

Задачи: В одноклассных теплицах выращиваются семена некоторой культуры. Для повышения всхожести семян в $n_1 = 5$ теплицах создаются особые условия, а в остальных $n_2 = 10$ теплицах условия остаются стандартными. Считая распределение контролируемого признака нормальным.

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что особые условия повышают всхожесть семян, если по результатам полевой посадки получены следующие значения:

$$\bar{x}_{n_1} = 70\%, S(\bar{x}_{n_1}) = 5\%, n_1 = 5$$

$$\bar{y}_{n_2} = 60\%, S(\bar{y}_{n_2}) = 7\%, n_2 = 10.$$

Решение: $\begin{cases} X \sim N(m_1, \sigma^2) \\ Y \sim N(m_2, \sigma^2) \end{cases}, \sigma - \text{н.з.в.}$

1) Гипотезы:

$$\begin{cases} H_0 = \{m_1 > m_2\} \\ H_1 = \{m_1 < m_2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = m_1 - m_2 \\ m_1 > m_2 \rightarrow a > 0 \\ m_1 < m_2 \rightarrow a < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 = \{a > 0\} \\ H_1 = \{a < 0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0' = \{a = a_0\} & a_0 > 0 \\ H_1' = \{a = a_1\} & a_1 < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow a_0 > a_1$$

$$2) Z = \bar{X} - \bar{Y}, \quad MZ = m_1 - m_2 = a$$

$$DZ = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$3) \varphi(\bar{z}) = \frac{L(Z|H_1')}{L(Z|H_0')} \quad , \quad n=1$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_0}{\sigma}\right)^2}}$$

$$= e^{\frac{1}{2\sigma^2}[(z-a_1)^2 - (z-a_0)^2]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot [2z(a_0 - a_1) + (a_1^2 - a_0^2)]}$$

$$= e^{\frac{(a_1 - a_0)}{\sigma^2} z} \cdot e^{\frac{(a_0^2 - a_1^2)}{2\sigma^2}}$$

$$4) W = \{z \mid \varphi(z) \geq c\} \quad , \quad c > 0$$

$$= \left\{ e^{\frac{(a_1 - a_0)}{\sigma^2} z} \cdot e^{\frac{(a_0^2 - a_1^2)}{2\sigma^2}} \geq c \right\}$$

$$= \left\{ e^{\frac{(a_1 - a_0)}{\sigma^2} z} \geq c_1 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{(a_1 - a_0)}{\sigma^2} z \geq \ln c_1 \right\} = \left\{ z \leq c_2 \right\} \quad \left\{ a_1 - a_0 < 0 \right\}$$

$$= \{z < c_2\}$$

$$W = \{ \bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_1} \leq c_2 \}.$$

5).

$$5). \alpha(a_0) = P\{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} \leq c \mid H_0\}$$

$$= P\left\{ \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}) \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \leq \frac{c \cdot \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \right\}$$

$= c_1$

$$= P\left\{ \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}) \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \leq c_1 \right\}$$

$$= P\left\{ \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} - a_0) \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \leq c_1 - \frac{a_0 \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} \sim N(a_0, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}) \text{ при } H_0 \rightarrow \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} - a_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1) \\ \rightarrow \frac{(\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} - a_0) \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \sim St(n_1 + n_2 - 2) \end{array} \right\}$$

$$\alpha(a_0) = F_{St(n_1 + n_2 - 2)} \left(c_1 - \frac{a_0 \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \right)$$

$$\alpha = \sup_{a_0 \geq 0} \{ \alpha(a_0) \} = \sup_{a_0 \geq 0} \left\{ F \left(c_1 - \frac{a_0 \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}} \right) \right\}$$

$$= F_{St(n_1 + n_2 - 2)}(c_1) = \alpha$$

$$c_1 = t_{\alpha}^{St(n_1 + n_2 - 2)} = \frac{c \sqrt{n_1 + n_2 - 2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})}}$$

$$\rightarrow c = \frac{t_{\alpha}^{St(n_1 + n_2 - 2)}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \sqrt{(n_1 - 1)S^2(\bar{X}) + (n_2 - 1)S^2(\bar{Y})} =$$

$$\alpha = 0,05$$

$$n_1 = 5$$

$$n_2 = 10$$

$$S^2(\bar{X}) = 5\%$$

$$S^2(\bar{Y}) = 7\%$$

$$St_{0,05}^{13} = 2,160$$

$$c = 7,63$$

$$\bar{X} - \bar{Y} = 10 > c$$

$$W = \{ \bar{X} - \bar{Y} < c \}$$

→ принимать гипотезу о том, что особные условия повышают всхожесть семян.