Programme de colle n°11

Semaine du 11/12 au 15/12

TSI 1

CH 13 Fonctions circulaires et leurs réciproques

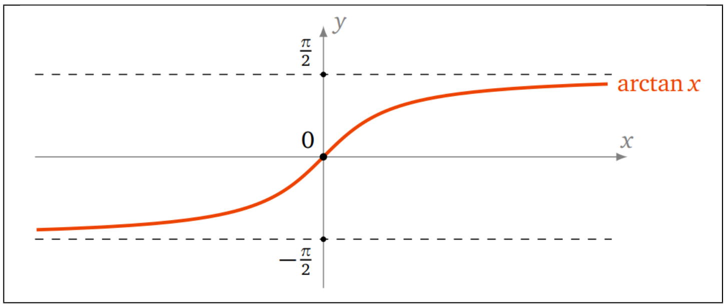
• Fonction arctangente

$\hookrightarrow$ L'application réciproque de tan est appelée **arctangente** et notée arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$\hookrightarrow$ arctan est strictement croissante, et impaire de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\boxed{\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}}$

$\hookrightarrow$ De plus, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x}$ et $\boxed{\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \arctan(\tan x) = x}$

$\hookrightarrow$ La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$ et $\boxed{(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}}$



CH 14 : Déterminants, droites et cercles

• Déterminant de deux vecteurs

$\hookrightarrow$ <u>**Définition**</u> : $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \,.\, \sin(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}}$

$\hookrightarrow$ <u>**Interprétation géométrique**</u> **:** l'aire du parallélogramme $ABCD$ est : $\boxed{\mathcal{A}(ABCD) = \left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}$
et l'aire du triangle ABC est $\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}$

$\hookrightarrow$ <u>**Propriétés**</u> **:** Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{V}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ (antisymétrie)	$\det(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \lambda\vec{v})$
$\det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w})$ (linéarité à droite)	$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
$\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{w}) + \det(\vec{v}, \vec{w})$ (linéarité à gauche)	La base $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan est directe ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) > 0$

$\hookrightarrow$ <u>**Expression en ROND**</u> $\boldsymbol{(O, \vec{i}, \vec{j})}$ **:** si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors : $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}$

$\hookrightarrow$ <u>**Application à la détermination d'un angle**</u> **:** Si A, B et C sont trois points 2 à 2 distincts, alors une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est θ telle que : $\boxed{\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}}$ et $\boxed{\sin\theta = \frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}}$

• Droites du plan

$\hookrightarrow$ <u>**Equation cartésienne**</u> : $\boxed{\boldsymbol{ax + by + c = 0} \text{ avec } \boldsymbol{\vec{u}(-b, a)} \text{ vecteur directeur de la droite}}$

$\hookrightarrow$ <u>**Méthode**</u> **:** Pour trouver une équation cartésienne de $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ avec $A(x_A, y_A)$ et $\vec{u}(a, b)$, on écrit :

$$\boxed{M(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0 \Leftrightarrow M(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & a \\ y - y_A & b \end{vmatrix} = 0}$$

$\hookrightarrow$ **Représentation paramétrique** : La droite passant par $A(x_A, y_A)$ et dirigée par $\vec{u}(a,b)$ admet pour paramètrage :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = x_A + at} \\ \boldsymbol{y = y_A + bt} \end{cases} \boldsymbol{, t \in \mathbb{R}}} \text{ càd } M(x,y) \in (A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ **Droites parallèles :** Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

$\hookrightarrow$ **Intersection de deux droites**

• Géométrie euclidienne plane

$\hookrightarrow$ **Orthogonalité :** si $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$ et si $\mathcal{D}' = (B, \vec{u}')$. Alors : $\boxed{\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{u}' = 0}$

$\hookrightarrow$ **Vecteur normal à une droite :** $\vec{n}$ est dit normal à la droite $\mathcal{D}$ si $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$\hookrightarrow$ $\boxed{\text{si } \mathcal{D} : ax + by + c = 0, \text{ alors } \boldsymbol{\vec{n}(a,b)} \text{ est normal à } \mathcal{D}}$

$\hookrightarrow$ **Projeté orthogonal :** Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\vec{n}$ et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit M un point du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Alors H est caractérisé par :

$$\boxed{\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \end{cases}} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH} \text{ et } \vec{u} \text{ orthogonaux} \end{cases}}$$

$\hookrightarrow$ **Distance d'un point à une droite** : $\boxed{d(A, \mathcal{D}) = AH \text{ où } H \text{ le projeté orthogonal de } M \text{ sur } \mathcal{D}}$

• Cercles

$\hookrightarrow$ **Equation cartésienne** : $\boxed{\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}}$ avec $\Omega(a,b)$ centre du cercle et R rayon.

$\hookrightarrow$ **Cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$** : $\boxed{\boldsymbol{M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0}}$

$\hookrightarrow$ **Paramétrage d'un cercle** de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R : $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = a + R\cos t} \\ \boldsymbol{y = b + R\sin t} \end{cases} \boldsymbol{, t \in \mathbb{R}}}$

• Tangente à un cercle

$\hookrightarrow$ **Définition :** Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite du plan. Alors $\mathcal{D}$ est dite tangente à $\mathcal{C}$ si $d(\Omega, \mathcal{D}) = R$.

$\hookrightarrow$ **Equation de la tangente à un cercle :** Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, R)$ et $A \in \mathcal{C}$. Soit T_A la tangente à $\mathcal{C}$ en A. On a :

$$\boxed{M(x,y) \in T_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{A\Omega} \text{ orthogonaux} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0}$$

Questions de cours :

q1 : fonction arctan : domaine de définition, de dérivabilité, dérivée, dérivée de $\arctan(u)$, tableau de variation, courbe et relations $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x \\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x \end{cases}$

q2 : définition du déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, propriétés, expression dans un ROND

q3 : droites du plan : équation cartésienne et représention paramètrique de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

q4 : donner 3 méthodes pour obtenir une équation de droite :

1. Si $\mathcal{D} = (A, \vec{u})$, colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ et $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0$
2. utilisation de $\vec{u}\,(-b, a)$ pour obtenir $ax + by + c = 0$, puis on obtient c avec A
3. utilisation d'un vecteur normal $\vec{n}$ et alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

q5 : équation cartésienne et paramétrage du cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R

q6 : définition et méthode pour obtenir une équation de la tangente à un cercle en un point

Exercices de TD :

ex 12 du TD 13

ex 9 TD 14

ex 18 du TD 14

Attention la formule de la distance d'un point à une droite n'est plus au programme.

Entraînement supplémentaire (facultatif mais conseillé) : fiche de calcul n°20 pages 46 à 48 du cahier de calcul