Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2
по дисциплине «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Нгуен Фыок Санг

Группа ИУ7-66Б

Оценка (баллы) ____________

Преподаватель Саркисян П. С.

Москва — 2021 г.

Задание

Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Постановка задачи

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

Теоретические сведения

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с уровнем доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с уровнем доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{St(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания;
$S(\vec{X}) = \sqrt{S^2(\vec{X})}$ – квадратный корень из точечной оценки дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{St(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}} \tag{3}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{t^{\chi^2(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}} \tag{4}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии;
n – объем выборки;
γ – уровень доверия;
$t^{\chi^2(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(n-1)$ с $n-1$ степенями свободы.

Результаты работы программы

Код программы

```
function lab2()
  X = [10.06,8.32,8.50,8.82,6.02,6.44,7.90,7.85,5.90,7.62,8.66,...
   6.38,7.24,8.21,6.82,7.43,6.06,8.21,9.07,5.85,6.72,8.17,...
   8.53,8.68,7.21,8.43,8.77,7.27,5.79,9.78,6.44,7.24,6.83,...
   6.61,7.58,10.15,8.82,7.87,7.35,9.60,5.82,6.65,10.15,6.92,...
   6.77,9.35,6.92,7.76,6.45,7.47,6.99,9.95,7.22,7.38,7.87,...
   6.24,8.00,8.47,7.25,7.03,7.45,6.75,7.37,7.98,9.58,8.91,...
   6.14,8.19,5.07,7.47,7.29,8.78,7.86,7.82,10.09,8.54,7.21,...
   8.57,6.67,9.82,9.26,9.69,8.39,8.26,7.44,6.58,8.45,7.49,...
   7.16,9.17,8.16,8.38,7.60,8.53,6.10,7.39,7.70,8.45,7.73,...
   9.21,8.02,7.62,6.90,9.55,5.73,7.21,6.14,7.54,9.87,8.14,...
   8.16,7.50,7.60,6.25,7.03,7.07,6.61,9.68,7.65,8.32];

  n = length(X);

  gamma = 0.9;
  alpha = (1 - gamma) / 2;

  mu = mean(X);
  s2 = var(X);

  fprintf('mu^(MX) = %.2f\n', mu);
  fprintf('s2^(DX) = %.2f\n', s2);

  mu_up = mu + sqrt(s2 / n) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1);
  mu_down = mu - sqrt(s2 / n) * tinv((1 - gamma) / 2, n - 1);

  fprintf('mu up = %.2f\n', mu_up);
  fprintf('mu down = %.2f\n', mu_down);


  sigma2_up = (n - 1) * s2 / chi2inv((1-gamma)/2, n - 1);
  sigma2_down = s2 .* (n - 1) ./ chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);

  fprintf('sigma2 up = %.2f\n', sigma2_up);
  fprintf('sigma2 down = %.2f\n', sigma2_down);

```

```
  N = 1 : n;

  M = zeros(1, length(N));
  S = zeros(1, length(N));

  for i=N
    M(i) = mean(X(1:i));
    S = var(X(1:i));
  end

  M_up = M - sqrt(S ./ N) .* tinv(1 - alpha, N - 1);
  M_down = M + sqrt(S ./ N) .* tinv(1 - alpha, N - 1);

  S_up = S .* (N - 1) ./ chi2inv(alpha, N - 1);
  S_down = S .* (N - 1) ./ chi2inv(1 - alpha, N - 1);

  figure
  hold on;
  plot([N(1), N(end)], [mu, mu], 'm');
  plot(N, M, 'g');
  plot(N, M_up, 'b');
  plot(N, M_down, 'r');
  grid on;
  hold off;

  figure
  hold on;
  plot([N(1), N(end)], [s2, s2], 'm');
  plot(N, S, 'g');
  plot(N, S_down, 'b');
  plot(N, S_up, 'r');
  grid on;
  hold off;
end
```

Результаты расчётов

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 7.76$$

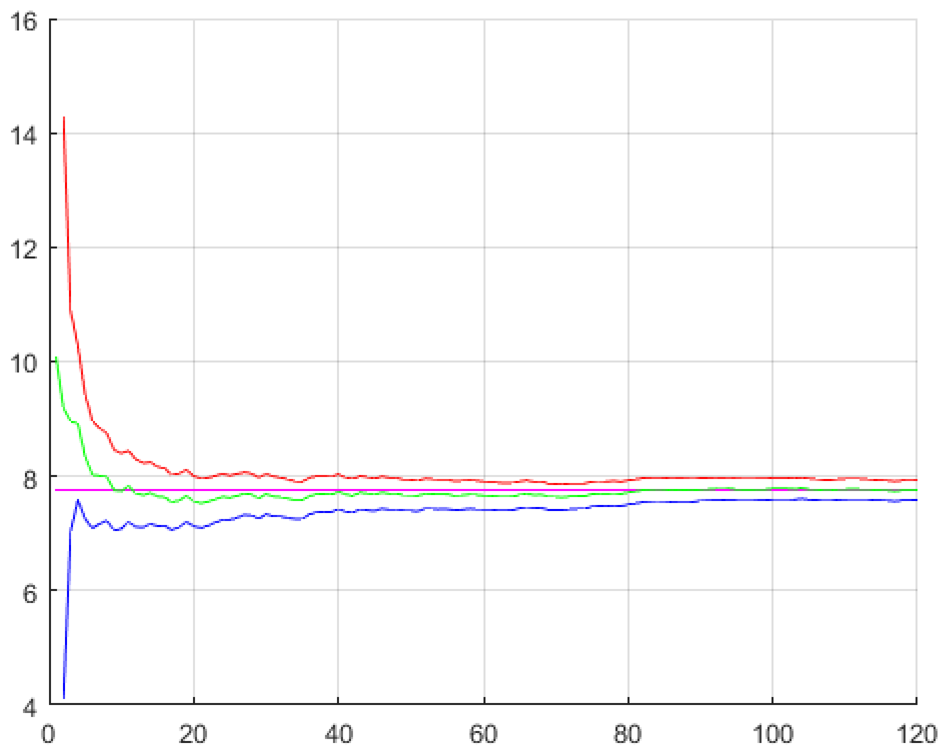
$$S^2(\vec{x}_n) = 1.30$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 7.59$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 7.93$$

$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 1.06$$

$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1.63$$



1

Рис. 1: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

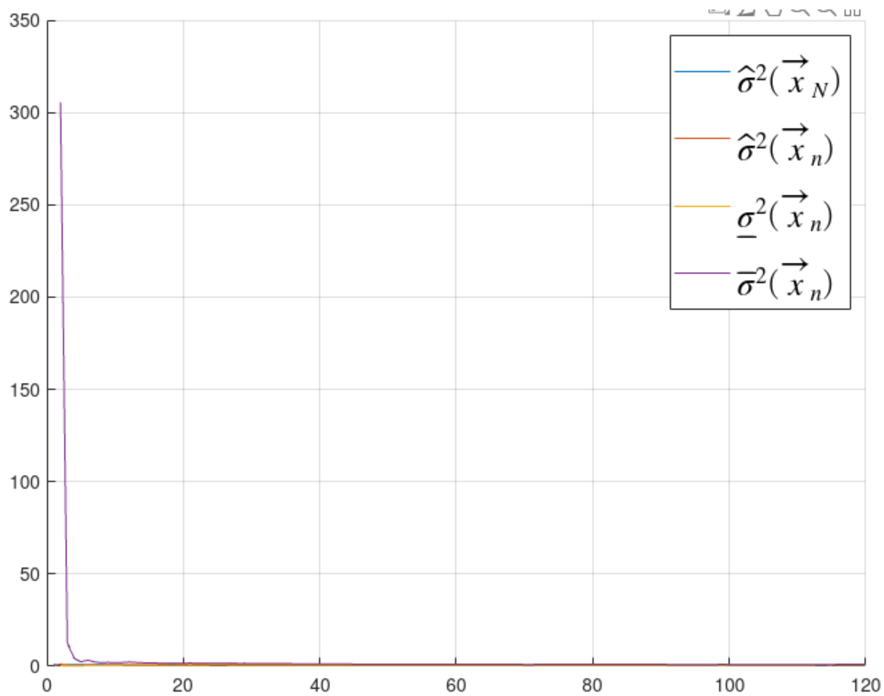


Рис. 2: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

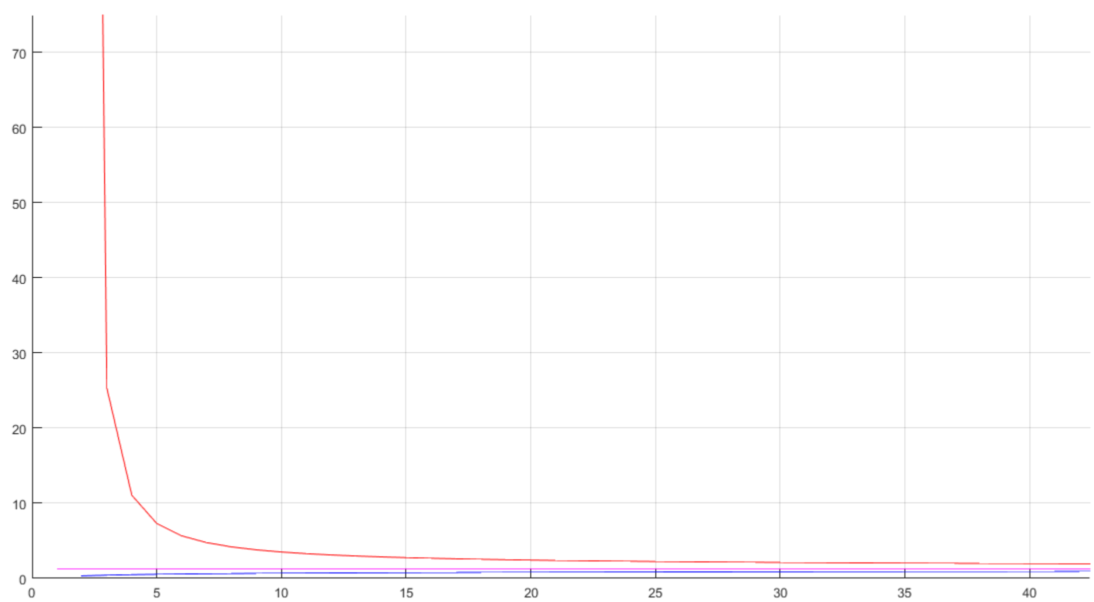


Рис. 3: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (приближенный)