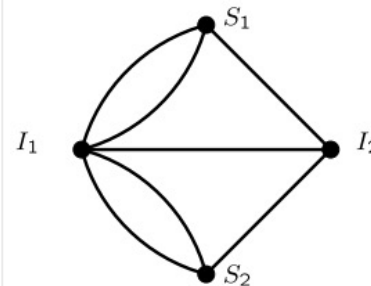
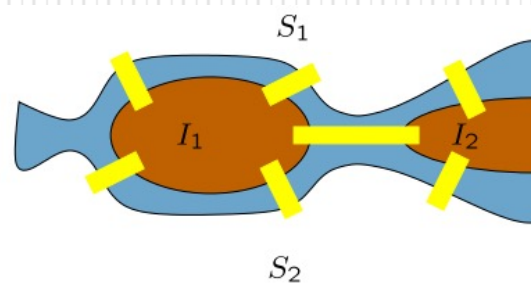


LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Cây có hướng & Cây khung tối thiểu

Phạm Nguyễn Khang
BM. Khoa học máy tính, CNTT
pnkhang@cit.ctu.edu.vn



Cần Thơ, 8/2021

Nội dung

- Bài toán xây dựng hệ thống dẫn nước
- Cây có hướng
- Cây khung có hướng
- Cây khung có hướng nhỏ nhất
- Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

Xây dựng hệ thống dẫn nước



Nhà máy nước



Xây dựng hệ thống dẫn nước



Nhà máy nước



**Xây hệ thống dẫn
nước sao cho: nhà
nào cũng có nước
để sử dụng**

Xây dựng hệ thống dẫn nước

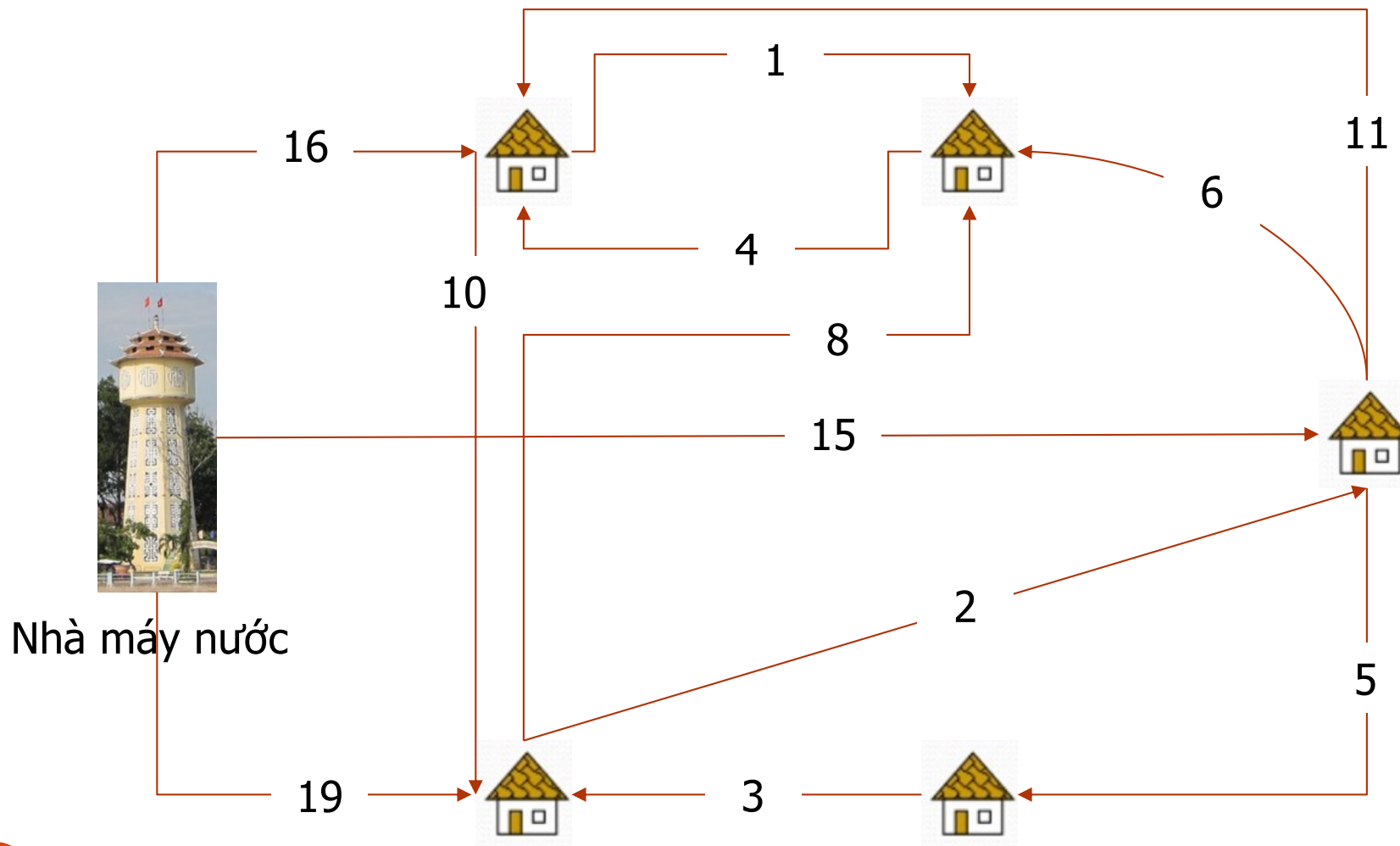


Nhà máy nước

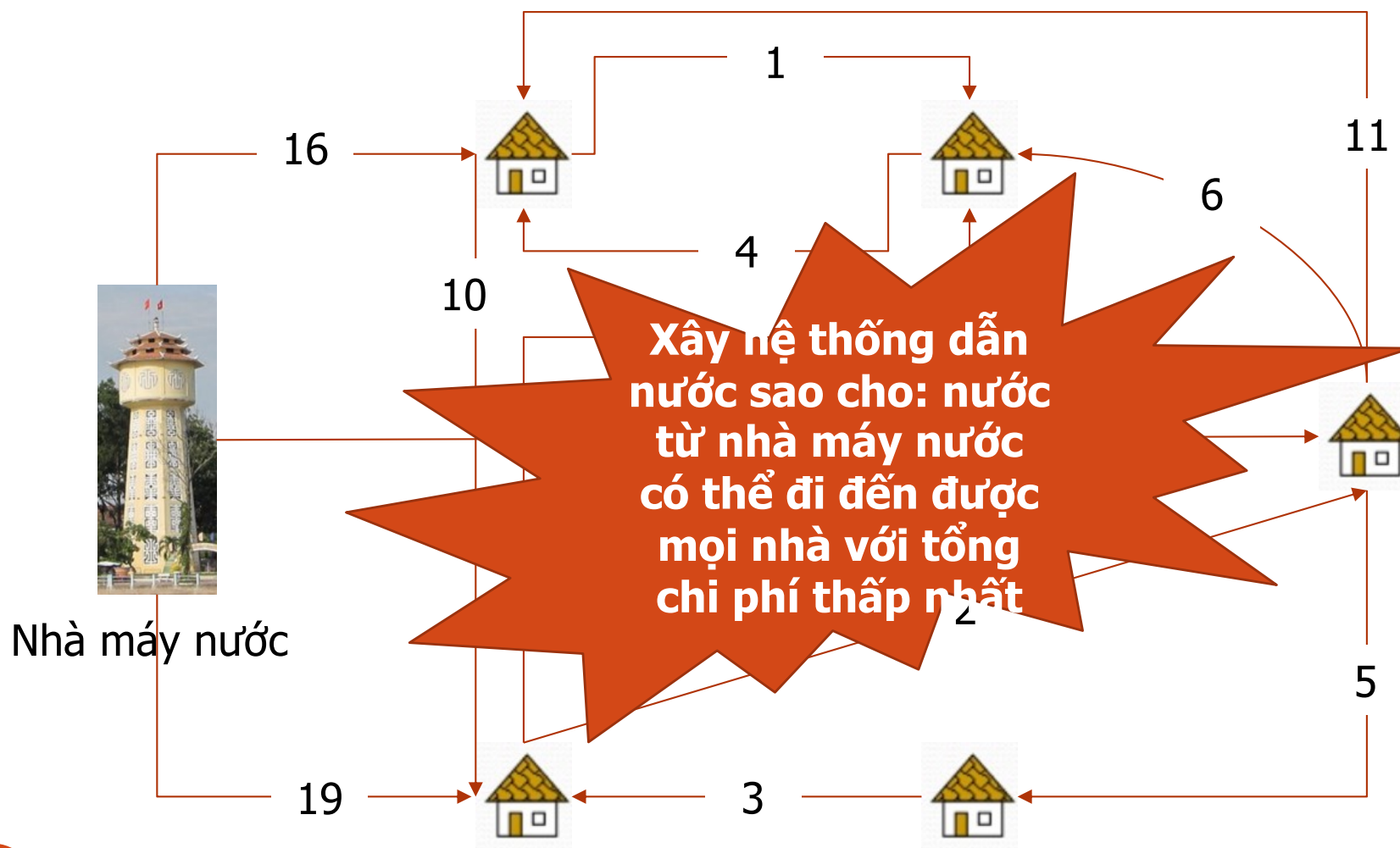
**Xây hệ thống dẫn
nước sao cho: nước
từ nhà máy nước
có thể đi đến được
mọi nhà**



Xây dựng hệ thống dẫn nước



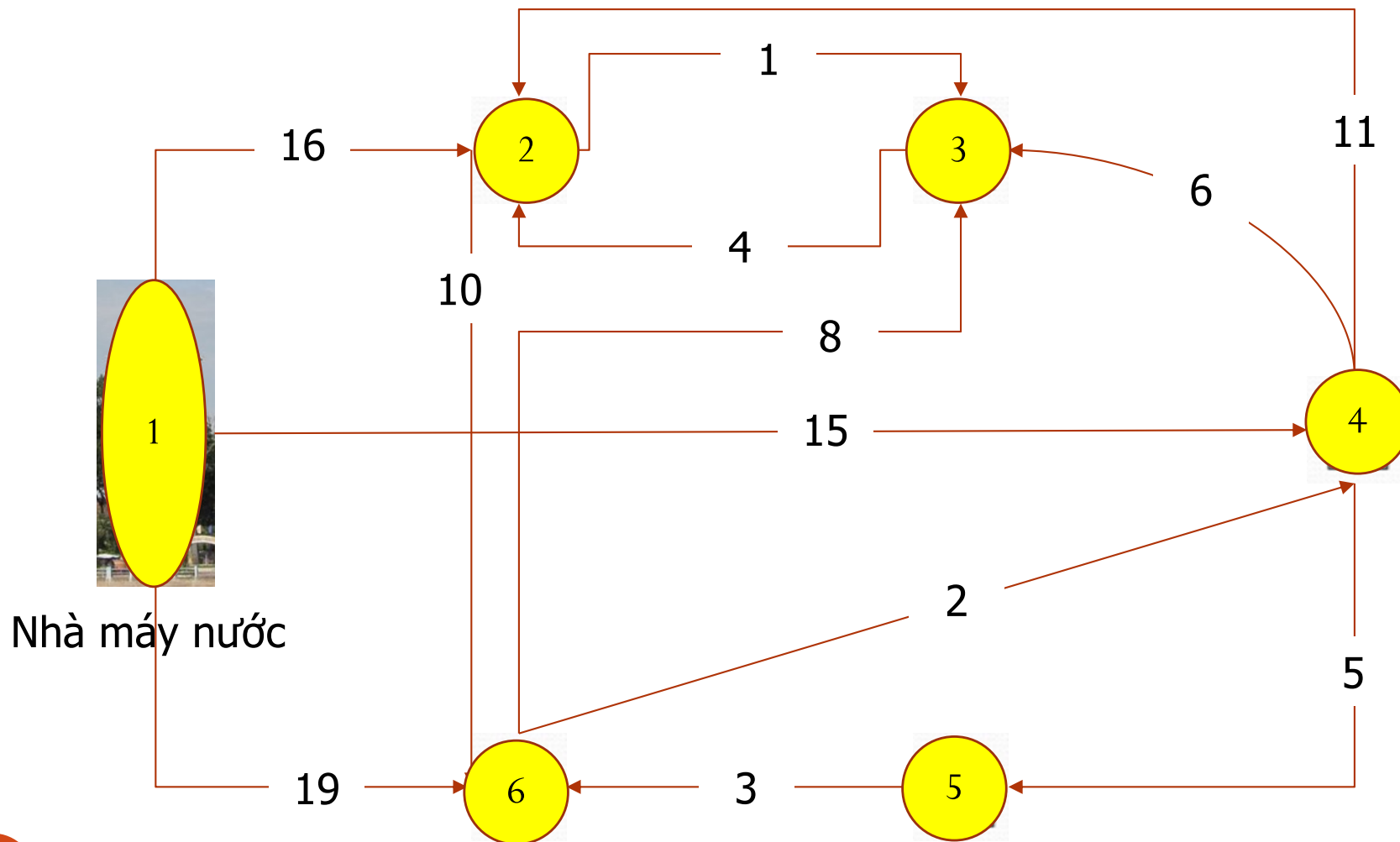
Xây dựng hệ thống dẫn nước



Xây dựng hệ thống dẫn nước

- Đỉnh: nhà/nhà máy nước, gọi tắt là địa điểm
- Cung: đường ống nối giữa các địa điểm với nhau.
Nước chỉ chảy 1 chiều => cung có hướng
- Trọng số cung: chi phí xây dựng đường ống tương ứng
- Đồ thị có hướng, có trọng số

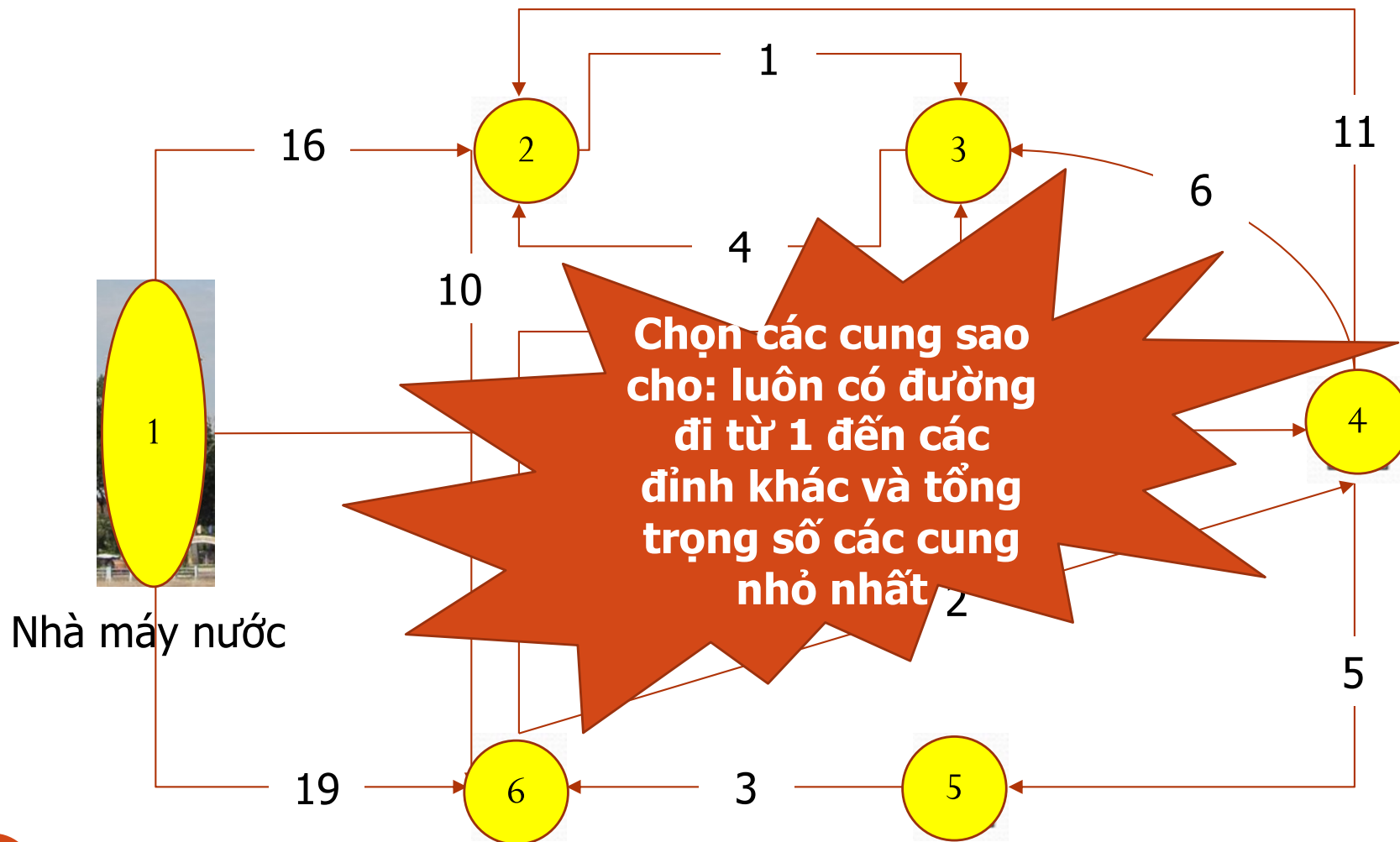
Xây dựng hệ thống dẫn nước



Xây dựng hệ thống dẫn nước

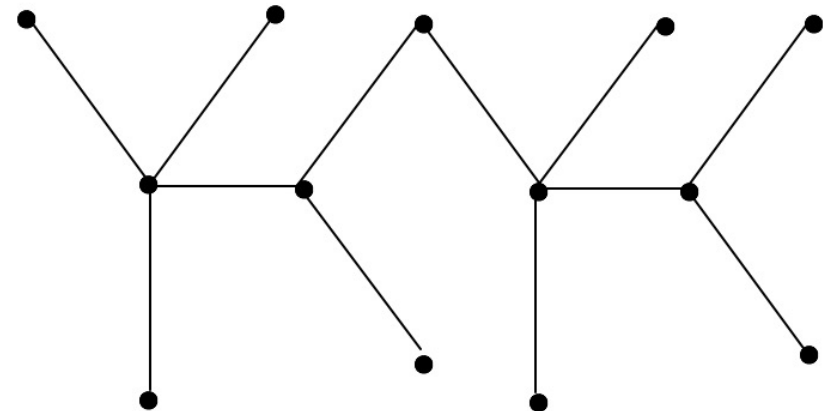
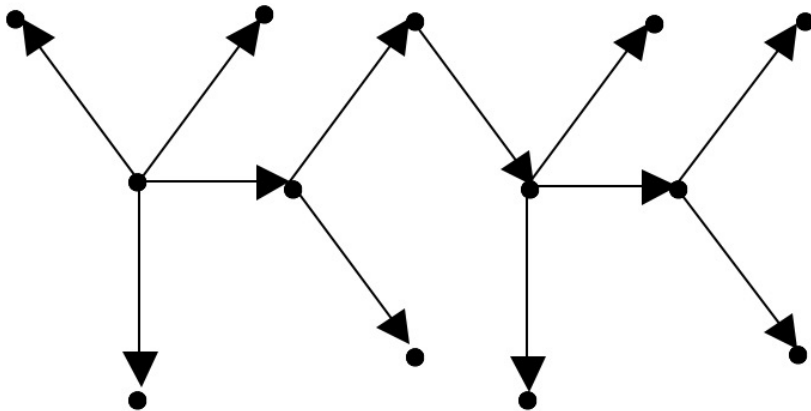


Xây dựng hệ thống dẫn nước



Cây có hướng

- Định nghĩa:
 - Đồ thị có hướng $G = \langle V, E \rangle$ là **một cây có hướng, gốc r** khi và chỉ khi:
 - G không có chu trình vô hướng
 - Luôn có đường đi từ r đến các đỉnh khác

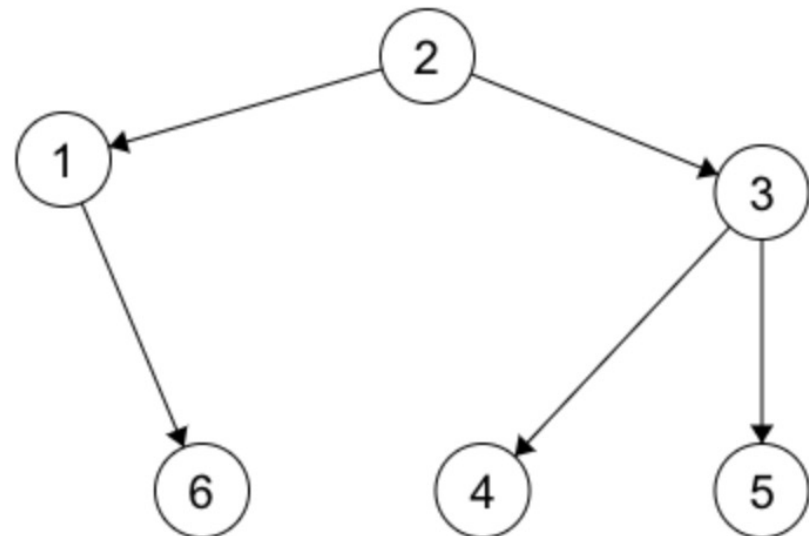
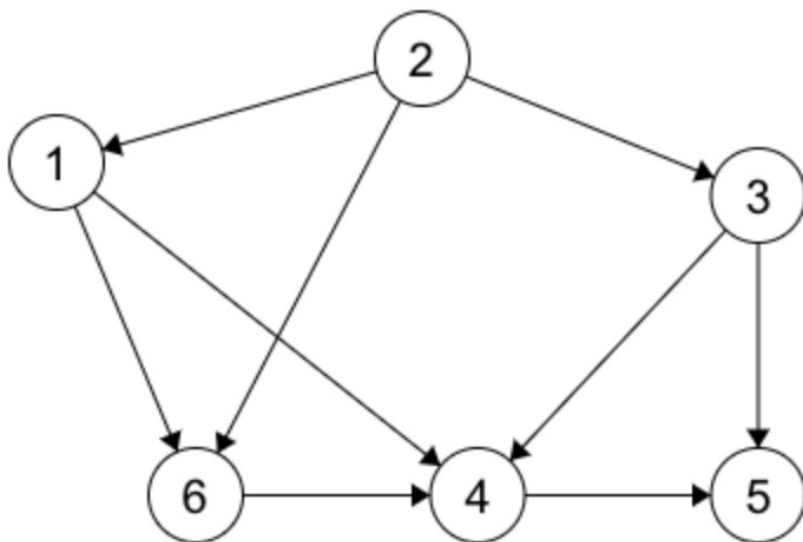


Cây có hướng

- Các tính chất (định lý): G là cây có hướng gốc r
 1. Tồn tại đỉnh r được nối với mỗi một đỉnh khác bằng một đường đi duy nhất xuất phát từ r .
 2. Gắn liền thông mạnh và cực tiểu đối với tính chất này.
 3. Liên thông và tồn tại một đỉnh r có bậc trong bằng không và bậc trong của những đỉnh khác r là bằng 1.
 4. Không có chu trình và tồn tại một đỉnh r có bậc trong bằng không và bậc trong của những đỉnh khác r là bằng 1.
 5. Gắn liền thông mạnh và không có chu trình.
 6. Gắn liền thông mạnh và có $n-1$ cung.
- [Xem thêm Giáo trình Toán rời rạc](#)

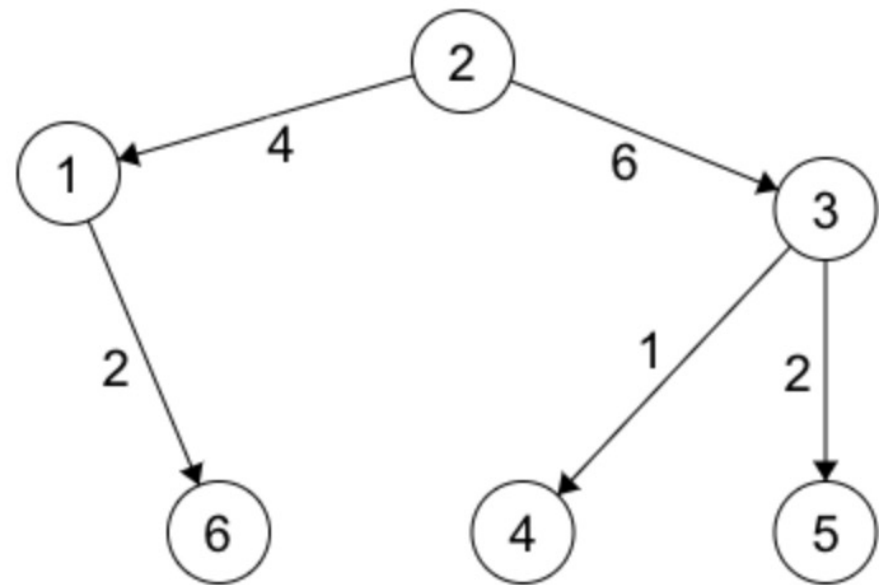
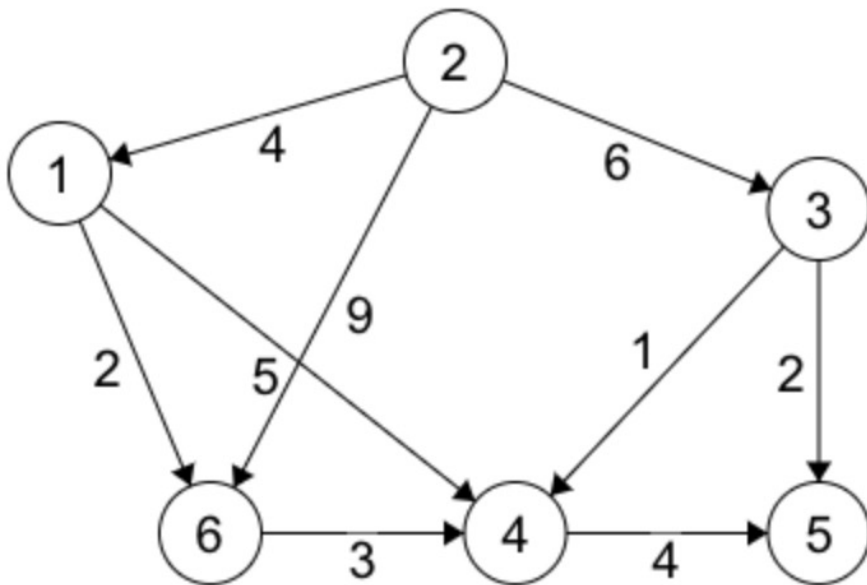
Cây khung có hướng

- Cây khung của đồ thị G
 - Cây có hướng
 - Gồm tất cả các đỉnh của đồ thị G

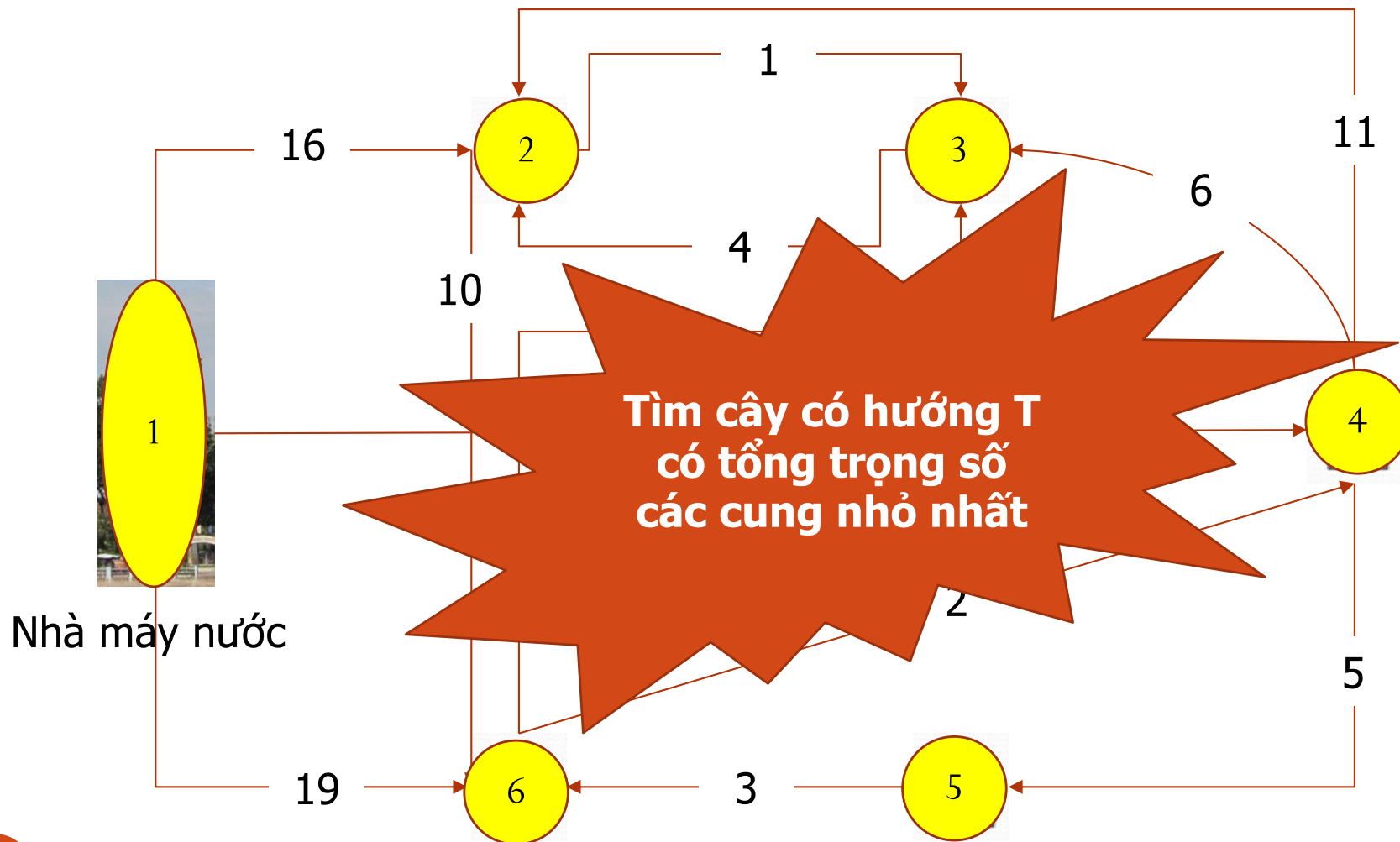


Cây khung có hướng nhỏ nhất

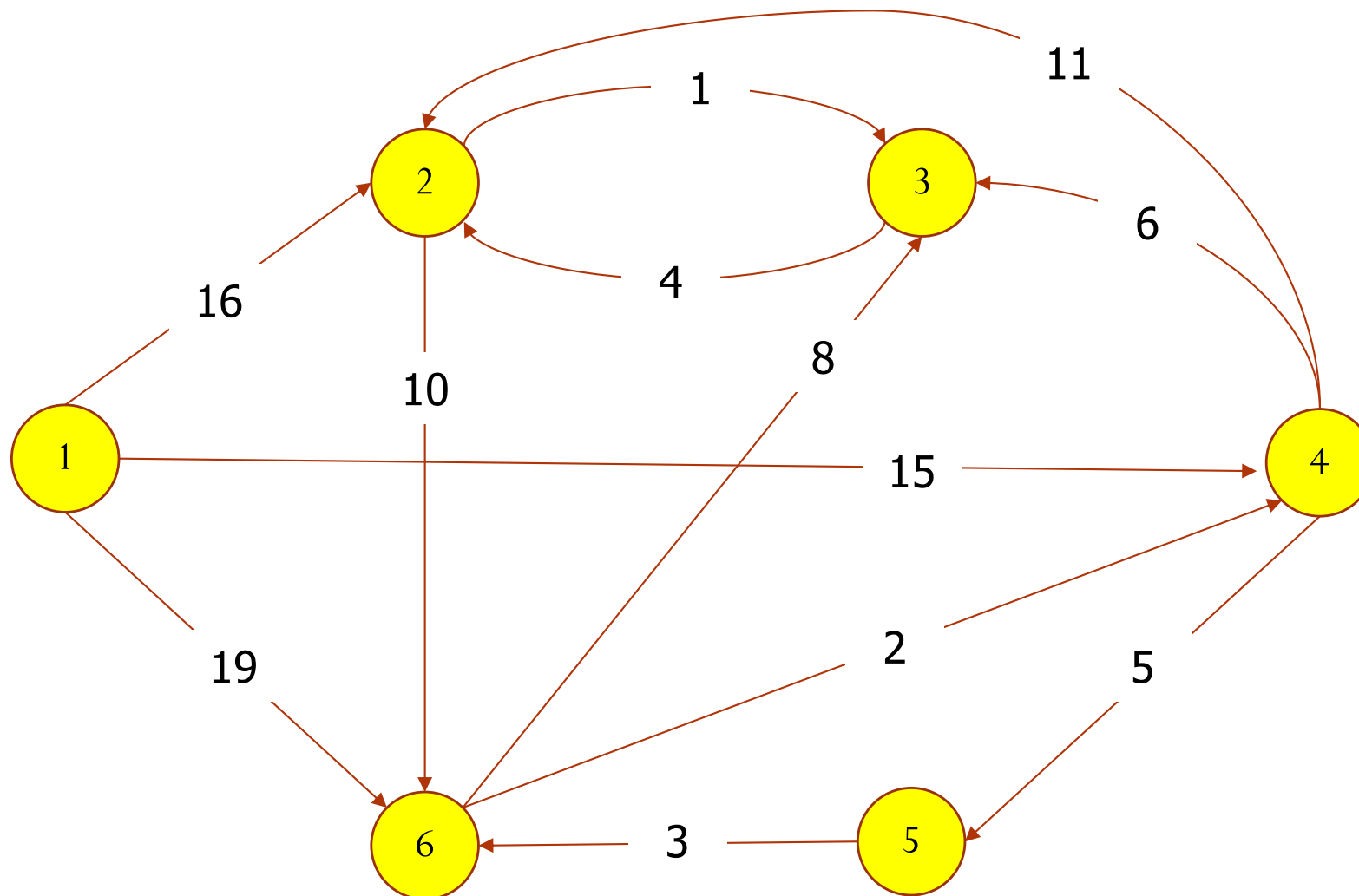
- Cây khung có hướng nhỏ nhất
 - Cây khung có hướng có tổng số trọng số các cung nhỏ nhất



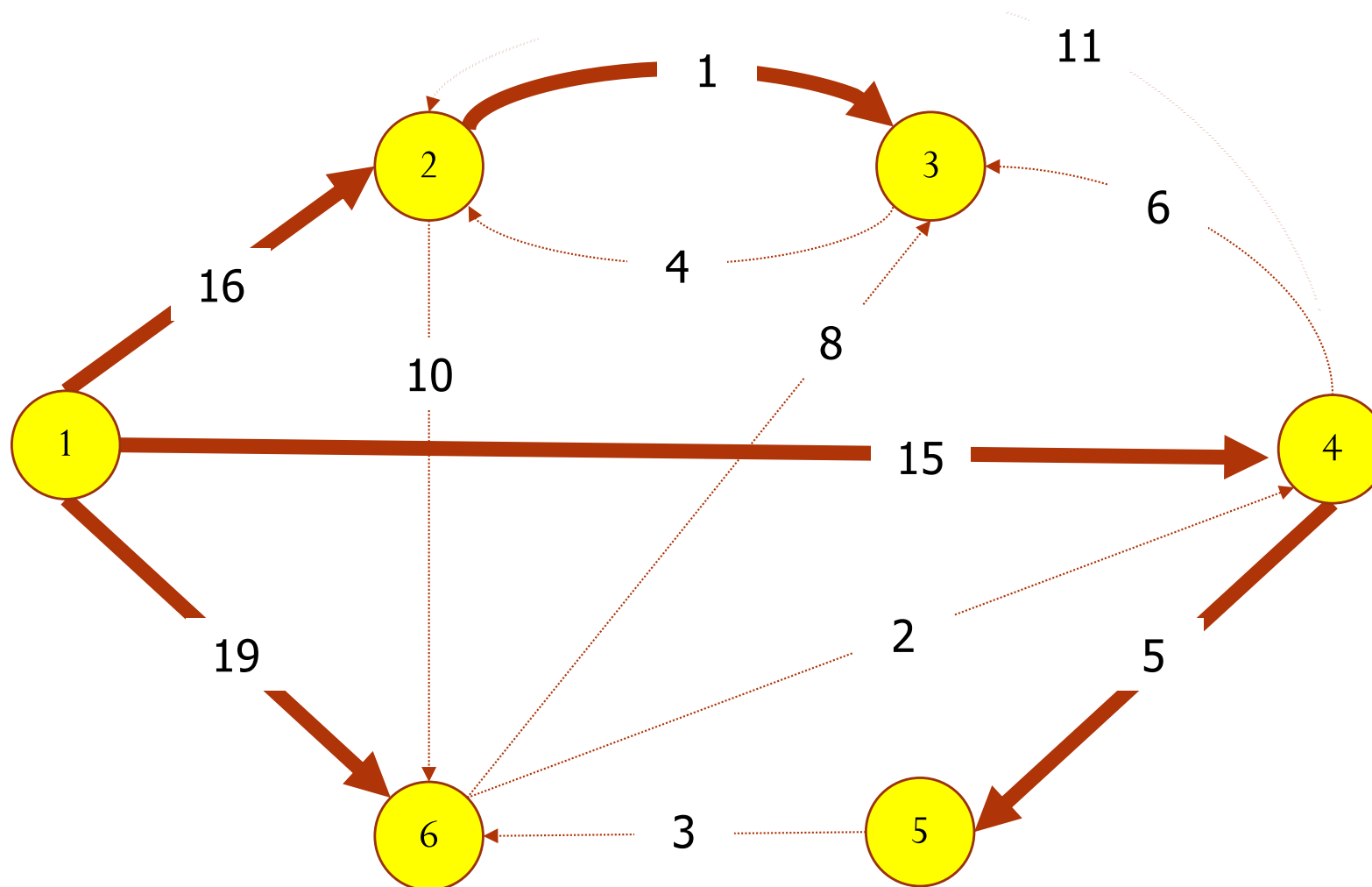
Xây dựng hệ thống dẫn nước



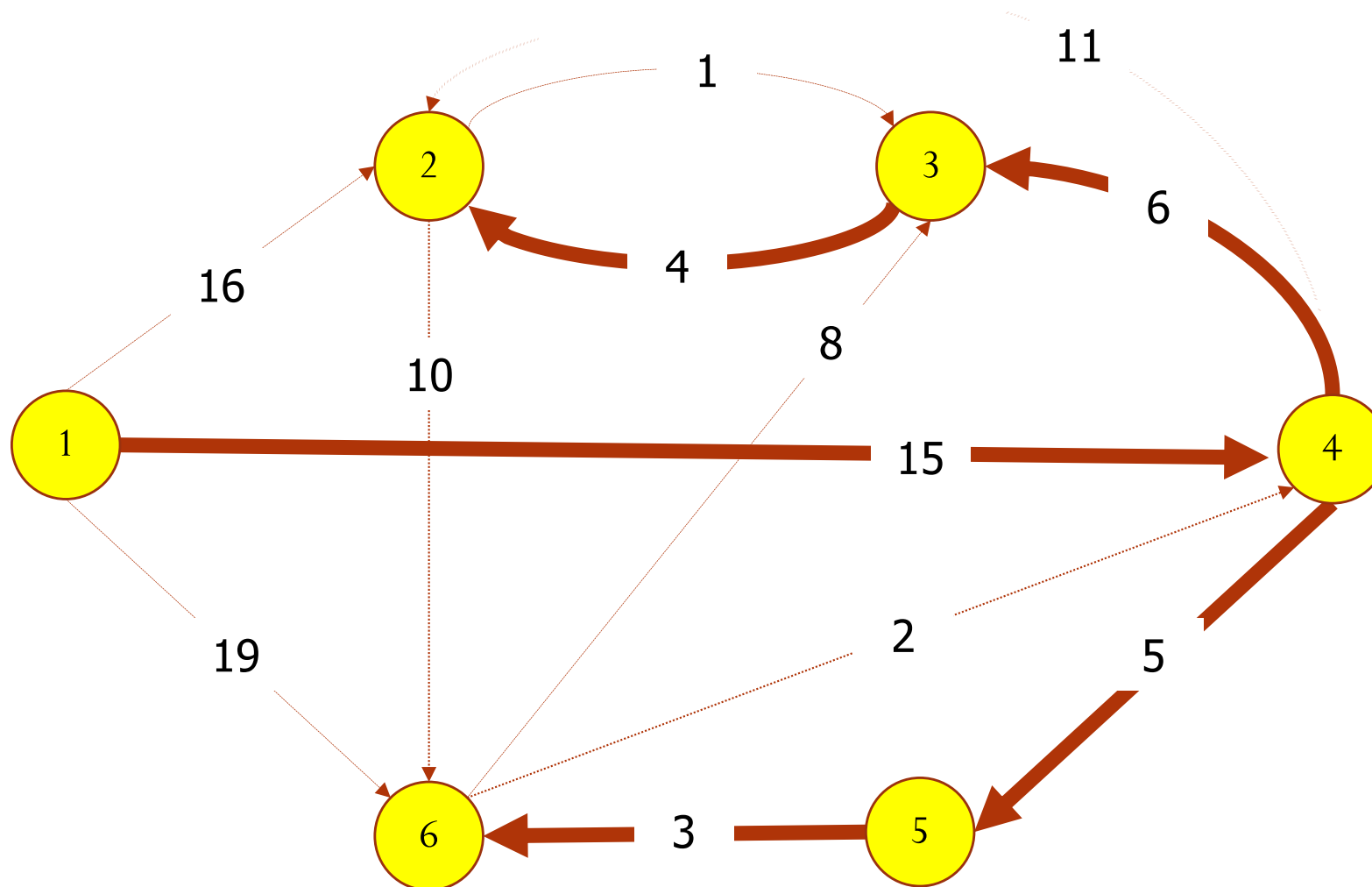
Xây dựng hệ thống dẫn nước



Xây dựng hệ thống dẫn nước



Xây dựng hệ thống dẫn nước



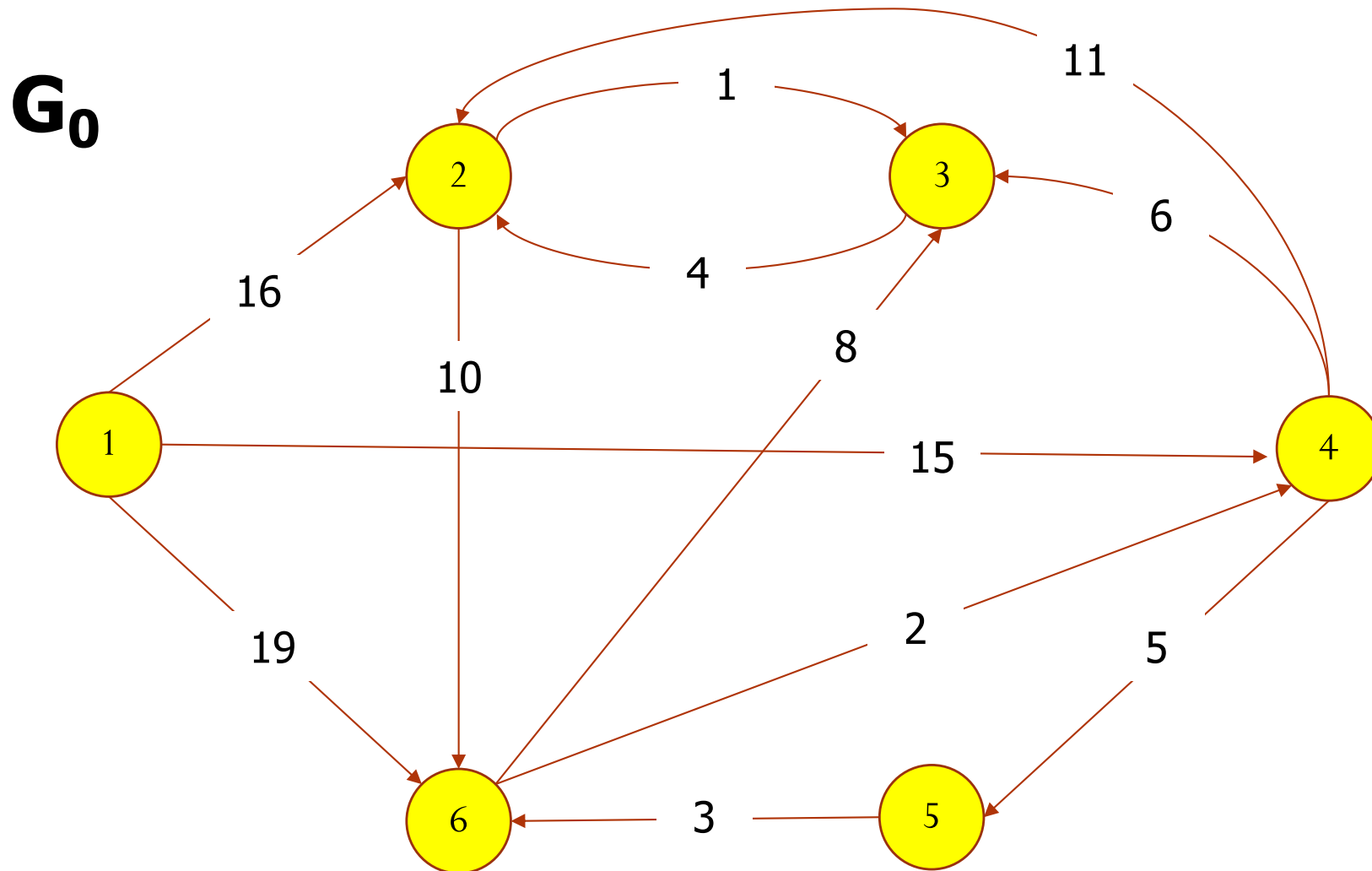
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- Pha co
 - Gọi đồ thị gốc là G_0 , $t = 0$
 - Lặp
 - **Xây dựng đồ thị xấp xỉ H_t từ G_t**
 - Nếu H_t không chứa chu trình => **thoát vòng lặp chuyển sang pha giãn**
 - **Ngược lại co G_t thành G_{t+1}**
 - $t = t + 1$
- **Pha giãn**

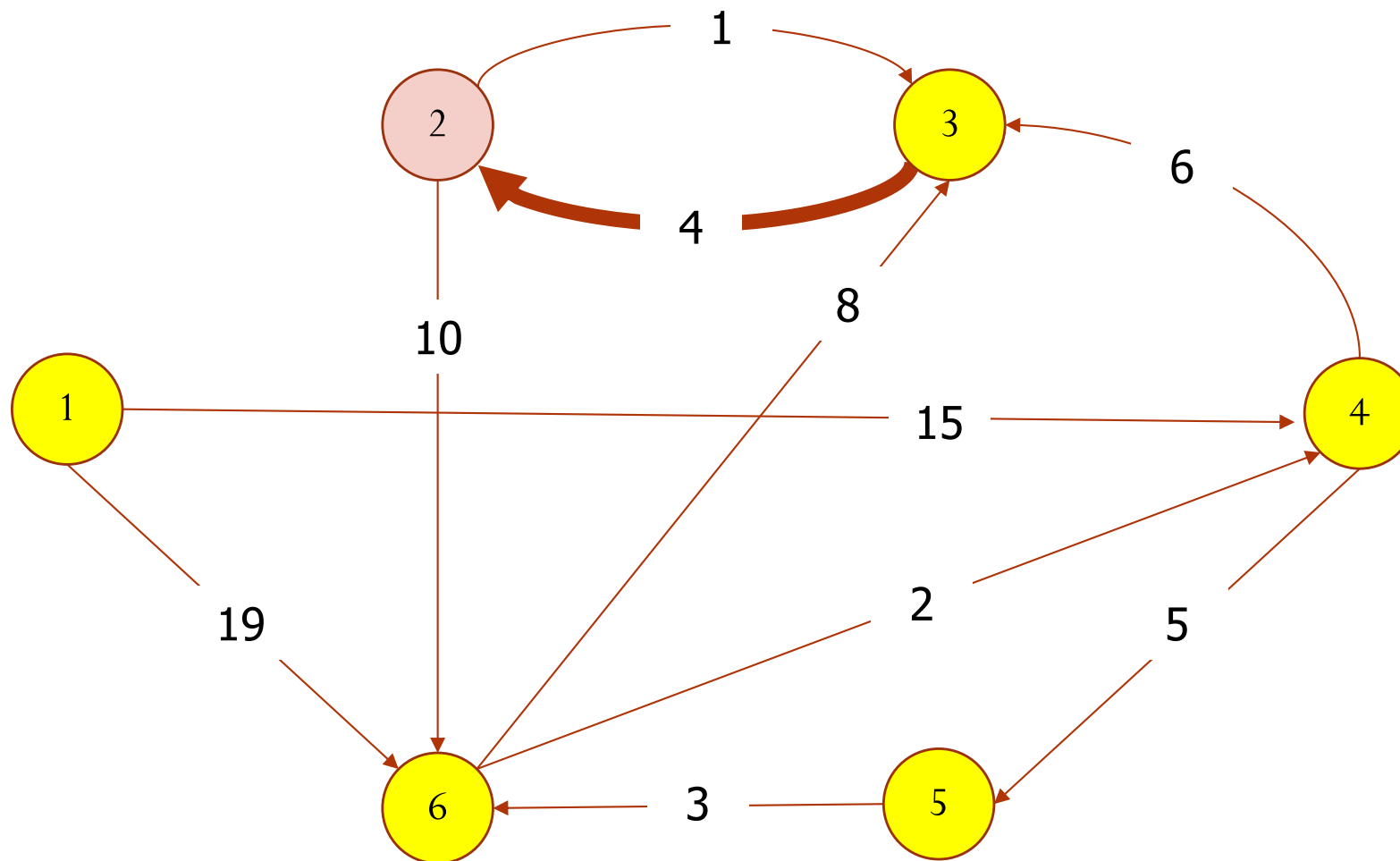
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- Xây dựng đồ thị xấp xỉ H_t từ G_t
 - Trừ gốc ra, với mỗi đỉnh còn lại **giữ lại 1 cung đi đến nó có trọng số nhỏ nhất** (bỏ các cung khác đi).
- Bài tập:
 - Bước lặp 0
 - Xây dựng đồ thị H_0 từ G_0

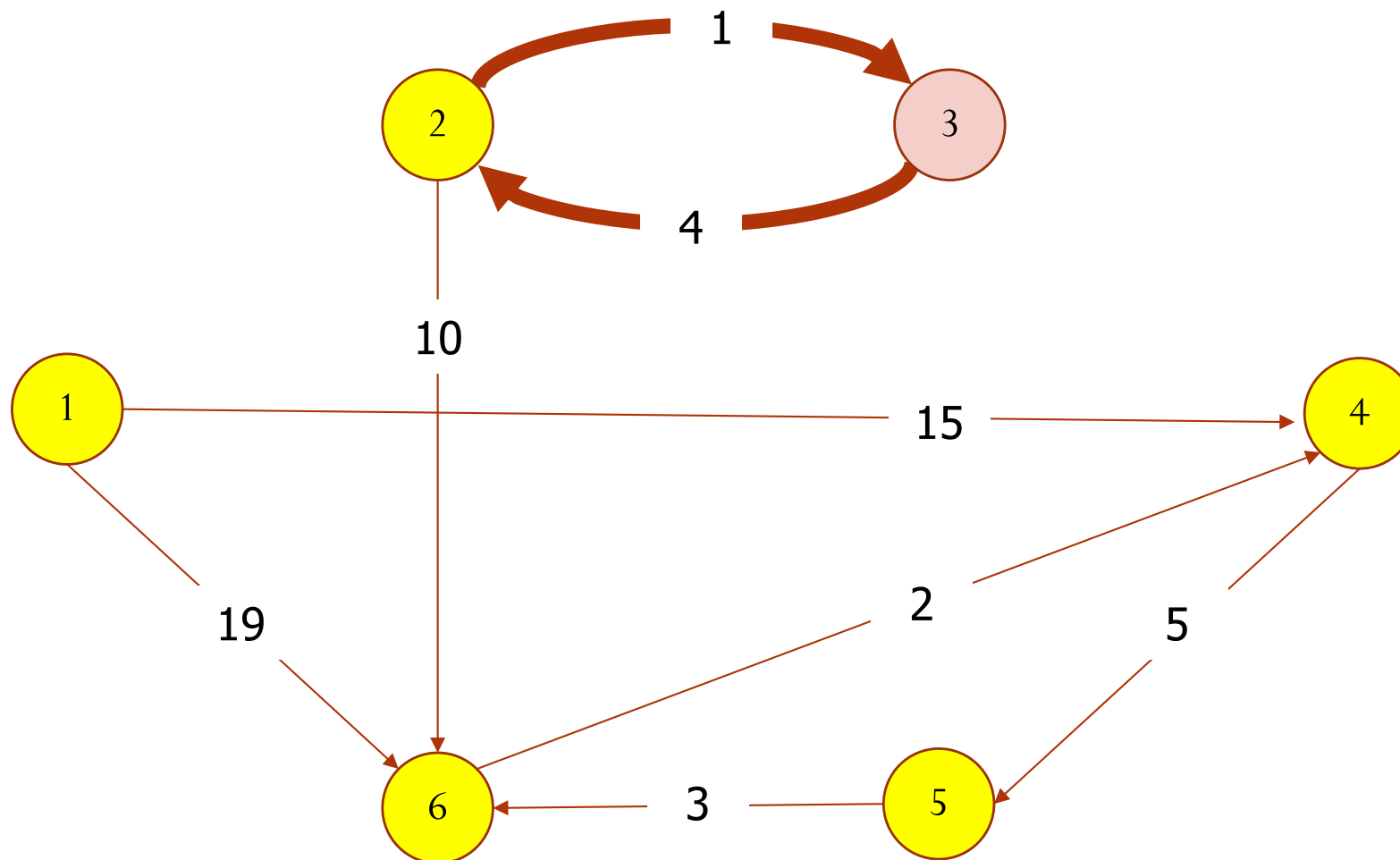
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds



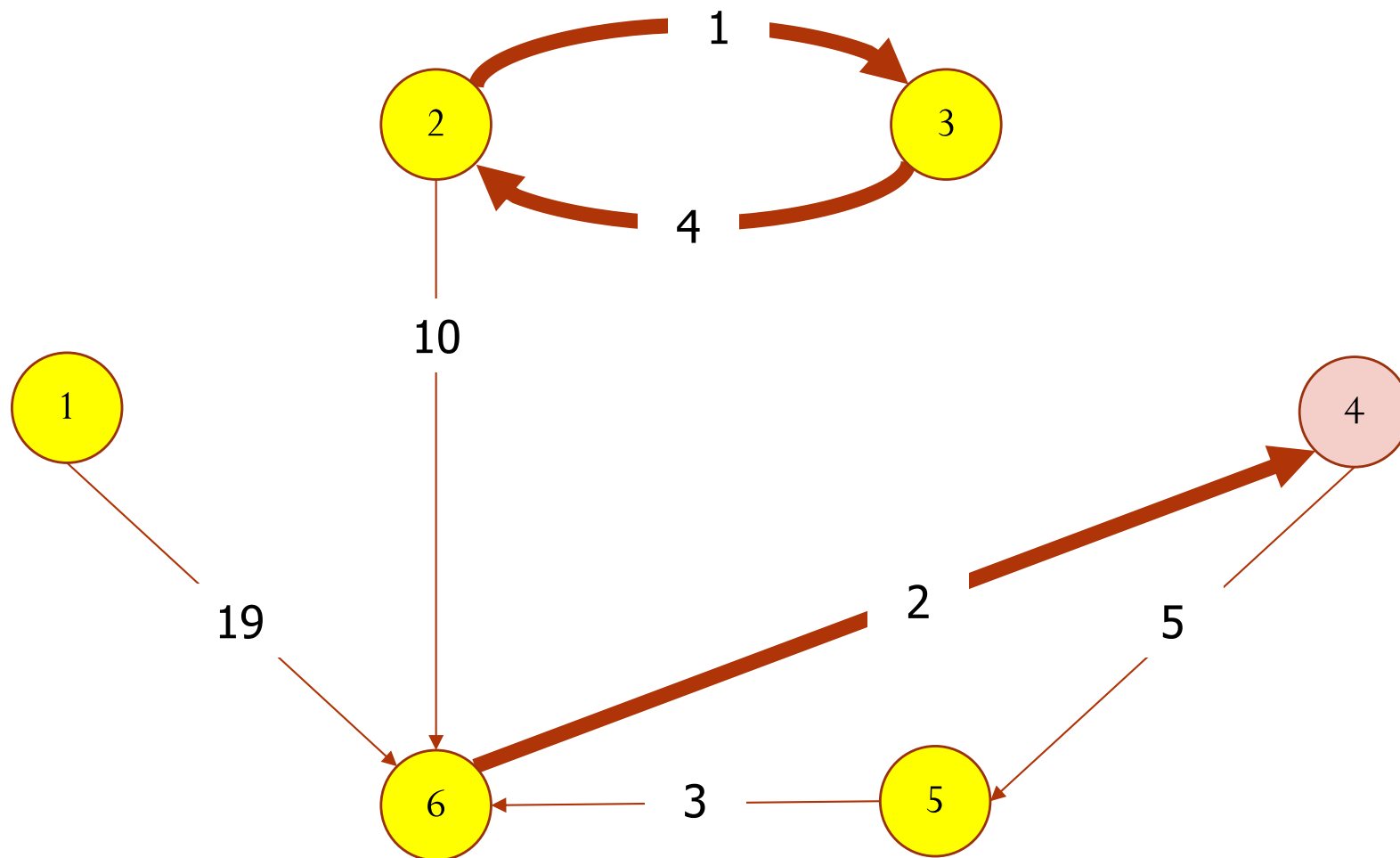
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds



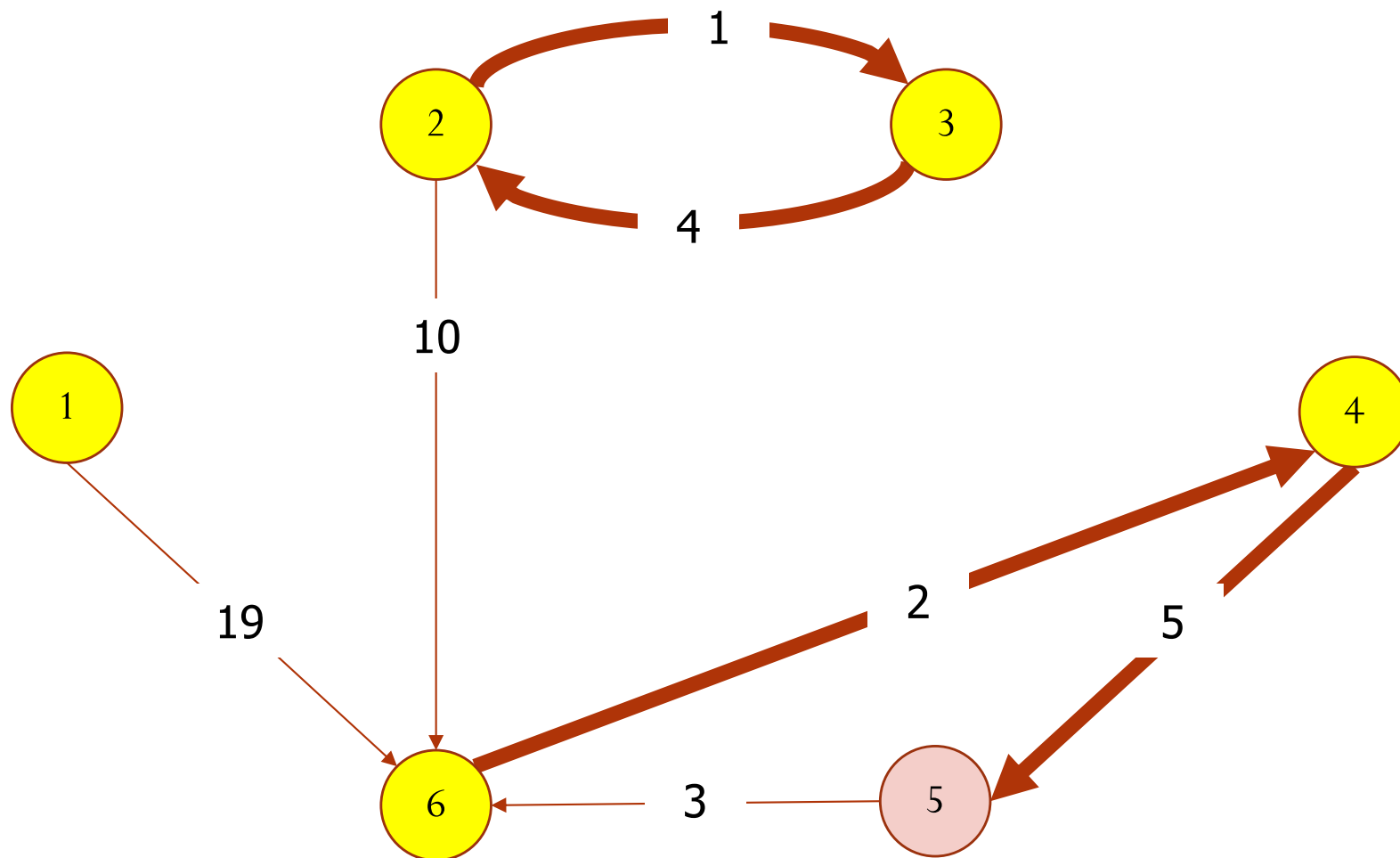
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

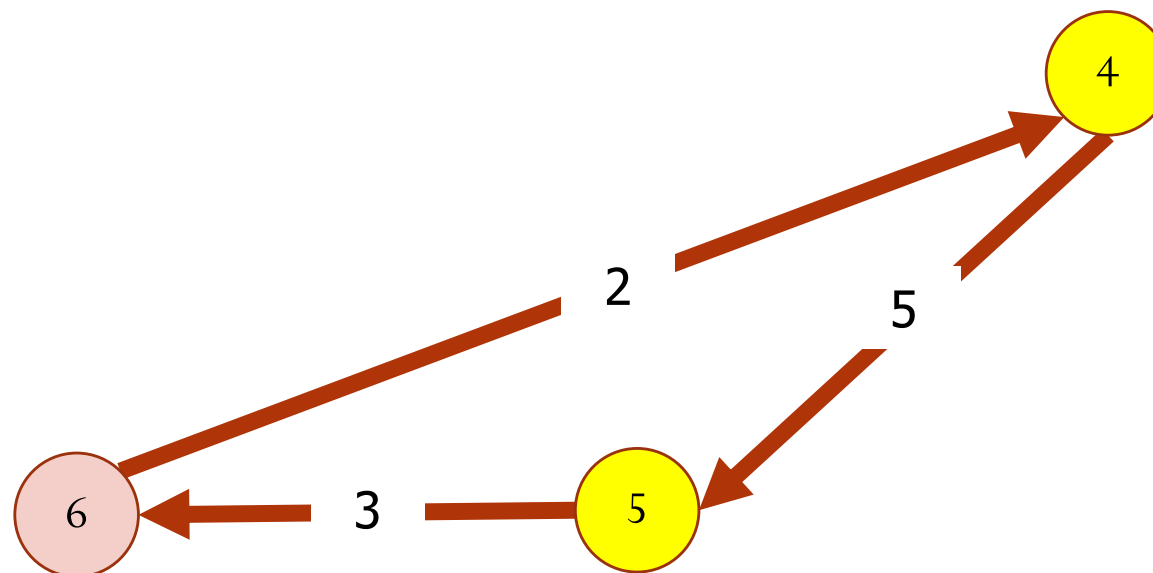
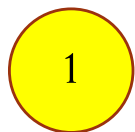
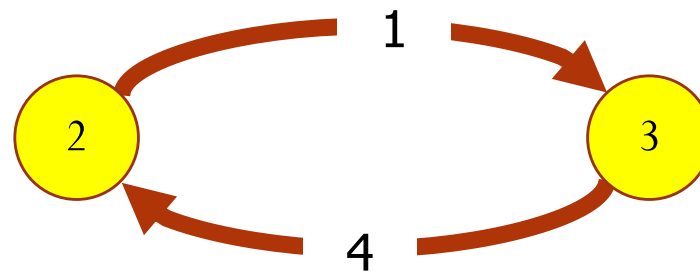


Thuật toán Chu-Liu/Edmonds



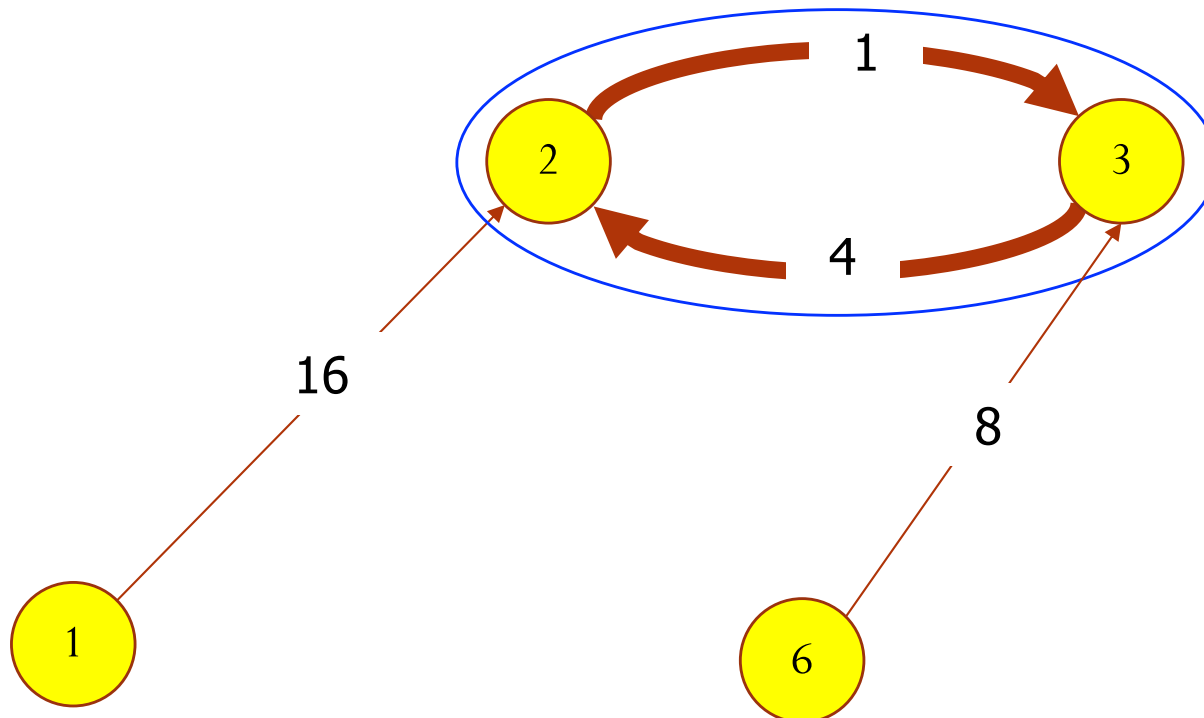
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

H₀



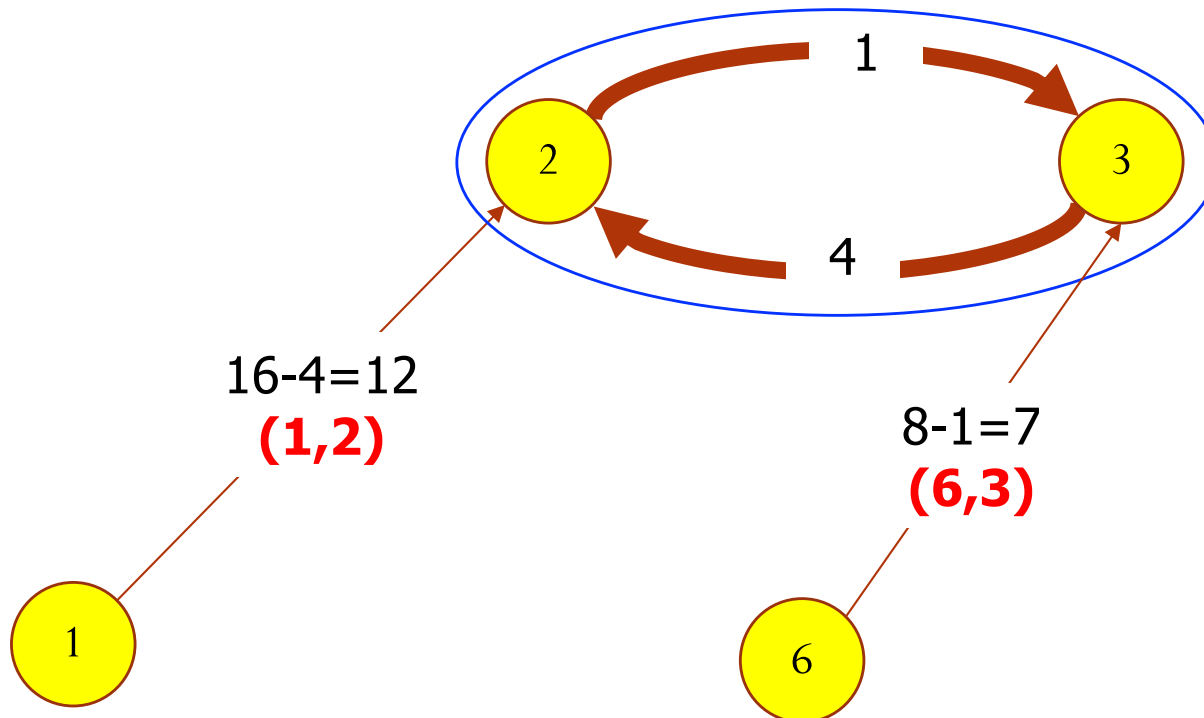
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- Co đồ thị G_t thành G_{t+1}
 - Gom các đỉnh trong chu trình thành đỉnh mới
 - Điều chỉnh trọng số của các cung có liên quan (cung từ ngoài đi đến 1 đỉnh trong chu trình)



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

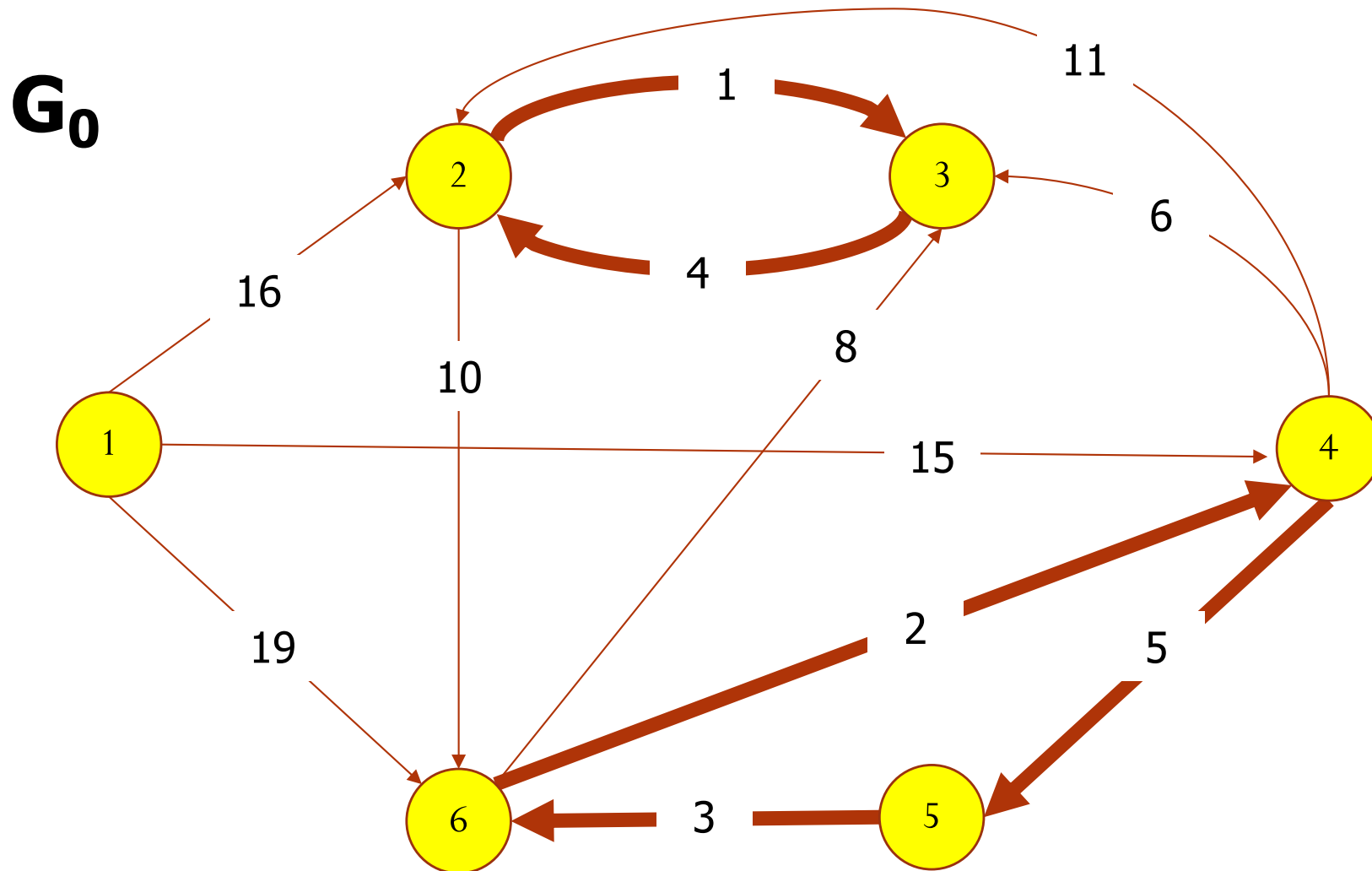
- Co đồ thị G_t thành G_{t+1}
 - Gom các đỉnh trong chu trình thành đỉnh mới
 - Điều chỉnh trọng số của các cung có liên quan (cung từ ngoài đi đến 1 đỉnh trong chu trình)



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

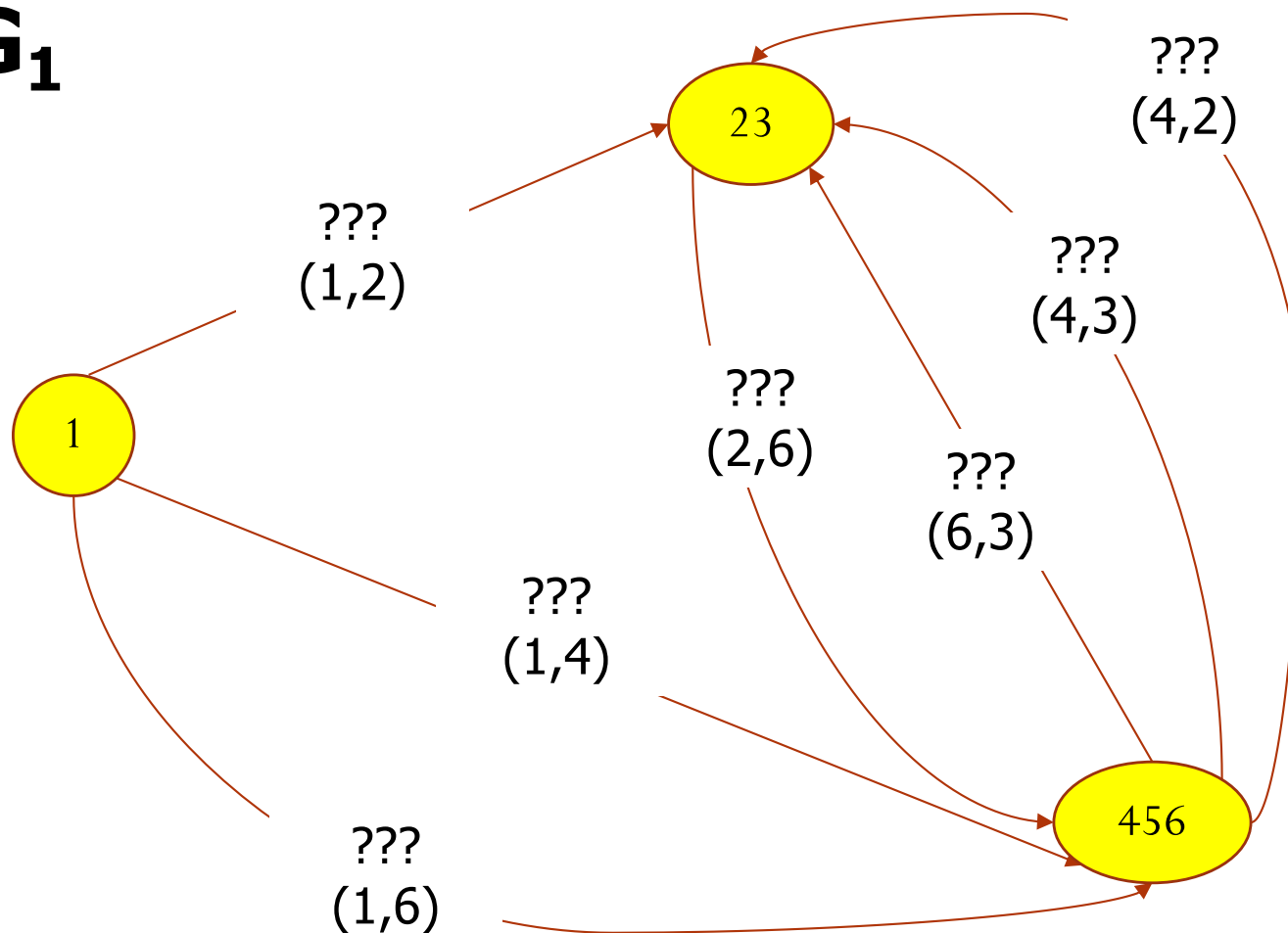
- Bài tập:
 - Co đồ thị G_0 thành G_1 (theo 2 chu trình tìm được ở H_0)

Thuật toán Chu-Liu/Edmonds



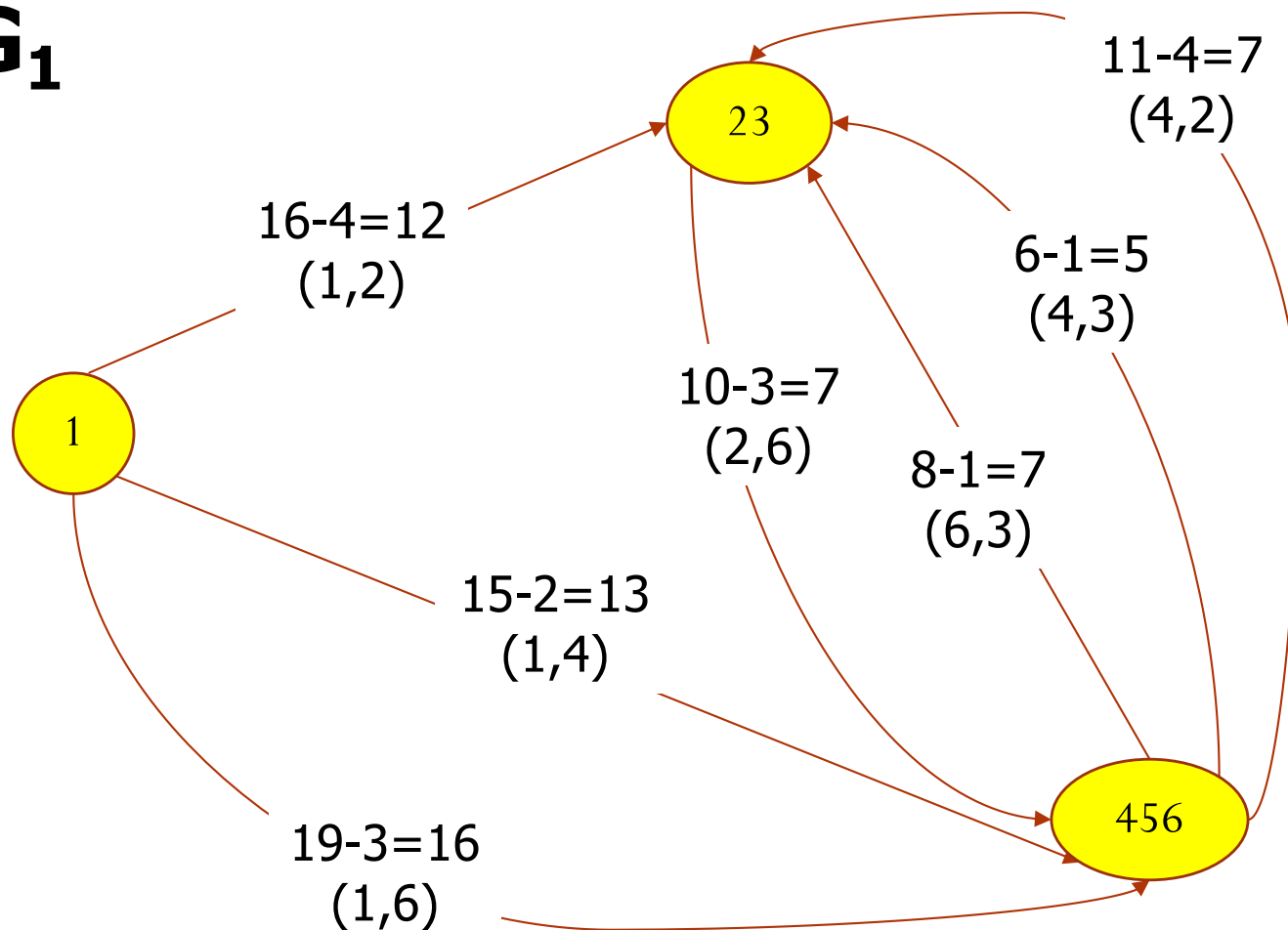
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

G₁



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

G₁

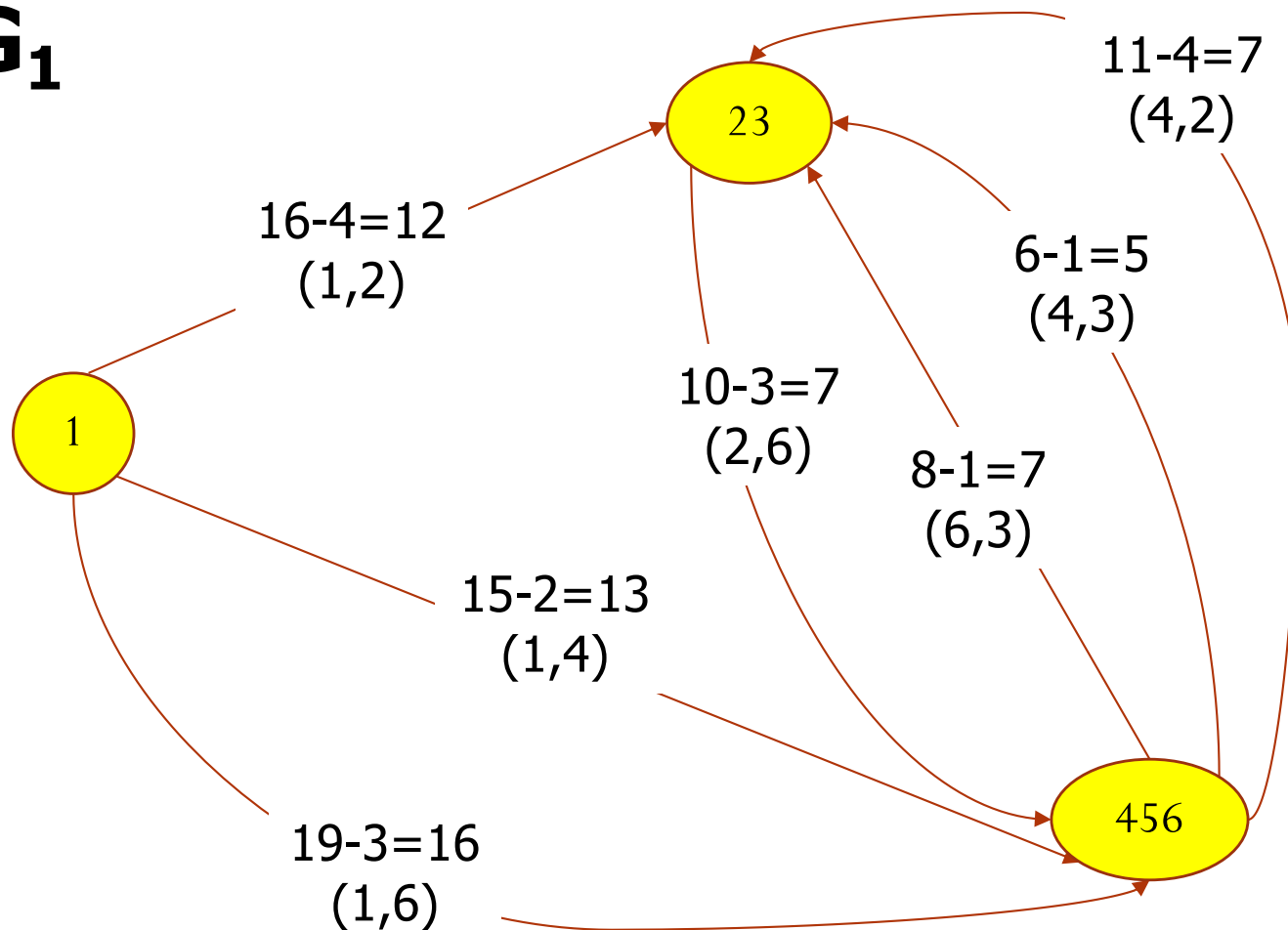


Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- Bước lặp 1
 - Xây dựng đồ thị xấp xỉ H_1

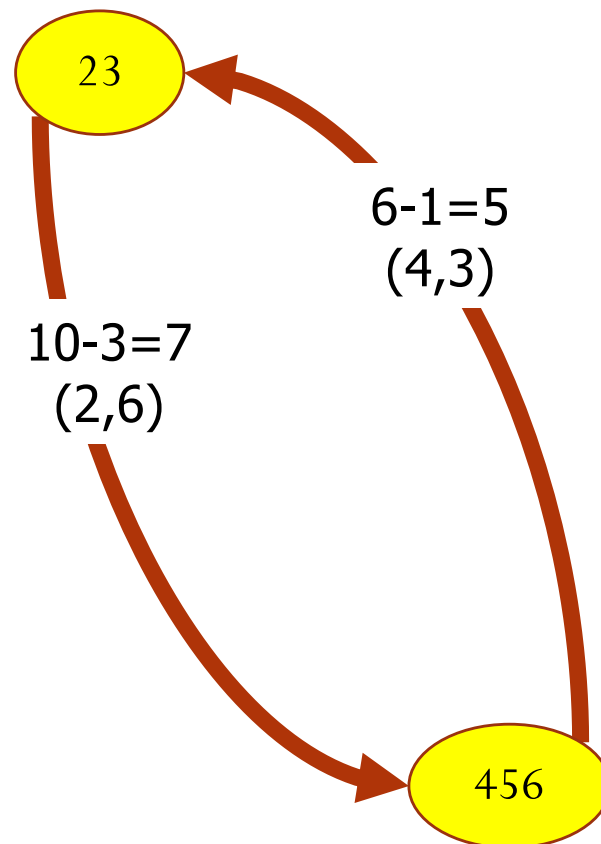
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

G₁



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

H₁

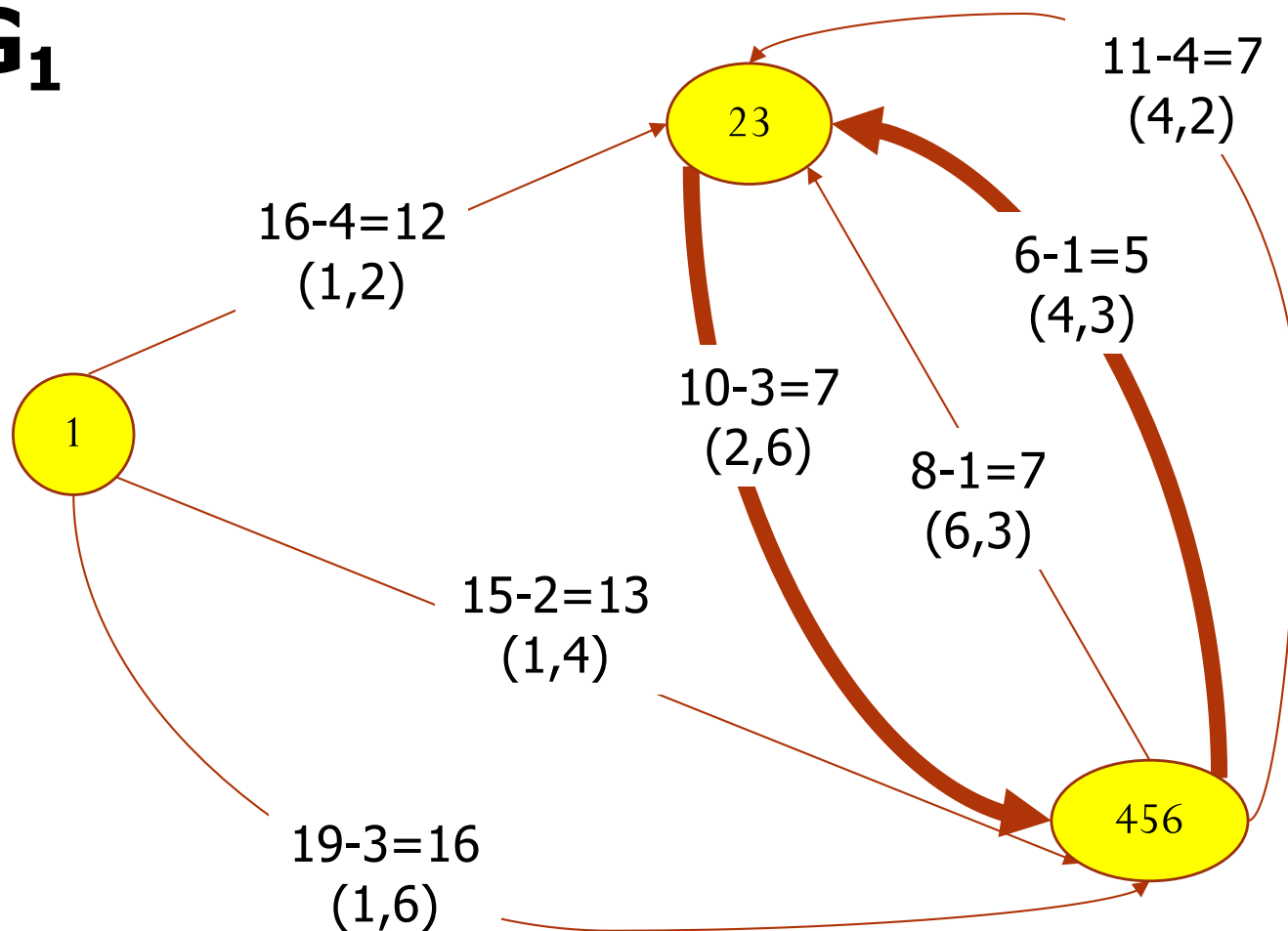


Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- Bài tập:
 - Co đồ thị G_1 thành G_2 (theo 1 chu trình tìm được ở H_1)

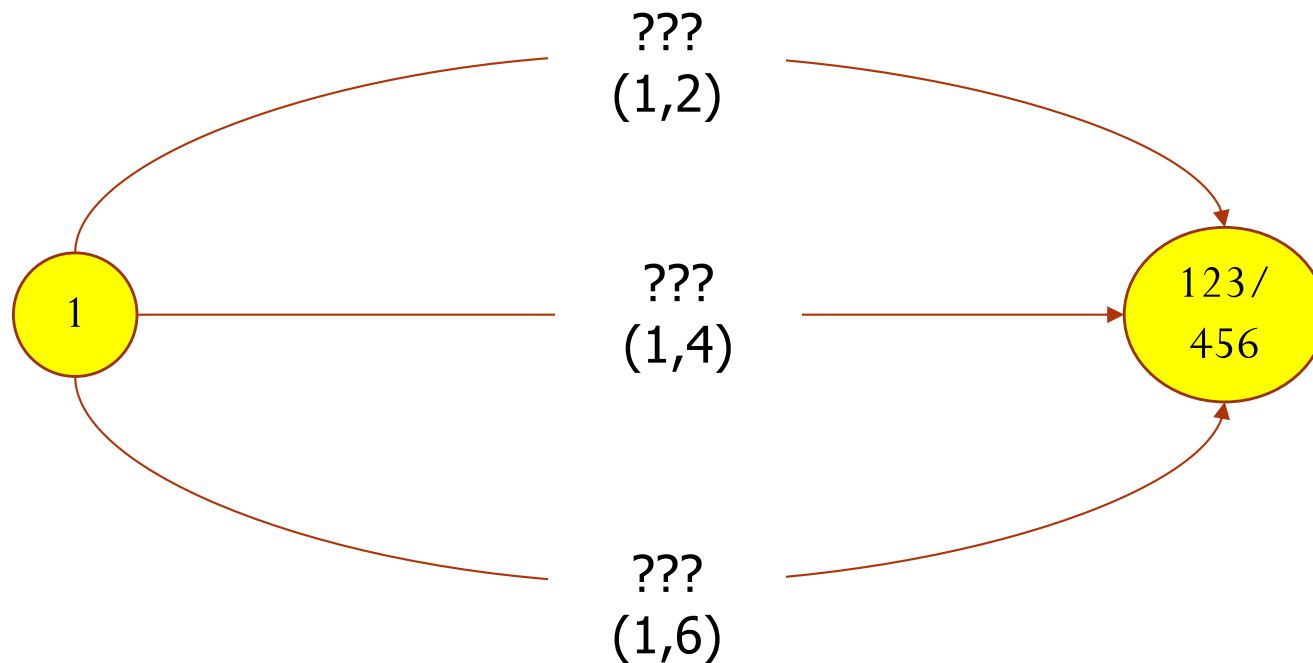
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

G₁



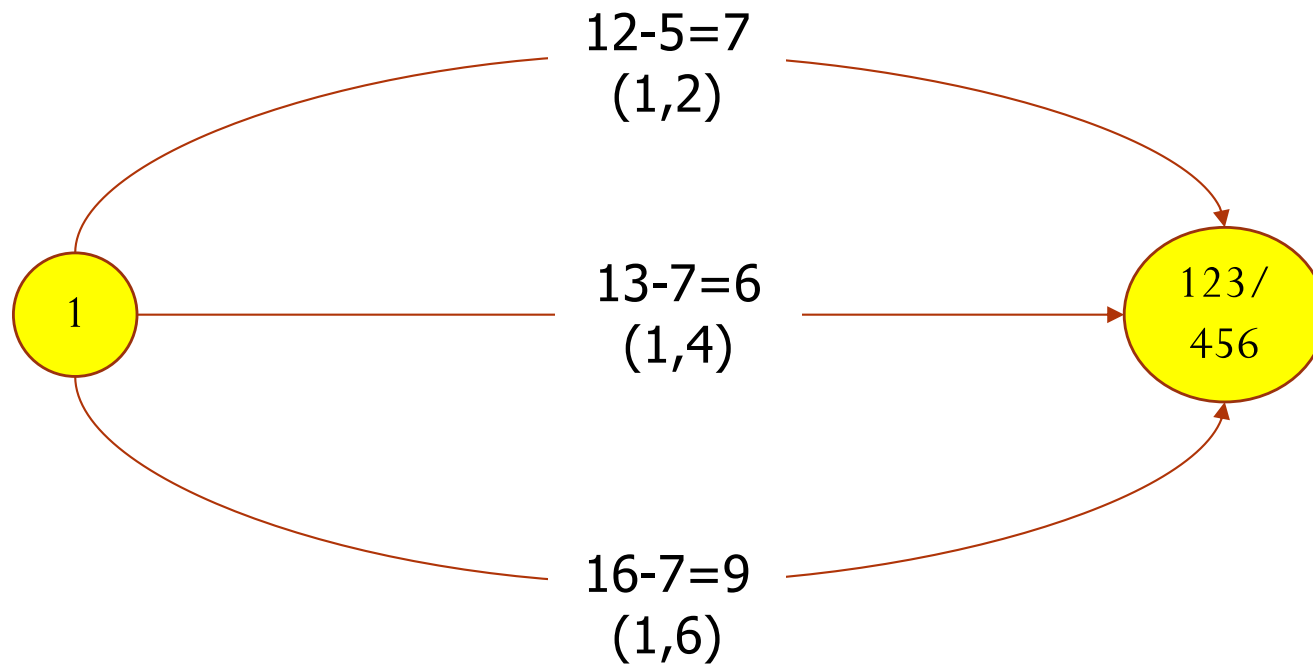
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

G₂



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

G₂

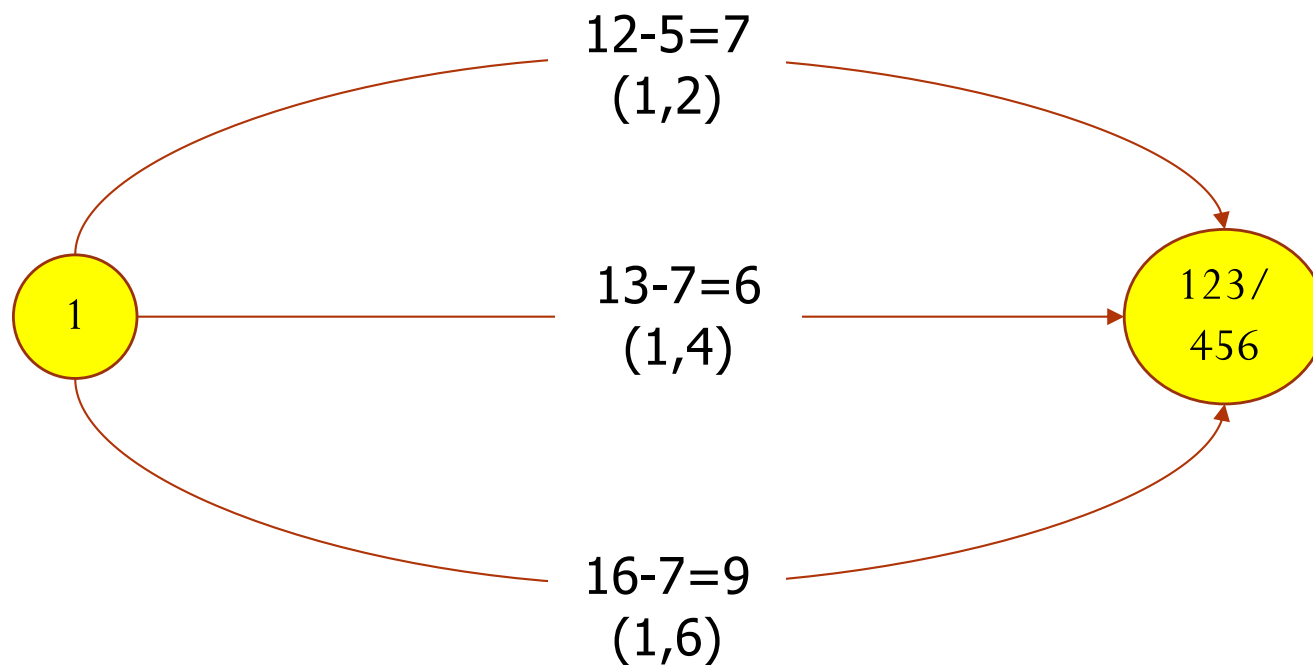


Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- Bước lặp 2
 - Xây dựng đồ thị xấp xỉ H_2

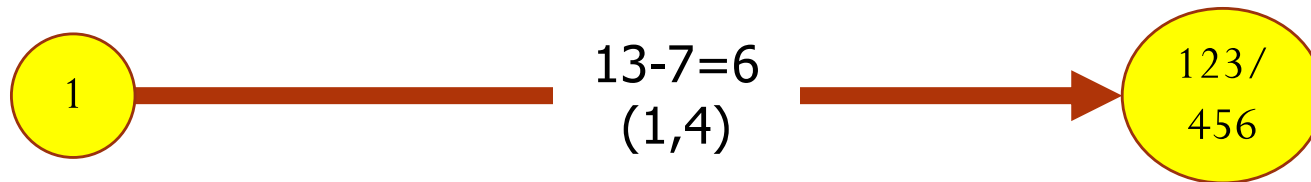
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

G₂



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

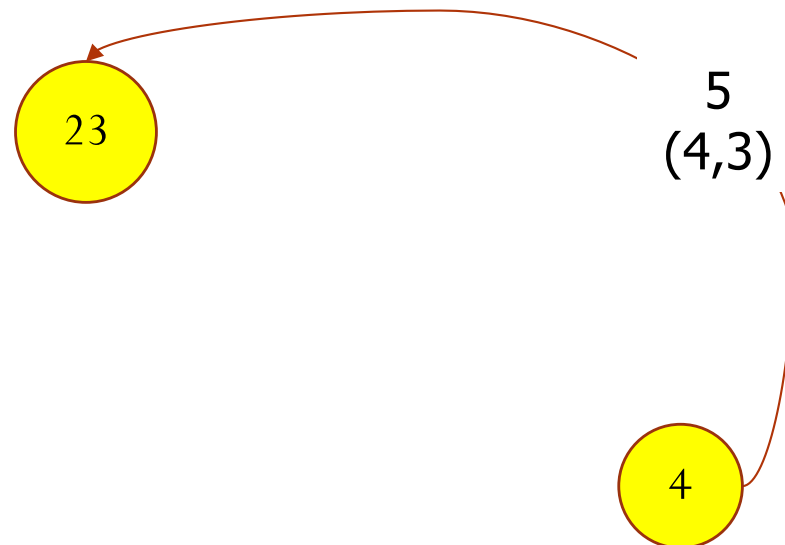
H₂



H₂ không chứa chu trình => thoát vòng lặp, chuyển sang pha giãn

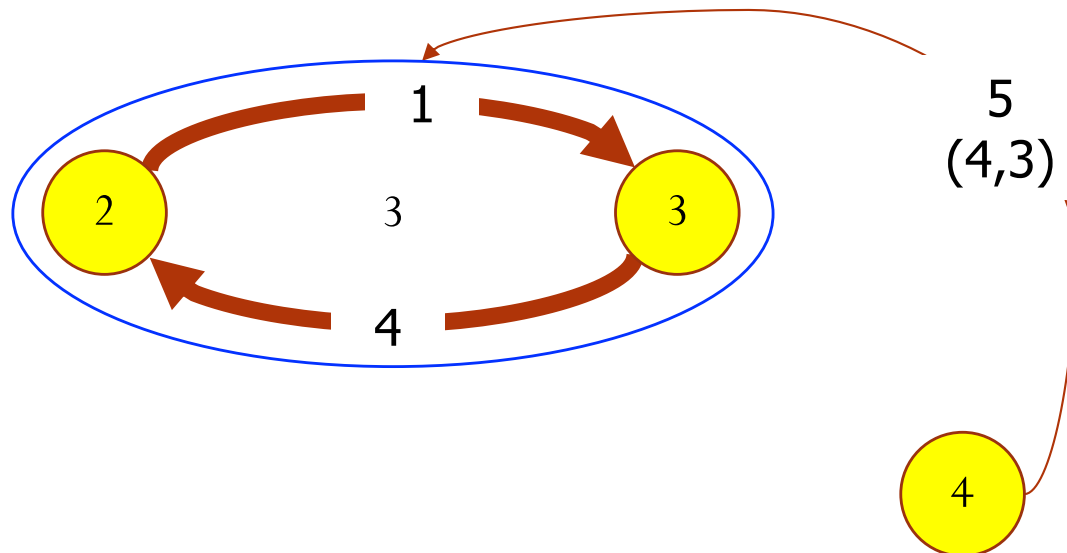
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn cây khung T_{t+1} thành cây khung T_t của đồ thị G_t**
 - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) \Rightarrow chu trình
 - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
 - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



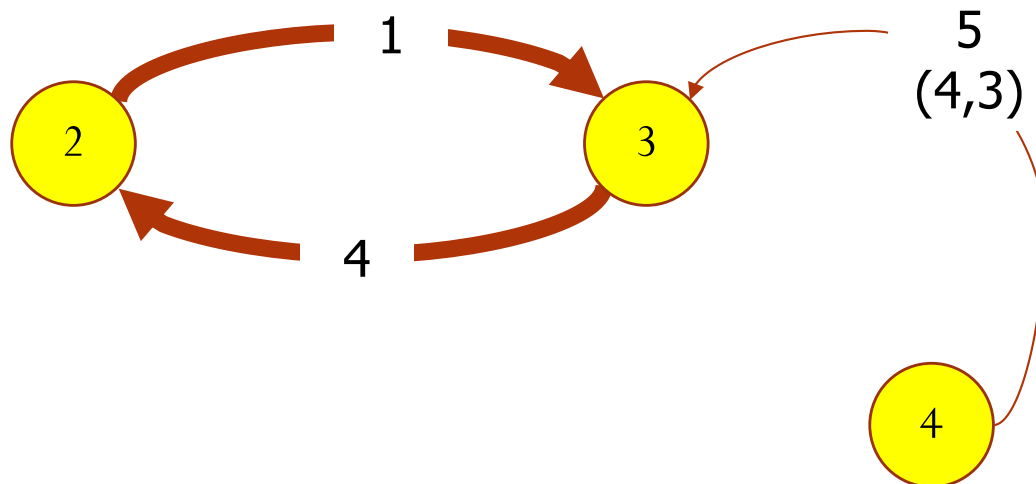
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn H_{t+1} thành cây khung của đồ thị G_t**
 - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) \Rightarrow chu trình
 - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
 - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



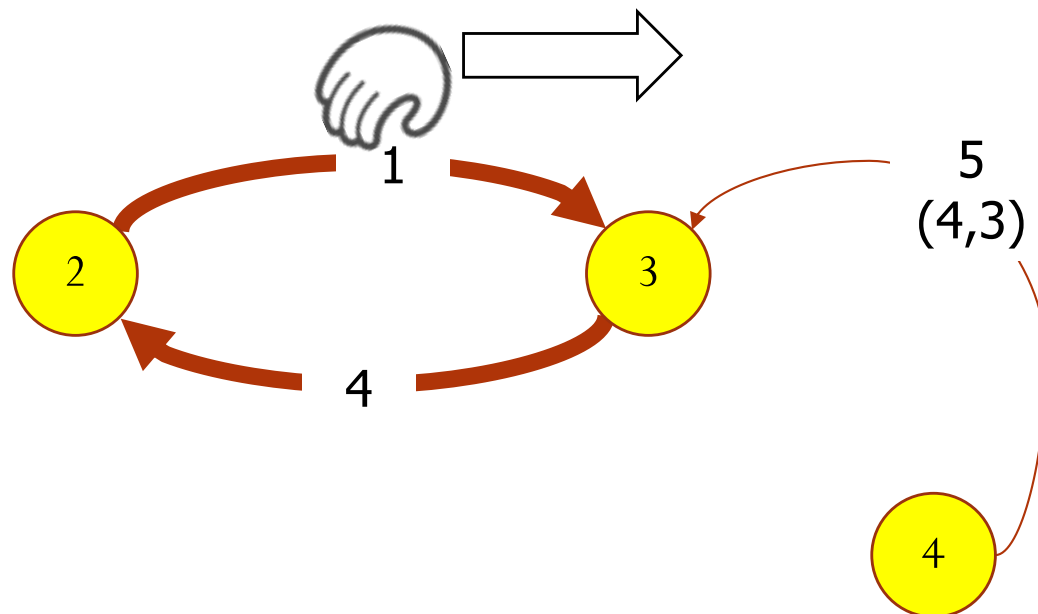
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn H_{t+1} thành cây khung của đồ thị G_t**
 - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) \Rightarrow chu trình
 - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
 - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



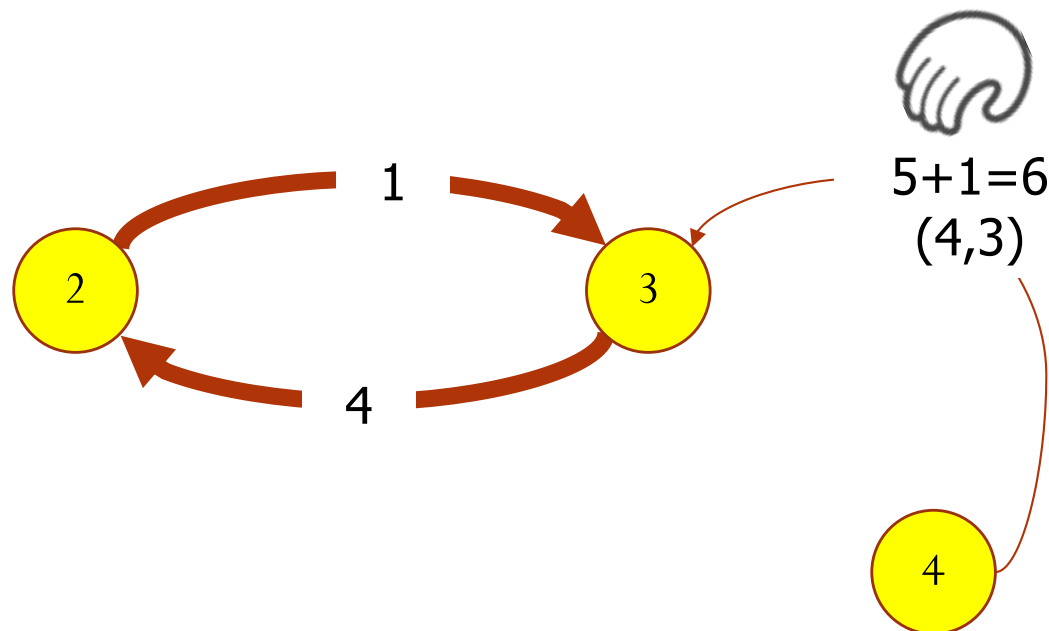
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn H_{t+1} thành cây khung của đồ thị G_t**
 - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) \Rightarrow chu trình
 - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
 - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



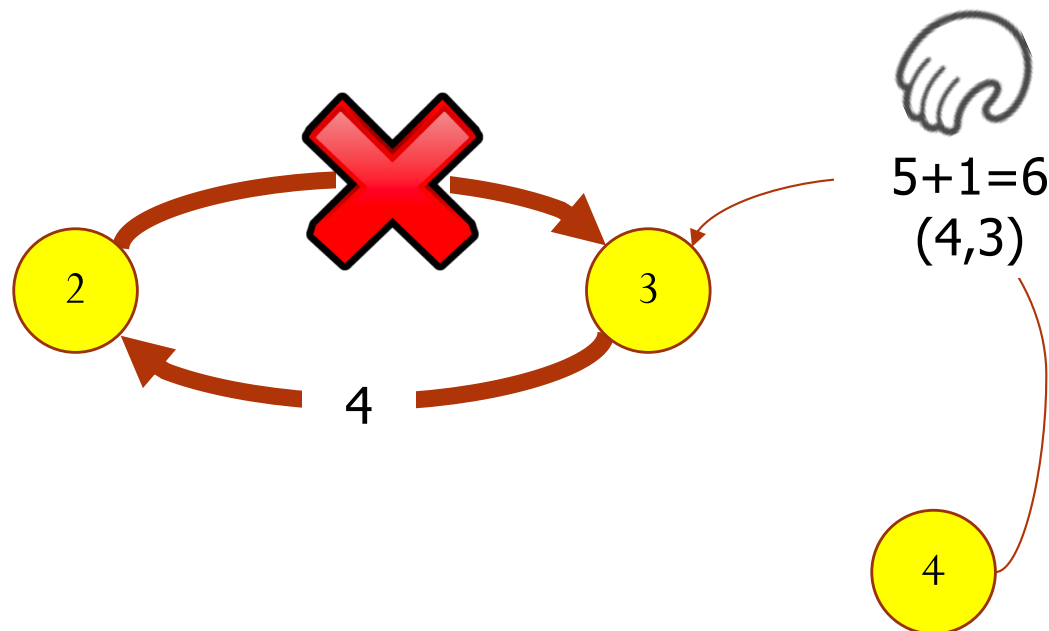
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn H_{t+1} thành cây khung của đồ thị G_t**
 - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) \Rightarrow chu trình
 - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
 - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



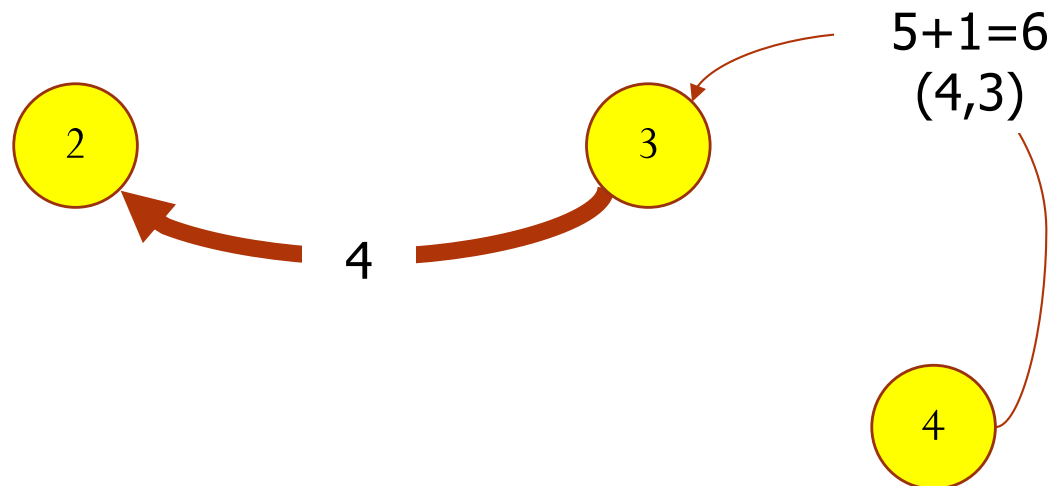
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn H_{t+1} thành cây khung của đồ thị G_t**
 - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) \Rightarrow chu trình
 - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
 - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn H_{t+1} thành cây khung của đồ thị G_t**
 - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) \Rightarrow chu trình
 - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
 - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



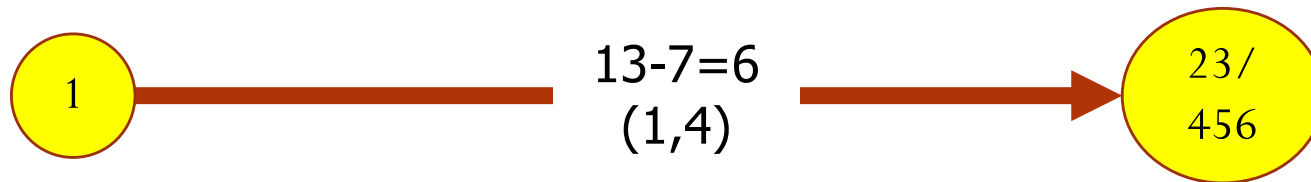
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

- Bài tập:
 - Giãn cây $T_2 = H_2$ thành T_1 (cây khung của G_1)
 - Giãn cây T_1 thành T_0 (cây khung của G_0) = cây khung cần tìm

Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_2 = H_2$ **$T_2 = H_2$ là cây khung của G_2**

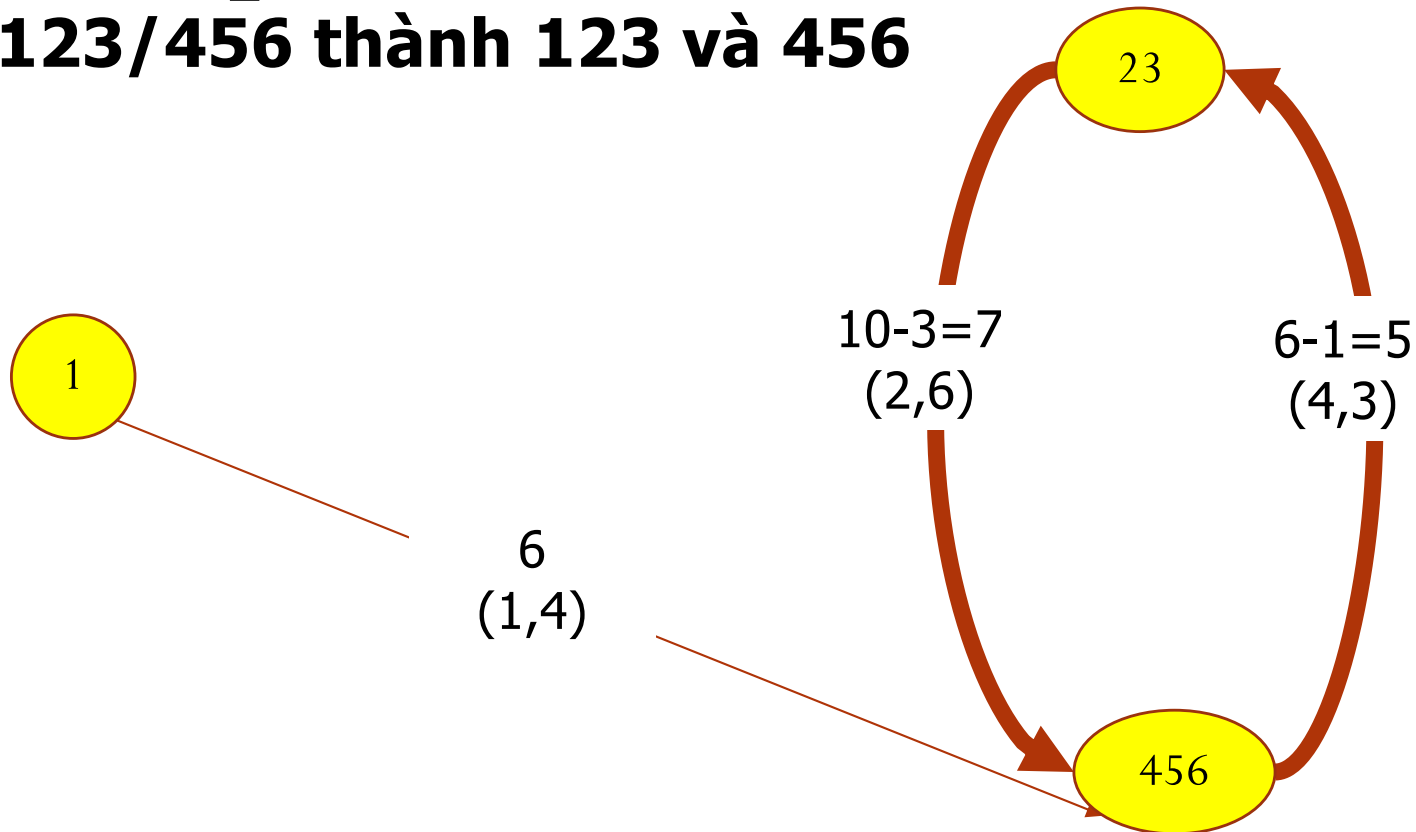
Giãn T_2 để có cây khung T_1 của G_1



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_2 \Rightarrow T_1$

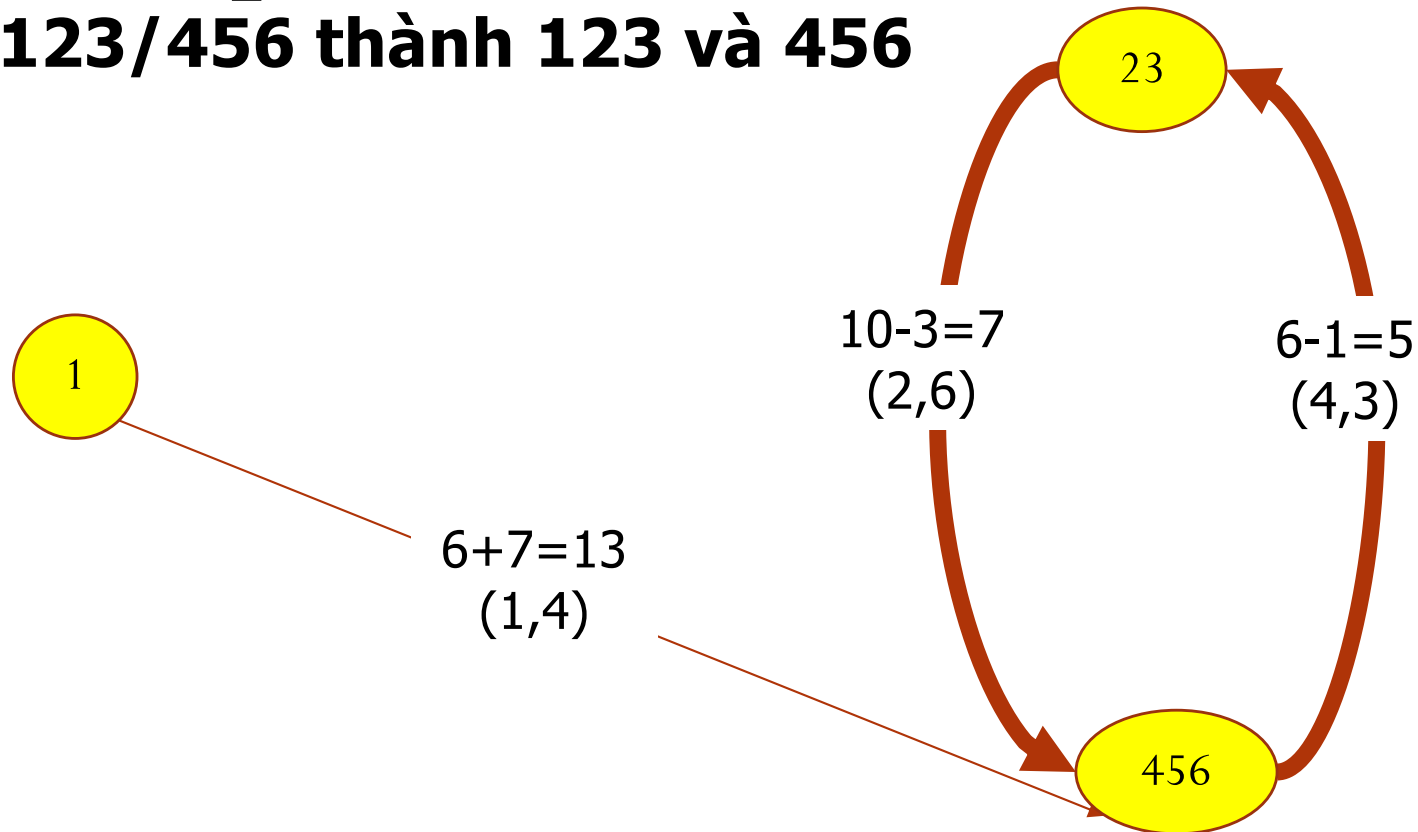
Mở 123/456 thành 123 và 456



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_2 \Rightarrow T_1$

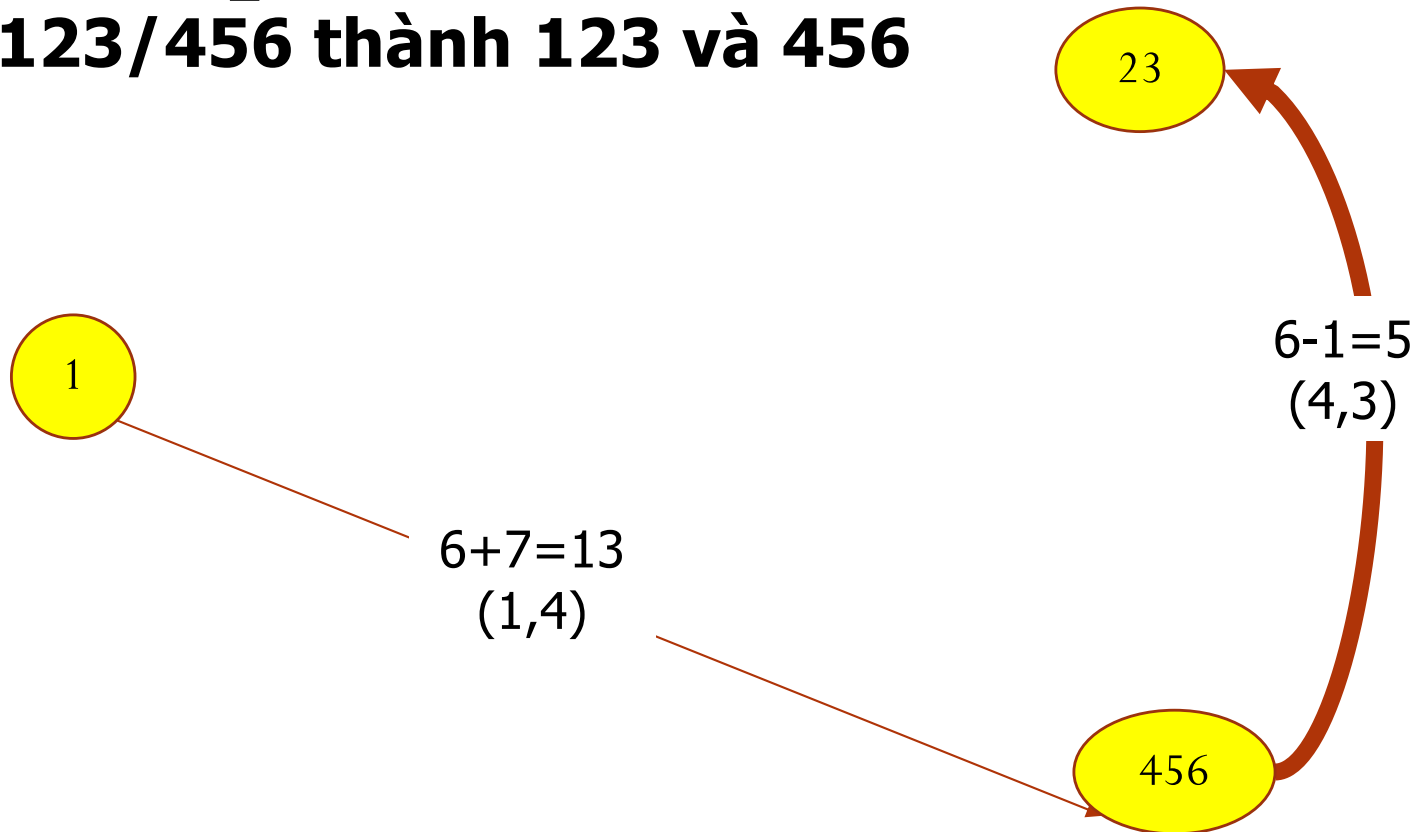
Mở 123/456 thành 123 và 456



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

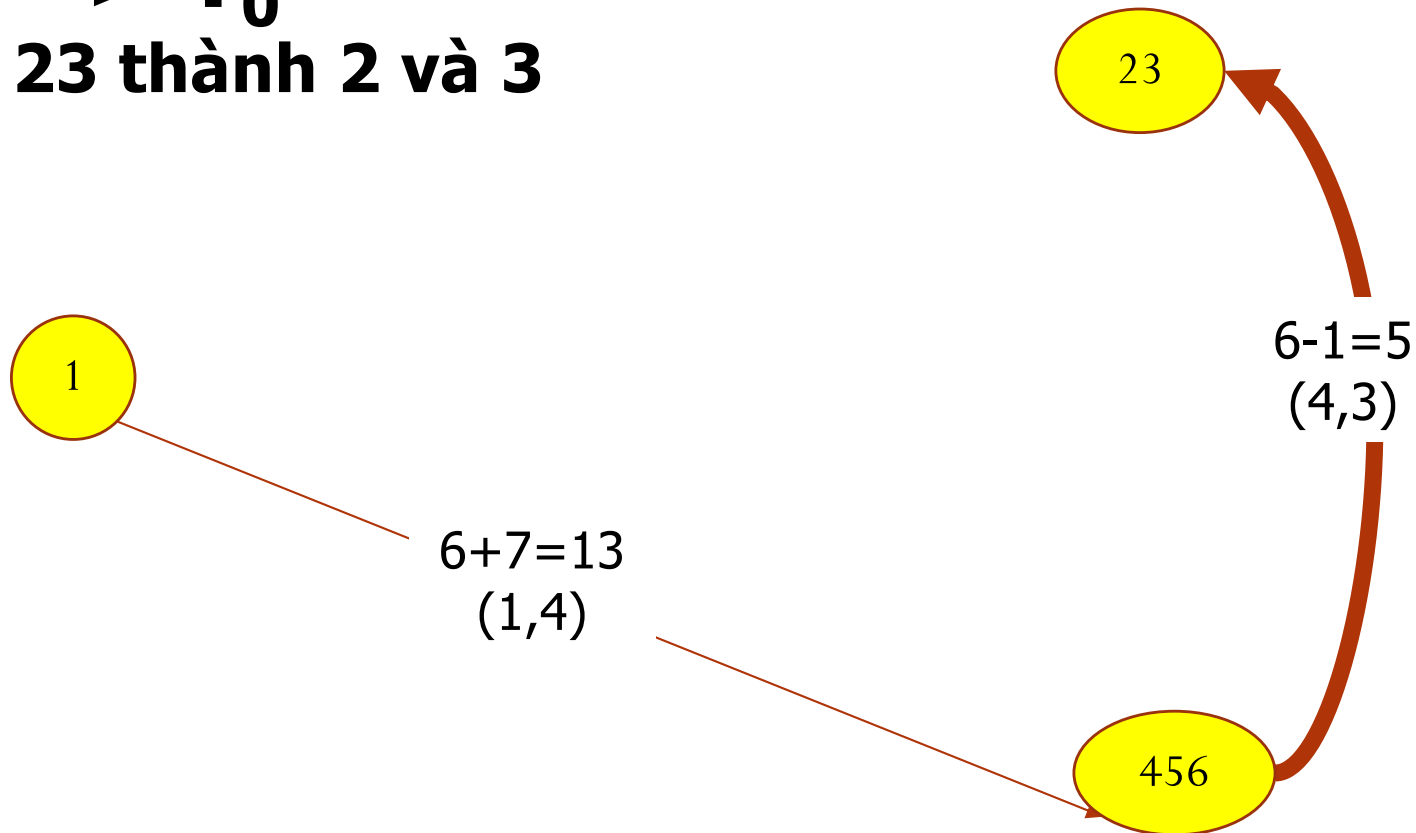
$T_2 \Rightarrow T_1$

Mở 123/456 thành 123 và 456



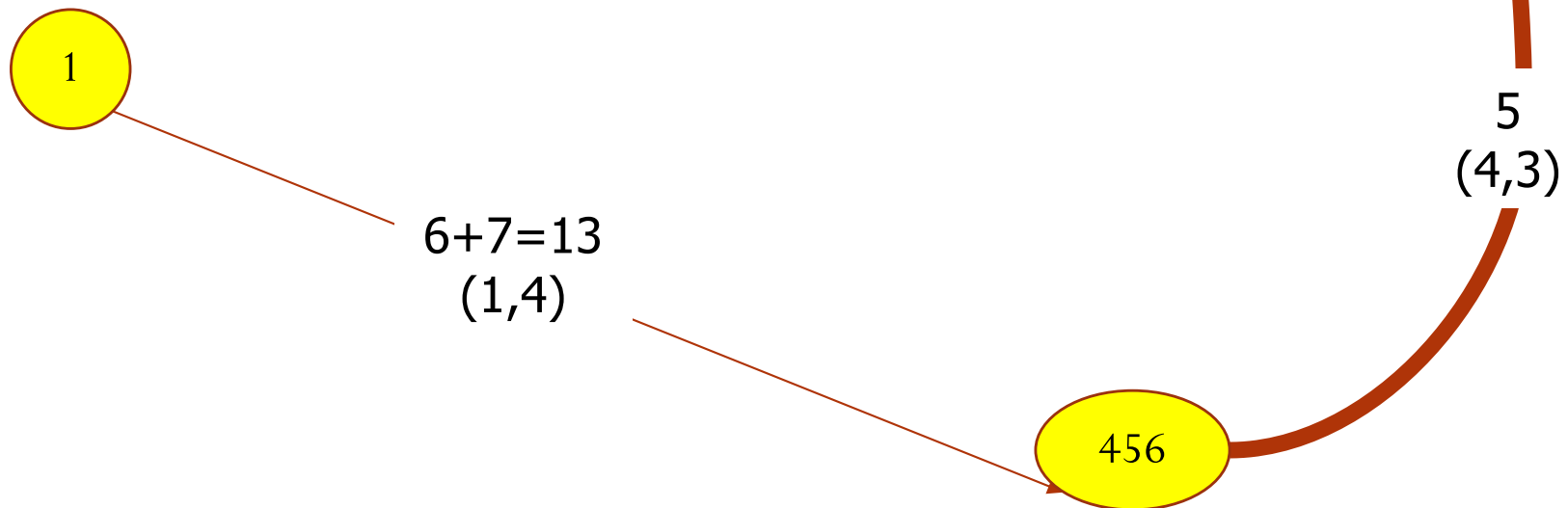
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_1 \Rightarrow T_0$
Mở 23 thành 2 và 3



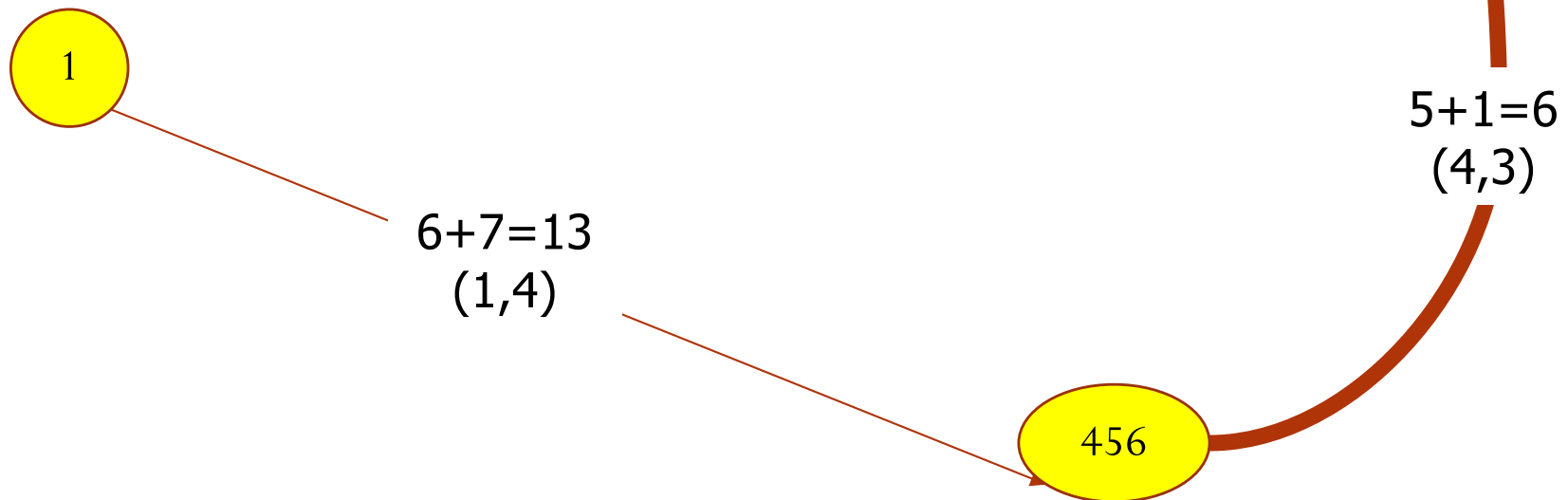
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_1 \Rightarrow T_0$
Mở 23 thành 2 và 3



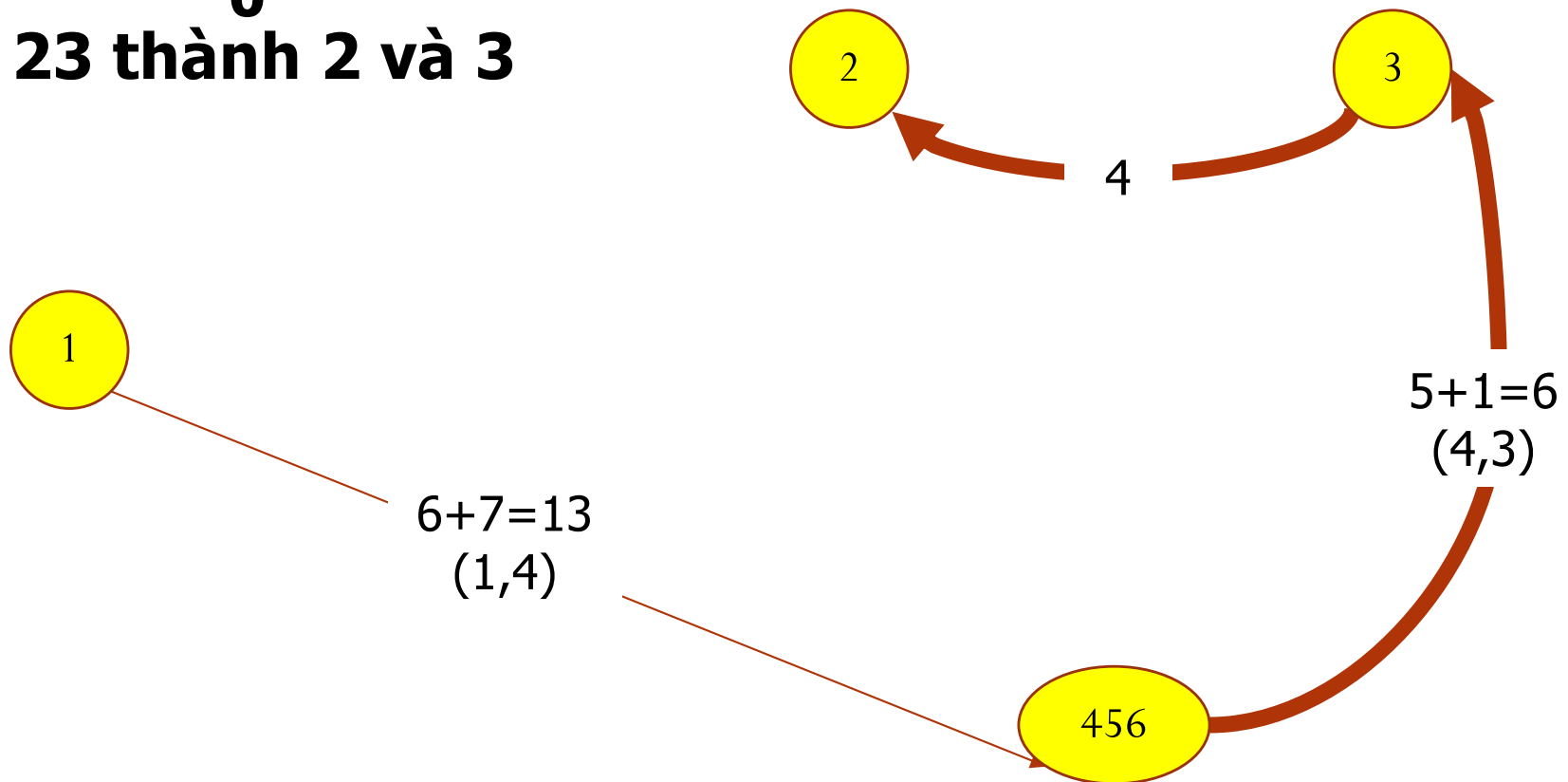
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_1 \Rightarrow T_0$
Mở 23 thành 2 và 3



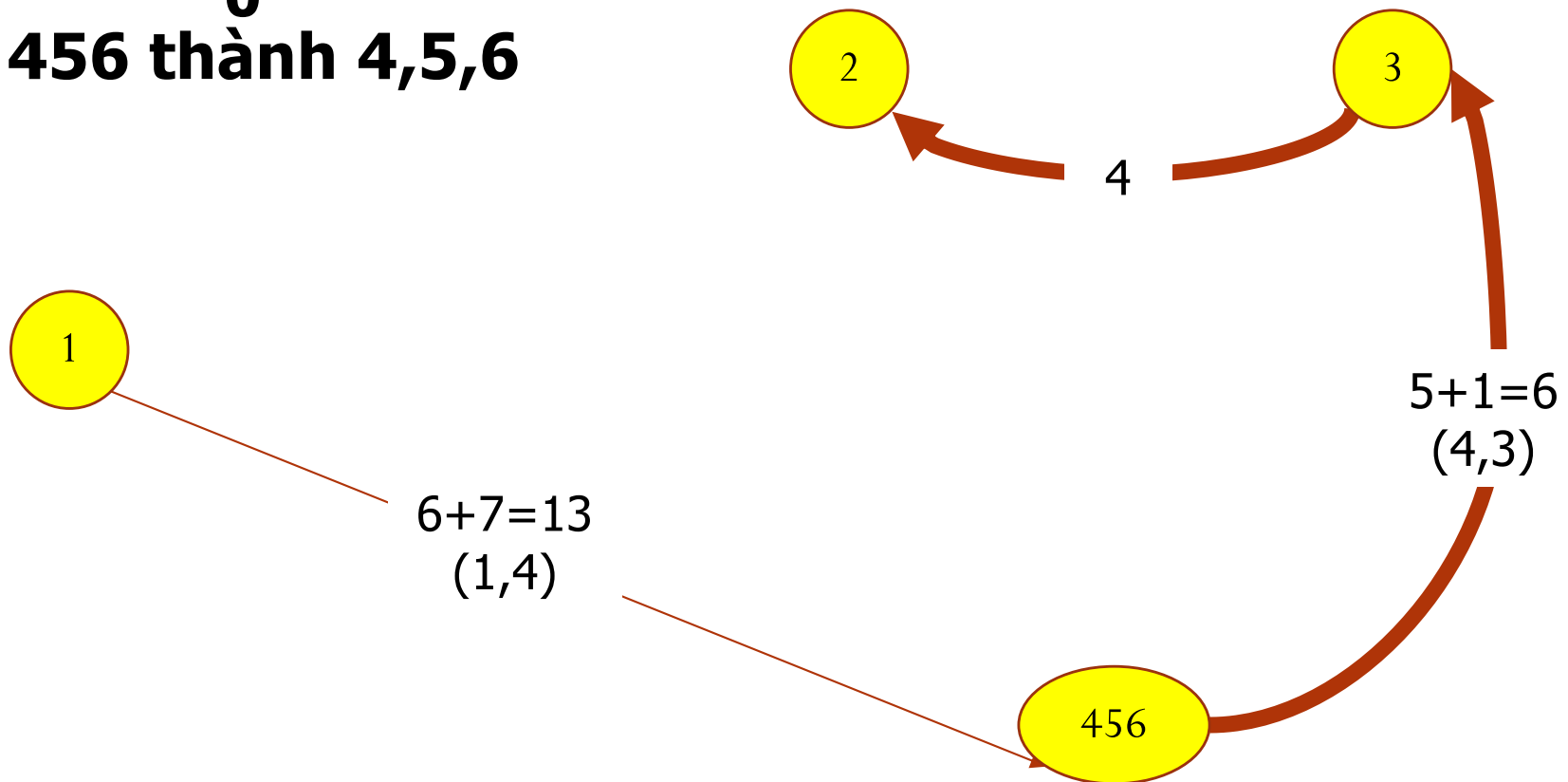
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_1 \Rightarrow T_0$
Mở 23 thành 2 và 3



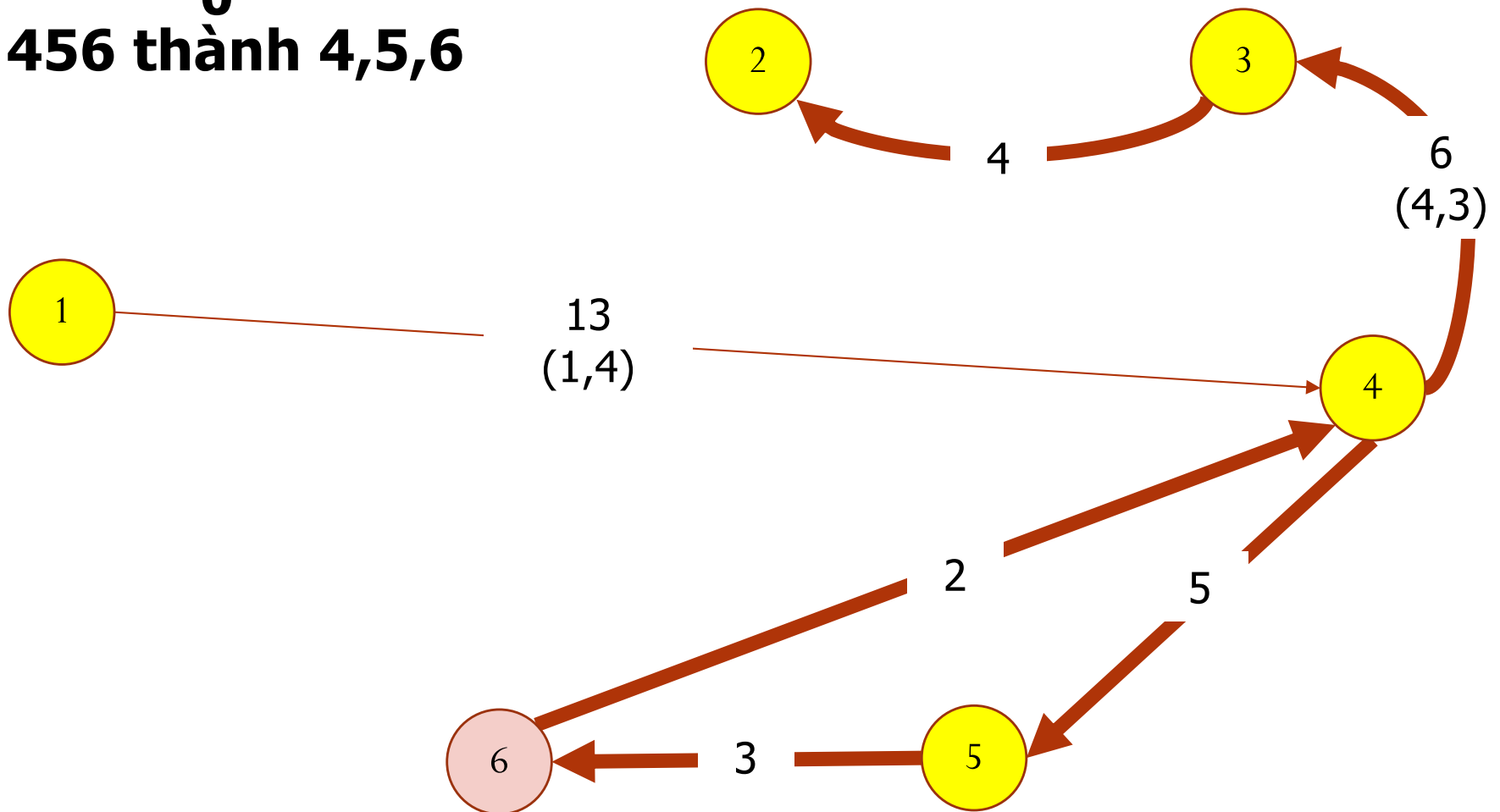
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_1 \Rightarrow T_0$
Mở 456 thành 4,5,6



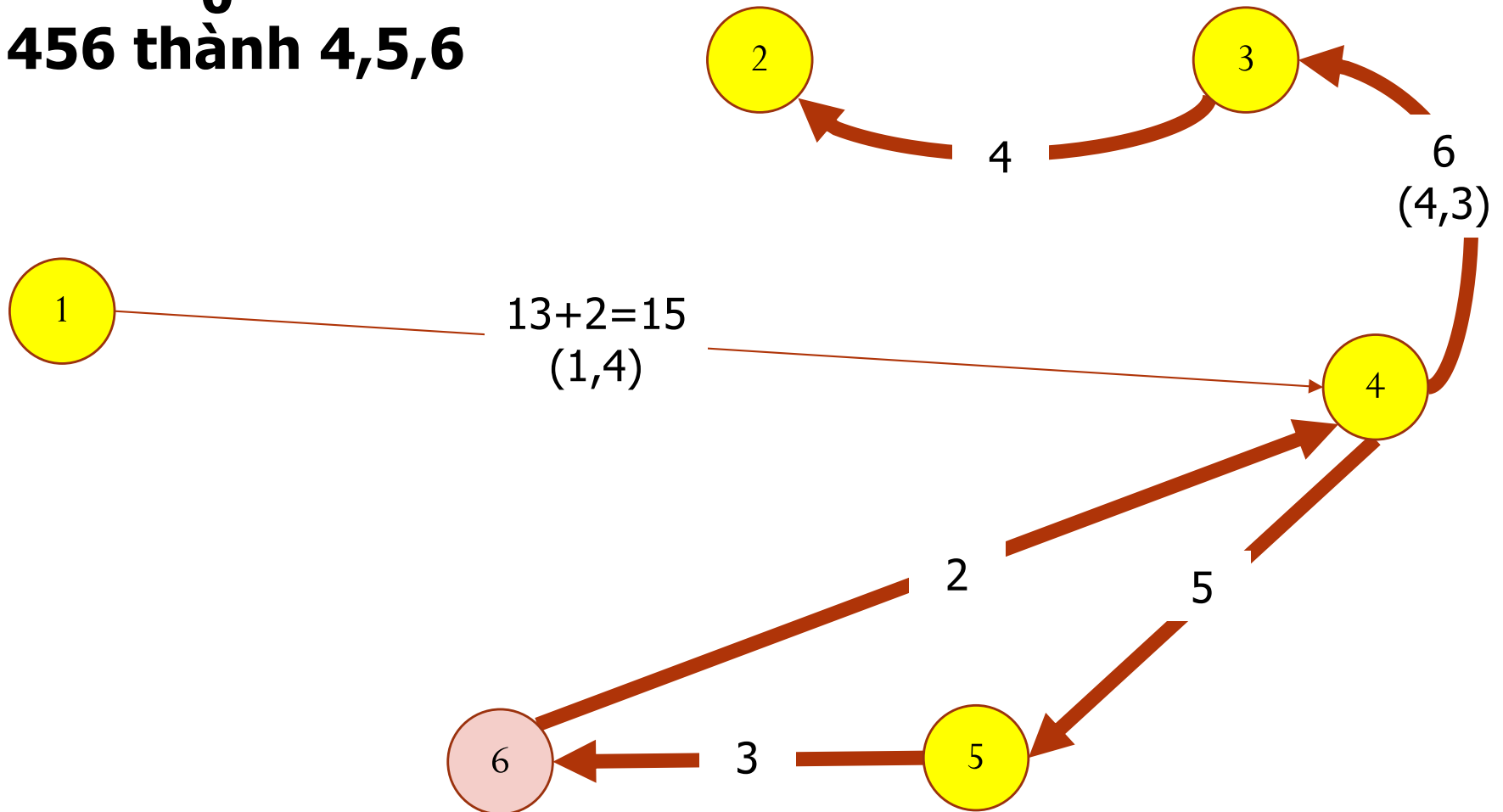
Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

$T_1 \Rightarrow T_0$
Mở 456 thành 4,5,6



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

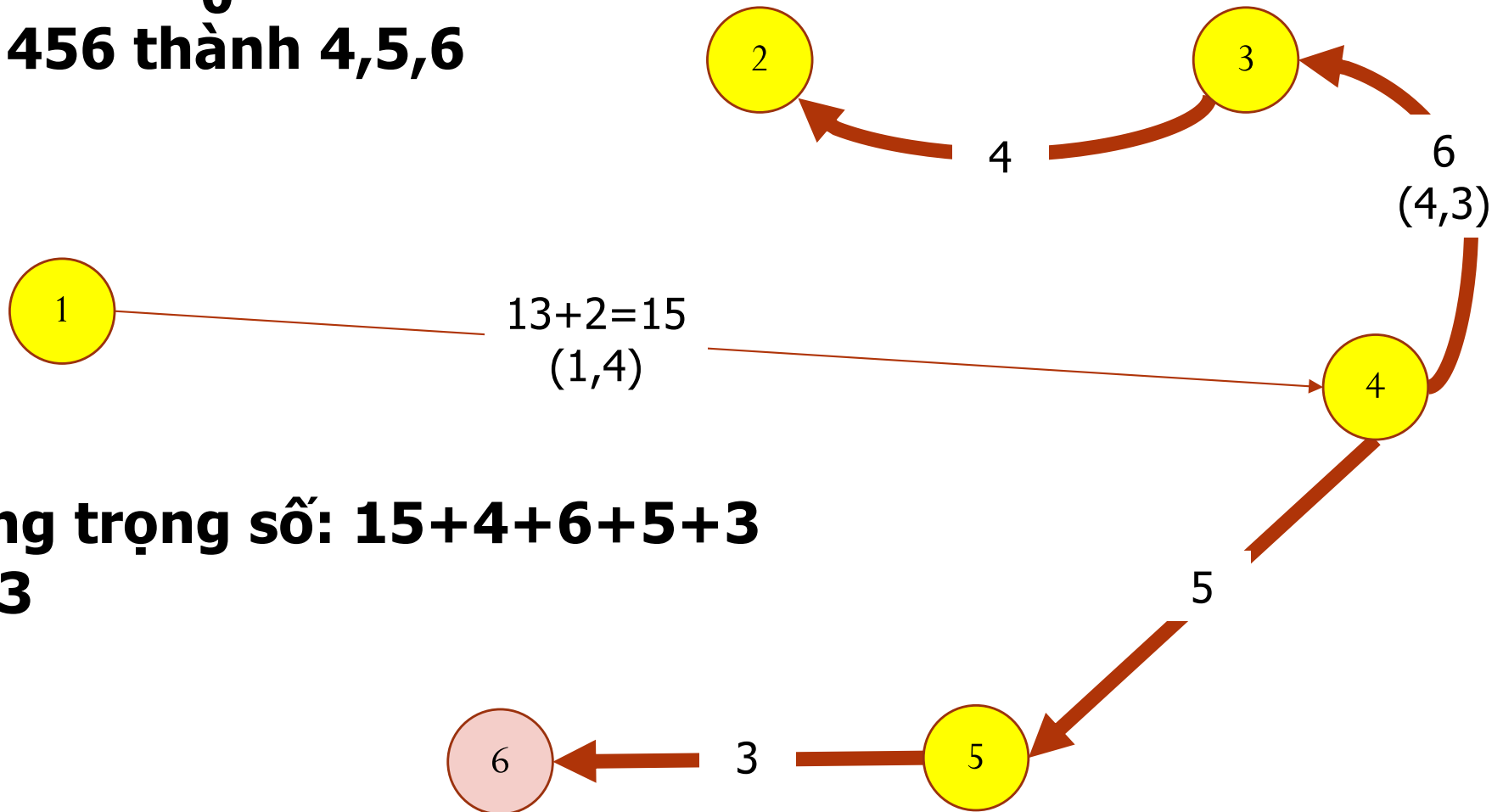
$T_1 \Rightarrow T_0$
Mở 456 thành 4,5,6



Thuật toán Chu-Liu/Edmonds

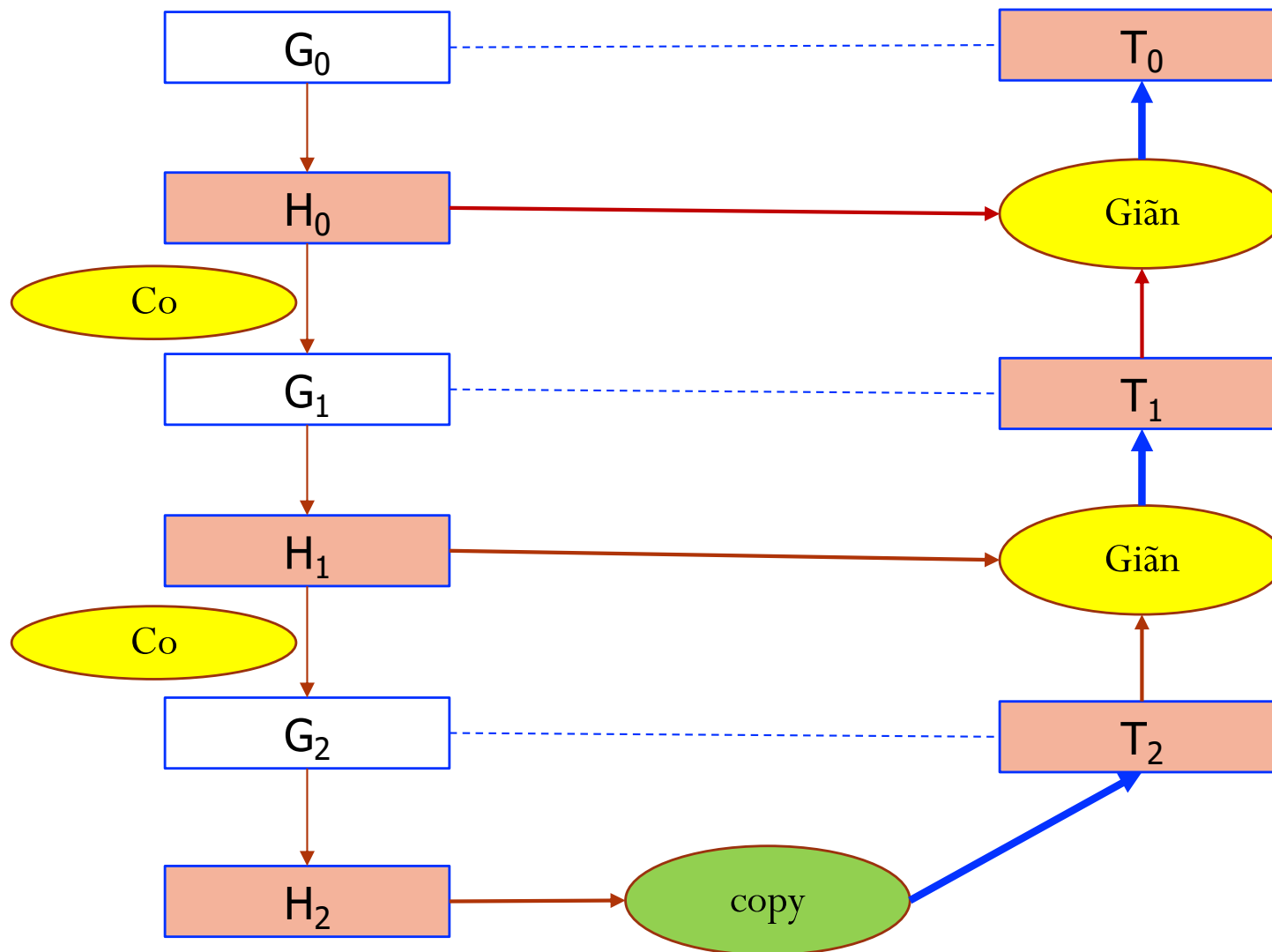
$T_1 \Rightarrow T_0$

Mở 456 thành 4,5,6

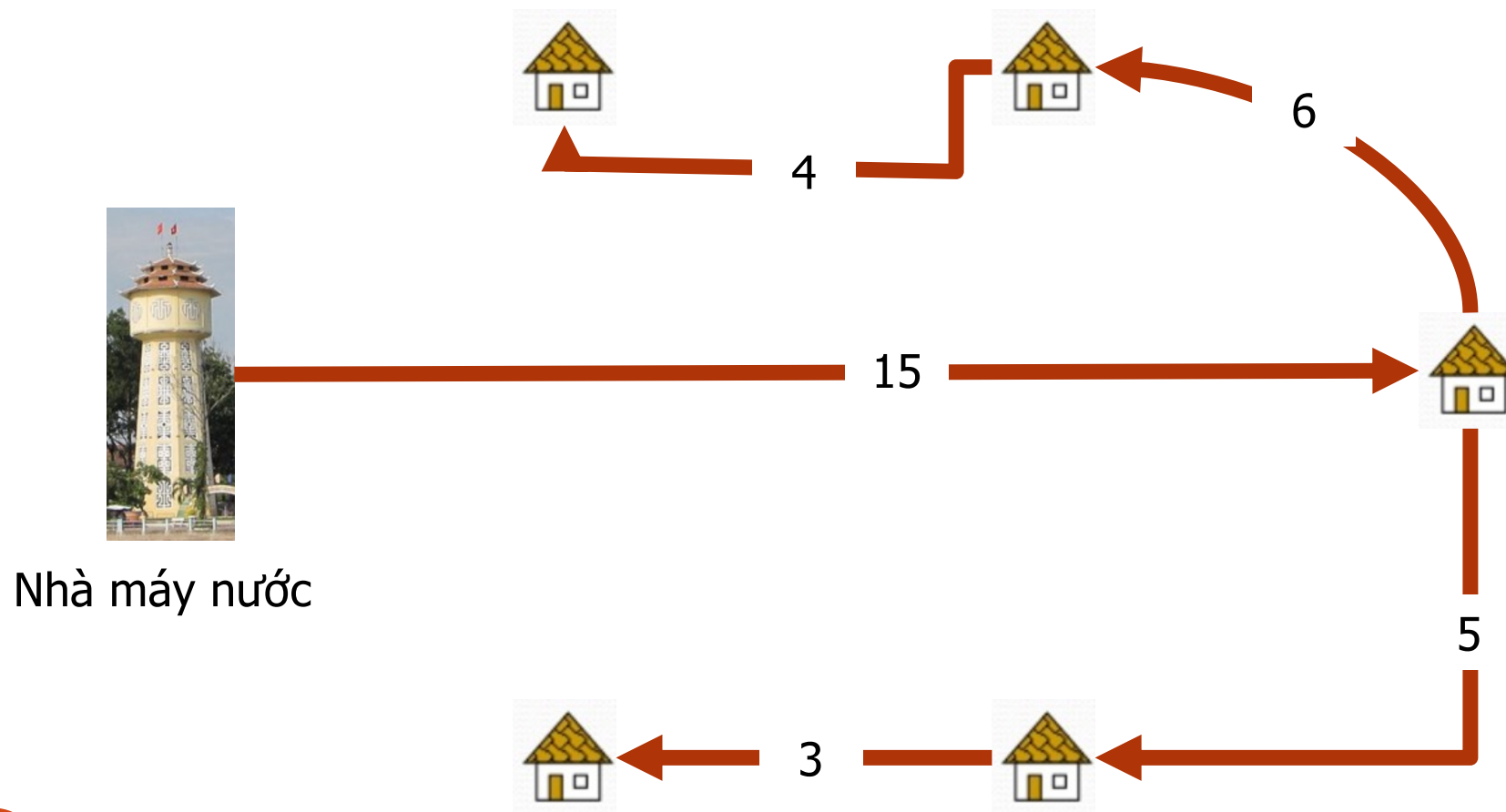


Tổng trọng số: $15+4+6+5+3=33$

Thuật toán Chu-Liu/Edmonds



Xây dựng hệ thống dẫn nước



Bài tập

- Cho đồ thị
 1. Áp dụng Thuật toán Chu-Liu/Edmonds tìm cây khung có hướng có trọng lượng nhỏ nhất. Vẽ cây KQ. Tính tổng trọng số các cung
 2. Áp dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh khác. Vẽ cây đường đi ngắn nhất.
 3. So sánh 2 cây kết quả.
 4. Có thể dùng thuật toán Dijkstra để tìm cây khung có hướng có trọng lượng nhỏ nhất được không ?

