Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

1 Проверка статистических гипотез

Проверку статистической гипотез обычно формулируют следующим образом:

1. Формулируют основную гипотезу H_0

2. Формулируют конкурирующую гипотезу H_1. $H_0 \cap H_1 = \emptyset$, но, возможно, H_0 и H_1 не исчерпывают все возможные случаи.

3. На основании имеющейся выборки $\vec{x} \in \chi_n$ принимают решение об истинности H_0 и H_1.

Определение 1.1. Правило, посредством которого принимается решение об истинности H_0 или H_1 называется статистическим критерием проверки гипотезы.

Задают критерий проверки статистической гипотезы обычно с помощью критического множества $W \in \chi_n$. При этом решающее правило имеет вид:

$$\vec{x} \in W \Longrightarrow \begin{cases} \text{отклоняют } H_0 \\ \text{принимают } H_1 \end{cases} \quad \vec{x} \notin W \Longrightarrow \begin{cases} \text{принимают } H_0 \\ \text{отклоняют } H_1 \end{cases}$$

Замечание. 1. Задать критерий проверки гипотез и задать критическое множество – одно и то же

2. При использовании любого критерия возможны ошибки двух видов:

   (a) принять конкурирующую гипотезу при истинности основной гипотезы – ошибка первого рода: $P\{\vec{x} \in W | H_0\} = \alpha$

   (b) принять основную гипотезу при истинности конкурирующей – ошибка второго рода: $P\{\vec{x} \notin W | H_1\} = \beta$

Определение 1.2. α называется уровнем значимости, а $1 - \beta$ – мощностью критерия.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

1 Проверка статистических гипотез

Проверку статистической гипотез обычно формулируют следующим образом:

1. Формулируют основную гипотезу H_0
2. Формулируют конкурирующую гипотезу H_1. $H_0 \cap H_1 = \emptyset$, но, возможно, H_0 и H_1 не исчерпывают все возможные случаи.
3. На основании имеющейся выборки $\vec{x} \in \chi_n$ принимают решение об истинности H_0 и H_1.

Определение 1.1. Правило, посредством которого принимается решение об истинности H_0 или H_1 называется статистическим критерием проверки гипотезы.

Задают критерий проверки статистической гипотезы обычно с помощью критического множества $W \in \chi_n$. При этом решающее правило имеет вид:

$$\vec{x} \in W \Longrightarrow \begin{cases} \text{отклоняют } H_0 \\ \text{принимают } H_1 \end{cases} \quad \vec{x} \notin W \Longrightarrow \begin{cases} \text{принимают } H_0 \\ \text{отклоняют } H_1 \end{cases}$$

Замечание.

1. Задать критерий проверки гипотез и задать критическое множество – одно и то же
2. При использовании любого критерия возможны ошибки двух видов:
   (a) принять конкурирующую гипотезу при истинности основной гипотезы – ошибка первого рода: $P\{\vec{x} \in W | H_0\} = \alpha$
   (b) принять основную гипотезу при истинности конкурирующей – ошибка второго рода: $P\{\vec{x} \notin W | H_1\} = \beta$

Определение 1.2. α называется уровнем значимости, а $1 - \beta$ – мощностью критерия.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

1 Проверка статистических гипотез

Проверку статистической гипотез обычно формулируют следующим образом:

1. Формулируют основную гипотезу H_0
2. Формулируют конкурирующую гипотезу H_1. $H_0 \cap H_1 = \emptyset$, но, возможно, H_0 и H_1 не исчерпывают все возможные случаи.
3. На основании имеющейся выборки $\vec{x} \in \chi_n$ принимают решение об истинности H_0 и H_1.

Определение 1.1. Правило, посредством которого принимается решение об истинности H_0 или H_1 называется статистическим критерием проверки гипотезы.

Задают критерий проверки статистической гипотезы обычно с помощью критического множества $W \in \chi_n$. При этом решающее правило имеет вид:

$$\vec{x} \in W \Longrightarrow \begin{cases} \text{отклоняют } H_0 \\ \text{принимают } H_1 \end{cases} \quad \vec{x} \notin W \Longrightarrow \begin{cases} \text{принимают } H_0 \\ \text{отклоняют } H_1 \end{cases}$$

Замечание.

1. Задать критерий проверки гипотез и задать критическое множество – одно и то же
2. При использовании любого критерия возможны ошибки двух видов:
   (a) принять конкурирующую гипотезу при истинности основной гипотезы – ошибка первого рода: $P\{\vec{x} \in W | H_0\} = \alpha$
   (b) принять основную гипотезу при истинности конкурирующей – ошибка второго рода: $P\{\vec{x} \notin W | H_1\} = \beta$

Определение 1.2. α называется уровнем значимости, а $1 - \beta$ – мощностью критерия.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Пусть:

1. X – случайная величина
2. $F(x,\theta)$ – функция распределения случайной величины X (известны общий вид функции F, но она зависит от неизвестного параметра θ)

Нужно проверить гипотезу $H_0 = \{b = b_0\}$ при альтернативной $H_1 = \{b = b_1\}$, $b \neq b_1$
Введём в рассмотрение статистику:

$$b(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X};\theta_1)}{L(\vec{X};\theta_0)},$$

где $L(\vec{X};\theta)$ – функция правдоподобия.

Определение 1.3. Статистика $\phi(\vec{X})$ называется отношением правдоподобия.

Критическое множество должно иметь вид:

$$W = \{\vec{x} \in \chi_n : \phi(\vec{X}) \geq C_\phi\},$$

где константа C выбирается из условия

$$\alpha = P\{\phi(\vec{X}) \geq C_\phi | \theta = \theta_0\}$$

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Пусть:

1. X – случайная величина
2. $F(x,\theta)$ – функция распределения случайной величины X (известны общий вид функции F, но она зависит от неизвестного параметра θ)

Нужно проверить гипотезу $H_0 = \{b = b_0\}$ при альтернативной $H_1 = \{b = b_1\}$, $b \neq b_1$
Введём в рассмотрение статистику:

$$b(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X};\theta_1)}{L(\vec{X};\theta_0)},$$

где $L(\vec{X};\theta)$ – функция правдоподобия.

Определение 1.3. Статистика $\phi(\vec{X})$ называется отношением правдоподобия.

Критическое множество должно иметь вид:

$$W = \{\vec{x} \in \chi_n : \phi(\vec{X}) \geq C_\phi\},$$

где константа C выбирается из условия

$$\alpha = P\{\phi(\vec{X}) \geq C_\phi | \theta = \theta_0\}$$

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Пусть:

1. X – случайная величина
2. $F(x, \theta)$ – функция распределения случайной величины X (известны общий вид функции F, но она зависит от неизвестного параметра θ)

Нужно проверить гипотезу $H_0 = \{b = b_0\}$ при альтернативной $H_1 = \{b = b_1\}$, $b \neq b_1$
Введём в рассмотрение статистику:

$$b(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X};\theta_1)}{L(\vec{X};\theta_0)},$$

где $L(\vec{X};\theta)$ – функция правдоподобия.

Определение 1.3. Статистика $\phi(\vec{X})$ называется отношением правдоподобия.

Критическое множество должно иметь вид:

$$W = \{\vec{x} \in \chi_n : \phi(\vec{X}) \geq C_\phi\},$$

где константа C выбирается из условия

$$\alpha = P\{\phi(\vec{X}) \geq C_\phi | \theta = \theta_0\}$$

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Пример. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – известно.

Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез $H_0 = \{m = m_0\}, \quad H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_0 < m_1$.

$$\phi(\vec{X_n}) = \frac{L(\vec{X_n}, m_1)}{L(\vec{X_n}, m_0)}$$

$$L(\vec{X_n}, m) = \prod_{k=1}^{n} f_X(X_k, m) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k - m)^2}{2\sigma^2}} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2}$$

Тогда отношение правдоподобия:

$$\phi(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X}, m_1)}{L(\vec{X}, m_0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_0)^2}} =$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - m_1)^2 - (X_i - m_0)^2]} =$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[x_i^2 - 2x_i m_1 + m_1^2 - x_i^2 + 2x_i m_0 - m_0^2]} =$$

$$= e^{\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2\sigma^2}[m_1^2 - m_0^2]}$$

Выше было показано, что критическое множество должно иметь вид

$$W = \{\vec{X} : \phi(\vec{X_n}) \geq C\} = \{e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_1)^2 - \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_0)^2)} \geq C\},$$

Преобразовать (log, деление и раскрытие квадрата) к $W = \{\sum_{k=1}^{n} x_k \geq C_4\}$
Пусть задана величина α, найдем C_4

$$P\{W | H_0\} = \alpha$$

$$\alpha = P\{\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant C_4 | H_0\} = \begin{cases} H_0 = X_k \sim N(M_0, \sigma^2) \\ \sum_{k=1}^{n} \sim N(nm_0, n\sigma^2) \end{cases} = P\{\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \geqslant \frac{C_4 - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} | H_0\} =$$
$$\{H_0 : \frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(y)}} \sim N(0,1)\} = 1 - \Phi(\frac{C_n - nm_0}{\sqrt{n\sigma^2}})$$

$$\Phi(\frac{C_{n - nm_0}}{\sqrt{n}\sigma}) = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{C_4}{\sqrt{n}\sigma} = t_{1-\alpha}^{N(0,1)}$$

$$C_4 = n \cdot m_0 + \sqrt{n} \cdot \sigma \cdot t_{1-\alpha}^{N(0,1)}$$

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Пример. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – известно.

Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез $H_0 = \{m = m_0\}, \quad H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_0 < m_1$.

$$\phi(\vec{X_n}) = \frac{L(\vec{X_n}, m_1)}{L(\vec{X_n}, m_0)}$$

$$L(\vec{X_n}, m) = \prod_{k=1}^n f_X(X_k, m) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k - m)^2}{2\sigma^2}} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n (x_k - m)^2}$$

Тогда отношение правдоподобия:

$$\phi(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X}, m_1)}{L(\vec{X}, m_0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2}} =$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n [(x_i - m_1)^2 - (X_i - m_0)^2]} =$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n [x_i^2 - 2x_i m_1 + m_1^2 - x_i^2 + 2x_i m_0 - m_0^2]} =$$

$$= e^{\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2\sigma^2}[m_1^2 - m_0^2]}$$

Выше было показано, что критическое множество должно иметь вид

$$W = \{\vec{X} : \phi(\vec{X_n}) \geq C\} = \{e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{k=1}^n (x_k - m_1)^2 - \sum_{k=1}^n (x_k - m_0)^2)} \geq C\},$$

Преобразовать (log, деление и раскрытие квадрата) к $W = \{\sum_{k=1}^n x_k \geq C_4\}$

Пусть задана величина α, найдем C_4

$$P\{W|H_0\} = \alpha$$

$$\alpha = P\{\sum_{k=1}^n x_k \geqslant C_4 | H_0\} = \begin{cases} H_0 = X_k \sim N(M_0, \sigma^2) \\ \sum_{k=1}^n \sim N(nm_0, n\sigma^2) \end{cases} = P\{\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \geqslant \frac{C_4 - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} | H_0\} = \{H_0 : \frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(y)}} \sim N(0,1)\} = 1 - \Phi(\frac{C_n - nm_0}{\sqrt{n\sigma^2}})$$

$$\Phi(\frac{C_{n - nm_0}}{\sqrt{n}\sigma}) = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{C_4}{\sqrt{n}\sigma} = t_{1-\alpha}^{N(0,1)}$$

$$C_4 = n \cdot m_0 + \sqrt{n} \cdot \sigma \cdot t_{1-\alpha}^{N(0,1)}$$

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Пример. Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – известно.

Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез $H_0 = \{m = m_0\}, \quad H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_0 < m_1$.

$$\phi(\vec{X_n}) = \frac{L(\vec{X_n}, m_1)}{L(\vec{X_n}, m_0)}$$

$$L(\vec{X_n}, m) = \prod_{k=1}^n f_X(X_k, m) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_k - m)^2}{2\sigma^2}} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^n (x_k - m)^2}$$

Тогда отношение правдоподобия:

$$\phi(\vec{X}) = \frac{L(\vec{X}, m_1)}{L(\vec{X}, m_0)} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m_1)^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - m_0)^2}} =$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n [(x_i - m_1)^2 - (X_i - m_0)^2]} =$$

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n [x_i^2 - 2x_i m_1 + m_1^2 - x_i^2 + 2x_i m_0 - m_0^2]} =$$

$$= e^{\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2\sigma^2}[m_1^2 - m_0^2]}$$

Выше было показано, что критическое множество должно иметь вид

$$W = \{\vec{X} : \phi(\vec{X_n}) \geq C\} = \{e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\sum_{k=1}^n (x_k - m_1)^2 - \sum_{k=1}^n (x_k - m_0)^2)} \geq C\},$$

Преобразовать (log, деление и раскрытие квадрата) к $W = \{\sum_{k=1}^n x_k \geq C_4\}$

Пусть задана величина α, найдем C_4

$$P\{W | H_0\} = \alpha$$

$$\alpha = P\{\sum_{k=1}^n x_k \geqslant C_4 | H_0\} = \begin{cases} H_0 = X_k \sim N(M_0, \sigma^2) \\ \sum_{k=1}^n \sim N(nm_0, n\sigma^2) \end{cases} = P\{\frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \geqslant \frac{C_4 - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} | H_0\} =$$
$$\{H_0 : \frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D(y)}} \sim N(0,1)\} = 1 - \Phi(\frac{C_n - nm_0}{\sqrt{n\sigma^2}})$$

$$\Phi(\frac{C_{n - nm_0}}{\sqrt{n}\sigma}) = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{C_4}{\sqrt{n}\sigma} = t_{1-\alpha}^{N(0,1)}$$

$$C_4 = n \cdot m_0 + \sqrt{n} \cdot \sigma \cdot t_{1-\alpha}^{N(0,1)}$$

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

2. При использовании любого критерия возможны ошибки двух видов:

    (a) принять конкурирующую гипотезу при истинности основной гипотезы – ошибка первого рода: $P\{x \in W|H_0\} = \alpha$

    (b) принять основную гипотезу при истинности конкурирующей – ошибка второго рода: $P\{x \notin W|H_1\} = \beta$

Определение 1.4. Величина $\alpha = sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$ называется размером критерия.

Определение 1.5. Функция $M(\theta) = P\{\vec{X} \in W|\theta\}(*)$ называется функцией мощности критерия.

Определение 1.6. Критерий, который при заданном размере α максимизирует функцию мощности одновременно по всем возможным критериям при всех $\theta \in \Theta_1$ называется равномерно наиболее мощным критерием.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

2. При использовании любого критерия возможны ошибки двух видов:

   (a) принять конкурирующую гипотезу при истинности основной гипотезы – ошибка первого рода: $P\{x \in W|H_0\} = \alpha$

   (b) принять основную гипотезу при истинности конкурирующей – ошибка второго рода: $P\{x \notin W|H_1\} = \beta$

Определение 1.4. Величина $\alpha = sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$ называется размером критерия.

Определение 1.5. Функция $M(\theta) = P\{\vec{X} \in W|\theta\}(*)$ называется функцией мощности критерия.

Определение 1.6. Критерий, который при заданном размере α максимизирует функцию мощности одновременно по всем возможным критериям при всех $\theta \in \Theta_1$ называется равномерно наиболее мощным критерием.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

2. При использовании любого критерия возможны ошибки двух видов:

   (a) принять конкурирующую гипотезу при истинности основной гипотезы – ошибка первого рода: $P\{\vec{x} \in W|H_0\} = \alpha$

   (b) принять основную гипотезу при истинности конкурирующей – ошибка второго рода: $P\{\vec{x} \notin W|H_1\} = \beta$

Определение 1.4. Величина $\alpha = sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$ называется размером критерия.

Определение 1.5. Функция $M(\theta) = P\{\vec{X} \in W|\theta\}(*)$ называется функцией мощности критерия.

Определение 1.6. Критерий, который при заданном размере α максимизирует функцию мощности одновременно по всем возможным критериям при всех $\theta \in \Theta_1$ называется равномерно наиболее мощным критерием.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Проверка сложных параметрических гипотез

Пусть

- X – случайная величина
- $F(x, \theta)$ – функция распределения случайной величины X(общий вид функции F известен, но F зависит от неизвестного параметра θ)

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез: $H_0 = \{\theta \in \Theta_0\}$ и $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, где $\theta_0 \bigcap \theta_1 = 0$.

- $\theta_0 = \{\theta > \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta < \theta_1\}$
- $\theta = \{\theta < \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$.

В этом случае критерий как и раньше задается с использованием критического множества W, а решающее правило имеет вид:

$$\vec{X} \in W \to \{\text{принять } H_1, \text{отклонить } H_0\}$$
$$\vec{X} \notin W \to \{\text{принять } H_0, \text{отклонить } H_1\}$$

При этом ошибки первого и второго рода определяются как и раньше, но теперь их вероятности зависят от θ.

$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W | \theta \in \Theta_0\}$,

$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \chi_n \, W | \theta \in \Theta_1\}$.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Проверка сложных параметрических гипотез

Пусть

- X – случайная величина
- $F(x, \theta)$ – функция распределения случайной величины X(общий вид функции F известен, но F зависит от неизвестного параметра θ)

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез: $H_0 = \{\theta \in \Theta_0\}$ и $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, где $\theta_0 \bigcap \theta_1 = 0$.

- $\theta_0 = \{\theta > \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta < \theta_1\}$
- $\theta = \{\theta < \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$.

В этом случае критерий как и раньше задается с использованием критического множества W, а решающее правило имеет вид:

$$\vec{X} \in W \to \{\text{принять } H_1, \text{отклонить } H_0\}$$
$$\vec{X} \notin W \to \{\text{принять } H_0, \text{отклонить } H_1\}$$

При этом ошибки первого и второго рода определяются как и раньше, но теперь их вероятности зависят от θ.

$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W | \theta \in \Theta_0\}$,

$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \chi_n \; W | \theta \in \Theta_1\}$.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

<u>Проверка сложных параметрических гипотез</u>

Пусть

- X – случайная величина
- $F(x, \theta)$ – функция распределения случайной величины X(общий вид функции F известен, но F зависит от неизвестного параметра θ)

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез: $H_0 = \{\theta \in \Theta_0\}$ и $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, где $\theta_0 \bigcap \theta_1 = 0$.

- $\theta_0 = \{\theta > \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta < \theta_1\}$
- $\theta = \{\theta < \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$.

В этом случае критерий как и раньше задается с использованием критического множества W, а решающее правило имеет вид:

$$\vec{X} \in W \to \{\text{принять } H_1, \text{отклонить } H_0\}$$
$$\vec{X} \notin W \to \{\text{принять } H_0, \text{отклонить } H_1\}$$

При этом ошибки первого и второго рода определяются как и раньше, но теперь их вероятности зависят от θ.

$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W | \theta \in \Theta_0\}$,

$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \chi_n \ W | \theta \in \Theta_1\}$.

Пример 1. *Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – известна.*

Рассмотрим задачу проверки гипотез $H_0 = \{m = m_0\}$ и $H_1 = \{m > m_0\}$.

1) Ранее была решена задача проверки двух параметрических гипотез $H_0 = \{m = m_0\}$ и $H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_1 > m_0$. При этом критическое множество имеет вид:

$$W = \{\vec{X} \in \chi_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq nm_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}\}(*)$$

2) Так как построенное выше критическое множество не зависит от m_1, то фактически этот критерий является равномерно наиболее мощным для проверки гипотез

$$H_0 = \{m = m_0\} \qquad H_1 = \{m > m_0\}$$

Таким образом, для рассмотренной задачи критическое множество имеет вид (*).

Пример 2. *Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – неизвестна.*

Рассмотрим задачу проверки гипотез

$$H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m > m_0\}$$

В этом примере целесообразно воспользоваться статистикой

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim (\text{при истинности } H_0) St(n-1)$$

Аналогично предыдущим примерам, критическое множество можно задать в виде

$$W = \{\vec{X} \in \chi_n : T(\vec{X}) \geq t_{1-\alpha}^{n-1}\},$$

где $t_{1-\alpha}^{n-1}$ – квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $St(n-1)$

Замечание 2. Пусть в условиях предыдущего примера требуется проверить следующие гипотезы:

- $H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m < m_0\}$
- $H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m \neq m_0\}$

Рассуждая аналогично, с использованием статистики

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n}$$

зададим критические множества в виде:

- $W = \{\vec{X} \in \chi_n : T(\vec{X} \leq -t_{1-\alpha}^{n-1})\}$
- $W = \{\vec{X} \in \chi_n : |T(\vec{X})| \geq t_{1-\alpha/2}^{n-1}\}$

Пример 1. *Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – известна.*

Рассмотрим задачу проверки гипотез $H_0 = \{m = m_0\}$ и $H_1 = \{m > m_0\}$.

1) Ранее была решена задача проверки двух параметрических гипотез $H_0 = \{m = m_0\}$ и $H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_1 > m_0$. При этом критическое множество имеет вид:

$$W = \{\vec{X} \in \chi_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq nm_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}\}(*)$$

2) Так как построенное выше критическое множество не зависит от m_1, то фактически этот критерий является равномерно наиболее мощным для проверки гипотез

$$H_0 = \{m = m_0\} \qquad H_1 = \{m > m_0\}$$

Таким образом, для рассмотренной задачи критическое множество имеет вид (*).

Пример 2. *Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – неизвестна.*

Рассмотрим задачу проверки гипотез

$$H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m > m_0\}$$

В этом примере целесообразно воспользоваться статистикой

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim (\text{при истинности } H_0) St(n-1)$$

Аналогично предыдущим примерам, критическое множество можно задать в виде

$$W = \{\vec{X} \in \chi_n : T(\vec{X}) \geq t_{1-\alpha}^{n-1}\},$$

где $t_{1-\alpha}^{n-1}$ – квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $St(n-1)$

Замечание 2. Пусть в условиях предыдущего примера требуется проверить следующие гипотезы:

- $H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m < m_0\}$
- $H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m \neq m_0\}$

Рассуждая аналогично, с использованием статистики

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n}$$

зададим критические множества в виде:

- $W = \{\vec{X} \in \chi_n : T(\vec{X} \leq -t_{1-\alpha}^{n-1})\}$
- $W = \{\vec{X} \in \chi_n : |T(\vec{X})| \geq t_{1-\alpha/2}^{n-1}\}$

Пример 1. *Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – известна.*

Рассмотрим задачу проверки гипотез $H_0 = \{m = m_0\}$ и $H_1 = \{m > m_0\}$.

1) Ранее была решена задача проверки двух параметрических гипотез $H_0 = \{m = m_0\}$ и $H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_1 > m_0$. При этом критическое множество имеет вид:

$$W = \{\vec{X} \in \chi_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq nm_0 + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{n}\}(*)$$

2) Так как построенное выше критическое множество не зависит от m_1, то фактически этот критерий является равномерно наиболее мощным для проверки гипотез

$$H_0 = \{m = m_0\} \qquad H_1 = \{m > m_0\}$$

Таким образом, для рассмотренной задачи критическое множество имеет вид (*).

Пример 2. *Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m – неизвестно, σ^2 – неизвестна.*

Рассмотрим задачу проверки гипотез

$$H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m > m_0\}$$

В этом примере целесообразно воспользоваться статистикой

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim (\textit{при истинности } H_0) St(n-1)$$

Аналогично предыдущим примерам, критическое множество можно задать в виде

$$W = \{\vec{X} \in \chi_n : T(\vec{X}) \geq t_{1-\alpha}^{n-1}\},$$

где $t_{1-\alpha}^{n-1}$ – квантиль уровня $1 - \alpha$ распределения $St(n-1)$

Замечание 2. Пусть в условиях предыдущего примера требуется проверить следующие гипотезы:

- $H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m < m_0\}$
- $H_0 = \{m = m_0\} \quad vs \quad H_1 = \{m \neq m_0\}$

Рассуждая аналогично, с использованием статистики

$$T(\vec{X}) = \frac{\overline{X} - m_0}{S(\vec{X})}\sqrt{n}$$

зададим критические множества в виде:

- $W = \{\vec{X} \in \chi_n : T(\vec{X} \leq -t_{1-\alpha}^{n-1})\}$
- $W = \{\vec{X} \in \chi_n : |T(\vec{X})| \geq t_{1-\alpha/2}^{n-1}\}$

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как фукнцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

<u>Проверка сложных параметрических гипотез</u>

Пусть

- X – случайная величина
- $F(x, \theta)$ – функция распределения случайной величины X(общий вид функции F известен, но F зависит от неизвестного параметра θ)

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез: $H_0 = \{\theta \in \Theta_0\}$ и $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, где $\theta_0 \bigcap \theta_1 = 0$.

- $\theta_0 = \{\theta > \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta < \theta_1\}$
- $\theta = \{\theta < \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$.

В этом случае критерий как и раньше задается с использованием критического множества W, а решающее правило имеет вид:

$$\vec{X} \in W \rightarrow \{\text{принять } H_1, \text{отклонить } H_0\}$$
$$\vec{X} \notin W \rightarrow \{\text{принять } H_0, \text{отклонить } H_1\}$$

При этом ошибки первого и второго рода определяются как и раньше, но теперь их вероятности зависят от θ.

$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W | \theta \in \Theta_0\}$,

$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \chi_n \ W | \theta \in \Theta_1\}$.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Проверка сложных параметрических гипотез

Пусть

- X – случайная величина
- $F(x,\theta)$ – функция распределения случайной величины X(общий вид функции F известен, но F зависит от неизвестного параметра θ)

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез: $H_0 = \{\theta \in \Theta_0\}$ и $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, где $\theta_0 \bigcap \theta_1 = 0$.

- $\theta_0 = \{\theta > \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta < \theta_1\}$
- $\theta = \{\theta < \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$.

В этом случае критерий как и раньше задается с использованием критического множества W, а решающее правило имеет вид:

$$\vec{X} \in W \to \{\text{принять } H_1, \text{отклонить } H_0\}$$
$$\vec{X} \notin W \to \{\text{принять } H_0, \text{отклонить } H_1\}$$

При этом ошибки первого и второго рода определяются как и раньше, но теперь их вероятности зависят от θ.

$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W | \theta \in \Theta_0\}$,

$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \chi_n\, W | \theta \in \Theta_1\}$.

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой неизвестен(известен не полностью).

Определение 0.1. Статистической гипотезой называется любое утверждение относительно закона распределения случайной величины X.

Определение 0.2. Статистическая гипотеза называется простой, если она однозначно определяет закон распределения случайной величины X(однозначно задает функцию распределения случайной величины X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется сложной.

Определение 0.3. Статистическая гипотеза называется параметрической, если она является утверждением относительно значений неизвестного параметра известного закона распределения.

Проверка сложных параметрических гипотез

Пусть

- X – случайная величина
- $F(x, \theta)$ – функция распределения случайной величины X(общий вид функции F известен, но F зависит от неизвестного параметра θ)

Рассмотрим задачу проверки двух сложных гипотез: $H_0 = \{\theta \in \Theta_0\}$ и $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, где $\theta_0 \bigcap \theta_1 = 0$.

- $\theta_0 = \{\theta > \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta < \theta_1\}$
- $\theta = \{\theta < \theta_0\}, \theta_1 = \{\theta > \theta_1\}$, где $\theta_0 < \theta_1$.

В этом случае критерий как и раньше задается с использованием критического множества W, а решающее правило имеет вид:

$$\vec{X} \in W \to \{\text{принять } H_1, \text{отклонить } H_0\}$$
$$\vec{X} \notin W \to \{\text{принять } H_0, \text{отклонить } H_1\}$$

При этом ошибки первого и второго рода определяются как и раньше, но теперь их вероятности зависят от θ.

$\alpha(\theta) = P\{\vec{X} \in W | \theta \in \Theta_0\}$,
$\beta(\theta) = P\{\vec{X} \in \chi_n \ W | \theta \in \Theta_1\}$.

Пример 3. *Пусть*

- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
- $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
- m_1, m_2 – *неизвестны*, σ_1, σ_2 – *известны*

Рассмотрим задачу проверки следующих гипотез:

- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 > m_2\}$
- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 < m_2\}$
- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$

Рассмотрим случайную величину $Z = X - Y; MZ = MX - MY$*, поэтому сформулированные задачи эквивалентны задачам:*

- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_1 = \{m > 0\}$
- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_2 = \{m < 0\}$
- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_3 = \{m \neq 0\}$,

где $m = M[Z]$.

Рассмотрим статистику

$$T(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

где n_1 – *объем выборки* $\vec{X}$, n_2 – *объем выборки* $\vec{Y}$.

Закон распределения случайной величины T *при истинности* H_0*:*

T *является линейно наибольшей нормированной случайной величиной, следовательно* T *сама имеет нормальное распределение.*

$$M[T] = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}(M\overline{X} - M\overline{Y}) = \textit{при истинности } H_0 = 0$$

$$D[T] = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}[D\overline{X} + D\overline{Y}] = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}[\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}] = 1$$

Таким образом, при истинности H_0 *статистика* $T \sim N(0,1)$. *По этой причине критические множества в каждой из рассмотренных задач имеют вид:*

- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq u_{1-\alpha}\}$
- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \leq -u_{1-\alpha}\}$
- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : |T(\vec{x}, \vec{y})| \geq u_{1-\alpha/2}\}$

Пример 3. *Пусть*

- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
- $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
- m_1, m_2 – *неизвестны,* σ_1, σ_2 – *известны*

Рассмотрим задачу проверки следующих гипотез:

- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 > m_2\}$
- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 < m_2\}$
- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$

Рассмотрим случайную величину $Z = X - Y; MZ = MX - MY$, *поэтому сформулированные задачи эквивалентны задачам:*

- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_1 = \{m > 0\}$
- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_2 = \{m < 0\}$
- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_3 = \{m \neq 0\}$,

где $m = M[Z]$.

Рассмотрим статистику

$$T(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

где n_1 – *объем выборки* $\vec{X}$, n_2 – *объем выборки* $\vec{Y}$.

Закон распределения случайной величины T *при истинности* H_0:

T *является линейно наибольшей нормированной случайной величиной, следовательно* T *сама имеет нормальное распределение.*

$$M[T] = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}(M\overline{X} - M\overline{Y}) = \text{при истинности } H_0 = 0$$

$$D[T] = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}[D\overline{X} + D\overline{Y}] = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}[\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}] = 1$$

Таким образом, при истинности H_0 *статистика* $T \sim N(0, 1)$. *По этой причине критические множества в каждой из рассмотренных задач имеют вид:*

- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq u_{1-\alpha}\}$
- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \leq -u_{1-\alpha}\}$
- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : |T(\vec{x}, \vec{y})| \geq u_{1-\alpha/2}\}$

Пример 3. *Пусть*

- $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$
- $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$
- m_1, m_2 – *неизвестны,* σ_1, σ_2 – *известны*

Рассмотрим задачу проверки следующих гипотез:

- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 > m_2\}$
- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 < m_2\}$
- $H_0 = \{m_1 = m_2\} \quad vs \quad H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$

Рассмотрим случайную величину $Z = X - Y; MZ = MX - MY$*, поэтому сформулированные задачи эквивалентны задачам:*

- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_1 = \{m > 0\}$
- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_2 = \{m < 0\}$
- $H_0 = \{m = 0\} \quad vs \quad H_3 = \{m \neq 0\}$,

где $m = M[Z]$.

Рассмотрим статистику

$$T(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

где n_1 – *объем выборки* $\vec{X}$, n_2 – *объем выборки* $\vec{Y}$.

Закон распределения случайной величины T *при истинности* H_0*:*

T *является линейно наибольшей нормированной случайной величиной, следовательно* T *сама имеет нормальное распределение.*

$$M[T] = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}(M\overline{X} - M\overline{Y}) = \text{при истинности } H_0 = 0$$

$$D[T] = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}[D\overline{X} + D\overline{Y}] = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}[\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}] = 1$$

Таким образом, при истинности H_0 *статистика* $T \sim N(0,1)$. *По этой причине критические множества в каждой из рассмотренных задач имеют вид:*

- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq u_{1-\alpha}\}$
- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \leq -u_{1-\alpha}\}$
- $W = \{(\vec{X}, \vec{Y}) \in \chi_n : |T(\vec{x}, \vec{y})| \geq u_{1-\alpha/2}\}$

Определение 2.3. Критерием согласия называется статистический критерий, предназначенный для проверки корректности гипотезы о том, что предполагаемый закон распределения $F_0(t,\vec{\theta})$ случайной величины X соответствует экспериментальным данным, представленным эмпирической функцией распределения $F_n(t)$.

Способы выдвижения гипотез

1) По наблюдениям $\vec{X_m}$ можно построить имперческую функцию $F_n(\vec{X_n},t) = \frac{n(\vec{x_n},t)}{t}$ и исследовать её. Тоже самое касается исследований гистограммы.

2) Исследовать физическую задачу, связанную с закономерностями обратной случайности (X)

Определение 2.3. Критерием согласия называется статистический критерий, предназначенный для проверки корректности гипотезы о том, что предполагаемый закон распределения $F_0(t,\vec{\theta})$ случайной величины X соответствует экспериментальным данным, представленным эмпирической функцией распределения $F_n(t)$.

Способы выдвижения гипотез

1) По наблюдениям $\vec{X_m}$ можно построить имперческую функцию $F_n(\vec{X_n},t) = \frac{n(\vec{x_n},t)}{t}$ и исследовать её. Тоже самое касается исследований гистограммы.

2) Исследовать физическую задачу, связанную с закономерностями обратной случайности (X)

Определение 2.3. Критерием согласия называется статистический критерий, предназначенный для проверки корректности гипотезы о том, что предполагаемый закон распределения $F_0(t,\vec{\theta})$ случайной величины X соответствует экспериментальным данным, представленным эмпирической функцией распределения $F_n(t)$.

Способы выдвижения гипотез

1) По наблюдениям $\vec{X_m}$ можно построить имперческую функцию $F_n(\vec{X_n},t) = \frac{n(\vec{x_n},t)}{t}$ и исследовать её. Тоже самое касается исследований гистограммы.

2) Исследовать физическую задачу, связанную с закономерностями обратной случайности (X)

2.1 Постановка задачи

Пусть X - генеральная совокупность, закон распределения которой выражен функцией распределения $F_x(t)$. На основе полученной реализации нужно решить, совпадает ли закон распределения $P_x(t)$ с другим законом распределения $F_0(\vec{b}, t)$, где $\vec{b} = (b_1, ..., b_s)$ - вектор параметров.

2.2 Критерий Колмогорова

$$\forall t \in R : F_n(\vec{X_n}, t) \to F_x(t)\ (*)$$
$$D_n(\vec{X_n}) = \sup_{t \in R} |F_n(\vec{X_n}, t) - F_0(t)|$$

где F_0 – предполагаемая функция распределения.

Идея: в силу (*), если $X \sim F_0(t)$, то $D_n(\vec{X_n})$ применим на реализации небольшого значения.

Если $X \sim F_1(t) \not\equiv F_0(t)$, то $D_n(\vec{X_n}) = \sup\limits_{t \in R} |F_n(\vec{X_n}, t) - F_0(t)| \to \sup\limits_{t \in R} |F_1(t) - F_0(t)| \neq 0$

Утверждение 1: Распределение $D_n(\vec{X_n})$ не зависит от F_0 при условии $H_0 = \{F_x(t) \equiv F_0(t)\}$

Утверждение 2: $P\{\sqrt{n} D_n(\vec{X_n}) < X\} \to_{n \to \infty} k(x) = \begin{cases} \sum_{k=+\inf}^{+\inf} (-1)^k e^{-2k^2x^2}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$,

где $k(x)$ – функция распределения Колмогорова.

2.1 Постановка задачи

Пусть X - генеральная совокупность, закон распределения которой выражен функцией распределения $F_x(t)$. На основе полученной реализации нужно решить, совпадает ли закон распределения $P_x(t)$ с другим законом распределения $F_0(\vec{b}, t)$, где $\vec{b} = (b_1, ..., b_s)$ - вектор параметров.

2.2 Критерий Колмогорова

$$\forall t \in R : F_n(\vec{X_n}, t) \to F_x(t)\ (*)$$
$$D_n(\vec{X_n}) = \sup_{t \in R} |F_n(\vec{X_n}, t) - F_0(t)|$$

где F_0 – предполагаемая функция распределения.

Идея: в силу (*), если $X \sim F_0(t)$, то $D_n(\vec{X_n})$ применим на реализации небольшого значения.

Если $X \sim F_1(t) \not\equiv F_0(t)$, то $D_n(\vec{X_n}) = \sup\limits_{t \in R} |F_n(\vec{X_n}, t) - F_0(t)| \to \sup\limits_{t \in R} |F_1(t) - F_0(t)| \neq 0$

Утверждение 1: Распределение $D_n(\vec{X_n})$ не зависит от F_0 при условии $H_0 = \{F_x(t) \equiv F_0(t)\}$

Утверждение 2: $P\{\sqrt{n} D_n(\vec{X_n}) < X\} \to_{n \to \infty} k(x) = \begin{cases} \sum_{k=+\inf}^{+\inf} (-1)^k e^{-2k^2x^2}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$,

где $k(x)$ – функция распределения Колмогорова.

2.1 Постановка задачи

Пусть X - генеральная совокупность, закон распределения которой выражен функцией распределения $F_x(t)$. На основе полученной реализации нужно решить, совпадает ли закон распределения $P_x(t)$ с другим законом распределения $F_0(\vec{b}, t)$, где $\vec{b} = (b_1, ..., b_s)$ - вектор параметров.

2.2 Критерий Колмогорова

$$\forall t \in R : F_n(\vec{X_n}, t) \to F_x(t) \ (*)$$

$$D_n(\vec{X_n}) = \sup_{t \in R} |F_n(\vec{X_n}, t) - F_0(t)|$$

где F_0 – предполагаемая функция распределения.

Идея: в силу (*), если $X \sim F_0(t)$, то $D_n(\vec{X_n})$ применим на реализации небольшого значения.

Если $X \sim F_1(t) \not\equiv F_0(t)$, то $D_n(\vec{X_n}) = \sup_{t \in R} |F_n(\vec{X_n}, t) - F_0(t)| \to \sup_{t \in R} |F_1(t) - F_0(t)| \neq 0$

Утверждение 1: Распределение $D_n(\vec{X_n})$ не зависит от F_0 при условии $H_0 = \{F_x(t) \equiv F_0(t)\}$

Утверждение 2: $P\{\sqrt{n} D_n(\vec{X_n}) < X\} \to_{n \to \infty} k(x) = \begin{cases} \sum_{k=+\inf}^{+\inf} (-1)^k e^{-2k^2x^2}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$,

где $k(x)$ – функция распределения Колмогорова.