立つようにできる。よって、$n \geq n_3$ のとき、

$$|x_n| < |x_{n_3}| + 1, \quad |y'_n| < |y'_{n_3}| + 1$$

が成り立つようにできる。よって、任意の正の有理数 δ に対して、ある番号 $n_4(\geq n_3)$ を選んで、$n \geq n_4$ であるすべての番号 n に対して、

$$|x_n(y_n - y'_n)| < (|x_{n_3}| + 1)|y_n - y'_n| < \frac{\delta}{2}, \quad |y'_n(x_n - x'_n)| < (|y_{n_3}| + 1)|x_n - x'_n| < \frac{\delta}{2}$$

とすることができる。このような m, n に対して

$$|(x_n \cdot y_n) - (x'_n \cdot y'_n)| = |x_n(y_n - y'_n) + y'_n(x_n - x'_n)| \leq |x_n(y_n - y'_n)| + |y'_n(x_n - x_n)'| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

が成り立つので、$\{x_n \cdot y_n\} \sim \{x'_n \cdot y'_n\}$ となる。

[*18] 逆は一般に成り立たない

A.2.3 除法について

1. 基本列 $\{x_n\},\{y_n\}$ (ただし $\{y_n\}^* \neq 0^*,\ y_n \neq 0)$ に対して、有理数列 $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ が基本列であることを示す。
$\{x_n\},\{y_n\}$ が基本列であると仮定する。$\{y_n\}^* \neq 0^*$ より、ある正の有理数 ϵ_0 が存在して、任意の番号 n_0 に対して、$n > n_0$ となるある番号 n が存在し、$|y_n| > \epsilon_0$ が成り立つようにできる。$\{x_n\},\{y_n\}$ は基本列なので、この正の有理数 ϵ_0 に対して、ある番号 n_1 を選んで、$m \geq n_1$ かつ $n \geq n_1$ であるすべての番号 m,n に対して、
$$|x_m - x_n| < \epsilon_0, \quad |y_m - y_n| < \epsilon_0$$
が成り立つようにできる。$|a-b| < \epsilon_0$ ならば $|(|a|-|b|)| < \epsilon_0$ であり[*19]、またある番号 $n(\geq n_1)$ に対して $|y_n| > \epsilon_0$ が成り立つはずなので 、$m,n \geq n_1$ のとき、
$$|x_m| < |x_{n_1}| + \epsilon_0, \quad 0 < |y_{n_1}| - \epsilon_0 < |y_m|, \quad 0 < |y_{n_1}| - \epsilon_0 < |y_n|$$
が成り立つようにできる。よって、任意の正の有理数 δ に対して、ある番号 $n_2(\geq n_1)$ を選んで、$m \geq n_2$ かつ $n \geq n_2$ であるすべての番号 m,n に対して、
$$\frac{|x_m - x_n|}{|y_m|} < \frac{|x_m - x_n|}{(|y_{n_1}| - \epsilon_0)} < \frac{\delta}{2}, \quad \frac{|x_n||y_m - y_n|}{|y_m||y_n|} < \frac{(|x_{n_1}| + \epsilon_0)|y_m - y_n|}{(|y_{n_1}| - \epsilon_0)(|y_{n_1}| - \epsilon_0)} < \frac{\delta}{2}$$
とすることができる。このような m,n に対して
$$|\frac{x_m}{y_m} - \frac{x_n}{y_n}| = |\frac{1}{y_m}(x_m - x_n) + \frac{x_n}{y_m y_n}(y_n - y_m)| \leq |\frac{1}{y_m}(x_m - x_n)| + |\frac{x_n}{y_m y_n}(y_n - y_m)| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$
が成り立つので、$\{\frac{x_n}{y_n}\}$ も基本列である。

2. $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ かつ $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ (ただし $\{y_n\}^* \neq 0^*,\ y_n \neq 0,\ \{y'_n\}^* \neq 0^*,\ y'_n \neq 0)$ であれば、$\{\frac{x_n}{y_n}\} \sim \{\frac{x'_n}{y'_n}\}$ が成り立つことを示す。
$\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ かつ $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ であると仮定する。$\{y_n\}^* \neq 0^*$, $\{y'_n\}^* \neq 0^*$ より、ある正の有理数 ϵ_0 が存在して、
$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ [\exists n \in \mathbb{N}\ [n \geq n_0 \text{ かつ } |y_n| > \epsilon_0]]$$
$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ [\exists n \in \mathbb{N}\ [n \geq n_0 \text{ かつ } |y'_n| > \epsilon_0]]$$
が成り立つようにできる。$\{x'_n\},\{y_n\},\{y'_n\}$ は基本列なので、この正の有理数 ϵ_0 に対して、ある番号 n_1 を選んで、$m,n \geq n_1$ であるすべての番号 m,n に対して、
$$|x'_m - x'_n| < \epsilon_0, \quad |y_m - y_n| < \epsilon_0, \quad |y'_m - y'_n| < \epsilon_0$$
が成り立つようにできる。$|a-b| < \epsilon_0$ ならば $|(|a|-|b|)| < \epsilon_0$ であり[*20]、またある番号 $m(\geq n_1)$ に対して $|y_m| > \epsilon_0$ が成り立ち、ある番号 $n(\geq n_1)$ に対して $|y'_n| > \epsilon_0$ が成り立つはずなので 、$n \geq n_1$ のとき、
$$|x'_n| < |x'_{n_1}| + \epsilon_0, \quad 0 < |y_{n_1}| - \epsilon_0 < |y_n|, \quad 0 < |y'_{n_1}| - \epsilon_0 < |y'_n|$$
が成り立つようにできる。よって、任意の正の有理数 δ に対して、ある番号 $n_2(\geq n_1)$ を選んで、$n \geq n_2$ であるすべての番号 n に対して、
$$\frac{|x_n - x'_n|}{|y_n|} < \frac{|x_n - x'_n|}{(|y_{n_1}| - \epsilon_0)} < \frac{\delta}{2}, \quad \frac{|x'_n||y'_n - y_n|}{|y_n||y'_n|} < \frac{(|x'_{n_1}| + \epsilon_0)|y'_n - y_n|}{(|y_{n_1}| - \epsilon_0)(|y'_{n_1}| - \epsilon_0)} < \frac{\delta}{2}$$

[*19] 逆は一般に成り立たない
[*20] 逆は一般に成り立たない

とすることができる。このような n に対して

$$|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x'_n}{y'_n}|=|\frac{1}{y_n}(x_n-x'_n)+\frac{x'_n}{y_ny'_n}(y'_n-y_n)|\leq|\frac{1}{y_n}(x_n-x'_n)|+|\frac{x'_n}{y_ny'_n}(y'_n-y_n)|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$$

が成り立つので、$\{\frac{x_n}{y_n}\}\sim\{\frac{x'_n}{y'_n}\}$ が成り立つ

A.3

A.3.1 $\alpha\geq 0\Longrightarrow|\alpha|=\alpha$ の証明

$\alpha=\{x_n\}^*$ とおく。$\alpha\geq 0$ と仮定する。以下では $\alpha=0$ の場合と、$\alpha>0$ の場合に場合分けして議論する。

1. $\alpha=0$ の場合
   $\alpha=0$ と仮定すると、任意の正の有理数 ϵ に対して、ある番号 n_0 が存在し、すべての番号 $n>n_0$ において
   $$|x_n-0|<\epsilon$$
   とすることができる。$||x_n|-0|=|x_n-0|$ なので、上記の主張は $\{|x_n|\}^*=0$ の定義でもある。よって、$|\alpha|=0$。
2. $\alpha>0$ の場合
   $\alpha>0$ と仮定すると、ある正の有理数 δ_1 と番号 n_1 を選んで、$n\geq n_1$ であるすべての番号 n に対して、
   $$x_n-0>\delta_1$$
   が成り立つできるようにできる。よって、$n\geq n_1$ のとき $x_n>0$ なので、$|x_n|=x_n$ が成り立つ。
   以上より、任意の正の有理数 δ に対して、ある番号 n_1 が存在し、$n\geq n_1$ であるすべての番号 n に対して、
   $$|(|x_n|-x_n)|<\delta$$
   とすることができるので、$\{|x_n|\}^*=\{x_n\}$。

1.2. より、$\alpha\geq 0$ と仮定すると、$|\alpha|=\alpha$。

A.3.2 $\alpha<0\Longrightarrow\alpha+|\alpha|=0$ の証明

$\alpha=\{x_n\}^*$ とおく。$\alpha<0$ と仮定すると、ある正の有理数 ϵ と番号 n_0 を選んで、$n\geq n_0$ であるすべての番号 n に対して $0-x_n>\epsilon$ とすることができる。よって、$n\geq n_0$ のとき、$x_n<0$ なので、$x_n+|x_n|=0$ が成り立つ。
以上より、任意の正の有理数 δ に対して、ある番号 n_0 が存在し、$n\geq n_0$ であるすべての番号 n に対して、

$$|(x_n+|x_n|)-0|<\epsilon$$

が成り立つ。よって、$\{x_n+|x_n|\}^*=0^*$、つまり $\alpha+|\alpha|=0$ である。

A.4

A.4.1 $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ の証明

$\alpha=\{x_n\}^*,\ \beta=\{y_n\}^*$ とする。任意の番号 n に対して

$$|x_n+y_y|\leq|x_n|+|y_n|$$

である。よって、

$$\exists\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ [\ n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n + y_n| - (|x_n| + |y_n|) > \epsilon\ ]$$

とはできない。つまり $\{|x_n + y_n|\}^* > \{|x_n| + |y_n|\}^*$ ではないので、$|\alpha+\beta| > |\alpha| + |\beta|$ ではない。以上より、$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

A.4.2　$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ の証明

$\alpha = \{x_n\}^*,\ \beta = \{y_n\}^*$ とする。任意の番号 n に対して

$$|x_n \cdot y_y| = |x_n| \cdot |y_n|$$

である。よって、任意の正の有理数 ϵ に対して、ある番号 n_1 を選んで、$n \geq n_1$ であるすべての番号 n に対して、

$$|(|x_n \cdot y_n| - |x_n| \cdot |y_n|)| < \epsilon$$

とすることができる。よって、$\{|x_n \cdot y_n|\}^* = \{|x_n| \cdot |y_n|\}^*$ である。つまり、$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

A.5　任意の実数 α に対して、$n \leq \alpha < n+1$ が成り立つような整数 n がただ一つ存在することの証明

$\alpha = n$ となるような整数 n が存在するとき、$n \leq \alpha < n+1$ が成り立ち、そのような n はただ一つである。以下では $\alpha = n$ となるような整数 n が存在しないと仮定する。

以下の操作を繰り返し、帰納的に (アルゴリズミックに) 証明する。はじめ、$\epsilon = 0.1$ とする。

操作 1　$\{x_i\}$ は基本列なので、ϵ に対してある番号 i_0 を選んで、$i \geq i_0$ かつ $j \geq i_0$ であるすべての番号 i, j に対して

$$|x_i - x_j| < \epsilon$$

が成り立つようにできる。

操作 2　x_{i_0} は有理数なので、$n \leq x_{i_0} < n+1$ となる整数 n が存在する[*21]。$\{x_i\}^* \neq n$ かつ $\{x_i\}^* \neq n+1$ なので、ある正の有理数 δ を選び、さらに $i_1 \geq i_0$ となる番号 i_1 を選んで、$i \geq i_1$ であるすべての番号 i について

$$|x_i - n| > \delta \quad かつ \quad |(n+1) - x_i| > \delta$$

とすることができる。

$n < x_{i_1} < n+1$ かつ $\epsilon < \delta$ ならば、操作を終了する。そうでなければ、ϵ に $\frac{\epsilon}{2}$ の値を代入して、再び、操作 1 に戻る。

このアルゴリズムの終了時点を考えると[*22]、正の有理数 $\delta - \epsilon$ に対して、番号 i_1 を選んで、$i \geq i_1$ であるすべての番号 i について

$$x_i - n > \delta - \epsilon \quad かつ \quad (n+1) - x_i > \delta - \epsilon$$

[*21] 実際、x_i は有理数なので整数 $p,\ q\ (p \neq 0)$ を用いて、$x_i = \frac{q}{p}$ と表せる。このとき q/p の整数部分が n である。

[*22] このアルゴリズムは終了する。実際、$\epsilon \leq 0.1$ なので、操作 1 で定めた i_0 に対して、$i \geq i_0$ であるすべての番号 i について、$n - 1 < x_i < n + 2$ が成り立つ。また、ある正の有理数 δ が存在し、この $n-1, n, n+1, n+2$ それぞれについて、

$$\exists i_{n-1} \in \mathbb{N}\ [i > i_{n-1} \Longrightarrow |x_i - (n-1)| > \delta]$$
$$\exists i_n \in \mathbb{N}\ [i > i_n \Longrightarrow |x_i - n| > \delta]$$
$$\exists i_{n+1} \in \mathbb{N}\ [i > i_{n+1} \Longrightarrow |x_i - (n+1)| > \delta]$$
$$\exists i_{n+2} \in \mathbb{N}\ [i > i_{n+2} \Longrightarrow |x_i - (n+2)| > \delta]$$

が成り立つようにできるため、$\epsilon < \delta$ となるまで操作 1、操作 2 を繰り返せば終了する。

が成り立っている。よって、$n < \{x_i\}^* < n+1$ である。