6. СИНТЕЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

6.1 Этапы синтеза трехмерного изображения

В общем случае задача синтеза изображения трехмерных объектов представляет собой задачу имитации визуальной обстановки, т.е. искусственного построения изображений окружающей среды с такой степенью достоверности, которая достаточна для выработки и поддержания у пользователя программы навыков управления подвижными объектами. Таким образом, синтезируемое изображение должно быть динамическим и как можно более реалистичным.

Переходя к формальному описанию стоящей задачи, можно отметить следующее (рис.6.1.1). В базовой системе координат (X, Y, Z) задано описание трехмерной среды, составленной из непрозрачных или прозрачных твердых объектов, поверхности которых могут быть представлены конечным множеством радиус-векторов R_i и нормалей к поверхностям N_i. Характеристиками поверхности являются ее цвет, а также коэффициенты диффузного и зеркального отражения, коэффициенты преломления света. Наряду с неподвижными объектами в сцене могут присутствовать подвижные объекты, задаваемые в собственной подвижной системе координат ($X_п$, $Y_п$, $Z_п$).

Кроме перечисленных двух систем координат, задается еще третья подвижная система координат, связанная с наблюдателем ($X_н$, $Y_н$, $Z_н$). Начало этой системы координат совпадает с глазом наблюдателя (оператора), а ось $Z_н$ – с направлением наблюдения. Также задается плоскость обзора, перпендикулярная оси $Z_н$, а в этой плоскости – прямоугольное окно обзора, ограничивающее угол зрения по вертикали и горизонтали.

Для каждого интервала времени T=1/F, где F – частота смены кадров изображения, известны положение и ориентация наблюдателя и всех подвижных объектов, которые могут быть заданы либо с помощью шести числовых параметров (три координаты векторов положения и три угла Эйлера), либо в виде матриц положения.

Визуализируемая среда освещается в простейшем случае бесконечно удаленным источником, направление освещения которого задается вектором I. Модуль этого вектора может для удобства задавать интенсивность освещения. Состояние окружающей атмосферы определяется цветом фона $C_ф$ и коэффициентом прозрачности (тумана, дымки) β.

Задача синтеза изображения состоит в том, чтобы для каждого временного интервала сформировать изображение объектов (или их частей) окружающей среды в плоскости обзора с учетом приемов имитации трехмерного пространства.

Решение общей задачи может быть представлено в виде совокупности следующих основных задач: преобразование всех объектов в единую систему координат, выделение объектов, попадающих в поле зрения наблюдателя, проецирование выделенных объектов на плоскость обзора, удаление невидимых поверхностей, вычисление цвета видимых поверхностей, формирование сигналов изображения для воспроизводящего устройства (например, видеосигналов для растрового дисплея).

Последовательность решаемых задач можно сформулировать в виде следующих восьми этапов.

1. Разработка трехмерной математической модели синтезируемой визуальной обстановки.

2. Определение направления линии визирования , положения картинной плоскости, размеров окна обзора, значений управляющих сигналов.
3. Формирование операторов, осуществляющих пространственное перемещение моделируемых объектов визуализации.
4. Преобразование модели, синтезируемой в пространстве, к координатам наблюдателя.
5. Отсечение объектов визуального пространства в пределах пирамиды видимости.
6. Вычисление двумерных перспективных проекций синтезируемых объектов видимости на картинную плоскость.
7. Исключение невидимых элементов синтезируемого пространства при данном положении наблюдателя, закрашивание и затенение видимых элементов объектов визуализации.
8. Вывод полутонового изображения синтезируемого визуального пространства на экран растрового дисплея.

Дадим краткую характеристику каждого из перечисленных этапов синтеза изображения. Первый этап является подготовительным. На этом этапе формируется база данных с информацией об объектах визуализации. Она формируется из моделей объектов визуализации с учетом специфики решаемой задачи и с использованием принципа минимизации времени доступа к отдельным элементам базы.

Существует большое число способов описания поверхностей объектов визуализации моделируемого пространства. Часто используют простейшую полигональную аппроксимацию, а также бикубические сплайны, поверхности и кривые Безье, Кунса. Основным графическим примитивом является грань –– многоугольник, задаваемый координатами вершин и цветом.

При создании математической модели проводится часто также предварительное построение габаритных сфер объектов (это необходимо при использовании алгоритмов удаления невидимых поверхностей, в частности при использовании трассировки лучей), расчет теней о неподвижных объектов, раскраска неподвижных объектов, расчет взаимных пересечений.

На втором этапе задаются координаты положения наблюдателя ($X_н$, $Y_н$, $Z_н$), положения картинной плоскости P (углы α, β, γ , образуемые нормалью с осями координат, расстояние от оператора–наблюдателя до главной точки изображения (главной точкой изображения называется точка пересечения линии визирования и картинной плоскости), размеры окна обзора.

Для динамических объектов необходимо знать также управляющие сигналы в каждый момент времени регенерации изображения. В качестве управляющих сигналов можно выбрать, например, значения составляющих мгновенной угловой скорости вращения и поступательной скорости перемещения центра масс объекта визуализации.

На третьем этапе осуществляется формирование операторов преобразования координат модели синтезируемого пространства в систему координат наблюдателя. В качестве операторов могут выступать матрицы направляющих косинусов, углы Эйлера-Крылова, параметры Гамильтона, Кэйли-Клейна. Наиболее часто используются матрицы направляющих косинусов.

На четвертом этапе с использованием матриц преобразования осуществляется пересчет координат модели сцены из исходной системы координат в систему координат, связанную с наблюдателем.

После преобразования объектов сцены к системе координат наблюдателя на пятом этапе производится отсечение примитивов в пределах пирамиды видимости. Это связано с тем, что необходимо удалить из сцены те объекты или их фрагменты, которые не попадают в поле видимости наблюдателя. Считается, что наблюдатель может видеть лишь те объекты, которые находятся не ближе некоторого минимального расстояния по отношению к его глазу, не далее некоторого максимального расстояния и при этом попадают в конус видимости, вершина которого совпадает с глазом наблюдателя. Таким образом, необходимо удалить все объекты, лежащие за пределами получаемого усеченного конуса.

Для удобства работы усеченный конус заменяют усеченной четырехгранной пирамидой, которую и называют пирамидой видимости. Для полигональных сцен, состоящих из многоугольников, выполнение этого этапа состоит в последовательном отсечении всех многоугольников. Отсечение одного многоугольника осуществляется за шесть шагов. На каждом шаге выполняется отсечение многоугольника одной из шести плоскостей, проходящих через грань пирамиды видимости.

На шестом этапе проводится вычисление центральных проекций точек сцены на картинную плоскость с использованием матрицы центрального проецирования. Данное преобразование дополняется преобразованиями масштабирования и переноса для перехода к экранной системе координат дисплея.

На седьмом этапе проводится удаление невидимых линий и поверхностей объектов сцены. Для оставшихся объектов (граней) в соответствии с выбранной моделью освещения и оптическими свойствами поверхностей и материалов, из которых они состоят, проводится расчет яркости и интенсивности цвета каждого пиксела.

На заключительном восьмом этапе на основе полученной в ходе предыдущих этапов информации осуществляется формирование видеосигнала, обеспечивающего вывод на экран растрового дисплея синтезируемого изображения. При этом используются методы растровой развертки, т.е. ранее рассмотренные алгоритмы построения отрезков прямых , кривых, развертки сплошных областей.

Из задач, решаемых на каждом из рассмотренных этапов синтеза изображения, не все решаются с использованием методов машинной графики. Часть задач решается с использованием методов теоретической механики, теории управления. В машинной графике решаются задачи разработки модели синтезируемой обстановки, задания исходных данных, связанных с определением положения наблюдателя и картинной плоскости, преобразования объектов сцены из одной системы координат в другую систему координат, отсечение объектов, вычисление перспективных проекций, удаление невидимых линий и поверхностей, создание реалистических изображений, растровой развертки простейших элементов изображения.

Часть из перечисленных задач нами уже рассмотрена. В дальнейшем основное внимание будет уделено наиболее интересным и сложным задачам всей машинной графики: удалению невидимых линий и поверхностей, а также созданию реалистических изображений. Наряду с этим рассмотрим также преобразования в трехмерном пространстве, проецирование, трехмерное отсечение.

6.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом параграфе рассмотренные ранее методы двумерных преобразований распространяются на изображения трехмерных объектов. Матрица преобразований в трехмерном пространстве в однородных координатах будет иметь размерность 4*4. Координаты точки (X, Y, Z) заменяются четверткой (WX, WY, WZ,W), W≠0. Каждая точка пространства может быть задана четверкой одновременно не равных нулю чисел, эта четверка определена однозначно до общего множителя. Такой подход позволяет в матричной форме описать операции преобразования.

Любое аффинное преобразование в трехмерном пространстве может быть представлено в виде суперпозиции переносов, масштабирований, поворотов. Поэтому опишем только эти преобразования.

ПЕРЕНОС

Перенос в трехмерном пространстве является простым расширением двумерного. Матрица преобразования имеет следующий вид (аналогичный 2.5.4):

$$M_{пер}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ DX & DY & DZ & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.1)$$

Воспользовавшись матрицей (6.2.1), получим следующие значения новых координат точки объекта визуализации: X1=X+DX; Y1=Y+DY; Z1=Z+DZ.

Результат переноса при различных значениях DX и DY рассматривался в разделе 2.5., положительные значения DZ приводят к удалению точки от наблюдателя в глубь экрана, при отрицательных - точка приближается к наблюдателю.

Задавая одни и те же значения DX, DY, DZ для всех точек рисунка и повторяя многократно перенос, получим движение рисунка по экрану без изменения формы изображаемого объекта. Если же значения DX, DY, DZ не совпадают для всех точек, то движение будет происходить с изменением начальной формы.

При движении объекта вдоль оси Z необходимо использовать при его изображении уравнение перспективы, поэтому при отрицательных значениях DZ объект, приближаясь к наблюдателю, увеличивается в размерах, при положительных значениях, удаляясь, уменьшается в размерах.

МАСШТАБИРОВАНИЕ

Матрица преобразования при масштабировании аналогична матрице для двумерного масштабирования:

$$M_{мас}=\begin{pmatrix} KX & 0 & 0 & 0 \\ 0 & KY & 0 & 0 \\ 0 & 0 & KZ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.2)$$

При использовании этой матрицы центр масштабирования располагается в начале координат. Если в качестве центра масштабирования выбрана точка с координатами ($X_м$, $Y_м$, $Z_м$), то новые координаты промасштабированной точки определяются из выражения :

$$X1=X*KX+(1-KX)*X_м$$
$$Y1=Y*KY+(1-KY)*Y_м \qquad (6.2.3)$$
$$Z1= Z*KZ+(1-KZ)*Z_м$$

где (X,Y,Z) - координаты исходной точки, (X1,Y1,Z1) - координаты промасштабированной точки, KX, KY, KZ - коэффициенты масштабирования вдоль координатных осей. Можно также воспользоваться матрицей масштабирования, но предварительно следует перенести тело и центр масштабирования так, чтобы центр масштабирования оказался в начале координат.

Коэффициенты масштабирования могут принимать любые значения. Как и ранее, значение коэффициента, большее 1, приводит к увеличению размеров изображения объекта, меньшее 1 - к уменьшению. При KX=KY=KZ происходит равномерное изменение размеров изображения. При отрицательных значениях коэффициентов масштабирования происходит симметричное отображение масштабируемого объекта относительно соответствующей координатной плоскости. При KX= -1, KY=0, KZ=0 происходит отображение относительно плоскости YOZ (или ей параллельной); при KX=0, KY= -1, KZ=0 происходит отображение относительно плоскости XOZ (или ей параллельной); при KX=0, KY=0, KZ= -1 происходит отображение относительно плоскости XOY. Часто такой частный случай масштабирования называют отражения.

ПОВОРОТ

Двумерный поворот, описываемый с помощью (2.5.7.) или (2.5.8.), в трехмерном пространстве является по сути трехмерным поворотом вокруг оси Z или ей параллельной, проходящей через центр вращения (X_c,Y_c). При таком повороте не затрагиваются значения координаты Z для всех точек изображения.

Матрица поворота вокруг оси Z имеет вид, аналогичный (2.5.8.):

$$M_{повz}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.4.)$$

Матрица (6.2.4.) получена в предположении, что наблюдатель находится в начале системы координат и смотрит вдоль положительной полуоси Z. Если же наблюдатель смотрит с конца положительной полуоси (это положение использовалось при определении системы координат), то матрица будет иметь вид:

$$M_{повz}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.5.)$$

Единичный вектор X[1 0 0 1] в результате поворота на 90° станет единичным вектором Y[0 1 0 1]. Проверим это.

$$[1\ 0\ 0\ 1]\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [0\ 1\ 0\ 1],$$

что и подтверждает соглашение о правосторонней системе координат.

Если ось вращения проходит через точку с координатами (X_c,Y_c), то координаты преобразованной точки определяются по формуле

$$X1=X_c+(X-X_c)*\cos\theta-(Y-Y_c)*\sin\theta$$
$$Y1=Y_c+(X-X_c)*\sin\theta+(Y-Y_c)*\cos\theta \qquad (6.2.6)$$

При вращении вокруг оси X матрица преобразования будет иметь следующий вид:

$$M_{\text{повх}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.7.)$$

Здесь предполагалось, что наблюдатель смотрит с конца положительной полуоси X, и поворот производится против часовой стрелки. Если же ось вращения параллельна оси X и проходит через точку с координатами (Y_c,Z_c), то новые координаты для точки (Y,Z) определяются по формуле:

$$Y1=Y_c+(Y-Y_c)*\cos\theta-(Z-Z_c)*\sin\theta$$
$$Z1=Z_c+(Z-Z_c)*\cos\theta+(Y-Y_c)*\sin\theta \qquad (6.2.8.)$$

Координата X не изменяет своего значения. Для использования матрицы поворота следует сначала произвести перенос таким образом, чтобы центр поворота совпал с началом координат, провести преобразование поворота, а затем произвести обратный перенос. Это связано с тем, что при использовании матрицы поворота предполагается, что центр поворота находится в начале координат.

Матрица поворота вокруг оси Y будет иметь вид:

$$M_{\text{пову}}=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.9.)$$

Если же ось вращения параллельна оси Y и проходит через точку (X_c,Z_c), то новые координаты для точки (X,Z) определяются по формулам:

$$X1=X_c+(X-X_c)*\cos\theta+(Z-Z_c)*\sin\theta$$
$$Z1=Z_c+(Z-Z_c)*\cos\theta-(X-X_c)*\sin\theta \qquad (6.2.10.)$$

Координата Y при повороте вокруг оси Y (или ей параллельной) не изменяется.

Если совершается произвольная последовательность поворотов вокруг осей X,Y,Z, то матрица преобразования будет иметь следующий вид:

$$M_{пов}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.11.)$$

Вращение вокруг оси, параллельной оси Z, лишь меняет ориентацию постоянно обращенной к наблюдателю поверхности. Вращение вокруг оси, параллельной оси Y, дает возможность увидеть разные стороны предмета. Вращение вокруг оси, параллельной оси X, дает возможность увидеть верхнюю, нижнюю поверхности предмета.

Чтобы увидеть предмет с произвольного направления, необходимо выполнить комбинированное преобразование изображения, состоящее из нескольких операций вращения.

Рассмотрим получение матрицы поворота на угол θ вокруг прямой L, проходящей через точку A(a, b, c) и имеющей направляющий вектор (k, l, m). Предположим, что этот вектор является единичным, т.е. $k^2 + l^2 + m^2 = 1$.

Сначала следует осуществить перенос прямой L на вектор (-a, -b, -c), это приведет к тому, что прямая пройдет через начало координат. Матрица переноса будет иметь следующий вид:

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

На втором шаге необходимо совместить ось вращения L с осью Z путем поворота вокруг оси абсцисс и оси ординат. Первый поворот выполняется вокруг оси абсцисс на угол φ, который подлежит определению. Прямая, являющаяся ортогональной проекций на плоскость X=0 исходной прямой, имеет направляющий вектор (0, l, m), отсюда получается, что cosφ=m/d, sinφ=l/d, где $d=\sqrt{l^2+m^2}$. Матрица поворота будет иметь следующий вид:

$$M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m/d & l/d & 0 \\ 0 & -l/d & m/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При выполнении этого преобразования координаты исходного направляющего вектора (k, l, m) изменяются. В результате пересчета получим: (k, l, m, 1) M_2 =(k, 0, d, 1). Второй поворот выполняется вокруг оси ординат на угол -ψ, определяемый соотношениями cosψ=d, sinψ= k. Матрица поворота в этом случае имеет вид:

$$M_3=\begin{pmatrix} d & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На третьем шаге выполняется поворот прямой L на заданный угол θ. Матрица поворота имеет следующий вид:

$$M_4=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На четвертом шаге выполняется обратный поворот вокруг оси ординат на угол ψ, вокруг оси абсцисс на угол -φ и обратный перенос на вектор (a, b, c). Перемножая матрицы преобразований в порядке выполнения операций, получим следующую итоговую матрицу преобразования:

$$M=M_1M_2M_3M_4M_3^{-1}M_2^{-1}M_1^{-1}$$

6.3.ТРЕХМЕРНОЕ ОТСЕЧЕНИЕ

При проведении отсечения необходимо определить форму отсекателя, по границам которого будет производиться отсечение. По аналогии с плоским случаем стандартным отсекателем в трехмерном пространстве будет являться прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис.6.3.1а). Как и в двумерном отсечении, здесь также можно использовать обобщенные коды концевых точек, предложенные Коэном и Сазерлендом. В трехмерном случае должен использоваться шестибитовый код. Самый младший (правый) бит считается первым. Единица в соответствующий бит заносится в следующих случаях:

- в первый бит, если точка находится левее отсекателя (левее левой грани);
- во второй бит, если точка находится правее отсекателя (правее правой грани);
- в третий бит, если точка находится ниже отсекателя (ниже нижней грани);
- в четвертый бит, если точка находится выше отсекателя (выше верхней грани);
- в пятый бит, если точка находится ближе отсекателя (перед передней гранью);
- в шестой бит, если точка находится дальше отсекателя (за дальней гранью).

Во всех остальных случаях в биты заносятся нули.

Наряду с прямоугольным параллелепипедом в качестве отсекателя используется также усеченная пирамида (рис.6.3.1б). Использование пирамиды связано с тем, что объекты, попадающие в поле видимости наблюдателя, располагаются в пределах конуса, вершина которого совпадает с глазом человека. Причем наблюдатель не видит предметов, расположенных на очень близком расстоянии и на большом расстоянии. Отсюда и получается конус видимости. Однако в практических случаях удобнее пользоваться усеченной пирамидой (пирамидой видимости), которая аппроксимирует конус.

Определение кодов концевых точек отрезка при использовании в качестве отсекателя усеченной пирамиды требует дополнительных рассуждений. В одном из методов пирамида преобразуется таким образом, что $X_л = -1$, $X_{пр}=1$, $Y_{нижн} = -1$, $Y_{верх}=1$, $Z_{ближ}=a$, $(0<a\le1)$, $Z_{даль}= -1$. Однако при этом существенно искажается форма отсекателя. В другом случае отрезок, соединяющий центр проекции с центром усеченной пирамиды, совмещается с осью Z правой системы координат (рис.6.3.2).

Уравнение прямой на плоскости XZ, несущей проекцию правой грани отсекателя, имеет вид:

$$\frac{X}{X_{\text{äàëüï}}} = \frac{Z_{\text{öï}} - Z}{Z_{\text{öï}} - Z_{\text{äàëü}}}$$

X=AZ+B,

где A = -$X_{даль}$/($Z_{цп}$ -$Z_{даль}$) , B= -A $Z_{цп}$ (A<0, B>0)

Полученное уравнение правой грани пирамиды можно использовать для определения местоположения точки: справа, слева от плоскости или на самой плоскости. Для этого следует использовать пробную функцию $f_{пр}$=X-AZ - B. Если значение пробной функции отрицательно, то исследуемая точка лежит слева от отсекающей плоскости (по видимую сторону отсекающей плоскости), если значение функции - положительно, то точка лежит справа от плоскости, если значение функции равно нулю, то точка лежит на плоскости.

Для левой грани получим следующее уравнение

$$\frac{X}{- X_{\text{äàëüë}}} = \frac{Z_{\text{öï}} - Z}{Z_{\text{öï}} - Z_{\text{äàëü}}}$$

X=CZ+D,

где C= $X_{дальл}$ /(Z $_{цп}$-$Z_{даль}$), D= -C$Z_{цп,}$ $f_{пр}$ =X-CZ-D (C>0, D<0).

Значение пробной функции в этом случае положительно, если точка лежит справа от плоскости (по видимую сторону), отрицательно, если точка лежит слева от плоскости, равно нулю, если точка лежит на плоскости.

Для верхней грани получим уравнение

$$\frac{Y}{Y_{дальв}} = \frac{Z_{цп} - Z}{Z_{цп} - Z_{даль}}$$

Y=EZ+F,

где E= - $Y_{дальв}$/($Z_{цп}$-$Z_{даль}$), F= - E$Z_{цп,}$ $f_{пр}$ = Y-EZ-F, (E<0, F>0).

Значение пробной функции в этом случае положительно, если точка лежит выше плоскости (по невидимую сторону), отрицательно, если точка лежит ниже плоскости (по видимую сторону), равно нулю, если точка лежит на плоскости.

Для нижней грани получим уравнение

$$\frac{Y}{- Y_{дальн}} = \frac{Z_{цп} - Z}{Z_{цп} - Z_{даль}}$$

Y=GZ+H,

где G= $Y_{дальн}$/($Z_{цп}$-$Z_{даль}$), H= - E$Z_{цп,}$ $f_{пр}$ = Y-GZ-H, (G>0, H<0).

Значение пробной функции в этом случае положительно, если точка лежит выше плоскости (по невидимую сторону), отрицательно, если точка лежит ниже плоскости (по видимую сторону), равно нулю, если точка лежит на плоскости.

Уравнение дальней грани Z=$Z_{даль,}$ а пробная функция имеет вид $f_{пр}$ = Z- $Z_{даль}$. Точка лежит ближе плоскости (по видимую сторону), если значение пробной функции положительно, точка лежит дальше плоскости (по невидимую сторону), если значение функции отрицательно, точка лежит на плоскости, если значение функции равно нулю.

Уравнение ближней грани Z=$Z_{бл,}$ а пробная функция имеет вид $f_{пр}$ = Z- $Z_{бл}$. Точка лежит ближе плоскости (по невидимую сторону), если значение пробной функции положительно, точка лежит дальше плоскости (по видимую сторону), если значение функции отрицательно, точка лежит на плоскости, если значение функции равно нулю.

При вычислении кодов концевых точек отрезков следует соблюдать осторожность, так как можно получить некорректный результат, если точки лежат за центром проекции. Это связано с тем, что левая, правая, нижняя, верхняя грани пересекаются в точке центра проекции. Поэтому существуют точки, лежащие одновременно левее левой и правее правой граней, выше верхней и ниже нижней граней.

Некоторые из ранее рассмотренных двумерных алгоритмов отсечения без труда можно обобщить для трехмерного случая. В частности, легко адаптировать для трехмерного случая алгоритм разбиения отрезка средней точкой. Для этого следует изменить размерности массивов, в которых хранятся коды концов отрезка (T1 и T2) (вместо четырех значений они должны хранить шесть значений), а также массива, хранящего координаты граней отсекателя и центра проекции. Вычисление кодов концов отрезка ведется в соответствии с приведенными формулами, а при вычислении координат точек следует учитывать также третью координату.

Также легко обобщается на трехмерный случай и алгоритм Кируса-Бека. Отсекатель в этом случае может представлять собой произвольный выпуклый объем. Координаты точек и векторов должны иметь три компоненты в соответствии с количеством измерений. В качестве точек, лежащих на грани отсекателя, удобно выбирать точки, лежащие на концах главной диагонали. Для отсекателя - параллелепипеда легко определяются и внутренние нормали. Не вызывает больших трудностей выбор пробных точек и вычисление нормалей и в случае с усеченной пирамидой. В качестве пробных точек также удобно выбирать вершины пирамиды, в которых сходятся три грани пирамиды. Определение нормалей к ближней и дальней граням очевидно, а определение нормалей к остальным четырем граням возможно на основании вычисления векторного произведения векторов, построенных на ребрах граней, начинающихся в одной из вершин грани.

Алгоритм Кируса-Бека предполагает использование в качестве отсекателя выпуклого многогранника, поэтому необходимо уметь определять факт выпуклости многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЛА, ВЫЧИСЛЕНИЕ НУТРЕННИХ НОРМАЛЕЙ К ЕГО ГРАНЯМ, РАЗРЕЗАНИЕ НЕВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Ранее рассмотренный алгоритм определения выпуклости плоских многоугольников можно распространить на трехмерные многогранники (рис.6.3.3). В трехмерном случае алгоритм будет выглядеть следующим образом:

1. Перенести тело таким образом, чтобы одна из вершин грани оказалась в начале координат.
2. Повернуть тело вокруг начала координат так, чтобы одно из двух смежных выбранной вершине ребер грани совпало с одной из координатных осей.
3. Повернуть тело вокруг выбранной оси координат так, чтобы выбранная грань легла на координатную плоскость.
4. Для всех вершин тела, не принадлежащих выбранной грани, определить знаки координаты, которая перпендикулярна этой грани.
5. Провести анализ полученных знаков, руководствуясь следующим правилом:
   - если знаки для всех вершин совпадают или равны нулю, то тело является выпуклым относительно выбранной грани; если тело выпукло

относительно всех своих граней, то оно является в целом выпуклым, в противном случае оно невыпукло;

- если знаки для всех вершин не совпадают, то тело невыпукло относительно очередной грани, следовательно, оно невыпукло в целом;
- если для всех вершин значения координаты, перпендикулярной выбранной грани, равны нулю, то тело вырождено, т.е. это плоский многоугольник.

6. Вектор внутренней нормали к выбранной грани, заданный в преобразованной системе координат, имеет все нулевые компоненты, кроме той, которая перпендикулярна рассматриваемой грани. Знак этой компоненты для грани, относительно которой тело выпукло, совпадает с ранее найденным в п.4 знаком.

Для определения значения внутренней нормали в исходной системе координат необходимо применить к ней обратное преобразование поворотов.

7. Если тело оказалось невыпуклым относительно рассматриваемой грани, то его следует разрезать плоскостью, несущей выбранную грань.
8. Для каждого из вновь полученных тел повторить описанную процедуру до тех пор, пока все тела не станут выпуклыми.

Перечисленные здесь действия необходимо выполнить для каждой грани тела.

Алгоритм определения выпуклости тела и разрезания невыпуклого тела на выпуклые части используется в процедуре отсечения отрезков невыпуклыми телами. Подход здесь такой же, как и в двумерном случае. Результат достигается путем выполнения внутренних и внешних отсечений. При отсечении невыпуклым телом оно дополняется до выпуклого тела и проводится внутреннее отсечение отрезка полученным телом. Затем проводится внешнее отсечение телом, дополняющим исходное до выпуклого. Полученный результат и является отсечением отрезка невыпуклым телом.

6.4. Проецирование. Виды проекций. Центральные и ортогональные проекции.

В начертательной геометрии для построения изображений пространственных объектов на плоскости используется *метод проекций.*

Изображение на плоскости предмета, расположенного в пространстве, получается при помощи прямых линий – *проецирующих* лучей, проведенных через каждую характерную точку предмета до пересечения этих лучей с плоскостью.

Точки пересечения лучей с плоскостью называются *проекциями точек* предмета, а плоскость, на которую проецируются точки, - *плоскостью проекций* или *картинной плоскостью.*

Если проецирующие лучи исходят из одной точки – S (*центра проекций*), то полученное на плоскости проекций изображение предмета называется его *центральной проекцией* (рис. 6.4.1.). Это изображение предмета получается увеличенным и дает представление только о форме предмета, а не о его размерах.

Если в качестве центра проекций выбрать бесконечно удаленную (несобственную) точку пространства S_∞, то проецирующие лучи становятся *параллельными*, а полученные из такого центра проекции точки или предмета, будут называться *параллельными проекциями*. При параллельном проецировании центр проекций не указывается, а заменяется *направлением проецирования* (рис. 6.4.2.).

Если направление проецирования не перпендикулярно плоскости проекций, то проецирование называется *косоугольным.*

Если направление проецирования составляет с плоскостью проекций прямой угол, то проецирование называется *прямоугольным* или *ортогональным,* а получаемые при этом проекции предмета будут называться *ортогональными проекциями* (рис. 6.4.3.).

Перспективное проецирование чаще всего применяется в архитектуре для изображения общих планов.

Для построения технических чертежей обычно применяется ортогональное проецирование на две или три плоскости проекций, так как ортогональные проекции пространственного предмета наиболее точно соответствуют его размерам, хотя и не обладают наглядностью (рис. 6.4.4.).

Для получения *наглядного* изображения предмет вместе со связанной с ним системой координат параллельно проецируется на одну аксонометрическую плоскость проекций. Если проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций, то проекция называется *прямоугольной аксонометрической.* В противном случае – *косоугольной* проекцией.

Различают несколько видов *прямоугольных аксонометрических* проекций: *изометрические, диметрические, триметрические* (рис. 6.4.5. а, б, в).

Изометрические проекции получаются, если все коэффициенты искажения по трем осям равны $(p = q = r)$ $(p = q = r=0{,}82)$. В этом случае в плоскости проекций углы между каждой парой осей равны.

Диметрические проекции получаются, если коэффициенты искажения по двум осям одинаковы $(p = r \neq q)$ $(p = r=0{,}94;\ q=0{,}47)$. В этом случае в плоскости проекций равны между собой два угла между осями.

Триметрические проекции получаются, если коэффициенты искажения по всем трем осям разные $(p \neq q \neq r)$. В этом случае в плоскости проекций все три угла между осями различны.

В машинной графике для воспроизведения предмета в заданной проекции необходимо определить матрицу преобразования координат.

Так, *для ортогональных проекций* в плоскостях проекций $x=0,\ y=0,\ z=0$ матрицы преобразований проецирования имеют вид:

$$[P_{x=0}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$[P_{y=0}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$[P_{z=0}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Если плоскость проекций отстоит от координатной плоскости на расстояние *x=p, y=p, z=p*, то необходимо применить также и преобразование переноса:

$$[T]=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\p&0&0&1\end{vmatrix}$$

Тогда матрицы проецирования имеют вид:

$$[P_{x=p}]=[P_{x=0}][T]=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\p&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$[P_{y=p}]=[P_{y=0}][T]=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&p&0&1\end{vmatrix},$$

$$[P_{z=p}]=[P_{z=0}][T]=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&p&1\end{vmatrix}.$$

Для получения *аксонометрических* проекций применяется композиция преобразований.

Так, для построения *диметрической* проекции последовательно осуществляются преобразования: поворота вокруг оси y на угол α, затем вокруг оси x на угол β и, наконец, проецирования на плоскость $z=0$:

$$[M]=\begin{vmatrix}\cos\alpha&0&-\sin\alpha&0\\0&1&0&0\\\sin\alpha&0&\cos\alpha&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\beta&\sin\beta&0\\0&-\sin\beta&\cos\beta&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\cdot\sin\beta&-\sin\alpha\cdot\cos\beta&0\\0&\cos\beta&\sin\beta&0\\\sin\alpha&-\sin\beta\cdot\cos\alpha&\cos\beta\cdot\cos\alpha&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}.$$

$$[M']=[M][P_{z=0}]=\begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\cdot\sin\beta&0&0\\0&\cos\beta&0&0\\\sin\alpha&-\cos\alpha\cdot\sin\beta&0&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}.$$

Эти преобразования относятся и к единичным векторам, направленным по осям x и y :

$$[D'_x]=[1\ 0\ 0\ 1]\ [M']=[\cos\alpha\quad \sin\alpha\cdot\sin\beta\quad 0\quad 0],$$

$$[D'_y]=[0\ 1\ 0\ 1]\ [M']=[0\quad \cos\beta\quad 0\quad 0].$$

В диметрии коэффициенты искажения по двум осям одинаковы, то есть

$$[D'_x] = [D'_y].$$

Отсюда можно определить связь углов α и β:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \beta,$$

заменяя

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad и \quad \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$$

$$1 - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta,$$

$$\sin^2 \alpha (\sin^2 \beta - 1) = -\sin^2 \beta,$$

получаем

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \beta}.$$

То есть, выбрав значение угла β, можно вычислить угол α и определить матрицу диметрической проекции.

В *изометрии* коэффициенты искажения по всем осям одинаковы, то есть

$$[D'_x] = [D'_y] = [D'_z]$$

$$[D'_z] = [0\ 0\ 1\ 1]\ [M'] = [\sin \alpha \quad -\cos \alpha \cdot \sin \beta \quad 0 \quad 1]$$

Как и в предыдущем случае можно определить связь углов α и β:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \cos^2 \beta,$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta.$$

Окончательно получаем

$$\sin^2 \alpha = 1/2,$$

$$\sin^2 \beta = 1/3.$$

Центральные (перспективные) проекции также представляются в виде композиции преобразований: перспективных и проецирования на картинную плоскость.

Например, если центр $S(0, 0, s_z)$ проекций лежит на оси z, а плоскостью проекций (картинной) является координатная плоскость $z=0$, то центральные проекции произвольной точки пространства $P(x, y, z=0)$ можно определить из:

$$x' = \frac{-s_z}{z - s_z} x,$$

$$y' = \frac{-s_z}{z - s_z} y$$

или

$$x' = \frac{1}{-z/s_z + 1} x,$$

$$y' = \frac{1}{-z/s_z + 1} y.$$

Матрица перспективного преобразования, отображающего точку объекта в точку проекции, имеет вид:

$$M(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/s_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$