1. *Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?*

~~~ ~~~

• События A и B называются несовместными, если их пересечение является невозможным событием, т.е. $AB = \emptyset$.

• Если A и B несовместные события, (а также $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые. Если A и B – совместные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми; если A и B – зависимые, то они могут быть как совместными, так и несовместными.

2. *Сформулировать геометрическое определение вероятности.*

~~~ ~~~

Пусть

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$	2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ – мера множества (длина для n=1, площадь для n=2, объём для n=3, ..)	3) возможность принадлежности исхода эксперимента множеству $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере множества A и не зависит от его формы и расположения внутри Ω.

Тогда вероятностью осуществления события A называют число $P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

3. *Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.*

~~~ ~~~

• Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов Ω называют такой набор подмножеств $\beta \subseteq \Omega$, что:

1) $A \subseteq \beta \Rightarrow \bar{A} \subseteq \beta$;	2) $A_1, \dots, A_n \in \beta \Rightarrow A_1 + \dots + A_n \subseteq \beta$.

• Основные следствия из определения сигма-алгебры:

1. $\Omega \subseteq \beta$;	2. $\emptyset \in \beta$;	3. $A_1, \dots A_n, \dots \in \beta \Rightarrow A_1 * \dots * A_n * \dots \in \beta$;	4. $A, B \in \beta \Rightarrow A \backslash B \in \beta$.

4. *Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.*

~~~ ~~~

• Пусть Ω – пространство ЭИ, β – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение $P: \beta \to \mathbb{R}$, для которого выполняются условия:

$P\{A\} \geq 0; P\{\Omega\} = 1$	для попарно несовместных событий A1,…,An,… $P\{A_1 + \dots + A_n + \dots\} = P\{A_1\} + \dots + P\{A_n\} + \cdots$

• Свойства вероятности:

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	5) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
2) $P(\emptyset) = 0$	6) $\forall$ конечного набора событий $A_1, \dots, A_n$,
3) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$	$P(A_1 + \cdots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i \dots A_n)$.
4) $\forall A \in \beta$ $0 \leq P(A) \leq 1$	

5. *Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения и аксиому непрерывности. Как они связаны между собой?*

~~~ ~~~

• Аксиома сложения: для попарно непересекающихся событий $A_1, \dots, A_n$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

Расширенная аксиома сложения: для попарно несовместных событий A1,…,An,… $P\{A_1 + \dots + A_n + \dots\} = P\{A_1\} + \dots + P\{A_n\} + \cdots$.

Аксиома непрерывности: для любой неубывающей последовательности событий $A_1, \dots, A_n, \dots$, где $A_i \subseteq A_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ справедливо $P(A_1 + \dots + A_n + \cdots) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

• Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

6. *Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.*

~~~ ~~~

• Пусть A и B – события, $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью осуществления A при условии произошедшего B называют число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности:

$1^0. P(A|B) \geq 0$; $2^0. P(\Omega|B) = 1$; $3^0. \forall$ попарно непересекающихся $A_1, \dots A_n, \dots$ $P(A_1 + \dots + A_n + \dots |B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$.

7. *Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.*

~~~ ~~~

Теорема 1: пусть $P(A) > 0$. Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Теорема 2: пусть события $A_1, \dots, A_n$ таковы, что $P(A_1 * \dots * A_n) > 0$. Тогда $P(A_1 * \dots * A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1A_2) * \dots * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

8. *Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?*

~~~ ~~~

• Пусть A и B – события, связанные с одним и тем же экспериментом. A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A) * P(B)$.

• Если $P(B) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$. Аналогично, если $P(A) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$.

9. *Сформулировать определение попарно независимых событий, и независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?*

~~~ ~~~

• События $A_1, \dots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$ $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$; независимыми в совокупности, если для любого набора $i_1 < \dots < i_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ $P(A_{i_1} * \dots * A_{i_k}) = P(A_{i_1}) * \dots * P(A_{i_k})$.

• Если A – независимы в совокупности, то они независимы попарно. При этом обратное неверно.

10. *Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?*

~~~ ~~~

• Говорят, что H образует полную группу событий, если $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

• Так как H_i, H_j $\forall i \neq j$ являются несовместными событиями и их вероятность не равна нулю, то они могут быть только зависимыми.

11. *Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть H1…Hn – полная группа событий, A – некоторое событие и $P(H_i) > 0, i = \overline{1,n}$. Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)$.

12. *Сформулировать теорему о формуле Байеса.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и P(A)>0. Тогда $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+\cdots+P(A|H_n)P(H_n)}$.

13. *Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно K успехов в серии из N испытаний.*

~~~ ~~~

• Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух ЭИ; первый будем называть «успех», второй «неудача»; вероятность успеха: p, вероятность неудачи: q=1-p. Схемой испытаний Бернулли называется серия последовательных экспериментов такого вида, в которых также: вероятность успеха неизменна во всех испытаниях; испытания – независимы, т.е. вероятность исхода i-го испытания не зависит от исходов испытаний 1…i-1.

• Обозначим $P_n(k)$ – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

14. *Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из N испытаний а) ровно к успехов; б) хотя бы одного успеха; в) от к1 до к2 успехов.*

~~~ ~~~

Пусть $P_n(k)$ – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.
Пусть $P_n(k \geq 1)$ – вероятность реализации хотя бы одного успеха. Тогда $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$.
Пусть $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ – вероятность реализации от к1 до к2 успехов. Тогда $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$.

15. *Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.*

~~~ ~~~

• Элементарный исход эксперимента – такой его исход, который в рамках данного эксперимента: 1) мыслится неделимым; 2) никакие 2 ЭИ не могут произойти одновременно (в рамках одного эксперимента); 3) в результате эксперимента всегда имеет место ровно один из ЭИ.

• Пусть 1) количество ЭИ эксперимента $|\Omega| = N \neq \infty$; 2) по условиям эксперимента все ЭИ равновозможны; 3) событие A состоит из N_a элементов ($|A| = N_A$). Тогда вероятностью осуществления события A называется $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

• Пример: 2 раза бросают игральную кость, A={сумма выпавших очков >= 11}.
$\Omega = \{(x1, x2),\ x_i \in \{1 \dots 6\}\}, |\Omega| = 36.\ A = \{(5,6),(6,5),(6,6)\} \ => \ P\{A\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

16. *Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него доказать основные свойства вероятности.*

~~~ ~~~

• Пусть 1) количество ЭИ эксперимента $|\Omega| = N \neq \infty$; 2) по условиям эксперимента все ЭИ равновозможны; 3) событие A состоит из N_a элементов ($|A| = N_A$). Тогда вероятностью осуществления события A называется $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$.

• Теорема:
1. $\forall A \subseteq \Omega\ P\{A\} \geq 0$; 2. $P\{\Omega\} = 1$; 3. Если A и B несовместн, то P{A+B}=P{A}+P{B}.

Доказательство:
1. $P\{A\} = \frac{N_A}{N}$. $N_A \geq 0,\ N > 0, => P\{A\} \geq 0$.
2. $P\{\Omega\} = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$.
3. $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$ по формуле включений и исключений. |AB|=0, следовательно $N_{A+B} = N_A + N_B => \ P\{A + B\} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P\{A\} + P\{B\}$.

17. *Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.*

~~~ ~~~

• Пусть 1) Эксперимент проведён n раз; 2) событие A при этом произошло N_A раз. Тогда вероятностью осуществления события A называют число $P\{A\} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_A}{N}$.

• Недостатки: а) на практике невозможно провести эксперимент бесконечное число раз; для конечных N отношение может изменяться при разных N.

б) с позиций современной математики, статистическое определение является архаизмом, т.к. не дает достаточной базы для дальнейшего развития теории.

18. *Доказать основные свойства сигма-алгебры событий.*

~~~ ~~~

• Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов Ω называют такой набор подмножеств $\beta \subseteq \Omega$, что:
1) $A \subseteq \beta => \bar{A} \subseteq \beta$; 2) $A_1, \dots, A_n \in \beta => A_1 + \cdots + A_n \subseteq \beta$.

• Теорема:
1. $\Omega \subseteq \beta$; 2. $\emptyset \in \beta$; 3.$A_1, \dots A_n, \dots \in \beta => \ A_1 * \dots * A\_n \in \beta$; 4. $A, B \in \beta => \ A \backslash B \in \beta$.

Доказательство:
1) $\beta \neq \emptyset$, следовательно $A \in \beta \ => \ \bar{A} \in \beta => \ A + \bar{A} \in \beta, A + \bar{A} = \Omega$.
2) $\Omega \in \beta => \bar{\Omega} \in beta,\ \bar{\Omega} = \emptyset$.
3) $A_1 \dots A_n \in \beta =>$ (1 св.) $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n} \in \beta =>$ (2 св.) $\overline{A_1} + \cdots + \overline{A_n} \in \beta =>$ (1 св.) $\overline{\overline{A_1} + \cdots + \overline{A_n} + \cdots} \in \beta => A_1 * \dots * A_n * \dots \in \beta$.

19. *Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.*

~~~ ~~~

• Пусть Ω – пространство ЭИ, β – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение $P: \beta \to \mathbb{R}$, для которого выполняются условия: $P\{A\} \geq 0; P\{\Omega\} = 1;$ для попарно несовместных событий A1,…,An,… $P\{A_1 + \cdots + A_n + \cdots\} = P\{A_1\} + \cdots + P\{A_n\} + \cdots$.

• **Теорема**: 1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; 2) $P(\emptyset) = 0$; 3) $A \subseteq B => P(A) \leq P(B)$.

Доказательство:

1) $\Omega = A + \bar{A}$, $1 = (\text{акс.} 2)\ P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = (\text{акс.} 3) P(A) + P(\bar{A}) => P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
2) $\emptyset = \bar{\Omega} => P(\emptyset) = (\text{п.} 1)\ 1 - P(\Omega) = (\text{акс.} 2)\ 1 - 1 = 0$.
3) $B = A + B \backslash A$, причем $A(B \backslash A) = \emptyset => (\text{акс.} 3)\ P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. По аксиоме 1, $P(B \backslash A) \geq 0$, следовательно $P(B) \geq 0$.

20. *Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.*

~~~ ~~~

• **Теорема**: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Для любого конечного набора событий $A_1, \dots, A_N$, $P(A_1 + \cdots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} P(A_i \dots A_n)$

Доказательство: а) $A + B = A + B \backslash A$, причем $A(B \backslash A) = \emptyset$. Следовательно, $P(A + B) = P(A) + P(B \backslash A)$.

б) $B = B \backslash A + AB => P(B) = P(B \backslash A) + P(AB)$.

21. *Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.*

~~~ ~~~

• Пусть A и B – события, $P(B) \neq 0$. Условной вероятностью осуществления A при условии произошедшего B называют число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

• Теорема: условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности:

$1^0. P(A|B) \geq 0$; $2^0. P(\Omega|B) = 1$; $3^0. \forall$ попарно непересекающихся $A_1, \dots A_n, \dots$ $P(A_1 + \cdots + A_n + \cdots |B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$.

Доказательство:

1) $P(A|B) = \frac{P(AB) \geq 0}{P(B) \geq 0} \geq 0$.
2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
3) $P(A_1 + \cdots |B) = \frac{P((A_1 + \cdots)|B)}{P(B)} = (\text{счетная дистрибутивность} \cap \text{относительно } \cup) \frac{P(A_1 B + \cdots)}{P(B)} = (\text{акс.} 3) \frac{P(A_1 B) + \cdots + P(A_n B) + \cdots}{P(B)} =$ $(\text{лин. свойства рядов}) \frac{P(A_1 B)}{P(B)} +,,, = P(A_1|B) + \cdots + P(A_n|B) + \cdots$.

22. *Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.*

~~~ ~~~

Теорема 1: пусть $P(A) > 0$. Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Доказательство: $P(A) \geq 0$ => по определению условной вероятности, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} => P(AB) = P(A) * P(B|A)$.

Теорема 2: пусть события $A_1, \dots, A_n$ таковы, что $P(A_1 * \dots * A_n) > 0$. Тогда $P(A_1 * \dots * A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 A_2) * \dots * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

Доказательство: $P(A_1 * \dots A_{n-1} A_N) = P(A_1 \dots A_{n-1}) P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) = (\boldsymbol{*})$. $A_1 \dots A_{n-2} A_{n-1} \subseteq A_1 \dots A_{n-2} \Rightarrow P(A_1 \dots A_{n-2}) \geq P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$. Следовательно, (*)= $P(A_1 \dots A_{n-2}) P(A_{n-1}|A_1 \dots A_{n-2}) * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$. Повторяя это утверждение, получаем требуемую формулу $P(A_1 * \dots * A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) * P(A_3|A_1 A_2) * \dots * P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$.

23. *Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.*

~~~ ~~~

Теорема: 1) Если $P(B) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(A|B) = P(A)$. 2) Аналогично, если $P(A) > 0$, то A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(B|A) = P(B)$.

Доказательство: 1) необходимость. $P(A|B) = P(A)P(B)$. По определению условной вероятности: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Достаточность. $P(AB) = P(B) * P(A|B) = P(A)P(B)$. Следовательно, A и B независимы.

2) доказывается полностью аналогично.

24. *Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.*

~~~ ~~~

• События $A_1, \dots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$ $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$; независимыми в совокупности, если для любого набора $i_1 < \cdots < i_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ $P(A_{i_1} * \dots * A_{i_k}) = P(A_{i_1}) * \dots * P(A_{i_k})$.

• Если A – независимы попарно, то из этого не следует, что они независимы в совокупности. Это подтверждает пример Бернштейна: рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого записаны числа 1, 2, 3, а на 4-й все три числа. Тетраэдр кидают на плоскость и рассматривают три события: $A_1 = \{\text{на нижней грани } 1\}$, $A_2 = \{-'' - \ 2\}$, $A_3 = \{-'' - \ 3\}$. A независимы попарно, но не в совокупности:

a) $P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(A_2) = \frac{1}{2}$; $P(A_3) = \frac{1}{2}$;

b) $P(A_1 A_2) = P\{\text{на нижней грани 1 и 2}\} = \frac{1}{4} = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3)$. $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$ =>A – попарно независимые.

Для независимости в совокупности: $P(A_1 A_2 A_3) ?= P(A_1)P(A_2)P(A_3)$; $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$. Следовательно, A не являются независимыми в совокупности.

25. *Доказать теорему о формуле полной вероятности.*

~~~ ~~~

Говорят, что H образует полную группу событий, если $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Теорема: Пусть H1…Hn – полная группа событий, A – некоторое событие и $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$. Тогда $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)$.

Доказательство: $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \cdots + H_n)) = P(AH_1 + \cdots + AH_n) = P(AH_1) + \cdots + P(AH_n)$, поскольку $(AH_i)(AH_j) = \emptyset$ при $i \neq$
~~~

j. Далее, поскольку $P(H_i) \geq 0 => P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)$, то $P(A) = P(AH_1) + \cdots + P(AH_n) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots P(A|H_n)P(H_n)$.

26. *Доказать теорему о формуле Байеса.*

~~~ ~~~

Теорема: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и P(A)>0. Тогда $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+\cdots+P(A|H_n)P(H_1)}$.

Доказательство: $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)}$. По формуле полной вероятности, можно представить $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \cdots + P(A|H_n)P(H_n)$; тогда $P(H_i|A) = \frac{P(AH_i)}{P(A|H_1)P(H_1)+\cdots+P(A|H_n)P(H_n)}$.

27. *Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно к успехов в серии из н испытаний по схеме Бернулли.*

~~~ ~~~

Обозначим $P_n(k)$ – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли.

Теорема: Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Доказательство: опишем результаты испытаний кортежами $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i = \begin{cases} 1, \text{если в } i \text{ испытании произошёл успех} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$. Исходов, в которых произошло ровно k успехов, C_n^k штук. Вероятность осуществления ровно одного такого исхода: $P\big((x_1, \dots, x_n)\big) = P\big\{\{\text{в 1 исп. результат } x_1\} * \{\text{во 2м: } x_2\} * \dots \{\text{в } n\text{м: } x_n\}\big\} = (\text{испытания независимы})\ P(\{\text{в 1м: } x_1\}) * \dots * P(\{\text{в 2м } x_n\})$. В случае k успехов, имеем p k раз и q n-k раз; следовательно, $P\big((x_1, \dots, x_n)\big) = p^k q^{n-k}$. Поскольку различные исходы, на которых происходит ровно k успехов, являются несовместными, то $P_n(k) = C_n^k * P = C_n^k p^k q^{n-k}$.

1. *Сформулировать определения случайной величины и функции распределения вероятностей СВ. Записать основные свойства функции распределения.*

~~~ ~~~

• Случайной величиной называют скалярную функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных исходов, если для любого $x \in \mathbb{R}$ множество $\{\omega: X(\omega) < x\}$ элементарных исходов, удовлетворяющих условию $X(\omega) < x$, является событием.

• Функцией распределения (вероятностей) СВ X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$ – т.е. события, состоящего из только тех элементарных исходов, для которых при $X(\omega) < x$: $F(x) = P\{X < x\}$.

• Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$

2) $F(x_1) \le F(x_2)$, при x1<x2; т.е. Ф – неубывающая функция

3) $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

4) $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

5) $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim_{y\to x-0} F(y)$; т.е. Ф – непрерывная слева функция.

2. *Сформулировать определения дискретной СВ; понятие ряда распределения. Сформулировать определение непрерывной СВ и функции плотности распределения вероятностей.*

~~~ ~~~

• СВ X называют дискретной, если множество её возможных значений конечно или счетно.

• Рядом распределения (вероятностей) ДСВ X называют таблицу, состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней вероятности $p_i = P\{X = x_i\}$ того, что случайная величина принимает эти значения.

• Непрерывной называют СВ X, функцию распределения которой можно представить в виде $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.

• Функцию $f(x)$ называют плотностью распределения вероятностей НСВ X.

3. *Записать основные свойства функции плотности распределения вероятностей НСВ.*

~~~ ~~~

• 1) $\forall n \;\; f(n) \ge 0$

2) $P\{x_1 \le X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

3)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

4) $P\{x \le X < x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$ в точках непрерывности плотности распределения

5) $P\{X = x\} = 0$ для любого наперед заданного $x \in \mathbb{R}$.

4. *Сформулировать определение дискретного случайного вектора и его функции распределения вероятностей. Записать свойства функции распределения двумерного СВектора.*

~~~ ~~~

• n-мерным случайным вектором называется совокупность СВ $X_1 = X_1(\omega), \dots, X_n = X_n(\omega)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, B, P). Сами СВ $X_1, \dots, X_n$ называют копонентами СВектора.

• Функцией распределения n-мерного СВектора $F(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$ называют функцию, значение которой в точке $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ равно вероятности совместного осуществления событий $\{X_1 < x_1\}, \dots, \{X_n < x_n\}$, т.е. $F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}$.

• Свойства двумерной функции распределения:

1) $0 \le F(x_1, x_2) \le 1$

2) $F(x_1, x_2)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов x1 и x2.

3) $F(-\infty, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$

4) $F(+\infty, +\infty) = 1$

5) $P\{a_1 \le X_1 \le b_1, a_2 \le X_2 \le b_2\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$.

6) $F(x_1, x_2)$ – непрерывна слева в любой точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ по каждому из аргументов x1, x2.

7) $F_{X_1,X_2}(x, +\infty) = F_{X_1}(x)$; $F_{X_1,X_2}(+\infty, x) = F_{X_2}(x)$.

5. *Сформулировать определения ДСВектора, понятие таблицы распределения двумерного СВектора. Сформулировать определения непрерывного СВектора и его функции плотности распределения вероятностей.*

~~~ ~~~

• Двумерный случайный вектор (X,У) называют дискретным, если каждая из случайных величин X и У является дискретной.

Таблицей распределения двумерного СВектор называют таблицу следующего вида:
в верхней строке перечислены все возможные значения $y_1, \dots, y_j, \dots y_m$ СВ У; в левом столбце – значения $x_1, \dots, x_i, \dots x_n$ СВ X;
на пересечении столбца yj и строки xi находится вероятность $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ совместного осуществления событий $\{X = x_i\}$и $\{Y = y_j\}$.

Также обычно добавляют строку Py и столбец Px:
на пересечении Px и xi записывается число $p_{x_i} = p_{i1} + \cdots p_{im}$; на пересечении Py и yj записывается $p_{y_j} = p_{1j} + \cdots + p_{nj}$.

• СВектор (X1,…Xн) называют непрерывным, если его совместную функцию распределения $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n)dy_1 \dots dy_n$.

Функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ называют совместной двумерной плотностью распределения СВ X1…Xn, либо плотностью распределения СВектора (X1,…Xn); $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$.
~~~

6. *Записать основные свойства функции плотности распределения двумерных СВекторов.*

~~~ ~~~

• Свойства функции плотности двумерных СВекторов:
1) $f(x,y) \geq 0$
2) $P\{a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f dy$
3) $\int_{-}^{+} \int_{-}^{+} f(x,y)dxdy = 1$
4) $P\{x < X < x + \Delta x, y < Y < y + \Delta y\} \cong f(x,y)\Delta x \Delta y$
5) $P\{X = x, Y = y\} = 0$
6) $P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy$
7) $f_X(x) = \int_{-}^{+} f_{X,Y}(x,y)dy$
8) $f_Y(y) = \int_{-}^{+} f_{X,Y}(x,y)dx$

7. *Сформулировать определение независимых СВ. Сформулировать их свйоства. Сформулировать определение попарно независимых СВ и СВ, независимых в совокупности.*

~~~ ~~~

• СВ X и У называют независимыми, если совместная функция распределения $F_{XY}(xy)$ является произведением одномерных функций распределения: $F_{XY}(xy) = F_X(x)F_Y(y)$

• СВ X1…Xn, заданные на одном вероятностном пространстве, называются независимыми в совокупности, если $F_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = F_{X1}(x1) \dots F_{Xn}(xn)$; независимыми попарно, если $\forall i,j = \overline{1,n}, i \neq j, X_i$ и X_j независимые.

• Свойства независимых СВ:
1) СВ X и У независимы тогда и только тогда, когда $\forall x, y \in \mathbb{R}$ события $\{X \leq x\}, \{Y \leq y\}$ независимы
2) X и У независимы ⇔ $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $\{x1 \leq X \leq x2\}, \{y1 \leq Y \leq y2\}$ независимы
3) X и У независимы ⇔ $\forall M1, M2$ $\{x \in M1\}, \{Y \in M2\}$ независимы, где M – промежутки, либо объединения промежутков
4) Если X,У – ДСВ, то X,У независимы ⇔ $p_{ij} \geq p_{x_i} * p_{y_j}$; $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, p_{x_i} = P\{X = x_i\}, p_{y_j} = P\{Y = y_j\}$.
5) Если X,У – НСВ, то они независимы ⇔ $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

8. *Понятие условного распределения. Доказать формулу для вычисления условного ряда распределения одной компоненты двумерного дискретного СВектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение. Записать формулу для вычисления условной плотности распределения одной компоненты двумерного НСВектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение.*

~~~ ~~~

• Пусть дан двумерный СВектор (X,У) и известно, что СВ У принимает значение у.

• Пусть (X,У) – дискретный СВектор; $X \in \{x_1, \dots, x_n\}, Y \in \{y_1, \dots, y_n\}, p_{ij} = P\{(X,Y) = (x_i, y_j)\} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$. Пусть для некоторого j $Y = y_j$; $P\{X = x_i, Y = y_j\} = \frac{P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}$. Условной вероятностью того, что СВ X примет значение xi при условии что У принимает значение yj, называется число $\Pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{y_j}}$; набор вероятностей $\Pi_{ij}, \forall i, j$ называется условным распределением СВ X.

• Пусть (XУ) – непрерывный СВектор. Условной функцией распределения СВ X при условии $Y = y$ называется отображение $F_X(x|Y = y) = P\{X < x|Y = y\}$. Условной плотностью распределения СВ X при условии У=у называется функция $f_X(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, где f(x,y) – совместная плотность распределения СВектора.

9. *Сформулировать критерий независимости двух СВ в терминах условных распределений.*

~~~ ~~~

• Пусть (X,У) – двумерный случайный вектор. Тогда:

1. СВ X,У независмы ⇔ $\left[\begin{array}{l} F_X(x|Y = y) = F_X(x) \; \forall y, \text{на которых определена } F_X(x|Y = y) \\ F_Y(y|X = x) = F_Y(y) \; \forall x, \text{на которых определена } F_Y(y|X = x) \end{array}\right.$

2. Если (X,У) – НСВектор, то X,У независимы ⇔ $\left[\begin{array}{l} f_X(x|Y = y) = f_X(x) \\ f_Y(y|X = x) = F_Y(y) \end{array}\right.$

3. Если (X,У) – ДСВектор, то X,У независимы ⇔ $\left[\begin{array}{l} P\{X = x_i|Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \\ P\{Y = y_j|X = x_i\} = P\{Y = y_j\} \end{array}\right.$

10. *Понятие функции СВ. Указать способ построения ряда распределения функции ДСВ. Сформулировать теорему о плотности распределения функции от НСВ.*

~~~ ~~~

• СВ У, которая каждому значению СВ X ставит в соответствие число $Y = \phi(x)$, называют скалярной функцией скалярной СВ X. При этом сама У также является случайной величиной: если X – ДСВ, то У – также ДСВ; если X – НСВ, то У может быть НСВ, ДСВ или СВ смешаного типа.

• Если X – ДСВ, то ряд распределения У строится следующим образом – в первой строке записываются значения $y_i = \phi(x_i)$, а во вторую строку переписываются значения p_i, соответствовавшие x_i.

• Теорема: если X – НСВ с плотностью распределения $f_X(x)$, $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - монотонная и непрерывно диффернцируемая скалярная функция, а ψ – обратная к ϕ), то для СВ $Y = \phi(x)$ функция распределения $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$.

11. *Понятие скалярной функции случайного векторного аргумента. Доказать формулу для нахождения значения функции распределения СВ У, функционльно зависящей от случайных величин X1 и X2.*

~~~ ~~~

• Пусть (X1, X2) – СВектор, $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - скалярная функция. СВ $Y = \phi(X_1, X_2)$ называют скалярной функией случайного вектора.

• Теорема: Пусть (X1,X2) – НСВектор и $Y = \phi(X1, X2)$. Тогда $F_Y(y) = \iint_{D(y)} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$.

Доказательство: $F_Y(y) = P\{Y < y\}$. События $\{Y < y\}, \{(X_1, X_2) \in D(y)\}$ эквивалентны. Следовательно, $F_Y(y) = P\{(X_1, X_2) \in D(y)\} = \iint_{D(y)} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$.

12. *Сформулировать и доказать теорему о формуле свертки.*

~~~ ~~~

• Теорема: пусть (Х,У) – СВектор, непрерывный и независимый, а $Z = X + Y$. Тогда $\boldsymbol{f_Z(z) = \int_-^+ f_X(x) f_Y(z-x) dx}$.

Доказательство: $F_Z(z) = P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = P\{Y < z - X\} = P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_-^+ dx \int_-^{z-x} f(x,y)dy$. Т.к. Х,У независимы, то $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, следовательно $F_Z(z) = \int_-^+ dx \int_-^{z-x} f_X(x)f_Y(y)dy = \int_-^+ f_X(x)dx \int_-^{z-x} f(y)dy$.

Наконец, $\boldsymbol{f_Z(z)} = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_-^+ f_X(x)dx \int_-^{z-x} f_Y(y)dy\right] = \boldsymbol{\int_-^+ f_X(x) f_Y(z-x)dx}$.

Выражение $(f1 * f2)(y) = \int_-^+ f1(x1)f2(y-x)dx$ называется сверткой функций $f1, f2$.

13. *Сформулировать определение математического ожидания СВ (дискретный и непрерывный случаи). Записать формулы вычисления МО функции от СВ. Сформулировать свойства МО и его механический смысл.*

~~~ ~~~

• ДСВ: Математическим ожиданием СВ Х называется число $M[X] = \sum_i p_i x_i$, где $p_i = P\{X = x_i\}, x_i$ пробегает множество всех значений Х. НСВ: Математическим ожиданием СВ Х называется число $M[x\} = \int_-^+ xf(x)dx$, где f(x) – плотность распределения НСВ Х.

• Если Х – СВ, $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, то $M[\phi(X)] = \sum_i p_i\phi(x_i)$ для ДСВ и $= \int_-^+ \phi(x)f(x)dx$ для НСВ.

• Механический смысл мат.ожидания: пусть есть стержень, обладающий «вероятностной массой» и в xi лежит её pi часть. Тогда математическое ожидание задаёт x0 – центр тяжести для этого стержня. В случае НСВ, f(x) можно интерпретировать как «плотность» бесконечного стержня.

Свойства МО:

1) Если Х принимает значение x0 с вероятностью 1 (т.е. не является СВ), то MX=x0.
2) $M[aX + b] = aM[X] + b$
3) $M[X + Y] = MX + MY$
4) Если Х и У независимые, то $M[XY] = MXMY$

14. *Сформулировать определение дисперсии СВ. Записать формулы вычисления дисперсии в дискретном и непрерывном случае. Сформулировать свойства дисперсии и её механический смысл.*

~~~ ~~~

• Дисперсией СВ Х называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ Х от её среднего значения: $D[X] = M[X - MX]^2$. Для ДСВ: $DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i$;   для НСВ: $DX = \int_-^+ (x - MX)^2 f(x)dx$.

Механический смысл. Дисперсия представляет собой второй момент центрированной СВ Х: $X^o = X - MX$ *//коментарий автора: это не икс в нулевой, это икс с кружочком сверху*

• Свойства дисперсии:

1) Если СВ Х принимает всего одно значени С с вероятностью 1, то DC = 0
2) $D[aX + b] = a^2 DX$
3) $DX = M[X^2] - (MX^2)$
4) $D[X + Y] = DX + DY$, если Х и У – независимые СВ.

15. *Сформулировать определения начального и центрального моментов СВ. МО и дисперсия как моменты. Сформулировать определение квантили и медианы СВ.*

~~~ ~~~

• Начальным моментом К-го порядка СВ Х называют математическое ожидание К-й степени этой СВ: $m_k = M[X^k] = \sum_i x_i^k p_i$.

• Центральным моментом К-го порядка Х называют матожидание к-й степени величины $X^o = X - MX$: $m_k^o = M[(X - MX)^k] = \sum_i (x_i - MX)^k p_i$.

• Математическое ожидание СВ Х – совпадает с моментом первого порядка. Дисперсия совпадает с центральным моментом 2-го порядка.

• Квантилью СВ Х уровня a называется число q_α, определяемое соотношением $P\{X < q_\alpha\} \le \alpha$, $P\{X > q_\alpha\} \le 1 - \alpha$. Медианой СВ Х называется её квантиль уровня 0.5.

16. *Сформулировать определение ковариации СВ. Записать формулы вычисления ковариации в дискретном и непрерывном случаях. Сформулировать свойства ковариации.*

~~~ ~~~

• Коварацией СВ Х и У называется число $cov(X,Y) = M[(X - m1)(Y - m2)]$, где m1=MX, m2=MY.

Если Х,У – ДСВ, то ковариация $cov(X,Y) = \sum_{ij}(x_i - MX)(y_j - MY)p_{ij}$; если НСВ - $cov(X,Y) = \int_-^+ \int_-^+ (x - MX)(y - MY)f_{XY}(x,y)dxdy$.

• Свойства ковариации:

1) $cov(X,X) = DX$
2) $cov(X,Y) = 0$, если Х,У – независимые СВ
3) Если $Y_1 = a_1X_1 + b_1, Y_2 = a_2X_2 + b_2$, то $cov(Y1,Y2) = a_1a_2cov(X1,X2)$
4) $-\sqrt{DXDY} \le cov(X,Y) \le \sqrt{DXDY}$;
5) Равенство $|cov(X,Y)| = \sqrt{DXDY}$ верно тогда и только тогда, когда СВ Х,У связаны линейной зависимостью, т.е. $Y = aX + b$.
6) $cov(X,Y) = M(XY) - MXMY$.
~~~