

**Первое неравенство Чебышева.** Пусть

1.  $X$  – случайная величина
2.  $X \geq 0$  (т.е.  $P\{X < 0\} = 0$ )
3.  $\exists MX$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$

*Доказательство.* Для случая непрерывной случайной величины  $X$  (для случая дискретной случайной величины  $X$  доказательство аналогично)

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = |X \geq 0| = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\varepsilon} xf(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq$$

$$|x \in [\varepsilon, +\infty) \rightarrow x \geq \varepsilon| \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx = P\{X \geq \varepsilon\}$$

Таким образом,

$$MX \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} \implies P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

□

**Первое неравенство Чебышева.** Пусть

1.  $X$  – случайная величина
2.  $X \geq 0$  (т.е.  $P\{X < 0\} = 0$ )
3.  $\exists MX$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$

*Доказательство.* Для случая непрерывной случайной величины  $X$  (для случая дискретной случайной величины  $X$  доказательство аналогично)

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = |X \geq 0| = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\varepsilon} xf(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq$$

$$|x \in [\varepsilon, +\infty) \rightarrow x \geq \varepsilon| \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\}$$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx = P\{X \geq \varepsilon\}$$

Таким образом,

$$MX \geq \varepsilon P\{X \geq \varepsilon\} \implies P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

□

**Второе неравенство Чебышева.** Пусть

1.  $X$  – случайная величина

2.  $\exists MX, \quad \exists DX$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

*Доказательство.* 1. Рассмотрим случайную величину  $Y = (X - MX)^2$

2. Из первого неравенства Чебышева для  $Y$  следует, что  $\forall \delta > 0 \quad P\{Y \geq \delta\} \leq \frac{MY}{\delta}$

3. Используем  $P\{Y \geq \delta\} \leq \frac{MY}{\delta}$  для  $\delta = \varepsilon^2$

$$DX = M[(X - MX)^2] \geq \delta P\{(X - MX)^2 \geq \delta\} = \varepsilon^2 P\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\} = \varepsilon^2 P\{|X - MX| \geq \varepsilon\}$$

Таким образом,  $DX \geq \varepsilon^2 P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \implies P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad \square$

**Второе неравенство Чебышева.** Пусть

1.  $X$  – случайная величина

2.  $\exists MX, \quad \exists DX$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

*Доказательство.* 1. Рассмотрим случайную величину  $Y = (X - MX)^2$

2. Из первого неравенства Чебышева для  $Y$  следует, что  $\forall \delta > 0 \quad P\{Y \geq \delta\} \leq \frac{MY}{\delta}$

3. Используем  $P\{Y \geq \delta\} \leq \frac{MY}{\delta}$  для  $\delta = \varepsilon^2$

$$DX = M[(X - MX)^2] \geq \delta P\{(X - MX)^2 \geq \delta\} = \varepsilon^2 P\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\} = \varepsilon^2 P\{|X - MX| \geq \varepsilon\}$$

Таким образом,  $DX \geq \varepsilon^2 P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \implies P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad \square$

**Определение 2.1.** Говорят, что последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  сходится по вероятности к случайной величине  $Z$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Z$$

**Определение 2.2.** Говорят, что последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  слабо сходится к случайной величине  $Z$ , если функциональная последовательность  $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots$  поточечно сходится к функции  $F_Z(x)$  во всех точках непрерывности последней, т.е.

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(F_Z(x) \text{ непрерывна в } x_0) \implies F_{X_n}(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Z(x_0)$$

**Закон больших чисел.**

**Определение 2.3.** Говорят, что последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

где  $m_i = MX_i, \quad i \in N$

**Определение 2.1.** Говорят, что последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  сходится по вероятности к случайной величине  $Z$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} Z$$

**Определение 2.2.** Говорят, что последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  слабо сходится к случайной величине  $Z$ , если функциональная последовательность  $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots$  поточечно сходится к функции  $F_Z(x)$  во всех точках непрерывности последней, т.е.

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(F_Z(x) \text{ непрерывна в } x_0) \implies F_{X_n}(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Z(x_0)$$

**Закон больших чисел.**

**Определение 2.3.** Говорят, что последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

где  $m_i = MX_i, \quad i \in N$

**Определение 2.3.** Говорят, что последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

где  $m_i = MX_i, \quad i \in N$

**Закон больших чисел в форме Чебышева.** Пусть

1.  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – последовательность независимых случайных величин
2.  $MX_i = m_i \quad \exists DX_i = \sigma_i^2, \quad i \in N$
3. Дисперсия случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  ограничена в совокупности, то есть

$$\exists c > 0 \quad \sigma_i^2 \leq c, \quad i \in N$$

Тогда последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел.

*Доказательство.* 1. Рассмотрим

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in N$$

Тогда

$$M[\overline{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$$

$$D[\overline{X}_n] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

2. Применим к случайной величине  $\overline{X}_n$  второе неравенство Чебышева

$$P\{|\overline{X}_n - M\overline{X}_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\overline{X}_n}{\varepsilon^2}$$

Таким образом,

$$P\left\{\left|\overline{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^n c = nc$$

$$0 \leq P\left\{\left|\overline{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 n^2} \cdot n = \frac{c}{\varepsilon^2 n}$$

При  $n \rightarrow \infty \quad \frac{c}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0$ . По теореме о двух милиционерах

$$P\left\{\left|\overline{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

то есть последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел.  $\square$

**Определение 2.3.** Говорят, что последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

где  $m_i = MX_i, \quad i \in N$

**Закон больших чисел в форме Чебышева.** Пусть

1.  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – последовательность независимых случайных величин
2.  $MX_i = m_i \quad \exists DX_i = \sigma_i^2, \quad i \in N$
3. Дисперсия случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  ограничена в совокупности, то есть

$$\exists c > 0 \quad \sigma_i^2 \leq c, \quad i \in N$$

Тогда последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел.

*Доказательство.* 1. Рассмотрим

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in N$$

Тогда

$$M[\overline{X_n}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$$

$$D[\overline{X_n}] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

2. Применим к случайной величине  $\overline{X_n}$  второе неравенство Чебышева

$$P\{|\overline{X_n} - M\overline{X_n}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\overline{X_n}}{\varepsilon^2}$$

Таким образом,

$$P\left\{\left|\overline{X_n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^n c = nc$$

$$0 \leq P\left\{\left|\overline{X_n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 n^2} \cdot n = \frac{c}{\varepsilon^2 n}$$

При  $n \rightarrow \infty \quad \frac{c}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0$ . По теореме о двух милиционерах

$$P\left\{\left|\overline{X_n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

то есть последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел. □

**Определение 2.3.** Говорят, что последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

где  $m_i = MX_i$ ,  $i \in N$

**Закон больших чисел в форме Чебышева.** Пусть

1.  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – последовательность независимых случайных величин
2.  $MX_i = m_i \quad \exists DX_i = \sigma_i^2, \quad i \in N$
3. Дисперсия случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  ограничена в совокупности, то есть

$$\exists c > 0 \quad \sigma_i^2 \leq c, \quad i \in N$$

Тогда последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел.

**Следствие 1.** Пусть

1. выполнены условия теоремы Чебышева
2. все случайные величины  $X_i$  одинаково распределены (обозначим  $m_i \equiv m = MX_i$ )

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.* Так как  $m_i \equiv m$ , то  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = m$  и используем закон больших чисел в форме Чебышева.  $\square$

**Следствие 2.** Закон больших чисел в форме Бернулли.

Пусть

1. проводится  $n$  испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$
2.  $r_n = \frac{\text{количество наступлений успеха}}{n}$  – относительная (наблюденная) частота успеха

*Доказательство.* 1. Введем случайные величины  $X_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании произошёл успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

- Закон распределения  $X_i$

$X_i$	0	1
p	q	p

Таким образом, все  $X_i$  одинаково распределены,  $MX_i = p$ ,  $DX_i = pq$

- $DX_i \equiv pq \implies$  ограничены в совокупности
  - $X_i$  независимы, так как отдельные испытания в схеме испытаний Бернулли независимы
2. Таким образом, последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет следствию 1 из теоремы Чебышева и для нее справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|r_n - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ то есть } r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$$

—

**Определение 2.3.** Говорят, что последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

где  $m_i = MX_i$ ,  $i \in N$

**Закон больших чисел в форме Чебышева.** Пусть

1.  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – последовательность независимых случайных величин
2.  $MX_i = m_i \quad \exists DX_i = \sigma_i^2, \quad i \in N$
3. Дисперсия случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  ограничена в совокупности, то есть

$$\exists c > 0 \quad \sigma_i^2 \leq c, \quad i \in N$$

Тогда последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел.

**Следствие 1.** Пусть

1. выполнены условия теоремы Чебышева
2. все случайные величины  $X_i$  одинаково распределены (обозначим  $m_i \equiv m = MX_i$ )

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.* Так как  $m_i \equiv m$ , то  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = m$  и используем закон больших чисел в форме Чебышева.  $\square$

**Следствие 2.** Закон больших чисел в форме Бернулли.

Пусть

1. проводится  $n$  испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$
2.  $r_n = \frac{\text{количество наступлений успеха}}{n}$  – относительная (наблюденная) частота успеха



*Доказательство.* 1. Введем случайные величины  $X_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании произошёл успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

- Закон распределения  $X_i$

$X_i$	0	1
p	q	p

Таким образом, все  $X_i$  одинаково распределены,  $MX_i = p$ ,  $DX_i = pq$

- $DX_i \equiv pq \implies$  ограничены в совокупности
  - $X_i$  независимы, так как отдельные испытания в схеме испытаний Бернулли независимы
2. Таким образом, последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет следствию 1 из теоремы Чебышева и для нее справедливо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - m\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|r_n - p| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ то есть } r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$$

—

Пусть выполнены следующие 3 условия:

1.  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – последовательность независимых случайных величин
2. все случайные величины  $X_i$ ,  $i \in N$  одинаково распределены
3.  $\exists MX_i = m, \quad \exists DX_i = \sigma^2, \quad i \in N$

Рассмотрим случайную величину

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad M\overline{X}_n = m, \quad D\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}, \quad n \in N$$

Рассмотрим случайную величину

$$Y_n = \frac{\overline{X}_n - M\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**Центральная предельная теорема.** Пусть выполнены условия 1-3. Тогда последовательность случайных величин  $Y_n$  при  $n \rightarrow \infty$  слабо сходится к случайной величине  $Z$ , имеющей стандартное нормальное распределение, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{Y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Z(x),$$

где

$$Z \sim N(0, 1), \quad F_Z(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

**Интегральная теорема Муавра-Лапласа.** Пусть

1. проводится большое число испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$
2.  $k$  – число успехов в этой серии

Тогда

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad q = 1 - p, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $X_i$  – случайная величина, принимающая значения 0 или 1 в соответствии с правилом

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании произошёл успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

- Случайные величины  $X_1, \dots, X_n, \dots$  независимы
  - $MX_i = p, \quad DX_i = pq, \quad i \in N$
  - $X_i$  одинаково распределены
2.  $P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = P\{k_1 \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq k_2\} = P\{\frac{k_1}{n} - p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \leq \frac{k_2}{n} - p\} =$   
 $P\{\frac{k_1/n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \frac{k_2/n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

□

Пусть выполнены следующие 3 условия:

1.  $X_1, \dots, X_n, \dots$  – последовательность независимых случайных величин
2. все случайные величины  $X_i$ ,  $i \in N$  одинаково распределены
3.  $\exists MX_i = m, \quad \exists DX_i = \sigma^2, \quad i \in N$

Рассмотрим случайную величину

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad M\overline{X}_n = m, \quad D\overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}, \quad n \in N$$

Рассмотрим случайную величину

$$Y_n = \frac{\overline{X}_n - M\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \frac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

**Центральная предельная теорема.** Пусть выполнены условия 1-3. Тогда последовательность случайных величин  $Y_n$  при  $n \rightarrow \infty$  слабо сходится к случайной величине  $Z$ , имеющей стандартное нормальное распределение, то есть

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{Y_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Z(x),$$

где

$$Z \sim N(0, 1), \quad F_Z(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

**Интегральная теорема Муавра-Лапласа.** Пусть

1. проводится большое число испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$
2.  $k$  – число успехов в этой серии

Тогда

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad q = 1 - p, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $X_i$  – случайная величина, принимающая значения 0 или 1 в соответствии с правилом

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании произошёл успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

- Случайные величины  $X_1, \dots, X_n, \dots$  независимы
  - $MX_i = p, \quad DX_i = pq, \quad i \in N$
  - $X_i$  одинаково распределены
2.  $P\{k_1 \leq k \leq k_2\} = P\{k_1 \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq k_2\} = P\{\frac{k_1}{n} - p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \leq \frac{k_2}{n} - p\} =$   
 $P\{\frac{k_1/n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq \frac{k_2/n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

□

**Определение 4.1.** Множество возможных значений случайной величины  $X$  называют генеральной совокупностью.

**Определение 4.2.** Случайной выборкой из генеральной совокупности  $X$  называют случайный вектор  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , где  $X_1, \dots, X_n$  – независимые в совокупности случайные величины, каждая из которых имеет то же распределение, что и  $X$ . При этом  $n$  называется объёмом случайной выборки.

**Определение 4.3.** Любую возможную реализацию  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  случайной выборки  $\vec{X}$  называют выборкой из генеральной совокупности  $X$ . При этом число  $x_k$  называется  $k$ -м элементом выборки  $\vec{x}$ .

**Определение 4.4.** Вариационным рядом, построенным по выборке  $\vec{x}$ , называется кортеж  $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ , где  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  – элементы выборки  $\vec{x}$ , расположенные в порядке неубывания.

**Определение 4.5.** Пусть  $F(x)$  – функция распределения случайной величины  $X$ . Тогда функция распределения случайной выборки  $\vec{X}$  объема  $n$  из совокупности  $X$ :

$$F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = F(t_1) \cdot \dots \cdot F(t_n)$$

$$P\{X_1 < t_1, \dots, X_n < t_n\} = P\{X_1 < t_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_n < t_n\} = F(t_1) \cdot \dots \cdot F(t_n)$$

$$F_{x_{(n)}}(x) = P\{x_{(n)} < x\} = P\{X_1 < x, \dots, X_n < x\} = P\{X_1 < x\} \cdot \dots \cdot P\{X_n < x\} = F(x) \cdot \dots \cdot F(x) = [F(x)]^n$$

$$F_{x_{(1)}}(x) = P\{x_{(1)} < x\} = 1 - P\{X_1 \geq x\} = 1 - P\{X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x\} = 1 - (1 - P\{X_1 < x\}) \cdot \dots \cdot (1 - P\{X_n < x\}) = 1 - (1 - F(x))^n$$

**Определение 4.1.** Множество возможных значений случайной величины  $X$  называют генеральной совокупностью.

**Определение 4.2.** Случайной выборкой из генеральной совокупности  $X$  называют случайный вектор  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , где  $X_1, \dots, X_n$  – независимые в совокупности случайные величины, каждая из которых имеет то же распределение, что и  $X$ . При этом  $n$  называется объёмом случайной выборки.

**Определение 4.3.** Любую возможную реализацию  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  случайной выборки  $\vec{X}$  называют выборкой из генеральной совокупности  $X$ . При этом число  $x_k$  называется  $k$ -м элементом выборки  $\vec{x}$ .

**Определение 4.4.** Вариационным рядом, построенным по выборке  $\vec{x}$ , называется кортеж  $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ , где  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  – элементы выборки  $\vec{x}$ , расположенные в порядке неубывания.

**Определение 4.5.** Пусть  $F(x)$  – функция распределения случайной величины  $X$ . Тогда функция распределения случайной выборки  $\vec{X}$  объема  $n$  из совокупности  $X$ :

$$F_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n) = F(t_1) \cdot \dots \cdot F(t_n)$$

$$P\{X_1 < t_1, \dots, X_n < t_n\} = P\{X_1 < t_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_n < t_n\} = F(t_1) \cdot \dots \cdot F(t_n)$$

$$F_{x_{(n)}}(x) = P\{x_{(n)} < x\} = P\{X_1 < x, \dots, X_n < x\} = P\{X_1 < x\} \cdot \dots \cdot P\{X_n < x\} = F(x) \cdot \dots \cdot F(x) = [F(x)]^n$$

$$F_{x_{(1)}}(x) = P\{x_{(1)} < x\} = 1 - P\{X_1 \geq x\} = 1 - P\{X_1 \geq x, \dots, X_n \geq x\} = 1 - (1 - P\{X_1 < x\}) \cdot \dots \cdot (1 - P\{X_n < x\}) = 1 - (1 - F(x))^n$$

**Определение 4.6.** Любую функцию  $g(X)$  случайной выборки  $X$  называют статистикой.

**Определение 4.7.** Выборочным начальным моментом порядка  $k$  называют статистику:

$$\hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

**Определение 4.8.** Центральным выборочным моментом порядка  $k$  называют статистику

$$\hat{\nu}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

**Определение 4.9.** Выборочным средним (выборочным математическим ожиданием) называют статистику

$$\hat{m}(\vec{X}) = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Определение 4.10.** Выборочной дисперсией называют статистику

$$\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

**Замечание.** Выборочное среднее является несмещённой оценкой своего теоретического аналога, а выборочная дисперсия – нет.

*Доказательство.*  $\hat{m}(\vec{X}) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$   
 $M[\hat{m}(\vec{X})] = M[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n} M[\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M X_i = |X_i \sim X| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = m$  □

**Определение 4.6.** Любую функцию  $g(X)$  случайной выборки  $X$  называют статистикой.

**Определение 4.7.** Выборочным начальным моментом порядка  $k$  называют статистику:

$$\hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

**Определение 4.8.** Центральным выборочным моментом порядка  $k$  называют статистику

$$\hat{\nu}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

**Определение 4.9.** Выборочным средним (выборочным математическим ожиданием) называют статистику

$$\hat{m}(\vec{X}) = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Определение 4.10.** Выборочной дисперсией называют статистику

$$\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

**Замечание.** Выборочное среднее является несмещённой оценкой своего теоретического аналога, а выборочная дисперсия – нет.

*Доказательство.*  $\hat{m}(\vec{X}) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$   
 $M[\hat{m}(\vec{X})] = M[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n} M[\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M X_i = |X_i \sim X| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = m$  □

**Определение 4.11.** Эмпирической функцией распределения, отвечающей выборке  $\vec{x}$  называют функцию

$$F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \frac{n(x, \vec{x})}{n},$$

где

- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — выборка из генеральной совокупности  $\vec{X}_n$ ;
- $n(x, \vec{x})$  — количество элементов выборки  $\vec{x}$ , которые меньше  $x$ .

**Определение 4.12.** Выборочной функцией распределения, отвечающей случайной выборке  $\vec{X}$ , называется функция:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{n(x, \vec{X})}{n},$$

где  $n(x, \vec{X})$  — случайная величина, которая для каждой реализации  $\vec{x}$  случайной выборки  $\vec{X}$  принимает значение, равное  $n(x, \vec{x})$ .

**Теорема о сходимости выборочной функции распределения..** Для любого фиксированного  $x \in \mathbb{R}$   $\hat{F}_n(x)$  сходится по вероятности к значению  $F(x)$  теоретической функции распределения случайной величины  $X$ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{F}_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(x)$$

*Доказательство.*  $\hat{F}_n(x)$  — относительная частота успеха в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$ .

В соответствии с законом больших чисел в форме Бернулли

$$\hat{F}_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p, \text{ но } p = P\{X < x\} = F(x)$$

□

**Определение 4.11.** Эмпирической функцией распределения, отвечающей выборке  $\vec{x}$  называют функцию

$$F_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \frac{n(x, \vec{x})}{n},$$

где

- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — выборка из генеральной совокупности  $\vec{X}_n$ ;
- $n(x, \vec{x})$  — количество элементов выборки  $\vec{x}$ , которые меньше  $x$ .

**Определение 4.12.** Выборочной функцией распределения, отвечающей случайной выборке  $\vec{X}$ , называется функция:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{n(x, \vec{X})}{n},$$

где  $n(x, \vec{X})$  — случайная величина, которая для каждой реализации  $\vec{x}$  случайной выборки  $\vec{X}$  принимает значение, равное  $n(x, \vec{x})$ .

**Теорема о сходимости выборочной функции распределения..** Для любого фиксированного  $x \in \mathbb{R}$   $\hat{F}_n(x)$  сходится по вероятности к значению  $F(x)$  теоретической функции распределения случайной величины  $X$ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{F}_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(x)$$

*Доказательство.*  $\hat{F}_n(x)$  — относительная частота успеха в серии из  $n$  испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$ .

В соответствии с законом больших чисел в форме Бернулли

$$\hat{F}_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p, \text{ но } p = P\{X < x\} = F(x)$$

□



**Определение 4.13.** Интервальным статистическим рядом называют таблицу:

$J_1$	$\dots$	$J_m$
$n_1$	$\dots$	$n_m$

Здесь  $n_i$  — количество элементов выборки  $\vec{x}$ , принадлежащих  $J_i$ .

**Определение 4.14.** Эмпирической плотностью распределения случайной выборки  $\vec{X}_n$  называют функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i, \ i = \overline{1, m}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}, \quad \text{где}$$

- $J_i, \ i = \overline{1, m}$ , — полуинтервал из  $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$ , где

$$x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}; \quad (1)$$

при этом все полуинтервалы, кроме последнего, не содержат правую границу т. е.

$$J_i = [x_{(1)} + (i-1)\Delta, x_{(1)} + i\Delta), \quad i = \overline{1, m-1}; \quad (2)$$

$$J_m = [x_{(1)} + (m-1)\Delta, x_{(1)} + m\Delta]; \quad (3)$$

- $m$  — количество полуинтервалов интервала  $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$ ;
- $\Delta$  — длина полуинтервала  $J_i, \ i = \overline{1, m}$  равная

$$\Delta = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m} = \frac{|J|}{m};$$

- $n_i$  — количество элементов выборки в полуинтервале  $J_i, \ i = \overline{1, m}$ ;
- $n$  — количество элементов в выборке.

**Определение 4.15.** График функции  $f_n(x)$  называют гистограммой.

**Определение 4.16.** Полигоном частот для выборки  $\vec{x}$  называется ломанная, звенья которой соединяют середины верхних сторон прямоугольников гистограммы.

**Определение 4.13.** Интервальным статистическим рядом называют таблицу:

$J_1$	$\dots$	$J_m$
$n_1$	$\dots$	$n_m$

Здесь  $n_i$  — количество элементов выборки  $\vec{x}$ , принадлежащих  $J_i$ .

**Определение 4.14.** Эмпирической плотностью распределения случайной выборки  $\vec{X}_n$  называют функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i, \ i = \overline{1, m}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}, \quad \text{где}$$

- $J_i, \ i = \overline{1, m}$ , — полуинтервал из  $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$ , где

$$x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}; \quad (1)$$

при этом все полуинтервалы, кроме последнего, не содержат правую границу т. е.

$$J_i = [x_{(1)} + (i-1)\Delta, x_{(1)} + i\Delta), \quad i = \overline{1, m-1}; \quad (2)$$

$$J_m = [x_{(1)} + (m-1)\Delta, x_{(1)} + m\Delta]; \quad (3)$$

- $m$  — количество полуинтервалов интервала  $J = [x_{(1)}, x_{(n)}]$ ;
- $\Delta$  — длина полуинтервала  $J_i, \ i = \overline{1, m}$  равная

$$\Delta = \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{m} = \frac{|J|}{m};$$

- $n_i$  — количество элементов выборки в полуинтервале  $J_i, \ i = \overline{1, m}$ ;
- $n$  — количество элементов в выборке.

**Определение 4.15.** График функции  $f_n(x)$  называют гистограммой.

**Определение 4.16.** Полигоном частот для выборки  $\vec{x}$  называется ломанная, звенья которой соединяют середины верхних сторон прямоугольников гистограммы.

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.2.** Точечная оценка  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  называется несмещенной, если

$$\exists M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$$

*Доказательство.* •  $X$  – случайная величина

$$\bullet \sigma^2 = DX$$

$$\bullet \hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\begin{aligned} M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(X_i - \bar{X})^2] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\left[(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\left[\left((X_i - m) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - m)\right)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\left[(X_i - m)^2 - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - m)(X_i - m) + \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^n (X_j - m)\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ M[(X_i - m)^2] - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n M[(X_i - m)(X_j - m)] + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n M[(X_j - m)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1, k \neq j}^n M[(X_k - m)(X_j - m)] \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma^2 - \frac{2}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma^2 \right\} = \frac{1}{n} \cdot n \left\{ \sigma^2 - \frac{2}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 \right\} = \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sigma^2 \frac{n-1}{n} \neq \sigma^2 \quad \square \end{aligned}$$

**Определение 5.3.** Статистику  $S^2(\vec{X})$  называется исправленной выборочной дисперсией и равна

$$S^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2(\vec{X}) = M[S^2] = M\left[\frac{n}{n-1} \sigma^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} M[\hat{\sigma}^2] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 = \sigma^2,$$

то есть  $S^2(\vec{X})$  является несмещённой оценкой дисперсии.

**Определение 5.4.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной оценкой, если

$$\hat{\theta}(\vec{X}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta,$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.2.** Точечная оценка  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  называется несмещенной, если

$$\exists M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$$

*Доказательство.* •  $X$  – случайная величина

$$\bullet \sigma^2 = DX$$

$$\bullet \hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\begin{aligned} M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] &= M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(X_i - \bar{X})^2] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\left[(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\left[\left((X_i - m) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - m)\right)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\left[(X_i - m)^2 - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - m)(X_i - m) + \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^n (X_j - m)\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ M[(X_i - m)^2] - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n M[(X_i - m)(X_j - m)] + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n M[(X_j - m)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1, k \neq j}^n M[(X_k - m)(X_j - m)] \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma^2 - \frac{2}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma^2 \right\} = \frac{1}{n} \cdot n \left\{ \sigma^2 - \frac{2}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 \right\} = \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sigma^2 \frac{n-1}{n} \neq \sigma^2 \quad \square \end{aligned}$$

**Определение 5.3.** Статистику  $S^2(\vec{X})$  называется исправленной выборочной дисперсией и равна

$$S^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2(\vec{X}) = M[S^2] = M\left[\frac{n}{n-1} \sigma^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1} M[\hat{\sigma}^2] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 = \sigma^2,$$

то есть  $S^2(\vec{X})$  является несмещённой оценкой дисперсии.

**Определение 5.4.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной оценкой, если

$$\hat{\theta}(\vec{X}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta,$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta_n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta_n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$



Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta n$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$



Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

**Определение 5.5.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется эффективной оценкой для параметра  $\theta$ , если:

1.  $\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$
2.  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех несмещенных оценок  $\theta$

**Замечание.** Иногда говорят об эффективной оценке в классе оценок  $\Theta$ .

Если  $\Theta$  – некоторое множество несмещенных оценок для  $\theta$ , то оценка  $\hat{\theta} \in \Theta$  называется эффективной оценкой для  $\theta$  в классе  $\Theta$ , если  $\hat{\theta}$  обладает наименьшей дисперсией среди всех оценок класса  $\Theta$ .

$$\forall \tilde{\theta} \in \Theta \quad D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta}$$

**Определение 5.4.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной оценкой, если

$$\hat{\theta}(\vec{X}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta,$$

где  $n$  – объем выборки.

**Замечание.** Условие из определения можно записать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}(\vec{X}) - \theta| < \varepsilon\} = 1$$

**Пример 1.** Пусть  $X$  – случайная величина,  $EX = m$ .

- последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  независима и одинаково распределена
- $EX_i = m, \quad DX_i = \sigma^2$
- из предыдущих пунктов следует, что  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел в форме Чебышева

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\bar{X} - m| < \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} m$$

**Пример 2.** Пусть

1.  $X \sim N(m, \sigma^2)$ ,  $m$  и  $\sigma^2$  неизвестны
2.  $\hat{m}(\vec{X}) = X_1$  – результат первого наблюдения – точечная оценка для  $m$

Покажем, что  $\hat{m}$  – несостоятельная оценка.

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$

$$P\{|\hat{m}(\vec{X}) - m| < \varepsilon\} = P\{|X_1 - m| < \varepsilon\} = P\{m - \varepsilon < X_1 < m + \varepsilon\} = \Phi_0\left(\frac{m + \varepsilon - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{m - \varepsilon - m}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \neq 1, \text{ если } \frac{\varepsilon}{\sigma} \neq +\infty.$$

$$\text{Тогда } P\{|\hat{m}(\vec{X}) - m| < \varepsilon\} \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

**Определение 5.4.** Оценка  $\hat{\theta}$  называется состоятельной оценкой, если

$$\hat{\theta}(\vec{X}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta,$$

где  $n$  – объем выборки.

**Замечание.** Условие из определения можно записать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}(\vec{X}) - \theta| < \varepsilon\} = 1$$

**Пример 1.** Пусть  $X$  – случайная величина,  $EX = m$ .

- последовательность  $X_1, \dots, X_n, \dots$  независима и одинаково распределена
- $EX_i = m, \quad DX_i = \sigma^2$
- из предыдущих пунктов следует, что  $X_1, \dots, X_n, \dots$  удовлетворяет закону больших чисел в форме Чебышева

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\bar{X} - m| < \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} m$$

**Пример 2.** Пусть

1.  $X \sim N(m, \sigma^2)$ ,  $m$  и  $\sigma^2$  неизвестны
2.  $\hat{m}(\vec{X}) = X_1$  – результат первого наблюдения – точечная оценка для  $m$

Покажем, что  $\hat{m}$  – несостоятельная оценка.

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$

$$P\{|\hat{m}(\vec{X}) - m| < \varepsilon\} = P\{|X_1 - m| < \varepsilon\} = P\{m - \varepsilon < X_1 < m + \varepsilon\} = \Phi_0\left(\frac{m + \varepsilon - m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{m - \varepsilon - m}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \neq 1, \text{ если } \frac{\varepsilon}{\sigma} \neq +\infty.$$

$$\text{Тогда } P\{|\hat{m}(\vec{X}) - m| < \varepsilon\} \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

**Доказать, что выборочное среднее является эффективной оценкой для  $m$  в классе линейных оценок.** Пусть  $X$  – случайная величина,  $EX = m$ ,  $DX = \sigma^2$ , так что выборочное среднее  $\bar{X}$  является эффективной оценкой для  $m$  в классе линейных оценок.

*Доказательство.* 1. Линейная оценка имеет вид:

$$\hat{m}(\vec{X}) = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

2. Так как оценка должна быть несмещенной

$$M[\hat{m}(\vec{X})] = M\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i M X_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i m = m \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Требуется  $M[\hat{m}(\vec{X})] = m \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Подберем в линейной оценке  $\hat{m}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  параметр  $\lambda_i$  так, чтобы  $D[\hat{m}(\vec{X})]$  было минимальным среди значений дисперсии всевозможных линейных оценок.

$$D[\hat{m}] = D\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 D X_i = \sigma_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Поиск условий экстремума.

$$\begin{cases} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \longrightarrow \min \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \mu \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right)$$

Необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 - \mu = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_n} = 2\lambda_n - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_i = \frac{\mu}{2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu}{2} = 1, \quad \frac{\mu n}{2} = 1 \implies \mu = \frac{2}{n} \implies \lambda_i = \frac{1}{n}.$$

Можно, проверив достаточное условие экстремума, показать, что  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  является условным минимумом  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  таким образом, линейная оценка с наименьшей дисперсией

$$\hat{m}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

Соответствующее значение дисперсии

$$D[\hat{m}(\vec{X})]|_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})} = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)|_{(\lambda_i = \frac{1}{n})} = \frac{\sigma^2}{n^2}$$

**Единственность эффективной оценки.** Пусть  $\hat{\theta}_1(\vec{X})$  и  $\hat{\theta}_2(\vec{X})$  – две эффективные оценки  $\theta$ . Тогда

$$\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \hat{\theta}_2(\vec{X})$$

*Доказательство.* Рассмотрим оценку

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2]$$

$M\hat{\theta} = M[\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)] = \frac{1}{2}[M\hat{\theta}_1 + M\hat{\theta}_2] = |\hat{\theta}_1 \text{ и } \hat{\theta}_2 \text{ эффективные, а следовательно несмещенные}| = \frac{1}{2}[\theta + \theta] = \theta$ , то есть  $\hat{\theta}$  так же является несмещенной оценкой для  $\theta$ .

$$D\hat{\theta} = \frac{1}{4}D[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2] = \frac{1}{4}[D\hat{\theta}_1 + D\hat{\theta}_2 + 2cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] = |\text{обозначим } D\hat{\theta}_1 = a^2 = D\hat{\theta}_2| = \frac{1}{2}[a^2 + cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] (*)$$

$$|cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)| \leq \sqrt{D\hat{\theta}_1 D\hat{\theta}_2} = a^2$$

$$\text{Таким образом, } D\hat{\theta} \leq |\text{см.} (*)| \leq \frac{1}{2}[a^2 + a^2] = a^2. (**)$$

$\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$ , а  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  эффективные оценки  $\implies D\hat{\theta}_1 = D\hat{\theta}_2 \leq D\hat{\theta}$ . С учетом (\*\*)  $D\hat{\theta} = a^2$ .

Из (\*) вытекает, что  $a^2 = \frac{1}{2}[a^2 + cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] \implies cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = a^2$ , т.е.  $cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sqrt{D\hat{\theta}_1 D\hat{\theta}_2} \implies |\text{по свойству ковариации}| \implies \hat{\theta}_1 \text{ и } \hat{\theta}_2 \text{ связаны положительной линейной зависимостью, то есть } \hat{\theta}_1 = k\hat{\theta}_2 + b (k > 0) (***)$

Из (\*\*\*) следует, что  $D\hat{\theta}_1 = k^2 D\hat{\theta}_2 \implies k^2 = 1 \implies k = 1$ . Тогда  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 + b \implies M\hat{\theta}_1 = M\hat{\theta}_2 + b \implies b = 0$ .

Таким образом,  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ . □

Пусть

- $X$  – непрерывная случайная величина
- $f(t, \theta)$  – функция плотности распределения вероятностей случайной величины  $X$
- $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из генеральной совокупности  $X$

Тогда функция плотности распределения случайного вектора  $\vec{X}$ :

$$f_X(t_1, \dots, t_n, \theta) = f(t_1, \theta) \cdot \dots \cdot f(t_n, \theta)$$

Обозначим  $(t_1, \dots, t_n) = \vec{T}$ .

**Определение 5.6.** Величина  $I(\theta) = M\{[\frac{\partial \ln f(T, \theta)}{\partial \theta}]^2\}$  называется количеством информации по Фишеру (в серии из  $n$  наблюдений).

**Замечание.** Ниже иногда будет нужно дифференцировать по параметру под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_G \phi(\vec{T}, \theta) d\vec{T} = \int_G \frac{\partial \phi(\vec{T}, \theta)}{\partial \theta} d\vec{T}$$

Параметрические модели, для которых справедлив такой переход, будем называть регулярными.

**Неравенство Рао-Крамера.** Пусть

1. рассматривается регулярная модель
2.  $\hat{\theta}(\vec{X})$  – несмещенная точечная оценка параметра  $\theta$  закона распределения случайной величины  $X$

Тогда

$$D\hat{\theta}(\vec{X}) \geq \frac{1}{I(\theta)},$$

где  $I(\theta)$  – количество информации по Фишеру.

**Определение 5.6.** Величина  $I(\theta) = M\{[\frac{\partial \ln f(T, \theta)}{\partial \theta}]^2\}$  называется количеством информации по Фишеру (в серии из  $n$  наблюдений).

**Замечание.** Ниже иногда будет нужно дифференцировать по параметру под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_G \phi(\vec{T}, \theta) d\vec{T} = \int_G \frac{\partial \phi(\vec{T}, \theta)}{\partial \theta} d\vec{T}$$

Параметрические модели, для которых справедлив такой переход, будем называть регулярными.

**Неравенство Рао-Крамера.** Пусть

1. рассматривается регулярная модель
2.  $\hat{\theta}(\vec{X})$  – несмещенная точечная оценка параметра  $\theta$  закона распределения случайной величины  $X$

Тогда

$$D\hat{\theta}(\vec{X}) \geq \frac{1}{I(\theta)},$$

где  $I(\theta)$  – количество информации по Фишеру.

**Доказать, что выборочное среднее является эффективной оценкой для  $m$  в классе линейных оценок.** Пусть  $X$  – случайная величина,  $EX = m$ ,  $DX = \sigma^2$ , так что выборочное среднее  $\bar{X}$  является эффективной оценкой для  $m$  в классе линейных оценок.

*Доказательство.* 1. Линейная оценка имеет вид:

$$\hat{m}(\vec{X}) = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}$$

2. Так как оценка должна быть несмещенной

$$M[\hat{m}(\vec{X})] = M\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i M X_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i m = m \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Требуется  $M[\hat{m}(\vec{X})] = m \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Подберем в линейной оценке  $\hat{m}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  параметр  $\lambda_i$  так, чтобы  $D[\hat{m}(\vec{X})]$  было минимальным среди значений дисперсии всевозможных линейных оценок.

$$D[\hat{m}] = D\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 DX_i = \sigma_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Поиск условий экстремума.

$$\begin{cases} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \longrightarrow \min \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \mu \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right)$$

Необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2\lambda_1 - \mu = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_n} = 2\lambda_n - \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_i = \frac{\mu}{2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\mu}{2} = 1, \quad \frac{\mu n}{2} = 1 \implies \mu = \frac{2}{n} \implies \lambda_i = \frac{1}{n}.$$

Можно, проверив достаточное условие экстремума, показать, что  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  является условным минимумом  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  таким образом, линейная оценка с наименьшей дисперсией

$$\hat{m}(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

Соответствующее значение дисперсии

$$D[\hat{m}(\vec{X})]|_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})} = \sigma^2 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)|_{(\lambda_i = \frac{1}{n})} = \frac{\sigma^2}{n^2}$$

**Единственность эффективной оценки.** Пусть  $\hat{\theta}_1(\vec{X})$  и  $\hat{\theta}_2(\vec{X})$  – две эффективные оценки  $\theta$ . Тогда

$$\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \hat{\theta}_2(\vec{X})$$

*Доказательство.* Рассмотрим оценку

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2}[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2]$$

$M\hat{\theta} = M[\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)] = \frac{1}{2}[M\hat{\theta}_1 + M\hat{\theta}_2] = |\hat{\theta}_1 \text{ и } \hat{\theta}_2 \text{ эффективные, а следовательно несмещенные}| = \frac{1}{2}[\theta + \theta] = \theta$ , то есть  $\hat{\theta}$  так же является несмещенной оценкой для  $\theta$ .

$$D\hat{\theta} = \frac{1}{4}D[\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2] = \frac{1}{4}[D\hat{\theta}_1 + D\hat{\theta}_2 + 2cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] = |\text{обозначим } D\hat{\theta}_1 = a^2 = D\hat{\theta}_2| = \frac{1}{2}[a^2 + cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] (*)$$

$$|cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)| \leq \sqrt{D\hat{\theta}_1 D\hat{\theta}_2} = a^2$$

$$\text{Таким образом, } D\hat{\theta} \leq |\text{см.} (*)| \leq \frac{1}{2}[a^2 + a^2] = a^2. (**)$$

$\hat{\theta}$  – несмещенная оценка для  $\theta$ , а  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  эффективные оценки  $\implies D\hat{\theta}_1 = D\hat{\theta}_2 \leq D\hat{\theta}$ . С учетом (\*\*)  $D\hat{\theta} = a^2$ .

Из (\*) вытекает, что  $a^2 = \frac{1}{2}[a^2 + cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)] \implies cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = a^2$ , т.е.  $cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \sqrt{D\hat{\theta}_1 D\hat{\theta}_2} \implies |\text{по свойству ковариации}| \implies \hat{\theta}_1 \text{ и } \hat{\theta}_2 \text{ связаны положительной линейной зависимостью, то есть } \hat{\theta}_1 = k\hat{\theta}_2 + b (k > 0) (***)$

Из (\*\*\*) следует, что  $D\hat{\theta}_1 = k^2 D\hat{\theta}_2 \implies k^2 = 1 \implies k = 1$ . Тогда  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 + b \implies M\hat{\theta}_1 = M\hat{\theta}_2 + b \implies b = 0$ .

Таким образом,  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$ . □

Пусть

- $X$  – непрерывная случайная величина
- $f(t, \theta)$  – функция плотности распределения вероятностей случайной величины  $X$
- $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$  – случайная выборка из генеральной совокупности  $X$

Тогда функция плотности распределения случайного вектора  $\vec{X}$ :

$$f_X(t_1, \dots, t_n, \theta) = f(t_1, \theta) \cdot \dots \cdot f(t_n, \theta)$$

Обозначим  $(t_1, \dots, t_n) = \vec{T}$ .



Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

Пусть

1.  $X$  – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  неизвестных параметров
2. У случайной величины  $X$   $\exists r$  первых моментов

Для построения точечных оценок параметров  $\theta_1, \dots, \theta_r$  с использованием метода моментов необходимо сделать следующее:

1. найти выражения для  $r$  первых моментов теоретических моментов случайной величины  $X$  (так как функция распределения случайной величины  $X$  зависит от параметров  $\theta_1, \dots, \theta_r$ , то и теоретические моменты также будут зависеть от этих параметров):

$$m_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = M[X]$$

$$\vdots$$

$$m_n(\theta_1, \dots, \theta_r) = M[X^n]$$

---

2. Нужно приравнять выражения для теоретических моментов к их выборочным аналогам:

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}(\vec{X}) \\ \vdots \\ m_r(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

Решаем полученную систему относительно неизвестных параметров:

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}(\vec{X}) \\ \vdots \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

**Пример 3.**  $X \sim \text{Exp}(\lambda, \alpha)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)} & \text{если } x > \alpha \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдем точечные моменты:

$$m_1 = MX = \alpha + \frac{1}{\lambda}, \quad m_2 = M[X^2] = DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

Система:

$$\begin{cases} m_1 = \alpha + \frac{1}{\lambda} = \hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X} \\ m_2 = \frac{1}{\lambda^2} = S^2(\vec{X}) = \hat{\nu}_2(\vec{X}) \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{1}{S} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{\alpha}(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

Пусть

1.  $X$  – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  неизвестных параметров
2. У случайной величины  $X$   $\exists r$  первых моментов

Для построения точечных оценок параметров  $\theta_1, \dots, \theta_r$  с использованием метода моментов необходимо сделать следующее:

1. найти выражения для  $r$  первых моментов теоретических моментов случайной величины  $X$  (так как функция распределения случайной величины  $X$  зависит от параметров  $\theta_1, \dots, \theta_r$ , то и теоретические моменты также будут зависеть от этих параметров):

$$m_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = M[X]$$

$$\vdots$$

$$m_n(\theta_1, \dots, \theta_r) = M[X^n]$$

---

2. Нужно приравнять выражения для теоретических моментов к их выборочным аналогам:

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}(\vec{X}) \\ \vdots \\ m_r(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

Решаем полученную систему относительно неизвестных параметров:

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}(\vec{X}) \\ \vdots \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

**Пример 3.**  $X \sim \text{Exp}(\lambda, \alpha)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)} & \text{если } x > \alpha \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдем точечные моменты:

$$m_1 = MX = \alpha + \frac{1}{\lambda}, \quad m_2 = M[X^2] = DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

Система:

$$\begin{cases} m_1 = \alpha + \frac{1}{\lambda} = \hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X} \\ m_2 = \frac{1}{\lambda^2} = S^2(\vec{X}) = \hat{\nu}_2(\vec{X}) \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{1}{S} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{\alpha}(\vec{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

## 6.2 Метод максимального правдоподобия

Пусть  $X$  – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора  $\hat{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  неизвестных параметров.

Требуется оценить (найти) значение вектора  $\theta$ .

**Определение 6.1.** Функцией правдоподобия, отвечающей случайной выборке  $\hat{X}(X_1, \dots, X_n)$ , называется функция

$$L(\hat{X}, \hat{\theta}) = p(X_1, \hat{\theta}) \cdot \dots \cdot p(X_n, \hat{\theta}),$$

где

- $p(X_i, \hat{\theta}) = P\{X = X_i\}$ , если  $X$  – дискретная случайная величина
- $p(X_i, \hat{\theta}) = f(X_i, \hat{\theta})$ , где  $f$  – плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$

В методе максимального правдоподобия в качестве точечной оценки вектора параметров  $\hat{\theta}$  используют то значение, которое доставляет функции правдоподобия максимальное значение. Таким образом, оценка максимального правдоподобия  $\forall x \in \chi_n \quad L(\vec{X}, \hat{\theta}) \geq L(\vec{X}, \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} \in \Theta$ .

$$\vec{\hat{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\vec{\theta}} L(\vec{X}, \vec{\theta})$$

Для построения точечной оценки необходимо решить задачу

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta} \in \Theta},$$

вместо которой чаще решают задачу:

$$\ln L(\vec{X}, \vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta} \in \Theta}$$

Если для функции  $\ln L$  выполнены соответствующие условия, то для нахождения значения  $\vec{\theta}$  можно использовать систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\vec{X}, \vec{\theta})}{\partial \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L(\vec{X}, \vec{\theta})}{\partial \theta_r} = 0 \end{cases}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 5.1.** Точечной оценкой параметра  $\theta$  называется статистика  $\hat{\theta}(\vec{X})$ , выборочное значение которой принимается в качестве значения параметра  $\theta$ :  $\theta := \hat{\theta}(\vec{X})$ .

Качество используемой точечной оценки  $\hat{\theta}(\vec{X})$  параметра  $\theta$  характеризуют следующие свойства:

1. несмещенность
2. состоятельность
3. эффективность

## 6.2 Метод максимального правдоподобия

Пусть  $X$  – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до вектора  $\hat{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  неизвестных параметров.

Требуется оценить (найти) значение вектора  $\theta$ .

**Определение 6.1.** Функцией правдоподобия, отвечающей случайной выборке  $\hat{X}(X_1, \dots, X_n)$ , называется функция

$$L(\hat{X}, \hat{\theta}) = p(X_1, \hat{\theta}) \cdot \dots \cdot p(X_n, \hat{\theta}),$$

где

- $p(X_i, \hat{\theta}) = P\{X = X_i\}$ , если  $X$  – дискретная случайная величина
- $p(X_i, \hat{\theta}) = f(X_i, \hat{\theta})$ , где  $f$  – плотность распределения непрерывной случайной величины  $X$

В методе максимального правдоподобия в качестве точечной оценки вектора параметров  $\hat{\theta}$  используют то значение, которое доставляет функции правдоподобия максимальное значение. Таким образом, оценка максимального правдоподобия  $\forall x \in \chi_n \quad L(\vec{X}, \hat{\theta}) \geq L(\vec{X}, \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} \in \Theta$ .

$$\vec{\hat{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\vec{\theta}} L(\vec{X}, \vec{\theta})$$

Для построения точечной оценки необходимо решить задачу

$$L(\vec{X}, \vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta} \in \Theta},$$

вместо которой чаще решают задачу:

$$\ln L(\vec{X}, \vec{\theta}) \longrightarrow \max_{\vec{\theta} \in \Theta}$$

Если для функции  $\ln L$  выполнены соответствующие условия, то для нахождения значения  $\vec{\theta}$  можно использовать систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\vec{X}, \vec{\theta})}{\partial \theta_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \ln L(\vec{X}, \vec{\theta})}{\partial \theta_r} = 0 \end{cases}$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ – доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{ функция распределения случайной величины } g$$

**Общий алгоритм.** Пусть

1.  $X$  – случайная величина, закон распределения которой зависит от неизвестного параметра  $\theta$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – центральная статистика
3.  $g(X, \theta)$  является монотонно возрастающей с увеличением параметра  $\theta$
4.  $F_g(X, \theta)$  также монотонно возрастает с увеличением  $\theta$
5.  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  и таковы, что  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$

$$\gamma = P\{q_{\alpha_1} < g(\vec{X}, \theta) < q_{1-\alpha_2}\} = |g \text{ монотонно возрастает с ростом } \theta| = P\{g^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1}) < \theta < g^{-1}(\vec{X}, q_{1-\alpha_2})\}.$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ – доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{ функция распределения случайной величины } g$$

**Общий алгоритм.** Пусть

1.  $X$  – случайная величина, закон распределения которой зависит от неизвестного параметра  $\theta$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – центральная статистика
3.  $g(X, \theta)$  является монотонно возрастающей с увеличением параметра  $\theta$
4.  $F_g(X, \theta)$  также монотонно возрастает с увеличением  $\theta$
5.  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  и таковы, что  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$

$$\gamma = P\{q_{\alpha_1} < g(\vec{X}, \theta) < q_{1-\alpha_2}\} = |g \text{ монотонно возрастает с ростом } \theta| = P\{g^{-1}(\vec{X}, q_{\alpha_1}) < \theta < g^{-1}(\vec{X}, q_{1-\alpha_2})\}.$$



Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ – доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{ функция распределения случайной величины } g$$

Интервал для мат ожидания при известной дисперсии

$$T(\vec{X}_n) = \frac{d - \vec{X}}{\sigma} * \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ – доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{ функция распределения случайной величины } g$$

Интервал для мат ожидания при известной дисперсии

$$T(\vec{X}_n) = \frac{d - \vec{X}}{\sigma} * \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ – доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{ функция распределения случайной величины } g$$

Интервал для мат ожидания при неизвестной дисперсии

$$T(\vec{X}_n) = \frac{d - \vec{X}}{S(\vec{X}_n)} * \sqrt{n} \sim St(n - 1)$$

..

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ – доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{ функция распределения случайной величины } g$$

Интервал для мат ожидания при неизвестной дисперсии

$$T(\vec{X}_n) = \frac{d - \vec{X}}{S(\vec{X}_n)} * \sqrt{n} \sim St(n - 1)$$

..

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ – доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{функция распределения случайной величины } g$$

Интервал для дисперсии при известном мат ожидании

$$T(\vec{X}_n) = \frac{n\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - d)^2$$

Интервал для дисперсии при неизвестном мат ожидании

$$T(\vec{X}_n) = \frac{n\hat{\sigma}^{*2}(\vec{X}_n)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

Пусть  $X$  – случайная величина, общий закон распределения которой известен, но неизвестны значения одного или нескольких параметров этого закона. Пусть  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$ .

Требуется оценить значение вектора  $\Theta$

**Определение 7.1.**  $\gamma$ -доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня  $\gamma$ ) для параметра  $\theta$  называется пара статистик

$$\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})}, \text{ таких, что } P\{\theta \in (\underline{\theta(\vec{X})}, \overline{\theta(\vec{X})})\} = \gamma$$

Пусть

1.  $\theta$  – неизвестный параметр закона распределения случайной величины  $X$
2.  $g(\vec{X}, \theta)$  – некоторая статистика

**Определение 7.2.** Статистику  $g(\vec{X}, \theta)$  будем называть центральной, если закон ее распределения не зависит от  $\theta$ , то есть

$$F_g(X, \theta) \equiv F_g(X), \text{ где } F_g - \text{функция распределения случайной величины } g$$

Интервал для дисперсии при известном мат ожидании

$$T(\vec{X}_n) = \frac{n\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - d)^2$$

Интервал для дисперсии при неизвестном мат ожидании

$$T(\vec{X}_n) = \frac{n\hat{\sigma}^{*2}(\vec{X}_n)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\hat{\sigma}^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$