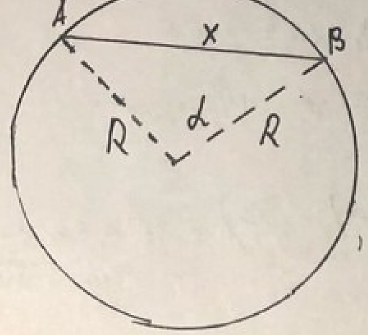
ИУ7-53Б, ДЗ 3, Романов А. В., Вар. 13.

№1. На окр. радиуса R случ. обр. брошены две точки. Считая, что длина хорды, соединяющей эти точки, является равномерно распр. случ. вел-ой, найти пл-ть распр. вер-тей длины кратчайшей дуги между брошенными т.

Решение.



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;2R] \\ \frac{1}{2R}, & x \in [0;2R] \end{cases}$$

т.к x - равномерно распр. случ. вел-на (по условию)

По теореме косинусов:

$$x^2 = R^2 + R^2 - 2\cdot R\cdot R\cdot \cos\alpha$$

$$x = R\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

$$\frac{x^2}{R^2} = 2(1-\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{x^2}{2R^2}$$

Длина дуги $l = \alpha\cdot R = R\cdot\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2R^2}\right)$

$l(x)$ - монотонна и дифф. на $(0;2R) \Rightarrow$

искомая плотность: $g(l) = f(x(l))\cdot\left|\frac{dx}{dl}\right|$

Выразим x:

$$\cos\left(\frac{l}{R}\right) = 1 - \frac{x^2}{2R^2} \Rightarrow \frac{x^2}{2R^2} = 1 - \cos\left(\frac{l}{R}\right) \Rightarrow x = \sqrt{2}\cdot R\cdot\sqrt{1-\cos\left(\frac{l}{R}\right)}$$

$$\frac{dx}{dl} = \sqrt{2}\cdot R\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\cos\left(\frac{l}{R}\right)}}\cdot\sin\left(\frac{l}{R}\right)\cdot\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{l}{R}\right)}{2\sqrt{1-\cos\left(\frac{l}{R}\right)}} \Rightarrow$$

$$g(l) = \begin{cases} 0, & \text{при } l \notin (0;R\pi) \\ \frac{1}{2R\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{l}{R}\right)}{\sqrt{1-\cos\left(\frac{l}{R}\right)}}, & \text{при } l \in (0;R\pi) \end{cases}$$

№2. Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$$\vec{m} = (0.6, 0.3), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.81 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим $Z = -2X_1 + X_2$. Z – является линейной комб. нормально распр. случ. вел-ны $X_1 X_2 \Rightarrow Z$ имеет норм. распр.

$$M(Z) = M(-2X_1 + X_2) = -2M(X_1) + M(X_2) = -2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 = -0{,}9$$

$$D(Z) = D(-2X_1 + X_2) = (-2)^2 D(X_1) + D(X_2) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot cov(X_1, X_2) =$$
$$= 4 \cdot 0{,}25 + 0{,}81 - 4 \cdot 0{,}25 = 0{,}81. \quad Z \sim N(-0{,}9; 0.9^2)$$

$$P(Z > 0) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{0 + 0{,}9}{0{,}9}\right) = \Phi(\infty) - \Phi(1) = 0{,}5 - 0{,}3413 =$$
$$= \underline{0{,}1587}$$

$\Phi(x)$ – интеграл Лапласа.