Wieso Ich Mathe Liebe

Ein kleiner Versuch zur großen Begeisterung.

Mathematische Wahrheit ist die beständigste und robusteste Art von Wahrheit, die ich kenne. Es liegt daran, dass mathematische Wahrheit immer nur aus absolut logischen Schritten besteht. Wenn man die Sprache und Symbole von Mathematik kennt, und weiß was sie bedeuten, dann ist mathematische Wahrheit also ein Aufeinanderfolgen von Schritten, die man mit

"Das ist ja logisch!"

beschreibt.

Das Spektakuläre, und mein persönliches Highlight, an dem Ganzen, ist, dass die gesamte Wahrheit – also die Summe der logischen Schritte – überhaupt nicht so klar und logisch wirkt wie die einzelnen Schritte! Ganz im Gegenteil!

Wer nicht glauben kann, dass etwas Überraschendes aus dem Zusammenstecken von ganz einfachen Bauteilen – den logischen Schritten – entstehen kann, der hat wohl noch nie mit Legos gespielt ...

Die Aufgabe eines Mathematikers ist also zuerst etwas Überraschendes zu behaupten, und dann eine Zerlegung davon in Bauteile zu präsentieren, die jeder als völlig logisch und klar empfindet.

Denn genau dann ist das Überraschende auch mathematische Wahrheit: Wenn es aufgebaut ist aus Wahrheiten in ganz kleinen Portionen.

Das erste Beispiel von "mathematischer Wahrheit" ist den meisten von uns schon lange bekannt, aber nur die wenigsten wissen, dass es sich hier um mathematische Wahrheit handelt:

$$n \cdot k = k \cdot n \quad \text{für alle } k, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Als Beispiel könnte man $n = 3$ & $k = 5$ nehmen, dann steht oben genau

$$\underbrace{5 + 5 + 5}_{\text{"3 Mal 5"}} = \underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\text{"5 Mal 3"}}.$$

Ich finde das überraschend, dass diese Summen genau das Gleiche ergeben. Man empfindet das vielleicht schon als absolut logisch, weil man es ständig in der Schule gehört hat. Aber "oft genug gehört" ist noch keine mathematische Wahrheit. Ein absolut logischer Schritt ist ein Schritt, von dem man aus tiefstem Herzen überzeugt ist. Man legt seine Hand für einen absolut logischen Schritt ins Feuer.

Ich will jetzt die Behauptung, dass

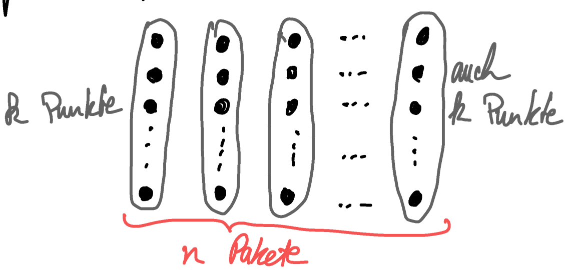
$$n \cdot k = k \cdot n$$

also, dass

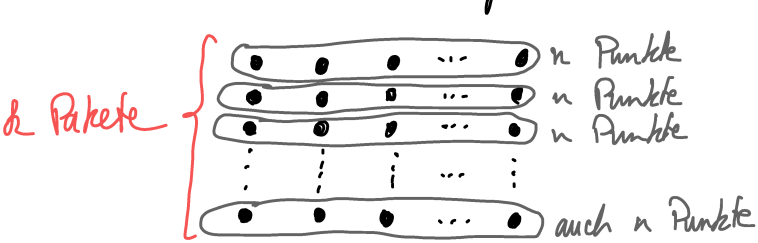
$$\underbrace{k + k + k + \cdots + k}_{n \text{ Summanden}} = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{k \text{ Summanden}}$$

für alle positiven ganzen Zahlen n und k, gilt, in solche Schritte zerlegen:

<u>Beweis</u>: Wenn man $n \cdot k$, also $\underbrace{k + k + \cdots + k}_{n \text{ Stück}}$ als Punkte aufzeichnet, sieht das so aus:



Aber man kann die gleichen Punkte auch anders einkreisen:



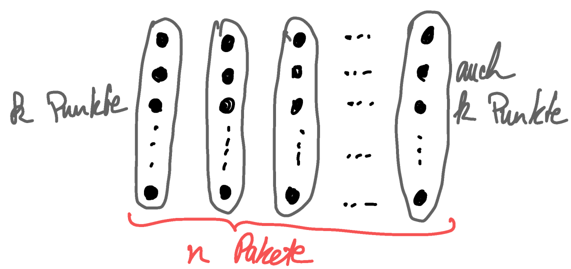
Also ist die Anzahl der Punkte auch gleichzeitig $k \cdot n$, also $\underbrace{n + n + \cdots + n}_{k \text{ Stück}}$. Also tatsächlich $n \cdot k = k \cdot n$! $\square$

Alles, was zwischen "Beweis:" und "□" steht, ist – hier und immer und überall und bei jedem – die besprochene Aneinanderreihung von absolut logischen Schritten, genannt

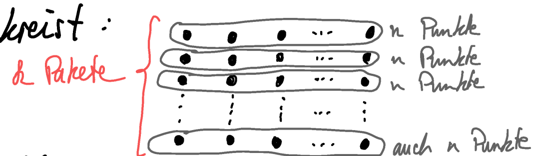
"**Beweis**".

Ich liste die Schritte des obigen Beweises nochmal ganz klar auf, sodass jeder entscheiden kann, ob das wirklich Schritte sind, die absolut logisch sind:

1. Die Zahl $n \cdot k$ ist gleich $\underbrace{k+k+\dots+k}_{n \text{ Stück}}$
2. Diese Zahl ist gleich der Anzahl an Punkten im Rechteck



3. Man kann die Punkte auch anders einkreisen, ohne, dass sich die Gesamtzahl der Punkte ändert
4. Wenn man folgendermaßen einkreist:



sieht man, dass die Gesamtzahl der Punkte im Rechteck auch gleich $\underbrace{n+n+\dots+n}_{k \text{ Stück}}$ ist

⑤ Diese Zahl $\underbrace{n+n+\cdots+n}_{k \text{ Stück}}$ ist gleich $k \cdot n$.

Sind diese 5 Schritte nicht alle fantastisch einfach und logisch? Ergeben diese Schritte nicht tatsächlich etwas Erstaunliches?

Es ist nicht sonderlich wichtig, diese beiden Fragen zu bejahen. Wirklich wichtig ist nur, dass man mir glaubt, dass die gesamte Mathematik – also auch die ganzen Formeln in der Schule in Mathe – in absolut logische Schritte zerlegt werden kann. Als Beispiel ein paar Behauptungen der Schulmathematik, die also aus solchen logischen Bausteinen bestehen:

- $a^2 + b^2 = c^2$ für a, b Kathetenlängen und c die Hypothenusenlänge eines rechtw. Dreiecks.
- wenn $ax^2 + bx + c = 0$, dann $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- für $f(x) = x^2$ ist die 1. Ableitung $f'(x) = 2x$.

All das sind überraschende Behauptungen, die unterrichtet werden. Was aber fast nie gezeigt wird, sind die dahinterliegenden Beweise, die diesen Formeln die unsterbliche Eigenschaft mathematische Wahrheit verleihen.

Nur diese Eigenschaft ist der Grund warum man das alles lernen muss – und auch noch anwenden lernen muss.

Einfach deshalb weil es stimmt.

Für immer und ewig und für ausnahmslos jeden Menschen.

Sowas gibt es nicht oft, so etwas Unantastbares.

Und es gibt noch viel mehr davon ...

Das, was viele Menschen davor zurückschrecken lässt, Mathe, also die Kunst des Beweisens, zu erlernen, ist die Angst – wie in der Schule – an einem Punkt nicht weiterzukommen und danach nie wieder Anschluss zu finden.

Deswegen ist dieses Buch so aufgebaut, dass es möglichst egal ist ob man den vorhergehenden Beweis verstanden hat oder nicht.

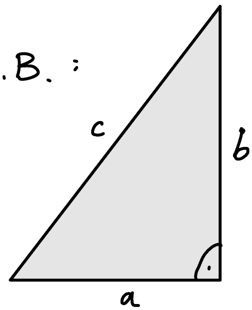
Jeder Beweis ist ein Neustart, soweit möglich.

Warum ist $a^2 + b^2 = c^2$?

Die Behauptung ist wahrlich berühmt:

> In jedem Dreieck mit Seitenlängen a, b, c, das einen rechten Winkel hat, gilt
>
> $$a^2 + b^2 = c^2.$$

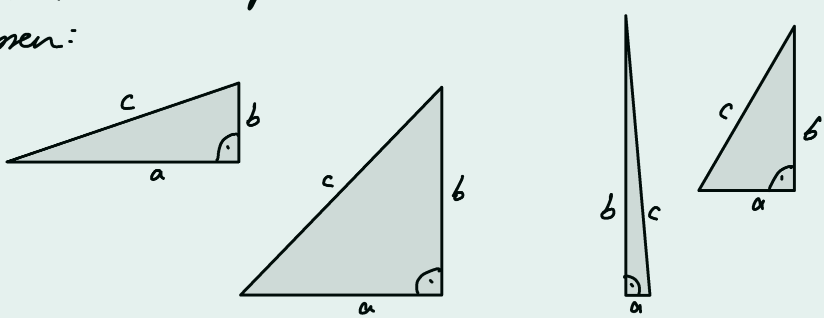
Also z.B.:



Und wenn man die Katheten nachmisst (auf meinem Display $a = 3cm$, $b = 4cm$) dann kann man ausrechnen, dass

$$c^2 = (3\,cm)^2 + (4\,cm)^2 = 25\,cm^2.$$

Also <u>muss</u> $c = 5cm$ lang sein, laut der Behauptung von Pythagoras.

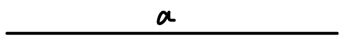
> Bitte miss auf deinem Display/Blatt die 3 Seitenlängen nach, und überprüfe, ob bei deinem Dreieck die Behauptung stimmt!
> Hier noch ein paar mehr Dreiecke zum Nachmessen:
>
> 
>

Damit der Beweis möglichst flott passiert, möchte ich daran erinnern, dass jedes Dreieck eindeutig bestimmt ist, wenn man 2 der Winkel und irgendeine Seitenlänge vorgibt.

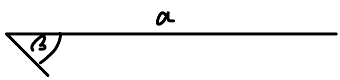
Das ist eine Behauptung, die wir kurz beweisen müssen.

Beweis der Hilfsbehauptung:

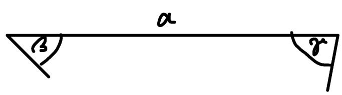
Wir zeichnen zuerst die gegebene Seitenlänge, nennen wir die Länge a:



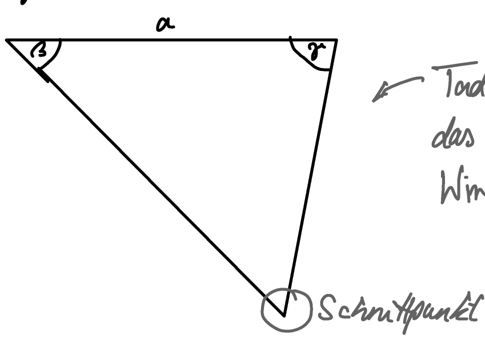
Als nächstes zeichnen wir den 1. Winkel, nennen wir ihn β:



Als nächstes zeichnen wir den 2. Winkel, nennen wir ihn γ:



Und nun bleibt uns zur Fertigstellung des Dreiecks nur übrig die Stumpfen zu verlängern, bis sich am Schnittpunkt die 3. Ecke ergibt:



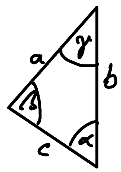
Tadaa! Das einzige Dreieck, das Seitenlänge a mit benachbarten Winkeln β, γ hat.

□

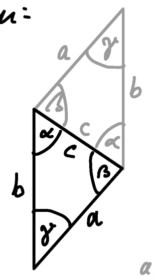
Bitte nicht vergessen, dass die Summe der 3 Winkel jedes Dreiecks immer genau 180° ist.

Beweis, dass Dreieck-Winkelsumme 180° ist:

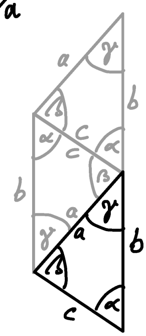
Man nehme ein Dreieck und lege es so, dass die längste Seite genau vertikal liegt:



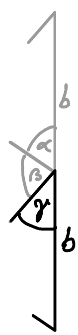
Jetzt nimmt man genau das Gleiche, dreht es um $\underline{180°}$ und klebt die c-Seiten zusammen:



Jetzt nimmt man wieder das umgedrehte Dreieck und klebt die a-Seiten zusammen:



Ein genauer Blick auf:

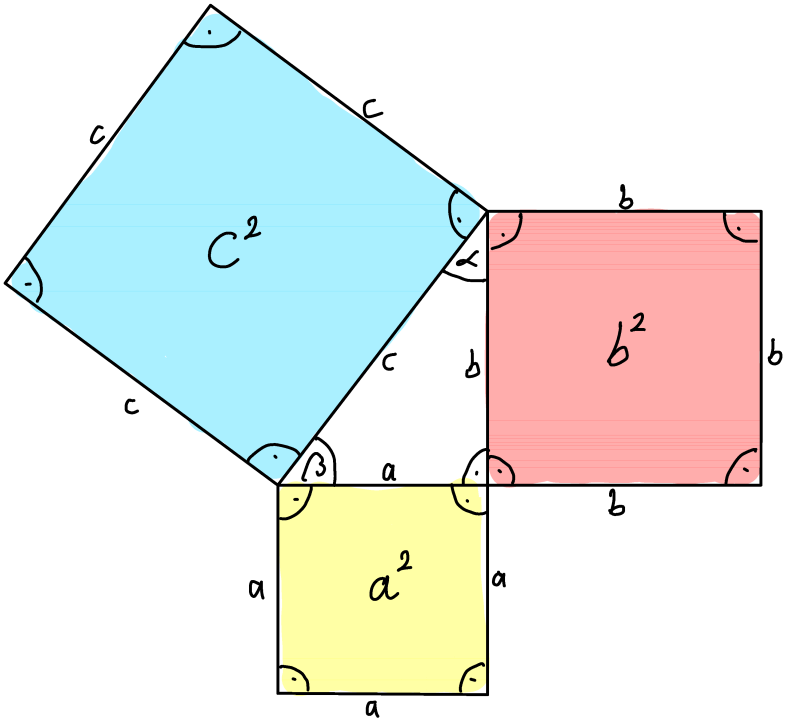


zeigt uns, dass die b-Seiten parallel zueinander liegen, also genau 180° aufspannen, und das ist wie man abliest genau die Summe aus α, β, γ, also

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \qquad \square$$

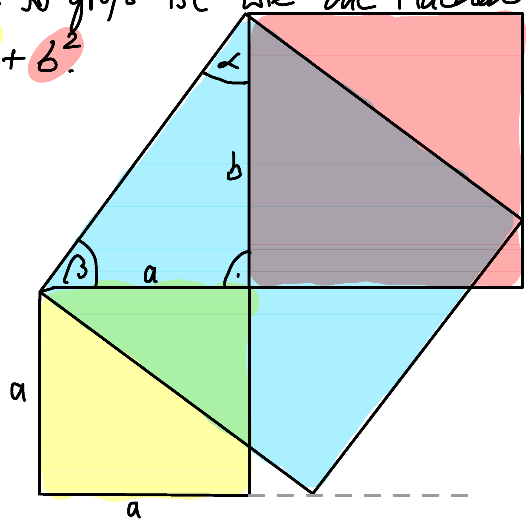
Beweis:

Die Flächen a^2, b^2, c^2 kann man folgendermaßen einzeichnen:

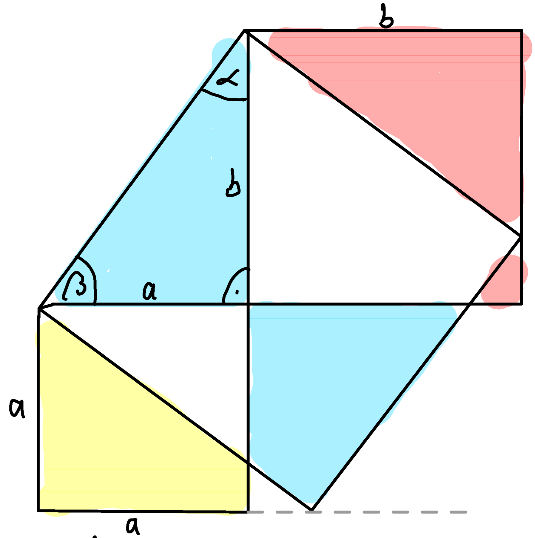


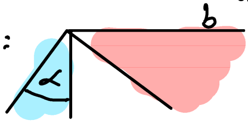
Und jetzt gilt es über absolut logische Schritte zu beweisen, dass die Fläche c^2 ganz genau so groß ist wie die Flächen a^2 und b^2 zusammen, $c^2 = a^2 + b^2$.

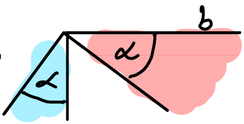
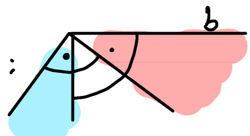
1. Die Größe von c^2 bleibt gleich wenn man die Fläche an der Hypothenuse spiegelt, so:

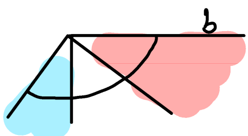


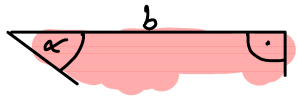
2 Die Teile des Mosaiks, wo sich zwei Farben überlappen, tragen zu sowohl c^2, als auch a^2+b^2 genau gleich viel bei, also müssen wir nur mehr zeigen, dass die blaue Fläche gleich groß ist wie die Gelbe und Rote zusammen, in der Zeichnung:

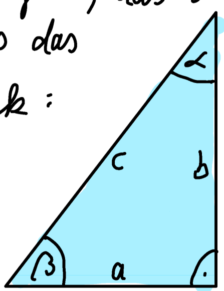


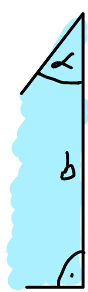
3 Im Eck links oben:  ist der rote Winkel wieder α,

also , da es zwei rechte Winkel gibt: 

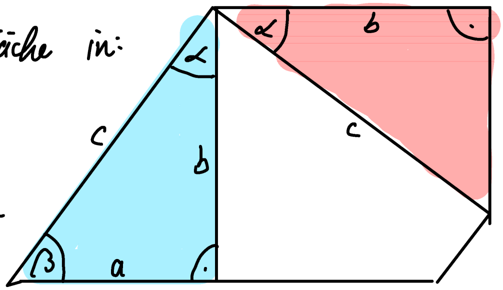
und der gesamte Winkel  insgesamt $\alpha + 90°$ ist.

4 Wir können nun die Hilfsbehauptung von oben benutzen. Dort haben wir bewiesen, dass für eine gegebene Seitenlänge mit zwei vorgegebenen Winkeln nur ein Dreieck existiert. Es kann nur ein Dreieck geben, das so startet: ,

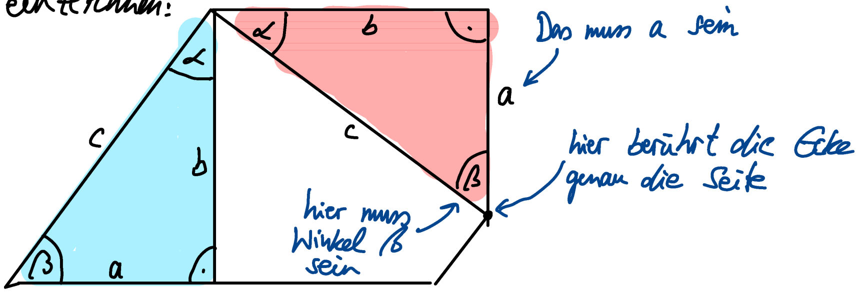
und das muss das Ausgangsdreieck: 

sein, denn das hat auch .

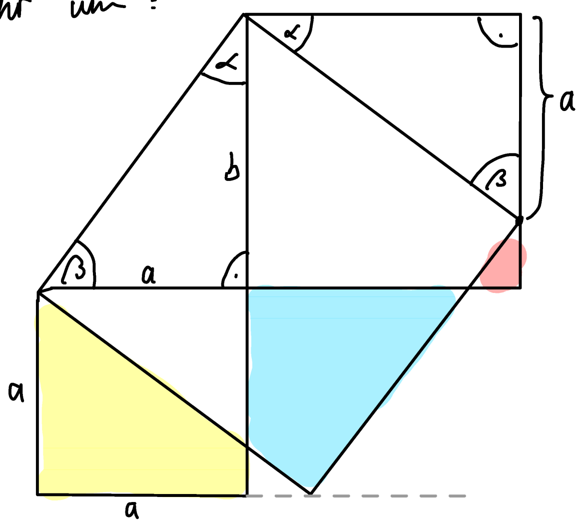
5 Weil die rote Fläche in:



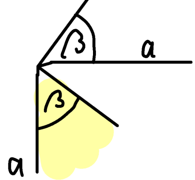
also genau dem blauen Dreieck entspricht, können wir ein paar Werte einzeichnen:



Zusätzlich können wir beide Flächen wie in **2** von beiden Seiten der Behauptung $c^2 = a^2 + b^2$ löschen. Wir kümmern uns nur mehr um:

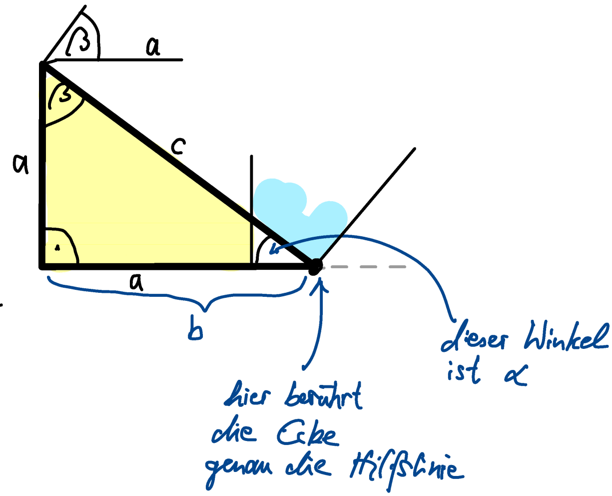


6 Wie in Schritt **3** finden wir im Gelben ein β:

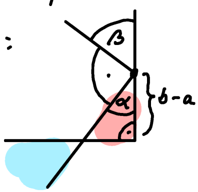


(Doppel - 90° - Trick)

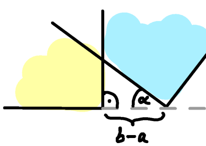
7 Also entspricht das dick umrandete Dreieck: wieder genau dem Startdreieck, ähnlich wie in **4**, da beide Dreiecke eine Seite der Länge a haben, die von Winkeln β & 90° eingeschlossen wird, und wir können wieder ein paar Werte übertragen:



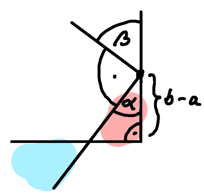
8 Das kleine rote Dreieck am Ende von **5** hat Spitze α weil es in Summe mit 90° und β genau 180° ergeben muss, und Vertikale $b-a$:



9 Das kleine weiße Dreieck aus **7**:



ist also genau das gleiche Dreieck wie dieses kleine Rote:



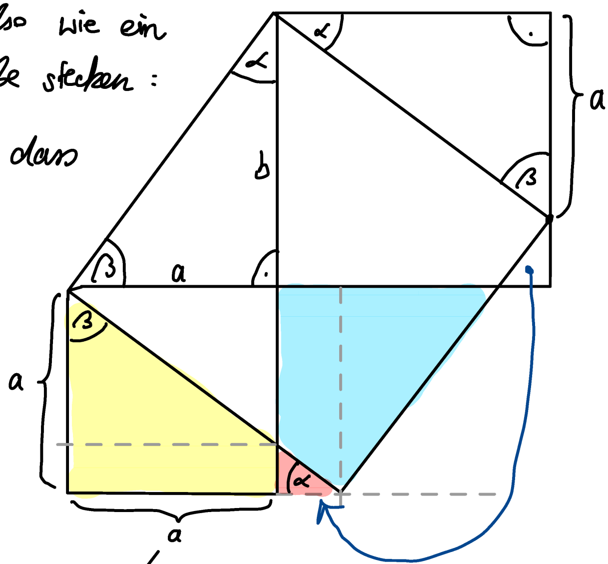
weil beide Dreiecke eine gleiche Seitenlänge $(b-a)$ haben, die von den gleichen Winkeln (α & 90°) eingeschlossen wird und das laut Hilfsbehauptung alle restlichen Seiten und Winkel fix vorgibt. Wie in **4**.

10 Wir können das rote Dreieck also wie ein perfektes Puzzleteil in das Weiße stecken:

Und müssen immer noch zeigen, dass

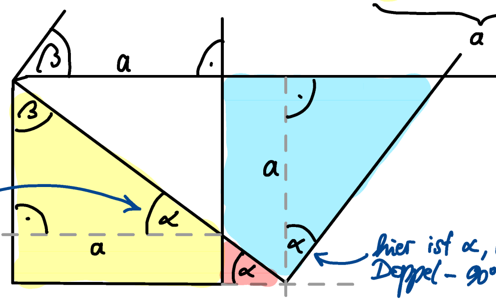
Gelb + Rot = Blau.

Ich zeichne noch zwei neue Hilfslinien ein:



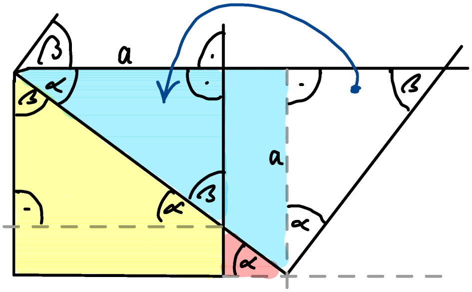
11 Wir finden zwei weitere α:

hier ist auch α weil beide Seiten parallel zu den roten α-Seiten sind



hier ist α, wegen des Doppel-90°-Arguments aus **3** & **6**

12 Die beiden Dreiecke, in denen gerade α eingetragen wurde, sind laut Hilfsbehauptung gleich groß weil es in Beiden eine Seite der Länge a gibt, die jeweils von den Winkeln α & 90° eingeschlossen wird. Also passt das Blaue genau in ein Dreieck, das gleich ist wie das Gelbe, nämlich:



Und wir sehen, dass tatsächlich

Gelb + Rot = Blau!

□

Also beim nächsten Mal in dem Du $a^2 + b^2 = c^2$ liest, oder in einer Aufgabe benutzen musst, oder irgendwo ein rechtwinkeliges Dreieck erblickst kannst Du völlig befreit von Namen großer Philosophen, oder Namen von Lehrern, einfach die Flächen als Quadrate an den Seiten einzeichnen, die c^2-Fläche spiegeln, überlappende Flächen löschen, die Winkel α, β in das Mosaik übertragen, das Ausgangsdreieck und das Gleiche aus der b^2-Fläche löschen, das mini-b^2-Überbleibseldreieck wie ein Puzzleteil in das kleine weiße Dreieck stecken, zwei Hilfslinien einzeichnen, zwei etwas kleinere Dreiecke (als Ausgangsdreieck) von der a^2- und c^2-Fläche als genau gleich identifizieren und deswegen Letzteres in den freien Platz über Ersterem stecken.

Dann sieht man auf einen Blick, dass die übrigen Teile von $a^2 + b^2$ genau dem übrigen Teil von c^2 flächenmäßig gleichen, weil es die beiden perfekten Hälften eines Rechtecks sind.

Und dann ist völlig klar, dass wirklich $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, und wieso.

Das ist doch schön.

$0.9999\ldots = 1$

Wenn wir uns über eine Eigenschaft des "=" in Mathe einigen können, dann vermutlich, dass es absolut genau ist. 0 Spielraum für irgendwelches Runden oder sonstige Ungenauigkeiten. <u>Deshalb</u> ist die folgende Behauptung überraschend:

> Die Zahl $0.99\ldots$, also Null-Komma-Neun-periodisch, ist genau gleich der Zahl 1.

<u>Beweis</u> ① Durch schriftliche Division wissen wir, dass

$$\frac{1}{3} = 1:3 = 0{,}333\ldots$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -\ 9 \\ \hline 10 \\ -\ 9 \\ \hline 10 \\ -\ 9 \\ \hline \vdots \end{array}$$

② Durch schriftliche Multiplikation wissen wir, dass

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 0.333\ldots \\ \hline 0.999\ldots \end{array} = 0.999\ldots$$

③ Weil $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ haben wir also

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} \overset{①}{=} 3 \cdot 0{,}333\ldots \overset{②}{=} 0.999\ldots$$

Also ist wirklich $1 = 0{,}99\ldots$. □

Es gibt nicht jede Zahl

Zahlen gibt's wie Sand am Meer. Ob man jetzt Zahlen mag oder nicht, auch sie haben ihre Mankos...

So etwas wie "die größte Zahl" gibt es einfach nicht.

Beweis

1. Egal welche Zahl man nimmt, rechnet man sie plus 1, bekommt man eine neue Zahl, die größer ist.
2. Falls es eine größte Zahl geben sollte, so wäre dies auch einfach nur eine Zahl. Sie müsste immer gleich bleiben, so wie jede Zahl.
3. Aber dann können wir mithilfe von 1 eine Zahl finden, die größer wäre – Größer als die Größte!
4. Das ist absurd, also ist die Annahme am Anfang von 2 auch absurd, nämlich, dass es eine größte Zahl gäbe.
5. ∞ ist keine Zahl, da $\infty + 1 = \infty$, also $\infty = \infty - 1$, also kann man nie bis ∞ zählen.

□

Vielleicht ist 5 für Dich kein absolut logischer Schritt. Das kann ich gut verstehen, ∞ ist vom Prinzip her sehr verwirrend. Deswegen gibt es noch eine zweite ähnlich überraschende Behauptung, bei der ∞ nicht im Beweis vorkommt:

Es gibt keine kleinste Zahl größer Null.

<u>Beweis</u> ① Egal welche Zahl man nimmt, die größer Null ist, wenn man sie halbiert, bekommt man eine neue Zahl, die kleiner ist und immer noch größer Null.

z.B.: 0.5 halbiert sich zu 0.25

größer Null — kleiner als 0.5 — aber immer noch größer Null

② <u>Falls</u> es eine kleinste Zahl größer Null geben sollte, so wäre sie auch einfach nur eine Zahl größer Null. Sie müsste immer gleich bleiben, so wie jede Zahl.

③ Aber dann können wir mithilfe von ① eine Zahl finden, die kleiner wäre, aber immer noch größer Null.
Kleiner als die Kleinste!

④ Das ist absurd, also ist die Annahme am Anfang von ② auch absurd, nämlich, dass es eine kleinste Zahl größer Null gäbe.

$\square$

Also wenn Dir jemand vorgaukeln will, er hätte diese kleinste Zahl größer Null gefunden, dann bitte ihn erstmal dir die Zahl aufzuschreiben.
Wenn sie dann dasteht, sagst Du: "Die Hälfte davon ist aber auch größer Null. Und außerdem kleiner als Deine Zahl."
Dann steht der andere richtig doof da, oder?

Binomische Formeln

Zumindest in meiner Schulzeit waren die 3 binomischen Formeln:

① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

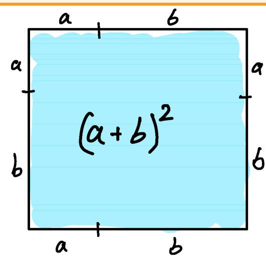
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

für ein paar Klassen in praktisch jeder Aufgabe. Siehst Du darin mehr als einen Haufen aus Buchstaben und Zahlen? Lass mich Dir eine neue Perspektive zeigen, nämlich eine Aussage über Rechtecke & Quadrate:

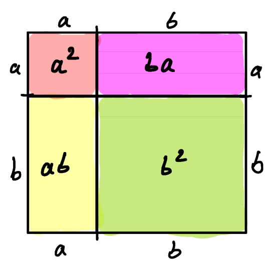
$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2a\cdot b + b^2}$$

1 Die linke Seite $(a+b)^2$ ist genau die Fläche des Quadrates:



2 Diese Fläche besteht aus verschiedenen Rechtecken und Quadraten, mit Flächen

a^2, $b\cdot a$, $a\cdot b$ & b^2



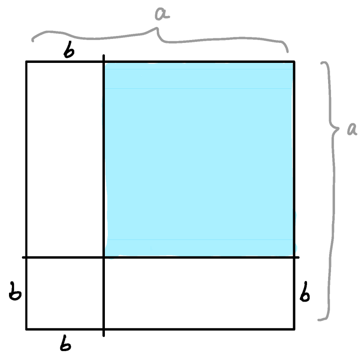
3 Also ist die Summe der ② - Flächen genau gleich der ① - Fläche, also:

$$a^2 + \underbrace{b\cdot a + a\cdot b}_{2a\cdot b} + b^2 = (a+b)^2$$

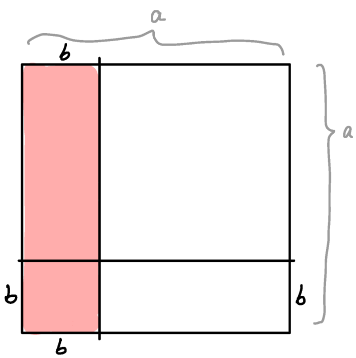
□

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2}$$

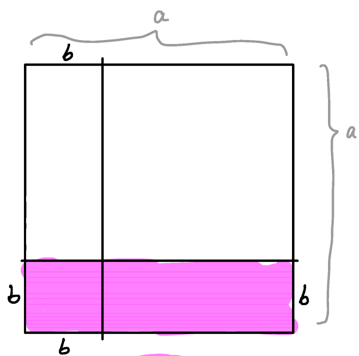
1 Die linke Seite $(a-b)^2$ ist genau die blau angemalte Fläche im Quadrat:



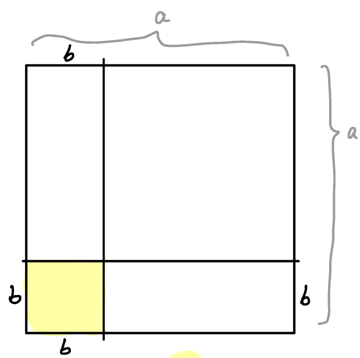
2 Wir finden noch andere Flächen im Quadrat



$b \cdot a$



$a \cdot b$



b^2

3 Durch Blick auf diese Flächen wird klar, dass die 1 - Fläche genau

$$a^2 - b \cdot a - a \cdot b + b^2$$

ist.

Fläche vom ganzen äußeren Quadrat

muss dazu, da $-b \cdot a$ & $-a \cdot b$ den gelben Teil einmal zu oft abziehen.

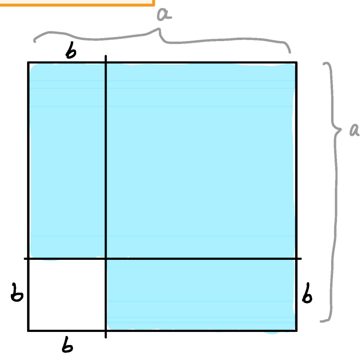
Diese Flächengleichheit verspricht also

$$(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2.$$

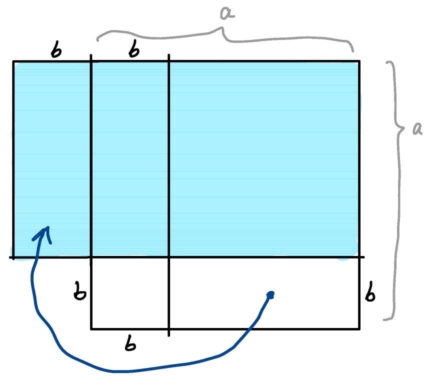
□

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)}$$

① Die linke Seite (a^2-b^2) ist die Fläche eines großen Quadrates minus einem Kleinen, also genau der Blau angemalte Teil in:



② Die Größe dieser Fläche ändert sich nicht wenn wir den unteren Teil verschieben und drehen:



③ Die neue Fläche ist ein Rechteck mit Länge $(a+b)$ und Breite $(a-b)$ und ist genau gleich der ①-Fläche:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \quad \square$$

Definition

Bis jetzt habe ich einen Teil der Mathematik vermieden, der zwar nicht so bekannt und schwierig wie das Beweisen ist, aber trotzdem ganz essenziell: Das Definieren.

Jetzt wäre eine Definition von "Definieren" angebracht, aber wir wollen nicht übertreiben...

Wirklich wichtig ist nur, dass eine mathematische Definition keinen Spielraum für Interpretation übrig lässt!

Das ist nämlich der Ursprung der Unantastbarkeit von Mathematik, und ist wohl der größte Unterschied zu allen anderen Wissenschaften / Hobbies / Berufen auf der ganzen Welt.

z.B. ist der Begriff "modern" total davon abhängig wer ihn benutzt, wo man ihn benutzt und vor allem wann! Also könnte man niemals etwas beweisen wo "modern" vorkommt, wie z.B.

"Gleichwinklige Dreiecke sind moderner als Rechtwinklige."

"Zahlen sind schöner als Worte."

"Einstein war der Klügste."

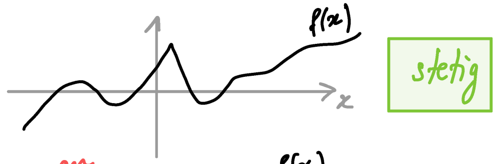
Stattdessen muss in einer mathematischen Aussage – also einer Behauptung, oder den Schritten eines Beweises – jedes Wort klipp und klar sein, wie z.B.

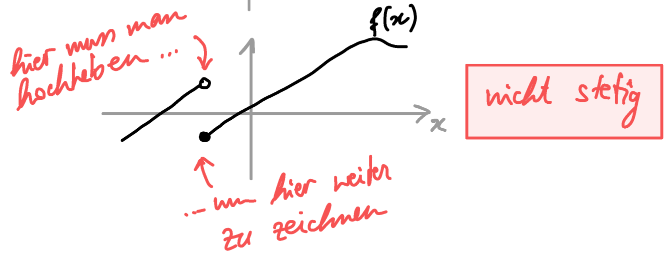
"Gleichwinklige Dreiecke haben 3 gleich lange Seiten."

"Es gibt mehr Zahlen als Wörter."

Definition von Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann ohne den Stift hochheben zu müssen. Beispiele:



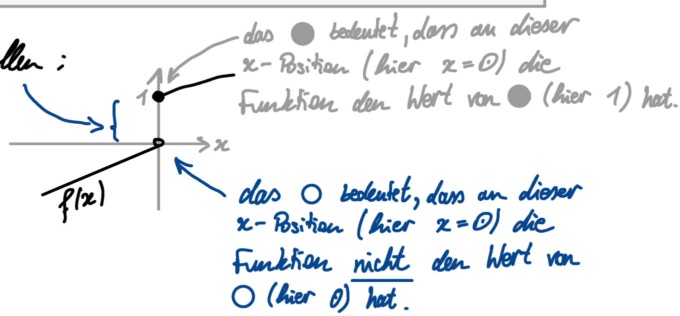


Das ist zwar gut genug um ein Gefühl für Stetigkeit zu vermitteln, aber kann niemals eine mathematische Definition sein: Was heißt "zeichnen", oder "Stift", oder sogar "hochheben"?

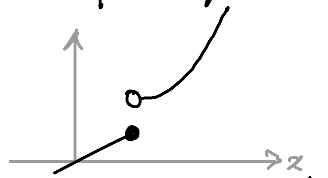
Außerdem kann man die Funktionen oft gar nicht ganz zeichnen, das geht ja bis $+\infty$ nach rechts und bis $-\infty$ nach links auf der x-Achse ... Und dann muss man sicher mal Stift tauschen – also hochheben – wenn man ∞ weit zeichnen muss. Unsere Aufgabe lautet also:

> Finde eine mathematische Definition, die genau dieses Gefühl von Stetigkeit formuliert.

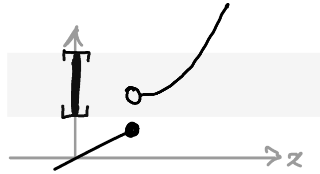
1 Wir versuchen diese Sprungstellen mathematisch zu beschreiben.



2 Sprungstellen bestehen immer aus einem inklusiv-Punkt (●), und einem exklusiv-Punkt (○), die auf der gleichen Vertikalen mit sichtbarem Abstand liegen.



3 Im Fall einer Sprungstelle:
gibt es also einen y-Achsenabschnitt, der ○ enthält, aber nicht ●, z.B. der:

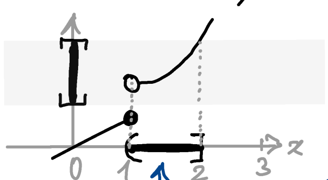


Jawohl, unser erster Erfolg! Dass es bei Sprungstellen – also unstetigen Funktionen – einen gewissen y-Achsenabschnitt gibt, ist wunderschön mathematisch formuliert:

Ein Achsenabschnitt ist z.B. ein Intervall, z.B. [0.5, 2], also muss nicht gezeichnet werden.

Aber bis jetzt hängt unsere Vorstellung von Sprungstellen immer noch von der Zeichnung ab, weil wir nach ○ & ● Ausschau halten müssen. Das versuchen wir jetzt auch noch zeichnungsunabhängig in Worte zu backen:

4 Wenn wir die x-Werte ansehen, die die Fkt. innerhalb des Achsenabschnittes hat, also:



das sind die x-Werte

dann ist eine Seite offen (hier (1, 2]).

die offene Seite. Das heißt, dass die Zahl 1 nicht mehr im Intervall liegt.

Das liegt eben genau daran, dass ○ ein exklusiv-Punkt ist, also genau nicht mehr zur Funktion gehört!

Fantastisch! Wir haben es geschafft die Zeichnungssprache:

> "Es gibt einen y-Achsenabschnitt, der ein ○, aber kein ● enthält."

in mathematische Sprache:

> "Es gibt einen y-Achsenabschnitt, sodass die x-Werte ein offenes/exklusives Ende haben."

zu übersetzen. Das ist eine Leistung, die einfach zu unterschätzen ist. Der eleganteste Teil ist nun vorbei, jetzt geht's an die Feinarbeit, die sich um die Spezialfälle kümmert und Absurditäten ausmärzt. Folgendes ist also hauptsächlich für die Leute, die schon vorher wussten wie Stetigkeit definiert wird.

5 Ich schreibe die fertige Definition an:

> Eine Funktion ist **stetig** wenn ihr x-Werte-Abschnitt für jeden geschlossenen y-Abschnitt wieder geschlossen ist.

Anders gesagt:

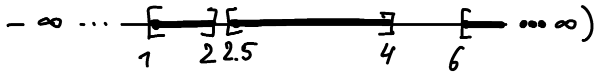
> Eine Funktion ist **stetig** wenn es keinen geschlossenen y-Abschnitt gibt, sodass der x-Werte-Abschnitt nicht geschlossen ist.

"sodass keine Sprungstelle darin geteilt wird"

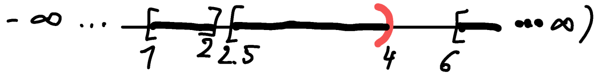
6 Geschlossene Abschnitte sind: Geschlossene Intervalle (z.B. $[1,2]$) – dazu zähle ich auch $\pm\infty$ Enden (z.B. $(-\infty,0]$, $[1,\infty)$ oder $(-\infty,\infty)$) –, mehrere geschlossene Intervalle (z.B. $[1,2]$ zusammen mit $[3,\infty)$) oder der leere Abschnitt (nichts).

Geschlossene Abschnitte bestehen also aus beliebig vielen "[" und "]" Klammern, und "(-∞" und "∞)", plus dem leeren Abschnitt.

z.B.:

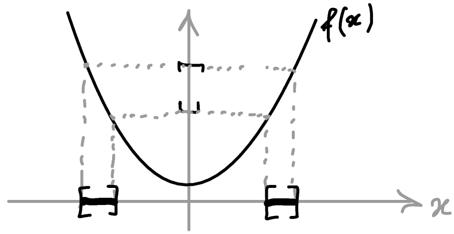


Aber **nicht**:

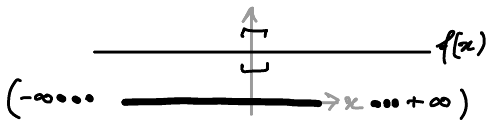


⑦ Würden wir z.B. nicht erlauben, dass der x-Werte-Abschnitt:

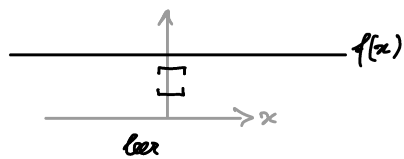
ⓐ aus <u>mehreren</u> geschlossenen Intervallen besteht, würden wir die Parabel als unstetig bezeichnen, denn:



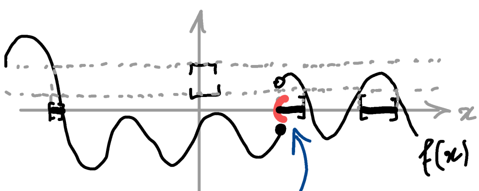
ⓑ ±∞ enthält, würden wir die konstante Funktion als unstetig bezeichnen:



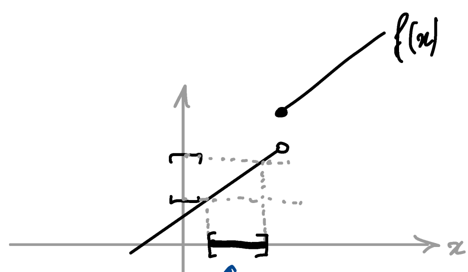
ⓒ leer ist, würden wir z.B. wieder die konstante Funktion als unstetig bezeichnen:



⑧ Ein paar Beispiele zum entspannen:



offene Klammer bei einem endlichen Wert, also ist die Funktion **nicht** stetig



geschlossener x-Werte-Abschnitt obwohl die Funktion **nicht** stetig!

Problem?

Nein, es gibt nämlich ein anderes y-Intervall, das die Sprungstelle herausfiltert!

Zahlen Sind Zum Zählen Da

Mathematische Definitionen kann man nicht in wahr & falsch einteilen. Aber manche davon sind nützlicher als andere. Praktisch sind sie dann, wenn man sie im Alltag oft wiederfindet. Und das hat wohl keine in den tausenden Jahren des Definierens besser geschafft als die **Zahl**.

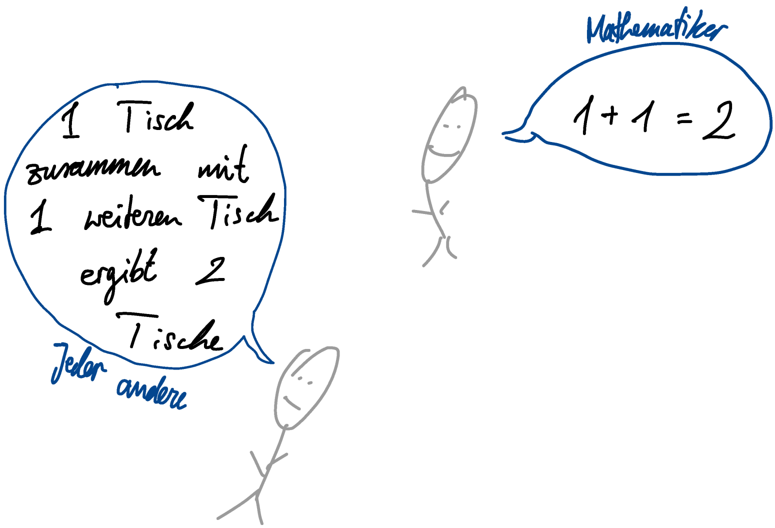
① Start: Zahlen, die vom Zählen kommen

Jedem ist klar wofür man sie im Alltag braucht. z.B.:

1 Tisch, 2 Äpfel, 205 Hauptstädte

∞ hat hier nichts verloren – soweit hat bis heute noch niemand gezählt.

② Das Plus, +.



③ Das Minus, –.

Wenn das Plus das Yin ist, ist das Minus sein Yang. Es ist der Gegenspieler. Der Radiergummi zum Bleistift. Die Rückrichtung zur Einbahnstraße.

Ohne dem Minus gäbe es wohl auch keine Buchstaben in Mathe, denn wir könnten so Fragen wie die Folgende nicht beantworten:

Ich habe 2 Geschwister. Wie viele Geschwister fehlen mir um 5 zu haben?

?

$$2 + x = 5 \quad | -2$$
$$x = 5 - 2$$
$$x = 3$$

Es fehlen 3.

!

④ Negative Zahlen & die Null

Das Minus öffnet uns Tore in ganz neue Welten. Mit ihm gelangen wir zum **Nichts**, der Null, 0, und ins **Negative**. Man kann sich vielleicht keine −4 Tische vorstellen, aber negative Zahlen sind trotzdem wichtig. Warum? Weil sie aus drei alltäglichen Zutaten bestehen:

(i) 1, 2, 3, 4, … (ii) + (iii) Gegenteil.

⑤ Das Mal, ·

Im Alltag muss man hin und wieder mehrmals die gleiche Zahl aufaddieren. Z.B. wenn man die Anzahl an Sesseln im Café zählen möchte und anhand der Tischnummer die Anzahl der Tische – 7 – kennt. Außerdem weiß man es gibt pro Tisch 4 Sessel. Dann sind im Café

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$$

Sessel. Ganz verrückt kann man jetzt die Zahl "4" <u>zählen</u>, wieder eine Zahl, und ein Symbol einführen – den Malpunkt – um mehrmalige Addition zu signalisieren: $7 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$.

Wir finden so zwar keine neuen Zahlen, aber eine neue Operation, und somit auch ihr Gegenteil …

6 Dividieren

Ganz einfach wieder das Gegenteil zum Multiplizieren:

$$5 \cdot x = 20 \quad \rightsquigarrow \quad x = 20/5 = 4$$

7 Rationale Zahlen

Der Bruchstrich stellt uns vor einige Herausforderungen. Wir haben vermutlich keine Vorstellung davon was $1/3$ Mensch sein soll. Aber zumindest ist klar, dass wenn wir es 3 Mal nehmen, kommt 1 Mensch raus, und das kennen wir gut.

↑ mehr gibt es gar nicht über $1/3$ zu wissen, diese Eigenschaft beschreibt $1/3$ voll und ganz.

So kann man gut verstehen, dass Division durch 0 nicht mehr durch Zahlen erklärt werden kann:

> Die "Zahl" $1/0$ müsste die Eigenschaft haben, dass sie Mal 0 genau 1 ergibt. Aber das können wir nicht erlauben, weil uns viel wichtiger ist, dass jede Zahl Mal 0 gleich 0 ist.

Rationale Zahlen sind also genau alle Brüche von ganzen (auch negativen) Zahlen mit der einen Ausnahme, dass unten 0 steht. Beispiele lauten

$$7/13, \quad 2/1 = 2, \quad -7/8, \quad 519/10$$

und sie entstehen aus drei alltäglichen Zutaten:

(i) 1, 2, 3, … (ii) Mal (iii) Gegenteil.

8 Periodische Kommazahlen

Sind alle Kommazahlen Brüche ganzer Zahlen? Zuerst müssen wir eine Eigenschaft von Brüchen kennenlernen:

> Die Nachkommastellen von ganzzahligen Brüchen sind immer (endlich) periodisch.

q ist positiv

Beweis:

a Bei einer schriftlichen Division von ganzen Zahlen $p \div q$ wird nach jedem Schritt der Rest ausgerechnet.

z.B.: $\overset{p}{19} \div \overset{q}{14} = 1.???$
$-1 \cdot 14$
Rest $\underline{\underline{5}}$

b Der Rest ist in jedem Schritt eine ganze Zahl zwischen 0 und 1 weniger als der unteren Zahl q. Wenn der Rest größer wäre, würde q ja noch mindestens einmal öfter hineinpassen.

z.B.: $6 \div 7 = 0.???$
$-0 \cdot 6$
Rest 6, der maximale Rest bei Division durch 7

Es gibt also nur q verschiedene mögliche Reste, nämlich

$$0, 1, 2, 3, \dots, q-1$$

c Nach jedem Schritt muss der Rest Mal 10 gerechnet werden und dann muss $10 \cdot$Rest durch q gerechnet werden.

z.B.: $19 \div 14 = 1.???$
$-1 \cdot 14$
Rest 5 → 50 muss als nächstes durch 14 dividiert werden

(d) Die Berechnung der nächsten Stelle ist also immer eine der q Divisionen

$$0 \div q \;,\; 10 \div q \;,\; 20 \div q \;,\; \dots ,\; 10 \cdot (q-1) \div q$$

(e) Die Nachkommastellen wiederholen sich sobald die Division von (d) bei einer früheren Stelle schonmal genau die gleiche war, da dann ja auch das Ergebnis der Division gleich ist.

gleicher Rest!

Reste von voriger Stelle → 90 120 30 40 10 100 90 120 30 40

z.B.: $9 \div 13 = 0{,}6\,9\,2\,3\,0\,7\,6\,9\,2\,3\,0769\overline{230769}$

so oft passt 13 in 90

Wiederholung!

die Periode ist kleiner gleich 13 Stellen lang. □

(9) Nicht-periodische Kommazahlen

Gibt es Zahlen, bei denen sich die Nachkommastellen nie wiederholen? Gibt es z.B. nicht-rationale Zahlen? (Laut (8) sind diese beiden Fragen gleich!)

> Die Zahl, die quadriert 2 ergibt, $\sqrt{2}$, kann man nicht als Bruch von ganzen Zahlen p/q schreiben.

Beweis:

(a) Wir beweisen das durch "Widerspruch", d.h. wir folgern aus $p/q = \sqrt{2}$ über absolut logische Schritte etwas Unmögliches. Dann heißt das doch im Endeffekt, dass $p/q = \sqrt{2}$ unmöglich ist, oder?

ganze Zahl

(b) Aus $p/q = \sqrt{2}$ folgt, dass die Quadrate beider Seiten auch gleich sind:

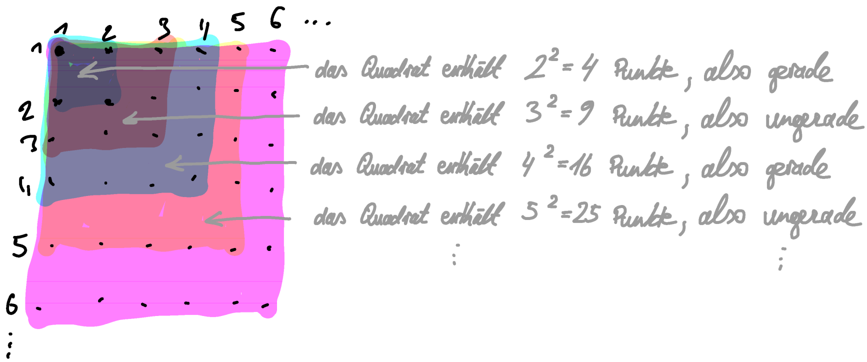
$$p^2/q^2 = 2.$$

(c) Also ist $p^2 = 2q^2$, das heißt p^2 ist durch 2 ganzzahlig teilbar. Anders gesagt: p^2 ist gerade.

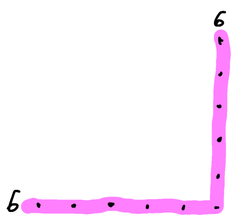
d) Wenn p^2 gerade ist, wollen wir zeigen, dass auch p gerade ist. Sprich wir müssen uns überzeugen, dass gerade Quadratzahlen nur von geraden Seiten kommen können. Die ersten paar Beispiele sind vielversprechend:

mögliches p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
p^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	…
		gerade		gerade		gerade		gerade		gerade	

Aber wieso ist das so? Woher wissen wir, dass das auch so bleibt? Den Grund kann man im folgenden Bild sehen, in dem wir die ersten 6 Quadratzahlen aufzeichnen, als Punkte:



Der Unterschied zwischen einem Quadrat und seinem Nachfolger ist immer ein rechter Winkel, z.B. von 5^2 auf 6^2 sind die Punkte:



Und die Anzahl der Punkte ist immer ungerade weil eine Seite gerade ist und die andere eins weniger – also ungerade – und gerade Zahl plus ungerade Zahl ungerade ist, da

irgendeine ganze Zahl

$$\underbrace{2n}_{\text{gerade}} + \underbrace{(2m+1)}_{\text{ungerade}} = \underbrace{2(n+m)+1}_{\text{ungerade}}$$

Also sind benachbarte Quadratzahlen immer durch eine ungerade Zahl getrennt.

Also sind die Quadratzahlen – wie die ganzen Zahlen – immer abwechselnd gerade → ungerade → gerade → ungerade, weil Addition von ungeraden Zahlen immer wechselt, da

$$\underbrace{2n}_{\text{gerade}} + \underbrace{(2m+1)}_{\text{ungerade}} = \underbrace{2(n+m)+1}_{\text{ungerade}} \quad \ldots \text{"gerade} \to \text{ungerade"}$$

$$\underbrace{(2n+1)}_{\text{ungerade}} + \underbrace{(2m+1)}_{\text{ungerade}} = \underbrace{2(n+m+1)}_{\text{gerade}} \quad \ldots \text{"ungerade} \to \text{gerade"}$$

e Da p gerade ist, gibt es irgendeine ganze Zahl k, sodass $p = 2k$.

Das setzen wir in die alte Gleichung $p^2 = 2q^2$ aus c ein:

$$4k^2 = 2q^2, \quad \text{also} \quad q^2 = 2k^2.$$

f Also ist q^2 auch gerade, so wie p^2, und somit auch q, aus dem gleichen Grund wie d.

g Wir konnten bis jetzt zeigen, dass aus $p/q = \sqrt{2}$ folgt, dass sowohl p als auch q gerade sind.

Das ist unmöglich, denn dann könnten wir die Zahl 2 aus dem Bruch p/q kürzen. Und danach könnten wir für die gekürzten Zahlen wieder zeigen, dass beide durch 2 teilbar sind und wieder kürzen.

Dann nochmal, und nochmal, und nochmal, ...

Also müssen p und q beide ∞ sein, denn jede endliche Zahl ist irgendwann nicht mehr durch 2 teilbar.

Aber p und q dürfen nicht ∞ sein! Widerspruch ↯

Es darf also keine ganzen Zahlen p, q geben deren Bruch genau $\sqrt{2}$ ergibt.

□