# 杉浦光夫解析入門 補足

## 解析入門 I P201
## 第III章初等函数§4 初等函数2. 対数函数, 逆三角関数 [3] 逆三角関数 (4.31)式が収束半径1であることの理由

$$(4.31)\quad \mathrm{Arcsin}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

が成り立つこと、および右辺の収束半径が1であるを証明する際に

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$$

を第n項とする級数が収束することを証明なしに仮定していた。(P201の下から7行目)
ここでは、その証明を試みたい。

$f(n) = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{1}{2n+1}$とおく。

$$\text{式①}\quad \log f(n) = \log \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \log(2n+1) = \sum_{m=1}^{n} \log \frac{2m-1}{2m} - \log(2n+1)$$

となり、ここで区分求積法の考え方を用いると、

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n} \log \frac{2m-1}{2m} &\leq \int_0^n \log(1 - \frac{1}{2(x+1)})dx \\
&= \int_0^n \log(2x+1)dx - \int_0^n \log(2x+2)dx \\
&= \frac{2n+1}{2}\log(2n+1) - \frac{2n+2}{2}\log(2n+2) + \log 2
\end{aligned}$$

となる。最後の部分でlogの積分を求めるために、部分積分を用いた。これを式①に代入して、

$$\begin{aligned}
\log f(n) &\leq \frac{2n+1}{2}\log(2n+1) - \frac{2n+2}{2}\log(2n+2) + \log 2 - \log(2n+1) \\
&\leq \frac{2n+1}{2}\log(2n+2) - \frac{2n+2}{2}\log(2n+2) + \log 2 - \log(2n+1) \\
&\leq -\frac{1}{2}\log(2n+2) + \log 2 - \log(2n+1) \\
&\leq -\frac{3}{2}\log(2n+2) + \log 2
\end{aligned}$$

以上より、$f(n) \leq \dfrac{2}{(2n+2)^{\frac{3}{2}}}$ が成り立つことがわかった。

ゼータ函数$\zeta(\frac{3}{2})$が収束するため、$\frac{2}{(2n+2)^{\frac{3}{2}}}$を項とする級数は収束する。部分和の数列が上に有界となるため、正項級数$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$も収束することがわかった（定理Ⅰ 5.4)。