

Treibhauseffekt (Fortsetzung zur Strahlung) und Einführung in die Dynamik der Atmosphäre

Einführung in die Meteorologie und Geophysik

Lisa Schielicke

**Achtung: Klausuranmeldung muss bis
spätestens 21.11.2022 erfolgen!**

Wiederholung: Stefan-Boltzmann-Gesetz

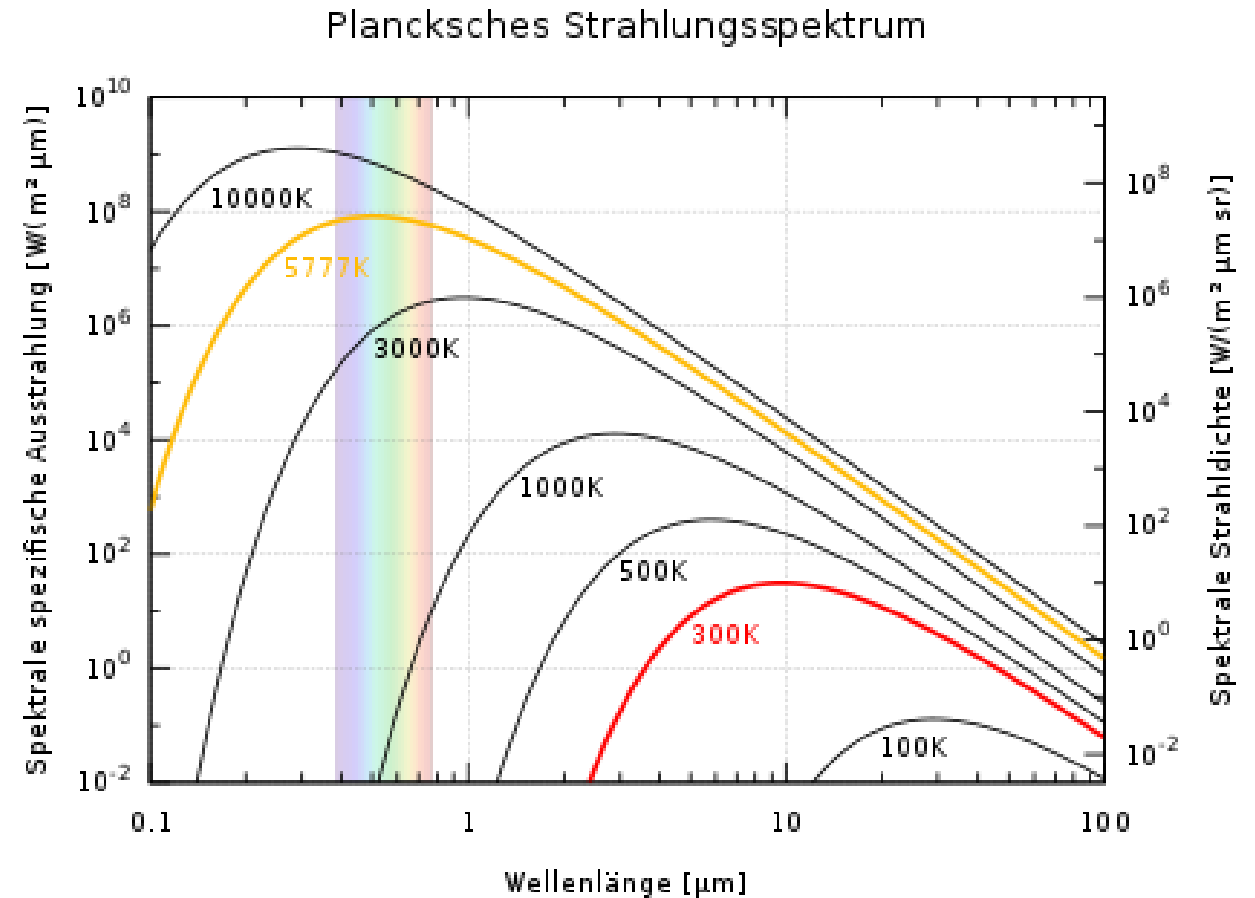
- Jeder Körper (mit $T > 0$ K) gibt Wärmestrahlung an seine Umgebung ab. Ein Schwarzer Körper sendet die bei der betreffenden Temperatur maximal mögliche thermische Leistung aus (Emissivität=1).
- Das Stefan-Boltzmann-Gesetz gibt an, welche Strahlungsleistung P (in W) ein schwarzer Körper der Fläche A und der absoluten Temperatur T (in K) aussendet:

$$P = BA = \sigma AT^4 \quad \text{und} \quad B = \sigma T^4$$

mit Stefan-Boltzmann-Konstante σ

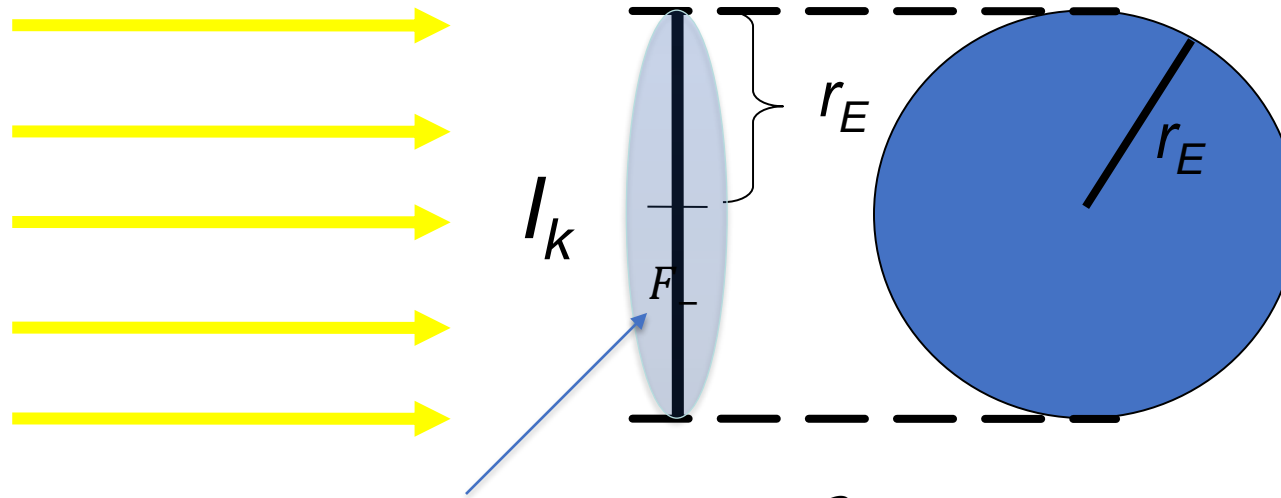
$$\sigma = 5,670374419 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

- Die gesamte Strahlungsleistung entspricht der Fläche unter den Kurven in der Abbildung (Plancksches Strahlungsspektrum)



Wiederholung: Solarkonstante und mittlere solare Einstrahlung auf der Erde

ist nicht konstant!



$$F_{\text{Querschnitt}} = \pi r_E^2, \quad F_{\text{Erdoberfläche}} = 4\pi r_E^2$$

- Auf die Erde trifft der Teil der Sonnenstrahlung, welcher durch die Fläche des Erdquerschnitts $F_{\text{Querschnitt}}$ geht. $I_k \approx 1365 \text{ Wm}^{-2}$
- Im Mittel über einen Tag und gemittelt über die Oberfläche der Erde $F_{\text{Erdoberfläche}}$ kommen dann an solarer Strahlung pro m^2 an:

$$I_k \frac{F_{\text{Querschnitt}}}{F_{\text{Erdoberfläche}}} = I_k \frac{\pi r_E^2}{4\pi r_E^2} = \frac{I_k}{4} = \frac{1365}{4} \text{ Wm}^{-2} \approx 341 \text{ Wm}^{-2}$$

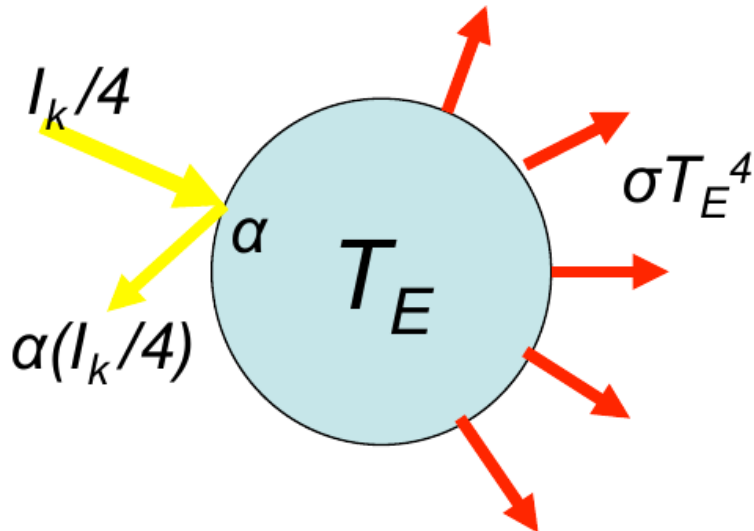
Strahlungsgleichgewichtstemperatur der Erde

Es herrscht im Mittel Strahlungsgleichgewicht, d.h.: **Solare Einstrahlung = terrestrische Ausstrahlung**

Terrestrische Ausstrahlung mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes beschreiben (Erde als schwarzer Strahler):

$$P_{out} = \sigma A T_E^4 \quad \text{mit } T_E: \text{Strahlungsgleichgewichtstemperatur der Erde}$$

Berücksichtige, dass die Erde die solare Strahlung nicht komplett absorbiert, sondern einen Teil davon direkt zurück ins All reflektiert wird (z.B. durch Reflexion an Wolken). Die reflektierte Strahlung beträgt im Mittel 30% und wird durch die planetare Albedo (Maß für das Rückstrahlvermögen) $\alpha = 0,3$ beschrieben



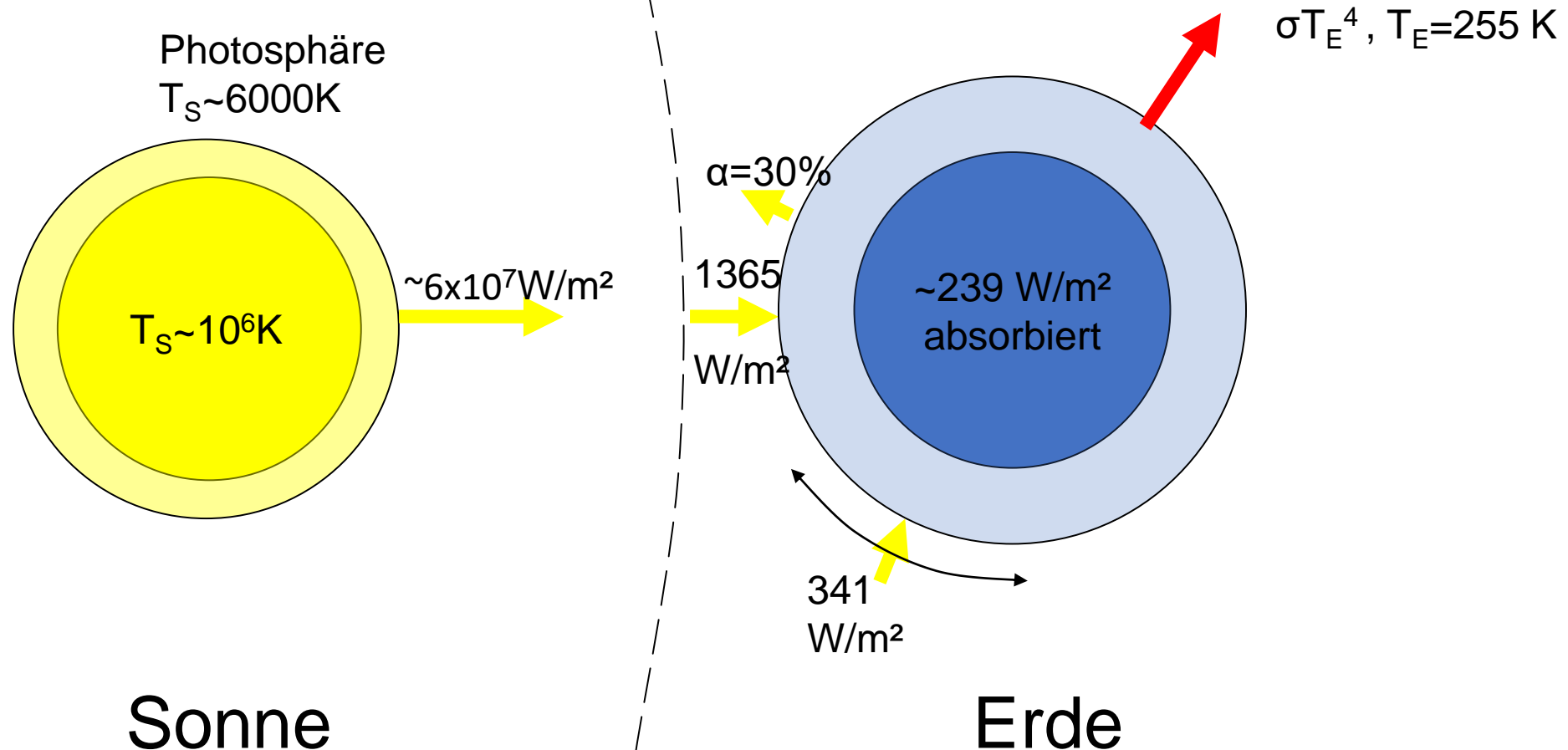
$$\frac{I_k}{4} (1 - \alpha) = \sigma T_E^4 \quad \Rightarrow \quad T_E = \left[\frac{I_k}{4\sigma} (1 - \alpha) \right]^{0.25}$$

für $\alpha = 0$ (schwarze Erde): $T_E = 279 \text{ K } (\approx 6^\circ\text{C})$

für $\alpha = 0,3$ (aus Satellitenmess): $T_E = 255 \text{ K } (\approx -18^\circ\text{C})$

Zusammenfassung

$\sigma T_S^4 = 6,31 \cdot 10^7 \text{ W m}^{-2} \rightarrow \text{um Faktor } r_{S-E}^2 / r_S^2 = 46200 \text{ größer als } I_K$

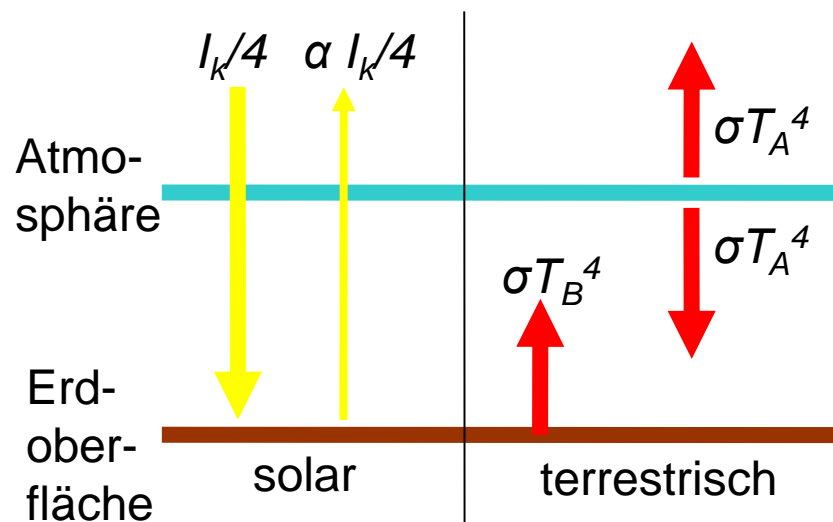


Treibhauseffekt der Atmosphäre

Unter dem Treibhauseffekt der Atmosphäre versteht man die Beobachtung, dass die Temperatur nahe der Erdoberfläche (**in 2 m Höhe im Mittel ca. 287 K**) höher ist als die **Ausstrahlungstemperatur der Erde (ca. 255 K)**, die sich im Strahlungsgleichgewicht mit Sonne und Weltall einstellen würde. **Ursache** ist die Tatsache, dass die **Erdatmosphäre im terrestrischen Spektralbereich fast undurchlässig** ist und damit nach Kirchhoff selber recht viel Strahlung auch nach unten emittiert.

Dies lässt sich durch ein einfaches **2-Schichten-Modell** grob veranschaulichen, das annimmt:

- Im **solaren** Spektralbereich ist die Atmosphäre (bis auf Wolken, die alles reflektieren und am Boden liegen) vollständig **transparent** und die **Erdoberfläche absorbiert davon den Teil $1-\alpha$** .
- Im **terrestrischen** Spektralbereich sind Erdoberfläche und Atmosphäre **schwarze Körper**.



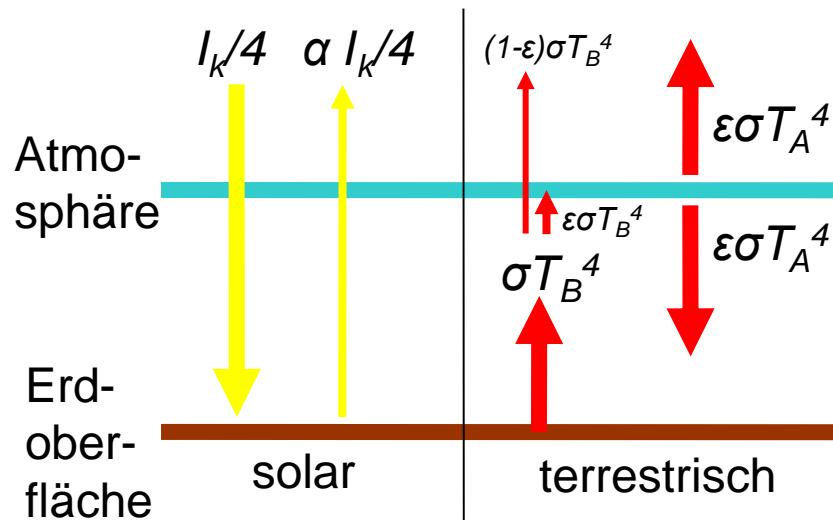
Bilanzgleichungen für die beiden Platten:

Atmosphäre:	$-2\sigma T_A^4 + \sigma T_B^4 = 0$
Erdoberfläche:	$\sigma T_A^4 - \sigma T_B^4 + 0,7 \frac{I_k}{4} = 0 \quad (+)$
	$-\sigma T_A^4 + 0,7 \frac{I_k}{4} = 0$
	$\Rightarrow T_A = 255 \text{ K } (= -18^\circ\text{C})$
	$\Rightarrow T_B = 303 \text{ K } (= +30^\circ\text{C})$

Treibhauseffekt bei „grauer“ Atmosphäre

Die Annahme einer im terrestrischen Spektralbereich **schwarzen Atmosphäre** führt zu **zu hohen Oberflächentemperaturen verglichen mit Beobachtungen**.

Man erreicht eine Verallgemeinerung/Verbesserung, wenn man die Atmosphäre mit einer **Emissivität $\varepsilon < 1$ im Terrestrischen** versieht. Damit wird die Atmosphäre auch im Terrestrischen etwas transparent. Dies berücksichtigt unter anderem, dass es auch im terrestrischen Spektralbereich Fenster gibt, z.B. zwischen 8 und 12 μm .



$$\begin{aligned}
 & -2\varepsilon\sigma T_A^4 + \varepsilon\sigma T_B^4 = 0 \\
 & +\varepsilon\sigma T_A^4 - \sigma T_B^4 + (1-\alpha)I_k/4 = 0 \quad (*2, +) \\
 \hline
 & -(2-\varepsilon)\sigma T_B^4 + 2(1-\alpha)I_k/4 = 0 \\
 & \Rightarrow T_A = (2-\varepsilon)^{-1/4} T_E \\
 & \Rightarrow T_B = (1-\varepsilon/2)^{-1/4} T_E \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow T_A \\ \Rightarrow T_B \end{aligned}} \right\} \text{mit } T_E = \left(\frac{1-\alpha}{\sigma} \frac{I_k}{4} \right)^{1/4}
 \end{aligned}$$

Atmosphäre

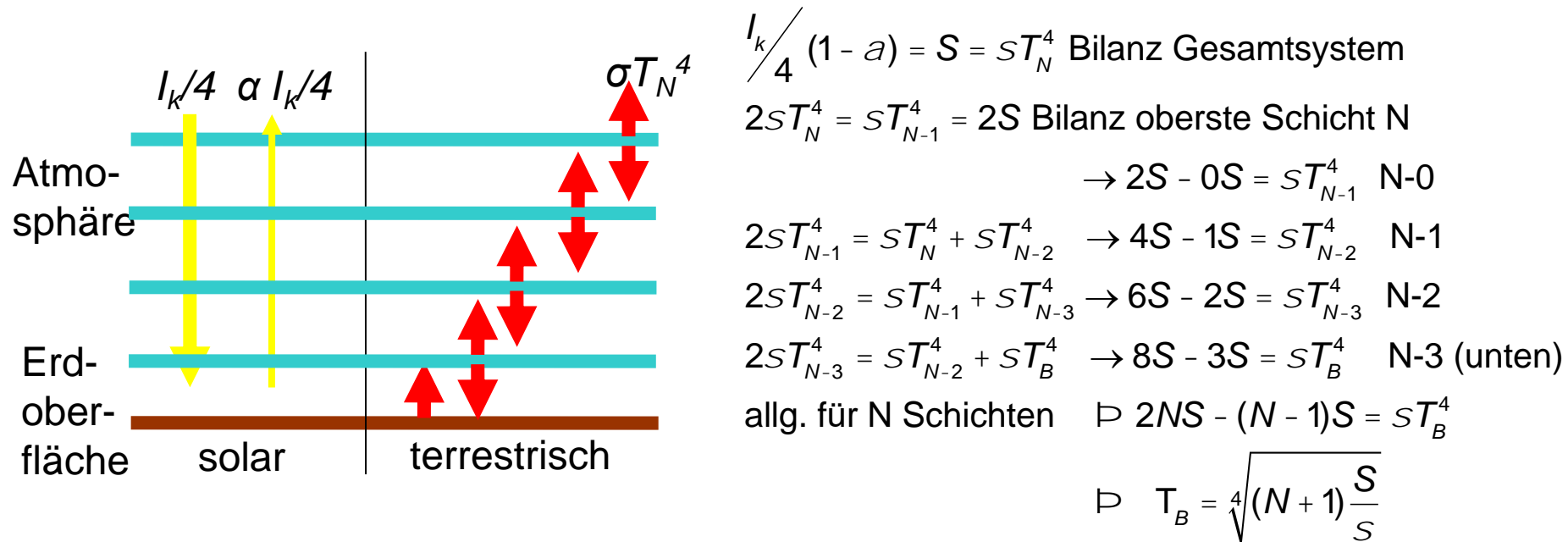
Erdoberfläche

Die gesamte terrestrische Ausstrahlung (die wie vorher $(1-\alpha)I_k/4$ ausgleichen muss) setzt sich nun aus Strahlung der Atmosphäre **und** des Bodens zusammen (denn $(1-\varepsilon)\sigma T_B^4$ geht nun durch die Atmosphäre durch ins All!).

Für den beobachteten mittleren Wert für $T_B = 288,15 \text{ K}$ ($= 15^\circ\text{C}$) ergibt sich $\varepsilon = \mathbf{0,7706}$ und $T_A = 242,30 \text{ K}$ ($= -30^\circ\text{C}$) also niedriger als bei einer schwarzen Atmosphäre).

Treibhauseffekt bei mehrschichtiger Atmosphäre

Die Annahme einer im terrestrischen Spektralbereich **schwarzen Atmosphäre** führt zu einer **Oberflächentemperatur von ca. 30°C**. Dies ist allerdings **keine Obergrenze!** Bei weiter zunehmender „Dicke“ der Atmosphäre (mehr Treibhausgase) kann die Bodentemperatur beliebig weiter steigen. Dies kann durch Erweiterung des 2-Platten-Modells auf N Platten (alle schwarz) gezeigt werden.



Die Temperatur am Unterrand nimmt also weiter mit jeder zusätzlichen (im Terrestrischen schwarzen) Schicht zu. Das Argument einiger selbsternannten „Klimaexperten“, die sagen dass zusätzliches CO₂ keinen Effekt mehr hat, weil diese bei 15 µm bereits „dicht“ ist (siehe Spektrum), ist also Unsinn.

Treibhauseffekt in Klimamodellen

- In Klimamodellen wird der **Treibhauseffekt an jeder Stelle der Atmosphäre** unter Berücksichtigung der jeweiligen Gaszusammensetzung (insbesondere des Wasserdampfes) berechnet.
- Dabei wird **nicht** – wie in den besprochenen 1-dimensionalen Modellen – **von einer ausgeglichenen Bilanz ausgegangen**, sondern nur von Energieerhaltung.
- Es werden eine Reihe von **spektralen Bereichen** mit unterschiedlicher Durchlässigkeit **getrennt gerechnet** und danach spektral integriert.
- Insbesondere wird der **Einfluss** der im Modell entstehenden **Aerosole und Wolken** auf den Treibhauseffekt berücksichtigt.
- Schließlich wird auch die **Dynamik der Atmosphäre** berücksichtigt, die z.B. eine nur durch Strahlungseffekte viel zu hohe Temperaturabnahme mit der Höhe durch die zwingend einsetzende Konvektion abbaut (bis auf max. 1 K/100m).
- **Gemittelt über die Erde stimmen die Ergebnisse aber grob mit dem einfachen 2-Plattenmodell überein.**

Teil 2: Einführung in die Dynamik der Atmosphäre

Einführung in die Dynamik der Atmosphäre

- Erhaltungsgesetze
- Kräfte im nichtrotierenden System
 - Druckgradientkraft
 - Gravitationskraft
 - Reibungskraft
- Scheinkräfte in rotierenden Systemen
 - Zentrifugalkraft
 - Corioliskraft
- Bewegungsgleichungen (Navier-Stokes-Gleichungen)
- Skalenanalyse der Bewegungsgleichung für die synoptische Skala
- Wichtige Kräftegleichgewichte
 - Geostrophisches Gleichgewicht
 - Gradientwindbalance
 - Einfluss von Reibung

Erhaltungsgesetze

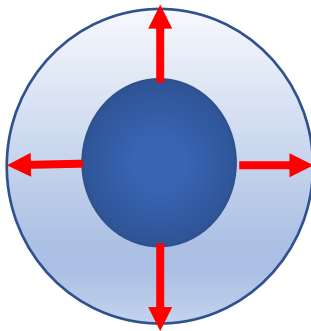
- Wetter- und Klimavorhersage basieren auf physikalischen Gesetzen, die aus Erhaltungseigenschaften abgeleitet werden
- Energieerhaltung → 1. Hauptsatz der Thermodynamik (→ siehe Vorlesungsteil zur Thermodynamik)
- Massenerhaltung → Kontinuitätsgleichung (Masse eines Luftpakets bleibt erhalten, während sich seine Dichte und sein Volumen verändern können)
- Impulserhaltung → Bewegungsgleichung (Newton's 2. Gesetz – Beschleunigung eines Masseteilchens entspricht der Summe aller angreifenden Kräfte → Achtung: rotierendes/nicht-rotierendes Bezugssystem beachten)

Massenerhaltung und Kontinuitätsgleichung

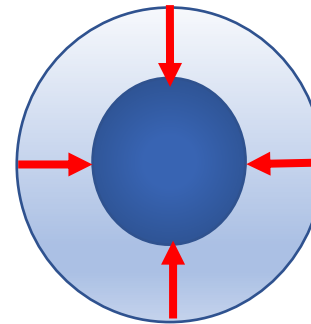
- Definition der Masse $m = \rho V$ mit Dichte ρ und Volumen V
- Ein Luftpaket habe die gleiche Masse, d.h. die zeitliche Änderung
$$\frac{dm}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho V) = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0$$

→ Kontinuitätsgleichung: $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$

= $\nabla \cdot \vec{v}$ (Übung/Tafel)



$\nabla \cdot \vec{v} > 0$: Auseinanderströmen
→ Abnahme der Dichte



$\nabla \cdot \vec{v} < 0$: Zusammenströmen
→ Zunahme der Dichte

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Impulserhaltung und Bewegungsgleichung

- Newtons 2. Gesetz (Summe aller Kräfte=Masse x Beschleunigung):

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

- Im rotierenden (Koordinaten-)System kommen zu den „echten“ Kräften noch Scheinkräfte hinzu

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum(\text{echte Kräfte}) + \sum(\text{Scheinkräfte})$$

- „Echte“ Kräfte: wirken in jedem Bezugssystem, auf ein Luftpaket wirken die Gewichtskraft, die Druckgradientkraft und die Reibungskraft
 - Scheinkräfte sind Kräfte, die in rotierenden Bezugssystemen auftreten
- Massenspezifische Form der Bewegungsgleichung (=Beschleunigungen):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m} \sum(\text{echte Kräfte}) + \frac{1}{m} \sum(\text{Scheinkräfte})$$

„Echte“ Kräfte (1): Gravitationskraft $\vec{F}_g = m \vec{g}^*$ (hier: auf die Erde bezogen)

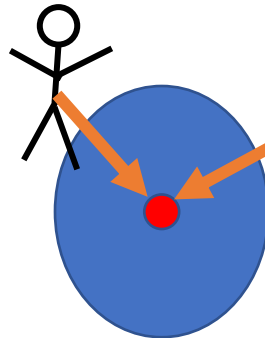
$$\text{mit } \vec{g}^* = - \frac{GM}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$G = 6,6741 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad : \text{ Gravitationskonstante}$$

$$M = 5,9722 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad : \text{ Masse der Erde}$$

\vec{r} : Abstandsvektor vom Erdzentrum nach außen

\vec{g}^* groß, da
der Abstand
klein ist



\vec{g}^* klein, da
der Abstand
sehr groß ist



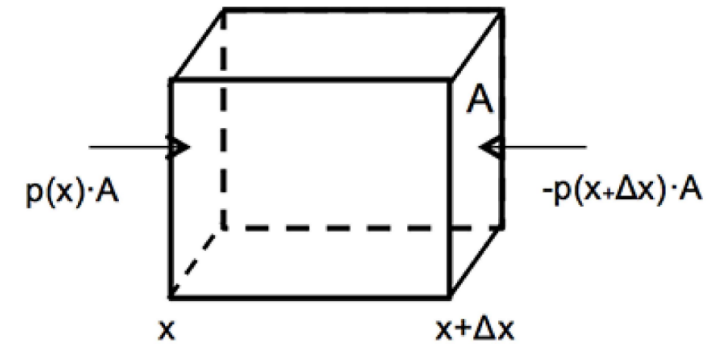
„Echte“ Kräfte (2): Druckgradientkraft

Der Druck wirkt auf jede Fläche eines Luftpakets. Der Druck ist definiert als Kraft pro Fläche. Um die Kraft (z.B. in x-Richtung, s. Abbildung) zu berechnen multiplizieren wir den Druck mit der Fläche. Zum Beispiel ergibt sich für die x-Richtung (Summe aus der massenspezifischen Kraft an der Stelle x und x+Δx):

$$\frac{F_{p,x}}{m} = \frac{p(x) \cdot A - p(x + \Delta x) \cdot A}{m} = \frac{[p(x) - p(x) - \Delta p] \cdot A}{m}$$
$$\frac{F_{p,x}}{m} = - \frac{\Delta p \cdot A}{m} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} = - \frac{\Delta p \cdot (A \cdot \Delta x)}{m \cdot \Delta x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

mit $A \cdot \Delta x = V$
 $\rho = m/V$

Im Grenzübergang für infinitesimal kleine Δx ergibt sich: $\frac{F_{p,x}}{m} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$



Drawing of the forces involved in the pressure gradient force in the x direction.

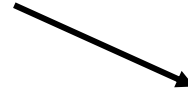
Credit: W. Brune

Analog können die Komponenten der Druckgradientkraft in y- und z-Richtung abgeleitet werden. Insgesamt ergibt sich dann für die Druckgradientkraft:

$$\frac{\vec{F}_p}{m} = - \frac{1}{\rho} \nabla p = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right)$$

„Echte“ Kräfte (3): Reibungskraft $\vec{f}_R = \vec{F}_R/m$

- Zwei Arten von Reibung sind in der Atmosphäre relevant:
Molekulare und **turbulente** Reibung



- Entsteht durch zufällige Bewegung der Moleküle und molekularen Austausch von Impuls bei Zusammenstößen zweier Moleküle.
 - Impulstransfer vom schnelleren Teilchen auf langsamere Teilchen, dieser Transfer hängt von der Geschwindigkeit des Teilchens ab und von der Viskosität (die wiederum von der Temperatur abhängt).
 - Wirkt vor allem in Bodennähe und bremst dort die Bewegung der darüberliegenden Luft ab, ebenso wichtig bei sehr kleinen Skalen (z.B. fallender Regentropfen)
- Wirkt vorwiegend in der atmosphärischen Grenzschicht (unterste, bodennahe Schicht (ca. 1 km Höhe)) aufgrund der abbremsenden Wirkung turbulenter Wirbel (Eddies) die in der Strömung entstehen
 - Ist keine fundamentale Kraft, sondern wird erst bei zeitlicher und/oder räumlicher Mittelung der Bewegungsgleichung sichtbar

Bewegungsgleichung im Inertialsystem

Im **Inertialsystem** (=nicht-rotierend, nicht-beschleunigtes System, auch Absolutsystem, daher Index „a“) ergibt sich die Bewegungsgleichung als Summe aller (massenspezifischen) „echten“ Kräfte:

$$\frac{d_a \overrightarrow{v_a}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \overrightarrow{g^*} + \overrightarrow{f_R}$$

Mit $\overrightarrow{v_a} = (u_a, v_a, w_a)^T$

Scheinkräfte

- Newtons 2. Gesetz gilt nur für nicht-beschleunigte Inertialsysteme.
- Die Erde rotiert allerdings um die eigene Achse. Ein Koordinatensystem, dass fest mit der Erde verknüpft ist und mitrotiert, erfährt daher eine Beschleunigung
- Für einen Beobachter aus dem All, würde sich die Luft gemäß Newtons Gesetz verhalten, für einen Beobachter auf der Erde müssen zusätzliche, sogenannte Scheinkräfte berücksichtigt werden, die das Verhalten der Luft beschreiben.
- Die absolute Geschwindigkeit \vec{v}_a (im Inertialsystem) setzt sich daher zusammen aus der beobachteten Geschwindigkeit im rotierenden System \vec{v} und der Geschwindigkeit \vec{v}_e , die durch die Rotation der Erde hinzukommt:

$$\underbrace{\vec{v}_a}_{=\frac{d_a \vec{r}}{dt}} = \vec{v} + \vec{v}_e = \underbrace{\vec{v}}_{=\frac{d\vec{r}}{dt}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

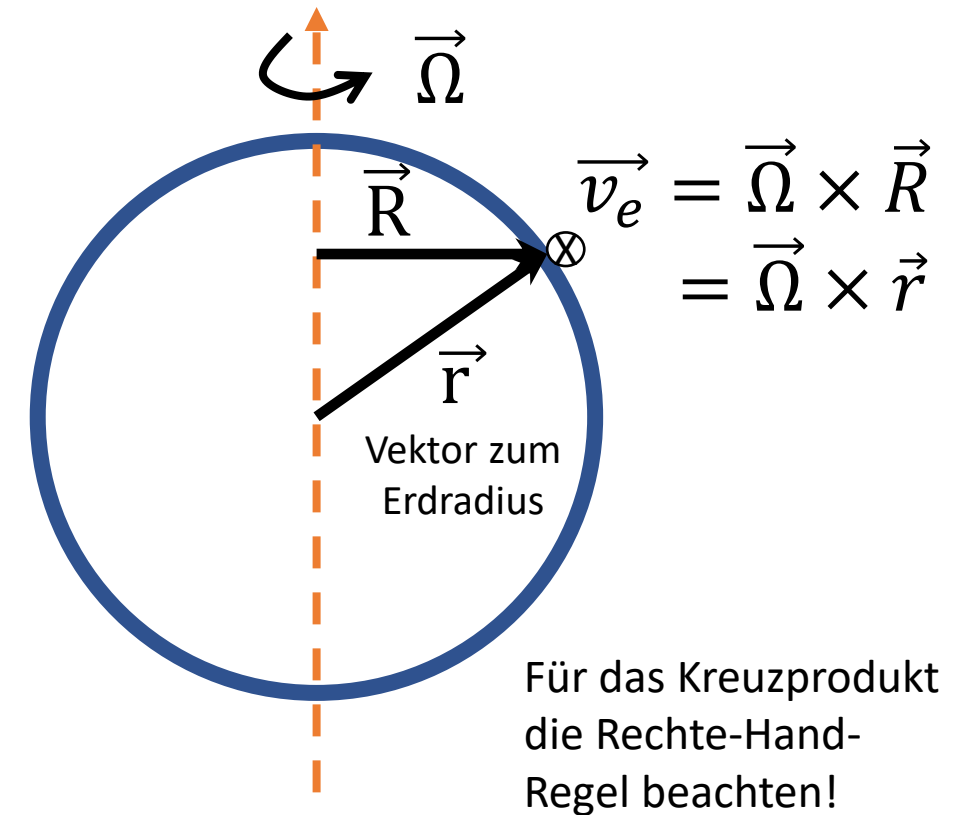


Abb.: Erdrotation ist nach Osten gerichtet. Das Vektorsymbol deutet an, dass der Vektor \vec{v}_e ins Blatt hineinzeigt mit der Magnitude $|\vec{v}_e| = R\Omega$. Es ist die **Winkelgeschwindigkeit der Erde** $\vec{\Omega}$ mit $\Omega = |\vec{\Omega}| = \frac{2\pi}{Tag} \approx 7,292 \cdot 10^{-5} s^{-1}$.

Winkelgeschwindigkeit der Erde

- Die Winkelgeschwindigkeit der Erde $\vec{\Omega}$ ist ein Vektor, der entlang der Rotationsachse der Erde verläuft.
- $\vec{\Omega}$ hat zwei Vektorkomponenten (s. Zerlegung des Vektors $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$ in der Abb.), die auch Coriolisparameter genannt werden:
 - Eine vertikale Komponente: $|\vec{\Omega}| \sin \phi$
 - Eine Nord-Süd-Komponente: $|\vec{\Omega}| \cos \phi$
- Im Kartesischen Koordinatensystem, das in der Meteorologie benutzt wird, ergibt sich für

$$\vec{\Omega} = (0, |\vec{\Omega}| \cos \phi, |\vec{\Omega}| \sin \phi)^T \quad \text{bzw.} \quad 2\vec{\Omega} = (0, l, f)^T$$

mit den Coriolisparametern

$$f = 2 |\vec{\Omega}| \sin \phi \quad , \quad l = 2 |\vec{\Omega}| \cos \phi$$

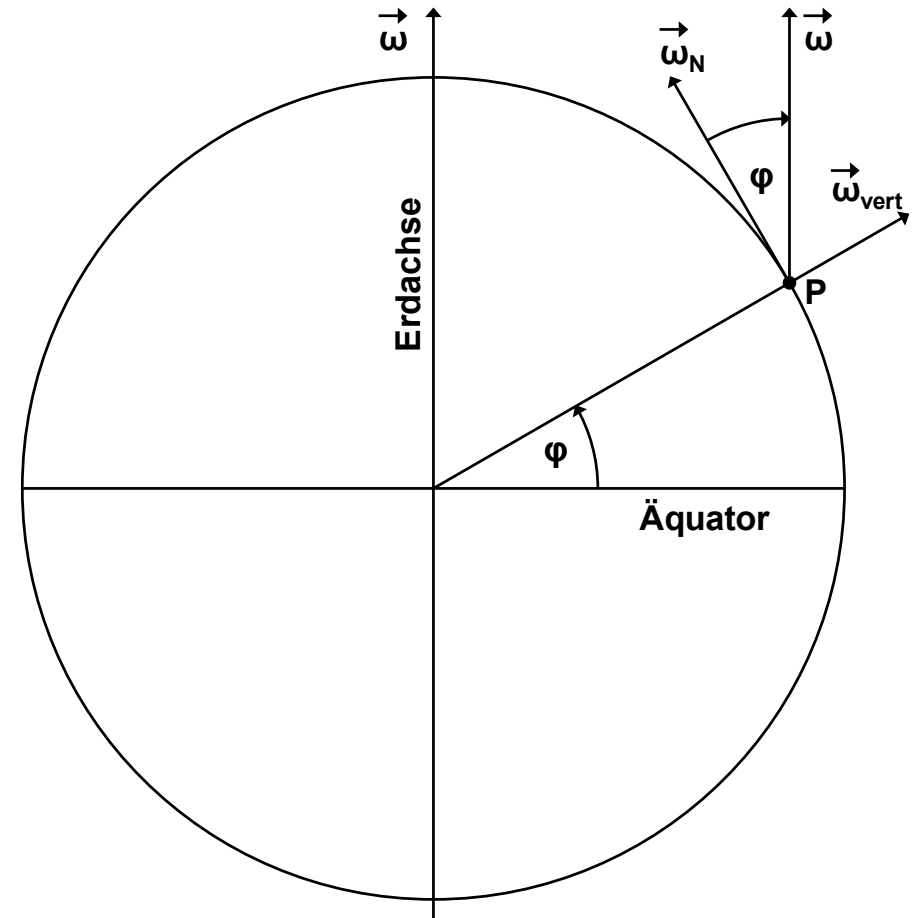


Abb: Von Wruedt - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=99764584>

Zentrifugalkraft



und Schwerkraft

- Die **Zentrifugalkraft beschleunigt Objekte nach außen von der Rotationsachse weg**; sie ist am größten am Äquator und Null direkt am Pol.
- Sie sorgt für ein **Abflachen der Erdkugel** (Erdradius $R(\text{Pol-Erdzentrum})=6356,8 \text{ km}$ gegenüber $R(\text{Äquator-Erdzentrum})=6378,1 \text{ km}$)

- Die **Schwerkraft der Erde** (die alle Körper auf der Erde spüren) entspricht der **Summe aus der Gravitationskraft und der Zentrifugalkraft** (mit $g = |\vec{g}|$):

$$\vec{g} = -g\vec{k} = \vec{g}^* + \Omega^2\vec{R}$$

- \vec{g} ist immer senkrecht zur Erdoberfläche!
- $g_{\text{Äq.}} = 9,780 \text{ m/s}^2$ am Äquator
- $g_{\text{Pol}} = 9,832 \text{ m/s}^2$ am Pol

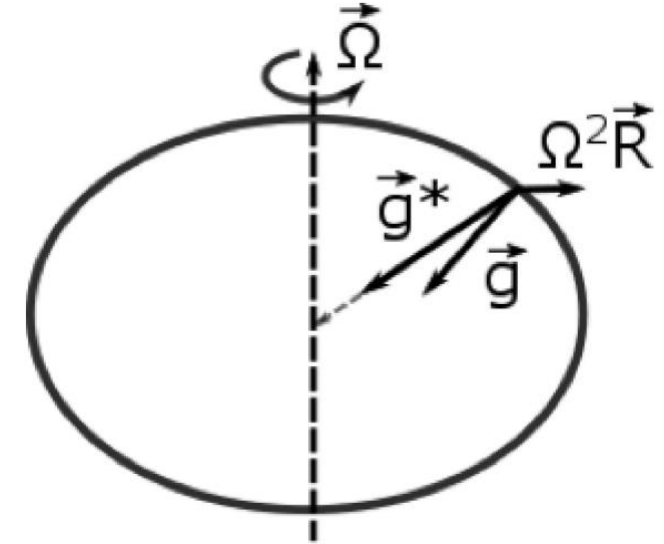


Abb.: Zusammensetzung der Schwerkraft aus der Gravitationskraft \vec{g}^* und der nach außen gerichteten Zentrifugalkraft $\Omega^2\vec{R}$. Was wir (und alle Massen/Objekte) auf der Erde spüren ist die Schwerkraft \vec{g} , die stets senkrecht zur Erdoberfläche steht. (Abbildung von W. Brune)

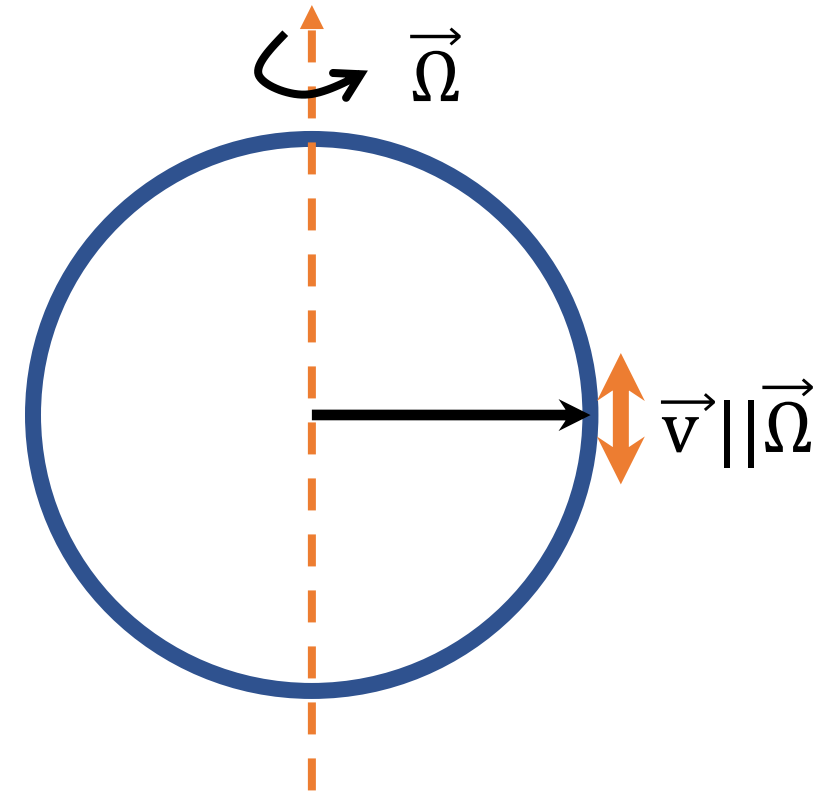
Corioliskraft

Explizit: $-2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\begin{pmatrix} 0 \\ l \\ f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} lw - vf \\ fu - 0 \\ 0 - ul \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2w|\vec{\Omega}|\cos\phi - 2v|\vec{\Omega}|\sin\phi \\ 2u|\vec{\Omega}|\sin\phi \\ -2u|\vec{\Omega}|\cos\phi \end{pmatrix}$

Die Coriolisbeschleunigung ist gegeben als:

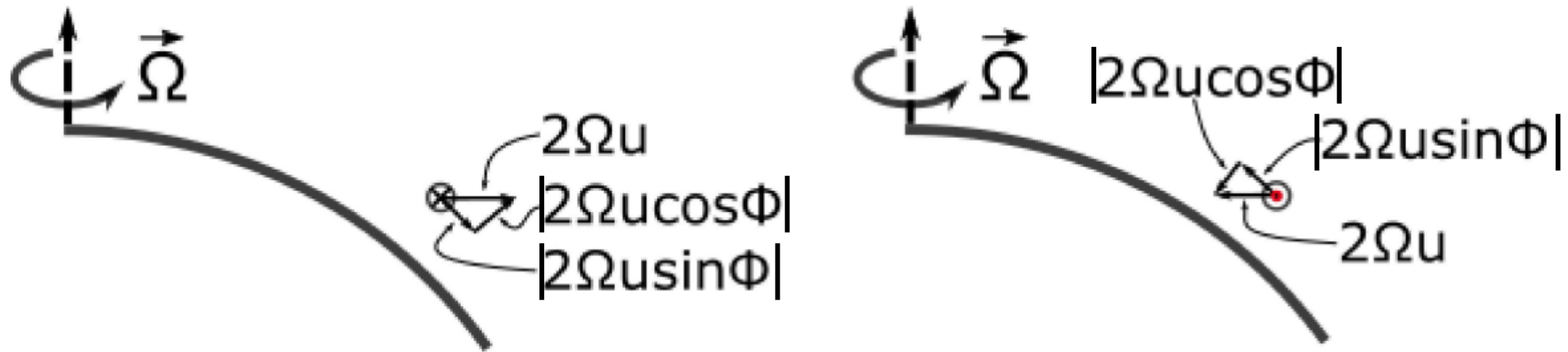
$$\vec{f}_c = \vec{F}_c/m = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

- Sie **wirkt nur**, wenn ein Luftpaket (oder ein anderes Objekt) **relativ zur Erde in Bewegung ist!**
- Sie ist senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor \vec{v} und zur Winkelgeschwindigkeit der Erde $\vec{\Omega}$.
- Am Äquator ist sie für Nord-Süd-Bewegungen gleich Null.



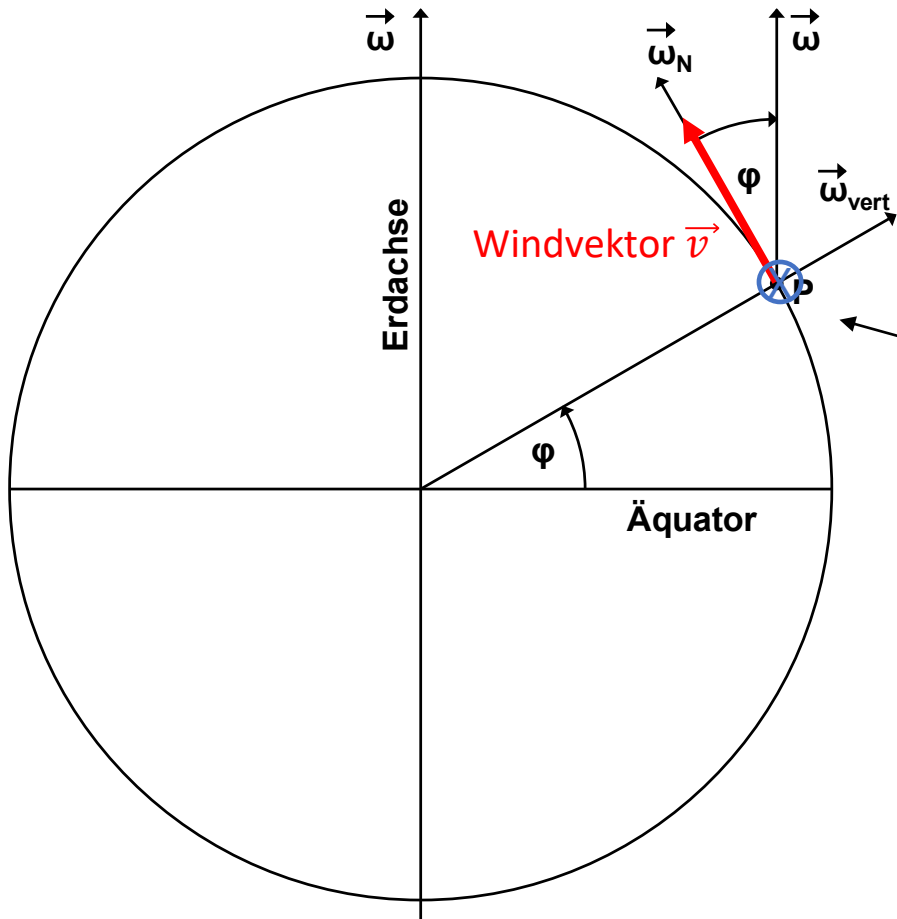
Corioliskraft bei zonalen (Ost-West-)Bewegungen

- Coriolis-Beschleunigung in y-Richtung (Nord-Süd): $-2\Omega u \cdot \sin\phi$
 - Coriolis-Beschleunigung in vertikaler (z-)Richtung: $-2\Omega u \cdot \cos\phi$
- mit geographischer Breite ϕ



Coriolis force on an air parcel traveling zonally (left) to the east, where \otimes indicates flow into the page, and (right) to the west, where the red dot in the circle indicates flow out of the page, for the Northern Hemisphere. The air parcel speed is u and the latitude is ϕ .

Corioliskraft bei meridionalen (Nord-Süd-) Bewegungen (auf einheitlicher Höhe)



- Bei reiner Nord-Süd-Bewegung parallel zur Erdoberfläche wirkt nur die Vertikalkomponente der Winkelgeschwindigkeit auf den Windvektor.
- Die Ablenkung im eingezeichneten Fall geschieht nach Osten (nach rechts auf der Nordhemisphäre)

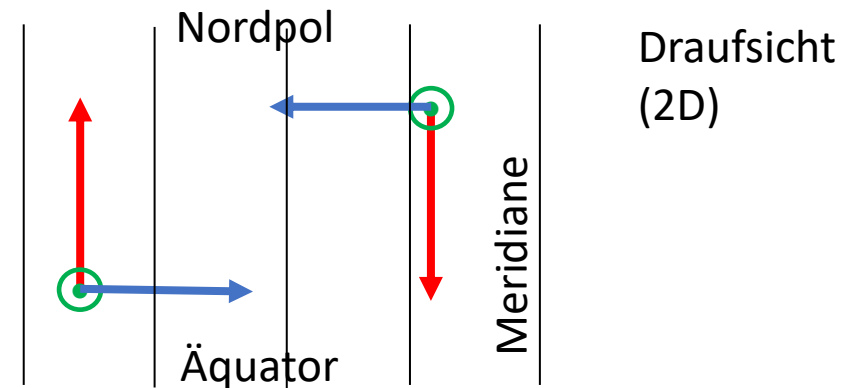


Abb: Von Wruedt - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=99764584>

Vertikalkomponente der Winkelgeschwindigkeit
 Windvektor \vec{v} , Coriolisbeschleunigung \vec{f}_c

Bewegungsgleichung im rotierenden System und Vergleich zum Absolutsystem

Bewegungsgleichung im Inertialsystem (Absolutsystem):

$$\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}^* + \vec{f}_R$$

Im rotierenden Bezugssystem müssen zusätzlich die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft (\rightarrow in Schwerkraft integriert) berücksichtigt werden:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - g\vec{k} + \vec{f}_R$$

Die Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Reibung wird **Navier-Stokes-Gleichung** genannt, ohne Reibung wird sie **Eulergleichung** genannt.

Einschub: Einführung der Eulerschen Aufspaltung

Einführung der **Eulerschen Aufspaltung** für eine beliebige Feldgröße $\phi = \phi(x, y, z, t)$:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} u + \frac{\partial\phi}{\partial y} v + \frac{\partial\phi}{\partial z} w$$

$$\rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\phi$$

Das gilt für beliebige Feldgrößen (z.B. auch für die Temperatur T , und für die Windgeschwindigkeit \vec{v})

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\vec{v}$$

Wiederholung (Vorlesung 1, Folie 28): Überblick -- Grundgleichungen

$$1.-3. \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - g \vec{k} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \underbrace{\vec{f}_{Fr}}_{\text{Reibung}} \quad \text{oder}$$

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega (v \sin \underbrace{\varphi}_{\text{geo-graphische Breite}} - w \cos \varphi) + f_{Fr,x}$$

$$2. \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + f_{Fr,y}$$

$$3. \quad \frac{\partial w}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \underbrace{g}_{\approx 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ Schwere-beschleunigung}} + 2\Omega u \cos \varphi + f_{Fr,z}$$

$$4. \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v})$$

$$5. \quad \frac{\partial \rho_w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (\rho_w \vec{v}) + \underbrace{\dot{W}}_{\text{Kondensation, Verdunsten, Gefrieren}}$$

$$6. \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{1}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{c_p} \underbrace{\dot{H}}_{\propto \dot{W} + \text{Strahlung}}$$

$$7. \quad p = \rho \underbrace{R}_{\text{Gas-konstante}} T$$

1 diagnostische Gleichung

6 prognostische, nicht-lineare, gekoppelte Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dI_\lambda(s, \Omega)}{ds} = & -\sigma_{e,\lambda}(s) I(s, \Omega) \\ & + \sigma_{a,\lambda}(s) B_\lambda(T(s)) \\ & + \frac{\sigma_{s,\lambda}(s)}{4\pi} \oint_{4\pi} P_\lambda(s, \Omega \leftarrow \Omega') I_\lambda(s, \Omega') d\Omega' \end{aligned}$$

diagnostische Integro-Differenzialgleichung für Strahlungstransport

diagnostisch

prognostisch

$$\begin{aligned} Q - B - H - LE & \equiv 0 \\ P & = R + E + \frac{dS}{dt} \end{aligned}$$

Strahlungsbilanz = sensibler Wärmefluss + latenter Wärmefluss + Bodenwärmestrom

Niederschlag = Abfluss + Verdunstung + Änderung des Wasserspeichers

Gleichungen für Energieaustausch und Wasseraustausch mit der Erdoberfläche

Folie von Clemens Simmer und Silke Trömel

Horizontale und vertikale Bewegungsgleichung

3d- Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - g\vec{k} + \vec{f}_R$$

$$\text{Es ist: } -2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\begin{pmatrix} 0 \\ l \\ f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} lw - vf \\ fu - 0 \\ 0 - ul \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} w2|\vec{\Omega}| \cos\phi - v2|\vec{\Omega}| \sin\phi \\ u2|\vec{\Omega}| \sin\phi \\ -u2|\vec{\Omega}| \cos\phi \end{pmatrix}$$

Horizontale Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_h}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}_h = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p + 2|\vec{\Omega}|(v \sin\phi - w \cos\phi) \vec{i} - 2|\vec{\Omega}|u \sin\phi \vec{j} + \vec{f}_{R,h}$$

Vertikale Bewegungsgleichung:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2|\vec{\Omega}|u \cos\phi - g + f_{R,z}$$

Skalenanalyse der reibungsfreien Bewegungsgleichung für synoptische Systeme ($L=1000 \text{ km}$, $\phi = 45^\circ$)

Horizontale Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{\frac{d\vec{v}_h}{dt}}_{\substack{\text{Einheiten: } \frac{m}{s^2} \\ \frac{U^2}{L} \lesssim 10^{-4}}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \nabla_h p}_{\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta_h p}{L} \approx 10^{-3}} - \underbrace{2 |\vec{\Omega}| \sin \phi \vec{k} \times \vec{v}_h}_{f_0 U \approx 10^{-3}} + \underbrace{2 |\vec{\Omega}| w \cos \phi}_{f_0 W \approx 10^{-6}}$$

Vertikale Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{\frac{dw}{dt}}_{\substack{\text{Einheiten: } \frac{m}{s^2} \\ \frac{UW}{L} \approx 10^{-7}}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}}_{\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta_z p}{H} \approx 10} + \underbrace{2 |\vec{\Omega}| u \cos \phi}_{f_0 U \approx 10^{-3}} - \underbrace{g}_{g_0 \approx 10}$$

Typische Größenordnungen der synoptischen Skala

$$U = V = 10 \frac{m}{s}$$

$$W = 0,01 \frac{m}{s}$$

$$L = 1000 \text{ km} = 10^6 \text{ m}$$

$$H = 10 \text{ km} = 10^4 \text{ m}$$

$$\rho_0 = 1 \frac{kg}{m^3}$$

$$f_0 = l_0 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$g_0 \approx 10 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta_h p = 10 \text{ hPa} = 10^3 \text{ Pa}$$

$$\Delta_z p = 1000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa}$$

Bei der Skalenanalyse schätzt man anhand typischer Zahlenwerte der zu untersuchenden Phänomene (Skala) die Größenordnungen der einzelnen Terme der Bewegungsgleichung ab. Dadurch lassen sich die Gleichungen vereinfachen und besser untersuchen!

Skalenanalyse der reibungsfreien Bewegungsgleichung für synoptische Systeme ($L=1000$ km, $\phi = 45^\circ$)

Horizontale Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_h}{dt}} = \boxed{-\frac{1}{\rho} \nabla_h p} - \boxed{2 |\vec{\Omega}| \sin \phi \vec{k} \times \vec{v}_h} + 2 |\vec{\Omega}| w \cos \phi$$

Einheiten: $\frac{m}{s^2}$

$\frac{U^2}{L} \approx 10^{-4}$ $\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{L} \approx 10^{-3}$ $2f_0 U \approx 10^{-3}$ $2f_0 W \approx 10^{-6}$

Geostrophisches Gleichgewicht

Vertikale Bewegungsgleichung:

$$\frac{dw}{dt} = \boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}} + 2 |\vec{\Omega}| u \cos \phi \boxed{-g}$$

Einheiten: $\frac{m}{s^2}$

$\frac{UW}{L} \approx 10^{-7}$ $\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{H} \approx 10$ $2f_0 U \approx 10^{-3}$ 10

Hydrostatisches Gleichgewicht

→ s. Vorlesung 2!

Geostrophisches Gleichgewicht und geostrophischer Wind

Geostrophisches Gleichgewicht = Gleichgewicht aus horizontaler Druckgradientkraft und Corioliskraft:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla_h p - f \vec{k} \times \vec{v}_{h,g} \quad \text{mit Coriolisparameter } f = 2 |\vec{\Omega}| \sin \phi$$

Umformen nach \vec{v}_h indem die ganze Gleichung mit $\vec{k} \times$ multipliziert wird:

$$\frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_h p = -\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{v}_{h,g}) = -(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{v}_{h,g}}_{=0, \text{ da senkrecht zueinander}}) \vec{k} + (\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_{=1, \text{ da Einheitsvektoren}}) \vec{v}_{h,g}$$

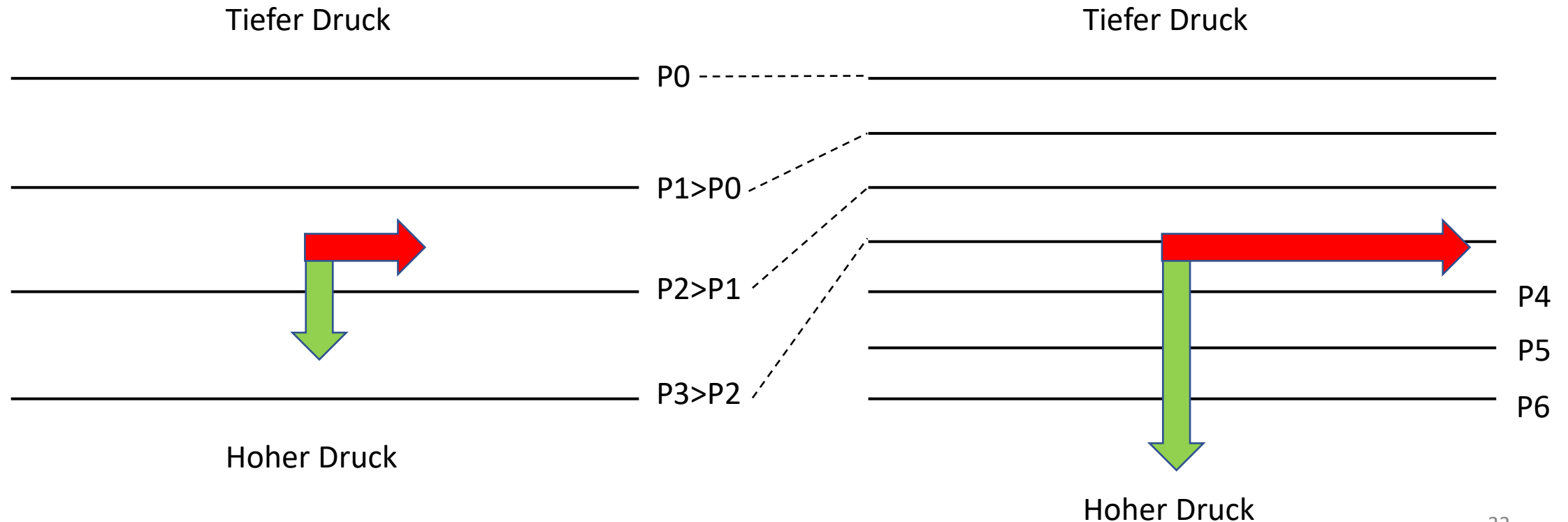
Insgesamt erhält man einen Ausdruck für den **geostrophischen Wind**:

$$\vec{v}_{h,g} = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_h p$$

Geostrophischer Wind : $\vec{v}_{h,g} = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_h p$

Rechte-Hand-Regel,
 \vec{k} zeigt nach oben

Der **geostrophischen Wind** steht senkrecht zum Druckgradienten $\nabla_h p$ (grüne Pfeile, je länger umso stärker der Gradient) und **weht parallel zu den Isobaren** (schwarze Konturen). Der Wind weht umso stärker, je stärker der Gradient ist!

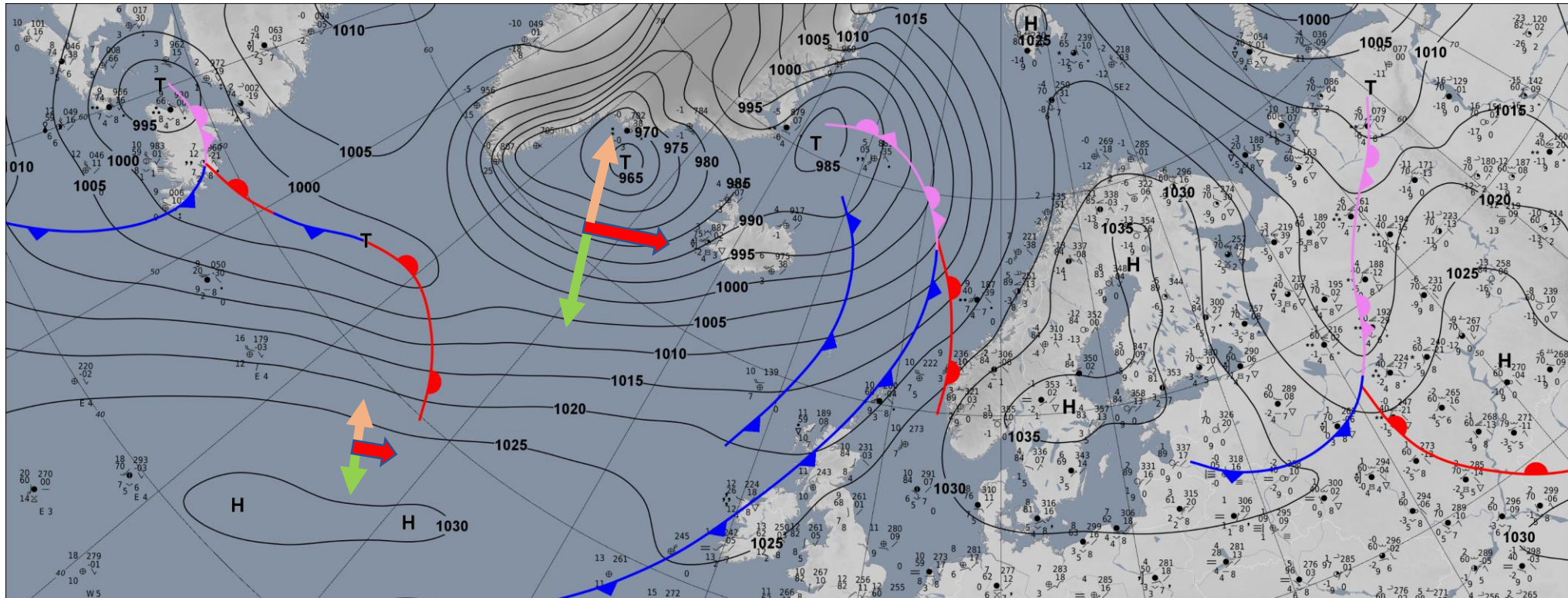


Geostrophischer Wind : $\vec{v}_{h,g} = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla_h p$

Rechte-Hand-Regel,
 \vec{k} zeigt nach oben

Der **geostrophischen Wind** steht senkrecht zum Druckgradienten $\nabla_h p$ (**grüne Pfeile**, je länger umso stärker der Gradient) und **weht parallel zu den Isobaren** (schwarze Konturen). Der geostrophische Wind (**rote Pfeile**) weht umso stärker, je stärker der Gradient ist! **Corioliskraft** (**orange Pfeile**).

Streng genommen gilt die geostrophische Windbalance nur für **geradlinige Isobaren**!



Skalenanalyse der reibungsfreien Bewegungsgleichung für synoptische Systeme ($L=1000$ km, $\phi = 45^\circ$)

Horizontale Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_h}{dt}} = \boxed{-\frac{1}{\rho} \nabla_h p} - \boxed{2 |\vec{\Omega}| \sin \phi \vec{k} \times \vec{v}_h} + 2 |\vec{\Omega}| w \cos \phi$$

Einheiten: $\frac{m}{s^2}$

$\frac{U^2}{L} \approx 10^{-4}$ $\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{L} \approx 10^{-3}$ $2f_0 U \approx 10^{-3}$ $2f_0 W \approx 10^{-6}$

Geostrophisches Gleichgewicht

Gradientwindbalance

Vertikale Bewegungsgleichung:

$$\frac{dw}{dt} = \boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}} + 2 |\vec{\Omega}| u \cos \phi \boxed{-g}$$

Einheiten: $\frac{m}{s^2}$

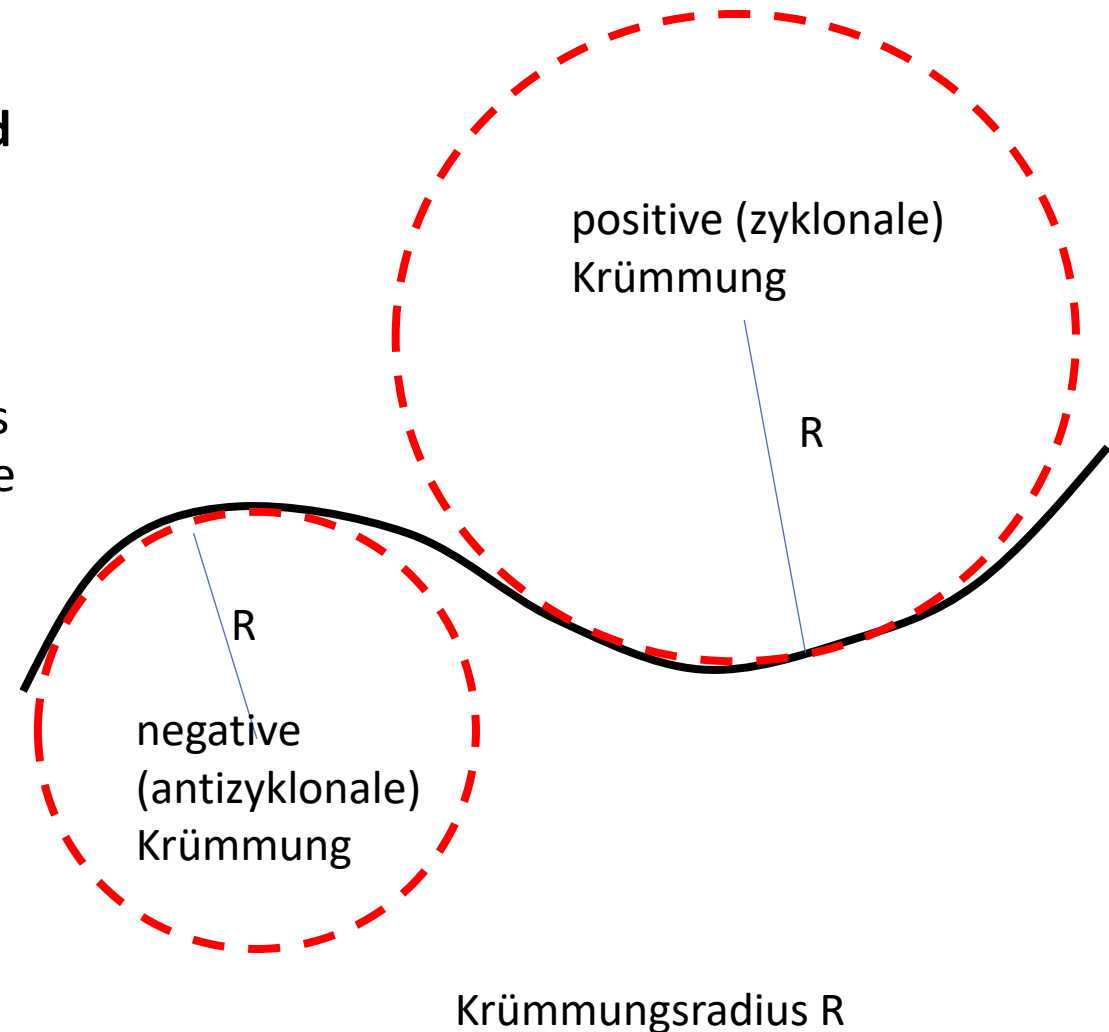
$\frac{UW}{L} \approx 10^{-7}$ $\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{H} \approx 10$ $2f_0 U \approx 10^{-3}$ 10

Hydrostatisches Gleichgewicht

→ s. Vorlesung 2!

Gradientwind

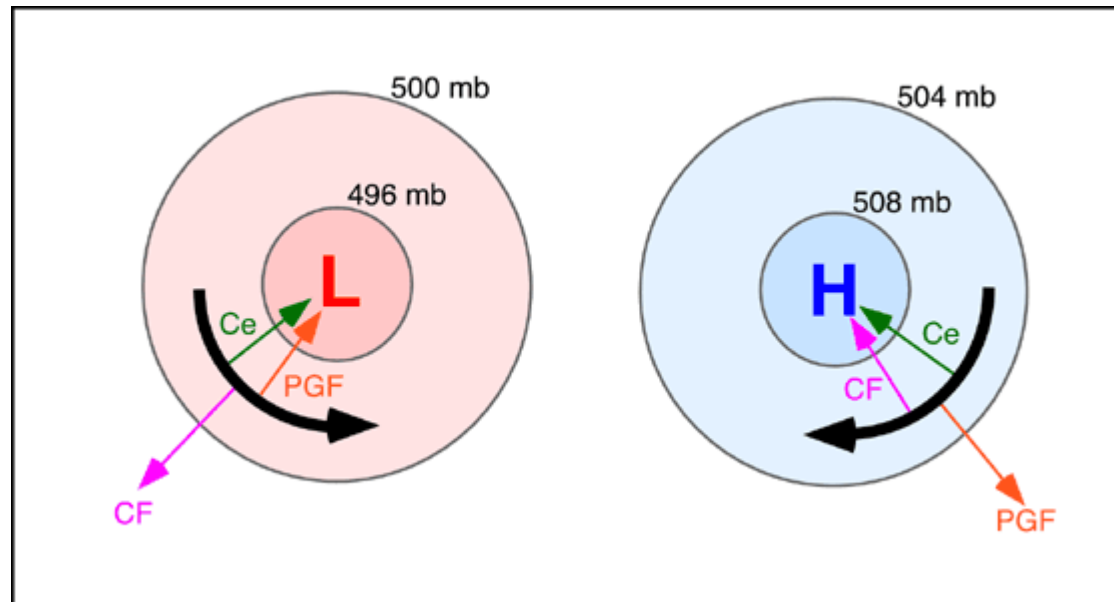
- **Gleichgewicht aus Beschleunigung des Horizontalwindes (Zentrifugalbeschleunigung aufgrund gekrümmter Trajektorien), Druckgradientkraft und Corioliskraft.**
- Die Beschleunigung des Horizontalwindes $\frac{d\vec{v}_h}{dt}$ entsteht durch 2 Mechanismen: (1) wenn sich die Magnitude des Windes mit der Zeit ändern würde und (2) wenn sich die Richtung ändert, z.B. aufgrund der Krümmung der Partikelbahn.
- Betrachten wir nur die Änderung aufgrund der Krümmung der Partikelbahn, so erfährt das Luftpaket eine Zentrifugalbeschleunigung, die von der Stärke der Krümmung der Trajektorie und dem Betrag der Windgeschwindigkeit und kann abhängt. Je nach Krümmung ist die Zentrifugalbeschleunigung positiv (zyklonal) oder negativ (antizyklonal) werden.



Gradientwind (geostrophisch-zyklostrophisches Gleichgewicht)

- Wind der aufgrund des **Gleichgewichts zwischen Druckgradient- Coriolis- und Zentrifugalkraft** entsteht
- Auch Gradientwind bzw. **geostrophisch- zyklotropisches Gleichgewicht**

Kräftegleichgewicht und resultierender Gradientwind (schwarzer Pfeil) bei einem normalen Tiefdruckgebiet (Nordhemisphäre)



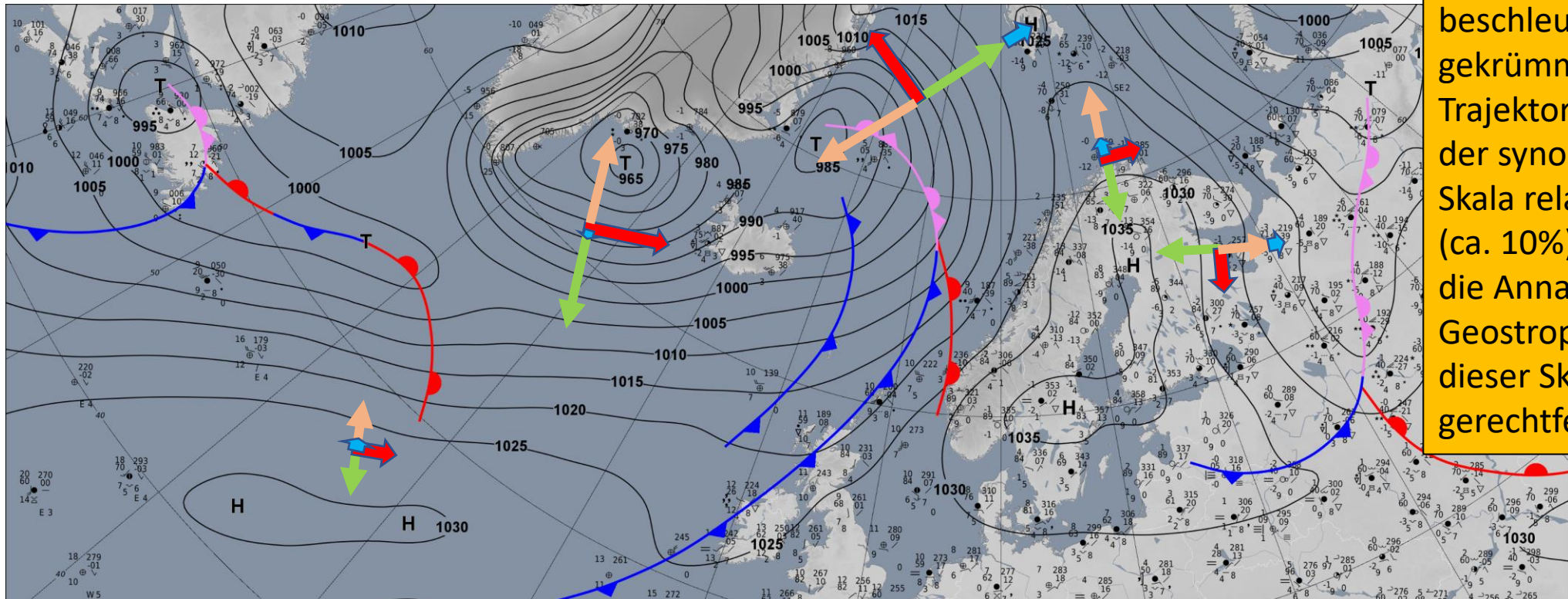
Kräftegleichgewicht und resultierender Gradientwind (schwarzer Pfeil) bei einem normalen Hochdruckgebiet (Nordhemisphäre)

Abb.: Druckgradientkraft (PGF), (rechtsablenkenden) Corioliskraft (CF). Zentripetalkraft (Ce, ist exakt das negative der Zentrifugalkraft → zeigt deshalb ins Wirbelzentrum).

Quelle: <http://www.diplomet.info/Gradientwind.html> (Aufruf: 15.11.2021)

Gradientwind (geostrophisch-zyklostrophisches Gleichgewicht)

Der Gradientwind **weht parallel zu den (gekrümmten) Isobaren**. Die Stärke des Gradientwinds ist proportional zum Druckgradienten (**grüne Pfeile**) normal zur Bewegungsrichtung (**rote Windvektoren**). Zentrifugalkraft (**blaue Pfeile**) ist immer nach außen gerichtet und umso größer, je größer die Krümmung. **Corioliskraft (orange Pfeile)**.



Die Zentrifugalbeschleunigung gekrümmter Trajektorien ist auf der synoptischen Skala relativ klein (ca. 10%). Daher ist die Annahme der Geostrophie auf dieser Skala gerechtfertigt.

Zusammenfassung

- Reale, „echte“ Kräfte sind die **Druckgradientkraft, die Gravitationskraft und die Reibungskraft**
- In einem rotierenden Bezugssystem müssen zusätzliche Scheinkräfte berücksichtigt werden, die durch die Rotation des Bezugssystems hinzukommen: **Corioliskraft und Zentrifugalkraft**
 - Die Zentrifugalkraft durch die Erdrotation sorgt für eine Modifikation der Anziehungskraft und wird in die **Schwerkraft** integriert.
 - Die Corioliskraft wirkt nur auf bewegte Massen und wirkt ablenkend. Die Ablenkung erfolgt nach rechts auf der Nordhemisphäre und nach links auf der Südhemisphäre
- Die **Skalenanalyse** zeigt auf, welche Terme der Bewegungsgleichung für welche räumlich-zeitliche Skala der Phänomene wichtig sind.
- → Daraus ergeben sich zwei **wichtige Approximationen (bzw. Gleichgewichte**, wenn keine anderen Kräfte wirken) für horizontale (synoptische) Bewegungen:
 - **Geostrophisches Gleichgewicht aus Druckgradientkraft und Corioliskraft**
 - **Gradientwindbalance aus Druckgradientkraft, Corioliskraft und Zentrifugalkraft** (Achtung, hier ist die Zentrifugalkraft des jeweiligen Systems (z.B. Hoch/Tief) gemeint!)
- Für vertikale (synoptische) Bewegungen können **hydrostatisch** approximiert werden (=Gleichgewicht aus vertikaler Druckgradientkraft und Schwerkraft)