

軌道最適化を用いたロバスト量子最適制御

Thomas Propson,^{1,2,*} Brian E. Jackson,³ Jens Koch,^{4,5} Zachary Manchester,³ and David I. Schuster^{1,2,6}.

^{1}} James Franck Institute, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637, USA ² Department of Physics, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637, USA ³ Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pennsylvania 15213, USA ⁴ ノースウェスタン大学物理学・天文学部, イリノイ州エバンストン 60208, USA ⁵ ノースウェスタン・フェルミラブ応用物理学・超伝導技術センター,

シカゴ大学プリツカーモンスター工学部 (イリノイ州シカゴ、60637、米国)

(Dated: March 30, 2021)

量子プロセッサーにおいて、系統的な誤差がある中で高忠実度のゲートを実現することは、量子的な優位性を実現する上で依然として大きな障壁となっています。量子最適制御法は、実験的に高忠実度ゲートを実現するのに有効であることが証明されていますが、性能を発揮するためには精緻なキャリブレーションが必要です。本研究では、ロバストな軌道最適化技術を応用し、システムパラメータの不確実性に起因するゲートエラーを抑制する。また、順方向微分を用いることで計算効率を維持した微分ベースのアプローチを提案する。さらに、ゲートに対する脱分極の効果は、通常、計算コストの高いリンドブラッド方程式を積分することでモデル化されます。我々は、計算効率の高いモデルを採用し、時間最適制御を利用することで、脱分極が存在する状態でも高忠実度のゲートを実現する。これらの技術をフラクソニウム量子ビットに適用し、パラメータの不確かさによるゲート誤差のシミュレーションを1%オーダーの静的パラメータ偏差に対して 10^{-7} 以下に抑えた。

I. INTRODUCTION

量子最適制御 (QOC) は、量子系を正確かつ効率的に操作するための最適化アルゴリズムの一種である。初期の技術は核磁気共鳴実験のために提案され[1-7]、現在では超伝導回路[8-24]、中性原子とイオン[25-36]、ダイヤモンドの窒素空孔中心[37-43]、ボーズ-アインシュタイン凝縮[44-47]などに応用されています。量子計算の文脈では、実験的な制約を守りながら高忠実度のゲートを実現するために最適制御が採用される。しかし、パラメータドリフト、ノイズ、制御分解能の限界などの実験誤差により、システムは最適化で使用したモデルから逸脱し、実験性能を阻害する[9, 14, 20, 33, 48]。ロバスト制御は、モデルパラメータの不確実性を最適化目標に組み込むことで、標準的な最適制御を改善し、パラメータ値の範囲内で性能を保証するものです [49-51]。我々は、ロボット工学の分野からロバスト制御の技術を導入し、超伝導フラクソニウム量子ビットのパラメータ不確定性誤差を軽減する。パラメータ不確定性誤差を軽減する解析的な制御パルスには、複合パルス[52-55]、動的・幾何学的位相を考慮して設計したパルス[56, 57]、DRAG方式で得られたパルス[58]があります。解析的手法と比較して、QOCはすべての実験制約と性能トレードオフを考慮したパルスの設計に有利であり[17]、既知の解析的解がない演算を構築するのに有利である[9, 14]。したがって、最近の

は、閉ループ法[59-62]や開ループ法[3, 20, 42, 63-67]を用いて、QOCフレームワークのロバスト性を実現しようとするものである。本研究では、量子状態の軌跡を静的で時間依存性のあるパラメータの不確実性の影響を受けにくくする3つのオープンループ型ロバスト制御技術を研究する：

1. A sampling method, similar to the work in Refs. [3, 20, 42, 65].
2. 状態推定に用いられるuncented transform [71, 72]から適応したuncented sampling method [68-70].

3. 量子状態軌道の不確実なパラメータに対する感度をペナルティとする微分法。

我々はこれらの技術を[73]で発表されたフラクソニウム量子ビットに適用する。T₁の制御依存性を利用して脱分極を緩和し、異なる周波数を持つ量子ビットの位相を同期させるという、フラクソニウムベースの量子ビットに関連する重要な問題をQOCが解決できることも示します。脱分極を改善するために、時間最適制御を行い、計算コストがヒルベルト空間の次元に依存しない効率的な脱分極モデルを採用します。ロボット工学の分野における軌道最適化の最近の進歩を活用し、制御フィールドと量子状態の軌道に制約を与えることができるALTR0 (Augmented Lagrangian TRajector Optimizer) [74]を用いてこれらの最適化問題を解く。本論文は以下のように構成されている。まず、Sec. IIにおいて、QOCの文脈でALTR0を説明する。そして、フラクソニウムを操作するための現実的な制約を概説し、関連するQOC問題を定義する (Sec. III)。

* tcpropson@uchicago.edu

Robust Quantum Optimal Control with Trajectory Optimization

Thomas Propson,^{1, 2,*} Brian E. Jackson,³ Jens Koch,^{4, 5} Zachary Manchester,³ and David I. Schuster^{1, 2, 6}

¹*James Franck Institute, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637, USA*

²*Department of Physics, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637, USA*

³*Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania 15213, USA*

⁴*Department of Physics and Astronomy, Northwestern University, Evanston, Illinois 60208, USA*

⁵*Northwestern–Fermilab Center for Applied Physics and Superconducting Technologies, Northwestern University, Evanston, Illinois 60208, USA*

⁶*Pritzker School of Molecular Engineering, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637, USA*

(Dated: March 30, 2021)

The ability to engineer high-fidelity gates on quantum processors in the presence of systematic errors remains the primary barrier to achieving quantum advantage. Quantum optimal control methods have proven effective in experimentally realizing high-fidelity gates, but they require exquisite calibration to be performant. We apply robust trajectory optimization techniques to suppress gate errors arising from system parameter uncertainty. We propose a derivative-based approach that maintains computational efficiency by using forward-mode differentiation. Additionally, the effect of depolarization on a gate is typically modeled by integrating the Lindblad master equation, which is computationally expensive. We employ a computationally efficient model and utilize time-optimal control to achieve high-fidelity gates in the presence of depolarization. We apply these techniques to a fluxonium qubit and suppress simulated gate errors due to parameter uncertainty below 10^{-7} for static parameter deviations on the order of 1%.

I. INTRODUCTION

Quantum optimal control (QOC) is a class of optimization algorithms for accurately and efficiently manipulating quantum systems. Early techniques were proposed for nuclear magnetic resonance experiments [1–7], and applications now include superconducting circuits [8–24], neutral atoms and ions [25–36], nitrogen-vacancy centers in diamond [37–43], and Bose-Einstein condensates [44–47]. In the context of quantum computation, optimal control is employed to achieve high-fidelity gates while adhering to experimental constraints. Experimental errors such as parameter drift, noise, and finite control resolution cause the system to deviate from the model used in optimization, hampering experimental performance [9, 14, 20, 33, 48]. Robust control improves upon standard optimal control by encoding model parameter uncertainties in optimization objectives, yielding performance guarantees over a range of parameter values [49–51]. We adapt robust control techniques from the robotics community to mitigate parameter-uncertainty errors for a superconducting fluxonium qubit.

Analytically-derived control pulses that mitigate parameter-uncertainty errors include composite pulses [52–55], pulses designed by considering dynamic and geometric phases [56, 57], and pulses obtained with the DRAG scheme [58]. As compared to analytical techniques, QOC is advantageous for designing pulses that consider all experimental constraints and performance tradeoffs [17], and for constructing operations without a known analytic solution [9, 14]. Accordingly, recent

work has sought to achieve robustness in QOC frameworks using closed-loop methods [59–62] and open-loop methods [3, 20, 42, 63–67].

In this work, we study three open-loop robust control techniques that make the quantum state trajectory less sensitive to the uncertainties of static and time-dependent parameters:

1. A sampling method, similar to the work in Refs. [3, 20, 42, 65].
2. An unscented sampling method [68–70] adapted from the unscented transform [71, 72] used in state estimation.
3. A derivative method, which penalizes the sensitivity of the quantum state trajectory to uncertain parameters.

We apply these techniques to the fluxonium qubit presented in [73]. We also show that QOC can solve important problems associated with fluxonium-based qubits: exploiting the dependence of T_1 on the controls to mitigate depolarization and synchronizing the phase of qubits with distinct frequencies. To ameliorate depolarization, we perform time-optimal control and employ an efficient depolarization model for which the computational cost is independent of the Hilbert space dimension. Leveraging recent advances in trajectory optimization within the field of robotics, we solve these optimization problems using ALTRO (Augmented Lagrangian TRajecoty Optimizer) [74], which can enforce constraints on the control fields and the quantum state trajectory.

This paper is organized as follows. First, we describe ALTRO in the context of QOC in Sec. II. We outline realistic constraints for operating the fluxonium and define

* tcpopson@uchicago.edu

次に、脱分極を抑制するための方法をSec. IVで定式化する。次に、Sec. Vでは、静的なパラメータの不確実性に対する頑健性を実現するための3つの手法を説明する。Sec. VIでは、同じ手法を1/fフラックスノイズの軽減に適用する。

II. BACKGROUND

このセクションでは、QOCの問題文をレビューし、ALT R0ソルバー[74]について説明します。QOCは、量子状態 $|\psi(t)\rangle$ の進化を制御する時間依存の制御場のベクトル $a(t)$ に関するものです。状態の進化は、時間依存シュレーディンガー方程式 (TDSE) に支配される、

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(a(t), t) |\psi(t)\rangle. \quad (1)$$

ハミルトニア $H(a(t), t)$ は量子系と外部制御場によって決定される。QOC問題は、関数 $J[a(t)]$ を最小化する制御を見つけることであり、これを目的語と呼ぶ。この問題を数値的に扱いやすくするために、量子状態と制御を N 個の時間ステップに離散化し、 $|\psi(t_k)\rangle \rightarrow |\psi_k\rangle$, $a(t_k) \rightarrow a_k$ ここで $t_k = t_{k-1} + \Delta t$, $k \in \{1, \dots, N\}$ 。単一状態遷移問題の場合、目的是時間発展した最終状態 $|\psi_N\rangle$ と意図した目標状態 $|\psi_T\rangle$ の不一致、 $J(a) = 1 - |\langle \psi_T | \psi_N \rangle|^2$ である。標準的なQOCソルバーは目的語 $\nabla J(a)$ の導関数を計算し、これは一次最適化法の実装に容易に利用できる[3, 17, 75, 76]。また、QOC問題を軌道最適化問題として定式化し、ロボット工学のコミュニティが開発した特殊なソルバーを用いて解くこともできる[74, 77-79]。目的 $J(a) = \sum_k^N \ell_k(x_k, u_k)$ は、各時間ステップ k におけるコスト関数で表され、 x_k は拡張状態ベクトルで u_k は拡張制御ベクトルとなる。これらのベクトルは量子状態と制御場だけでなく、最適化問題に関連するすべての変数を含むため、拡張という用語を使用します。拡張制御には実験者が操作できるすべての変数が含まれ、拡張状態には拡張制御の変数に依存するすべての変数が含まれます。拡張状態の変数は、物理システムを支配する微分方程式で定義される拡張制御の変数に依存し、離散関係 $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ で符号化される。QOCでは、 $f(x_k, u_k)$ - 離散ダイナミクス関数と呼ぶ - は、ルンゲクッタ法 [80] または指数積分器 [81-84] を用いて TDSE (1) を積分することによって量子状態を伝播する。制約関数 $g_k(x_k, u_k) \neq 0$ または等式 $h_k(x_k, u_k) = 0$ として定式化することにより、拡張された制御と状態に対する制約を組み込む。

制約関数 g_k と h_k は、複数の制約条件を定義するベクトル値であり、等式と不等式はコンポーネントごとに理解する。制約の満足度を量量化するために、各制約の違反をその偏差の大きさとして定義します： $\max(g(-), 0)$ or $|h(-)|$ ここで、 g と h はそれぞれ制約関数 g_k と h_k の成分です。簡潔に述べると、軌道最適化問題は次のようになる：

$$\underset{\substack{x_1, \dots, x_N \\ u_1, \dots, u_{N-1}}}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^N \ell_k(x_k, u_k), \quad (2a)$$

$$\text{subject to} \quad x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad \forall k, \quad (2b)$$

$$g_k(x_k, u_k) \leq 0 \quad \forall k, \quad (2c)$$

$$h_k(x_k, u_k) = 0 \quad \forall k. \quad (2d)$$

この構造は制限的に見えるかもしれないが、問題は通常、任意のコストや制約関数に対応するように再定義することができる（例として、第III章を参照）。(2a)-(2d)を解くための標準的な手法は、通常、直接法[85, 86]と間接法[87]の2種類に分類される。間接法の場合、拡張された制御は決定変数、すなわち問題を解くために最適化装置が調整する変数である。拡張された状態は、離散ダイナミクス関数を用いて拡張された制御から得られ、コスト関数の導関数を評価するために使用される。そして、その導関数情報を用いて、拡張された制御を更新する。このアプローチは、GOAT [75]、GRAPE [3, 17]、Krotovの方法 [76]などの標準的なQOCソルバーで採られている。逆に、直接法では、拡張された制御と状態の両方を決定変数として扱います。オプティマイザは、コスト関数の最小化に加え、離散ダイナミクス関数の導関数情報を用いて、ダイナミクス制約 (2b) を指定された許容範囲で満足させる。この意味で、TDSE (1) は、量子状態が物理的である必要がない最適化の中間ステップで違反する可能性がある制約である。この直接的なアプローチは、非線形プログラムによる定式化に適しており、様々な汎用ソルバーが存在する[88, 89]。ALTR0のような最新のソルバーは、間接法と直接法を組み合わせた二段構えのアプローチを採用しています。まず、ALTR0は、拡張ラグランジュ法 (ALM) [91-93]の内部ソルバーとして反復線形二次調整器 (iLQR) アルゴリズム[90]を用いた間接解法段階を採用しています。第二の直接段階では、ALTR0は投影ニュートン法[94, 95]を使用します。次に、これら2つの段階のより詳細な概要を説明する。iLQRは、ダイナミクス制約の下で目的を最小化する、すなわち (2a)(2b) を解くための間接法である。まず、iLQRは、拡張された制御の初期推測を使用して、離散ダイナミクス関数を持つ拡張された状態を得ます。

the associated QOC problem in Sec. III. Then, we formulate a method for suppressing depolarization in Sec. IV. Next, we describe three techniques for achieving robustness to static parameter uncertainties in Sec. V. We adapt the same techniques to mitigate $1/f$ flux noise in Sec. VI.

II. BACKGROUND

In this section, we review the QOC problem statement and describe the ALTRO solver [74]. QOC concerns a vector $\mathbf{a}(t)$ of time-dependent control fields that steer the evolution of a quantum state $|\psi(t)\rangle$. The evolution of the state is governed by the time-dependent Schrödinger equation (TDSE),

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(\mathbf{a}(t), t) |\psi(t)\rangle. \quad (1)$$

The Hamiltonian $H(\mathbf{a}(t), t)$ is determined by the quantum system and the external control fields. The QOC problem is to find the controls that minimize a functional $J[\mathbf{a}(t)]$, which we call the objective. To make the problem numerically tractable, the quantum state and controls are discretized into N time steps, $|\psi(t_k)\rangle \rightarrow |\psi_k\rangle$ and $\mathbf{a}(t_k) \rightarrow \mathbf{a}_k$ where $t_k = t_{k-1} + \Delta t$ and $k \in \{1, \dots, N\}$. In the case of a single state-transfer problem, the objective is the infidelity of the time-evolved final state $|\psi_N\rangle$ and the intended target state $|\psi_T\rangle$, $J(\mathbf{a}) = 1 - |\langle\psi_T|\psi_N(\mathbf{a})\rangle|^2$. Standard QOC solvers compute derivatives of the objective $\nabla J(\mathbf{a})$, which can easily be used to implement first-order optimization methods [3, 17, 75, 76].

Alternatively, the QOC problem can be formulated as a trajectory optimization problem and solved using specialized solvers developed by the robotics community [74, 77–79]. The objective $J(\mathbf{a}) = \sum_k \ell_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ is expressed in terms of the cost function at each time step ℓ_k , where \mathbf{x}_k is the augmented state vector and \mathbf{u}_k is the augmented control vector. We use the term *augmented* because these vectors contain all of the relevant variables in the optimization problem, not just the quantum state and the control fields, for an example see Sec. III. The augmented control contains all variables that the experimentalist may manipulate, and the augmented state contains all variables that depend on those in the augmented control. The variables in the augmented states depend on those in the augmented controls as defined by the differential equations governing the physical system, which are encoded in the discrete relation $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$. For QOC, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ – which we call the discrete dynamics function – propagates the quantum state by integrating the TDSE (1) using a Runge-Kutta method [80] or an exponential integrator [81–84].

We incorporate constraints on the augmented controls and states by formulating them as inequalities $\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \leq \mathbf{0}$ or equalities $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$. The constraint functions \mathbf{g}_k and \mathbf{h}_k may be vector-valued to en-

code multiple constraints, and equalities and inequalities are understood component-wise. To quantify constraint satisfaction, we define each constraint's *violation* as the magnitude of its deviation: $\max(g(\cdot), 0)$ or $|h(\cdot)|$, where g and h are components of constraint functions \mathbf{g}_k and \mathbf{h}_k , respectively. Stated concisely, the trajectory optimization problem is:

$$\underset{\substack{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \\ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}}}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^N \ell_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (2a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad \forall k, \quad (2b)$$

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \leq \mathbf{0} \quad \forall k, \quad (2c)$$

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{0} \quad \forall k. \quad (2d)$$

We have formulated the problem such that the cost and constraint functions at time step k may only depend on the augmented control and state at time step k . Although this structure may appear limiting, the problem can typically be reformulated to accommodate any cost or constraint function, for an example see Sec. III, and the ALTRO solver, which we introduce in the following discussion, exploits this structure to efficiently solve the problem.

Standard techniques for solving (2a)–(2d) typically fall into two categories: direct methods [85, 86] and indirect methods [87]. For indirect methods, the augmented controls are the *decision variables*, i.e., the variables the optimizer adjusts to solve the problem. The augmented states are obtained from the augmented controls using the discrete dynamics function, and they are used to evaluate derivatives of the cost functions. Then, the derivative information is employed to update the augmented controls. This approach is taken by standard QOC solvers such as GOAT [75], GRAPE [3, 17], and Krotov's method [76]. Conversely, direct methods treat both the augmented controls and states as decision variables. In addition to minimizing the cost functions, the optimizer uses derivative information for the discrete dynamics function to satisfy the dynamics constraint (2b) to a specified tolerance. In this sense, the TDSE (1) is a constraint that may be violated for intermediate steps of the optimization, where the quantum states need not be physical. The direct approach lends itself to a nonlinear program formulation, for which a variety of general-purpose solvers exist [88, 89].

Recent state-of-the-art solvers, such as ALTRO, combine the indirect and direct methods in a two-stage approach. First, ALTRO employs an indirect solving stage using the iterative linear-quadratic regulator (iLQR) algorithm [90] as the internal solver of an augmented Lagrangian method (ALM) [91–93]. In the second direct stage, ALTRO uses a projected Newton method [94, 95]. Next, we provide a more detailed summary of these two stages.

iLQR is an indirect method for minimizing the objective subject to the dynamics constraint, i.e., solving (2a)–(2b). First, iLQR uses an initial guess for the augmented

次に、iLQRは、現在の拡張された制御と状態についてテイラー展開でゼロ階、1階、2階の導関数を使用して各コスト関数の二次モデルを構築します。これらのモデルは、時間ステップ間の再帰関係とともに使用され、拡張された制御の局所最適な更新を得ることができます。この再帰関係は、コスト関数の寄与が1つの時間ステップにおける拡張された制御と状態のみから生じるため、閉じた形で導出することが可能である[96]。最後に、局所最適更新の方向に線探索[97]を行い、目的語の減少を確保する。この手順は、収束に達するまで繰り返される。iLQRのような間接ソルバーは計算効率が良く、最適化を通して離散的なダイナミクスの精度を高く保つことができますが、非線形等式・不等式制約(2c) (2d) を扱うことができません。QOCでは、このような制約を扱うための一般的なアプローチとして、制約関数を目的語に追加する方法があります [14, 17, 20, 67]。しかし、この方法では、ソルバーがコスト関数と制約関数の最小化を互いに交換するため、制約が満たされることを保証することはできません。ALMは、各制約関数のラグランジュ乗数推定値を適応的に調整することで、この問題を解決し、制約が満たされることを保証します。ALMは、制約関数の線形および2次関数の項を目的語に追加します。そして、新しい目的語を iLQR で最小化する。iLQR で得られた解が制約を満たさない場合、目的語の制約項に対するプリファクタをインテリジェントに増加させ、この手順を繰り返す。ALMは超線形に収束しますが、数値的な条件が悪いと局所最適解の近くで制約違反が小さくなってしまうことがあります[98]。この欠点に対処するため、ALTR0 は ALM 段階の解を（直接）投影ニュートン法で制約多様体に投影し、超低い制約違反 $\approx 10^{-8}$ を達成した。ALTR0 ソルバーの詳細については、文献[74, 99]を参照してください。標準的な QOC ソルバーとは対照的に、ALTR0 は制御場と量子状態の両方に対する制約を厳しい公差で満たすことができます。この利点は、複数の中優先コスト関数が多くの高優先度制約の下で最小化される本作品では極めて重要である。

III. QOC FOR THE FLUXONIUM

以下では、高いコヒーレンス時間[73, 100–104]を持つことから量子コンピュータの構成要素として期待されている超伝導フラクソニウム量子ビットの量子ゲートを最適化します。本節では、軌道最適化形式(2a) – (2d) を用いて最適化問題(6a) – (6h) を定義し、以降の節で実験誤差チャネルを考慮して拡張します。

高精度に、フラックスフラストレーション点付近のフラクソニウム・ハミルトニアを2レベルシステムとして近似する：

$$H/h = f_q \frac{\sigma_z}{2} + a(t) \frac{\sigma_x}{2}. \quad (3)$$

ここで、 f_q はフラックスフラストレーション点での量子ビット周波数、 $a(t)$ はフラックスフラストレーション点からのフラックスオフセットを支配する制御、 h はプランク定数、 σ_z , σ_x は Pauli 行列である。コヒーレントダイナミクスはこの2レベルシステムモデルで記述できるが、我々のノイズモデル、実験制約、システムパラメータはフルシステムを考慮しており、[73] で発表されたフラクソニウムを代表するものである。

まず、フラクソニウムゲート問題の拡張された制御と状態を紹介する。我々が使用している ALTR0 の実装は現在複素数をサポートしていないため、量子状態を[17] で与えられた同型の $H(\mathbb{C}^n)^{\sim} = H(\mathbb{R}^{2n})$ で表現します、

$$H|\psi\rangle \cong \begin{pmatrix} H_{\text{re}} & -H_{\text{im}} \\ H_{\text{im}} & H_{\text{re}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi\rangle_{\text{re}} \\ |\psi\rangle_{\text{im}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

(4)の右辺で与えられる状態の実数表現を示すために、ブレケット表記を捨てて ψ を使う。フラックスの離散モーメントを指すために、 $\int_t^R a_k \equiv \int_{t1}^{Rt_k} a(t) dt$, $a_k \equiv a(t_k)$, $d nt a_k \equiv d^n a(t)/dt^n |_{t=t_k}$ と表記しておく。増強された制御と状態は

$$\mathbf{u}_k = \left(d_t^2 a_k \right), \quad \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \psi_k^0 \\ \psi_k^1 \\ \int_t a_k \\ a_k \\ d_t a_k \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ここで、量子状態 $i \in \{0, 1\}$ の上付き文字はラベルとして機能する。標準的な QOC フレームワークでは、制御場の導関数は有限差分法で求められ、例えば $d_t a_k \approx (a_{k+1} - a_k)/\Delta t$ [17] のようになる。ALTR0 ではコスト関数に複数の時間ステップの情報を用いないことが要求されるため、 $d_t^2 a_k$ を決定変数とし、連立ODEを数値積分して $d_t a_k$ 、 a_k , $\int_t^R a_k$ を求め、コスト関数にペナルティを与えることができます。同様に、量子状態は TDSE (1) をフラクソニウムハミルトニア (3) と与えられたフラックス a_k で数値積分することによって得られる。これらの数値積分ルールは問題の離散力学関数に実装され、力学制約(6b)を生じさせる。

次に、この問題の制約条件を概説する。この問題を多状態移行問題の観点から捉え、初期状態として $|\psi_1^0\rangle_i = |0\rangle_i$, $|\psi_1^1\rangle_i = |1\rangle_i$ を固定する (6c)。最終時間ステップでの状態は、目標状態 $|\psi_N^i\rangle_i = |\psi_T^i\rangle_i \equiv U|\psi_1^i\rangle_i \forall i$ (6e) ここで $U = X/2, Y/2, Z/2$ は、目標ゲートを表す制約を受ける。さらに、ソルバーが数値積分において離散化誤差を利用しないように、

controls to obtain the augmented states with the discrete dynamics function. iLQR then constructs quadratic models for each cost function using their zeroth-, first- and second-order derivatives in a Taylor expansion about the current augmented controls and states. These models are used with a recurrence relation between time steps to obtain the locally optimal update for the augmented controls. This recurrence relation is possible to derive in closed form because cost function contributions come only from the augmented control and state at a single time step [96]. Finally, a line search [97] is performed in the direction of the locally optimal update to ensure a decrease in the objective. This procedure is repeated until convergence is reached.

While indirect solvers like iLQR are computationally efficient and maintain high accuracy for the discrete dynamics throughout the optimization, they cannot handle nonlinear equality and inequality constraints (2c)-(2d). For QOC, a popular approach to handle such constraints is to add the constraint functions to the objective [14, 17, 20, 67]. However, this strategy does not guarantee that the constraints are satisfied as the solver trades minimization of the cost functions and constraint functions against each other. ALM remedies this issue by adaptively adjusting a Lagrange multiplier estimate for each constraint function to ensure the constraints are satisfied. ALM adds terms that are linear and quadratic in the constraint functions to the objective. Then, the new objective is minimized with iLQR. If the solution obtained with iLQR does not satisfy the constraints, the prefactors for the constraint terms in the objective are increased intelligently and the procedure is repeated.

ALM converges superlinearly, but poor numerical conditioning may lead to small decreases in the constraint violations near the locally optimal solution [98]. To address this shortcoming, ALTRO projects the solution from the ALM stage onto the constraint manifold using a (direct) projected Newton method, achieving ultra-low constraint violations $\sim 10^{-8}$. For more information on the details of the ALTRO solver, see Refs. [74, 99].

As opposed to standard QOC solvers, ALTRO can satisfy constraints on both the control fields and quantum states to tight tolerances. This advantage is crucial for this work, where multiple medium-priority cost functions are minimized subject to many high-priority constraints.

III. QOC FOR THE FLUXONIUM

In the following, we optimize quantum gates for the superconducting fluxonium qubit – a promising building block for quantum computers due to its high coherence times [73, 100–104]. In this section, we use the trajectory optimization formalism (2a)-(2d) to define the optimization problem (6a)-(6h), which we extend in subsequent sections to account for experimental error channels. To high accuracy, we approximate the fluxonium Hamilto-

nian near the flux-frustration point as a two-level system:

$$H/h = f_q \frac{\sigma_z}{2} + a(t) \frac{\sigma_x}{2}. \quad (3)$$

Here, f_q is the qubit frequency at the flux-frustration point, $a(t)$ is the control governing the flux offset from the flux-frustration point, h is Planck's constant, and σ_z, σ_x are Pauli matrices. Although the coherent dynamics can be described with this two-level system model, our noise model, experimental constraints, and system parameters consider the full system, and they are representative of the fluxonium presented in [73].

First, we introduce the augmented control and state for the fluxonium gate problem. Since the ALTRO implementation we use does not currently support complex numbers, we represent the quantum states in the isomorphism $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \cong \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ given in [17],

$$H |\psi\rangle \cong \begin{pmatrix} H_{\text{re}} & -H_{\text{im}} \\ H_{\text{im}} & H_{\text{re}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi\rangle_{\text{re}} \\ |\psi\rangle_{\text{im}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

We use ψ – abandoning bra-ket notation – to denote the real representation of a state given by the right-hand-side of (4). To refer to the discrete moments of the flux, we introduce the notation $\int_t a_k \equiv \int_{t_1}^{t_k} a(t) dt$, $a_k \equiv a(t_k)$, $d_t^n a_k \equiv d^n a(t)/dt^n|_{t=t_k}$. The augmented control and state are:

$$\mathbf{u}_k = \left(d_t^2 a_k \right), \quad \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \psi_k^0 \\ \psi_k^1 \\ \int_t a_k \\ a_k \\ d_t a_k \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Here, the superscript on the quantum states $i \in \{0, 1\}$ acts as a label. In standard QOC frameworks, the derivatives of the control fields are obtained with finite difference methods, e.g., $d_t a_k \approx (a_{k+1} - a_k)/\Delta t$ [17]. Because ALTRO requires that cost functions do not use information from multiple time steps, we make $d_t^2 a_k$ a decision variable and numerically integrate coupled ODEs to obtain $d_t a_k$, a_k , and $\int_t a_k$ so that we may penalize them in cost functions. Similarly, the quantum states are obtained by numerically integrating the TDSE (1) with the fluxonium Hamiltonian (3) and the given flux a_k . These numerical integration rules are implemented in the discrete dynamics function for the problem, and they give rise to the dynamics constraint (6b).

Next, we outline the constraints for this problem. Casting this problem in terms of a multi-state transfer problem, we fix as the initial states $|\psi_0^0\rangle = |0\rangle$, $|\psi_1^1\rangle = |1\rangle$ (6c). The states at the final time step are constrained to be the target states $|\psi_N^i\rangle = |\psi_T^i\rangle \equiv U |\psi_1^i\rangle \forall i$ (6e) where $U = X/2, Y/2, Z/2$ denotes the target gate. Furthermore, we impose the normalization constraint $|\langle \psi_k^i | \psi_k^i \rangle|^2 = 1 \forall i, k$ (6g) to ensure the solver does not

正規化制約 $|h\psi_k^i| \cdot |\psi_k^i|^2 = 1 \forall i, k$ (6g) を課しています。フラックスについては、初期条件として $\int_t a_1 = a_t a_1 = u$ [6d]. we also enforce the boundary condition $a_1 = a_N = 0$ [6f], so the gates may be を任意に連結している。フラックスバイアスライン[73, 105, 106]でよく見られる誘導ドリフトを緩和するため、ゼロネットフラックス制約 $a_N = 0$ (6f) を課している。さらに、フラックスは $|a_k| \leq 0.5 \text{ GHz } \forall k$ (6h) によって制約され、2レベル近似が有効であることを保証する (3). 0.5GHz以上では、エネルギー準位とフラックスの関係が強く非線形になる。本研究で紹介するすべてのゲートは、これらの制約を最大 10^{-8} の違反まで満たしている。各時間ステップでのコスト関数は $\mathbf{Q}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^T Q_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T) + u T_k R_k \mathbf{u}_k$ ここで Q_k と R_k はコスト関数寄与に重み付けする超パラメータの対角行列となる。 Q_k 項は、目標拡張状態 $\mathbf{x}_T = (\psi_T^0, \psi_T^1, 0, 0)$ からの逸脱を罰する、 $0)^T$ 、これは $|\psi_k^i|^2 a_t^R a_k$ 和 a_N に課した制約と一致する。したがって、この項は ψ_k^i と ψ_T^i の2乗差をペナルティとし、 $a_t^R a_k$, a_k , $d_t a_k$ のノルムをペナルティとする。これは、二乗差分コスト関数のヘシアンが対角であり、行列の乗算が高速であることと、Z/2ゲートを最適化したいので、初期状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ のグローバル位相に敏感なメトリックが必要であるためです。さらに、 R_k 項は $d_t^2 a_k$ のノルムを罰する。 $d_t^2 a_k$ と $d_t a_k$ のノルムを罰することで、 a_k を滑らかにし、高頻度のAWG遷移を緩和する。簡潔に述べると、最適化問題は次のような形となる：

$$\underset{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^T Q_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{u}_k^T R_k \mathbf{u}_k \quad (6a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \forall k, \quad (6b)$$

$$|\psi_1^0\rangle = |0\rangle, |\psi_1^1\rangle = |1\rangle, \quad (6c)$$

$$\int_t a_1 = a_1 = d_t a_1 = 0, \quad (6d)$$

$$|\psi_N^i\rangle = |\psi_T^i\rangle \forall i, \quad (6e)$$

$$\int_t a_N = a_N = 0, \quad (6f)$$

$$|\langle \psi_k^i | \psi_k^i \rangle|^2 = 1 \forall i, k, \quad (6g)$$

$$|a_k| \leq 0.5 \text{ GHz } \forall k. \quad (6h)$$

次に、問題の定式化について述べます。iLQRを解く段階で有利になるため、全ての時間ステップにコスト関数を置いています[99]。これは、文献[17]のように、目的のゲートを早期に達成するインセンティブになるかもしれません。[17]のように、早期に目的のゲートを達成することを奨励するかもしれないが、我々は、最終的な時間ステップでゲートを達成することに主眼を置いており、これは目標状態制約 (6e) が保証している。

さらに、目標状態制約では、最終状態が、選択した最大制約違反 $\leq 10^{-8}$ まで、グローバル位相を含む目標状態に一致することを要求します。この制約を課さない場合、最適化装置は、他のコスト関数で優れた性能を得るために閉システムゲート誤差を犠牲にすることが許されますが、これは望ましくないと考えられます。標準的なQOCフレームワークで制約を課すには、制約が満たされるまで、別々の最適化インスタンス間で制約関数のプレファクターを手動で増加させます [14, 17, 20] が、複数の制約がある場合は実行不可能となります。ALMはこのプレファクターの更新を自動化し、与えられた制約をすべて満たす解を見つけます。したがって、ALTR0は複数の制約を扱うことができるため、QOC問題の魅力的なソルバーとなります。QOCの特別に難しいケースでは、システムの物理に従いつつ所望のゲートを達成することが不可能な場合があります[8]。すなわち、ダイナミクス制約 (6b) とターゲット状態制約 (6e) が相互に満足できない場合があります。この場合、ALMの目的語の制約関数項のプレファクターが無限大になる傾向があり、数値的な不安定さを招き、最適化は収束しません。このような状況でも制約のあるアプローチを維持するために、目標状態制約の最大制約違反は、許容できる最小ゲートエラーに見合ったレベルまで引き上げることができます。最後に、ALTR0の最初の間接ステージでは、拡張された状態は離散ダイナミクス関数で明示的に得られるので、ダイナミクス制約と初期条件 (6b) ~ (6d) は構築によって満たされます。この段階では、残りの制約関数 (6e) ~ (6h) は、同型性等価な形で目的に追加される(4)。逆に、第2直接段階については、制約 (6b) ~ (6h) の全てを用いて制約多様体への射影を定義し、目的語は変更されない。したがって、量子状態は自由パラメータとなり、TDSEを満たすように調整される。最終的な解のTDSEからの乖離は最大制約違反以上にはなりませんが、ゲートエラーを報告する際にTDSEを明示的に統合することで、正確性を確保しています。QOCのための直接最適化アプローチの利点を探ることは、今後の研究の興味深い方向性である。

IV. DEPOLARIZATION MITIGATION

本節では、脱分極を緩和するために磁束を最適化する方法について概説する。多くの超伝導回路では、脱分極時間 T_1 は制御パラメータに依存しないため、可能な限り高速なゲートが最小の脱分極誤差を発生させる[107]。しかし、フラクソニウムの場合、 T_1 はフラックスに強く依存する。そこで、ゲート時間を決定変数とすることで、ゲート時間を長くして T_1 時間を長くする、あるいは T_1 時間を短くしてゲート時間を短くする、というトレードオフをオプティマイザが行えるようにしました。さらに、これまでの研究では、マスター方程式の下で密度行列を進化させたり[42, 107]、量子軌跡アプローチで多数の状態を進化させたりして、脱分極によるゲート誤差をモデル化しています[108]。我々は、最適化において積分された脱分極率にペナルティを与えることで、これらの技術に必要な計算量の増加を回避している。

take advantage of discretization errors in numerical integration. For the flux, we have the initial condition $\int_t a_1 = d_t a_1 = 0$ (6d). We also enforce the boundary condition $a_1 = a_N = 0$ (6d), (6f) so the gates may be concatenated arbitrarily. We impose the zero net-flux constraint $\int_t a_N = 0$ (6f) which mitigates the inductive drift ubiquitous in flux-bias lines [73, 105, 106]. Additionally, the flux is constrained by $|a_k| \leq 0.5$ GHz $\forall k$ (6h) to ensure the two-level approximation remains valid (3). Above 0.5 GHz, the relationship between the energy levels and the flux becomes strongly non-linear. All gates presented in this work satisfy these constraints to a maximum violation of $\sim 10^{-8}$.

The cost function at each time step is $\ell_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^T Q_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T) + \mathbf{u}_k^T R_k \mathbf{u}_k$ where Q_k and R_k are diagonal matrices of hyperparameters that assign weights to cost function contributions. The Q_k term penalizes deviations from the target augmented state $\mathbf{x}_T = (\psi_T^0, \psi_T^1, 0, 0, 0)^T$, which is consistent with the constraints we have imposed on $|\psi_N^i\rangle$, $\int_t a_N$, and a_N . Accordingly, this term penalizes the squared difference of ψ_k^i and ψ_T^i and penalizes the norm of $\int_t a_k$, a_k , and $d_t a_k$. We penalize the squared difference of the final and target quantum states, rather than their infidelities, because the Hessian of the squared-difference cost function is diagonal – which makes matrix multiplications fast – and we wish to optimize $Z/2$ gates, which requires a metric that is sensitive to global phases for the initial states $|0\rangle$ and $|1\rangle$. Additionally, the R_k term penalizes the norm of $d_t^2 a_k$. Penalizing the norm of $d_t^2 a_k$ and $d_t a_k$ makes a_k smooth, which mitigates high-frequency AWG transitions. Stated succinctly, the optimization problem takes the form:

$$\underset{\substack{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \\ \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1}}}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T)^T Q_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_T) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{u}_k^T R_k \mathbf{u}_k \quad (6a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad \forall k, \quad (6b)$$

$$|\psi_1^0\rangle = |0\rangle, |\psi_1^1\rangle = |1\rangle, \quad (6c)$$

$$\int_t a_1 = a_1 = d_t a_1 = 0, \quad (6d)$$

$$|\psi_N^i\rangle = |\psi_T^i\rangle \quad \forall i, \quad (6e)$$

$$\int_t a_N = a_N = 0, \quad (6f)$$

$$|\langle \psi_k^i | \psi_k^i \rangle|^2 = 1 \quad \forall i, k, \quad (6g)$$

$$|a_k| \leq 0.5 \text{ GHz} \quad \forall k. \quad (6h)$$

Next, we remark on our problem formulation. We put a cost function at all time steps because it benefits the iLQR solving stage [99]; although this may incentivize early achievement of the desired gate, as in Ref. [17], we are primarily concerned with achieving the gate at the final time step, which the target-state constraint (6e) ensures. Additionally, the target-state constraint requires the final state to match the target state, including its global phase, up to our chosen maximum constraint violation $\sim 10^{-8}$. If we did not impose this constraint, the

optimizer would be allowed to sacrifice the closed-system gate error to achieve better performance on the other cost functions, which is undesirable. To enforce a constraint in standard QOC frameworks, the prefactor for the constraint function is manually increased between separate optimization instances until the constraint is satisfied [14, 17, 20], which becomes infeasible for more than one constraint. ALM automates these prefactor updates to find a solution that satisfies all of the given constraints. Hence, ALTRO’s ability to handle multiple constraints makes it an attractive solver for QOC problems.

In extraordinarily difficult cases of QOC, it may be impossible to obey the physics of the system and achieve the desired gate [8], i.e., the dynamics constraint (6b) and the target-state constraint (6e) may be mutually unsatisfiable. In this case, the prefactors for the constraint function terms in the ALM objective will tend to infinity – leading to numerical instability – and the optimization will not converge. To maintain a constrained approach in this situation, the maximum constraint violation for the target-state constraint can be raised to a level commensurate with the minimum acceptable gate error.

Finally, for ALTRO’s first indirect stage, the augmented states are obtained explicitly with the discrete dynamics function, so the dynamics constraint and initial conditions (6b)-(6d) are satisfied by construction. In this stage, the rest of the constraint functions (6e)-(6h) are added to the objective in their isomorphism-equivalent form (4). Conversely, for the second direct stage, all of the constraints (6b)-(6h) are used to define the projection onto the constraint manifold, and the objective is unmodified. Hence, the quantum states become free parameters that are adjusted to satisfy the TDSE. Although the final solution’s deviation from the TDSE is never more than the maximum constraint violation, we explicitly integrate the TDSE when reporting gate errors to ensure accuracy. Exploring the benefit of direct optimization approaches for QOC is an interesting direction for future work.

IV. DEPOLARIZATION MITIGATION

In this section, we outline a method for optimizing the flux to mitigate depolarization. For many superconducting circuits, the depolarization time T_1 is independent of the control parameters, so the fastest possible gate incurs the least depolarization error [107]. For the fluxonium, however, T_1 is strongly dependent on the flux. We enable the optimizer to trade longer gate times for longer T_1 times, or shorter T_1 times for shorter gate times, by making the gate time a decision variable. Additionally, previous work has modeled the gate error due to depolarization by evolving density matrices under a master equation [42, 107], or evolving a large number of states in a quantum trajectory approach [108]. We avoid the increase in computational complexity required for these techniques by penalizing the integrated depolarization rate in optimization.

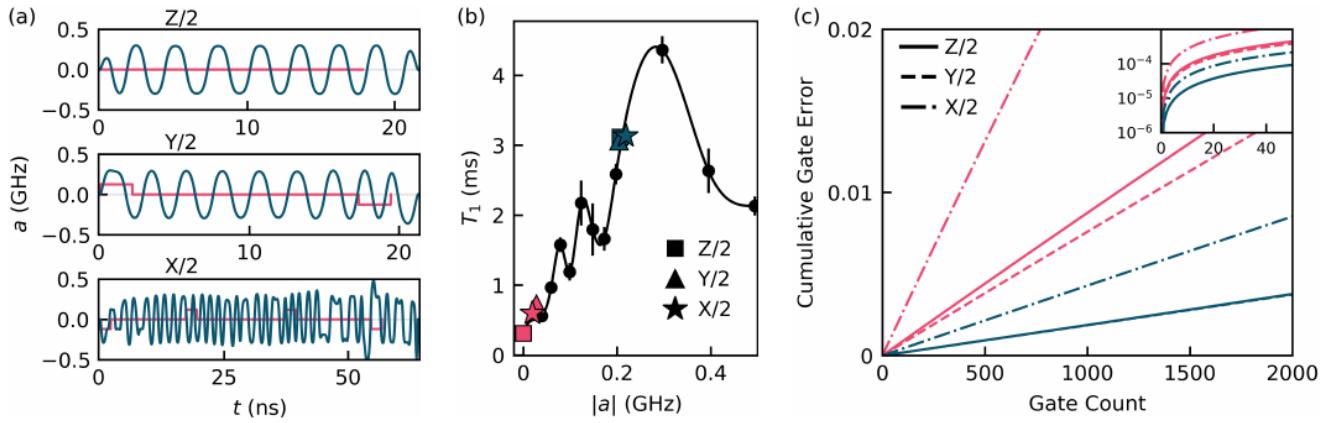


図1. (a) 数値ゲート（濃い青）と解析ゲート（薄いピンク）のフラックスパルス。(b) 最適化で使用した T_1 補間関数。丸印は測定された T_1 回数を示す。円以外のマーカーは、各パルスの時間平均絶対フラックスと時間平均 T_1 時間をプロットしています。(c) 脱分極による累積ゲート誤差を、適用したゲート数の関数として示す。数値Z/2ゲートとY/2ゲートの累積ゲート誤差は区別できない。挿入図は、ゲート数が少ない場合の累積ゲート誤差を対数スケールで示したものである。

$$\text{積分脱分極率は、} Z \int_0^T D_1(t) = T_1^{-1} [a(t^0)] dt^0 \text{ で与えられる。} \quad (7)$$

ここで考えるゲートでは、ゲート時間が T_1 に比べて小さいため、積分脱分極率は脱分極イベントの確率に比例します。さらに、脱分極誤差は干渉を受けずに時間的に単調に増加するため、積分脱分極率は発生するゲート誤差の妥当な代用品となります。積分された脱分極率は拡張状態(5)に付加され、そのノルムは、ターゲット拡張状態の対応する要素をゼロに設定することにより、目的の Q_k 項においてペナルティを受けます(6a)を参照。フラックスの関数としての T_1 は、実験データへのスプラインフィットを評価することによって得られる、図1(b)を参照のこと。

また、マスター方程式のアプローチで脱分極をモデル化すると、サイズ $n \times n$ の密度行列を拡張状態に追加する必要があり、量子軌道のアプローチでは、サイズ n の多数の状態を拡張状態に追加する必要があります(n はヒルベルト空間の次元です)。これに対して、積分された脱分極率は単一の実数であるため、この脱分極モデルを評価するための計算量はヒルベルト空間の次元に比例しない。

時間最適制御を行うために、時間ステップ間の持続時間を決定/変数とする[74]。持続時間の平方根 Δt_k は拡張制御(5)に付加され、その平方 $|\Delta t_k|^2$ は離散ダイナミクス関数の積分に使用される。数値的安定性を保つために持続時間の境界を合理的な正の値の間で制約していますが、

最適化装置は最適化の中間反復で持続時間に負の値を割り当てることがあるので、この二乗法によって正を維持します。本数値計算法で得られたX/2, Y/2, Z/2ゲートと[73]で示された対応する解析的ゲートに対する脱分極の影響を解析する。リンドブラッド・マスター方程式を用いて、連続したゲート印加に対する T_1 の散逸をシミュレーションし、各印加後の累積ゲート誤差を計算した(付録A参照)。本文で報告するゲートエラーは、1000個の擬似ランダム生成された初期状態に対して平均化された進化した状態と目標状態の不忠実度である。

数値ゲートのフラックスパルスは、図1(a)を参照すると、振幅約0.2GHzのほぼ周期的なものです。これは、[109]で説明され、[110]で実現されたフラクソニウムのフローク演算を彷彿とさせるものである。数値ゲート時間は解析的ゲート時間よりも大きいですが、数値フラックスパルスはより大きなフラックス値でより多くの時間を費やし、平均してより高い T_1 時間を達成しています(図1(b)を参照)。解析ゲート、数値ゲートとともにシングルゲート誤差は 10^{-4} 以下であり、フォールトトレラント量子コンピューティング[111-113]の前提条件である量子エラー訂正に十分対応できます。しかし、数値ゲートは解析ゲートに比べてシングルゲート誤差が約5倍小さく、これは積分脱分極率メトリックの相対的な改善とよく一致しています(付録A参照)。このようなシングルゲートエラーの優位性は、エラー訂正リソースの大幅な削減に対応します[114, 115]。さらに、連続したゲートアプリケーションでは、脱分極によるゲートエラーはゲート数に対してほぼ線形であり、これは t/T_1 で予想されることである(図1(c)参照)。ゲートカウントが大きい場合のゲート誤差の低減は、ノイズの多い中間量子(NIS Q)アプリケーションにとって重要である。

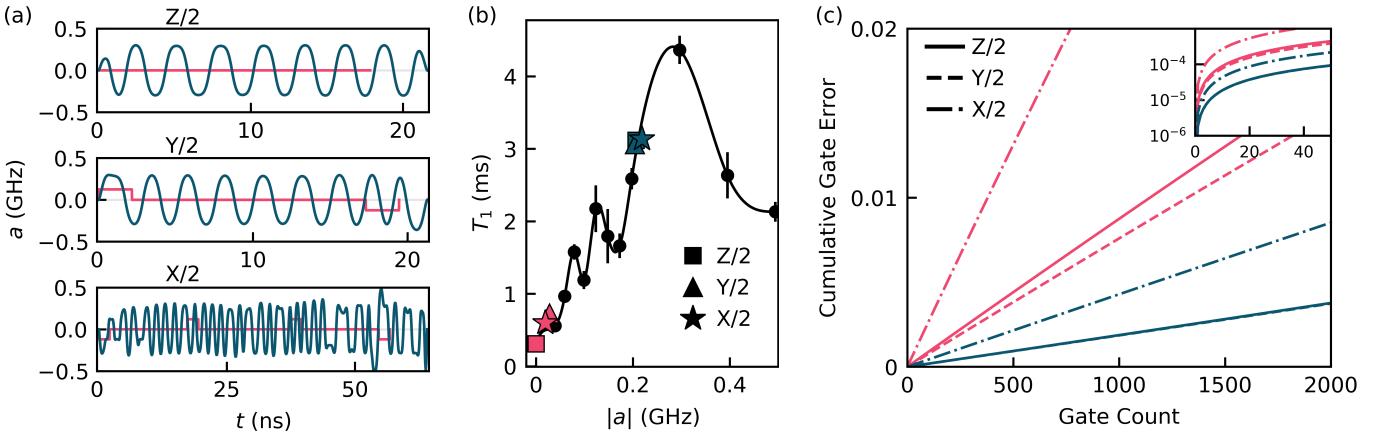


FIG. 1. (a) Flux pulses for the numerical gates (dark blue) and the analytic gates (light pink). (b) T_1 interpolation function used in optimization. Circle markers indicate measured T_1 times. Non-circle markers are plotted at the time-averaged absolute flux and the time-averaged T_1 time for each pulse. (c) Cumulative gate errors due to depolarization as a function of the number of gates applied. Cumulative gate errors for the numerical $Z/2$ and $Y/2$ gates are indistinguishable. Inset shows log-scaled cumulative gate errors for small gate counts.

The integrated depolarization rate is given by,

$$D_1(t) = \int_0^t T_1^{-1}[a(t')]dt'. \quad (7)$$

For the gates we consider here, where the gate time is small compared to T_1 , the integrated depolarization rate is proportional to the probability of a depolarization event. Additionally, the integrated depolarization rate is a reasonable proxy for the gate error incurred because depolarization errors are incoherent – they increase monotonically in time without interference. The integrated depolarization rate is appended to the augmented state (5) and its norm is penalized in the Q_k term of the objective by setting the corresponding element of the target augmented state to zero, see (6a). T_1 as a function of the flux is obtained by evaluating a spline fit to experimental data, see Fig. 1(b).

Alternatively, modeling the depolarization with a master equation approach would require adding density matrices of size $n \times n$ to the augmented state, and a quantum trajectory approach would require adding many states of size n to the augmented state, where n is the dimension of the Hilbert space. By contrast, the integrated depolarization rate is a single real number; thus, the computational complexity of evaluating this depolarization model does not scale with the dimension of the Hilbert space.

To perform time-optimal control, we make the duration between time steps a decision variable [74]. The square root of the duration $\sqrt{\Delta t_k}$ is appended to the augmented control (5) and its square $|\Delta t_k|$ is used for integration in the discrete dynamics function. Although we constrain the bounds of the duration between reasonable positive values to maintain numerical stability, the optimizer may assign negative values to the duration

for intermediate optimization iterations, so this squaring approach maintains positivity.

We analyze the effect of depolarization on the $X/2$, $Y/2$, and $Z/2$ gates obtained with our numerical method and the corresponding analytic gates presented in [73]. We use the Lindblad master equation to simulate T_1 dissipation for successive gate applications, and compute the cumulative gate error after each application, see Appendix A. The gate error reported in this text is the infidelity of the evolved state and the target state averaged over 1000 pseudo-randomly generated initial states.

The flux pulses for the numerical gates are approximately periodic with amplitudes $\sim 0.2\text{GHz}$, see Fig. 1(a). They are reminiscent of the analytically determined Floquet operations for a fluxonium described in [109] and realized in [110]. The numerical gate times are greater than the analytic gate times, but the numerical flux pulses spend more time at larger flux values, achieving higher T_1 times on average, see Fig. 1(b). The single-gate errors for both the analytic and numerical gates are less than 10^{-4} , which makes them sufficient for quantum error correction – a prerequisite for fault-tolerant quantum computing [111–113]. However, the numerical gates achieve single-gate errors ~ 5 times less than those for the analytic gates, which tracks closely with their relative improvement on the integrated depolarization rate metric, see Appendix A. This advantage in single-gate errors corresponds to a significant reduction in error correction resources [114, 115]. Furthermore, for successive gate applications, the gate error due to depolarization is approximately linear in the gate count, which we expect for $t \ll T_1$, see Fig. 1(c). The gate error reduction for large gate counts is important for noisy, intermediate-scale quantum (NISQ) applications. These improvements are significant given the constraints we have imposed on

これらの改善は、我々がゲートに課した制約を考慮すれば重要であり、我々が採用した最適化手法の基本的な限界を示すものではありません。

V. ROBUSTNESS TO STATIC PARAMETER UNCERTAINTY

私たちは、QOC問題をオープンループ最適化問題として定式化しました。つまり、実験からのフィードバックを最適化に取り入れないのであります。しかし、正確なデバイスのパラメータは、最適化で使用するパラメータと乖離し、実験パフォーマンスの低下につながります。このような誤差に対しては、ロバスト制御の手法を行い、パラメータの不確実性に影響されない状態変化を実現します。例として、量子ビット周波数のドリフトと測定精度の有限性に起因する誤差を軽減します。この誤差は、フラクソニウムのハミルトニアン(3)を $f_q \rightarrow f_q + \delta f_q$ で変更します。この課題を達成するため、サンプリング法、アンセンティッドサンプリング法、微分法の3つのロバスト制御技術を検討する。

A. Sampling Method

サンプリング法は、不確定なパラメータの異なる値で進化した状態の複数のコピーが、同じ目標状態を達成するようにオプティマイザにインセンティブを与えるものである。この手法のバリエーションはQOCの文脈で提案されている[3, 20, 42, 65]。各初期状態に対して、2つのサンプル状態 $|\psi^{\pm} i\rangle$ を拡張状態(5)に追加する。離散ダイナミクス関数は、サンプル状態がフラクソニウムハミルトニア (3) の下で $f_q \rightarrow f_q \pm \sigma_{f_q}$ で進化するように変更され、ハイパーパラメーターとして働く量子ビット周波数の固定標準偏差 σ_{f_q} について。目標状態に対するサンプル状態の不実性を、 $b_k (1 - |\psi_T|^2)$ の形のコスト関数を目的に加えることで罰する (b_k は我々が供給する定数)。この方法では、標準的な直交基底の状態は、初期状態としては不十分な選択である。例えば、フラックスフラストレーション点 ($a_k = 0 \forall k$) でのアイドリングによって達成される $Z/2$ ゲートは、初期状態 $|0i\rangle$ または $|1i\rangle$ では不貞性メトリックがグローバル位相に敏感ではないので量子ビット周波数デチューニングに対して頑健ですが、他の初期状態ではこのゲートは頑健ではありません。したがって、 $\sqrt{4}$ つの初期状態 $\{|0i\rangle, |1i\rangle, (|0i\rangle + |1i\rangle)/\sqrt{2}, (|0i\rangle - |1i\rangle)/\sqrt{2}\}$ を選ぶ [116]、の外積がヒルベルト空間上の作用素に及ぼすものを作用素基底と呼ぶ。

B. Unscented Sampling Method

サンプリング法が目標状態からのサンプル状態の偏差にペナルティを与えるのに対して、アンセンティッドサンプリング法は公称状態からのサンプル状態の偏差にペナルティを与える[68-70]。

したがって、目的に加えるコスト関数は $c_k (\phi_k^j - \phi_k)^T (\phi_k^j - \phi_k)$ という形になり、 c_k は我々が用意した定数となります。 ϕ_k は進化した初期状態（ノミナル状態）、 ϕ_k^j はサンプリング法に似た修正ハミルトニアの下で進化するサンプル状態である。サンプル状態は、パラメーターの不確実性の結果として状態の不確実性をモデル化し、ノミナル状態の n 個の要素上の単峰性分布を符号化するように選択される。この分布の平均と共に分散を時間ステップ間で正確に伝播させるため、あるいは等価的に、TDSE (1) の変換を通して、uncented transform [71, 72] を使用します。サンプリング法とは異なり、アンセンティッドサンプリング法のコスト関数はグローバル位相に敏感である。従って、複数の初期状態を使用した場合の性能向上は観察されない。アンセンティッド変換の詳細な手順は付録Bに記載されている。

C. Derivative Method

微分法は不確定パラメータに対する状態の感度を罰するもので、 1^{th} 次の状態微分 $|\partial_{f_q} \psi\rangle \equiv |\partial_{f_q} \psi_i\rangle$ で表現される。 m^{th} 次微分法では、次数 $1, \dots, m$ のすべての状態微分を拡張された状態に附加する。 m 次導関数法では、各初期状態に対する拡張状態(5)に次数 $1, \dots, m$ の状態導関数をすべて附加する。TDSE (1) に対して順モード微分を行うことで、各時間ステップの状態微分を得る。例えば、 1^{st} - 次微分法の場合のダイナミクスは次のようになる：

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle, \quad (8)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\partial_{f_q} \psi\rangle = H |\partial_{f_q} \psi\rangle + (\partial_{f_q} H) |\psi\rangle. \quad (9)$$

連立ODEを指数積分器で積分する、付録Cを参照。状態 $|\psi\rangle$ は単位ノルムを持つが、状態微分 $|\partial_{f_q} \psi\rangle$ は、非単位ダイナミクス (9) から明らかのように、そうでなくともよい。目的の Q_k 項における同型同値の状態導関数のノルムを、対象の増強状態の対応する要素をゼロに設定することでペナルティを与える (6a)。直感的には、これは不確定パラメータに対する各状態要素の感度をペナルティ化することに相当する。uncentedサンプリング法の場合と同様に、微分法に複数の初期状態を用いた場合の性能向上は観察されない。付録Dに、3つのロバスト制御法の実装の実行時間を示す。

D. Comparison

ロバスト制御技術で得られた $Z/2$ ゲートと解析的 $Z/2$ ゲートについて、静的量子ビット周波数離調によるゲート誤差を調べる。ゲート誤差を計算するために、初期状態をフラクソニウムハミルトニア (3) の下で2回に分けて進化させ、 $f_q \rightarrow f_q + \delta f_q$ の変換を行い、指定した量子ビット周波数のデチューニング δf_q を行った。

the gates, and do not represent a fundamental limit to the optimization methods we have employed.

V. ROBUSTNESS TO STATIC PARAMETER UNCERTAINTY

We have formulated the QOC problem as an *open-loop* optimization problem, i.e., we do not incorporate feedback from the experiment into the optimization. However, the precise device parameters will deviate from the parameters we use in optimization, leading to poor experimental performance. We combat errors of this form using robust control techniques, making the state evolution insensitive to parameter uncertainty. As an example, we mitigate errors arising from the drift and finite measurement precision of the qubit frequency, which modifies the fluxonium Hamiltonian (3) by $f_q \rightarrow f_q + \delta f_q$. We consider three robust control techniques to accomplish this task: a sampling method, an unscented sampling method, and a derivative method.

A. Sampling Method

The sampling method incentivizes the optimizer to ensure that multiple copies of a state, each evolving with a distinct value of the uncertain parameter, achieve the same target state. Variants of this technique have been proposed in the context of QOC [3, 20, 42, 65]. For each initial state, we add two sample states $|\psi^\pm\rangle$ to the augmented state (5). The discrete dynamics function is modified so the sample states evolve under the fluxonium Hamiltonian (3) with $f_q \rightarrow f_q \pm \sigma_{f_q}$ for a fixed standard deviation σ_{f_q} of the qubit frequency, acting as a hyperparameter. We penalize the infidelities of the sample states with respect to the target state by adding a cost function to the objective of the form $\sum_{k,\pm} b_k (1 - |\langle \psi_T | \psi_k^\pm \rangle|^2)$ where b_k is a constant we supply. For this method, the standard orthonormal basis states are an insufficient choice for the initial states. As an example, a $Z/2$ gate achieved by idling at the flux frustration point ($a_k = 0 \forall k$) will be robust to qubit frequency detunings for the initial states $|0\rangle$ or $|1\rangle$ because the infidelity metric is insensitive to global phases, but this gate will not be robust for any other initial states. Therefore, we choose the four initial states $\{|0\rangle, |1\rangle, (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}, (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}\}$ [116], whose outer products span the operators on the Hilbert space, and we refer to them as the operator basis.

B. Unscented Sampling Method

Whereas the sampling method penalizes the deviations of the sample states from the target state, the unscented sampling method penalizes the deviations of the sample states from the nominal state [68–70]. Accordingly,

the cost function we add to the objective takes the form $\sum_{k,j} c_k (\psi_k^j - \psi_k)^T (\psi_k^j - \psi_k)$, where c_k is a constant we supply, ψ_k is the evolved initial state (nominal state), and ψ_k^j is a sample state that evolves under a modified Hamiltonian similar to that in the sampling method. The sample states are chosen to encode a unimodal distribution over the $2n$ elements of the nominal state, modeling the uncertainty in the state as a result of the uncertainty in the parameter. We use the unscented transform [71, 72] to accurately propagate the mean and covariance of this distribution between time steps, or equivalently, through the transformation of the TDSE (1). Unlike the sampling method, the cost function for the unscented sampling method is sensitive to global phases. Accordingly, we do not observe a performance increase when using more than one initial state. A detailed procedure for the unscented transformation is given in Appendix B.

C. Derivative Method

The derivative method penalizes the sensitivity of the state to the uncertain parameter, which is encoded in the l^{th} -order state derivative $|\partial_{f_q}^l \psi\rangle \equiv \partial_{f_q}^l |\psi\rangle$. In the m^{th} -order derivative method, we append all state derivatives of order $1, \dots, m$ to the augmented state (5) for each initial state. We obtain the state derivatives at each time step by performing forward-mode differentiation on the TDSE (1). For example, the dynamics for the 1st-order derivative method are:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle, \quad (8)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\partial_{f_q} \psi\rangle = H |\partial_{f_q} \psi\rangle + (\partial_{f_q} H) |\psi\rangle. \quad (9)$$

We integrate the coupled ODEs with exponential integrators, see Appendix C. While the state $|\psi\rangle$ has unit norm, the state derivatives $|\partial_{f_q}^l \psi\rangle$ need not, as is evident from the non-unitary dynamics (9). We penalize the norms of the isomorphism-equivalent state derivatives in the Q_k term of the objective by setting the corresponding elements of the target augmented state to zero, see (6a). Intuitively, this corresponds to penalizing the sensitivity of each state element to the uncertain parameter. As was the case for the unscented sampling method, we do not observe a performance increase when using more than one initial state for the derivative method. We present the runtimes of our implementations of the three robust control methods in Appendix D.

D. Comparison

We examine the gate errors due to a static qubit frequency detuning for the $Z/2$ gates obtained with the robust control techniques and the analytic $Z/2$ gate. To compute the gate error, an initial state is evolved under

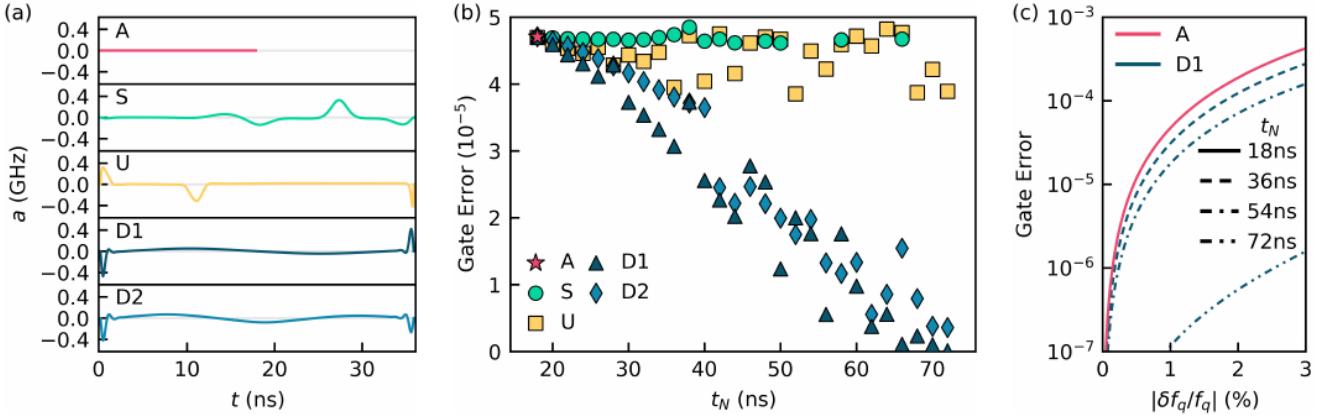


図2. (a) 解析法(A)、サンプリング法(S)、uncented sampling (U)、 1^{st} および 2^{nd} -次微分法(D1, D2)で構築した量子ビット周波数デチューニングに強いZ/2ゲートのフラックスパルスを示す。サンプリング法、アンセンテッドサンプリング法、微分法のフラックスパルスは、解析ゲートのゲート時間の2倍で最適化されていることがわかる。(b) 1パーセントの量子ビット周波数離調におけるシングルゲート誤差をゲート時間の関数として示す。データ点がないものは、ゲート誤差が $5 - 10^{-5}$ より大きいゲートを表しています。(c) 単一ゲート誤差を量子ビット周波数離調の関数として示します。解析的手法と 1^{st} 階微分法のゲート誤差は、ゲート時間が $1/4f_q \approx 18\text{ ns}$ の倍数である場合に示されています。両者のゲート誤差はゲート時間 18 ns で区別がつかなくなる。

ゲートエラーは、1000個の擬似ランダム生成された初期状態のそれぞれについて、2つの変換を平均した進化後の状態と目標状態の不一致度であることを報告する。サンプリング法とアンセンテッドサンプリング法では $\sigma_{f_q} / f_q = 1\%$ とした。解析的ゲートは、フラックスフラストレーション点 $a_k = 0 \forall k$ でのアイドリングに対応し、図2 (a) を参照。ゲート時間 $1/4f_q \approx 18\text{ ns}$ は、デバイス上のZ/2ゲートとしては最短である。ゲートの回転角 $2\pi \delta f_q / 4f_q$ は量子ビット周波数の離調に比例し、ゲート誤差は離調の2乗になる。1%のデチューニング $|\delta f_q / f_q| = 1\%$ では、ゲート誤差は約 $4.7 - 10^{-5}$ であり、量子エラー訂正に十分な値である。サンプリング法では、1パーセントの量子ビット周波数離調におけるゲート誤差は、ゲート時間の範囲内で大きく減少せず、ゲート時間が約 50 ns を超えると $5 - 10^{-5}$ 以上に増加し始める(図2 (b) 参照)。サンプリング法の最適化結果からは、一般的に、一方のサンプル $|\psi^\pm_i|$ では高い忠実度を達成できるが、他方の $|\psi^\mp_i|$ では達成できず、最適化装置が両方の目的を達成することが困難であることを示している。uncentedサンプリング法では、1パーセントの離調におけるゲート誤差はゲート時間に対して大きく減少しないが、最小値 ≈ 3 に達している。 $9 - 10^{-5}$ となり、ラーモア周期の分数付近では、 $2/4f_q \approx 36\text{ ns}$, $3/4f_q \approx 54\text{ ns}$, $4/4f_q \approx 72\text{ ns}$ となる。2つの微分法は、フラックスフラストレーション点付近でアイドル状態になり、境界で速い三角形の動きをする、無香料サンプリング法で生成されるフラックスパルスに似た、質的に似たフラックスパルスに収束します。

両微分法とも、1パーセントの量子ビット周波数離調におけるゲート誤差は、ゲート時間に対して超線形に減少する。 1^{st} 階法では、1パーセントの離調におけるゲート誤差は、ラーモア周期 $1/f_q \approx 72\text{ ns}$ で 10^{-7} に達する(図2 (c) 参照)。この結果は、複合パルスが十分な数のパルスでパラメータの不確かさの誤差を任意のオーダーまで緩和する能力を模倣しています[55]。ハミルトニアンや実験的な制約から、今回研究した問題に対して適切な複合パルスを選択することは困難である。複合パルスと数値計算技術の比較は、今後の研究にとって興味深いテーマとなりうる。さらに、Z型ゲートを任意の時間に実行できることは、量子ビットが異なる周波数を持つ多量量子ビット実験において位相を同期させるために重要である。注目すべきは、ここで研究した解析的ゲートは、 $1/4f_q$ 以外のゲート時間には拡張できないことである。図2(b)を見ると、 $1/4f_q$ 以上のすべてのゲート時間で、数値計算によるゲートを見つけることができるがわかります。これらの数値手法は、多量ビット実験の同期に有効なスキームを提供するものである。

VI. ROBUSTNESS TO TIME-DEPENDENT PARAMETER UNCERTAINTY

さらに、実験誤差の原因として、時間依存のパラメータの不確かさがある。多くのフラックスバイアス超電導回路素子や誘導結合超電導回路素子では、磁束ノイズがコヒーレント誤差の主な原因となっている[117-120]。磁束ノイズは、フラクソニウムのハミルトニアン(3)を $a(t) \rightarrow a(t) + \delta a(t)$ ($\delta a(t)$ は磁束ノイズ)で変化させる。フ

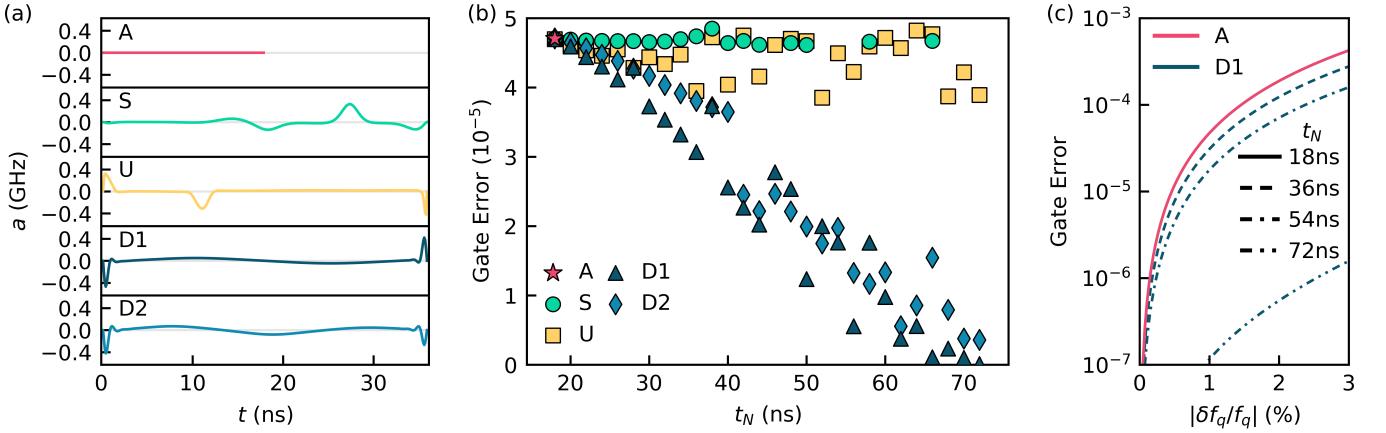


FIG. 2. (a) Flux pulses for $Z/2$ gates robust to qubit frequency detunings constructed with the analytic (A), sampling (S), unscented sampling (U), and the 1st- and 2nd-order derivative methods (D1, D2). The flux pulses shown for the sampling, unscented sampling, and derivative methods are optimized for twice the gate time of the analytic gate. (b) Single-gate error at a one-percent qubit frequency detuning as a function of the gate time. Missing data points represent gates with a gate error greater than $5 \cdot 10^{-5}$. (c) Single-gate error as a function of the qubit frequency detuning. The gate errors for the analytic and 1st-order derivative methods are shown for gate times which are multiples of $1/4f_q \sim 18\text{ns}$. The gate errors for the two methods are indistinguishable at the gate time 18ns.

the fluxonium Hamiltonian (3) two separate times with the transformations $f_q \rightarrow f_q \pm \delta f_q$ at the stated qubit frequency detuning δf_q . The reported gate error is the infidelity of the evolved state and the target state averaged over the two transformations for each of 1000 pseudorandomly generated initial states. We set $\sigma_{f_q}/f_q = 1\%$ for the sampling and unscented sampling methods.

The analytic gate corresponds to idling at the flux frustration point $a_k = 0 \forall k$, see Fig. 2(a). Its gate time $1/4f_q \sim 18\text{ns}$ is the shortest possible for a $Z/2$ gate on the device. The gate's erroneous rotation angle $2\pi\delta f_q/4f_q$ is linear in the qubit frequency detuning, resulting in a gate error that is quadratic in the detuning. At a one-percent detuning $|\delta f_q/f_q| = 1\%$, the gate error is $\sim 4.7 \cdot 10^{-5}$, which is sufficient for quantum error correction.

For the sampling method, the gate error at a one-percent qubit frequency detuning does not decrease substantially over the range of gate times, and begins to increase above $5 \cdot 10^{-5}$ for gate times greater than $\sim 50\text{ns}$, see Fig. 2(b). Optimization results for the sampling method reveal that it is typically able to achieve a high fidelity for one sample $|\psi^\pm\rangle$, but not the other $|\psi^\mp\rangle$, indicating that it is difficult for the optimizer to make progress on both objectives. For the unscented sampling method, the gate error at a one-percent detuning does not decrease substantially over the gate times, but it does reach a minimum of $\sim 3.9 \cdot 10^{-5}$ near fractions of the Larmor period: $2/4f_q \sim 36\text{ns}$, $3/4f_q \sim 54\text{ns}$, and $4/4f_q \sim 72\text{ns}$.

The two derivative methods converge on qualitatively similar flux pulses that idle near the flux frustration point and use fast triangle movements at the boundaries, similar to the flux pulse produced by the unscented sampling

method. For both derivative methods, the gate error at a one-percent qubit frequency detuning decreases super-linearly in the gate time. For the 1st-order method, the gate error at a one-percent detuning reaches 10^{-7} at the Larmor period $1/f_q \sim 72\text{ns}$, see Fig. 2(c). This result mimics the ability of composite pulses to mitigate parameter uncertainty errors to arbitrary order with sufficiently many pulses [55]. It is difficult to choose an appropriate composite pulse for the problem studied here due to our Hamiltonian and experimental constraints. A comparison between composite pulses and numerical techniques could be an interesting topic for future study.

Furthermore, the ability to perform Z -type gates in any given time is critical for synchronizing phases in multi-qubit experiments, where the qubits have distinct frequencies. Notably, the analytic gate studied here cannot be extended to gate times other than $1/4f_q$. We can find gates using the numerical methods at all gate times at and above $1/4f_q$, see Fig. 2(b). These numerical methods offer an effective scheme for synchronizing multi-qubit experiments.

VI. ROBUSTNESS TO TIME-DEPENDENT PARAMETER UNCERTAINTY

An additional source of experimental error arises from time-dependent parameter uncertainty. For many flux-biased and inductively-coupled superconducting circuit elements, magnetic flux noise is the dominant source of coherent errors [117–120]. Flux noise modifies the fluxonium Hamiltonian (3) by $a(t) \rightarrow a(t) + \delta a(t)$ where $\delta a(t)$ is the flux noise. The spectral density of flux noise is ob-

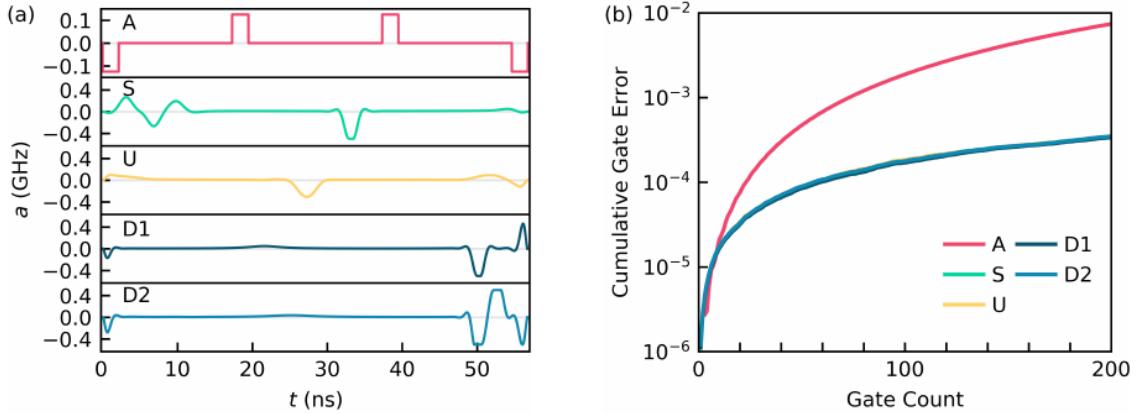


図3. (a) 解析法(A)、サンプリング法(S)、uncented sampling(U)、 1^{st} および 2^{nd} 次微分法(D1、D2)で構築したフラックス雑音に強いX／2ゲートのフラックスパルスを示す。(b) 連続したゲートアプリケーションの $1/f$ フラックスノイズによる累積ゲートエラー。サンプリング、アンセンティッドサンプリングの累積ゲート誤差、

and the derivative methods are indistinguishable.

ックスノイズのスペクトル密度は $1/f$ 分布に従うとされており [73, 117–122]、ノイズは低周波成分によって支配されている。ここで考える解析ゲートは、この低周波特性を利用し、ノイズを準静的なものとして扱い、誤ったドリフトを補償するスピニエコー法の一般化を行うものである [123, 124]。

前節で紹介したロバスト制御技術を $1/f$ 磁束ノイズに対応するように修正する。アンセントサンプリング法は、サンプル状態が $1/f$ フラックスノイズにさらされるように修正されている。このノイズは、標準的な正規分布からサンプリングしたホワイトノイズを有限インパルス応答フィルタ[125]でフィルタリングすることで生成されます。このノイズは、我々のデバイスのフラックスノイズ振幅 $A_\Phi = 5.21 \mu \Phi_0 \Rightarrow \sigma_a = 2.5 - 10^{-5} \text{ GHz}$ でスケーリングされます。原理的にはサンプリング方法を同様に変更することができますが、ここでは比較のためにサンプル状態に静的ノイズ $a(t) \rightarrow a(t) \pm \sigma_a$ をかけることにしました。微分法は静的な場合からアルゴリズムの変更は必要ないが、TDSEは(9)のように f_q の代わりに $a(t)$ に関して微分するようになった。

ロバスト制御技術で構築したX／2ゲートと解析的X／2ゲートについて、 $1/f$ フラックスノイズによるゲート誤差を解析する。ゲート誤差を計算するために、フラックスソニウムハミルトニアン(3)のもとで、最適化されたフラックス $a(t) \rightarrow a(t) + \delta a(t)$ を修正した初期状態を展開する。フラックスノイズは、uncented sampling法で説明したように生成します。報告されたゲートエラーは、1000個の擬似ランダムに生成された初期状態を平均した不忠実度であり、それぞれの初期状態は、異なる擬似ランダムに生成されたフラックスノイズのインスタンスにさらされる。干渉するコヒーレントエラーの影響を観察するため、各手法で構築したゲートを連続して適用するシミュレーションを行い、適用後の累積ゲートエラーを計算しました(図3参照)。解析的ゲートと数値ゲートの両方が、量子エラー訂正に十分なシングルゲート誤差をもたらします。

数値ゲートは質的に異なる解に収束するにもかかわらず、連結ゲートの適用比較では同様の結果を得ることができました。 $11 \mu\text{s}$ のゲート印加を200回行った後のゲート誤差は、解析ゲートのゲート誤差より2桁小さい。 $1/f$ フラックスノイズは、NISQアプリケーションにおけるコヒーレントエラーの重要な原因であり、これらの数値計算技術は、それを軽減する効果的な手段を提供します。

VII. CONCLUSION

量子最適制御の文脈で最先端の軌道最適化技術を導入し、制御場と量子状態に関する複数の制約に対して厳しい許容範囲を達成することを可能にしました。これらの機能を用いて、超伝導フラクソニウム量子ビットのデコヒーレンスを緩和し、パラメータの不確実性誤差に対する頑健性を達成した。時間最適制御と統合脱分極率モデルにより脱分極を抑制する方式を提案した。このモデルを評価する計算量はヒルベルト空間の次元に依存しないため、高次元量子系に対して安価に最適化を行うことが可能である。また、研究した静的パラメータ不確かさ問題に対して、ゲート時間で超線形ゲートエラー削減を達成するロバスト制御のための微分法を提案しました。さらに、微分法、サンプリング法、アンセンティッドサンプリング法により、磁束制御量子ビットのコヒーレント誤差を支配する $1/f$ 磁束ノイズ誤差を軽減できることを明らかにした。これらのロバスト制御技術は、あらゆるハミルトニアインに適用可能であり、あらゆる分野の実験者が量子システムのロバスト操作を設計できるようになります。さらに、フォールトトレラントな量子コンピュータアプリケーションに必要な低ゲートエラーを実現するために使用することができます。

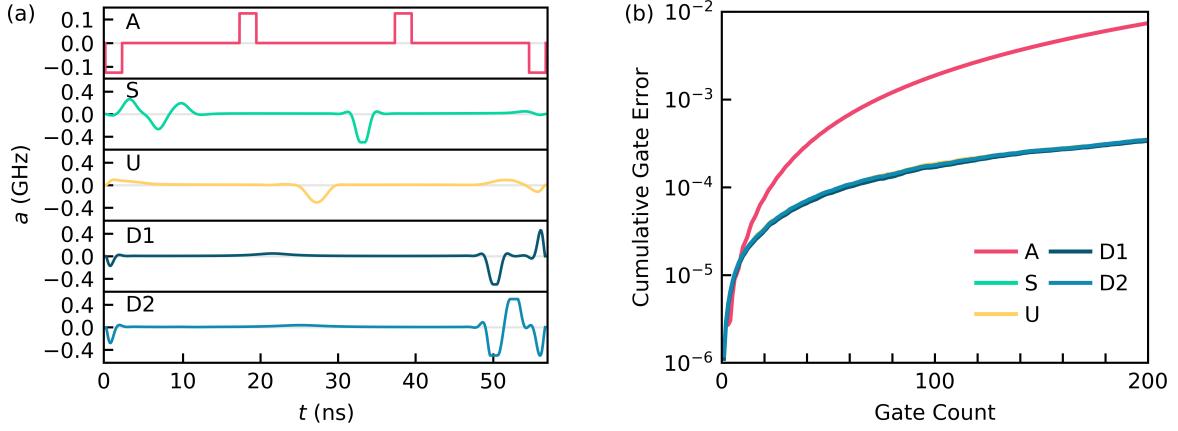


FIG. 3. (a) Flux pulses for $X/2$ gates robust to flux noise constructed with the analytic (A), sampling (S), unscented sampling (U), and the 1st- and 2nd-order derivative methods (D1, D2). (b) Cumulative gate error due to $1/f$ flux noise for successive gate applications. The cumulative gate errors for the sampling, unscented sampling, and the derivative methods are indistinguishable.

served to follow a $1/f$ distribution [73, 117–122], so the noise is dominated by low-frequency components. The analytic gate considered here takes advantage of the low-frequency characteristic and treats the noise as quasi-static, performing a generalization of the spin-echo technique to compensate for erroneous drift [123, 124].

We modify the robust control techniques presented in the previous section to combat $1/f$ flux noise. The unscented sampling method is modified so that the sample states are subject to $1/f$ flux noise. The noise is generated by filtering white noise sampled from a standard normal distribution with a finite impulse response filter [125]. The noise is then scaled by the flux noise amplitude of our device $A_\Phi = 5.21\mu\Phi_0 \implies \sigma_a = 2.5 \cdot 10^{-5}\text{GHz}$. In principle, we could modify the sampling method similarly; however, we choose to subject the sample states to static noise $a(t) \rightarrow a(t) \pm \sigma_a$ for comparison. The derivative methods require no algorithmic modification from the static case, but the TDSE is now differentiated with respect to $a(t)$ instead of f_q as in (9).

We analyze the gate errors due to $1/f$ flux noise for the $X/2$ gates constructed with the robust control techniques and the analytic $X/2$ gate. To compute the gate error, we evolve an initial state under the fluxonium Hamiltonian (3) where the optimized flux is modified $a(t) \rightarrow a(t) + \delta a(t)$. We generate the flux noise as we described for the unscented sampling method. The reported gate error is the infidelity averaged over 1000 pseudorandomly generated initial states, each of which is subject to a distinct pseudorandomly generated flux noise instance. To observe the effect of interfering coherent errors, we simulate successive applications of the gate constructed by each method; we compute the cumulative gate error after each application, see Fig. 3. Both the analytic and numerical gates yield single-gate errors sufficient for quantum error correction. Despite converging

on qualitatively different solutions, the numerical gates perform similarly in the concatenated gate application comparison. Their gate errors after 200 gate applications $\sim 11\mu\text{s}$ are two orders of magnitude less than the gate error produced by the analytic gate. $1/f$ flux noise is a significant source of coherent errors in NISQ applications, and these numerical techniques offer effective avenues to mitigate it.

VII. CONCLUSION

We have introduced state-of-the-art trajectory optimization techniques in the context of quantum optimal control, enabling us to achieve tight tolerances for multiple constraints on the control fields and quantum states. Using these capabilities, we have mitigated decoherence and achieved robustness to parameter uncertainty errors on a superconducting fluxonium qubit. We have proposed a scheme for suppressing depolarization with time-optimal control and the integrated depolarization rate model. The computational complexity of evaluating this model is independent of the dimension of the Hilbert space, enabling inexpensive optimization on high-dimensional quantum systems. We have also proposed the derivative method for robust control which achieves superlinear gate error reductions in the gate time for the static parameter uncertainty problem we studied. We have shown that the derivative, sampling, and unscented sampling methods can mitigate $1/f$ flux noise errors – which dominate coherent errors for flux controlled qubits. These robust control techniques can be applied to any Hamiltonian, allowing experimentalists in all domains to engineer robust operations on their quantum systems. Furthermore, they can be used to achieve the low gate errors required for fault-tolerant

なお、本技術の実装は <https://github.com/SchusterLab/rbqoc> で公開されています。

ACKNOWLEDGMENTS

実験に協力してくれた Helin Zhang、有益な議論をしてくれた Taylor Howell, Tanay Roy, Colm Ryan, Daniel Weiss に感謝する。この作業は、以下のような多くのオープンソースソフトウェアプロジェクトによって実現されました。これらに限定されません： DifferentialEquations.jl [126], Distributions.jl [127], ForwardDiff.jl [128], Matplotlib [129], NumPy [130], TrajectoryOptimization.jl [74], and Zygote.jl [131]。この研究は、EPiQC, an NSF Expedition in Computing, under grant CCF-1730449から一部資金援助を受けています。この研究は、助成金番号W911NF1910016のもと、陸軍研究所の支援を受けた。

Appendix A: Depolarization

脱分極の指標についてコメントし、次に Lindblad マスター方程式を積分する手順を示す。積分された脱分極率と脱分極によるゲート誤差を、第 IV 章で説明した数値実験について表 I で比較する。解析的手法でメトリクス上に得られた値と数値的手法で得られた値の比は、2つのメトリクス間で同様である。

Gate	D_{1A} (10^{-5})	D_{1N} (10^{-5})	D_{1A} $\frac{D_{1A}}{D_{1N}}$	GE _A (10^{-5})	GE _N (10^{-5})	GE _A $\frac{GE_A}{GE_N}$
Z/2	5.745	1.149	5.000	0.888	0.185	4.791
Y/2	5.253	1.157	4.540	0.770	0.186	4.132
X/2	16.251	2.660	6.109	2.674	0.432	6.200

表 I. シングルゲート積分脱分極率($D_{1\pm}$)と脱分極によるシングルゲート誤差(GE)。数値は解析的(A)と数値的(B)について報告されている。

(N) gates.

脱分極によるゲート誤差を計算するために、リンドブラッド・マスター方程式を採用しています。この方程式は次のような形をしています：

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_i \gamma_i(L_i\rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\}), \quad (\text{A1})$$

脱分極は $\gamma_\pm = T_\pm^{-1}$, $L_\pm = \sigma^\pm \equiv (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ 。ここで、 T_1 は図 1(b)に示すスプラインから各時間ステップで得られるものである。このスプラインの T_1 値は、所望のフラックスバイアスで量子ビットを駆動し、その結果生じる減衰をモニターすることで得られます。これらの測定の詳細については、文献[73]を参照してください。[73]。 T_1 はフラックスに依存するため、減衰率 γ_\pm も同じです。

マスター方程式を時間依存の崩壊率で積分することで、実験においてゲートがどのように機能するかを発見することができます。この方法は、崩壊率が緩和時間の時間スケールで大きく変化する場合、厳密には正しくない可能性がある（これが今回の実験領域である）。Lindblad マスター方程式の標準的な導出は、時間依存の減衰率を考慮していない[132]。将来的には、この領域をより詳細に扱うことで、デコヒーレンシが制御パラメータに強く依存する量子コンピューティングプラットフォームの新たな知見を得ることができるでしょう。指数関数積分器を使用するために、ベクトル (Choi-Jamiolkowski) 同型性[133]を採用しています。

$$\frac{d}{dt}\text{vec}(\rho) = \hat{\mathcal{L}}\text{vec}(\rho), \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & -i(\mathbb{1} \otimes H - H^T \otimes \mathbb{1}) \\ & + \sum_i \gamma_i(L_i^* \otimes L_i - \frac{1}{2}(\mathbb{1} \otimes L_i^\dagger L_i - L_i^T L_i^* \otimes \mathbb{1})), \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

ここで、 $\rho =_{i,j}^P \alpha_{ij} |ii\rangle\langle hj|$ と $\text{vec}(\rho) =_{i,j}^P \alpha_{ij} |ii\rangle\otimes|ji\rangle$ 。数値離散化によりフラックスが時間ステップ間で一定であるため、ハミルトニアンと減衰率も時間ステップ間で一定となる。従って、(A2)の厳密解は

$$\text{vec}(\rho_{k+1}) = \exp(\Delta t_k \hat{\mathcal{L}}_k) \text{vec}(\rho_k). \quad (\text{A4})$$

ベクトル同型は、 $(n \times n) \times (n \times n)$ の行列-行列の乗算を $(n^2 \times n^2)$ の行列-ベクトルの乗算に変換する。nが小さい場合、ベクトル化されていない方程式に対してルンゲクッタを行うよりも、ベクトル化された方程式に対して指数積分器を使用する方が速いことがわかります。後者は精度を保つために区間 Δt_k を小さくする必要があり、結果的にタイムステップ数が多くなる。

付録 B: 無香料サンプリング法

本節では、完全なアンセンテッドサンプリング手順を概説する。状態 $\psi \in \mathbb{R}^{2n}$ 、不確実なパラメータセット $\lambda \in \mathbb{R}^d$ 、離散ダイナミクス $\psi_{k+1} = f(\psi_k, \lambda_k)$ を考慮する。公称初期状態は次式で与えられる。

ψ_1 with an associated covariance matrix $P_1 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ which describes the uncertainty in the initial state. We use ψ_1 is real, symmetric, and positive definite $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ matrix collection to represent $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$. 正定値の要件により、状態準備の誤差が無視できる場合でも、 P_1 は非ゼロでなければならない。不確かなパラメータはゼロ平均を持ち、その分布は時間ステップ k における共分散行列 $P_k \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ で与えられる。ゼロ平均の仮定は更新手順を導き出すのに便利である。ゼロでない平均は離散ダイナミクス関数 $f(\psi_k, \lambda_k)$ に符号化することができる。初期 $4n + 2d$ のサンプル状態と初期 $4n + 2d$ の不確定パラメータは初期 distri -からサンプルされる。

quantum computing applications. Our implementations of the techniques described in this work are available at <https://github.com/SchusterLab/rbqoc>.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Helin Zhang for experimental assistance and Taylor Howell, Tanay Roy, Colm Ryan, and Daniel Weiss for useful discussions. This work was made possible by many open source software projects, including but not limited to: DifferentialEquations.jl [126], Distributions.jl [127], ForwardDiff.jl [128], Matplotlib [129], NumPy [130], TrajectoryOptimization.jl [74], and Zygote.jl [131]. This work is funded in part by EPiQC, an NSF Expedition in Computing, under grant CCF-1730449. This work was supported by the Army Research Office under Grant No. W911NF1910016.

Appendix A: Depolarization

We comment on the depolarization metrics and then give our procedure for integrating the Lindblad master equation. The integrated depolarization rate and the gate error due to depolarization are compared in Table I for the numerical experiment described in Sec. IV. The ratio of the value obtained on the metric with the analytic technique to the value obtained with the numerical technique is similar across the two metrics.

Gate	D_{1A} (10^{-5})	D_{1N} (10^{-5})	$\frac{D_{1A}}{D_{1N}}$	GE_A (10^{-5})	GE_N (10^{-5})	$\frac{GE_A}{GE_N}$
Z/2	5.745	1.149	5.000	0.888	0.185	4.791
Y/2	5.253	1.157	4.540	0.770	0.186	4.132
X/2	16.251	2.660	6.109	2.674	0.432	6.200

TABLE I. Single-gate integrated depolarization rate (D_1) and single-gate error due to depolarization (GE). Values are reported for the analytic (A) and numerical (N) gates.

We employ the Lindblad master equation to compute the gate error due to depolarization. This equation takes the form:

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_i \gamma_i (L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\}), \quad (\text{A1})$$

For depolarization, $\gamma_\pm = T_\pm^{-1}$, $L_\pm = \sigma^\pm \equiv (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$. Our device operates in the regime where $hf \ll k_B T$ such that $T_+ = T_- = 2T_1$, where T_1 is obtained at each time step from the spline shown in Fig. 1(b). We obtain the T_1 values in this spline by driving the qubit at the desired flux bias and monitoring the resultant decay. For more details on these measurements, consult Ref. [73]. Because T_1 depends on the flux, so do the decay rates γ_\pm .

Integrating the master equation with time-dependent decay rates provides a heuristic for how gates might perform in the experiment. This procedure may not be strictly correct when decay rates change significantly on the time scale of the relaxation time, which is the regime we are operating in. Standard derivations of the Lindblad master equation do not account for time-dependent decay rates [132]. A more thorough treatment of this regime in future work would unlock new insights for quantum computing platforms where decoherence is strongly dependent on the control parameters.

In order to use exponential integrators, we employ the vector (Choi-Jamiolkowski) isomorphism [133],

$$\frac{d}{dt} \text{vec}(\rho) = \hat{\mathcal{L}} \text{vec}(\rho), \quad (\text{A2})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & -i(\mathbb{1} \otimes H - H^T \otimes \mathbb{1}) \\ & + \sum_i \gamma_i (L_i^* \otimes L_i - \frac{1}{2}(\mathbb{1} \otimes L_i^\dagger L_i - L_i^T L_i^* \otimes \mathbb{1})), \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

where $\rho = \sum_{i,j} \alpha_{ij} |i\rangle \langle j|$ and $\text{vec}(\rho) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$. Because the flux is constant between time steps due to our numerical discretization, the Hamiltonian and decay rates are also constant between time steps. Therefore, the exact solution to (A2) is,

$$\text{vec}(\rho_{k+1}) = \exp(\Delta t_k \hat{\mathcal{L}}_k) \text{vec}(\rho_k). \quad (\text{A4})$$

The vector isomorphism transforms $(n \times n) \times (n \times n)$ matrix-matrix multiplications to $(n^2 \times n^2) \times n^2$ matrix-vector multiplications. For small n , we find that it is faster to use an exponential integrator on the vectorized equation than to perform Runge-Kutta on the unvectorized equation. The latter requires decreasing the interval Δt_k to maintain accuracy, resulting in more time steps.

Appendix B: Unscented Sampling Method

In this section, we outline the full unscented sampling procedure. We consider a state $\psi \in \mathbb{R}^{2n}$, an uncertain set of parameters $\lambda \in \mathbb{R}^d$, and discrete dynamics $\psi_{k+1} = f(\psi_k, \lambda_k)$. The nominal initial state is given by ψ_1 with an associated covariance matrix $P_1 \in \mathbb{S}_{++}^{2n}$ which describes the uncertainty in the initial state. We use the notation \mathbb{S}_{++}^m to denote the set of real, symmetric, and positive-definite $m \times m$ matrices. By the positive-definite requirement, P_1 must be non-zero even if the state-preparation error is negligible. The uncertain parameter has zero-mean and its distribution is given by the covariance matrix $L_k \in \mathbb{S}_{++}^d$ at time step k . The zero-mean assumption is convenient for deriving the update procedure. A non-zero mean can be encoded in the discrete dynamics function $f(\psi_k, \lambda_k)$.

The initial $4n + 2d$ sample states and initial $4n + 2d$ uncertain parameters are sampled from the initial distri-

butions,

$$\begin{pmatrix} \psi_1^j \\ \lambda_1^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \beta \sqrt{\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}^j}. \quad (\text{B1})$$

ここで、 β は共分散輪郭の間隔を制御するハイパーパラメータである。 $j \in \{1, \dots, 2n + d\}$ の場合は $(+)$ 、 $j \in \{2n + d + 1, \dots, 4n + 2d\}$ と理解する。ここでは、コレスキーフィルタを使用して共同共分散行列の平方根を計算しますが、主平方根などの他の方法を採用することもできます。行列の平方根の上付き文字は、下三角コレスキーフィルタの j^{th} 列 ($\bmod 2n + d$) を示しています。次に、サンプルの状態を正規化する。

$$\psi_1^j \rightarrow \frac{\psi_1^j}{\sqrt{\psi_1^{jT} \psi_1^j}}. \quad (\text{B2})$$

サンプルの状態は次の時間ステップに伝搬されます、

$$\psi_2^j = f(\psi_1^j, \lambda_1^j). \quad (\text{B3})$$

サンプル状態の平均と共に分散が計算されます、

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{4n + 2d} \sum_{j=1}^{4n+2d} \psi_2^j, \quad (\text{B4})$$

$$P_2 = \frac{1}{2\beta^2} \sum_{j=1}^{4n+2d} (\psi_2^j - \bar{\psi}_2)(\psi_2^j - \bar{\psi}_2)^T. \quad (\text{B5})$$

そして、(B1)、(B2)、(B3)を用いてサンプル状態をリサンプリングし、次の時間ステップに伝搬させます。サンプル状態（シグマポイント）の選択は、文献[71]の式11に従います。[71]より少ないシグマポイントを必要とする処方箋も存在する[134]。

Appendix C: Derivative Method

ここでは、微分法のダイナミクスを指数積分器を用いて効率的に積分する方法を概説する。一般的な指数関数積分器は、ダイナミクスを線形項と非線形項に分解する。例えば、1次状態微分のダイナミクスは次のようになる、

$$\frac{d}{dt} |\partial_\lambda \psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\partial_\lambda \psi\rangle - \frac{i}{\hbar} (\partial_\lambda H) |\psi\rangle. \quad (\text{C1})$$

線形項は $L = -iH$ 、非線形項～は $N = -i(\partial_\lambda H) |\psi\rangle$ です。区分的定数制御で、～は

the exact solution to (C1) is,

$$|\partial_\lambda \psi_{k+1}\rangle = \exp(\Delta t_k L_k) |\partial_\lambda \psi_k\rangle + \int_0^{\Delta t_k} \exp((\Delta t_k - t') L_k) N(t_k + t') dt'. \quad (\text{C2})$$

一般的な指数関数積分器は、(C2)の積分を離散和に分解することで進行し、ルンゲクッタスキームの手順と同様です。ここでは、ローソン・オイラー法[82]として知られる簡単な近似法を使用します、

$$|\partial_\lambda \psi_{k+1}\rangle \approx \exp(\Delta t_k L_k) |\partial_\lambda \psi_k\rangle + \exp(\Delta t_k L_k) N_k \Delta t_k. \quad (\text{C3})$$

この方法は、精度と効率のトレードオフがうまくいっており、1ステージにつき1回の行列指数計算が必要です。状態微分の積分精度は、ロバスト性コスト関数に使用されるため、最重要視されることはありません。

Appendix D: Computational Performance

このセクションでは、我々の最適化のランタイムを示します。Z/2ゲートのゲートタイムが $1/4f_q \sim 18\text{ns}$ の倍数である場合の、第III節の基本最適化、第IV節の脱分極最適化、第V節の堅牢最適化のランタイムは、表IIに示されています。AMD Ryzen Threadripper 3970X 32-Core Processor @ 3.7 GHz のシングルコアで最適化を実行しました。今後の課題として、GPU [17]を用いてロバストネス手法を並列化し、高次元ヒルベルト空間での高速な最適化を可能にする。

Method \ t_N(ns)	18	36	72
Base	0.155 ± 0.008	7.0 ± 0.4	15.9 ± 0.8
Depol.	1.69 ± 0.08	-	-
S	1.77 ± 0.09	48 ± 2	280 ± 10
U	75 ± 4	340 ± 20	400 ± 20
D1	6.1 ± 0.3	27 ± 1	65 ± 3
D2	15.7 ± 0.8	17.3 ± 0.9	54 ± 3

表II. ベース、脱分極、サンプリング (S)、uncented sampling (U)、1stおよび2nd次を用いたZ/2最適化の平均ランタイム (秒)。

derivative methods (D1, D2).

[1] L. M. K. Vandersypen and I. L. Chuang, NMR techniques for quantum control and computation, Rev. Mod.

Phys. 76, 1037 (2005)

butions,

$$\begin{pmatrix} \psi_1^j \\ \chi_1^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm \beta \sqrt{\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}}^j. \quad (\text{B1})$$

Here, β is a hyperparameter that controls the spacing of the covariance contour. The (\pm) is understood to take $(+)$ for $j \in \{1, \dots, 2n + d\}$ and $(-)$ for $j \in \{2n + d + 1, \dots, 4n + 2d\}$. We use the Cholesky factorization to compute the square root of the joint covariance matrix, though other methods such as the principal square root may be employed. The superscript on the matrix square root indicates the j^{th} column ($\bmod 2n + d$) of the lower triangular Cholesky factor. Then, the sample states are normalized,

$$\psi_1^j \rightarrow \frac{\psi_1^j}{\sqrt{\psi_1^{jT} \psi_1^j}}. \quad (\text{B2})$$

The sample states are propagated to the next time step,

$$\psi_2^j = f(\psi_1^j, \lambda_1^j). \quad (\text{B3})$$

The mean and covariance of the sample states are computed,

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{4n+2d} \sum_{j=1}^{4n+2d} \psi_2^j, \quad (\text{B4})$$

$$P_2 = \frac{1}{2\beta^2} \sum_{j=1}^{4n+2d} (\psi_2^j - \bar{\psi}_2)(\psi_2^j - \bar{\psi}_2)^T. \quad (\text{B5})$$

The sample states are then resampled and propagated to the next time step using (B1), (B2), and (B3). Our choice of sample states (sigma points) follows equation 11 of Ref. [71]. Prescriptions that require fewer sigma points exist [134].

Appendix C: Derivative Method

Here, we outline how to efficiently integrate the dynamics for the derivative method using exponential integrators. General exponential integrators break the dynamics into a linear term and a non-linear term. For example, the dynamics for the first state derivative are,

$$\frac{d}{dt} |\partial_\lambda \psi\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\partial_\lambda \psi\rangle - \frac{i}{\hbar} (\partial_\lambda H) |\psi\rangle. \quad (\text{C1})$$

The linear term is $L = -\frac{i}{\hbar}H$ and the non-linear term is $N = -\frac{i}{\hbar}(\partial_\lambda H)|\psi\rangle$. With piecewise-constant controls,

the exact solution to (C1) is,

$$|\partial_\lambda \psi_{k+1}\rangle = \exp(\Delta t_k L_k) |\partial_\lambda \psi_k\rangle + \int_0^{\Delta t_k} \exp\left((\Delta t_k - t') L_k\right) N(t_k + t') dt'. \quad (\text{C2})$$

General exponential integrators proceed by breaking the integral in (C2) into a discrete sum, similar to the procedure for Runge-Kutta schemes. We use a simple approximation known as the Lawson-Euler method [82],

$$|\partial_\lambda \psi_{k+1}\rangle \approx \exp(\Delta t_k L_k) |\partial_\lambda \psi_k\rangle + \exp(\Delta t_k L_k) N_k \Delta t_k. \quad (\text{C3})$$

This method provides a good tradeoff between accuracy and efficiency, requiring one unique matrix exponential computation per stage. Integration accuracy for the state derivatives is not of the utmost importance because they are used in the robustness cost function – as opposed to the states themselves which are experimental parameters that must be realized with high accuracy.

Appendix D: Computational Performance

In this section we provide runtimes for our optimizations. The runtimes for the base optimization in Sec. III, the depolarization optimization in Sec. IV, and the robust optimizations in Sec. V are presented in Table II for a $Z/2$ gate at gate times which are multiples of $1/4f_q \sim 18\text{ns}$. We performed optimizations on a single core of an AMD Ryzen Threadripper 3970X 32-Core Processor @ 3.7 GHz. Future work will parallelize the robustness methods using GPUs [17], which will enable fast optimizations on high-dimensional Hilbert spaces.

Method	$t_N(\text{ns})$	18	36	72
Base	0.155 ± 0.008	7.0 ± 0.4	15.9 ± 0.8	
Depol.	1.69 ± 0.08	-	-	
S	1.77 ± 0.09	48 ± 2	280 ± 10	
U	75 ± 4	340 ± 20	400 ± 20	
D1	6.1 ± 0.3	27 ± 1	65 ± 3	
D2	15.7 ± 0.8	17.3 ± 0.9	54 ± 3	

TABLE II. Average runtimes in seconds for $Z/2$ optimizations using the base, depolarization, sampling (S), unscented sampling (U), and the 1st- and 2nd-order derivative methods (D1, D2).

[1] L. M. K. Vandersypen and I. L. Chuang, NMR techniques for quantum control and computation, Rev. Mod.

Phys. **76**, 1037 (2005).

- [2] C. T. Kehlet, A. C. Sivertsen, M. Bjerring, T. O. Reiss, N. Khaneja, S. J. Glaser, and N. C. Nielsen, Improving Solid-State NMR Dipolar Recoupling by Optimal Control, *J. Am. Chem. Soc.* 126, 10202 (2004). (3)N.カネヤ、T.ライス、C.ケレット、T.シュルテヘルブリュッゲン、S.J.グレーザー、結合スピンドライナミックスの最適制御：勾配上昇アルゴリズムによるNMRパルス配列のデザイン、*J. Magn. Reson.* 172, 296 (2005). [4] I. I. (4)マキシモフ、Z.トシュナー、N.C.ニールセン、単調収束アルゴリズムによるNMRおよび動的核偏光実験の最適制御設計、*J. Chem. Phys.* 128, 184505 (2008). [5] N. C. Nielsen, C. Kehlet, S. J. Glaser, and N. Khaneja, Optimal Control Methods in NMR Spectroscopy, in eMagRes (American Cancer Society, 2010). [6] T. E. Skinner, T. O. Reiss, B. Luy, N. Khaneja, and S. J. Glaser, Application of optimal control theory to the design of broadband excitation pulses for high-resolution NMR, *J. Magn. Reson.* 163, 8 (2003). [7] Z. Tošner, T. Vosegaard, C. Kehlet, N. K. haneja, S. J. Glaser, and N. C. Nielsen, Optimal control in NMR spectroscopy : SIMPSONにおける数値的な実装、*J. Magn. Reson.* 197, 120 (2009). [8] M. Abdelhafez, B. Baker, A. Gyenis, P. Mundada, A. A. Houck, D. Schuster, and J. Koch, Universal gates for protected superconducting qubits using optimal control, *Phys. Rev. A* 101, 022321 (2020). [9] S.チャクラム、K.ヘ、A.V.ディキシット、A.E.オリアニ、R.K.ナイク、N.レオン、クォン、マ、ジャン、シュスター、マルチモード光子遮断 (2020), arXiv:2010.15292 [quant-ph]. [10] D. J. Egger and F. K. Wilhelm, Optimized controlled-Z gates for two superconducting qubits coupled through a resonator, *Supercond. Sci. Technol.* 27, 014001 (2013). [11] R. Fisher, F. Helmer, S. J. Glaser, F. Marquardt, and T. Schulte-Herbrüggen, Optimal control of circuit quantum electrodynamics in one and two dimensions, *Phys. Rev. B* 81, 085328 (2010). [12] P. Gokhale, Y. Ding, T. Propson, C. Winkler, N. Leung, Y. Shi, D. I. Schuster, H. Hoffmann, and F. T. Chong, Partial Compilation of Variational Algorithms for Noisy Intermediate-Scale Quantum Machines, in Proceedings of the 52nd Annual IEEE/ACM International Symposium on Microarchitecture (2019) pp. 266–278. [13] S.-Y. HuangとH.-S. Goan, Optimal control for fast and high-fidelity quantum gates in coupled superconducting flux qubits , *Phys. Rev. A* 90, 012318 (2014). [14] R. W. Heeres, P. Reinhold, N. Ofek, L. Frunzio, L. Jiang, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, Implementing a universal gate set on a logical qubit encoded in an oscillator, *Nat. Commun.* 8, 1 (2017). [15] J. Kelly, R. Barends, B. Campbell, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, A. G. Fowler, I.-C. Hoi, E. Jeffrey, A. Megrant, J. Mutus, C. Neill, P. J. O’Malley, C. Quintana, P. Roushan, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. C. White, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, Optimal Quantum Control Using Randomized Benchmarking, *Phys. Rev. Lett.* 112, 240504 (2014). [16] Z. Leng, P. Mundada, S. Ghadimi, and A. Houck, Robust and efficient algorithms for high-dimensional blackbox quantum optimization (2019), arXiv:1910.03591 [quant-ph].
- [17] N. Leung, M. Abdelhafez, J. Koch, and D. Schuster, Speedup for quantum optimal control from automatic differentiation based on graphics processing units, *Phys. Rev. A* 95, 042318 (2017). [18] S. Li, T. Chen, and Z.-Y. Xu e, Fast Holonomic Quantum Computation on Superconducting Circuits With Optimal Control, *Adv. Quantum Technol.* 3, 2000001 (2020). [19] P. J. Liebermann and F. K. Wilhelm, Optimal Qubit Control Using Single-Flux Quantum Pulses , *Phys. Rev. Applied* 6, 024022 (2016). [20] P. Reinhold, Controlling Error-Correctable Bosonic Qubits, Ph.D. thesis, Yale University (2019). [21] P. Rebentrost and F. K. Wilhelm, Optimal control of a leaking qubit, *Phys. Rev. B* 79, 060507 (2009年). [22] P. Rebentrost, I. Serban, T. Schulte-Herbrüggen, and F. K. Wilhelm, Optimal Control of a Qubit Coupled to a Non-Markovian Environment, *Phys. Rev. Lett.* 102, 090401 (2009). [23] R. J. Spiteri, M. Schmidt, J. Ghosh, E. Zahedinejad, and B. C. Sanders, Quantum control for high-fidelity multi-qubit gate, *New J. Phys.* 20, 113009 (2018). [24] A. Spörl, T. Schulte-Herbrüggen, S. J. Glaser, V. Bergholm, M. J. Storcz, J. Ferber, and F. K. Wilhelm, Optimal control of coupled Josephson qubit, *Phys. Rev. A* 75, 012302 (2007). [25] I. Brouzos, A. I. Streletsov, A. Negretti, R. S. Said, T. Caneva, S. Montangero, and T. Calarco, Quantum speed limit and optimal control of many-boson dynamics, *Phys. Rev. A* 92, 062110 (2015). [26] G. De Chiara, T. Calarco, M. Anderlini, S. Montangero, P. J. Lee, B. L. Brown, W. D. Phillips, and J. V. Porto, Optimal control of atom transport for quantum gates in optical lattices, *Phys. Rev. A* 77, 052333 (2008). (27)グレイス、ブリフ、ラビツ、ウォームズリー、コスット、ライダー、量子ゲートの最適制御とデコヒーレンス抑制、*J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 40, S103 (2007). [28]M.H.ゲルツ、T.カラルコ、C.P.コッホ、捕捉中性原子に対する最適制御位相ゲートの量子速度限界、*J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 44, 154011 (2011). [29]グオー、フェン、ヤン、ユウ、チェン、C.-H.、ユアン、W.チャン、J.Guo、X.Feng、P.Yang、Z. Yuan, and W. Zhang, High-performance Raman quantum memory with optimal control in room temperature atoms, *Nat. Commun.* 10, 148 (2019).
- [30] J. H. M. Jensen, J. J. Sørensen, K. Mønster, and J. F. Sherson, Time-optimal control of collisional SWAP gate in ultracold atomic systems, *Phys. Rev. A* 100, 052314 (2019). [31] A. Larrouy, S. Patsch, R. Richaud, J.-M. Raimond, M. Brune, C. P. Koch, and S. Gleyzes, Fast Navigation in a Large Hilbert Space Using Quantum Optimal Control, *Phys. Rev. X* 10, 021058 (2020). [32] V. Nebendahl, H. Häffner, and C. F. Roos, Optimal control of entangling operations for trapped-ion quantum computing, *Phys. Rev. A* 79, 012312 (2009). (33)A.オムラン、H.レヴィン、A.キースリング、G.セメギーニ、T.T.ワン、S.エバディ、H.ベルニエン、A.S.ジプロフ、H.ヒヒラー、S.チョイ、J.クイ、M.ロッショニョ、P.レンボルト、S.モンタングエーロ、T. Calarco, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletić, and M. D. Lukin, Generation and manipulation of schrödinger cat states in rydberg atom arrays, *Science* 365, 570 (2019). [34] S. Rosi, A. Bernard, N. Fabbri, L. Fallani, C. Fort, M. Inguscio, T. Calarco, and S. Montangero, Fast closed-loop optimal control of ultracold atoms in an optical lattice, *Phys. Rev. A* 88, 021601 (2013). (35)P.Treutlein,

- [2] C. T. Kehlet, A. C. Sivertsen, M. Bjerring, T. O. Reiss, N. Khaneja, S. J. Glaser, and N. C. Nielsen, Improving Solid-State NMR Dipolar Recoupling by Optimal Control, *J. Am. Chem. Soc.* **126**, 10202 (2004).
- [3] N. Khaneja, T. Reiss, C. Kehlet, T. Schulte-Herbrüggen, and S. J. Glaser, Optimal control of coupled spin dynamics: design of NMR pulse sequences by gradient ascent algorithms, *J. Magn. Reson.* **172**, 296 (2005).
- [4] I. I. Maximov, Z. Tošner, and N. C. Nielsen, Optimal control design of NMR and dynamic nuclear polarization experiments using monotonically convergent algorithms, *J. Chem. Phys.* **128**, 184505 (2008).
- [5] N. C. Nielsen, C. Kehlet, S. J. Glaser, and N. Khaneja, Optimal Control Methods in NMR Spectroscopy, in *eMagRes* (American Cancer Society, 2010).
- [6] T. E. Skinner, T. O. Reiss, B. Luy, N. Khaneja, and S. J. Glaser, Application of optimal control theory to the design of broadband excitation pulses for high-resolution NMR, *J. Magn. Reson.* **163**, 8 (2003).
- [7] Z. Tošner, T. Vosegaard, C. Kehlet, N. Khaneja, S. J. Glaser, and N. C. Nielsen, Optimal control in NMR spectroscopy: Numerical implementation in SIMPSON, *J. Magn. Reson.* **197**, 120 (2009).
- [8] M. Abdelhafez, B. Baker, A. Gyenis, P. Mundada, A. A. Houck, D. Schuster, and J. Koch, Universal gates for protected superconducting qubits using optimal control, *Phys. Rev. A* **101**, 022321 (2020).
- [9] S. Chakram, K. He, A. V. Dixit, A. E. Oriani, R. K. Naik, N. Leung, H. Kwon, W.-L. Ma, L. Jiang, and D. I. Schuster, Multimode photon blockade (2020), arXiv:2010.15292 [quant-ph].
- [10] D. J. Egger and F. K. Wilhelm, Optimized controlled-Z gates for two superconducting qubits coupled through a resonator, *Supercond. Sci. Technol.* **27**, 014001 (2013).
- [11] R. Fisher, F. Helmer, S. J. Glaser, F. Marquardt, and T. Schulte-Herbrüggen, Optimal control of circuit quantum electrodynamics in one and two dimensions, *Phys. Rev. B* **81**, 085328 (2010).
- [12] P. Gokhale, Y. Ding, T. Propson, C. Winkler, N. Leung, Y. Shi, D. I. Schuster, H. Hoffmann, and F. T. Chong, Partial Compilation of Variational Algorithms for Noisy Intermediate-Scale Quantum Machines, in *Proceedings of the 52nd Annual IEEE/ACM International Symposium on Microarchitecture* (2019) pp. 266–278.
- [13] S.-Y. Huang and H.-S. Goan, Optimal control for fast and high-fidelity quantum gates in coupled superconducting flux qubits, *Phys. Rev. A* **90**, 012318 (2014).
- [14] R. W. Heeres, P. Reinhold, N. Ofek, L. Frunzio, L. Jiang, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, Implementing a universal gate set on a logical qubit encoded in an oscillator, *Nat. Commun.* **8**, 1 (2017).
- [15] J. Kelly, R. Barends, B. Campbell, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, A. G. Fowler, I.-C. Hoi, E. Jeffrey, A. Megrant, J. Mutus, C. Neill, P. J. J. O’Malley, C. Quintana, P. Roushan, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. C. White, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, Optimal Quantum Control Using Randomized Benchmarking, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 240504 (2014).
- [16] Z. Leng, P. Mundada, S. Ghadimi, and A. Houck, Robust and efficient algorithms for high-dimensional black-box quantum optimization (2019), arXiv:1910.03591 [quant-ph].
- [17] N. Leung, M. Abdelhafez, J. Koch, and D. Schuster, Speedup for quantum optimal control from automatic differentiation based on graphics processing units, *Phys. Rev. A* **95**, 042318 (2017).
- [18] S. Li, T. Chen, and Z.-Y. Xue, Fast Holonomic Quantum Computation on Superconducting Circuits With Optimal Control, *Adv. Quantum Technol.* **3**, 2000001 (2020).
- [19] P. J. Liebermann and F. K. Wilhelm, Optimal Qubit Control Using Single-Flux Quantum Pulses, *Phys. Rev. Applied* **6**, 024022 (2016).
- [20] P. Reinhold, *Controlling Error-Correctable Bosonic Qubits*, Ph.D. thesis, Yale University (2019).
- [21] P. Rebentrost and F. K. Wilhelm, Optimal control of a leaking qubit, *Phys. Rev. B* **79**, 060507 (2009).
- [22] P. Rebentrost, I. Serban, T. Schulte-Herbrüggen, and F. K. Wilhelm, Optimal Control of a Qubit Coupled to a Non-Markovian Environment, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 090401 (2009).
- [23] R. J. Spiteri, M. Schmidt, J. Ghosh, E. Zahedinejad, and B. C. Sanders, Quantum control for high-fidelity multi-qubit gates, *New J. Phys.* **20**, 113009 (2018).
- [24] A. Spörl, T. Schulte-Herbrüggen, S. J. Glaser, V. Bergholm, M. J. Storcz, J. Ferber, and F. K. Wilhelm, Optimal control of coupled Josephson qubits, *Phys. Rev. A* **75**, 012302 (2007).
- [25] I. Brouzos, A. I. Streltsov, A. Negretti, R. S. Said, T. Caneva, S. Montangero, and T. Calarco, Quantum speed limit and optimal control of many-boson dynamics, *Phys. Rev. A* **92**, 062110 (2015).
- [26] G. De Chiara, T. Calarco, M. Anderlini, S. Montangero, P. J. Lee, B. L. Brown, W. D. Phillips, and J. V. Porto, Optimal control of atom transport for quantum gates in optical lattices, *Phys. Rev. A* **77**, 052333 (2008).
- [27] M. Grace, C. Brif, H. Rabitz, I. A. Walmsley, R. L. Kosut, and D. A. Lidar, Optimal control of quantum gates and suppression of decoherence in a system of interacting two-level particles, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40**, S103 (2007).
- [28] M. H. Goerz, T. Calarco, and C. P. Koch, The quantum speed limit of optimal controlled phasegates for trapped neutral atoms, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 154011 (2011).
- [29] J. Guo, X. Feng, P. Yang, Z. Yu, L. Q. Chen, C.-H. Yuan, and W. Zhang, High-performance Raman quantum memory with optimal control in room temperature atoms, *Nat. Commun.* **10**, 148 (2019).
- [30] J. H. M. Jensen, J. J. Sørensen, K. Mølmer, and J. F. Sherson, Time-optimal control of collisional $\sqrt{\text{swap}}$ gates in ultracold atomic systems, *Phys. Rev. A* **100**, 052314 (2019).
- [31] A. Larrouy, S. Patsch, R. Richaud, J.-M. Raimond, M. Brune, C. P. Koch, and S. Gleyzes, Fast Navigation in a Large Hilbert Space Using Quantum Optimal Control, *Phys. Rev. X* **10**, 021058 (2020).
- [32] V. Nebendahl, H. Häffner, and C. F. Roos, Optimal control of entangling operations for trapped-ion quantum computing, *Phys. Rev. A* **79**, 012312 (2009).
- [33] A. Omran, H. Levine, A. Keesling, G. Semeghini, T. T. Wang, S. Ebadi, H. Bernien, A. S. Zibrov, H. Pichler, S. Choi, J. Cui, M. Rossignolo, P. Rembold, S. Montangero, T. Calarco, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletić, and M. D. Lukin, Generation and manipulation of schrödinger cat states in rydberg atom arrays, *Science*

- [T.W. Hänsch, J. Reichel, A. Negretti, M. A. Cirone、および T. Calarco, Microwave potentials and optimal control for robust quantum gates on an atom chip, Phys. Rev. A 74, 022312 (2006). [36] S. van Frank, M. Bonneau, J. Schmiedmayer, S. Hild, C. Gross, M. Cheneau, I. Bloch, T. Pichler, A. Negretti, T. Calarco, et al., Optimal control of complex atomic quantum systems, Sci. Rep. 6, 34187 (2016). [37] Y. Chou, S.-Y. Huang, and H.-S. Goan, Optimal control of fast and high-fidelity quantum gates with electron and nuclear spins of a nitrogen-vacancy center in diamond, Phys. Rev. A 91, 052315 (2015). [38] F. Dolde, V. Bergholm, Y. Wang, I. Jakobi, B. Naydenov, S. Pezzagna, J. Meijer, F. Jelezko, P. Neumann, T. Schulte-Herbrüggen, etc., High-fidelity spin entanglement using optim control, Nat. Commun. 5, 1 (2014). [39] J. Geng, Y. Wu, X. Wang, K. Xu, F. Shi, Y. Xie, X. Rong, and J. Du, Experimental Time-Optimal Universal Control of Spin Qubits in Solids, Phys. Rev. Lett. 117, 170501 (2016). [40] T. Nöbauer, A. Angerer, B. Bartels, M. Trupke, S. Rotter, J. Schmiedmayer, F. Mintert, and J. Majer, Smooth Optimal Quantum Control for Robust Solid-State Spin Magnetometry, Phys. Rev. Lett. 115, 190801 (2015). [41] F. Poggiali, P. Cappellaro, and N. Fabbri, Optimal Control for One-Qubit Quantum Sensing, Phys. Rev. X 8, 021059 (2018). [42] P. Rembold, N. Oshnik, M. Müller, S. Montangero, T. Calarco, and E. Neu, Introduction to quantum optimal control for quantum sensing with nitrogen-vacancy centers in diamond, AVS Quantum Sci. 2, 024701 (2020). [43] J. Tian, T. Du, Y. Liu, H. Liu, F. Jin, R. S. Said, and J. Cai, Optimal quantum optical control of spin in diamond, Phys. Rev. A 100, 012110 (2019). [44] S. Amri, R. Corgier, D. Sugny, E. M. Rasel, N. Gaaloul, and E. Charron, Optimal control of the transport of Bose-Einstein condensates with atom chips, Sci. Rep. 9, 1 (2019). [45] P. Doria, T. Calarco, and S. Montangero, Optimal Control Technique for Many-Body Quantum Dynamics, Phys. Rev. Lett. 106, 190501 (2011). [46] J. J. Sørensen, J. Jensen, T. Heinzel, J. F. Sherson, QEngine : 超低温原子の量子最適制御のためのC++ライブラリ, Comput. Phys. Commun. 243, 135 (2019). [47] J. J. W. H. Sørensen, M. O. Aranburu, T. Heinzel, and J. F. Sherson, Quantum optimal control in a chopped basis : Applications in control of Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. A 98, 022119 (2018). [48] P. V. Klimov, J. Kelly, J. M. Martinis, and H. Neven, The Snake Optimizer for Learning Quantum Processor Control Parameters (2020), arXiv:2006.04594 [quant-ph]. [49] K. Zhou, Essentials of Robust Control, 1st ed. (Pearson, 1997). [50] J. Morimoto and C. Atkeson, Minimax Differential Dynamic Programming : Walking, Adv. neural inf. process. syst. 15, 1563 (2002) [51] Z. Manchester and S. Kuindersma, Robust direct trajectory optimization using approximate invariant funnels, Auton. Robot. 10.1007/s10514-018-9779-5 (2018). [52] H. K. Cummins and J. A. Jones, Use of composite rotations to correct systematic errors in NMR quantum computation, New J. Phys. 2, 6 (2000) [53] H. K. Cummins, G. Llewellyn, and J. A. Jones, Tackling systematic errors in quantum logic gates with composite rotations, Phys. Rev. A 67, 042308 (2003) [54] Å. Kupce and R. Freeman, Stretched Adiabatic Pulses 森本淳一, C. Atkeson, Minimax Different Dynamic Programming: An Application to Robust Biped for Broadband Spin Inversion, J. Magn. Reson., Series A 117, 246 (1995). [55] J. T. Merrill and K. R. Brown, Progress in compensating pulse sequences for quantum computation, Quantum Information and Computation for Chemistry , 241 (2014). [56] Z. Han, Y. Dong, B. Liu, X. Yang, S. Song, L. Qiu, D. Li, J. Chu, W. Zheng, J. Xu, et al., Experimental Realization of Universal Time-optimal non-Abelian Geometric Gates (2020), arXiv:2004.10364 [quant-ph]. [57] J. Xu, S. Li, T. Chen, and Z.-Y. Xue, Non adiabatic geometric quantum computation with optimal control on superconducting circuits (2020), arXiv:2004.10199 [quant-ph]. [58] F. Motzoi, J. M. Gambetta, P. Rebentrost, F. K. Wilhelm, Simple Pulses for Elimination of Leakage in Weakly Non linear Qubits, Phys. Rev. Lett. 103, 110501 (2009). [59] D. J. Egger and F. K. Wilhelm, Adaptive Hybrid Optimal Quantum Control for Imprecisely Characterized Systems, Phys. Rev. Lett. 112, 240503 (2014). [60] G. Feng, F. H. Cho, H. Katiyar, J. Li, D. Lu, J. Baugh, and R. Laflamme, Gradient-based closed-loop quantum optimal control in a solid-state two-qubit system, Phys. Rev. A 98, 052341 (2018). [61] J. Li, X. Yang, X. Peng, and C.-P. Sun, Hybrid Quantum-Classical Approach to Quantum Optimal Control, Phys. Rev. Lett. 118, 150503 (2017). [62] N. Wittler, F. Roy, K. Pack, M. Werninghaus, A. S. Roy, D. J. Egger, S. Filipp, F. K. Wilhelm, and S. Machnes, An integrated tool-set for Control, Calibration and Characterization of quantum devices applied to superconducting qubit (2020), arXiv:2009.09866 [Quant-ph]. (1)量子制御のためのソフトウェアツール,(2)量子制御のためのソフトウェアツール,(3)量子制御のためのソフトウェアツール,(4)量子制御のためのソフトウェアツール,(5)量子制御のためのソフトウェアツール,[6][6][7]量子制御のためのソフトウェアツール,[7]量子制御のためのソフトウェアツール,[8]量子制御のためのソフトウェアツール,[9][10]量子制御のためのソフトウェアツール.. : 量子制御のためのソフトウェアツール:ノイズとエラーの抑制による量子コンピュータの性能向上, Quantum Sci. Technol. 10.1088/2058-9565/abdca6 (2021). [64] A. R. Carvalho, H. Ball, M. J. Biercuk, M. R. Hush, and F. Thomsen, Error-robust quantum logic optimization using a cloud quantum computer interface (2020), arXiv:2010.08057 [quant-ph]. [65] J. Allen, Robust Optimal Control of the CrossResonance Gate in Superconducting Qubits, Ph.D. thesis, University of Surrey (2019). [66] R. L. Kosut, M. D. Grace, and C. Brif, Robust control of quantum gates via sequential convex programming, Phys. Rev. A 88, 052326 (2013). [67] M. Y. Niu, S. Boixo, V. N. Smelyanskiy, and H. Neven, Universal quantum control through deep reinforcement

- 365**, 570 (2019).
- [34] S. Rosi, A. Bernard, N. Fabbri, L. Fallani, C. Fort, M. Inguscio, T. Calarco, and S. Montangero, Fast closed-loop optimal control of ultracold atoms in an optical lattice, Phys. Rev. A **88**, 021601 (2013).
- [35] P. Treutlein, T. W. Hänsch, J. Reichel, A. Negretti, M. A. Cirone, and T. Calarco, Microwave potentials and optimal control for robust quantum gates on an atom chip, Phys. Rev. A **74**, 022312 (2006).
- [36] S. van Frank, M. Bonneau, J. Schmiedmayer, S. Hild, C. Gross, M. Cheneau, I. Bloch, T. Pichler, A. Negretti, T. Calarco, *et al.*, Optimal control of complex atomic quantum systems, Sci. Rep. **6**, 34187 (2016).
- [37] Y. Chou, S.-Y. Huang, and H.-S. Goan, Optimal control of fast and high-fidelity quantum gates with electron and nuclear spins of a nitrogen-vacancy center in diamond, Phys. Rev. A **91**, 052315 (2015).
- [38] F. Dolde, V. Bergholm, Y. Wang, I. Jakobi, B. Naydenov, S. Pezzagna, J. Meijer, F. Jelezko, P. Neumann, T. Schulte-Herbrüggen, *et al.*, High-fidelity spin entanglement using optimal control, Nat. Commun. **5**, 1 (2014).
- [39] J. Geng, Y. Wu, X. Wang, K. Xu, F. Shi, Y. Xie, X. Rong, and J. Du, Experimental Time-Optimal Universal Control of Spin Qubits in Solids, Phys. Rev. Lett. **117**, 170501 (2016).
- [40] T. Nöbauer, A. Angerer, B. Bartels, M. Trupke, S. Rotter, J. Schmiedmayer, F. Mintert, and J. Majer, Smooth Optimal Quantum Control for Robust Solid-State Spin Magnetometry, Phys. Rev. Lett. **115**, 190801 (2015).
- [41] F. Poggiali, P. Cappellaro, and N. Fabbri, Optimal Control for One-Qubit Quantum Sensing, Phys. Rev. X **8**, 021059 (2018).
- [42] P. Rembold, N. Oshnik, M. M. Müller, S. Montangero, T. Calarco, and E. Neu, Introduction to quantum optimal control for quantum sensing with nitrogen-vacancy centers in diamond, AVS Quantum Sci. **2**, 024701 (2020).
- [43] J. Tian, T. Du, Y. Liu, H. Liu, F. Jin, R. S. Said, and J. Cai, Optimal quantum optical control of spin in diamond, Phys. Rev. A **100**, 012110 (2019).
- [44] S. Amri, R. Corgier, D. Sugny, E. M. Rasel, N. Gaaloul, and E. Charron, Optimal control of the transport of Bose-Einstein condensates with atom chips, Sci. Rep. **9**, 1 (2019).
- [45] P. Doria, T. Calarco, and S. Montangero, Optimal Control Technique for Many-Body Quantum Dynamics, Phys. Rev. Lett. **106**, 190501 (2011).
- [46] J. J. Sørensen, J. Jensen, T. Heinzel, and J. F. Sherson, QEngine: A C++ library for quantum optimal control of ultracold atoms, Comput. Phys. Commun. **243**, 135 (2019).
- [47] J. J. W. H. Sørensen, M. O. Aranburu, T. Heinzel, and J. F. Sherson, Quantum optimal control in a chopped basis: Applications in control of Bose-Einstein condensates, Phys. Rev. A **98**, 022119 (2018).
- [48] P. V. Klimov, J. Kelly, J. M. Martinis, and H. Neven, The Snake Optimizer for Learning Quantum Processor Control Parameters (2020), arXiv:2006.04594 [quant-ph].
- [49] K. Zhou, *Essentials of Robust Control*, 1st ed. (Pearson, 1997).
- [50] J. Morimoto and C. Atkeson, Minimax Differential Dynamic Programming: An Application to Robust Biped Walking, Adv. neural inf. process. syst. **15**, 1563 (2002).
- [51] Z. Manchester and S. Kuindersma, Robust direct trajectory optimization using approximate invariant funnels, Auton. Robot. 10.1007/s10514-018-9779-5 (2018).
- [52] H. K. Cummins and J. A. Jones, Use of composite rotations to correct systematic errors in NMR quantum computation, New J. Phys. **2**, 6 (2000).
- [53] H. K. Cummins, G. Llewellyn, and J. A. Jones, Tackling systematic errors in quantum logic gates with composite rotations, Phys. Rev. A **67**, 042308 (2003).
- [54] Å. Kupce and R. Freeman, Stretched Adiabatic Pulses for Broadband Spin Inversion, J. Magn. Reson., Series A **117**, 246 (1995).
- [55] J. T. Merrill and K. R. Brown, Progress in compensating pulse sequences for quantum computation, Quantum Information and Computation for Chemistry , 241 (2014).
- [56] Z. Han, Y. Dong, B. Liu, X. Yang, S. Song, L. Qiu, D. Li, J. Chu, W. Zheng, J. Xu, *et al.*, Experimental Realization of Universal Time-optimal non-Abelian Geometric Gates (2020), arXiv:2004.10364 [quant-ph].
- [57] J. Xu, S. Li, T. Chen, and Z.-Y. Xue, Nonadiabatic geometric quantum computation with optimal control on superconducting circuits (2020), arXiv:2004.10199 [quant-ph].
- [58] F. Motzoi, J. M. Gambetta, P. Rebentrost, and F. K. Wilhelm, Simple Pulses for Elimination of Leakage in Weakly Nonlinear Qubits, Phys. Rev. Lett. **103**, 110501 (2009).
- [59] D. J. Egger and F. K. Wilhelm, Adaptive Hybrid Optimal Quantum Control for Imprecisely Characterized Systems, Phys. Rev. Lett. **112**, 240503 (2014).
- [60] G. Feng, F. H. Cho, H. Katiyar, J. Li, D. Lu, J. Baugh, and R. Laflamme, Gradient-based closed-loop quantum optimal control in a solid-state two-qubit system, Phys. Rev. A **98**, 052341 (2018).
- [61] J. Li, X. Yang, X. Peng, and C.-P. Sun, Hybrid Quantum-Classical Approach to Quantum Optimal Control, Phys. Rev. Lett. **118**, 150503 (2017).
- [62] N. Wittler, F. Roy, K. Pack, M. Werninghaus, A. S. Roy, D. J. Egger, S. Filipp, F. K. Wilhelm, and S. Machnes, An integrated tool-set for Control, Calibration and Characterization of quantum devices applied to superconducting qubits (2020), arXiv:2009.09866 [quant-ph].
- [63] H. Ball, M. Biercuk, A. Carvalho, J. Chen, M. R. Hush, L. A. de Castro, L. Li, P. J. Liebermann, H. Slatyer, C. Edmunds, V. Frey, C. Hempel, and A. Milne, Software tools for quantum control: Improving quantum computer performance through noise and error suppression, Quantum Sci. Technol. 10.1088/2058-9565/abdc6 (2021).
- [64] A. R. Carvalho, H. Ball, M. J. Biercuk, M. R. Hush, and F. Thomsen, Error-robust quantum logic optimization using a cloud quantum computer interface (2020), arXiv:2010.08057 [quant-ph].
- [65] J. Allen, *Robust Optimal Control of the Cross-Resonance Gate in Superconducting Qubits*, Ph.D. thesis, University of Surrey (2019).
- [66] R. L. Kosut, M. D. Grace, and C. Brif, Robust control of quantum gates via sequential convex programming, Phys. Rev. A **88**, 052326 (2013).
- [67] M. Y. Niu, S. Boixo, V. N. Smelyanskiy, and H. Neven, Universal quantum control through deep reinforcement

- 学習、NPJ Quantum Inf. 5, 33 (2019). [68] T. A. Howell, C. Fu, and Z. Manchester, Direct Policy Optimization using Deterministic Sampling and Collocation (2020), arXiv:2010.08506 [cs.R0]. (1)は、(2)は、(3)は、(4)は、(5)は、(6)は、(7)は、(8)は、(9)は、(10)は、(11)は、(12)は、(13)は、(13)16.、、(13)17.、、(13)17)17.、、(13)17)17”、(13)”は、(i)は、そのようにする。[70] S. Thangavel, R. Paulen, and S. Engell, Robust MultiStage Nonlinear Model Predictive Control Using Sigma Point, Processes 8, 851 (2020). [71] S. J. ジュリエ、J. K. ウールマン、アンセンテッドフィルタリングと非線形推定、Proceedings of the IEEE 92, 401 (2004). (注1)本論文は、本論文の一部である：New Theoretical Foundations, Ph.D. thesis, University of Oxford オックスフォード大学 (1995). [73] H. Zhang, S. Chakram, T. Roy, N. Ernest, Y. Lu, Z. Huang, D. K. Weiss, J. Koch, and D. I. Schuster, Universal Fast-Flux Control of a Coherent, Low-Frequency Qubit, Phys. Rev. X 11, 011010 (2021). [74] T. A. Howell, B. E. Jackson, and Z. Manchester, ALTRO: A fast solver for constrained trajectory optimization, in 2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE, 2019) pp. 7674–7679. [75] S. Machnes, E. Assémat, D. Tannor, and F. K. Wilhelm, Tunable, Flexible, and Efficient Optimization of Control Pulses for Practical Qubits, Phys. Rev. Lett. 120, 150401 (2018). [76] M. H. Goerz, D. Basilewitsch, F. Gago-Encinas, M. G. Krauss, K. P. Horn, D. M. Reich, and C. P. Koch, Krotov: A Python implementation of Krotov’s method for quantum optimal control, SciPost Phys. 7, 10.21468/SciPostPhys.7.6.080 (2019). [77] J. Schulman, J. Ho, A. X. Lee, I. Awwal, H. Bradlow, and P. Abbeel, Finding Locally Optimal, Collision-Free Trajectories with Sequential Convex Optimization., in Robotics: Science and Systems, Vol. 9 (Citeseer, 2013) pp. 1–10. [78] R. Tedrake and the Drake Development Team, Drake: A planning, control, and analysis toolbox for nonlinear dynamical systems (2016). [79] A. Hereid and A. D. Ames, FROST: Fast Robot Optimization and Simulation Toolkit, in 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE, Vancouver, BC, Canada, 2017). [80] L. Jørgensen, D. L. Cardozo, and E. Thibierge, Numerical Resolution Of The Schrödinger Equation, Tech. Rep. (École Normale Supérieure de Lyon, 2011). [81] N. Auer, L. Einkemmer, P. Kandolf, and A. Ostermann, Magnus integrators on multicore CPUs and GPUs, Comput. Phys. Commun. 228, 115 (2018). [82] H. Berland and B. Skaflestad, Solving the nonlinear Schrödinger equation using exponential integrators, Int. J. Model. Identif. Control. 27, 201 (2006). [83] L. Einkemmer, M. Tokman, and J. Loffeld, On the performance of exponential integrators for problems in magnetohydrodynamics, J. Comput. Phys. 330, 550 (2017). [84] R. Shillito, J. A. Gross, A. D. Paolo, Élie Genois, および A. Blais, Fast and differentiable simulation of driven quantum systems (2020), arXiv:2012.09282 [quant-ph]. [85] C. R. ハーグレイブス、S. W. パリス、非線形計画法とコロケーションによる直接軌道最適化、ガイダンス10, 338 (1987). [86] M. Kelly, An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation, SIAM Review 59, 849 (2017). [87] J. T. Betts, Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization, J. Guid. Control Dyn 21, 193 (1998). [88] P. E. Gill, W. Murray, and M. A. Saunders, SNOPT: 大規模制約付き最適化のための SQP アルゴリズム, SIAM review 47, 99 (2005). Program. 106, 25 (2006). (注1)本論文は、本論文の一部である。Part 1: Theory, J. Optim. Theory. Appl. 154, 382 (2012). [92] B. Plancher, Z. Manchester, and S. Kuindersma, Constrained unscented dynamic programming, in 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IEEE, 2017) pp. 5674–5680. [93] J. Nocedal and S. Wright, Numerical Optimization (Springer Science & Business Media, 2006). [94] D. P. Bertsekas, Projected Newton Methods for Optimization Problems with Simple Constraints, SIAM J. Control Optim. 20, 221 (1982). Theory. Appl. 99, 723 (1998). J. コントロール 3, 8595 (1966). Math. 104, 561 (2006). [98] D. P. Bertsekas, Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods (Academic press, 2014). [99] B. E. Jackson, T. Punnoose, D. Neamati, K. Tracy, R. Jitosh, and Z. Manchester, ALTRO-C: A Fast Solver for Conic Model-Predictive Control, in International Conference on Robotics and Automation ICRA (2021) in Review. [100] N. Ernest, S. Chakram, Y. Lu, N. Irons, R. K. Naik, N. Leung, L. Ocola, D. A. Czaplewski, B. Baker, J. Lawrence, J. Koch, and D. I. Schuster, Realization of A System with Metastable States of a Capacitively Shunted Fluxonium, Phys. Rev. Lett. 120, 150504 (2018). [101] Y.-H. Lin, L. B. Nguyen, N. Grabon, J. San Miguel, N. Pankratova, and V. E. Manucharyan, Demonstration of Protection of a Superconducting Qubit from Energy Decay, Phys. Rev. Lett. 120, 150503 (2018).

- learning, NPJ Quantum Inf. **5**, 33 (2019).
- [68] T. A. Howell, C. Fu, and Z. Manchester, Direct Policy Optimization using Deterministic Sampling and Collocation (2020), arXiv:2010.08506 [cs.RO].
- [69] A. Lee, Y. Duan, S. Patil, J. Schulman, Z. McCarthy, J. van den Berg, K. Goldberg, and P. Abbeel, Sigma hulls for Gaussian belief space planning for imprecise articulated robots amid obstacles, in *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2013) pp. 5660–5667.
- [70] S. Thangavel, R. Paulen, and S. Engell, Robust Multi-Stage Nonlinear Model Predictive Control Using Sigma Points, Processes **8**, 851 (2020).
- [71] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, Unscented filtering and nonlinear estimation, Proceedings of the IEEE **92**, 401 (2004).
- [72] J. K. Uhlmann, *Dynamic Map Building and Localization: New Theoretical Foundations*, Ph.D. thesis, University of Oxford Oxford (1995).
- [73] H. Zhang, S. Chakram, T. Roy, N. Earnest, Y. Lu, Z. Huang, D. K. Weiss, J. Koch, and D. I. Schuster, Universal Fast-Flux Control of a Coherent, Low-Frequency Qubit, Phys. Rev. X **11**, 011010 (2021).
- [74] T. A. Howell, B. E. Jackson, and Z. Manchester, ALTRO: A fast solver for constrained trajectory optimization, in *2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* (IEEE, 2019) pp. 7674–7679.
- [75] S. Machnes, E. Assémat, D. Tannor, and F. K. Wilhelm, Tunable, Flexible, and Efficient Optimization of Control Pulses for Practical Qubits, Phys. Rev. Lett. **120**, 150401 (2018).
- [76] M. H. Goerz, D. Basilewitsch, F. Gago-Encinas, M. G. Krauss, K. P. Horn, D. M. Reich, and C. P. Koch, Krotov: A Python implementation of Krotov’s method for quantum optimal control, SciPost Phys. **7**, 10.21468/SciPostPhys.7.6.080 (2019).
- [77] J. Schulman, J. Ho, A. X. Lee, I. Awwal, H. Bradlow, and P. Abbeel, Finding Locally Optimal, Collision-Free Trajectories with Sequential Convex Optimization., in *Robotics: science and systems*, Vol. 9 (Citeseer, 2013) pp. 1–10.
- [78] R. Tedrake and the Drake Development Team, Drake: A planning, control, and analysis toolbox for nonlinear dynamical systems (2016).
- [79] A. Hereid and A. D. Ames, FROST: Fast Robot Optimization and Simulation Toolkit, in *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* (IEEE, Vancouver, BC, Canada, 2017).
- [80] L. Jørgensen, D. L. Cardozo, and E. Thibierge, *Numerical Resolution Of The Schrödinger Equation*, Tech. Rep. (École Normale Supérieure de Lyon, 2011).
- [81] N. Auer, L. Einkemmer, P. Kandolf, and A. Ostermann, Magnus integrators on multicore CPUs and GPUs, Comput. Phys. Commun. **228**, 115 (2018).
- [82] H. Berland and B. Skaflestad, Solving the nonlinear Schrödinger equation using exponential integrators, Int. J. Model. Identif. Control. **27**, 201 (2006).
- [83] L. Einkemmer, M. Tokman, and J. Loffeld, On the performance of exponential integrators for problems in magnetohydrodynamics, J. Comput. Phys. **330**, 550 (2017).
- [84] R. Shillito, J. A. Gross, A. D. Paolo, Élie Genois, and A. Blais, Fast and differentiable simulation of driven quantum systems (2020), arXiv:2012.09282 [quant-ph].
- [85] C. R. Hargraves and S. W. Paris, Direct Trajectory Optimization Using Nonlinear Programming and Collocation, J. Guidance **10**, 338 (1987).
- [86] M. Kelly, An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation, SIAM Review **59**, 849 (2017).
- [87] J. T. Betts, Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization, J. Guid. Control Dyn **21**, 193 (1998).
- [88] P. E. Gill, W. Murray, and M. A. Saunders, SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization, SIAM review **47**, 99 (2005).
- [89] A. Wächter and L. T. Biegler, On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming, Math. Program. **106**, 25 (2006).
- [90] W. Li and E. Todorov, Iterative Linear Quadratic Regulator Design for Nonlinear Biological Movement Systems, in *Proceedings of the 1st International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics* (Setubal, Portugal, 2004).
- [91] G. Lantoine and R. P. Russell, A Hybrid Differential Dynamic Programming Algorithm for Constrained Optimal Control Problems. Part 1: Theory, J. Optim. Theory Appl. **154**, 382 (2012).
- [92] B. Plancher, Z. Manchester, and S. Kuindersma, Constrained unscented dynamic programming, in *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (IEEE, 2017) pp. 5674–5680.
- [93] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical Optimization* (Springer Science & Business Media, 2006).
- [94] D. P. Bertsekas, Projected Newton Methods for Optimization Problems with Simple Constraints, SIAM J. Control Optim. **20**, 221 (1982).
- [95] C. V. Rao, S. J. Wright, and J. B. Rawlings, Application of Interior-Point Methods to Model Predictive Control, J. Optim. Theory Appl. **99**, 723 (1998).
- [96] D. Q. Mayne, A Second-Order Gradient Method of Optimizing Non-Linear Discrete Time Systems, Int. J. Control **3**, 859 (1966).
- [97] L. Zhang, W. Zhou, and D. Li, Global convergence of a modified Fletcher–Reeves conjugate gradient method with Armijo-type line search, Numer. Math. **104**, 561 (2006).
- [98] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods* (Academic press, 2014).
- [99] B. E. Jackson, T. Punnoose, D. Neamati, K. Tracy, R. Jitosho, and Z. Manchester, ALTRO-C: A Fast Solver for Conic Model-Predictive Control, in *International Conference on Robotics and Automation ICRA* (2021) in Review.
- [100] N. Earnest, S. Chakram, Y. Lu, N. Irons, R. K. Naik, N. Leung, L. Ocola, D. A. Czaplewski, B. Baker, J. Lawrence, J. Koch, and D. I. Schuster, Realization of a Λ System with Metastable States of a Capacitively Shunted Fluxonium, Phys. Rev. Lett. **120**, 150504 (2018).
- [101] Y.-H. Lin, L. B. Nguyen, N. Grabon, J. San Miguel, N. Pankratova, and V. E. Manucharyan, Demonstration of Protection of a Superconducting Qubit from Energy Decay, Phys. Rev. Lett. **120**, 150503 (2018).

- [102] V. E. Manucharyan, J. Koch, L. I. Glazman, and M. H. Devoret, Fluxonium: Single cooper-pair circuit free of charge offsets, *Science* **326**, 113 (2009)
- [103] A. Somoroff, Q. Ficheux, R. A. Mencia, H. Xiong, R. V. Kuzmin, and V. E. Manucharyan, Millisecond coherence in a superconducting qubit (2021), arXiv:2103.08578 [quant-ph]
- [104] L. B. Nguyen, Y.-H. Lin, A. Somoroff, R. Mencia, N. Grabon, and V. E. Manucharyan, High-Coherence Fluxonium Qubit, *Phys. Rev. X* **9**, 041041 (2019)
- [105] M. A. Rol, F. Battistel, F. K. Malinowski, C. C. Bultink, B. M. Tarasinski, R. Vollmer, N. Haider, N. Muthusubramanian, A. Bruno, B. M. Terhal, and L. DiCarlo, Fast, High-Fidelity Conditional-Phase Gate Exploiting Leakage Interference in Weakly Anharmonic Superconducting Qubits, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 120502 (2019)
- [106] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, A quantum engineer's guide to superconducting qubits, *Appl. Phys. Rev.* **6**, 021318 (2019)
- [107] T. Schulte-Herbrüggen, A. Spörle, N. Khaneja, and S. J. Glaser, Optimal control for generating quantum gates in open dissipative systems, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 154013 (2011)
- [108] M. Abdelhafez, D. I. Schuster, and J. Koch, Gradient-based optimal control of open quantum systems using quantum trajectories and automatic differentiation, *Phys. Rev. A* **99**, 052327 (2019)
- [109] Z. Huang, P. S. Mundada, A. Gyenis, D. I. Schuster, A. A. Houck, and J. Koch, Engineering Dynamical Sweet Spots to Protect Qubits from $1/f$ Noise, *Phys. Rev. Applied* **15**, 034065 (2021)
- [110] P. S. Mundada, A. Gyenis, Z. Huang, J. Koch, and A. A. Houck, Floquet-engineered enhancement of coherence times in a driven fluxonium qubit (2020), arXiv:2007.13756 [quant-ph]
- [111] D. Aharonov and M. Ben-Or, Fault-Tolerant Quantum Computation with Constant Error Rate, *SIAM J. Comput.* **38**, 1207 (2008)
- [112] E. Knill, Quantum computing with realistically noisy devices, *Nature* **434**, 39–44 (2005)
- [113] D. Gottesman, Stabilizer Codes and Quantum Error Correction (1997), arXiv:quant-ph/9705052 [quant-ph]
- [114] A. Paetznick, *Resource optimization for fault-tolerant quantum computing*, Ph.D. thesis, University of Waterloo (2014).
- [115] M. Suchara, A. Faruque, C.-Y. Lai, G. Paz, F. T. Chong, and J. Kubiatowicz, Comparing the Overhead of Topological and concatenated Quantum Error Correction (2013), arXiv:1312.2316 [quant-ph]
- [116] J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. Tornberg, J. Koch, L. S. Bishop, A. A. Houck, B. R. Johnson, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Randomized Benchmarking and Process Tomography for Gate Errors in a Solid-State Qubit, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 090502 (2009)
- [117] R. C. Bialczak, R. McDermott, M. Ansmann, M. Hofheinz, N. Katz, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, H. Wang, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, $1/f$ Flux Noise in Josephson Phase Qubits, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 187006 (2007)
- [118] K. Kakuyanagi, T. Meno, S. Saito, H. Nakano, K. Semba, H. Takayanagi, F. Deppe, and A. Shnirman, Dephasing of a Superconducting Flux Qubit, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 047004 (2007)
- [119] P. Kumar, S. Sendelbach, M. A. Beck, J. W. Freeland, Z. Wang, H. Wang, C. C. Yu, R. Q. Wu, D. P. Papas, and R. McDermott, Origin and Reduction of $1/f$ Magnetic Flux Noise in Superconducting Devices, *Phys. Rev. Applied* **6**, 041001 (2016)
- [120] F. Yoshihara, K. Harrabi, A. O. Niskanen, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Decoherence of Flux Qubits due to $1/f$ Flux Noise, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 167001 (2006)
- [121] R. H. Koch, D. P. DiVincenzo, and J. Clarke, Model for $1/f$ Flux Noise in SQUIDs and Qubits, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 267003 (2007)
- [122] F. Yoshihara, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Correlated flux noise and decoherence in two inductively coupled flux qubits, *Phys. Rev. B* **81**, 132502 (2010)
- [123] E. L. Hahn and D. E. Maxwell, Spin Echo Measurements of Nuclear Spin Coupling in Molecules, *Phys. Rev.* **88**, 1070 (1952)
- [124] S. Meiboom and D. Gill, Modified Spin-Echo Method for Measuring Nuclear Relaxation Times, *Rev. Sci. Instrum.* **29**, 688 (1958)
- [125] J. O. Smith, *Spectral Audio Signal Processing* (2020) online book, 2011 edition.
- [126] C. Rackauckas and Q. Nie, DifferentialEquations.jl – A Performant and Feature-Rich Ecosystem for Solving Differential Equations in Julia, *J. Open Res. Softw.* **5** (2017)
- [127] M. Besançon, D. Anthoff, A. Arslan, S. Byrne, D. Lin, T. Papamarkou, and J. Pearson, Distributions.jl: Definition and Modeling of Probability Distributions in the JuliaStats Ecosystem (2019), arXiv:1907.08611 [stat.CO]
- [128] J. Revels, M. Lubin, and T. Papamarkou, Forward-Mode Automatic Differentiation in Julia, arXiv:1607.07892 [cs.MS] (2016)
- [129] J. D. Hunter, Matplotlib: A 2D graphics environment, *Comput. Sci. Eng.* **9**, 90 (2007)
- [130] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N. J. Smith, R. Kern, M. Picus, S. Hoyer, M. H. van Kerkwijk, M. Brett, A. Haldane, J. F. del R'io, M. Wiebe, P. Peterson, P. G'erard-Marchant, K. Sheppard, T. Reddy, W. Weckesser, H. Abbasi, C. Gohlke, and T. E. Oliphant, Array programming with NumPy, *Nature* **585**, 357 (2020)
- [131] M. Innes, Don't Unroll Adjoint: Differentiating SSA-Form Programs (2018), arXiv:1810.07951 [cs.PL]
- [132] D. Manzano, A short introduction to the lindblad master equation, *AIP Adv.* **10**, 025106 (2020)
- [133] G. T. Landi, *Quantum Information and Quantum Noise* (2018).
- [134] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations, in *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)* Vol. 2 (IEEE, 2002) pp. 887–892.

- [102] V. E. Manucharyan, J. Koch, L. I. Glazman, and M. H. Devoret, Fluxonium: Single cooper-pair circuit free of charge offsets, *Science* **326**, 113 (2009).
- [103] A. Somoroff, Q. Ficheux, R. A. Mencia, H. Xiong, R. V. Kuzmin, and V. E. Manucharyan, Millisecond coherence in a superconducting qubit (2021), arXiv:2103.08578 [quant-ph].
- [104] L. B. Nguyen, Y.-H. Lin, A. Somoroff, R. Mencia, N. Grabon, and V. E. Manucharyan, High-Coherence Fluxonium Qubit, *Phys. Rev. X* **9**, 041041 (2019).
- [105] M. A. Rol, F. Battistel, F. K. Malinowski, C. C. Bultink, B. M. Tarasinski, R. Vollmer, N. Haider, N. Muthusubramanian, A. Bruno, B. M. Terhal, and L. DiCarlo, Fast, High-Fidelity Conditional-Phase Gate Exploiting Leakage Interference in Weakly Anharmonic Superconducting Qubits, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 120502 (2019).
- [106] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, A quantum engineer’s guide to superconducting qubits, *Appl. Phys. Rev.* **6**, 021318 (2019).
- [107] T. Schulte-Herbrüggen, A. Spörl, N. Khaneja, and S. J. Glaser, Optimal control for generating quantum gates in open dissipative systems, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 154013 (2011).
- [108] M. Abdelhafez, D. I. Schuster, and J. Koch, Gradient-based optimal control of open quantum systems using quantum trajectories and automatic differentiation, *Phys. Rev. A* **99**, 052327 (2019).
- [109] Z. Huang, P. S. Mundada, A. Gyenis, D. I. Schuster, A. A. Houck, and J. Koch, Engineering Dynamical Sweet Spots to Protect Qubits from $1/f$ Noise, *Phys. Rev. Applied* **15**, 034065 (2021).
- [110] P. S. Mundada, A. Gyenis, Z. Huang, J. Koch, and A. A. Houck, Floquet-engineered enhancement of coherence times in a driven fluxonium qubit (2020), arXiv:2007.13756 [quant-ph].
- [111] D. Aharonov and M. Ben-Or, Fault-Tolerant Quantum Computation with Constant Error Rate, *SIAM J. Comput.* **38**, 1207 (2008).
- [112] E. Knill, Quantum computing with realistically noisy devices, *Nature* **434**, 39–44 (2005).
- [113] D. Gottesman, Stabilizer Codes and Quantum Error Correction (1997), arXiv:quant-ph/9705052 [quant-ph].
- [114] A. Paetznick, *Resource optimization for fault-tolerant quantum computing*, Ph.D. thesis, University of Waterloo (2014).
- [115] M. Suchara, A. Faruque, C.-Y. Lai, G. Paz, F. T. Chong, and J. Kubiatowicz, Comparing the Overhead of Topological and concatenated Quantum Error Correction (2013), arXiv:1312.2316 [quant-ph].
- [116] J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. Tornberg, J. Koch, L. S. Bishop, A. A. Houck, B. R. Johnson, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Randomized Benchmarking and Process Tomography for Gate Errors in a Solid-State Qubit, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 090502 (2009).
- [117] R. C. Bialczak, R. McDermott, M. Ansmann, M. Hofheinz, N. Katz, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, H. Wang, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, $1/f$ Flux Noise in Josephson Phase Qubits, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 187006 (2007).
- [118] K. Kakuyanagi, T. Meno, S. Saito, H. Nakano, K. Semba, H. Takayanagi, F. Deppe, and A. Shnirman, Dephasing of a Superconducting Flux Qubit, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 047004 (2007).
- [119] P. Kumar, S. Sendelbach, M. A. Beck, J. W. Freeland, Z. Wang, H. Wang, C. C. Yu, R. Q. Wu, D. P. Papas, and R. McDermott, Origin and Reduction of $1/f$ Magnetic Flux Noise in Superconducting Devices, *Phys. Rev. Applied* **6**, 041001 (2016).
- [120] F. Yoshihara, K. Harrabi, A. O. Niskanen, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Decoherence of Flux Qubits due to $1/f$ Flux Noise, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 167001 (2006).
- [121] R. H. Koch, D. P. DiVincenzo, and J. Clarke, Model for $1/f$ Flux Noise in SQUIDs and Qubits, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 267003 (2007).
- [122] F. Yoshihara, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Correlated flux noise and decoherence in two inductively coupled flux qubits, *Phys. Rev. B* **81**, 132502 (2010).
- [123] E. L. Hahn and D. E. Maxwell, Spin Echo Measurements of Nuclear Spin Coupling in Molecules, *Phys. Rev.* **88**, 1070 (1952).
- [124] S. Meiboom and D. Gill, Modified Spin-Echo Method for Measuring Nuclear Relaxation Times, *Rev. Sci. Instrum.* **29**, 688 (1958).
- [125] J. O. Smith, *Spectral Audio Signal Processing* (2020) online book, 2011 edition.
- [126] C. Rackauckas and Q. Nie, DifferentialEquations.jl – A Performant and Feature-Rich Ecosystem for Solving Differential Equations in Julia, *J. Open Res. Softw.* **5** (2017).
- [127] M. Besançon, D. Anthoff, A. Arslan, S. Byrne, D. Lin, T. Papamarkou, and J. Pearson, Distributions.jl: Definition and Modeling of Probability Distributions in the JuliaStats Ecosystem (2019), arXiv:1907.08611 [stat.CO].
- [128] J. Revels, M. Lubin, and T. Papamarkou, Forward-Mode Automatic Differentiation in Julia, arXiv:1607.07892 [cs.MS] (2016).
- [129] J. D. Hunter, Matplotlib: A 2D graphics environment, *Comput. Sci. Eng.* **9**, 90 (2007).
- [130] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, R. Gommers, P. Virtanen, D. Cournapeau, E. Wieser, J. Taylor, S. Berg, N. J. Smith, R. Kern, M. Picus, S. Hoyer, M. H. van Kerkwijk, M. Brett, A. Haldane, J. F. del Río, M. Wiebe, P. Peterson, P. Gérard-Marchant, K. Sheppard, T. Reddy, W. Weckesser, H. Abbasi, C. Gohlke, and T. E. Oliphant, Array programming with NumPy, *Nature* **585**, 357 (2020).
- [131] M. Innes, Don’t Unroll Adjoint: Differentiating SSA-Form Programs (2018), arXiv:1810.07951 [cs.PL].
- [132] D. Manzano, A short introduction to the lindblad master equation, *AIP Adv.* **10**, 025106 (2020).
- [133] G. T. Landi, Quantum Information and Quantum Noise (2018).
- [134] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations, in *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*, Vol. 2 (IEEE, 2002) pp. 887–892.