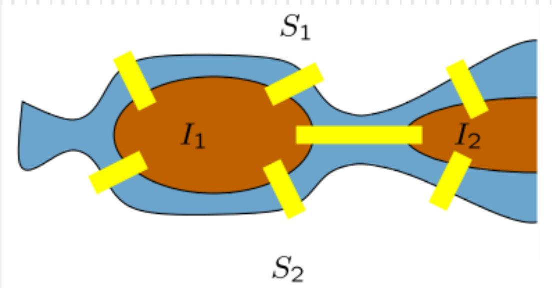
# LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

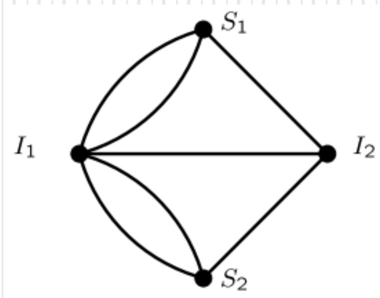
## Đồ thị Euler & đồ thị Hamilton

Phạm Nguyên Khang

BM. Khoa học máy tính, CNTT

pnkhang@cit.ctu.edu.vn



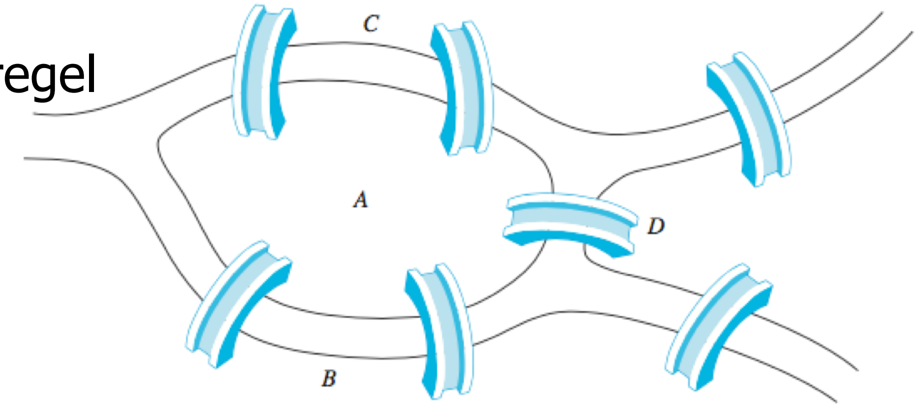




Cần Thơ, 8/2021

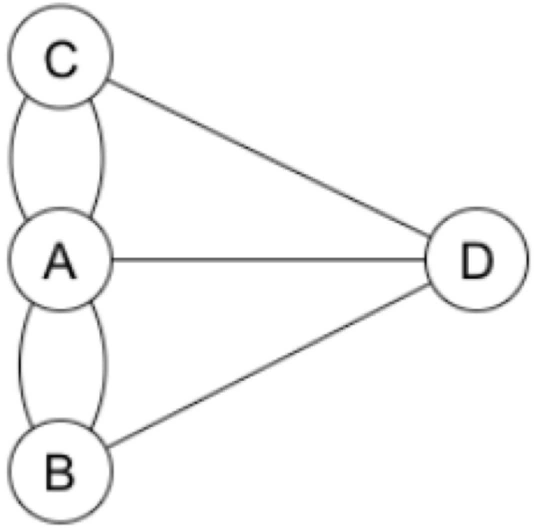
# Đồ thị Euler

- Bài toán 7 cây cầu ở Königsberg, Prussia (ngày nay là: Kaliningrad, Nga)
  - Đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cây nhiều nhất 1 lần

Sông Pregel



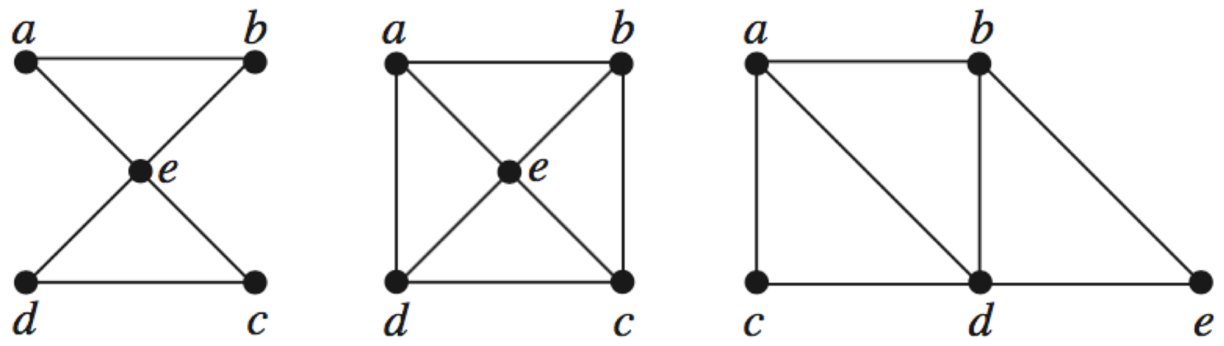

7 cây cầu ở Königsberg




Mô hình đa đồ thị của thành phố 7 Königsberg

# Đồ thị Euler

- **Chu trình Euler** (Euler circuit) trong đồ thị G là một ***chu trình đơn cung*** chứa tất cả các cung của G
- **Đường đi Euler** (Euler path) trong đồ thị G là ***đường đi đơn cung*** chứa qua tất các đỉnh của G




$G_1$ $G_2$ $G_3$

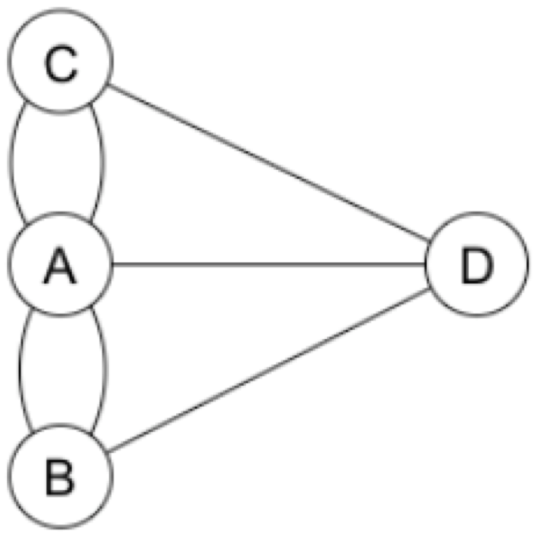
**Đồ thị nào có chu trình Euler, đồ thị nào có đường đi Euler?**

# Đồ thị Euler

- Định lý Euler
  - Đa đồ thị (vô hướng) liên thông có ít nhất 2 đỉnh **có chu trình Euler** khi và chỉ khi **tất cả các đỉnh của nó đều có bậc chẵn**.
  - Đa đồ thị (vô hướng) liên thông **có đường đi Euler** (nhưng không có chu trình Euler) khi và chỉ khi **nó có đúng 2 đỉnh bậc lẻ**.

# Đồ thị Euler

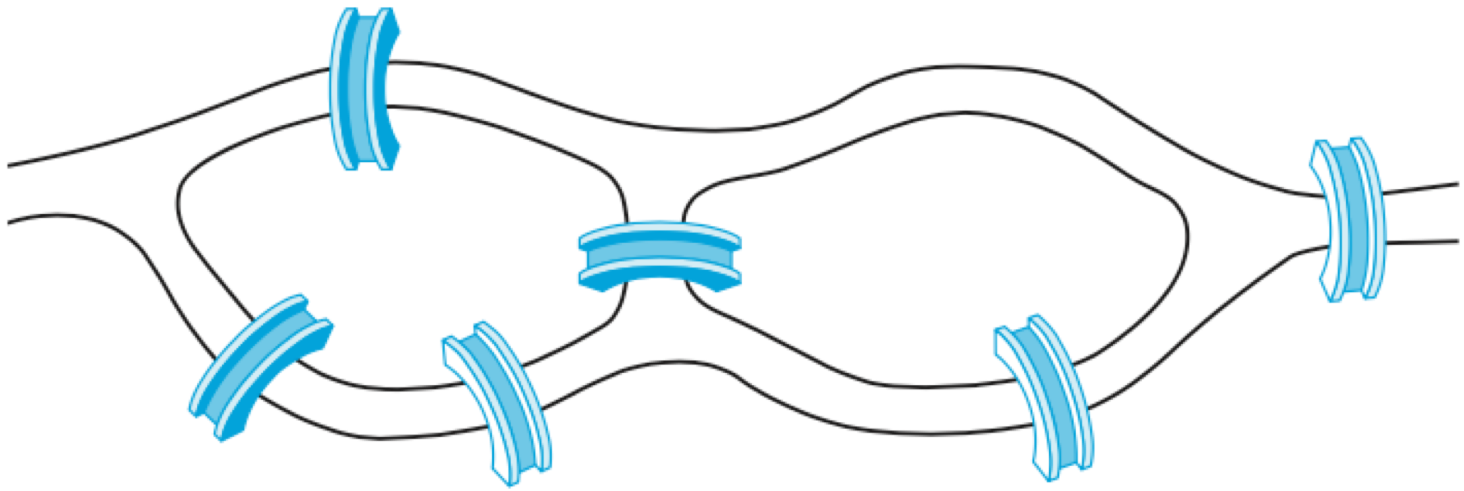
- Áp dụng định lý Euler cho bài toán 7 cây cầu ở Könisberg:
  - Tính bậc của các đỉnh
    - Bậc của A = 5
    - Bậc của B = 3
    - Bậc của C = 3
    - Bậc của D = 3
  - Có nhiều hơn 2 đỉnh bậc lẻ, không có đường đi Euler
    - **Không thể đi qua các cây cầu, mỗi cây đúng 1 lần**




Mô hình đa đồ thị của thành phố 7 Königsberg

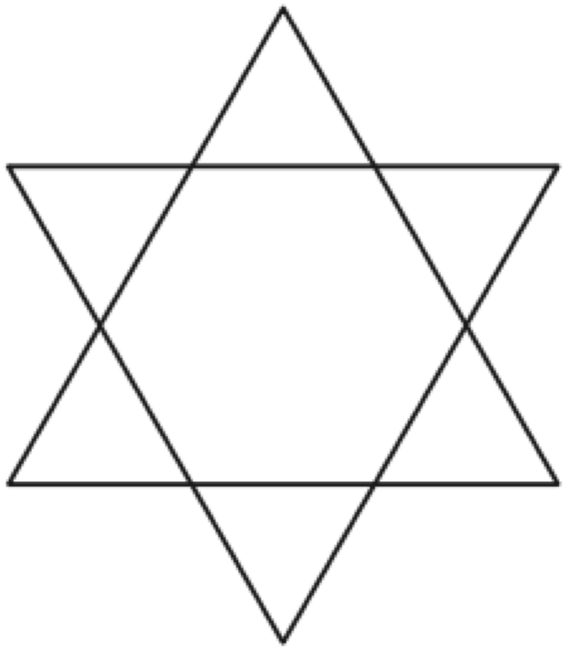
# Đồ thị Euler

- Có thể đi qua các cây cầu bên dưới, mỗi cây đúng 1 lần không? Nếu được chỉ ra cách đi. Nếu không, chứng minh.
- Gợi ý:
  - Mô hình về đồ thị
  - Áp dụng định lý Euler



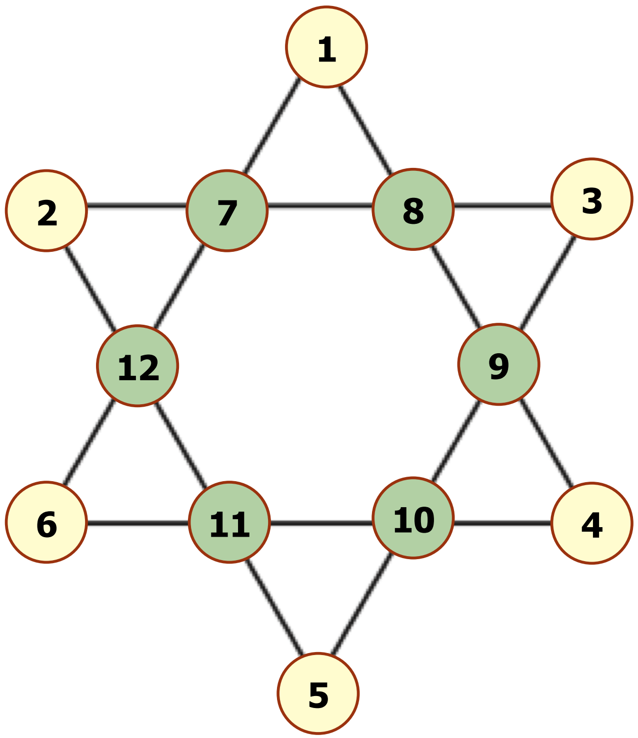
# Đồ thị Euler

- Có thể vẽ lại hình bên dưới bằng một nét bút không?



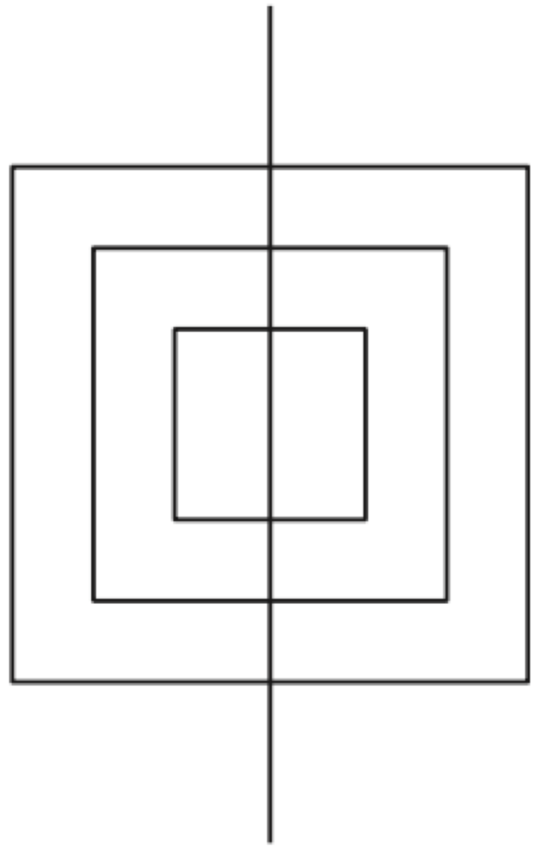
# Đồ thị Euler

- Có thể vẽ lại hình bên dưới bằng một nét bút không?
  - Mô hình hoá: giao điểm ~ đỉnh, nét ~ cung
  - Áp dụng định lý Euler



# Đồ thị Euler

- Có thể vẽ lại hình bên dưới bằng một nét bút không?

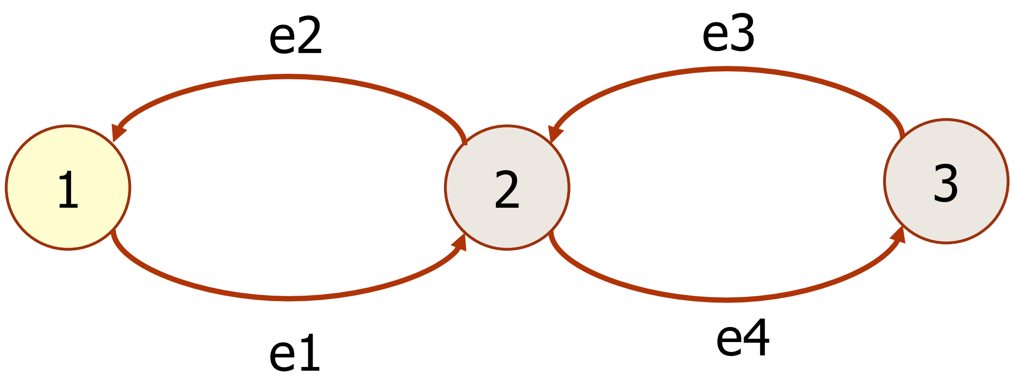


# Đồ thị Euler

- Thuật toán Fleury (1883) xây dựng chu trình Euler
  - Chọn 1 đỉnh bất kỳ
  - Chọn tiếp các cung liên tiếp cho đến khi tạo thành chu trình. Mỗi khi một cung được chọn, xoá nó ra khỏi đồ thị
  - Các cung được chọn sao cho *đỉnh đầu của cung mới là đỉnh cuối của cung cũ* VÀ *nó không phải là cầu* (cầu: xoá bỏ cung này sẽ làm đồ thị mất liên thông) trừ phi không có lựa chọn khác.

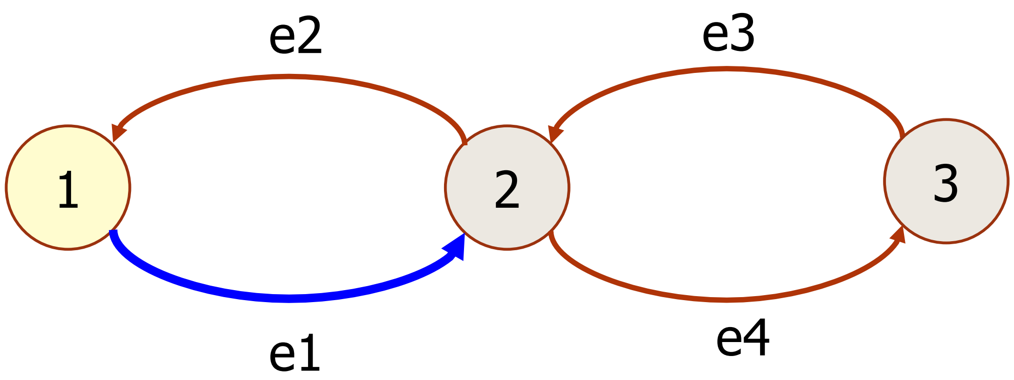
# Đồ thị Euler

- Thuật toán Fleury (1883) xây dựng chu trình Euler



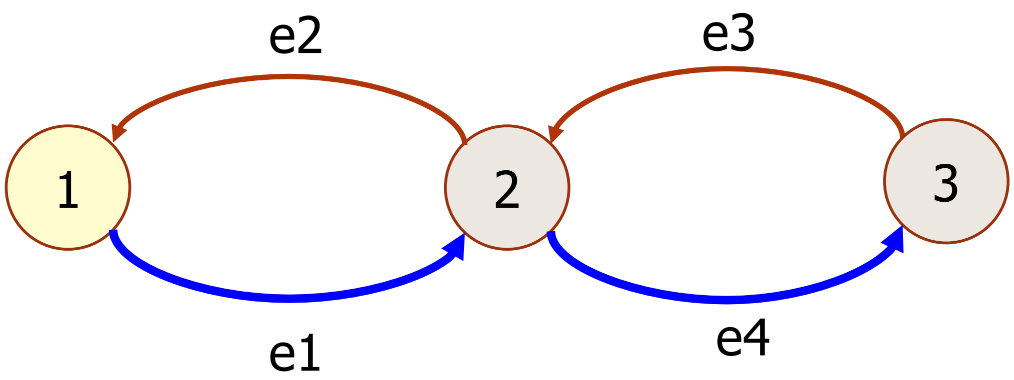
# Đồ thị Euler

- Thuật toán Fleury (1883) xây dựng chu trình Euler



# Đồ thị Euler

- Thuật toán Fleury (1883) xây dựng chu trình Euler

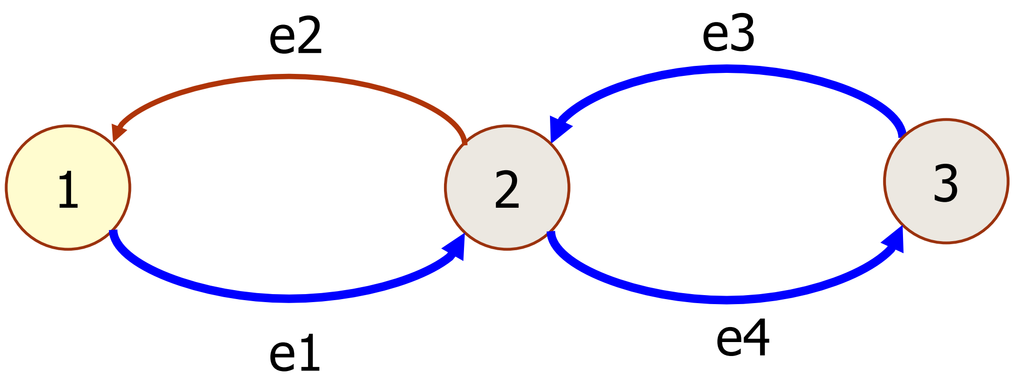



**Chọn cung kế tiếp:**

- Phải chọn e4, không thể chọn e2, vì e2 là cầu (chọn e2 và xoá nó đồ thị sẽ không còn liên thông)

# Đồ thị Euler

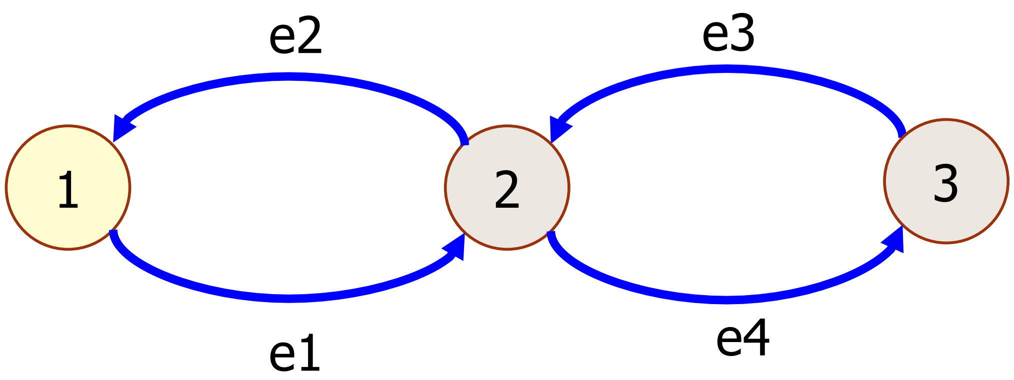
- Thuật toán Fleury (1883) xây dựng chu trình Euler




**Chọn cung kế tiếp:**
- Chọn e3

# Đồ thị Euler

- Thuật toán Fleury (1883) xây dựng chu trình Euler




**Chọn cung kế tiếp:**

- Phải chọn e2

# Đồ thị Euler

- Cài đặt đệ quy

```
void findEudlerPath(u) {
    for (các đỉnh kề v của u)
        xoá cung (u, v)
        findEulerPath(v);
    Thêm u và path
}
```

# Đồ thị Euler

- Cài đặt dùng ngăn xếp

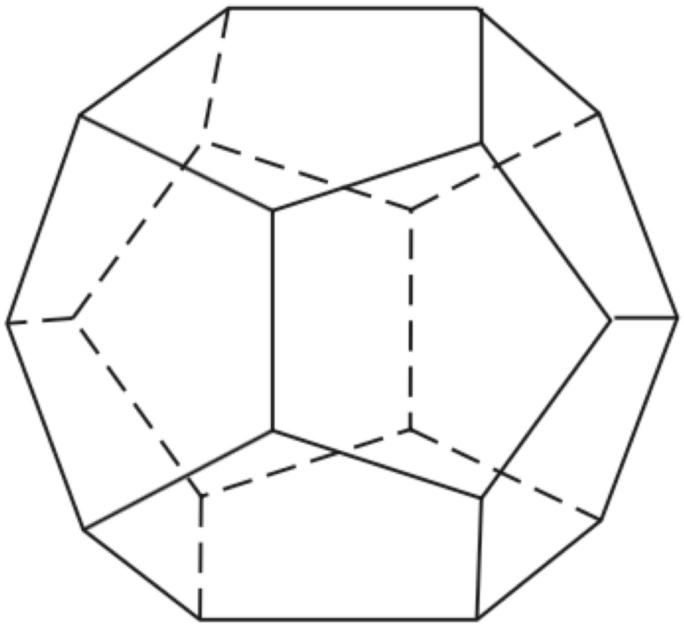
```
S: stack
void findEudlerPath(u) {
    while (S != rỗng) {
        Lấy phần tử trên đỉnh S, gọi nó là u
        if (u không còn đỉnh kề)
            Thêm u vào path

        for (v = 1; v <= n; v++)
            if (v kề với u) {
                xoá cung (u, v)
                push v vào S
                break;          //Chỉ cần lấy 1 kề đầu tiên
            }
}
```

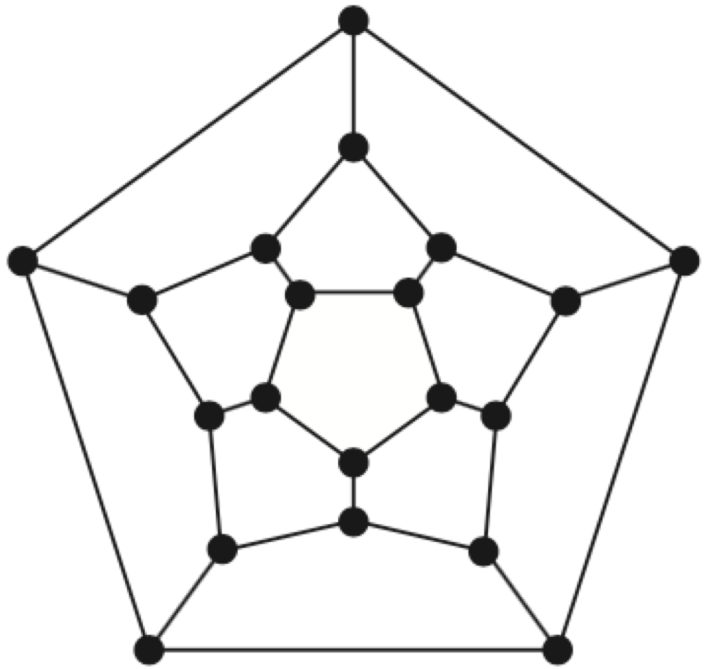
# Đồ thị Euler

- Ứng dụng
  - Đi qua các con đường
  - Giao hàng
  - Chinese postman problem

# Đồ thị Hamilton

- Chu trình Hamilton (Hamilton circuit):
  - Bài toán du lịch vòng quanh thế giới





# Đồ thị Hamilton

- Chu trình Hamilton (Hamilton circuit):
  - Chu trình đơn đỉnh (simple circuit) đi quá các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng 1 lần (trừ đỉnh xuất phát)
- Đường đi Hamilon (Hamilton path):
  - Đường đi đơn đỉnh (simple path) đi qua các đỉnh của đồ thị G, mỗi đỉnh đúng 1 lần

# Đồ thị Hamilton

- Định lý Dirac:
  - Nếu G là đơn đồ thị có số đỉnh $n \geq 3$ và bậc của các đỉnh đều $\geq n/2$ thì G có chu trình Hamilton
- Định lý Ore:
  - Nếu G là đơn đồ thị có số đỉnh $n \geq 3$ và $deg(u) + deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không kề nhau trong G, thì G có chu trình Hamilton.

# Đồ thị Hamilton

- Ứng dụng
  - Xếp tour du lịch
  - Bài toán người giao hàng (Traveling Salesman Problem – TSP)
  - Mã Gray