Романов А.В. ИУ7-63Б. Вар-т №13. ДЗ №2.

Две партии стальной проволоки изготовлены в разные смены. По результатам испытаний на разрыв $n_1 = 10$ образцов 1-ой партии и $n_2 = 6$ образцов 2-ой партии получены следующие выборочные значения средней прочности $\overline{x}_{n_1} = 234$ Н и $\overline{y}_{n_2} = 247$ Н. Можно ли считать, что средняя прочность проволоки 2-ой партии выше, если ср. квадратичное отклонение прочности для обеих партий $\sigma = 10$ Н, закон распределения прочности принимается нормальным, а уровень значимости $\alpha = 0{,}1$?

Решение.

$n_1 = 10, \quad n_2 = 6, \quad \overline{x}_{n_1} = 234, \quad \overline{y}_{n_2} = 247$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 = 10^2, \quad \alpha = 0{,}1,$

$X \sim N(m_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

$H_0 = \{m_1 < m_2\}, \quad H_1 = \{m_1 \geq m_2\}$

Введём $H_0' = \{m_1 = m_0\}$, где $m_0 = m_2 - \Delta \ (\Delta > 0)$

$T_1(\overline{X}_{n_1}, \overline{Y}_{n_2}) = \overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2}$

$T_1(\overline{X}_{n_1}, \overline{Y}_{n_2}) \sim N\left(-\Delta, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$

$$T(\overline{X}_{n_1}, \overline{Y}_{n_2}) = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} + \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \text{ при } H_0'$$

$$H_1 = \{m_1 \geq m_2\}$$
$$\Downarrow$$
$$m_1 - m_2 \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{X}_{n_1} \xrightarrow{P} m_1 \\ \overline{Y}_{n_2} \xrightarrow{P} m_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} \xrightarrow{P} m_1 - m_2$$

$$\Rightarrow W = \{(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \mid T(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \geq C\}$$

$$\alpha(\Delta_0) = P\{T(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})\big|_{\Delta=\Delta_0} \geq C \mid H_0'\}$$

$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})\big|_{\Delta=0} \geq C_1 \Rightarrow T(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})\big|_{\Delta>0} \geq C_1$$

$$\alpha = \sup_{\Delta_0 > \Delta} \{\alpha(\Delta_0)\}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 1 - P\{T(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})\big|_{\Delta=0} < C \mid H_0'\}$$

$$P\{T(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2})\big|_{\Delta=0} < C \mid H_0'\} = 1 - \alpha \Rightarrow C = t_{1-\alpha}^{N(0,1)}$$

$$\Downarrow$$

$$W = \left\{(\vec{X}_{n_1}, \vec{y}_{n_2}) \;\middle|\; \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \geq t_{1-\alpha}^{N(0,1)}\right\}$$

$$\frac{234 - 241}{\sqrt{\frac{10^2}{10} + \frac{10^2}{6}}} \geq 1{,}29 \Rightarrow \text{принимаем } H_0.$$

Ответ: средняя прочность проволоки второй партии выше.