№1. В урне один белый и пять черных шаров. Два игрока по очереди вынимают из урны шар и возвращают его обратно, после чего шары в урне перемешиваются. Выигрывает тот, кто первый извлечет белый шар. Какова вероятность того, что выиграет игрок, начинающий игру?

Решение.

$A = \{$первым игроком вынут белый шар$\}$

$H_Б = \{$вынут белый шар$\}$. $P(H_Б) = \frac{1}{6}$

$H_Ч = \{$вынут черный шар$\}$. $P(H_Ч) = \frac{5}{6}$

$A_1 = \{$вынут белый шар первым игроком, с 1 попытки$\}$

$P(A_1) = P(H_Б) = \frac{1}{6}$

$A_2 = \{$ — // — , со 2 попытки$\}$

$P(A_2) = P(H_Б) \cdot P(H_Ч) \cdot P(H_Ч) = P(H_Б) \cdot P(H_Ч)^2$

$A_n = \{$ — // — , с n-ой попытки$\}$

$P(A_n) = P(H_Ч)^{2n-1} \cdot P(H_Б) \Rightarrow$

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots = P(H_Б) + P(H_Ч)^2 \cdot P(H_Б) + P(H_Ч)^4 \cdot P(H_Б) + \ldots = P(H_Б) \cdot \underbrace{\left(1 + P(H_Ч)^2 + P(H_Ч)^4 \ldots\right)}_{\text{беск. убыв. геом. пр.}} =$

$= P(H_Б) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1 - P(H_Ч)^2}\right)}_{\text{сумма беск. уб. гем. пр.}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}\right) = \frac{6}{11}$. Ответ: $\frac{6}{11}$.

Лист №2.

№2. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передается одна из двух команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причем априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0.8 и 0.2. Из-за наличия помех вер-ть правильного приема каждого из символов (1 или 0) равна 0.6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приемного ус-ва зарегистр-на комбинация 10110. Какая команда была передана вероятнее всего?

Решение.

$A = \{$принята комбинация $10110\}$

$H_1 = \{$передано $11111\}$. $P(H_1) = 0{,}8 = \frac{4}{5}$

$H_2 = \{$передано $00000\}$. $P(H_2) = 0{,}2 = \frac{1}{5}$

$$P(A|H_1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{108}{3125}$$

$$P(A|H_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{72}{3125}$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}, \quad P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A}$$

по ф-ле Байеса

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) = \frac{504}{15625}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{108}{3125}}{\frac{504}{15625}} = \frac{432}{504} \approx 0{,}857$$

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{72}{3125}}{\frac{504}{15625}} = \frac{72}{504} \approx 0{,}143$$

Ответ: вер-е всего была передана ком-а 1111