```
> restart; with(LinearAlgebra) :
> L := 1000
```

$$L := 1000 \quad \textbf{(1)}$$

```
> N := 100;
```

$$N := 100 \quad \textbf{(2)}$$

```
>
> solution := (t)→evalf(sin(sqrt(L)·t)) :    # Точное решение
> p := t→1; q := t→L; f := t→2·L·sin(sqrt(L)·t ); l := 4·π/sqrt(L);
```

$$p := t \mapsto 1$$

$$q := t \mapsto L$$

$$f := t \mapsto 2 \cdot L \cdot \sin\left(\sqrt{L} \cdot t\right)$$

$$l := \frac{\pi \sqrt{10}}{25} \quad \textbf{(3)}$$

```
> x := array(0..N) :
  for i from 0 to N do
    x[i] := i·l/N :
  end do:
> h := array(0..N) :
  for i from 0 to N do
    h[i] := l/N :
  end do:
> phi := array(0..N) :
> phi[0] := t → piecewise(0 ≤ t and t ≤ x[1], (x[1] − t)/h[1], t ≥ x[1], 0) :
> for i from 1 to N − 1 do
    phi[i] := subs(j = i, (t) → piecewise(
        x[j−1] ≤ t and t ≤ x[j], (t − x[j − 1])/h[j − 1],
        x[j] ≤ t and t ≤ x[j + 1], (x[j + 1] − t)/h[j + 1],
        t ≤ x[j−1] or t ≥ x[j + 1], 0) ) :
  end do:
> phi[N] := t → piecewise(x[N−1] ≤ t and t ≤ x[N], (t − x[N−1])/h[N−1] , t ≤ x[N−1], 0) :
> b := array(1..N) :
```

for *i* **from** 1 **to** *N* **do**

$$b[i] := subs\left(j=i, \left(\frac{1}{(h[j-1])^2}\right) \cdot int(-p(t) + q(t)\cdot (t - x[j-1]) \cdot (x[j] - t), t = x[j-1]..x[j])\right)$$

end do:

> $A := array(1..N-1):$

for *j* **from** 1 **to** $N-1$ **do**

$$A[j] := \left(\frac{1}{(h[j-1])^2}\right) \cdot int\left(p(x) + q(x)\cdot (t - x[j-1])^2, t=x[j-1]..x[j]\right) + \left(\frac{1}{(h[j+1])^2}\right)\cdot int\left(p(x) + q(x)\cdot (x[j+1] - t)^2, t=x[j]..x[j+1]\right):$$

end do:

>

> $eqs := seq(b[j]\cdot y[j-1] + A[j]\cdot y[j] + b[j+1]\cdot y[j+1] = int(f(t)\cdot \mathrm{phi}[j](t), t=0..l), j = 1..N-1):$

> $vars := [seq(y[j], j=1..N-1)]:$

> $A\_matrix, b\_vector := GenerateMatrix([eqs], vars):$

>

> $a := convert(evalf(subs(y[0]=0, y[N]=0, LinearSolve(A\_matrix, b\_vector))), array):$

>

> $yh := (t) \rightarrow evalf(sum(\mathrm{phi}[k](t)\cdot a[k], k=1..N-1)):$

>

> $plot\left([\mathrm{abs}(yh(t) - solution(t)), h[0]^2], t=0..l\right)$

Цель эксперимента

Проверить теоретическую оценку ошибки метода конечных элементов.

Условия эксперимента

$y'' - \lambda \cdot y = -2\cdot\lambda\cdot\sin(\mathrm{sqrt}(\lambda)\cdot x)$ − *исходное уравнение* :

$y(0) = 0, y\left(\frac{4\cdot \mathrm{pi}}{\mathrm{sqrt}(\lambda)}\right) = 0$ − *граничные условия* :

$y = \sin(\mathrm{sqrt}(\lambda)\cdot x)$ −*решение уравнения* в *явном виде* : *@osogi thanks*

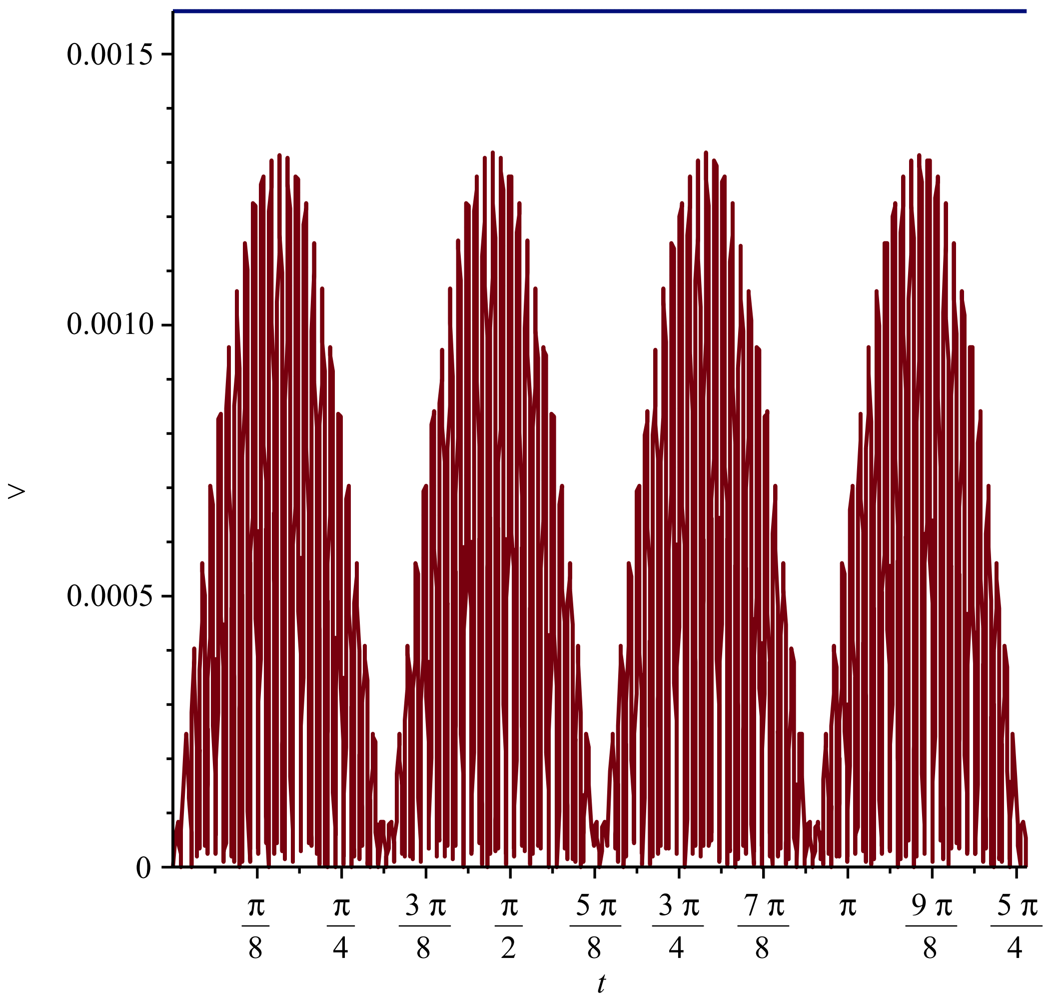
Теоретические обоснования ошибки

В книге "Методы вычислений"[1] утверждается, что максимальная ошибка равняется, O(h^2).

[1] http://www.ict.nsc.ru/matmod/files/textbooks/KhakimzyanovCherny-2.pdf

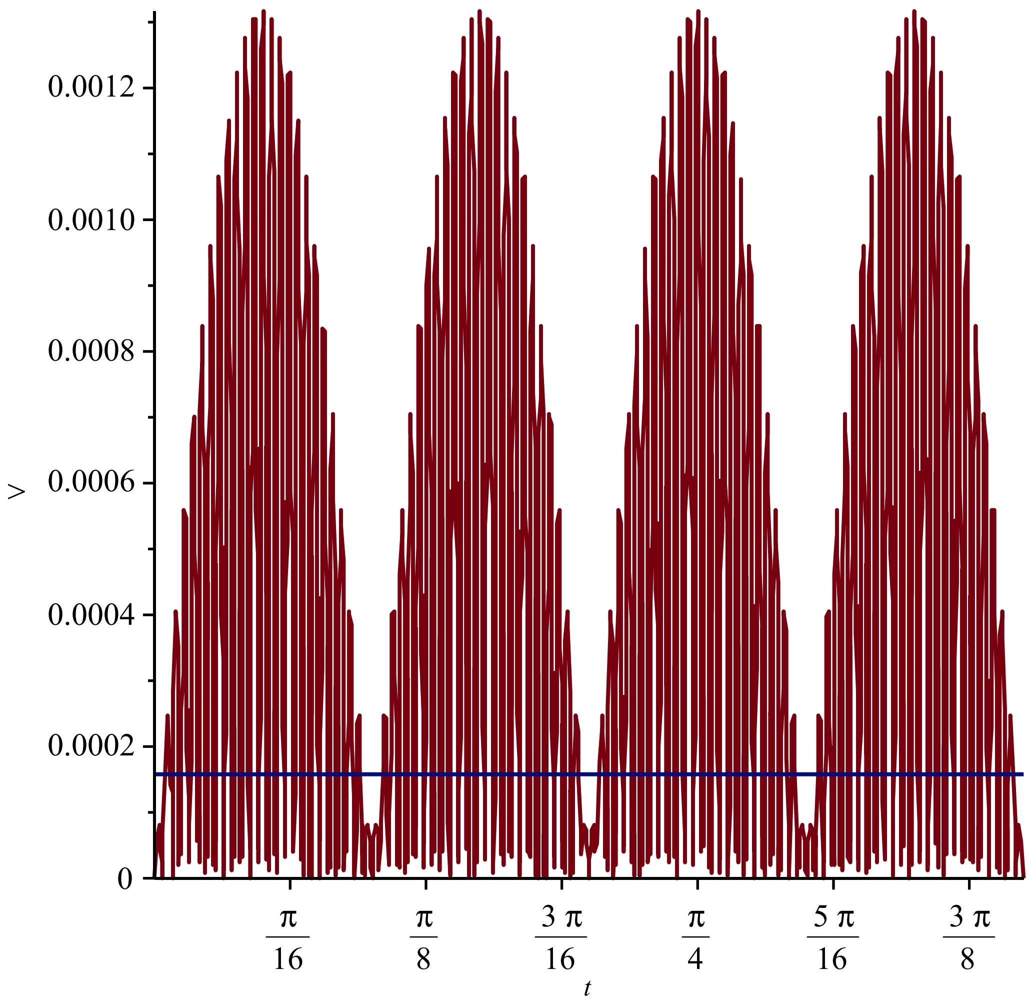
Результаты эксперимента

Максимальная ошибка остается постоянной независимо от параметра лямбда.
При этом оценка O(h^2) достигается.



lambda = 10, N =

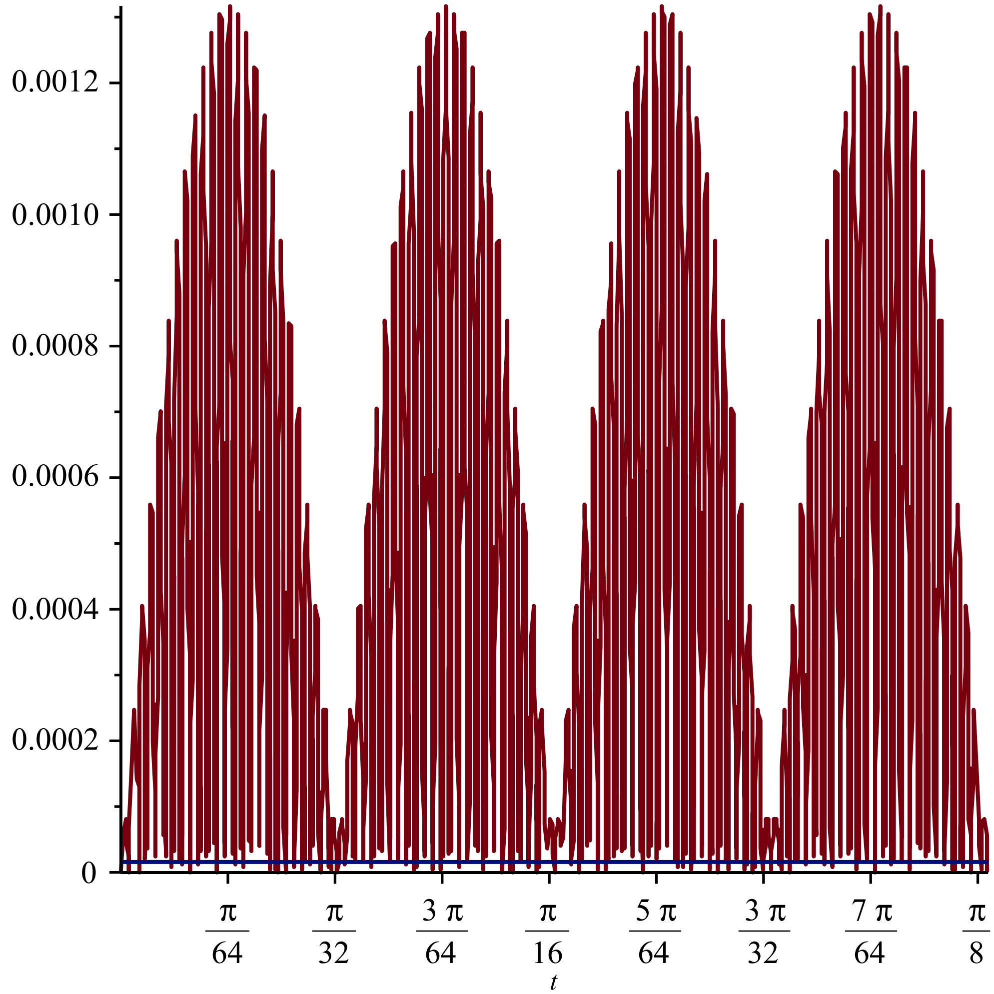
100



lambda = 100, N =

100

>



lambda = 1000, N = 100

>