4. PRUEBAS Y SOLUCIONES

4.1 MATEMÁTICA

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE MATEMÁTICA NIVEL I

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presenta una serie de siete problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 120 minutos.

Problema 1: (30 puntos)

a. Encuentre la solución de la ecuación:

$$\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 1 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

b. Resuelva la desigualdad:

$$\left|\frac{x}{x-2}\right| > 2$$

c. Evalúe el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x}$$

Problema 2: (10 puntos)

Dos automóviles partieron al mismo tiempo de un mismo punto en una misma dirección. La velocidad del primer automóvil es de 50 Km/hora y la del segundo de 40 Km/hora. Transcurrida media hora, del mismo punto y en la misma dirección parte un tercer automóvil que alcanza al primero en 1.5 horas más tarde que al segundo. Hallar la velocidad del tercer automóvil.

Problema 3: (10 puntos)

Utilizando diferenciales encuentre el máximo error porcentual permisible en la medición del ángulo entre un cateto fijo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo si el ángulo medido es de 30° y el error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa no puede ser mayor del 2%.

Problema 4: (15 puntos)

a. Trace la gráfica de: $y = \dfrac{x^2}{8} + 2$ & $x^2 + y^2 = 2$

b. Hallar las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = \dfrac{x^2}{8} + 2$ que son rectas normales a la gráfica de $x^2 + y^2 = 2$

c. Hallar el punto de intersección de las dos rectas tangentes a la parábola.

Problema 5: (10 puntos)

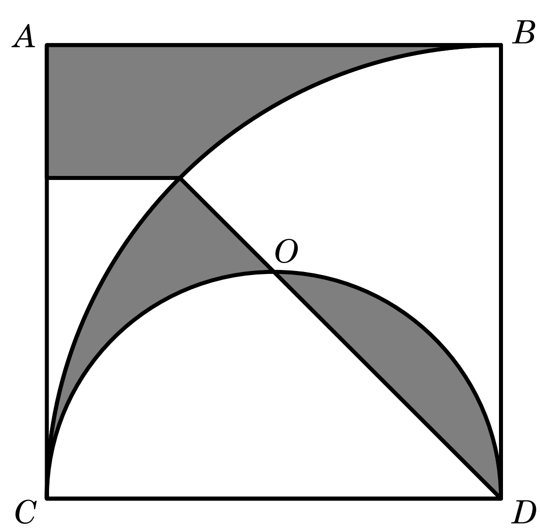
Un tanque mide 2 m de largo y tiene su sección transversal vertical de forma de un triángulo isósceles invertido, cuya base superior es de 4 m y altura 4 metros. Cuando se encuentra completamente lleno de agua se abre un grifo que se ubica en la parte inferior para vaciarlo. Sabiendo que cuando la altura del nivel del agua es 3 metros, a través del grifo salen 0.1 m^3/min, determine la rapidez en m/min a la cual disminuye la altura del agua.

Problema 6: (10 puntos)

Determine el punto de la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, por donde se debe trazar una recta tangente, de manera que el área del triángulo formada por esta y los semiejes positivos $\boldsymbol{x}$&$\boldsymbol{y}$ sea mínima.

Problema 7: (15 puntos)

El cuadrado *ABCD* de la figura mide 8 cm de lado y su centro se encuentra en *O*. Hallar el área de la región sombreada.



SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (30 puntos)

a. Encuentre la solución de la ecuación:

$$\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 1 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

b. Resuelva la desigualdad:

$$\left|\frac{x}{x-2}\right| > 2$$

c. Evalúe el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$$

Solución

a. $$\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 1 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Usando la identidad $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 1$$

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta(2\cos\theta + 1) - (2\cos\theta + 1) = 0$$

$$(2\cos\theta + 1)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$$

De donde se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = 1 \quad \& \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

Para $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(1)$ la solución es $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Para $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ las soluciones son $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ & $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$

b. Resuelva la desigualdad: $\left|\dfrac{x}{x-2}\right| > 2$

Cuando la expresión dentro del valor absoluto es positiva

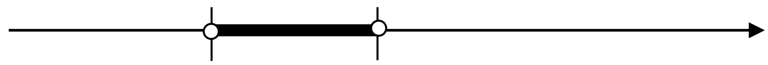
$$\frac{x}{x-2} > 2$$

$$\frac{x}{x-2} - 2 > 0$$

$$\frac{x - 2x + 4}{x-2} > 0$$

$$\frac{-x+4}{x-2} > 0$$

La solución de la desigualdad anterior es el intervalo $(2, 4)$



2 4

Cuando la expresión dentro del valor absoluto es negativa

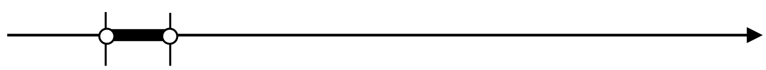
$$\frac{-x}{x-2} > 2$$

$$\frac{-x}{x-2} - 2 > 0$$

$$\frac{-x - 2x + 4}{x-2} > 0$$

$$\frac{-3x+4}{x-2} > 0$$

La solución de esta desigualdad es el intervalo $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$



4/3 2

La solución completa está formada por la unión de los dos intervalos

$$\left(\frac{4}{3},2\right) \cup (2,4)$$

c. Evalúe el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$

Al evaluar directamente el límite se obtiene que tiene forma indeterminada $1^{+\infty}$. Aplicando la función exponencial, función logarítmica y propiedades.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{5}{x}\right)}$$

Encontrando el límite en el exponente

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \quad \text{Forma indeterminada}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{5}{x}}\cdot\frac{5}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1-\frac{5}{x}} = -5$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^{x} = e^{-5}$$

Problema 2: (10 puntos)

Dos automóviles partieron al mismo tiempo de un mismo punto en una misma dirección. La velocidad del primer automóvil es de 50 Km/hora y la del segundo de 40 Km/hora. Transcurrida media hora, del mismo punto y en la misma dirección parte un tercer automóvil que alcanza al primero en 1.5 horas más tarde que al segundo. Hallar la velocidad del tercer automóvil.

Solución

Definiendo variables

V = velocidad del tercer automóvil.

t = tiempo en que alcanza el segundo automóvil.

Igualando las distancias recorridas por el tercer automóvil y el segundo

$$Vt = 20 + 40t$$

Igualando las distancias recorridas por el tercer automóvil y el primero

$$V(t + 1.5) = 25 + 50(t + 1.5)$$

Despejando V en ambas ecuaciones e igualando se obtiene

$$\frac{20 + 40t}{t} = \frac{25 + 50(t + 1.5)}{t + 1.5}$$

$$(20 + 40t)(t + 1.5) = (25 + 50t + 75)t$$

$$50t^2 + 100t = 40t^2 + 80t + 30$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$t = -3 \quad \text{y} \quad t = 1$$

Descartando la solución negativa, la velocidad del tercer automóvil es

$$V = \frac{20 + 40(1)}{1} = 60\,\text{km/hora}$$

Problema 3: (10 puntos)

Utilizando diferenciales encuentre el máximo error porcentual permisible en la medición del ángulo entre un cateto fijo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo si el ángulomedido es de 30º y el error en el cálculo de la longitud de la hipotenusa no puede ser mayor del 2%.

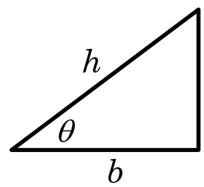
Solución

Se definen las siguientes variables

h = hipotenusa

θ = ángulo entre la hipotenusa y el cateto fijo

b = cateto fijo



$$h = b\sec\theta$$

$$dh = b\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$dh = h\tan\theta\, d\theta$$

$$\frac{dh}{h} = \tan\theta\, d\theta$$

Como el error máximo en la medida de la hipotenusa es 2%, se tiene que

$$0.02 = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)d\theta$$

$$d\theta = 0.03464 \text{ rad}$$

El máximo error porcentual en la medida del ángulo es

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{0.03464}{\frac{\pi}{6}} = 0.06616 = 6.61\%$$

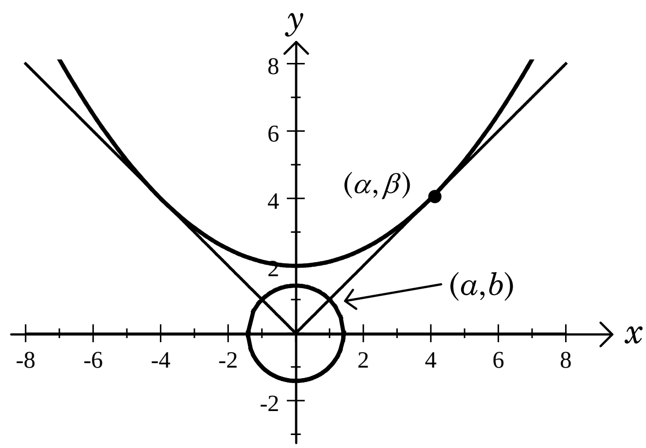
Problema 4: (15 puntos)

a. Trace la gráfica de: $y = \frac{x^2}{8} + 2$ & $x^2 + y^2 = 2$

b. Hallar las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = \frac{x^2}{8} + 2$ que son rectas normales a la gráfica de $x^2 + y^2 = 2$

c. Hallar el punto de intersección de las dos rectas tangentes a la parábola.

Solución



Sea (a,b) el punto de tangencia sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$, es decir:

$$a^2 + b^2 = 2 \text{ (i)}$$

sea (α,β) el punto de tangencia sobre la parábola $y = \frac{x^2}{8} + 2$, es decir:

$$\beta = \frac{\alpha^2}{8} + 2 \text{ (ii)}$$

derivando respecto de $x$en la circunferencia

$$2x + 2yy' = 0 \quad \text{entonces} \quad y' = \frac{-x}{y}$$

Derivando con respecto a x en la parábola

$$y = \frac{x^2}{8} + 2 \quad \text{entonces} \quad y' = \frac{x}{4}$$

la pendiente de la recta tangente en (a,b) es $\frac{-a}{b}$ de aquí, la pendiente de la recta normal es $\frac{b}{a}$ que también es la pendiente de la recta tangente a la parábola, igualando

$$\frac{b}{a} = \frac{\alpha}{4} \quad \text{(iii)}$$

aplicando la definición de pendiente e igualando

$$\frac{\beta - b}{\alpha - a} = \frac{\alpha}{4} \qquad \text{(iv)}$$

Solución del sistema no lineal (i)- (iv) por las sustituciones

$$b = \frac{a\alpha}{4} \qquad \beta = \frac{\alpha^2}{8} + 2$$

Sustituyendo en la ecuación (iv)

$$\frac{\frac{\alpha^2}{8} + 2 - \frac{a\alpha}{4}}{\alpha - a} = \frac{\alpha}{4}$$

multiplicando

$$\frac{\alpha^2}{8} + 2 - \frac{a\alpha}{4} = \frac{\alpha}{4}(\alpha - a)$$

eliminando el término $\frac{a\alpha}{4}$ se tiene:

$$\frac{\alpha^2}{8} + 2 = \frac{\alpha^2}{4}$$

de donde $\alpha^2 = 16$ siendo $\alpha^{\cdot} = 4\alpha = -4 \quad \alpha = 4 \quad \& \quad \alpha = -4$

resolviendo para las otras incógnitas, se tiene:

$$\alpha = 4 \quad \beta = 4 \quad a = 1 \quad b = 1 \quad y' = 1$$

$$\alpha = -4 \quad \beta = 4 \quad a = -1 \quad b = 1 \quad y' = -1$$

las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola que son rectas normales a la circunferencia son:

$$y - 4 = x - 4 \text{ es decir } \quad y = x$$

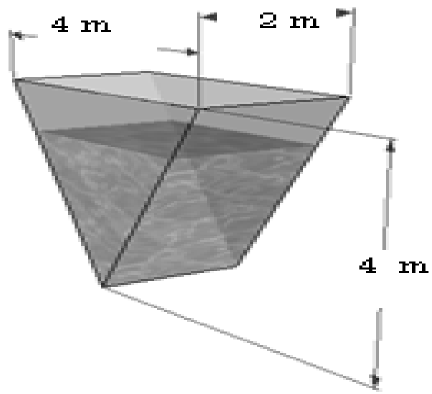
$$y - 4 = -(x - (-4)) \text{ es decir } \; y = -x$$

siendo el punto de intersección $(0,0)$

Problema 5: (10 puntos)

Un tanque mide 2 m de largo y tiene su sección transversal vertical de forma de un triángulo isósceles invertido, cuya base superior es de 4 m y altura 4 metros. Cuando se encuentra completamente lleno de agua se abre un grifo que se ubica en la parte inferior para vaciarlo. Sabiendo que cuando la altura del nivel del agua es 3 metros, a través del grifo salen 0.1 m^3/min, determine la rapidez en m/min con que disminuye la altura del agua.

Solución



Datos

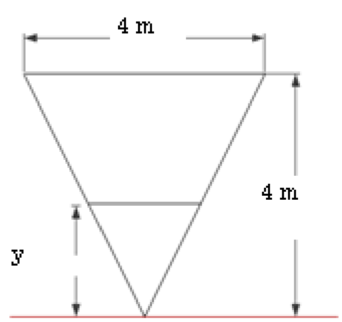
$$\frac{dV}{dt} = -0.1\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

$y =$ altura del agua en el tanque

$z =$ ancho del tanque 2m

Procedimiento

Se quiere calcular la razón a la cual cambia la altura del tanque $\frac{dy}{dt}$ cuando la altura es de 3m



Las relaciones algebraicas que se utilizarán serán el volumen del tanque y la relación de triángulos.

$$V = A_{Tri} \times z$$

$$V = \frac{1}{2}(xy) \times 2$$

De la semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{4}{x} = \frac{4}{y} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$V = \frac{1}{2}\left(y^2\right) \times 2$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}(2y)\frac{dy}{dt} \times 2$$

$$-0.1 = 2y\frac{dy}{dt}$$

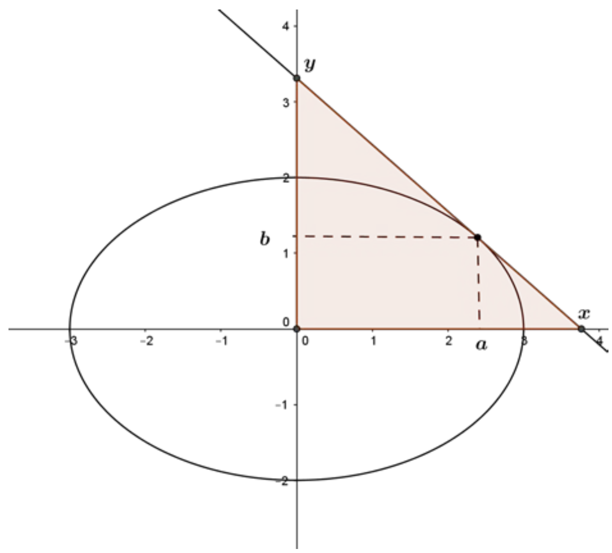
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{0.1}{2(3)} = -0.016667$$

Problema 6: (10 puntos)

Determine el punto de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, por donde se debe trazar una recta tangente, de manera que el área del triángulo formada por esta y los semiejes positivos $x\&y$ sea mínima.

Solución

La siguiente figura esquematiza la situación



Sea A el área del triángulo, entonces

$$A = \frac{xy}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y = mx + n$$

Los puntos de intercepcióncon los ejes de coordenadas son

$$(0,n), \quad \left(-\frac{n}{m},0\right)$$

Sustituyendo para el área

$$A = \frac{-\frac{n}{m}\cdot n}{2} = -\frac{n^2}{2m}$$

Buscando una relación entre m y n a través de las ecuaciones básicas

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad (1)$$

$$y = mx + n \qquad (2)$$

Derivando la ecuación 1 e igualandola a m en la ecuación 2

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$

$$m = -\frac{4x}{9y}$$

Sustituyendo el punto de tangencia (a,b)

$$m = -\frac{4a}{9b}$$

Despejando a

$$a = -\frac{9}{4}mb$$

Sustituyendo el punto de tangencia (a,b) en la ecuación 2

$$b = -m\left(\frac{9}{4}mb\right) + n$$

$$b = -\frac{9}{4}m^2b + n$$

Despejando b

$$b + \frac{9}{4}m^2b = n$$

$$b\left(1 + \frac{9}{4}m^2\right) = n$$

$$b = \frac{4n}{\left(4 + 9m^2\right)}$$

Sustituyendo el punto de tangencia (a,b) en la primera ecuación

$$\frac{a^2}{9} + \frac{\left(\dfrac{4n}{\left(4 + 9m^2\right)}\right)^2}{4} = 1$$

Despejando a

$$a = 3\left(1 - \frac{4n^2}{\left(4 + 9m^2\right)^2}\right)^{1/2}$$

$$a = 3\left(\frac{\left(4+9m^2\right)^2 - 4n^2}{\left(4+9m^2\right)^2}\right)^{1/2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la pendiente en términos de a y b

$$m = -\frac{4\left(\frac{\left(4+9m^2\right)^2 - 4n^2}{\left(4+9m^2\right)^2}\right)^{1/2}}{3\left(\frac{4n}{\left(4+9m^2\right)}\right)}$$

$$\frac{9}{16}m^2 = \frac{\frac{\left(4+9m^2\right)^2 - 4n^2}{\left(4+9m^2\right)^2}}{\frac{16n^2}{\left(4+9m^2\right)^2}}$$

$$9m^2n^2 = \left(4+9m^2\right)^2 - 4n^2$$

$$9m^2n^2 + 4n^2 = \left(4+9m^2\right)^2$$

$$n^2\left(9m^2+4\right) = \left(4+9m^2\right)^2$$

Despejando n^2

$$n^2 = 4 + 9m^2$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación original del área

$$A = -\frac{n^2}{2m}$$

$$A(m) = -\frac{4+9m^2}{2m}$$

Derivando esta última expresión respecto de m

$$\frac{dA}{dm} = \frac{9m^2-4}{m^2}$$

Igualando a 0

$$0 = \frac{9m^2-4}{m^2}$$

Soluciones

$$m = \pm\frac{2}{3}$$

Tomando la segunda derivada de la función de área para verificar para que pendiente se obtiene el valor mínimo

$$\frac{d^2A}{dm^2} = \frac{-4}{m^3}$$

Que se cumple el valor mínimo para la pendiente $m = -\frac{2}{3}$ y el respectivo valor de n

$$n^2 = 4 + 9m^2$$

$$n^2 = 4 + 9\left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$n = 2\sqrt{2}$$

Para encontrar el punto de tangencia $(a,\ b)$

$$b = \frac{4n}{\left(4 + 9m^2\right)}$$

$$b = \frac{4\left(2\sqrt{2}\right)}{(8)}$$

$$b = \sqrt{2}$$

$$a = -\frac{9}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\sqrt{2}\right)$$

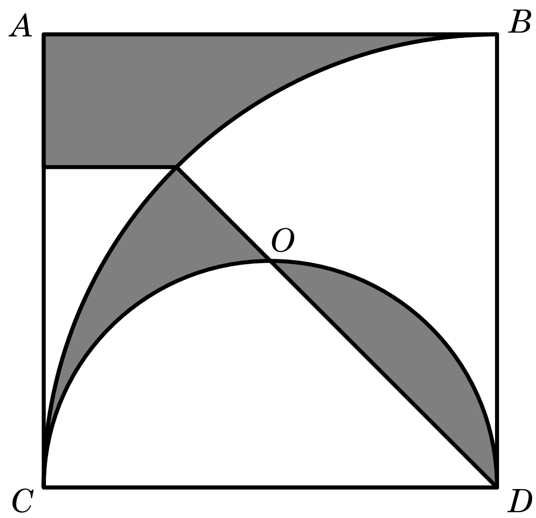
$$a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, el punto de la elipse es

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

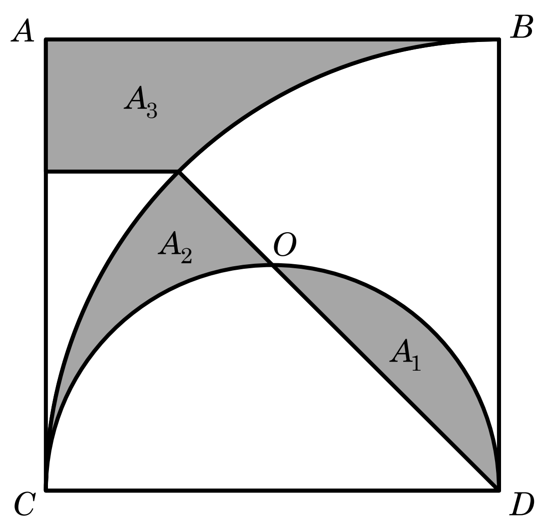
Problema 7: (15 puntos)

El cuadrado $ABCD$ de la figura mide 8 m de lado y su centro se encuentra en O. Hallar el área de la región sombreada.



Solución

Dividamos las regiones sombreadas de la siguiente manera:



El área sombreada es

$$A_s = A_1 + A_2 + A_3$$

A_1 = Área de sector circular de radio 4 − Área triángulo isósceles de lado 4

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(4)^2 - \frac{1}{2}(4)(4)$$
$$= 4\pi - 8$$

A_2 = Área de sector circular de radio 8 –

$$\left[\text{Área triángulo isósceles de lado } 4 + \frac{1}{4}\left(\text{Área de circulo de radio } 4\right)\right]$$

$$A_2 = \frac{\pi}{8}(8)^2 - \left(\frac{4(4)}{2} + \frac{\pi(4)^2}{4}\right)$$

$$= 4\pi - 8$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \text{Área del cuadrado de lado 8} \\ -\text{Área de sector circular de radio 8} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(8\sqrt{2} - 8\right)^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\left(8(8) - \frac{\pi}{4}(8)^2\right) + \frac{1}{4}\left(8\sqrt{2} - 8\right)^2$$

$$A_3 = 32 - 8\pi + 16\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$

Área sombreada final

$$A_s = 2(4\pi - 8) + 32 - 8\pi + 16(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$A_s = 16 + 16(\sqrt{2} - 1)^2 \text{ m}^2$$

.

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE MATEMÁTICA NIVEL II

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presenta una serie de diez problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 120 minutos.

Problema 1: (10 puntos)

Una pieza larga de lámina galvanizada de w pulgadas de ancho se tiene que doblar en forma simétrica de tal manera que quedan tres lados rectos y se forme un canalón que desaloje el agua de lluvia. La figura muestra la sección transversal del canal.

a. Determine las dimensiones que dan el área máxima posible de la sección transversal en la figura.

b. ¿Será mejor doblar el metal de tal manera que quede un canalón de sección transversal semicircular que una sección transversal de tres lados?

Problema 2: (10 puntos)

Dibuje el sólido que está representado por la siguiente integral: $\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1-x^2}\, dy\, dx$

Problema 3: (10 puntos)

Cuando una masa de 1 slug se cuelga de un resorte, lo estira 2 pies y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ se aplica una fuerza externa al sistema igual a $f(t) = 8 \operatorname{sen} 4t$. Formule la ecuación del movimiento, si el medio presenta una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

Problema 4: (10 puntos)

Dos grandes tanques A y B del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques A y B se mantienen a 0 °C y a 100 °C, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 100 °C, se sumerge dentro del tanque A. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es 90 °C. Después de 2 minutos se saca la barra e inmediatamente se transfiere al otro tanque. Después de 1 minuto en el tanque B la temperatura se eleva 10 °C. ¿Cuánto tiempo, medido desde el comienzo de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los 99.9 °C?

Problema 5: (10 puntos)

Encuentre la ecuación del plano que contiene el punto $(2,1,1)$, perpendicular al plano yz y forma un ángulo de $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ rad con el plano $2x - y + 2z = 3$.

Problema 6: (10 puntos)

Suponga que la temperatura en el punto (x, y) del plano xy está dada por $T = 25 - 2x^2y^2$

a. Encuentre la razón de cambio de la temperatura en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

b. ¿En qué dirección aumenta con mayor rapidez la temperatura a partir del punto $(2,4)$? ¿Cuál es el valor de la derivada direccional máxima?

c. ¿En qué dirección no hay cambio de temperatura a partir del punto $(2,4)$?

Problema 7: (10 puntos)

Un tanque está lleno de 100 litros de agua, en los cuales se han disuelto 20 Kg de bicarbonato de sodio. Otra mezcla que contiene 1 Kg de bicarbonato de sodio por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución bien mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto. Encuentre la ecuación que determine la cantidad de bicarbonato de sodio para cualquier instante t. ¿Se vaciará completamente el tanque? ¿Qué pasará si el tanque logra vaciarse?

Problema 8: (10 puntos)

Verifique el teorema de Gauss al calcular el flujo hacia el exterior del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, a través de la superficie del sólido limitado por de la región $z = 4 - x^2 - y^2$ & $z = 0$.

Problema 9: (10 puntos)

Una porción de una esfera de radio r se elimina cortando un semicono circular con vértice en el centro de la esfera. El vértice del cono forma un ángulo 2θ. Hallar el área de la superficie de la esfera eliminada.

Problema 10: (10 puntos)

Un faro de 25 metros de altura emite una luz omnidireccional de buena intensidad. A 10 metros de la base del faro se encuentra un globo aerostático a 24 metros de altitud, del cual se suelta una bala de cañón, hecha de hierro forjado, con una velocidad inicial hacia abajo de 1 m/s. En tierra, justo por debajo del globo, hay un electroimán que le imprime a la bala de cañón una aceleración hacia abajo de "$2t$" m/s^2 sin tomar en cuenta la gravedad. Determinar la razón de cambio a la que, la sombra, que la bala de cañón proyecta en tierra, se acerca a la línea vertical formada entre el globo y tierra cuando la bala está a una altura de 10 metros. (Usar la gravedad como 10 m/s^2).

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (10 puntos)

Una pieza larga de lámina galvanizada de w pulgadas de ancho se tiene que doblar en forma simétrica de tal manera que quedan tres lados rectos y se forme un canalón que desaloje el agua de lluvia. La figura muestra la sección transversal del canal.

a. Determine las dimensiones que dan el área máxima posible de la sección transversal en la figura.

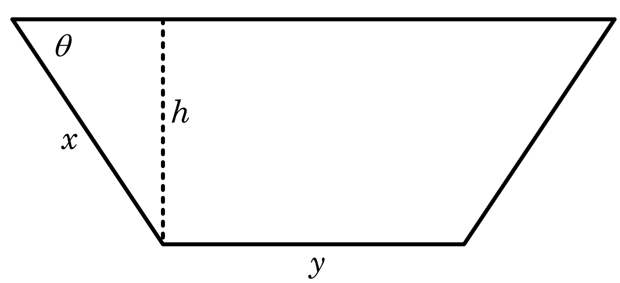
b. ¿Será mejor doblar el metal de tal manera que quede un canalón de sección transversal semicircular que una sección transversal de tres lados?

Solución

a. El problema se puede resolver utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

Entonces la función objetivo es el área de la sección transversal, utilizamos la fórmula del área de un trapecio

$$A = \frac{h(B+b)}{2}$$



$$A = \frac{(x \operatorname{sen}\theta)[y + (y + 2x\cos\theta]}{2}$$

$$= xy \operatorname{sen}\theta + x^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

En donde y es la longitud de la base de la figura, la restricción resulta de la longitud w de la pieza de acero $2x + y = w$, con esto tenemos el lagrangiano.

$$L = A + \lambda R = xy \operatorname{sen}\theta + x^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \lambda(2x + y)$$

Ahora calculamos las derivadas de L e igualamos a cero y obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y\,\mathrm{sen}\,\theta + 2x\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 2\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x\,\mathrm{sen}\,\theta + \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = xy\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\mathrm{sen}^2\theta = 0 \quad (3)$$

Dividimos entre x (sabemos que $x = 0$ no debe ser tomada como solución) la ecuación (3) y resolvemos para y.

$$y = -x\cos 2\theta\,\sec\theta \quad (4)$$

Ahora resolvemos λ para (2) y sustituimos el resultado en (1) así como el resultado (4) en (1)

$$-2x\,\mathrm{sen}\,\theta + 2x\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - x\cos 2\theta\tan\theta = 0 \quad (5)$$

Simplificamos y obtenemos

$$x\left(-2\mathrm{sen}\,\theta + \tan\theta\right) = 0 \quad (6)$$

Omitiendo la solución $x = 0$ tenemos para θ las siguientes soluciones

$\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \pi$ de estos valores el máximo se obtiene con $\theta = \frac{\pi}{3}$, utilizando este resultado en (4) tenemos que $y = x$ y entonces las dimisiones son las siguientes:

Las dimensiones son: $x = \frac{w}{3}$, $y = \frac{w}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $A = \frac{w^2}{4\sqrt{3}}$

b. Si se dobla el metal como una semicircunferencia entonces w sería el perímetro

$$w = \pi r$$

y el área sería

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 = \frac{w^2}{2\pi}$$

Como $2\pi < 4\sqrt{3}$ entonces resulta mejor doblar el metal como una semicircunferencia puesto que el área sería mayor.

Problema 2: (10 puntos)

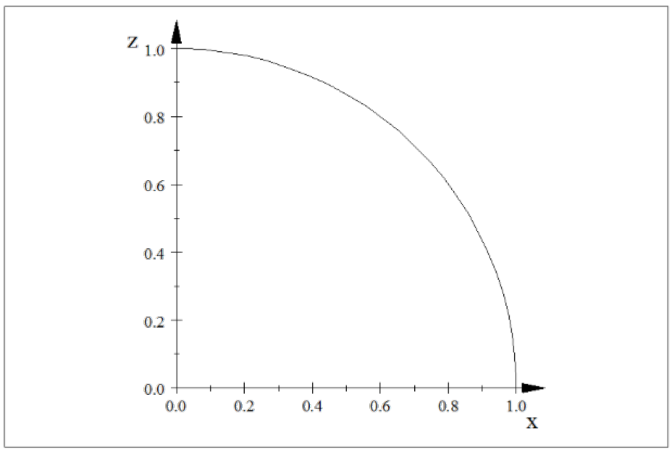
Dibuje el sólido que está representado por la siguiente integral: $\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$

Solución

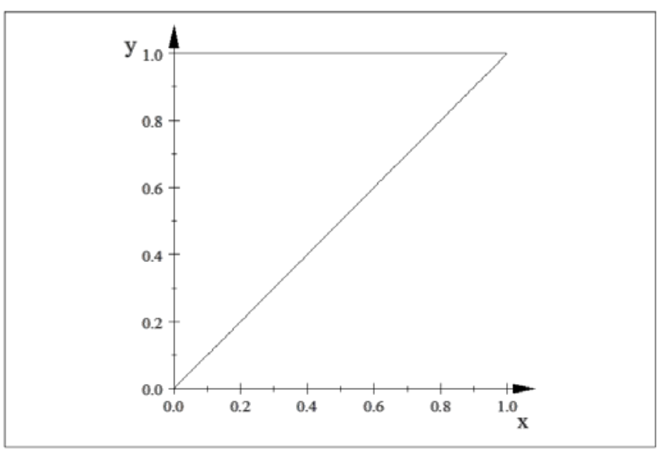
$$z = \sqrt{1-x^2}$$

$$x^2 + z^2 = 1 \text{ Cilindro circular de radio 1}$$

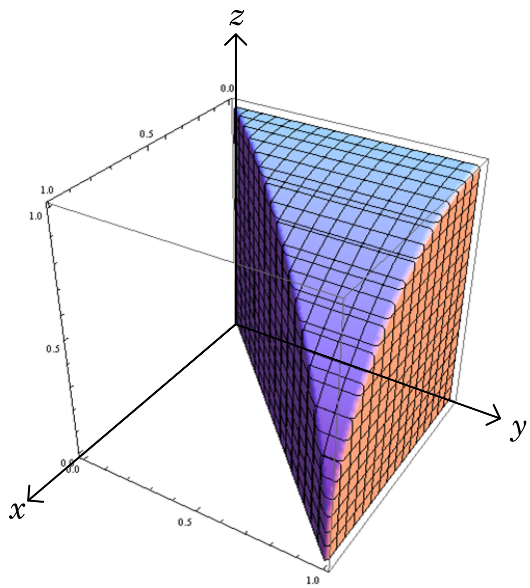
Traza en el plano xz



Traza en el plano xy



Grafica del sólido que representa la integral



Problema3: (10 puntos)

Cuando una masa de 1 slug se cuelga de un resorte, lo estira 2 pies y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ se aplica una fuerza externa al sistema igual a $f(t) = 8\operatorname{sen} 4t$. Formule la ecuación del movimiento, si el medio presenta una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

Solución

Datos

$m = 1$ slug

$x = 2$pies

$F = mg = 32$ lb

$$K = \frac{F}{x} = 16$$

$\beta = 8$

$F(t) = 8\operatorname{sen} 4t$

Debido a que parte de la posición de equilibrio $x(0) = 0$

Y de reposo $x'(0) = 0$

De lo anterior obtenemos la ecuación diferencial

$$x'' + 8x' + 16x = 8\operatorname{sen} 4t$$

Se debe encontrar la solución complementaria y la solución particular.

Para obtener la solución complementaria x_c se encuentra la solución de la homogénea

$$x'' + 8x' + 16x = 0$$

Raíz 4 repetida

$$x_c = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$

Para obtener la solución particular x_p

Analizando

$$f(t) = 8\operatorname{sen} 4t$$

Se concluye que

$$x_p = A\cos 4t + B\operatorname{sen} 4t$$

Y

$$x_p' = -4A\operatorname{sen} 4t + 4B\cos 4t$$

$$x_p'' = -16A\cos 4t - 16B\operatorname{sen} 4t$$

Al sustituir en la ecuación diferencial

$$32B\cos 4t - 32A\operatorname{sen} 4t = 8\operatorname{sen} 4t$$

Nos queda que:

$$A = -\frac{1}{4} \qquad \& \qquad B = 0$$

Y

$$x_p = -\frac{1}{4}\cos 4t$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$$

Debido a que parte de la posición de equilibrio $x(0) = 0$ y de reposo $x'(0) = 0$

Al sustituir en

$$x = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$$

$$x' = -4c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-4t} + -4c_2 t e^{-4t} + \operatorname{sen} 4t$$

Queda que

$$0 = c_1 - \frac{1}{4}$$

$$0 = -4c_1 + c_2$$

Se tiene que

$$c_1 = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = 1$$

La ecuación del movimiento es

$$x = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$$

Problema 4: (10 puntos)

Dos grandes tanques *A* y *B* del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques *A* y *B* se mantienen a 0 °C y a 100 °C, respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 100 °C, se sumerge dentro del tanque *A*. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es 90 °C. Después de 2 minutos se saca la barra e inmediatamente se transfiere al otro tanque. Después de 1 minuto en el tanque *B* la temperatura se eleva 10 °C. ¿Cuánto tiempo, medido desde el comienzo de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los 99.9 °C?

Solución

Definición de variable:

T = temperatura °C de la barra en el tiempo t en minutos.

Datos del tanque *A*

$t = 0$ minutos $T = 100$ °C

$t = 1$ minuto $T = 90$ °C

$t = 2$ minutos $T = x$°C

Datos del tanque *B*

$t = 0$ minutos $T = x$°C

$t = 1$ minuto $T = x + 10$ °C

t= ? minutos $T = 99.9$ °C

Tanque A:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 0)$$

$$\frac{dT}{dt} = kT$$

$$\frac{dT}{T} = kdt$$

$$\ln T = kt + C$$

$$T = e^{kt+C}$$

$$T = e^{kt}e^{C}$$

$$T = De^{kt}$$

aplicando condición inicial:

$$T(0) = 100$$

$$100 = De^{k(0)}$$

$$D = 100$$

$$T = 100e^{kt}$$

aplicando condición inicial:

$$T(1) = 90$$

$$90 = 100e^{k(1)}$$

$$k = \ln\left(\frac{90}{100}\right) = -0.10536$$

$$T = 100e^{-0.10536t}$$

evaluando para $t = 2$ minutos

$$T(2) = 100e^{(-0.10536(2))} = 81^{o}C$$

Tanque B:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 100)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 100)$$

$$\frac{dT}{(T - 100)} = kdt$$

$$\ln\ln(T - 100) = kt + C$$

$$(T - 100) = e^{kt+C}$$

$$T - 100 = e^{kt} * e^{C}$$

$$T - 100 = De^{kt}$$

$$T = De^{kt} + 100$$

aplicando condición inicial:

$$T(0) = 81$$

$$81 = De^{k(0)} + 100$$

$$D = -19$$

$$T = -19e^{kt} + 100$$

aplicando condición inicial

$$T(1) = (81 + 10)$$

$$91 = -19e^{k(1)} + 100$$

$$k = \ln\ln\left(\frac{-9}{-19}\right) = -0.74721$$

$$T = -19e^{-0.74721t} + 100$$

Evaluando $T = 99.9°C$ para encontrar t

$$99.9 = -19e^{-0.74721t} + 100$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{-0.10}{-19}\right)}{-0.74721} = \frac{\ln 0.00526}{-0.74721} = 7.02296 \text{ minutos}$$

$$\text{tiempo total} = \text{tiempo en el tanque } A + \text{tiempo en el tanque } B$$

$$\text{tiempo total} = 2 + 7.02296 = 9.02296 \text{ minutos}$$

CONCLUSIÓN:

El tiempo que le tomará a la barra alcanzar los 99.9 $°C$, medido desde el comienzo de todo el proceso, es de 9.02296 minutos aproximadamente.

Problema5: (10 puntos)

Encuentre la ecuación del plano que contiene el punto $(2,1,1)$, perpendicular al plano yz y forma un ángulo de $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\text{rad}$ con el plano $2x-y+2z=3$.

Solución

La ecuación general del plano

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Contiene el punto $(2,1,1)$. Al sustituir en la ecuación del plano nos queda

$$a(x-2)+b(y-1)+c(z-1)=0$$

Encontrar el vector normal

Perpendicular al plano yz su ecuación es plano $x=0$, entonces

$$\langle a,b,c\rangle\cdot\langle 1,0,0\rangle=0$$

Nos queda que $a=0$

La ecuación nos queda

$$0(x-2)+b(y-1)+c(z-1)=0$$

$$b(y-1)+c(z-1)=0$$

El plano buscado forma un ángulo de $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\text{rad}$ con el plano $2x-y+2z=3$, entonces

$$\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{\langle 0,b,c\rangle\cdot\langle 2,-1,2\rangle}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{4+1+4}}$$

$$\langle 0,b,c\rangle\cdot\langle 2,-1,2\rangle=\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{4+1+4}\cos\left(\cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)\right)$$

$$-b+2c=\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{9}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$-b+2c=2\sqrt{b^2+c^2}$$

$$b^2-4bc+4c^2=4\left(b^2+c^2\right)$$

$$b(3b+4c)=0$$

$$b=0 \qquad \& \qquad b=\frac{-4c}{3}$$

Entonces el problema tiene dos soluciones

$$(z-1)=0 \qquad \& \qquad -4(y-1)+3(z-1)=0$$

Problema 6: (10 puntos)

Suponga que la temperatura en el punto (x,y) del plano xy está dada por $T = 25 - 2x^2y^2$

a. Encuentre la razón de cambio de la temperatura en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

b. ¿En qué dirección aumenta con mayor rapidez la temperatura a partir del punto $(2,4)$? ¿Cuál es el valor de la derivada direccional máxima?

c. ¿En qué dirección no hay cambio de temperatura a partir del punto $(2,4)$?

Solución

a.

$$D_{\mathbf{u}}T = \nabla T \cdot \mathbf{u}$$

$$D_{\mathbf{u}}T = \left(-4xy^2\mathbf{i} - 4x^2y\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}y\mathbf{j}\right)$$

$$D_{\mathbf{u}}T = -\frac{16}{5}xy^2 - \frac{12}{5}x^2y$$

en el punto $(1,2)$

$$D_{\mathbf{u}}T = -\frac{16}{5}(1)(2)^2 - \frac{12}{5}(1)^2(2)$$

$$= -\frac{88}{5}$$

b. En la dirección del gradiente

$$\nabla T = -4xy^2\mathbf{i} - 4x^2y\mathbf{j}$$

en el punto $(2,4)$

$$\nabla T = -128\mathbf{i} - 64\mathbf{j}$$

El valor de la derivada direccional máxima

$$\|\nabla T\| = \|-128\mathbf{i} - 64\mathbf{j}\| = \sqrt{20480}$$

c. Ortogonal al gradiente

$$64\mathbf{i} - 128\mathbf{j} \quad \text{o} \quad -64\mathbf{i} + 128\mathbf{j}$$

Problema 7: (10 puntos)

Un tanque está lleno de 100 litros de agua, en los cuales se han disuelto 20 Kg de bicarbonato de sodio. Otra mezcla que contiene 1 Kg de bicarbonato de sodio por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución bien mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto. Encuentre la ecuación que determine la cantidad de bicarbonato de sodio para cualquier instante *t*. ¿Se vaciará completamente el tanque? ¿Qué pasará si el tanque logra vaciarse?

Solución

Primero se identifican las variables

x = Cantidad de bicarbonato de sodio (kg)

t = tiempo (min)

La ecuación diferencial para mezclas

$$\frac{dx}{dt} = c_e f_e - c_s f_s$$

Se cuenta con los siguientes datos:

Condición inicial: $t = 0, \quad x = 20\,\text{kg}$

$c_e = 1\,\text{Kg/L}$

$f_e = 7\,\text{L/min}$

$f_s = 8\,\text{L/min}$

Y lo único que debe establecerse es la concentración de salida

$$c_s = \frac{\text{Cantidad de Bicarbonato de sodio (Kg)}}{\text{Volumen del tanque}}$$

En este problema, el tanque tiene volumen es variable, porque el flujo de entrada es distinto al flujo de salida

Por lo que la concentración de salida es:

$$c_s = \frac{x}{100 + (f_e - f_s)t} = \frac{x}{100 - t}$$

Regresando a la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = c_e f_e - c_s f_s$$

Se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = \left(1\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(7\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) - \left(\frac{x}{100-t}\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(8\frac{\text{L}}{\text{min}}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 7 - \frac{8x}{100-t}$$

Por lo tanto, se obtiene una ecuación diferencial lineal en términos de x

$$\frac{dx}{dt} + \frac{8x}{100-t} = 7$$

De donde el factor de integración

$$FI = e^{\int \frac{8}{100-t}dt} = (100-t)^{-8}$$

Y entonces al resolver la ecuación lineal, se tiene

$$(100-t)^{-8}x = 7\int (100-t)^{-8}dt$$

Para resolver la integral que se tiene del lado derecho, se realiza la siguiente sustitución

$$w = 100 - t$$

$$-dw = dt$$

$$(100-t)^{-8}x = -7\int w^{-8}dw$$

$$(100-t)^{-8}x = \frac{-7w^{-7}}{-7} + C$$

$$(100-t)^{-8}x = (100-t)^{-7} + C$$

Por lo que, al despejar la ecuación para la cantidad de Bicarbonato de sodio, se tiene:

$$x = (100-t) + C(100-t)^{8}$$

Para encontrar el parámetro C se sabe que al inicio del proceso están disueltos 20 Kg de bicarbonato de sodio en el tanque. Por lo que para

$$t = 0, \qquad x = 20\text{Kg}$$

$$20 = 100 + C(100)^{8}$$

Entonces el parámetro C es:

$$C = -\frac{80}{100^{8}}$$

Por lo que la ecuación que determina la cantidad de Bicarbonato de sodio para cualquier instante en el tanque es la siguiente:

$$x(t) = (100-t) - \frac{80}{100^{8}}(100-t)^{8}$$

Para saber si el tanque logrará vaciarse completamente, se determina el tiempo en que la concentración se hace cero

$$x(t) = 0$$

$$(100-t) - \frac{80}{100^8}(100-t)^8 = 0$$

$$(100-t)\left[1 - \frac{80}{100^8}(100-t)^7\right] = 0$$

Del factor $(100-t) = 0$, se tiene que: $t = 100\,\text{min}$

Del factor $\left[1 - \frac{80}{100^8}(100-t)^7\right] = 0$, se tiene que

$$t = 100 - \sqrt[7]{\frac{100^8}{80}}$$

$$t \approx -3.23\,\text{min}$$

La solución negativa carece de sentido en el contexto del problema. Por lo que la concentración es cero para $t = 100\,\text{min}$ que será cuando se vacíe totalmente el tanque.

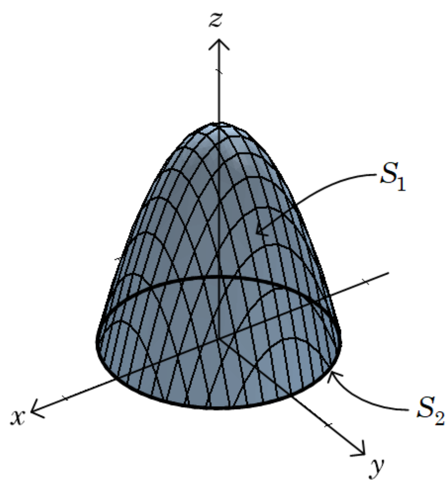
Aunque el tanque se vacíe siempre seguirá entrando agua con bicarbonato de sodio, entonces a partir de $t = 100\,\text{min}$ la concentración de bicarbonato de sodio en cada instante será la de la mezcla que entra, es decir $c_e = 1\,\text{Kg/L}$.

Problema 8: (10 puntos)

Verifique el teorema de Gauss al calcular el flujo hacia el exterior del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, a través de la superficie del sólido limitado por de la región $z = 4 - x^2 - y^2$ & $z = 0$.

Solución

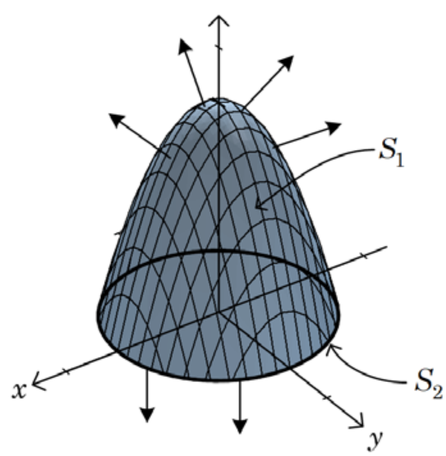
La siguiente figura muestra el paraboloide acotado por el plano $z = 0$, así como las dos superficies a considerar



Verificar que el teorema de la Divergencia de Gauss

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

La figura muestra en forma aproximada la región acotada por paraboloide y el plano, se tomará un flujo orientado hacia afuera.



1. a. Calculando la integral de superficie se tiene que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

Para S_1 $z = 4 - x^2 - y^2$

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot \mathbf{n}\,dS$$

Donde

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = (x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6\mathbf{k})\cdot\frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_R (x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6\mathbf{k})\cdot(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 1\mathbf{k})\frac{dydx}{(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot\mathbf{k}} \\
&= \iint_R (2x^2 + 8yz - 6)dydx \\
&= \iint_R \left(2x^2 + 32y - 8y\left(x^2 + y^2\right) - 6\right)dydx \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} (2r^2\cos^2\theta + 32r\operatorname{sen}\theta - 8r^3\operatorname{sen}\theta - 6)r\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^2 2\pi\left(r^3 - 6r\right)dr \\
&= -16\pi
\end{aligned}$$

Para S_2 $z = 0$ región $0 \le x^2 + y^2 \le 2$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_R (x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - 6\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{k})\frac{dydx}{\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}} \\
&= \iint_R 6\,dydx \\
&= \int_0^2\int_0^{2\pi} 6r\,dr\,d\theta = 24\pi
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$
$$= -16\pi + 24\pi = 8\pi$$

2. b. Aplicando el teorema de la divergencia y calculando la integral triple en coordenadas cilíndricas se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(4z) + \frac{\partial}{\partial z}(-6) = 1$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_V 1\, dV$$

3.

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right) r\, d\theta\, dr$$
$$= \int_0^2 2\pi \left(4r - r^3\right) dr$$
$$= 8\pi$$

4.

Por lo tanto, se verifica el teorema de la divergencia:

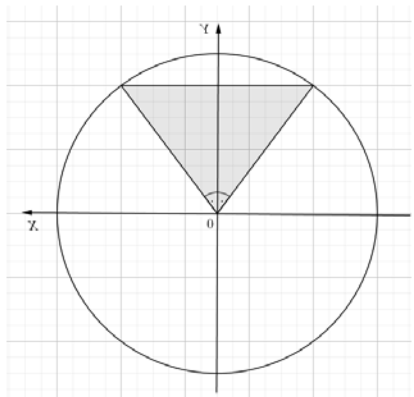
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

Problema 9: (10 puntos)

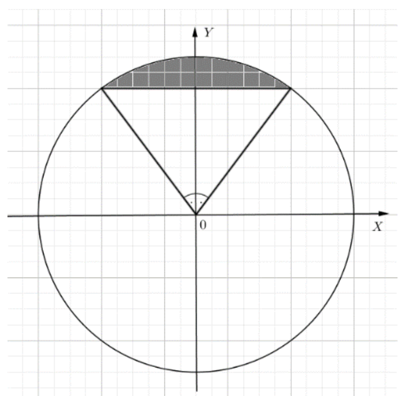
Una porción de una esfera de radio r se elimina cortando un semicono circular con vértice en el centro de la esfera. El vértice del cono forma un ángulo 2θ. Hallar el área de la superficie de la esfera eliminada.

Solución

La decisión de como colocar el cono, dará diferentes opciones de solución. En este caso se hará con el vértice hacia abajo, como se muestra en el plano.



Como se puede observar la región que se desea eliminar en la esfera, aparece marcada en el plano en color obscuro en la siguiente figura:



Este problema se puede resolver tanto en ecuaciones cartesianas como en ecuaciones paramétricas, tomando de base la rotación de la sección de la curva de la circunferencia rotada alrededor del eje de las y.

Solución en ecuaciones cartesianas:

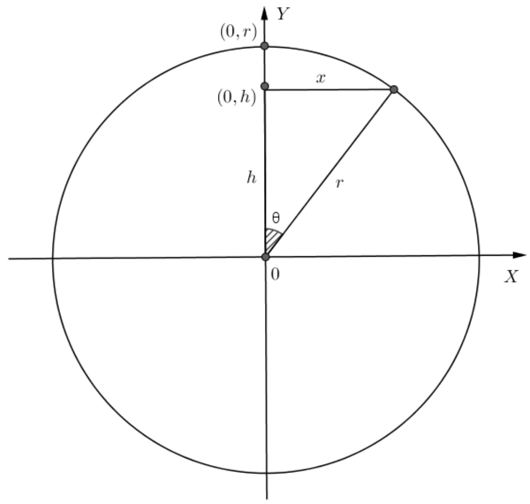


Figura 1:

Utilizando la integral de área superficial:

$$S_Y = 2\pi\int_h^r x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

En donde x es el radio de rotación, es igual a

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

y la altura del cono con vértice en el centro es $h = r\cos\theta$, por lo que se tiene:

$$S_Y = 2\pi\int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2 - y^2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{r^2-y^2}}\right)^2}\,dy$$

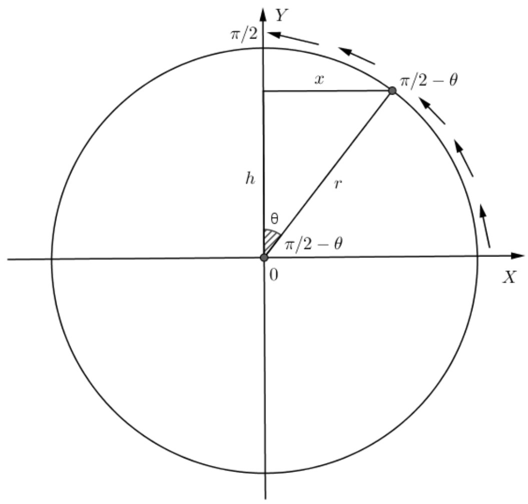
$$S_Y = 2\pi\int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2 - y^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{r^2-y^2}}\,dy$$

$$S_Y = 2\pi\int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2 - y^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-y^2}}\,dy$$

$$S_Y = 2\pi\int_{r\cos\theta}^{r} r\,dy = 2\pi r\,y\,\Big|_{r\cos\theta}^{r} = 2\pi r(r - r\cos\theta)$$

$$S_Y = 2\pi r^2(1 - cos\theta)$$

Solución en ecuaciones paramétricas:



La ecuación de la circunferencia en ecuaciones paramétricas es:

$$x = r\cos t \text{ y } y = r\,\mathrm{sen}\,t$$

Utilizando la integral de área superficial en ecuaciones paramétricas:

$$S_Y = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} x\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\sqrt{(r\cos t)^2 + (-r\,\mathrm{sen}\,t)^2}\,dt$$

$$S_Y = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^2\,t + r^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\sqrt{r^2\left(\mathrm{sen}^2\,t + \cos^2 t\right)}\,dt$$

$$S_Y = 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos t\,dt = 2\pi r^2 \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 2\pi r^2\,\mathrm{sen}\,t\Big|_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S_Y = 2\pi r^2\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

$$S_Y = 2\pi r^2\left(1 - sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

$$S_Y = 2\pi r^2(1 - \cos\theta)$$

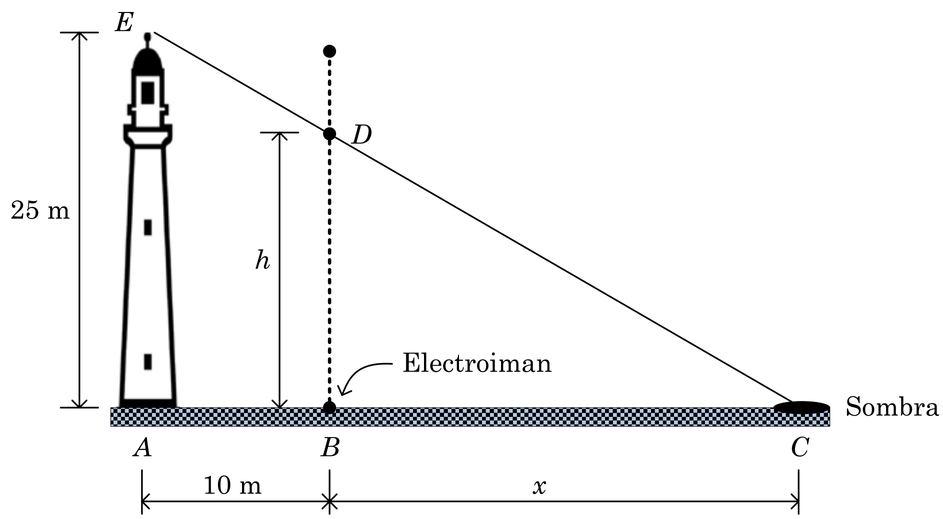
Nota: También se puede resolver por integral de superficie.

Problema 10: (10 puntos)

Un faro de 25 metros de altura emite una luz omnidireccional de buena intensidad. A 10 metros de la base del faro se encuentra un globo aerostático a 24 metros de altitud, del cual se suelta una bala de cañón, hecha de hierro forjado, con una velocidad inicial hacia abajo de 1 m/s. En tierra, justo por debajo del globo, hay un electroimán que le imprime a la bala de cañón una aceleración hacia abajo de "$2t$" m/s^2 sin tomar en cuenta la gravedad.Determinar la razón de cambio a la que, la sombra, que la bala de cañón proyecta en tierra, se acerca a la línea vertical formada entre el globo y tierra cuando la bala está a una altura de 10 metros. (Usar la gravedad como 10 m/s^2).

Solución

La figura siguiente describe los elementos del problema



Para determinar la relación existente entre h y x se utilizan los triángulos semejantes ACE y BCD.

$$\frac{h}{25} = \frac{x}{10 + x}$$

$$x = \frac{10h}{25 - h}$$

[1]

Como lo que se busca es la razón de cambio con que la sombra de la bala se acera al punto B es necesario derivar implícitamente la ecuación [1].

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{10h}{25-h}\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{250}{(25-h)^2}\frac{dh}{dt}$$

Para encontrar $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = 10$ es necesario analizar la caída de la bala de cañón, la cual está sometida a una aceleración debida al electroimán y otra debida a la gravedad.

$$a = -2t - 10$$

$$v = \frac{dh}{dt} = -t^2 - 10t + c_1$$

Pero en tiempo igual a 0 segundos la velocidad es de -1 m/s por lo que $c_1 = -1$ Obteniendo la siguiente ecuación de la velocidad:

$$\frac{dh}{dt} = -t^2 - 10t - 1$$

La función de la altura h se obtiene integrando la velocidad con respecto al tiempo.

$$h = \int v dt$$

$$h = -\int (t^2 + 10t + 1) dt$$

$$h = -\frac{1}{3}t^3 - 5t^2 - t + c_2$$

Pero en tiempo igual a 0 segundos la altura de la bala de cañón es de 24 metros, por lo que $c_2 = 24$, obteniendo la siguiente ecuación de altura:

$$h = -\frac{1}{3}t^3 - 5t^2 - t + 24$$

Finalmente partiendo de la ecuación anterior se obtiene que la bala de cañón está a una altura de 10 metros sobre el suelo en el tiempo $t \approx 1.5068$ segundos.

Para este tiempo

$$\frac{dh}{dt} = -t^2 - 10t - 1 \approx -(1.5068)^2 - 10(1.5068) - 1 \approx -18.328 \text{ m/seg}$$

Finalmente cuando $h = 10$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{250}{(25-h)^2}\frac{dh}{dt} \approx \frac{250}{(25-10)^2}(-18.328)$$

$$\approx -20.37 \text{ m/seg}$$

4.2 FÍSICA

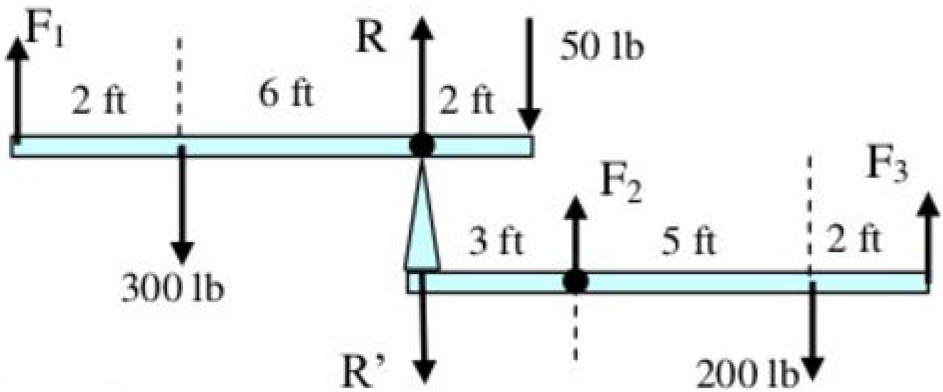
UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE FÍSICA NIVEL I

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presenta una serie de cuatro problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 120 minutos.

Problema 1: (25 puntos)

Encuentre las fuerzas F_1, F_2 y F_3 de forma que el sistema presentado en el diagrama se encuentre en equilibrio.



Problema 2: (25 puntos)

Sobre un bloque masa de 3.00 kg se aplica una fuerza F = 9.00 t N/s, si el bloque parte del reposo en $X = 0$ y $t = 0$.

Determine:

a. El trabajo efectuado por la fuerza en término de la posición.

b. Determine la posición X de la partícula en $t = 4.00$ s

Problema 3: (25 puntos)

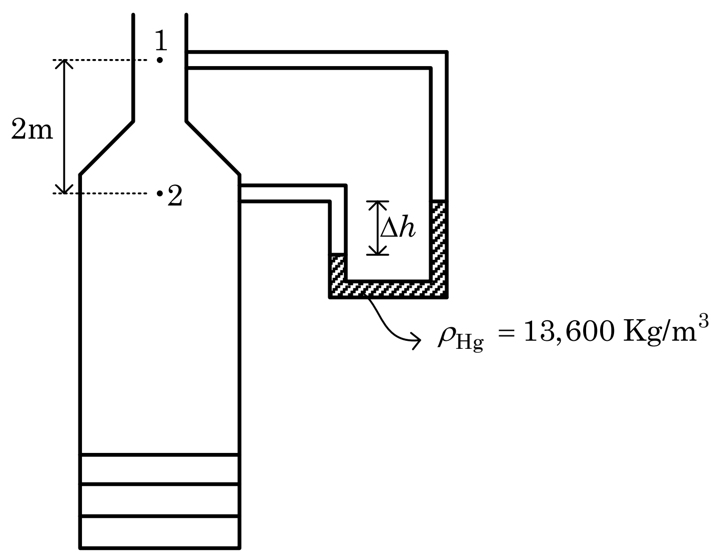
Se tiene en una empresa farmacéutica varios contenedores de productos químicos líquidos variados pero por error de un operario del horario nocturno, el abre la válvula de uno de los fluidos por accidente, (densidad $\rho_a = 1{,}250\ \text{kg/m}^3$), este se vierte sobre un gran contenedor que posee otros 3 líquidos agregándolo a este para un proceso de reciclaje teniendo en cuenta que cada liquido posee una altura de 3m en el contenedor (densidades $\rho_b = 2{,}100\ \text{kg/m}^3$, $\rho_c = 770\,\text{kg/m}^3$ y $\rho_d = 850\,\text{kg/m}^3$ respectivamente).

Conforme la válvula se abre se libera durante 07 segundos pasa por un tubo venturi vertical como muestra la figura, el cual se utiliza para medir la presión que hace el fluido a través de la tubería; estableciendo que se pudo medir que la diferencia de alturas de mercurio $\rho_{\text{Hg}} = 13{,}600\,\text{kg/m}^3$ en el manómetro es de 25 cm, y sabiendo que en el sistema de tubos el punto 2 es cinco veces mayor que en el punto 1. El depósito posee la misma área que el punto 2 y los 4 líquidos son inmiscibles. Determine:

a. La velocidad con la que sale el líquido "a" en m/s en el punto 2

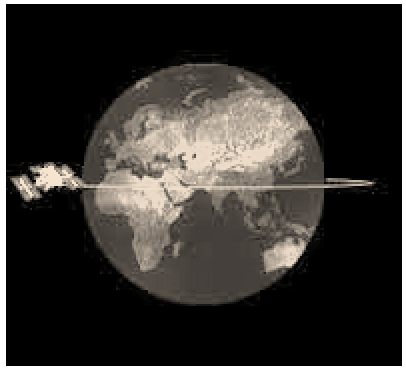
b. La altura de líquido "a" en m que logra ingresar al contender durante ese tiempo

c. La presión manométrica en la parte inferior del líquido "a" en Pa



Problema 4: (25 puntos)

Un satélite geoestacionario o geosincrónico es aquél que se mueve en una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra, con una rapidez constante y a una altura h sobre la superficie de la misma. Considere que m es la masa del satélite y que la masa y radio de la Tierra son: $M_T = 6.0 \times 10^{24}\,\text{kg}$, $R_T = 6.4 \times 10^{6}\,\text{m}$.



a. Encuentre la altura h, medida sobre la superficie de la Tierra, a la que había que colocar un satélite geoestacionario.

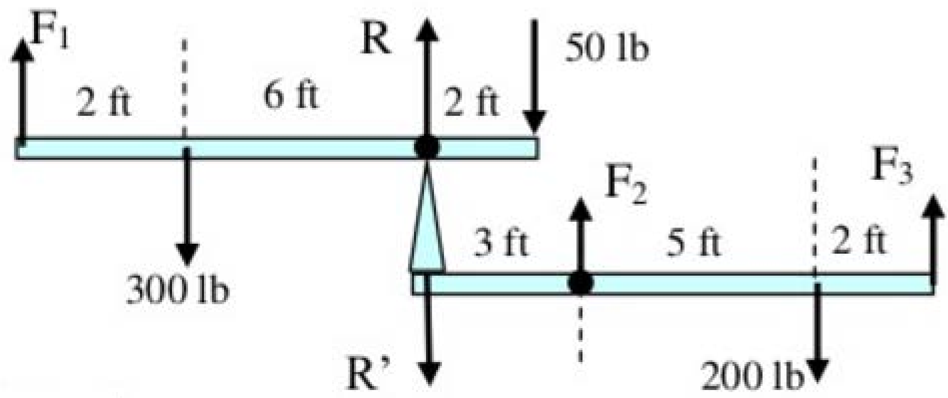
b. Demuestre que es imposible colocar un satélite geoestacionario sobre una órbita que no esté directamente sobre el ecuador terrestre, latitud 0°, ya que para órbitas a latitudes distintas, el satélite experimentaría un movimiento armónico simple a lo largo de un eje perpendicular a la distancia radial entre el satélite y el centro de la Tierra. Considere ángulos pequeños en su demostración, es decir, latitudes menores de 15°.

c. Calcule la frecuencia de oscilación que tendría el satélite en el movimiento armónico simple que se mencionó en el inciso anterior si se tratara de colocar en una órbita circular sobre una ciudad con latitud menor de 15°, por ejemplo, la Ciudad de Guatemala (latitud 14.6°).

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (25 puntos)

Encuentre las fuerzas F_1, F_2 y F_3 de forma que el sistema presentado en el diagrama se encuentre en equilibrio.



Solución

$$\sum \tau = 0$$

En R. La fuerza R es hacia arriba.

$$\sum \tau_R = (300\,\text{lb})(6\,\text{ft}) - (50\,\text{lb})(2\,\text{ft}) - F_1(8\,\text{ft}) = 0$$

$$F_1 = 213\text{ lb}$$

Ahora, $\sum F_y = 0$ da:

$$213\,\text{lb} + R - 300\,\text{lb} - 50\,\text{lb} = 0$$

$$R = 138\,\text{lb}$$

$$R' = 138\,\text{lb}$$

A continuación sumamos los torques en F_2 con $R' = 138\,\text{lb}$ dirigida hacia abajo.

$$\sum \tau_F = (138\text{ lb})(3\text{ ft}) + F_3(7\text{ ft}) - (200\text{ lb})(5\text{ ft}) = 0$$

De donde $F_3 = 83.9\,\text{lb}$

$\sum F_y = 0 = F_2 + 83.9\text{ lb} - 138\text{ lb} - 200\text{ lb}$, entonces $F_2 = -254\,\text{lb}$.

Las tres fuerzas desconocidas son:

$$F_1 = 213\,\text{lb},\quad F_2 = -254\,\text{lb},\quad F_3 = 83.9\,\text{lb}$$

Problema 2: (25 puntos)

Sobre un bloque masa de 3.00 kg se aplica una fuerza $F = 9.00t$ N/s, si el bloque parte del reposo en $X = 0$ y $t = 0$.

Determine:

a. El trabajo efectuado por la fuerza en término de la posición.

b. Determine la posición X de la partícula en $t = 4.00$ s

Solución

$$a = \frac{9.00t}{3.00} = 3.00\ t$$

$$v = \int_0^t 3.00t\ dt = 1.50\,t^2 \text{m/s}$$

$$x = \int_0^t 1.50t^2\ dt = 0.500\,t^3 \text{m}$$

Despejando el tiempo de la expresión de posición

$$t = \left(\frac{x}{0.500}\right)^{1/3}$$

Entonces la fuerza estará dada por:

$$F = 11.3\ x^{1/3}\ \text{N}$$

a. El trabajo se representa como

$$W = \int_0^x 11.3\ x^{1/3} dx = 8.48\ x^{4/3}$$

b. $x = 0.500\ t^3 = 0.500\,(4.00\ \text{s})^3 = 32.0\ \text{m}$

Problema 3: (25 puntos)

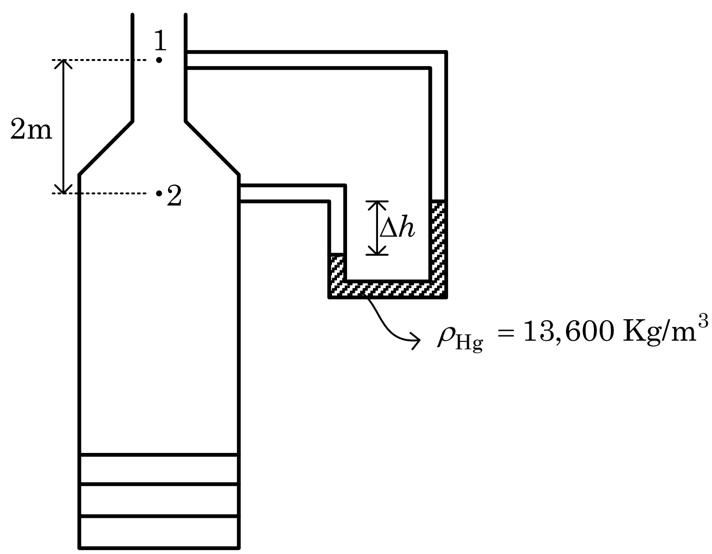
Se tiene en una empresa farmacéutica varios contenedores de productos químicos líquidos variados pero por error de un operario del horario nocturno, el abre la válvula de uno de los fluidos por accidente, (densidad $\rho_a = 1{,}250\ \text{kg/m}^3$), este se vierte sobre un gran contenedor que posee otros 3 líquidos agregándolo a este para un proceso de reciclaje teniendo en cuenta que cada liquido posee una altura de 3m en el contenedor (densidades $\rho_b = 2{,}100\ \text{kg/m}^3$, $\rho_c = 770\,\text{kg/m}^3$ y $\rho_d = 850\,\text{kg/m}^3$ respectivamente).

Conforme la válvula se abre se libera durante 07 segundos pasa por un tubo venturi vertical como muestra la figura, el cual se utiliza para medir la presión que hace el fluido a través de la tubería; estableciendo que se pudo medir que la diferencia de alturas de mercurio $\rho_{\text{Hg}} = 13{,}600\,\text{kg/m}^3$ en el manómetro es de 25 cm, y sabiendo que en el sistema de tubos el punto 2 es cinco veces mayor que en el punto 1. El depósito posee la misma área que el punto 2 y los 4 líquidos son inmiscibles. Determine:

a. La velocidad con la que sale el líquido "*a*" en m/s en el punto 2

b. La altura de líquido "*a*" en m que logra ingresar al contender durante ese tiempo

c. La presión manométrica en la parte inferior del líquido "*a*" en Pa



Solución

a. Entre los puntos 1 y 2 del sistema de tubo vertical se encuentra el mismo Caudal por lo cual:

$$Q_1 = Q_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Debido a que el área 2 en el sistema de tubería es 5 veces mayor que la del área 1 podemos sustituir

$$A_1 v_1 = 5 A_1 v_2$$

Simplificando la expresión en:

$$\frac{v_1}{5} = v_2$$ Ec. 1

Debido a que la presión del sistema en los puntos 1 y 2 está dada por manómetro aplicamos igualación de presiones en los puntos A y B del sistema del tubo en:

$$P_A = P_B$$

$$P_2 = P_1 + \rho_{Hg} g \Delta h$$

La expresión de la variación de la presión que tiene el manómetro:

$$P_2 - P_1 = \rho_{Hg} g \Delta h$$ Ec. 2

Aplicando Bernoulli entre los puntos 1 y 2 del sistema de tuvo vertical tomando como nivel de referencia el punto 2 del sistema.

$$P_2 + \cancel{\rho_a g y_2}^{=0} + \frac{1}{2}\rho_a v_2^2 = P_1 + \rho_a g y_1 + \frac{1}{2}\rho_a v_1^2$$

Despejando para dejar una expresión de la velocidad en términos de las variaciones de la presión y cambios de altura del fluido.

$$P_2 - P_1 - \rho_a g y_1 = \frac{1}{2}\rho_a v_1^2 - \frac{1}{2}\rho_a v_2^2$$

Sustituyendo Ec.1 y Ec.2 en la expresión de la ecuación de Bernoulli anterior.

$$\rho_{Hg} g \Delta h - \rho_a g y_1 = \frac{1}{2}\rho_a v_1^2 - \frac{1}{2}\rho_a \frac{v_1^2}{25}$$

Despejando de la ecuación resultante el valor de v_1 para encontrar la velocidad de los puntos 1 y 2 del sistema de tubería.

$$\rho_{Hg} g \Delta h - \rho_a g y_1 = \rho_a v_1^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50}\right)$$

$$\rho_{Hg} g \Delta h - \rho_a g y_1 = \frac{48}{100}\rho_a v_1^2$$

$$\rho_{Hg} g \Delta h - \rho_a g y_1 = \frac{12}{25}\rho_a v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt[2]{\frac{25\left(\rho_{Hg} g \Delta h - \rho_a g y_1\right)}{12\rho_a}}$$

El valor de la velocidad en el punto 1 de la tubería es de

$$v_1 = 3.834 \text{ m/s}$$

El valor de la velocidad en el punto 2 de la tubería es de

$$v_2 = 0.767 \text{ m/s}$$

b. Con la velocidad del punto 2 se puede determinar la altura de líquido que está en el deposito debido a que se libera en el sistema de tubería al depósito y tarda un tiempo de segundos se puede estimar que la altura del mismo.

De la ecuación de caudal

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A_2 h_a}{\Delta t}$$

$$\frac{A_2 h_a}{\Delta t} = A_2 v_2$$

$$h_a = v_2 \Delta t$$

La altura que el fluido tiene después del proceso en el tanque es de

5.367 m

c. Ya el sistema estable y en equilibrio se puede afirmar que los líquidos con menores densidades se encuentran en la parte superior y así subsecuentemente hasta los líquidos más densos.

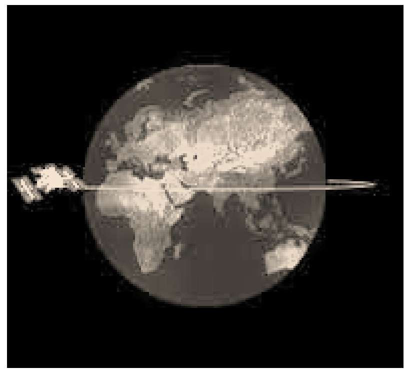
Calculo de la presión manométrica que experimenta el fluido "a" en la parte inferior:

$$P_{man\,a} = \rho_a g h_a + \rho_b g h_b + \rho_c g h_c$$

$$\boldsymbol{P_{man\,a}} = 113{,}373.75 \text{ Pa}$$

Problema 4: (25 puntos)

Un satélite geoestacionario o geosincrónico es aquél que se mueve en una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra, con una rapidez constante y a una altura h sobre la superficie de la misma. Considere que m es la masa del satélite y que la masa y radio de la Tierra son: $M_{\mathrm{T}} = 6.0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_{\mathrm{T}} = 6.4 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$.



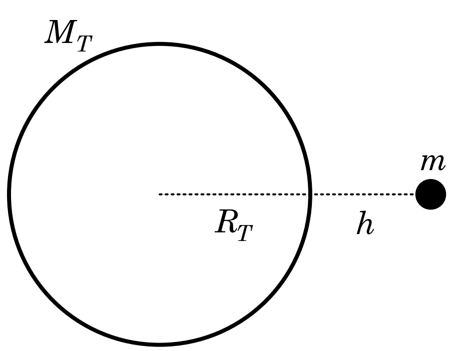
a. Encuentre la altura h, medida sobre la superficie de la Tierra, a la que había que colocar un satélite geoestacionario.

b. Demuestre que es imposible colocar un satélite geoestacionario sobre una órbita que no esté directamente sobre el ecuador terrestre, latitud 0°, ya que para órbitas a latitudes distintas, el satélite experimentaría un movimiento armónico simple a lo largo de un eje perpendicular a la distancia radial entre el satélite y el centro de la Tierra. Considere ángulos pequeños en su demostración, es decir, latitudes menores de 15°.

c. Calcule la frecuencia de oscilación que tendría el satélite en el movimiento armónico simple que se mencionó en el inciso anterior si se tratara de colocar en una órbita circular sobre una ciudad con latitud menor de 15°, por ejemplo, la Ciudad de Guatemala (latitud 14.6°).

Solución

a. Cálculo con la 3ª ley de Kepler y con el período $\tau = 24\,\text{horas} = 86400\,\mathrm{s}$:



$$r = \left(\frac{GM_T\tau^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

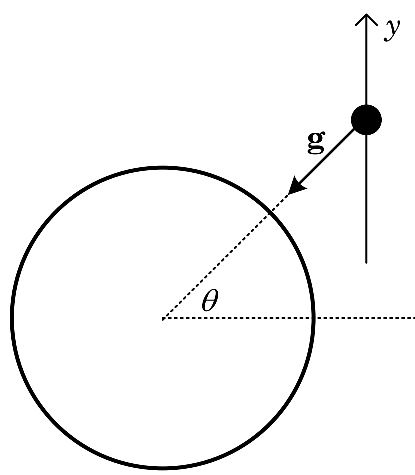
$$r = R_T + h$$

$$h = \left(\frac{\left(6.674\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\right)\left(5.97\times10^{24}\ \mathrm{kg}\right)\left(86400\,\mathrm{s}\right)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - 6.4\times10^6\ \mathrm{m}$$

$$= 3.6\times10^7\ \mathrm{m}$$

Respuesta: $h = 36\times10^3\,\mathrm{km} = 3.6\times10^7\,\mathrm{m}$.

b. Para ángulos pequeños: $\sin\theta \approx \theta$, y el elemento de arco, ds, se puede aproximar a dy, así: $dy \approx ds = rd\theta$, en donde $r = R_T + h = 4.2\times10^7$ m.



$$ma_y = \sum F_y$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg\,\sin\theta$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

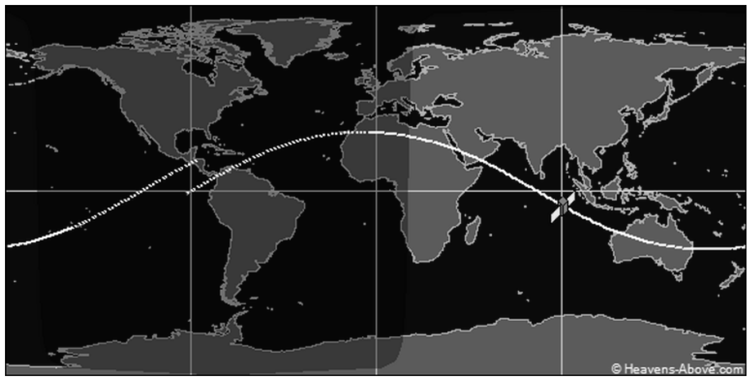
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{r}\theta.$$

La última ecuación corresponde a un movimiento oscilatorio en un eje perpendicular al radio, con frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$.

c. Para ángulos pequeños ($\theta < 15°$) se ha deducido en (b) que ωes independiente de θ:

$$\omega = \sqrt{\frac{9.8\,\text{m/s}^2}{4.2\times10^7\,\text{m/s}}} = 4.8\times10^{-4}\ \text{rad/s}$$

Aunque es una frecuencia pequeña, haría que el satélite oscilara y ya no sería geoestacionario. La órbita del satélite proyectada sobre el planisferio de la Tierra luciría como la línea blanca en la siguiente figura, aunque acá se han exagerado la amplitud de oscilación de la órbita:



.

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE FÍSICA NIVEL II

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presenta una serie de cuatro problemas, resuélvalos correctamente en el cuadernillo de trabajo. El tiempo de la prueba es de 120 minutos.

Problema 1: (25 puntos)

Protones son acelerados a partir del reposo por medio de una diferencia de potencial de $14\,\text{kV}$. Al salir del acelerador, los protones entran a un selector de velocidad que consta de un capacitor de placas paralelas (placas cuadradas de $5\,\text{cm}$ por lado) y 1mm de distancia de separación entre placas; la densidad de carga en sus placas de $1.598 \times 10^{-5}\,\text{C/m}^2$. El capacitor se encuentra en una región (Región 1) donde existe un campo magnético constante dirigido perpendicularmente en relación con el campo eléctrico entre las placas del capacitor y con el vector velocidad de los protones. Los protones entran en un punto equidistante entre las dos placas del capacitor.

Al salir del selector de velocidad los protones entran en otra región (Región 2) donde solamente existe un campo magnético de $0.5\,\text{T}$ de magnitud. El vector velocidad de los protones forma un ángulo de $60°$, respecto al vector de campo magnético de esa región.

a. ¿Qué campo magnético se requiere para que los protones se muevan a través del selector de velocidad sin desviarse? Dibuje las direcciones de los vectores: velocidad, campo magnético y campo eléctrico.

b. ¿Al entrar en la Región 2, indique qué tipo de movimiento describen los protones y calcule el periodo del movimiento, en caso aplique el paso de la trayectoria y el radio de ésta?

Problema 2: (25 puntos)

El campo magnético a través de una espira de alambre de una vuelta, de 16 cm de radio y 88.5Ω de resistencia, cambia con el tiempo como se muestra en la figura

- En el intervalo de 0 a 2 el campo magnético está dado por la expresión

$$B(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2$$

- En el intervalo de 2 a 4 el campo magnético es constante

$$B(t) = 0.5$$

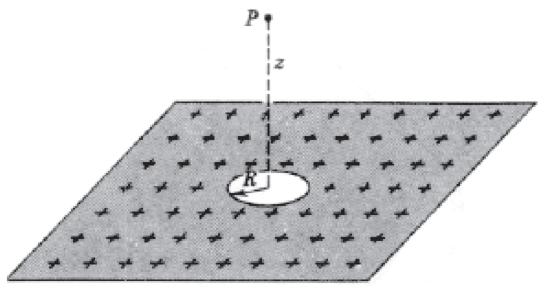
- En el intervalo de 4 a 8 el campo magnético decae linealmente.

Calcule la corriente en la espira en función del tiempo. El campo magnético es uniforme y está en ángulo recto con el plano de la espira.

Problema 3: (25 puntos)

Una superficie no conductora, grande y plana, tiene una densidad uniforme de carga σ. En el centro de la lámina se ha hecho un pequeño orificio circular de radio R, como se muestra en la figura adjunta. Desprecie todos los efectos de borde o frontera.

Para los incisos c) y d), tome la densidad superficial de carga $\sigma = 5\,\mu\ \mathrm{C/m^2}$ y el radio delagujero $R = 10\,\mathrm{cm}$.



a. A partir que el campo de un aro cargado con carga Q y de radio R, a una distancia z sobre el eje de simetría a partir de centro del aro, el cual está dado por:

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

b. Calcule el campo eléctrico en el punto P como función de z, para la distribución de carga descrita en el enunciado. ¿Tendrá un máximo este campo eléctrico?

c. Sabiendo que $\boldsymbol{V}(z = 0) = 0\ \mathrm{V}$, calcule $\boldsymbol{V}(z)$ para puntos sobre el eje de simetría de la distribución.

d. Qué velocidad alcanzará un electrón en el centro del orificio circular, si se suelta en un punto $z = 2R$

e. Calcule el período de las pequeñas oscilaciones de un electrón alrededor de $z = 0$.

Problema 4: (25 puntos)

El circuito mostrado en la figura, representa una bocina de alarma tipo buzzer, utilizada comúnmente en los sistemas de seguridad, la cual se compone de una bobina interna con $L = 12.0\ \mathrm{H}$ conectada a una batería que proporciona un voltaje constante de $V = 39.0\ \mathrm{V}$ y a un interruptor conmutador. Si el interruptor se cierra en el instante $t = 0.00\ \mathrm{s}$, calcule lo siguiente:

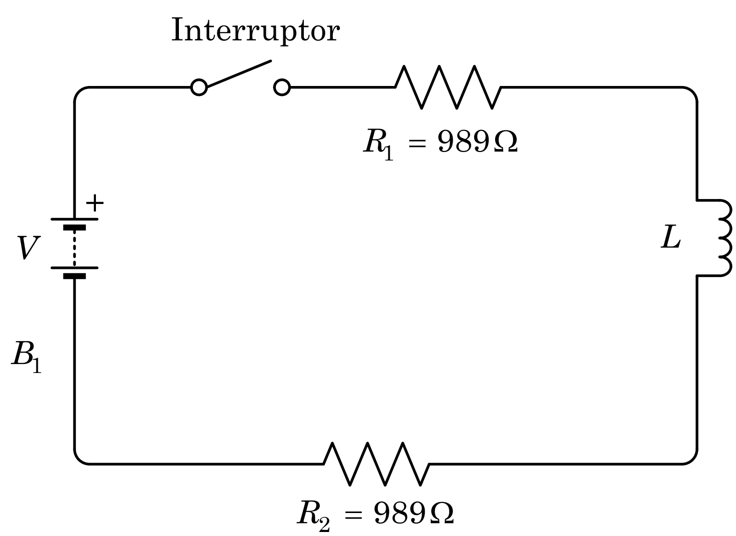
a. ¿Cuánto trabajo realiza la batería entre $t = 0.00\ \mathrm{s}$ y $t = 9.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$?

b. ¿Qué valor tiene la potencia disipada por la resistencia equivalente del circuito a los $9.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}$?

$V = 39.0\ \mathrm{V}$

$R_1 = R_2 = 989\,\Omega$

$L = 12.0\ \mathrm{H}$



SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Problema 1: (25 puntos)

Protones son acelerados a partir del reposo por medio de una diferencia de potencial de $14\,\mathrm{kV}$. Al salir del acelerador, los protones entran a un selector de velocidad que consta de un capacitor de placas paralelas (placas cuadradas de $5\,\mathrm{cm}$ por lado) y $1\mathrm{mm}$ de distancia de separación entre placas; la densidad de carga en sus placas de $1.598\times10^{-5}\,\mathrm{C/m^2}$. El capacitor se encuentra en una región (Región 1) donde existe un campo magnético constante dirigido perpendicularmente en relación con el campo eléctrico entre las placas del capacitor y con el vector velocidad de los protones. Los protones entran en un punto equidistante entre las dos placas del capacitor.

Al salir del selector de velocidad los protones entran en otra región (Región 2) donde solamente existe un campo magnético de $0.5\,\mathrm{T}$ de magnitud. El vector velocidad de los protones forma un ángulo de $60°$, respecto al vector de campo magnético de esa región.

a. ¿Qué campo magnético se requiere para que los protones se muevan a través del selector de velocidad sin desviarse? Dibuje las direcciones de los vectores: velocidad, campo magnético y campo eléctrico.

b. ¿Al entrar en la Región 2, indique qué tipo de movimiento describen los protones y calcule el periodo del movimiento, en caso aplique el paso de la trayectoria y el radio de ésta?

Solución

a. En el selector de velocidad los protones experimentan dos fuerzas, una debida al campo eléctrico y otra debida al campo magnético. Los protones no se desvían de su trayectoria cuando estas fuerzas son de igual magnitud y opuestas en dirección:

$$F_B = F_E$$

$$qv \times B = qE$$

$$B = \frac{E}{v}$$

En la ecuación anterior el campo eléctrico es el producido entre las placas del capacitor:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{1.598\times10^{-5}}{8.85\times10^{-12}} = 1{,}805{,}650\,\mathrm{V/m}$$

Y la velocidad la encontramos trabajando la parte del movimiento de los protones en el acelerador de partículas.

$$qV_o = qV_f + \frac{1}{2}m_p v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2q\left(V_o - V_f\right)}{m_p}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\left(1.6\times10^{-19}\right)(14000)}{1.67\times10^{-27}}} = 1{,}637{,}875\,\text{m/s}$$

Entonces la intensidad de campo magnético que se requiere es:

$$B = \frac{E}{v} = \frac{1{,}805{,}650}{1{,}637{,}875} = 1.10\ \text{T}$$

b. Para que no se desvíen los protones de su trayectoria se requiere una magnitud de campo magnético de 1.1 Teslas.

Al entrar a la región dos, los protones experimentarán una fuerza magnética debida a la componente perpendicular de su velocidad respecto al campo, la componente de la velocidad paralela al campo hará que los protones avancen en esa dirección describiendo una trayectoria helicoidal.

El radio de la trayectoria se puede calcular aplicando la segunda ley de Newton,

$$\sum F_R = ma_{\text{centripeta}}$$

$$qv\,\text{sen}\theta B = m_p\frac{(v\,\text{sen}\theta)^2}{R}$$

Entonces despejando para el radio:

$$R = \frac{m_p v\,\text{sen}\,\theta}{qB} = \frac{1.67\times10^{-27}(1637875)\,\text{sen}\,60}{1.6\times10^{-19}(0.5)} = 0.0296\,\text{m}$$

El período del movimiento es:

$$T = \frac{2\pi R}{v\,\text{sen}\,\theta} = \frac{2\pi(0.0296)}{(1637875)\,\text{sen}\,60} = 0.1312\ \mu\text{s}$$

Y el paso de la trayectoria es:

$$p = (1637875)\,\text{sen}\,60\times\left(0.1312\times10^{-6}\right) = 0.186\ \text{m}$$

Problema 2: (25 puntos)

El campo magnético a través de una espira de alambre de una vuelta, de 16 cm de radio y 88.5Ω de resistencia, cambia con el tiempo como se muestra en la figura

- En el intervalo de 0 a 2 el campo magnético está dado por la expresión

$$B(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2$$

- En el intervalo de 2 a 4 el campo magnético es constante

$$B(t) = 0.5$$

- En el intervalo de 4 a 8 el campo magnético decae linealmente.

Calcule la corriente en la espira en función del tiempo. El campo magnético es uniforme y está en ángulo recto con el plano de la espira.

Solución

El área de la espira es constante y vale $A = \pi r^2 = \pi(0.16)^2$

El ángulo θ es cero, por las condiciones del problema

Como el campo magnético cambia con el tiempo, el flujo magnético cambiará con él

$$\Phi_B = B(t)A\cos\theta = B(t)\cdot\pi(0.16)^2\cdot 1$$

De esto, al derivar del flujo obtenemos la fem E y dependerá de la derivada del campo magnético, de la siguiente manera

$$\mathsf{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\pi(0.16)^2\frac{dB(t)}{dt}$$

Derivadas del campo magnético por intervalos

$0 < t < 2$

$$\frac{dB(t)}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t$$

$2 < t < 4$

$$\frac{dB(t)}{dt} = 0$$

$4 < t < 8$

$$\frac{dB(t)}{dt} = \frac{0-0.5}{8-4} = -\frac{0.5}{4} = -0.125$$

Tenemos la siguiente relación $\mathsf{E} = RI$ en donde R es la resistencia e I es la corriente, al despejar I obtenemos para cada intervalo

$$I = \frac{\mathsf{E}}{R} = -\pi(0.16)^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{dB(t)}{dt} = -\pi(0.16)^2 \cdot \frac{1}{8.5} \cdot \frac{dB(t)}{dt}$$

Calculando la constante

$$-\pi(0.16)^2 \cdot \frac{1}{8.5} = -0.009461738$$

Procedemos a determinar la corriente inducida por intervalo de tiempo

$0 < t < 2$

$$I = -0.009461738\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}t\right) = 0.002365434(2-t)$$

$2 < t < 4$

$$I = 0$$

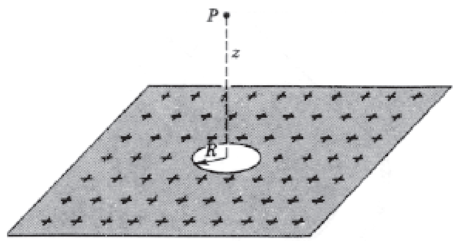
$4 < t < 8$

$$I = -0.125(-0.009461738) = 0.001182717$$

Problema 3: (25 puntos)

Una superficie no conductora, grande y plana, tiene una densidad uniforme de carga σ. En el centro de la lámina se ha hecho un pequeño orificio circular de radio R, como se muestra en la figura adjunta. Desprecie todos los efectos de borde o frontera.

Para los incisos c) y d), tome la densidad superficial de carga $\sigma = 5\,\mu\ \mathrm{C/m^2}$ y el radio del agujero $R = 10\,\mathrm{cm}$.



a. A partir que el campo de un aro cargado con carga Q y de radio R, a una distancia z sobre el eje de simetría a partir de centro del aro, el cual está dado por:

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

b. Calcule el campo eléctrico en el punto P como función de z, para la distribución de carga descrita en el enunciado. ¿Tendrá un máximo este campo eléctrico?

c. Sabiendo que $\boldsymbol{V}(z = 0) = 0\ \mathrm{V}$, calcule $\boldsymbol{V}(z)$ para puntos sobre el eje de simetría de la distribución.

d. Qué velocidad alcanzará un electrón en el centro del orificio circular, si se suelta en un punto $z = 2R$

e. Calcule el período de las pequeñas oscilaciones de un electrón alrededor de $z = 0$.

Solución

a. A partir del campo para un aro, se puede escribir el diferencial de campo para un disco de radio R, sabiendo que $dq = \sigma(2\pi r\,dr)$ y que se debe sustituir $R = r$, dado que el radio es variable, por lo que:

$$dE(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\sigma(2\pi r dr)}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Integrando $dE(z)$ obtenemos $E(z)$, de la siguiente manera:

$$E(z) = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{(2\pi r dr)}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]$$

(Otra opción es restar de un plano infinito el campo de un disco, obteniéndose el mismo resultado).

Este campo posee un mínimo que es cero en $z = 0$, y posteriormente crece de manera asintótica hasta alcanzar el valor $E(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

b. Sabiendo que $\boldsymbol{V}(z = 0) = 0\ V$. $\boldsymbol{V}(z)$ se calcula a partir de:

$$\boldsymbol{V}(z) - \boldsymbol{V}(0) = -\int_0^z E(u)\,du = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{u}{\sqrt{R^2+u^2}}\right]du$$

$$\boldsymbol{V}(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+u^2}\right]_0^z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R - \sqrt{R^2+z^2}\right]$$

c. La velocidad que alcanza un electrón si se suelta en el punto $z = 2R$ sobre el eje de simetría, se calcula utilizando el teorema de la conservación de la Energía, de la siguiente manera:

$$\Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}mv^2 + (-e)(0 - \boldsymbol{V}(z = 2R)) = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} \times \left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R\left(\sqrt{5}-1\right)\right]\right]} = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}R\left(\sqrt{5}-1\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{\left(1.6\times10^{-19}\right)\left(5\times10^{-6}\right)}{\left(9.1\times10^{-31}\right)\left(8.85\times10^{-12}\right)}(0.1)\left(\sqrt{5}-1\right)}\ \text{m/s} = 110.81\times10^6\ \text{m/s}$$

d. Para calcular el período de las pequeñas oscilaciones, se expande en serie de Taylor la energía potencial del electrón alrededor de $z = 0$, el coeficiente del término cuadrático permite la determinación de la constante k de la fuerza restitutiva. $U(z) = -e\boldsymbol{V}(z) = \dfrac{\sigma e}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - R\right]$

$$U(z) = -e\boldsymbol{V}(0) + \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]_{z=0} z + \frac{1}{2}\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\right]_{z=0} z^2 + \ldots$$

$$U(z) = +\frac{1}{2}\left[\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0 R}\right]z^2 + \ldots = \frac{1}{2}[k]z^2$$

Por lo que la frecuencia para pequeñas oscilaciones del electrón, dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon_0 R}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}\right)\frac{5\times10^{-6}}{\left(8.85\times10^{-12}\right)(0.1)}}\ rad/s = 704.7\times10^6\ rad/s$$

Problema 4: (25 puntos)

El circuito mostrado en la figura, representa una bocina de alarma tipo buzzer, utilizada comúnmente en los sistemas de seguridad, la cual se compone de una bobina interna con $L = 12.0$ H conectada a una batería que proporciona un voltaje constante de $V = 39.0$ V y a un interruptor conmutador. Si el interruptor se cierra en el instante $t = 0.00$ s, calcule lo siguiente:

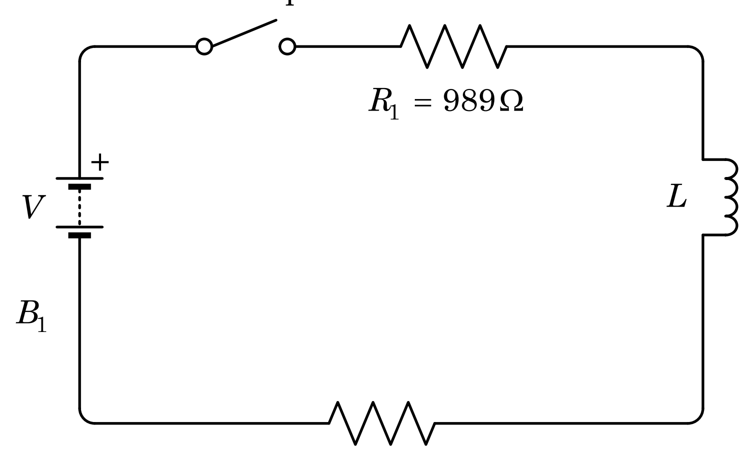
a. ¿Cuánto trabajo realiza la batería entre $t = 0.00$ s y $t = 9.00 \times 10^{-3}$ s?

b. ¿Qué valor tiene la potencia disipada por la resistencia equivalente del circuito a los 9.00×10^{-3} s?

$V = 39.0$ V

$R_1 = R_2 = 989\,\Omega$

$L = 12.0$ H



Solución

Datos:

V=39.0(V)

$R_1 = R_2 = 989\ \Omega$

$L = 12.0$ H

Calculando datos previos:

$$R_{\text{equivalente}} = R_1 + R_2 = 1978\ \Omega$$

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R} = \frac{12.0}{1978} = 6.07 \times 10^{-3}\text{s}$$

a. Potencia en función del tiempo para obtener el trabajo:

$$P = Vi(t)$$

Con lo anterior se observa que $i(t)$ representa la corriente del circuito como función del tiempo, la cual puede quedar expresada como:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

La constante de tiempo es $\tau = \frac{L}{R}$ y su valor se ha calculado con antelación. El trabajo realizado por la batería, puede ser representado por la integral de la potencia valuada en el rango de tiempo en el que opera el circuito.

$$W = \int_0^{t''} P(t)\,dt$$

Del modelo anterior t'' representa el tiempo posterior al cierre del interruptor.

Realizando operación y substitución:

Al substituir los modelos anteriores, se llega a lo siguiente

$$W = \int_0^{t''} \frac{V}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)dt$$

Se opera la integral y se obtiene lo siguiente:

$$W = \frac{V^2}{R}\left[t + \tau e^{\frac{-t}{\tau}}\right]_0^{t''}$$

$$= \frac{V^2}{R}\left[t'' + \tau\left(e^{\frac{-t}{\tau}} - 1\right)\right]$$

Substituyendo y evaluando:

$$W = \frac{39.0^2}{1978}\left[9.00\times10^{-3} + 6.07\text{x}10^{-3}\left(e^{\frac{-9.00\times10^{-3}}{6.07\text{x}10^{-3}}} - 1\right)\right]$$

$$= 3.32\times10^{-3}\ \text{Joule}$$

b. La potencia en la resistencia equivalente:

$$P = i(t)^2 R$$

De lo anterior se sabe que la corriente es dependiente del tiempo de la siguiente manera:

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

Por lo tanto la expresión para calcular la potencia disipada en la resistencia equivalente del circuito es:

$$P = \left[\frac{V}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right]^2 R = \frac{V^2}{R}\left[\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right]^2$$

Substituyendo Valores:

$$P = \frac{39^2}{1978}\left[\left(1 - e^{\frac{-9.00\times10^{-3}}{6.07\text{x}10^{-3}}}\right)\right]^2$$

$$= 459 \times 10^{-3} \text{ W}$$

4.3 QUÍMICA

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE QUÍMICA NIVEL I

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presentan dos series generales de problemas, con instrucciones y valor adjunto. Está permitido el uso de Tabla Periódica, calculadora (no programable y sin tapa). **No está permitido el uso de celular, tablets u otro aparto electrónico**. El tiempo de la prueba es de 120 minutos.

PRIMERA SERIE: Selección múltiple (40 pts.)

Consta de 20 preguntas de selección múltiple, todas corresponden a la parte teórica. Subraye la respuesta correcta. Si necesita razonar una respuesta, hágalo en la parte de atrás de la hoja, indicando el número de inciso que se razona.

1. De los siguientes, ¿cuál es una propiedad intensiva?

- **a.** Masa
- **b.** Temperatura de ebullición
- **c.** Peso
- **d.** Volumen
- **e.** Cantidad

2. Si la materia es uniforme y no se puede separar en otras sustancias por medios de separación físicos, pero se puede descomponer por medios de separación química, se trata de:

- **a.** Una mezcla heterogénea
- **b.** Un elemento
- **c.** Una mezcla homogénea
- **d.** Un compuesto
- **e.** Una mezcla de elementos

3. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a. La masa es la medida de la cantidad de sustancia
b. La temperatura mide la energía cinética promedio
c. La velocidad es una unidad básica
d. Los cambios de estado se consideran cambios químicos
e. Ninguna es verdadera

4. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a. El número n representa la energía cinética del e^-
b. La electronegatividad es más pequeña cuando A es mayor
c. Los metales de transición interna ocupan la reempe S
d. El azúcar tiene enlace covalente
e. En el subnivel d se puede colocar un máximo de 14 e^-

5. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

a. El número cuántico secundario o azimutal representa la energía potencial del electrón
b. El cuarto número cuántico representa el campo magnético generado por el electrón
c. El Hamiltoniano representa la energía mecánica de la reempe para un electrón diferencial
d. La energía del fotón es directamente proporcional a la longitud de onda
e. Ninguna de las anteriores es verdadera

6. Número cuántico principal para una energía potencial de -1.50 eV.

a. 7
b. 3
c. 5
d. 0
e. Ninguna es correcta

7. Un ion metálico, M^{+3}, es isoelectrónico con el Ne. ¿Cuál es el metal?

a. Mn
b. Al
c. Be
d. N
e. P

8. El ion de $^{32}P^{-3}$ tiene:

a. 15 protones y 18 neutrones
b. 18 protones y 15 neutrones
c. 15 protones y 17 neutrones
d. 17 protones y 15 neutrones
e. Ninguno de los anteriores

9. ¿Cuál de las siguientes proposiciones sobre la electronegatividad es falsa?

a. En un periodo de elementos, la electronegatividad aumenta con el número atómico
b. Dentro de un grupo, la electronegatividad disminuye a medida que el número atómico aumenta
c. En un grupo, la electronegatividad aumenta a medida que el número atómico disminuye
d. En un período de elementos, la electronegatividad disminuye con el aumento del número atómico
e. La electronegatividad aumenta con el aumento del número de masa

10. La Tabla Periódica está organizada de acuerdo a:

a. Cómo se fueron descubriendo los elementos
b. El número de neutrones en el núcleo del elemento
c. El número atómico de cada elemento
d. La carga eléctrica de cada elemento
e. El peso atómico de cada elemento

11. Los elementos del grupo 7A se conocen como:

a. Calcógenos
b. Metales alcalinotérreos
c. Metales alcalinos
d. Halógenos
e. Gases nobles

12. ¿Qué par de elementos esperaría que tuviera mayor similitud en cuanto a sus propiedades físicas y químicas?

a. O, S
b. C, N
c. K, Ca
d. H, He
e. Si, P

13. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?

- **a.** El enlace covalente se presenta entre un anión y un catión
- **b.** En el enlace iónico hay transferencia de electrones
- **c.** Los elementos alcalinos de períodos 6 y 7 establecen enlaces covalentes con los halógenos
- **d.** En el enlace metálico, los electrones de los niveles internos se mueven libremente
- **e.** El enlace presente en H_2 se considera covalente polar

14. ¿Cuál de los siguientes compuestos posee un átomo que tiene octeto incompleto?

- **a.** CCl_4
- **b.** CaO
- **c.** NO
- **d.** Cl_2
- **e.** CO_2

15. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

- **a.** Los metales de transición pueden formar oxácidos
- **b.** El óxido de calcio solo forma hidróxidos al agregarle agua
- **c.** Según la electroquímica las reacciones pueden exotérmicas
- **d.** Según el mecanismo las reacciones pueden ser de metátesis
- **e.** El número de oxidación del carbono en el metano es menos cuatro

16. La siguiente reacción se puede clasificar como: $2Mg_{(s)} + 2O_{2\,(g)} \rightarrow 2MgO_{(s)}$

- **a.** Síntesis
- **b.** Combustión
- **c.** Metátesis
- **d.** Oxido – Reducción
- **e.** a y d son correctas

17. Para un mol de cloro gaseoso, se puede decir:

- **a.** Hay $6.022 \cdot 10^{23}$ átomos de cloro gaseoso
- **b.** Hay 70.906 g de cloro gaseoso
- **c.** Hay $6.022 \cdot 10^{23}$ moléculas de cloro gaseoso
- **d.** b y c son correctas
- **e.** Ninguna es correcta

18. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera cuando se aplica a un gas ideal?

- **a.** En las mismas condiciones de T y p, 1 L O_2 y 1 L N_2tienen el mismo número de moles
- **b.** La representación matemática $p_1 \cdot V1 = p_2 \cdot V_2$describe un proceso isocórico
- **c.** Siempre se pierde energía cinética entre cada choque.
- **d.** El N_2 a TPS tiene una densidad de 0.81 g/L
- **e.** a y c son correctas

19. Se define como la relación entre la fuerza por unidad de área:

- **a.** Atmósfera
- **b.** Pascal
- **c.** Presión
- **d.** Libras fuerza
- **e.** Todas las anteriores

20. La ley que se enuncia: "Si la presión se mantiene constante, el volumen de una determinada cantidad de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta" es:

- **a.** Ley de Boyle
- **b.** Ley de Charles
- **c.** Ley de Avogadro
- **d.** Ley combinada
- **e.** Ley del gas ideal

Segunda Serie (60 puntos):

Consta de 5 problemas. Resuélvalos correctamente en su cuadernillo de trabajo. **Deje constancia escrita, objetiva, lógico, explicita y ordenada de todo su procedimiento y todas sus suposiciones**. Resalte sus resultados y ecuaciones más importantes de forma inequívoca y anote la respuesta específica en el temario.

Problema 1 (Análisis dimensional y densidad)

El cobre tiene densidad de 8.94 g/cm^3. Un lingote de cobre con masa de 57 kg se forma como alambre con diámetro de 9.50 mm. ¿Qué longitud de alambre, en metros, se podría producir?

Problema 2 (Energía)

La queratectomíafotorrefractiva (PRK) es un procedimiento quirúrgico basado en láser que corrige la miopía y la hipermetropía (visión borrosa). Se utiliza un láser el cual emite una luz que tiene una energía de 1.90 eV, en impulsos de 20.0 ms de duración. Durante cada impulso, se obtienen 3.95×10^{16} fotones. Determine la potencia y la corriente generada en cada impulso.

Problema 3 (Enlace químico)

Elabore la estructura de Lewis del $NaHCO_3$. Señale y escriba el nombre de los enlaces presentes entre cada uno de los átomos.

Problema 4 (Estequiometría)

Una muestra de magnalio (aleación de aluminio y magnesio) posee 400 g de aluminio, se trata con ácido sulfúrico concentrado y se obtiene 445.70 g de sulfato de magnesio ($MgSO_4$) con un rendimiento del 90 %.

$$Mg_{(s)} + H_2SO_{4(ac)} \rightarrow H_{2(g)} + MgSO_{4(ac)}$$

a. ¿Cuál es el porcentaje m/m de magnesio en la aleación?

b. ¿Cuál es el volumen de la solución de ácido sulfúrico que reacciona experimentalmente si la solución tenía 9 mol de ácido sulfúrico puro por litro de solución?

Problema 5 (Gases)

Determine el volumen en estado seco a TPN del Oxígeno en 400 mL de una mezcla de Nitrógeno y Oxígeno (80% de N_2 y 20% de O_2 en volumen) medidos sobre agua a 30ºC y 720mmHg. La presión de vapor de agua a 30ºC es de 31.8 mmHg.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

PRIMERA SERIE

1.	b	**6.**	b	**11.**	d	**16.**	e
2.	d	**7.**	b	**12.**	a	**17.**	d
3.	b	**8.**	c	**13.**	b	**18.**	a
4.	d	**9.**	d	**14.**	c	**19.**	c
5.	c	**10.**	c	**15.**	c	**20.**	b

SEGUNDA SERIE

Problema 1 (Análisis dimensional y densidad)

El cobre tiene densidad de 8.94 g/cm³. Un lingote de cobre con masa de 57 kg se forma como alambre con diámetro de 9.50 mm. ¿Qué longitud de alambre, en metros, se podría producir?

Solución

$$57\ \text{kg} \cdot \frac{1000\ \text{g}}{1\ \text{kg}} = 57{,}000\ \text{g Cu}$$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{9.50 \times 10^{-3}\ \text{m}}{2} = 4.75 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

$$V = \pi R^2 h \ \Rightarrow\ h = \frac{V}{\pi R^2}$$

$$h = \frac{6.376 \times 10^{-3}\ \text{m}^3}{\pi\left(4.75 \times 10^{-3}\ \text{m}\right)^2} = 90.00\ \text{m}$$

Se podrían producir 90.00 m de alambre de cobre.

Problema 2 (Energía)

La queratectomía fotorrefractiva (PRK) es un procedimiento quirúrgico basado en láser que corrige la miopía y la hipermetropía (visión borrosa). Se utiliza un láser el cual emite una luz que tiene una energía de 1.90 eV, en impulsos de 20.0 ms de duración. Durante cada impulso, se obtienen 3.95×10^{16} fotones. Determine la potencia y la corriente generada en cada impulso.

Solución

$$E_f = 1.90\ \text{eV} \cdot \frac{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 3.04 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

$$t = 20.0\ \text{ms} = 20.0 \times 10^{-3}\ \text{s} = 0.02\ \text{s}$$

$$E_T = 3.95 \times 10^{16}\ \text{fot} \cdot \frac{3.04 \times 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{fot}} = 0.012\ \text{J}$$

$$P = \frac{E_T}{t} = \frac{0.012\ \text{J}}{0.02\ \text{s}} = 0.6\ \text{W}$$

La potencia generada en cada impulso es de 0.6 W.

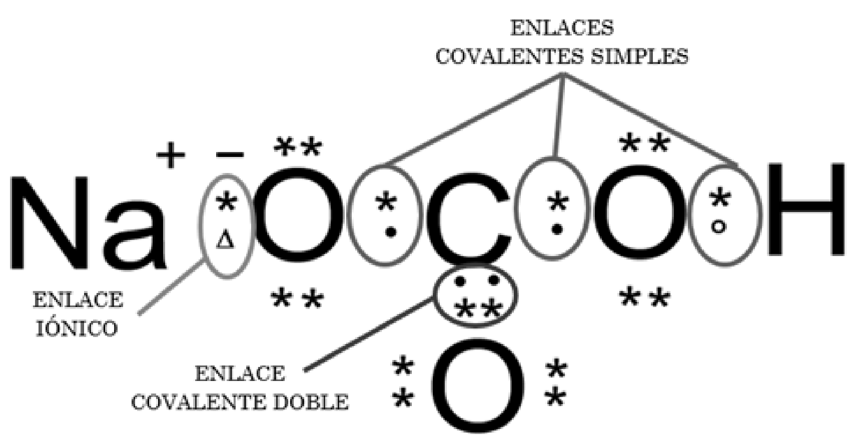
$$i = \frac{Q}{t} = 0.6\,\frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{fot}}{3.04 \times 10^{-19}\ \text{J}} \cdot \frac{1\ e^-}{1\ \text{fot}} \cdot \frac{1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}}{1\ e^-} = 0.32\,\frac{\text{C}}{\text{s}} = 0.32\ \text{A}$$

La corriente generada en cada impulso es de 0.32 A.

Problema 3 (Enlace químico)

Elabore la estructura de Lewis del $NaHCO_3$. Señale y escriba el nombre de los enlaces presentes entre cada uno de los átomos.

Solución



Problema 4 (Estequiometría)

Una muestra de magnalio (aleación de aluminio y magnesio) posee 400 g de aluminio, se trata con ácido sulfúrico concentrado y se obtiene 445.70 g de sulfato de magnesio ($MgSO_4$) con un rendimiento del 90 %.

$$Mg_{(s)} + H_2SO_{4(ac)} \rightarrow H_{2(g)} + MgSO_{4(ac)}$$

a. ¿Cuál es el porcentaje m/m de magnesio en la aleación?

b. ¿Cuál es el volumen de la solución de ácido sulfúrico que reacciona experimentalmente si la solución tenía 9 mol de ácido sulfúrico puro por litro de solución?

Solución

a.

$$R_t = \frac{R_e}{\%\ R} \cdot 100 = \frac{445.70 \text{ g } MgSO_4}{90} \cdot 100 = 495.22 \text{ g } MgSO_4$$

$$495.22 \text{ g } MgSO_4 \cdot \frac{1 \text{ mol } MgSO_4}{120.35 \text{ g } MgSO_4} \cdot \frac{1 \text{ mol Mg}}{1 \text{ mol } MgSO_4} \cdot \frac{24.3050 \text{ g Mg}}{1 \text{ mol Mg}} = 100.01 \text{ g Mg}$$

$$\%\ {}^{m}\!/_{m}\ Mg = \frac{m_{Mg}}{m_{aleación}} \cdot 100 = \frac{100.01 \text{ g Mg}}{400 \text{ g} + 100.01 \text{ g}} \cdot 100 = 20\ \%$$

El porcentaje m/m del magnesio en la aleación es 20 %.

b.

$$445.70 \text{ g } MgSO_4 \cdot \frac{1 \text{ mol } MgSO_4}{120.35 \text{ g } MgSO_4} \cdot \frac{1 \text{ mol } H_2SO_4}{1 \text{ mol } MgSO_4} \cdot \frac{1 \text{ L sln } H_2SO_4}{9 \text{ mol } H_2SO_4} \cdot \frac{1000 \text{ mL sln } H_2SO_4}{1 \text{ L sln } H_2SO_4}$$

$$= 411.48 \text{ mL sln } H_2SO_4$$

El volumen de solución de ácido sulfúrico (9 mol/L) es 411.48 mL.

Problema 5 (Gases)

Determine el volumen en estado seco a TPN del Oxígeno en 400 mL de una mezcla de Nitrógeno y Oxígeno (80% de N_2 y 20% de O_2 en volumen) medidos sobre agua a 30ºC y 720mmHg. La presión de vapor de agua a 30ºC es de 31.8 mmHg.

Solución

TPN

$p_{TPN} = 1 \text{ atm}$

$T_{TPN} = 273.15 \text{ K}$

$V = 400 \text{ mL } O_2,\ N_2$

$p_{vap} = 31.8 \text{ mmHg}$

$T = 30\,°C = 303.15 K$

p=720 mmHg

$$p_{gas} = 720 \text{ mmHg} - 31.8 \text{ mmHg} = 688.2 \text{ mmHg} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ mmHg}}$$

$$= 0.9055 \text{ atm } O_2,\ N_2$$

$$p_{O_2} = 0.9055 \text{ atm } O_2,\ N_2 \cdot \frac{20}{100} = 0.181 \text{ atm } O_2$$

$$V_{O_2} = 400 \times 10^{-3} \text{L} \cdot \frac{20}{100} = 0.08 \text{ L } O_2$$

$$\frac{p_{O_2} \cdot V_{O_2}}{T} = \frac{p_{TPN} \cdot V_{O_2,\,TPN}}{T_{TPN}} \Rightarrow V_{O_2,\,TPN} = \frac{p_{O_2} \cdot V_{O_2} \cdot T_{TPN}}{T \cdot p_{TPN}}$$

$$V_{O_2,\,TPN} = \frac{0.181 \text{ atm } O_2 \cdot 0.08 \text{ L } O_2 \cdot 273.15 \text{ K}}{303.15\text{K} \cdot 1 \text{ atm}} = 0.01305 \text{ L } O_2$$

El volumen de oxígeno recuperado en estado seco a TPN es de 0.01305 L.

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE QUÍMICA NIVEL II

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presentan dos series generales de problemas, con instrucciones y valor adjunto. Está permitido el uso de Tabla Periódica, calculadora (no programable y sin tapa). **No está permitido el uso de celular, tablets u otro aparto electrónico**. El tiempo de la prueba es de 120 minutos.

PRIMERA SERIE: Selección múltiple (40 pts.)

Consta de 20 preguntas de selección múltiple, todas corresponden a la parte teórica. Subraye la respuesta correcta. Si necesita razonar una respuesta, hágalo en la parte de atrás de la hoja, indicando el número de inciso que se razona.

1. Tiene en existencia una disolución de peróxido de hidrógeno 14,8 M, ¿Cuántos mililitros de esta disolución debe diluir para preparar 1 L de peróxido de hidrógeno0,250 M y cuanto de agua?

- **a.** 8,45 mL; 991,55 mL de agua
- **b.** 16,9 mL; 983,1 mL de agua
- **c.** 3,7 mL; 996,3 mL de agua
- **d.** 0,0037 L; 0,9963 L de agua
- **e.** 250 mL; 750 mL de agua

2. ¿Cuál de los siguientes es un ácido triprótico?

- **a.** Ácido nítrico
- **b.** Ácido clorhídrico
- **c.** Ácido fosfórico
- **d.** Ácido fluorhídrico
- **e.** Ácido sulfúrico

3. Muestras individuales de una disolución de una sal desconocida, se trata con disoluciones diluidas de HBr, H_2SO_4 y NaOH, en todos los casos se forman precipitados. ¿Cuál de los siguientes cationes podría tener la disolución?

a. K^+

b. Pb^{+2}

c. Ba^{+2}

d. NH_4^+

e. Na^+

4. ¿Cuál de las siguientes representaciones describe mejor una disolución de Na2SO4?

a. $2Na^+$ SO_4^{-2}

b. $2Na^+$ S^{-6} $4O^{-2}$

c. Na^+ $2SO_4^-$

d. Na^{+4} SO^{-2}

e. Na^{+2} SO_4^{-2}

5. Un electrolito débil existe predominantemente como ______ en la solución

a. Átomos

b. Iones

c. Moléculas

d. Electrones

e. Isótopos

6. ¿Cuál de las siguientes disoluciones contiene la concentración más elevada de protones (H^+) en solución?

a. LiOH 0,2 M

b. HCl 0,2 M

c. CH_3OH 0,2 M (alcohol metílico)

d. NH_3 0,2 M

e. H_2SO_4 0,2 M

7. Seleccione la alternativa que corresponde la adición de CO en la siguiente reacción en equilibrio

$$2C_{(s)} + O_{2(g)} \leftrightarrow 2CO_{(g)} \qquad \Delta H = -221\,KJ$$

a. El equilibrio se desplaza hacia la derecha aumentando la cantidad de $CO_{(g)}$.

b. No tiene efecto sobre el equilibrio

c. El equilibrio tiende a eliminar el exceso de $CO_{(g)}$ agregado, desplazándose hacia la izquierda

d. Es imposible que se reestablezca nuevamente el equilibrio

e. Se forman otros productos además del $CO_{(g)}$ y el equilibrio se desplaza hacia la derecha

8. Seleccione que efectos producirá sobre el equilibrio un aumento de la temperatura:

$$PCl_{5(g)} \leftrightarrow PCl_{3(g)} + Cl_{2(g)} \qquad \Delta H = 92.79\,KJ$$

a. El equilibrio se desplazará hacia la izquierda, en el sentido en el que libera calor

b. El equilibrio se desplazará hacia la derecha, en el sentido en que absorbe calor

c. No tiene efecto sobre el equilibrio

d. Es imposible que se reestablezca nuevamente el equilibrio

e. Aumenta la cantidad de sólidos en la reacción

9. Una lámina de metal puro en contacto con una solución acuosa 1M de sus iones a 25 °C y 1 atm, constituye una semicelda:

a. Normal

b. Patrón

c. Voltaica

d. Galvánica

e. a y b son correctas

10. La diferencia de potencial que se produce en una reacción química medido con un voltímetro se denomina

a. Fuerza electromotriz

b. Fuerza eléctrica

c. Voltaje normal

d. Voltaje de reacción

e. a y c son correctas

11. En una reacción espontánea, el E° de oxidación más el E° de reducción deben dar un resultado:

- **a.** Estándar
- **b.** Neutro
- **c.** Negativo
- **d.** Positivo
- **e.** a y b son correctas

12. La diferencia de potencial entre dos electrodos de una celda galvánica proporciona:

- **a.** La corriente eléctrica
- **b.** Los electrones transferidos
- **c.** La fuerza electromotriz
- **d.** La espontaneidad de la reacción
- **e.** a y b son correctas

13. El sistema cristalino Ortorrómbico, tiene las siguientes longitudes de ejes y ángulos:

- **a.** $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$
- **b.** $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$
- **c.** $a \neq b \neq c$,$\alpha = \beta = \gamma = 90°$
- **d.** $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$
- **e.** Todas las anteriores

14. Subraye cuáles redes cristalinas pertenecen a las 14 redes Bravais:

- **a.** Sistema cúbico
- **b.** Cúbica simple
- **c.** Ortorrómbica centrada en las caras
- **d.** b y c son correctas
- **e.** Todas las anteriores son correctas

15. La relación entre el tamaño de la celda unidad (longitud de la arista) y el radio atómico para la estructura metálica centrada en las caras es:

- **a.** $a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$
- **b.** $a = \frac{4r}{\sqrt{2}}$
- **c.** $a = 2r$
- **d.** $a = r^3$
- **e.** Todas las anteriores son correctas

16. Dentro de las reglas de reflexión de la difracción de rayos X en las estructuras metálicas comunes, la difracción tiene lugar cuando:

a. h, k, l, no todos pares o no todos impares

b. h+k+l = número impar

c. h+k+l = número par

d. h, k, l, todos pares o todos impares

17. ¿Cuál de las siguientes es cierta para la reacción química entre el cinc y el ácido clorhídrico (reacción exotérmica)?

a. Se desprende calor al ambiente

b. Se absorbe calor del ambiente

c. El cambio de entalpia es positivo

d. La entalpia de los productos es mayor que la de los reactivos

e. Ninguna es correcta

18. ¿Cuál de las siguientes es cierta para una reacción química endotérmica?

a. Se desprende calor al ambiente

b. El cambio de entalpia es positivo

c. El cambio de entalpia es negativo

d. La entalpia de los productos es menor que la de los reactivos

e. Ninguna es correcta

19. Para la combustión de un mol de un gas se despende 890 KJ, ¿Cuánto calor se desprende para la combustión de 3/2 de mol de gas?

a. La misma ya que es el mismo gas

b. La misma proporción que la de los moles que participan en la combustión

c. El triple de calor desprendido para un mol

d. La mitad del calor requerido para un mol

e. Ninguna es correcta

20. Para la siguiente reacción

$$NH_4NO_{3(s)} \rightarrow N_2O_{(g)} + 2H_2O_{(g)} \qquad \Delta H = -37.0\,KJ$$

a. 1 mol de $NH_4NO_{3(s)}$ ≈ -37,0 KJ

b. 1 mol de $N_2O_{(g)}$ ≈ -37,0 KJ

c. 1 mol de $H_2O_{(g)}$ ≈ -37,0 KJ

d. a y b son correctas

e. Ninguna es correcta

Segunda Serie (60 puntos):

Consta de 5 problemas. Resuélvalos correctamente en su cuadernillo de trabajo. **Deje constancia escrita, objetiva, lógico, explicita y ordenada de todo su procedimiento y todas sus suposiciones**. Resalte sus resultados y ecuaciones más importantes de forma inequívoca y anote la respuesta específica en el temario.

Problema 1 (Soluciones)

Se requiere preparar una solución etanol-agua, con una densidad de 850 Kg/m^3, si se tienen 550 mL de agua

a. Exprese el porcentaje masa-masa (% m/m) de la solución

b. ¿Cuántos mililitros de la solución original hay que agregar para preparar 750g de solución diluida al 32 % m/m?

Problema 2 (Disociación de ácidos)

¿Cuál será la concentración de reactivos y productos en una disolución de ácido acético 0,4 M? $\text{Ka} = 1.8 \times 10^{-5}$

Problema 3 (Electroquímica)

Determine la constante de equilibrio a 25 °C para la reacción de óxido-reducción

$$S_4O^{-2}_{6(ac)} + Cr^{+2}_{(ac)} \rightarrow Cr^{+3}_{(ac)} + S_2O^{-2}_{3(ac)}$$

$$S_4O_6^{-2} + 2e^- \rightarrow 2S_2O_3^{-2} \qquad 0{,}17V$$

$$Cr^{+3} + e^- \rightarrow Cr^{+2} \qquad -0{,}50V$$

Problema 4 (Sólidos cristalinos)

Calcule un valor para la energía reticular del cloruro de potasio utilizando la ecuación Born-Landé. Compárela con los valores termodinámicos a partir de la siguiente tabla. Determinando su diferencia en KJ/mol.

Valores de los términos del ciclo de Born-Haber para (KCl) kJ/mol

Término	Valor
ΔH_{atm}	89.1
$I_{1(M)}$	418
½ D(Cl - Cl)	122
-E(Cl)	-349
$\Delta H_{f\ (KCl\ (s))}$	-436.7

Problema 5 (Termoquímica)

Una tabla de aluminio (Cp = 0,902 J/g °C) contiene una bebida carbonatada (Cp = 4,05 J/g °C) de 12 onzas y se desea enfriar a una temperatura de 5 °C. ¿Cuánto calor debe absorberse para enfriar la lata, si la temperatura del ambiente de 28 °C y la masa de la lata de aluminio es de 11 g?

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

PRIMERA SERIE

1.	b	**6.**	e	**11.**	d	**16.**	c
2.	c	**7.**	c	**12.**	c	**17.**	a
3.	b	**8.**	b	**13.**	c	**18.**	b
4.	a	**9.**	e	**14.**	d	**19.**	b
5.	c	**10.**	e	**15.**	b	**20.**	d

SEGUNDA SERIE

Problema 1 (Soluciones)

Se requiere preparar una solución etanol-agua, con una densidad de 850 Kg/m^3, si se tienen 550 mL de agua

a. Exprese el porcentaje masa-masa (% m/m) de la solución

b. ¿Cuántos mililitros de la solución original hay que agregar para preparar 750g de solución diluida al 32 % m/m?

Solución

Para la resolución del problema se utilizarán subíndices, donde para la solución será "*s*"; para el etanol "*e*"; para el agua "*a*" y para la solución diluida "*d*".

Inciso a.

a. Tenemos que la densidad de la solución es

$$\rho = \frac{m_s}{V_s}$$

Tenemos que

$$m_s = m_a + m_e$$

y el volumen

$$V_s = V_a + V_e$$

Además, tenemos que

$$m_a = \rho_a \cdot V_a$$

y que

$$m_e = \rho_e \cdot V_e$$

Si sustituimos en la ecuación de la densidad de la solución tenemos

$$\rho_s = \frac{\rho_a V_a + \rho_e V_e}{V_a + V_e}$$

despejando el V_e tenemos

$$V_e = \frac{V_a\left(\rho_a - \rho_s\right)}{\rho_s - \rho_e};$$

sustituyendo los valores:

$$V_e = \frac{550(1 - 0.85)}{(0.85 - 0.78)} = 1{,}178.57 \text{ mL}$$

Entonces tendremos que

$$m_e = \rho_e \cdot V_e = 0.78\frac{\text{g}}{\text{mL}} \cdot 1{,}178.57\,\text{mL} = 919.27\,\text{g}$$

$$\%\frac{m}{m_e} = \frac{919.27\,\text{g}}{919.27\,\text{g} + 550\,\text{g}} \cdot 100 = 62.56\%$$

b. Como el agua es pura no hay etanol, por lo tanto la concentración de soluto es cero.

$$m_d \cdot \%\frac{m}{m_d} = m_s \cdot \%\frac{m}{m_s} + m_a \cdot \%\frac{m}{m_a} = m_s \cdot 0.6256 + 0$$

$$m_s = \frac{750\,\text{g} \cdot 0.32}{0.6256} = 383.63\,\text{g}$$

Entonces

$$V_s = \frac{386.63\,\text{g}}{0.85\ \text{g/mL}} = 451.33\,\text{mL}$$

Problema 2 (Disociación de ácidos)

¿Cuál será la concentración de reactivos y productos en una disolución de ácido acético 0,4 M? $\text{Ka} = 1.8 \times 10^{-5}$

Solución

Concentraciones en el equilibrio (en mol/L)

CH_3COOH (ac)	$\leftrightarrow$	H^+	CH_3COO^{-1}
0.4 M		0	0
$-x$		$+x$	$+x$
$0.4 - x$		$+x$	$+x$

$$K_a = 1.8 \times 10^{-5} = \frac{x \cdot x}{(0.4 - x)}$$

Se puede aproximar $0.4 - x \approx 0.4$ entonces $x = 2.68 \times 10^{-3}$ M

Las concentraciones finales son:

$$[CH_3COOH] = 0.4 - 2.68 \times 10^{-3} = 0.397\ \text{M}$$

$$[H^+] = [CH_3COO^{-1}] = 2.68 \times 10^{-3}\ \text{M}$$

Problema 3 (Electroquímica)

Determine la constante de equilibrio a 25 °C para la reacción de óxido-reducción

$$S_4O^{-2}_{6(ac)} + Cr^{+2}_{(ac)} \rightarrow Cr^{+3}_{(ac)} + S_2O^{-2}_{3(ac)}$$

$$S_4O_6^{-2} + 2e^- \rightarrow 2S_2O_3^{-2} \qquad 0.17V$$

$$Cr^{+3} + e^- \rightarrow Cr^{+2} \qquad -0.50V$$

Solución

Para obtener la reacción balanceada debe invertirse la reacción 2, multiplicarla por 2 y sumarla a la reacción 1.

$$S_4O_6^{-2} + 2e^- \rightarrow 2S_2O_3^{-2} \qquad 0.17\,V$$

$$2Cr^{+2} \rightarrow 2Cr^{+3} + 2e^- \qquad -(-0.50\,V)$$

$$2Cr^{+2}_{(ac)} + S_4O^{-2}_{6(ac)} \rightarrow 2Cr^{+3}_{(ac)} + 2S_2O^{-2}_{3(ac)} \qquad 0.67\ V$$

Se transfieren 2 moles de e^- por cada unidad de reacción, por cada 2 moles de Cr^{+2} que reaccionan con 1 mol de $S_2O_6{}^{-2}$ para formar 2 moles de Cr^{+3} y 2 moles de $S_2O_3{}^{-2}$, de modo que $n = 2$

Entonces utilizando la ecuación de Nernts a 25 °C tenemos:

$$\log(k) = -\frac{n\varepsilon o}{0.0591} = -\frac{2 \times 0.67}{0.0591}$$

$$k = 4 \times 10^{22}$$

Problema 4 (Sólidos cristalinos)

Calcule un valor para la energía reticular del cloruro de potasio utilizando la ecuación Born-Landé. Compárela con los valores termodinámicos a partir de la siguiente tabla. Determinando su diferencia en KJ/mol.

Valores de los términos del ciclo de Born-Haber para (KCl) kJ/mol

Término	Valor
ΔH_{atm}	89.1
$I_{1(M)}$	418
½ D(Cl - Cl)	122
-E(Cl)	-349
$\Delta H_{f\ (KCl\ (s))}$	-436.7

Solución

$$M^+(g) + Cl^-(g)$$

$$M(g) + Cl(g)$$

$$M(s) + \frac{1}{2}Cl_2(g)$$

El ciclo de Born-Haber apropiado se muestra en la siguiente relación:

$$\Delta H_{f(KCl(s))} = \Delta H_{atm(s)} + I_{1(M)} + \frac{1}{2}D(Cl - Cl) - E(Cl) + Lo_{(MCl(s))}$$

$$Lo_{(MCl(s))} = -717 \text{ kJ/mol}$$

$$Lo = \frac{-1.214 \times 10^5 \cdot V \cdot Z^+ \cdot Z^-}{R^+ + R^-} \cdot \left(1 - \frac{34.5}{R^+ + R^-}\right)$$

Donde para KCl $Z^+ = 1$, $Z^- = 1$, $R^+ = 152$ pm, $R^- = 167$ pm, $V = 2$

$$Lo_{(MCl(s)} = -679 \text{ kJ/mol}$$

La diferencia es

$$717 \text{ kJ/mol} - 679 \text{ kJ/mol} = 38 \text{ kJ/mol}$$

Problema 5 (Termoquímica)

Una tabla de aluminio (Cp = 0,902 J/g °C) contiene una bebida carbonatada (Cp = 4,05 J/g °C) de 12 onzas y se desea enfriar a una temperatura de 5 °C. ¿Cuánto calor debe absorberse para enfriar la lata, si la temperatura del ambiente de 28 °C y la masa de la lata de aluminio es de 11 g?

Solución

$$q\,\text{absorbido} = q\,\text{lata} + q\,\text{bebida}$$

$$q = \mathrm{C_p} \cdot m \cdot \left(T_f - T_i\right)$$

$$\text{masa de bebida} = 12\,\text{onzas} \cdot \frac{28\,\text{g}}{1\,\text{onza}} = 336\,g$$

$$q\,\text{bebida} = 4.05\frac{\text{J}}{\text{g °C}} \cdot 336\,\text{g} \cdot (5°\text{C} - 28°\text{C})$$

$$q\ \text{bebida} = -31{,}298.4\ \text{J}$$

$$q\ \text{lata} = 0.902\frac{\text{J}}{\text{g °C}} \cdot 11\,\text{g} \cdot (5°\text{C} - 28°\text{C}) = -228.206\ \text{J}$$

$$q\,\text{absorbido} = -31{,}298.4\ \text{J} + (-228.206\ \text{J})$$

$$q\ \text{absorbido} = -31{,}526.61\ \text{J}$$

4.4 BIOLOGÍA

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE BIOLOGÍA NIVEL I

INSTRUCCIONES GENERALES:

Esta prueba consta de tres series. Debe responder **TODA** la prueba con tinta azul o negra. Puede utilizar calculadora, pero no celular. El tiempo máximo para responder es de 100 minutos.

PRIMERA SERIE: Selección múltiple (60 pts.)

Instrucciones: Para cada pregunta, elija la opción correcta y márquela con tinta azul o negra en su hoja de respuestas. (1.5 puntos cada respuesta correcta)

1. Una de las características de los seres vivos es el metabolismo. Lea las siguientes afirmaciones y elija cuál o cuáles de ellas se refieren a una vía anabólica.

I Los aminoácidos se someten a desaminación, y sus cadenas carbonadas se convierten en intermediarios metabólicos de la respiración aeróbica.
II Tanto el glicerol como los componentes de ácidos grasos de los lípidos se oxidan como combustible. Los ácidos grasos se convierten en moléculas de acetil CoA por el proceso de beta-oxidación.
III Reacciones de la glucólisis en las que se obtiene energía a partir del metabolismo de la glucosa.
IV Reacciones de fijación del carbono que ocurren en organismos autótrofos.

a. I y II
b. III
c. IV
d. III y IV

2. En la jerarquía de organización de la naturaleza, cada nivel tiene propiedades emergentes o características que no se encuentran en los niveles inferiores. Las propiedades emergentes tales como estructura de edad y tasas de natalidad y de mortalidad se presentan en:

a. Individuos
b. Poblaciones
c. Ecosistemas
d. a y b son correctas

3. El etanol (C_2H_6O) y el dimetil éter (C_2H_6O) son ejemplos de:

a. isómeros estructurales
b. enantiómeros
c. moléculas con enlaces dobles de carbono a carbono
d. moléculas con enlaces triples de carbono a carbono

4. Elija la opción que contiene solamente oligoelementos:

a. B, Se, Ca, F, Si
b. Cl, Si, F, Mo, I
c. Mo, Fe, I, B, F
d. Se, B, F, Co, Si

5. Tome en cuenta la siguiente lista de carbohidratos:

I Ribosa
II Fructosa
III Maltosa
IV Galactosa
V Lactosa

¿Cuáles de los anteriores son monosacáridos?

a. I, II, III
b. I, II, IV
c. II, III, IV
d. II, IV, V

6. El ácido oleico es un ______________ y el ácido linoleico es un ________________.

a. ácido graso monoinsaturado//ácido graso polinsaturado
b. ácido graso polinsaturado//ácido graso monoinsaturado
c. diacilglicerol//triacilglicerol
d. triacilglicerol//monoacilglicerol

7. Un enlace peptídico, se forma entre:

a. dos grupos amino
b. dos grupos carboxilo
c. dos grupos disulfuro
d. ninguna es correcta

8. Un nucleótido está formado por:

a. Un grupo fosfato, una purina y una pirimidina
b. Una base nitrogenada, una pentosa y un grupo fosfato
c. Bases nitrogenadas complementarias (A-T) y (C-G)
d. Una ribosa o una desoxirribosa unidas a una base nitrogenada

9. ¿Cuál de las siguientes estructuras se encuentra en las células animales, pero NO en las vegetales?

a. Centriolos
b. Pared celular
c. Plasmodesmos
d. Tonoplasto

10. En una célula eucariota, la síntesis de ATP a expensas de los carburantes metabólicos (glucosa, ácidos grasos, aminoácidos) ocurre en:

a. El núcleo
b. Los cloroplastos
c. Las mitocondrias
d. Los ribosomas

11. Los flagelos de las bacterias:

a. Consisten en un cuerpo basal y dos pares de microtúbulos
b. Consisten en un cuerpo basal y nueve pares de microtúbulos
c. Presentan movimiento giratorio
d. Siempre presentan disposición lofotrica

12. En el hígado, las/los _______________ se encargan de desintoxicar el alcohol y otros compuestos nocivos, transfiriendo hidrógeno desde las toxinas al oxígeno.

a. lisosomas
b. mitocondrias
c. peroxisomas
d. ribosomas

13. En las células de almacenamiento de numerosas semillas, las reservas de importantes compuestos orgánicos, como las proteínas apiladas, se almacenan en:

a. El aparato de Golgi

b. La vacuola

c. Los cloroplastos

d. Los pirenoides

14. Para diferenciar las distintas membranas de una célula eucariota, basta con tomar en cuenta el siguiente aspecto:

a. Ciertas proteínas son exclusivas de cada membrana.

b. Los fosfolípidos se encuentran únicamente en ciertas membranas.

c. Solamente ciertas membranas de la célula son selectivamente permeables.

d. Únicamente ciertas membranas están constituidas por moléculas anfipáticas.

15. ¿Cuál de los siguientes factores tendería a aumentar la fluidez de la membrana?

a. Un contenido elevado de proteínas dentro de la membrana.

b. Una mayor proporción de fosfolípidos no saturados.

c. Una mayor proporción de fosfolípidos saturados.

d. Una temperatura más baja.

16. De acuerdo con el modelo de la estructura de la membrana de mosaico fluido, las proteínas de la membrana están principalmente:

a. Confinadas al núcleo central hidrófobo de la membrana.

b. Diseminadas en una capa continua sobre las superficies de la membrana.

c. Embebidas en una bicapa lipídica.

d. Orientadas de forma aleatoria en la membrana, sin una polaridad fija.

17. La bomba de sodio y potasio es un caso específico de transporte activo. En este proceso, ¿cuál es el siguiente paso después de la unión del Na^+ citoplásmico a dicha bomba?

a. El K^+ se libera y los sitios del Na^+ vuelven a ser receptivos.

b. La fosforilación genera un cambio de conformación de la proteína y se expulsa Na^+.

c. La pérdida de fosfato restaura la conformación original de la proteína.

d. Se estimula la fosforilación por ATP.

18. Un ejemplo de macromoléculas importantes en la comunicación celular son las quinasas, que son:

- **a.** Enzimas que transfieren el grupo fosfato terminal de ATP a un sustrato
- **b.** Reguladores locales que se almacenan en ciertas células del sistema inmunológico
- **c.** Ligandos hidrofílicos que se unen a receptores sobre las células diana
- **d.** Receptores acoplados a proteínas G

19. Las prostaglandinas:

- **a.** son hormonas locales y reguladores paracrinos
- **b.** modifican los niveles de AMPc
- **c.** estimulan la contracción del músculo liso
- **d.** todas son correctas

20. ¿Qué evento ocurre previo a la G2 de la Interfase?

- **a.** Separación de los centríolos.
- **b.** Duplicación del ADN.
- **c.** Formación del huso.
- **d.** Fragmentación de la membrana nuclear.

21. En la zona de crecimiento de una raíz, varias células tienen la mitad del ADN de otras células que se están dividiendo. Las células en cuestión casi con certeza se encuentran en la siguiente fase:

- **a.** G_1
- **b.** G_2
- **c.** Profase
- **d.** Anafase

22. Si al observar al microscopio usted encuentra una célula en la que se ven dos juegos de cromosomas avanzando a extremos opuestos de la célula, puede asegurar que la célula está en:

- **a.** Metafase
- **b.** Anafase
- **c.** Telofase
- **d.** Citoquinesis

23. La fase de la mitosis que se distingue porque los centrómeros de todos los cromosomas duplicados se encuentran a mitad del camino entre los dos polos del huso es la:

a. Prometafase

b. Metafase

c. Anafase

d. Telofase

24. Los dos eventos de la meiosis que contribuyen a la variación genética son los siguientes:

a. Duplicación de ADN y luego reducción de ADN a la mitad.

b. Entrecruzamiento y separación aleatoria de los homólogos.

c. Ocurrencia de la división meiótica I y la división meiótica II.

d. Sinapsis (con formación de quiasmas) y entrecruzamiento.

25. En el ciclo de vida de las plantas, la meiosis siempre va a dar como resultado:

a. Cigotos

b. Esporas

c. Gametos

d. Semillas

26. Algunos productos finales de la glucólisis son los siguientes:

a. Piruvato, ADP, CO_2

b. ATP, NADH, Piruvato

c. FAD, Piruvato, acetil COA

d. NAD^+, ATP, H_2O

27. En el ciclo del ácido cítrico, ¿cuál es la molécula de 4 carbonos que precede a la formación de citrato?

a. Isocitrato

b. Alfa cetoglutarato

c. Oxaloacetato

d. Aconitasa

28. En la cadena de transporte de electrones, ¿cuál es la función del complejo IV?

a. Aceptar electrones del $FADH_2$ que se formaron en el ciclo de Krebs

b. Aceptar electrones de la ubiquinona

c. Aceptar los electrones de citocromo C para reducir el oxígeno molecular

d. Bloquear el paso adicional de electrones a través de la cadena

29. Durante la fotosíntesis, en presencia de luz, existe un flujo unidireccional continuo de electrones desde la principal fuente de electrones, el ____________ hacia el aceptor terminal de electrones, el ____________.

a. $NADP^+$//H_2O

b. H_2O//$NADP^+$

c. NADH//ATP

d. ATP//ADP

30. En la primera fase del ciclo de Calvin, una molécula de CO_2 reacciona con un compuesto de cinco carbonos llamado _________________. El producto de esta reacción es un producto inestable que se rompe formándose así dos moléculas de ________________.

a. Ribulosabifosfato// fosfoglicerato

b. Fosfoglicerato// ribulosabifosfato

c. Rubisco// fosfoglicerato

d. Ribulosabifosfato// rubisco

31. Las ______________ son enzimas que se unen al ADN en el origen de replicación y rompen los enlaces de hidrógeno, causando la separación de las dos cadenas.

a. ADN polimerasas

b. ADN ligasas

c. ADN helicasas

d. ADN primasas

32. El codón de inicio corresponde al aminoácido:

a. Fenilalanina

b. Glicina

c. Serina

d. Metionina

33. ¿Cuál de los siguientes es un codón de parada?

a. UAA

b. UAG

c. UUG

d. a y b son correctas

34. En el jocote, el color amarillo de la fruta es codificado por un alelo dominante (R) y el color rojo por el alelo recesivo (r). Un alelo dominante de otro locus (E) produce frutos en forma alargada y su alelo recesivo (e) produce frutos redondos.
Si una variedad amarilla alargada (heterocigota para ambos caracteres) se cruza con una variedad roja y redonda, ¿cuál es la proporción fenotípica esperada de los miembros de la F1?

a. 9/16 amarillo, alargado: 3/16 rojo, alargado : 3/16 amarillo, redondo : 1/16 rojo, redondo.

b. 3/16 amarillo, redondo: 9/16 rojo, alargado : 1/16 rojo, redondo : 3/16 amarillo, alargado.

c. 4/16 amarillos alargados: 4/16 amarillos redondos: 4/16 rojos alargados: 4/16 rojos redondos

d. 9/16 rojo, alargado: 3/16 amarillo, redondo : 3/16 amarillo, alargado : 1/16 rojo redondo.

35. En los murciélagos, el color sepia es codificado por dos alelos codominantes (D^1D^2). El genotipo homocigoto para el alelo D^1 produce un color café oscuro y el genotipo homocigoto para el alelo D^2 produce un color beige. Si se cruzan dos murciélagos (ambos sepia), la proporción esperada de descendientes es la siguiente:

a. ½ sepia : ½ no sepia

b. Todos sepia

c. ¼ beige : ¾ sepia

d. ½ café oscuro : ½ beige

36. El síndrome de ________________ (XXY) produce varones con crecimiento mamario y testículos que degeneran lentamente.

a. Klinefelter

b. Down

c. Turner

d. X frágil

37. ¿Cuál de los siguientes No es parte del mecanismo de evolución propuesto por Darwin?

a. Herencia de caracteres adquiridos

b. Sobreproducción de descendientes

c. Variación en una población

d. Éxito reproductivo diferencial

38. La descripción "descendencia de híbrido interespecífico es incapaz de reproducirse con éxito" corresponde a la barrera postcigótica siguiente:

a. Inviabilidad del híbrido
b. Esterilidad del híbrido
c. Degradación de híbridos
d. Aislamiento conductual de híbridos

39. Una población está en equilibrio Hardy-Weinberg para un carácter que presenta dominancia. Suponga que el alelo recesivo "a" tiene una frecuencia de 0.3. ¿Cuáles son las frecuencias de los tres genotipos AA, Aa y aa, respectivamente?

a. 0.49/0.42/0.9
b. 0.49/0.42/ 0.09
c. 0.09/0.42/0.49
d. 0.49/0.21/0.09

40. Algunos eventos característicos del período Cretácico son los siguientes:

a. Dispersión de bosques, aparecen los simios
b. Diversificación de algas e invertebrados de cuerpo blando
c. Dominio de gimnospermas y helechos comunes, primeros dinosaurios
d. Surgimiento de plantas con flores, extinción de aves dentadas

SEGUNDA SERIE:Verdadero o falso (15 puntos)

Instrucciones: Lea cada enunciado. Si el enunciado es verdadero, marque una X en la columna V de la hoja de respuestas, si es falso, marque una X en la columna F. (1 punto cada respuesta correcta).

1.	Una caloría (cal) es la cantidad de energía calorífica (equivalente a 4.184 joules) requerida para elevar la temperatura de 10 g de agua 1 grado Celsius.
2.	El ion potasio es el principal catión en el citoplasma de las células animales; también controla la apertura de los estomas en las plantas.
3.	El grupo sulfhídrilo se encuentra en las moléculas llamadas tioles.
4.	La ley de la segregación de Mendel, que afirma que los dos alelos para un carácter heredable se separan (segregan) y terminan en gametos diferentes, corresponde a la Profase de la meiosis.
5.	En la glucólisis y en el ciclo del ácido cítrico se forman 4 ATP por la fosforilación a nivel de sustrato.
6.	La clorofila absorbe luz sobre todo en las regiones azul y rojo del espectro visible.
7.	El centro de reacción del fotosistema I consiste en un par de moléculas de clorofila b con un pico de absorción de 680 nm.
8.	La regla de Hershey y Chase establece que, en moléculas de ADN de doble cadena, el número de purinas es igual al número de pirimidinas.
9.	Ballenas y pitones tienen huesos vestigiales de extremidades posteriores.
10.	En una población humana de 2,000 personas 1,680 pueden enrollar la lengua (TT o Tt), mientras que el resto no puede enrollar la lengua (tt). De acuerdo al principio de Hardy Weinberg, la frecuencia del alelo dominante es igual a 0.48.
11.	El aislamiento temporal es un ejemplo de barrera precigótica.
12.	En la especiación simpátrica, una nueva especie evoluciona dentro de la misma región geográfica que la especie progenitora.
13.	Un autopoliploide contiene múltiples conjuntos de cromosomas de una sola especie y un alopoliploide contiene múltiples conjuntos de cromosomas de dos o más especies.
14.	Los ajolotes adultos pierden las características juveniles (branquias externas) cuando maduran sexualmente.
15.	Un tipo de variación geográfica es la clina que es un cambio abrupto en las frecuencias genotípicas de una especie, a través de una serie de poblaciones que conviven en la misma área geográfica.

TERCERA SERIE: Desarrollo de tema (25 pts.)

Desarrolle el siguiente tema en las hojas en blanco que se le proporcionan. Desglose el tema en los subtemas que se listan a continuación. Escriba con letra clara y cuide su ortografía y redacción (3 páginas máximo).

Tema: Evidencias de la evolución

Subtemas:

1.	Registro fósil	5 puntos
2.	Biogeografía	5 puntos
3.	Anatomía comparada	5 puntos
4.	Biología molecular	5 puntos
5.	Biología del desarrollo	5 puntos

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DE BIOLOGÍA NIVEL II

INSTRUCCIONES GENERALES:

Esta prueba consta de tres series. Debe responder **TODA** la prueba con tinta azul o negra. Puede utilizar calculadora, pero no celular. El tiempo máximo para responder es de 120 minutos.

PRIMERA SERIE: Selección múltiple (45 pts.)

Instrucciones: Para cada pregunta, elija la opción correcta y márquela con tinta azul o negra en su hoja de respuestas. (1 punto cada respuesta correcta)

1. Una de las características de los seres vivos es el metabolismo. Lea las siguientes afirmaciones y elija cuál o cuáles de ellas se refieren a una vía anabólica.

I Los aminoácidos se someten a desaminación, y sus cadenas carbonadas se convierten en intermediarios metabólicos de la respiración aeróbica.

II Tanto el glicerol como los componentes de ácidos grasos de los lípidos se oxidan como combustible. Los ácidos grasos se convierten en moléculas de acetil CoA por el proceso de beta-oxidación.

III Reacciones de la glucólisis en las que se obtiene energía a partir del metabolismo de la glucosa.

IV Reacciones de fijación del carbono que ocurren en organismos autótrofos.

a. I y II

b. III

c. IV

d. III y IV

2. En la jerarquía de organización de la naturaleza, cada nivel tiene propiedades emergentes o características que no se encuentran en los niveles inferiores. Las propiedades emergentes tales como estructura de edad y tasas de natalidad y de mortalidad se presentan en:

a. Individuos

b. Poblaciones

c. Ecosistemas

d. a y b son correctas

3. El etanol (C_2H_6O) y el dimetil éter (C_2H_6O) son ejemplos de:

a. isómeros estructurales
b. enantiómeros
c. moléculas con enlaces dobles de carbono a carbono
d. moléculas con enlaces triples de carbono a carbono

4. Elija la opción que contiene solamente oligoelementos:

a. B, Se, Ca, F, Si
b. Cl, Si, F, Mo, I
c. Mo, Fe, I, B, F
d. Se, B, F, Co, Si

5. Tome en cuenta la siguiente lista de carbohidratos:

I Ribosa
II Fructosa
III Maltosa
IV Galactosa
V Lactosa

¿Cuáles de los anteriores son monosacáridos?

a. I, II, III
b. I, II, IV
c. II, III, IV
d. II, IV, V

6. El ácido oleico es un ______________ y el ácido linoleico es un ________________.

a. ácido graso monoinsaturado//ácido graso polinsaturado
b. ácido graso polinsaturado//ácido graso monoinsaturado
c. diacilglicerol//triacilglicerol
d. triacilglicerol//monoacilglicerol

7. Un enlace peptídico, se forma entre:

a. dos grupos amino
b. dos grupos carboxilo
c. dos grupos disulfuro
d. ninguna es correcta

8. Un nucleótido está formado por:

a. Un grupo fosfato, una purina y una pirimidina
b. Una base nitrogenada, una pentosa y un grupo fosfato
c. Bases nitrogenadas complementarias (A-T) y (C-G)
d. Una ribosa o una desoxirribosa unidas a una base nitrogenada

9. ¿Cuál de las siguientes estructuras se encuentra en las células animales, pero NO en las vegetales?

a. Centriolos
b. Pared celular
c. Plasmodesmos
d. Tonoplasto

10. En una célula eucariota, la síntesis de ATP a expensas de los carburantes metabólicos (glucosa, ácidos grasos, aminoácidos) ocurre en:

a. El núcleo
b. Los cloroplastos
c. Las mitocondrias
d. Los ribosomas

11. Los flagelos de las bacterias:

a. Consisten en un cuerpo basal y dos pares de microtúbulos
b. Consisten en un cuerpo basal y nueve pares de microtúbulos
c. Presentan movimiento giratorio
d. Siempre presentan disposición lofotrica

12. En el hígado, las/los _______________ se encargan de desintoxicar el alcohol y otros compuestos nocivos, transfiriendo hidrógeno desde las toxinas al oxígeno.

a. lisosomas
b. mitocondrias
c. peroxisomas
d. ribosomas

13. En las células de almacenamiento de numerosas semillas, las reservas de importantes compuestos orgánicos, como las proteínas apiladas, se almacenan en:

a. El aparato de Golgi
b. La vacuola
c. Los cloroplastos
d. Los pirenoides

14. Para diferenciar las distintas membranas de una célula eucariota, basta con tomar en cuenta el siguiente aspecto:

a. Ciertas proteínas son exclusivas de cada membrana.

b. Los fosfolípidos se encuentran únicamente en ciertas membranas.

c. Solamente ciertas membranas de la célula son selectivamente permeables.

d. Únicamente ciertas membranas están constituidas por moléculas anfipáticas.

15. ¿Cuál de los siguientes factores tendería a aumentar la fluidez de la membrana?

a. Un contenido elevado de proteínas dentro de la membrana.

b. Una mayor proporción de fosfolípidos no saturados.

c. Una mayor proporción de fosfolípidos saturados.

d. Una temperatura más baja.

16. De acuerdo con el modelo de la estructura de la membrana de mosaico fluido, las proteínas de la membrana están principalmente:

a. Confinadas al núcleo central hidrófobo de la membrana.

b. Diseminadas en una capa continua sobre las superficies de la membrana.

c. Embebidas en una bicapa lipídica.

d. Orientadas de forma aleatoria en la membrana, sin una polaridad fija.

17. La bomba de sodio y potasio es un caso específico de transporte activo. En este proceso, ¿cuál es el siguiente paso después de la unión del Na^+ citoplásmico a dicha bomba?

a. El K^+ se libera y los sitios del Na^+ vuelven a ser receptivos.

b. La fosforilación genera un cambio de conformación de la proteína y se expulsa Na^+.

c. La pérdida de fosfato restaura la conformación original de la proteína.

d. Se estimula la fosforilación por ATP.

18. Un ejemplo de macromoléculas importantes en la comunicación celular son las quinasas, que son:

a. Enzimas que transfieren el grupo fosfato terminal de ATP a un sustrato

b. Reguladores locales que se almacenan en ciertas células del sistema inmunológico

c. Ligandos hidrofílicos que se unen a receptores sobre las células diana

d. Receptores acoplados a proteínas G

19. Las prostaglandinas:

- **a.** son hormonas locales y reguladores paracrinos
- **b.** modifican los niveles de AMPc
- **c.** estimulan la contracción del músculo liso
- **d.** todas son correctas

20. ¿Qué evento ocurre previo a la G2 de la Interfase?

- **a.** Separación de los centríolos.
- **b.** Duplicación del ADN.
- **c.** Formación del huso.
- **d.** Fragmentación de la membrana nuclear.

21. En la zona de crecimiento de una raíz, varias células tienen la mitad del ADN de otras células que se están dividiendo. Las células en cuestión casi con certeza se encuentran en la siguiente fase:

- **a.** G_1
- **b.** G_2
- **c.** Profase
- **d.** Anafase

22. Si al observar al microscopio usted encuentra una célula en la que se ven dos juegos de cromosomas avanzando a extremos opuestos de la célula, puede asegurar que la célula está en:

- **a.** Metafase
- **b.** Anafase
- **c.** Telofase
- **d.** Citoquinesis

23. La fase de la mitosis que se distingue porque los centrómeros de todos los cromosomas duplicados se encuentran a mitad del camino entre los dos polos del huso es la:

- **a.** Prometafase
- **b.** Metafase
- **c.** Anafase
- **d.** Telofase

24. Los dos eventos de la meiosis que contribuyen a la variación genética son los siguientes:

a. Duplicación de ADN y luego reducción de ADN a la mitad.
b. Entrecruzamiento y separación aleatoria de los homólogos.
c. Ocurrencia de la división meiótica I y la división meiótica II.
d. Sinapsis (con formación de quiasmas) y entrecruzamiento.

25. En el ciclo de vida de las plantas, la meiosis siempre va a dar como resultado:

a. Cigotos
b. Esporas
c. Gametos
d. Semillas

26. Algunos productos finales de la glucólisis son los siguientes:

a. Piruvato, ADP, CO_2
b. ATP, NADH, Piruvato
c. FAD, Piruvato, acetil COA
d. NAD^+, ATP, H_2O

27. En el ciclo del ácido cítrico, ¿cuál es la molécula de 4 carbonos que precede a la formación de citrato?

a. Isocitrato
b. Alfa cetoglutarato
c. Oxaloacetato
d. Aconitasa

28. En la cadena de transporte de electrones, ¿cuál es la función del complejo IV?

a. Aceptar electrones del $FADH_2$ que se formaron en el ciclo de Krebs
b. Aceptar electrones de la ubiquinona
c. Aceptar los electrones de citocromo C para reducir el oxígeno molecular
d. Bloquear el paso adicional de electrones a través de la cadena

29. Durante la fotosíntesis, en presencia de luz, existe un flujo unidireccional continuo de electrones desde la principal fuente de electrones, el ____________ hacia el aceptor terminal de electrones, el ____________.

a. $NADP^+$//H_2O
b. H_2O//$NADP^+$
c. NADH//ATP
d. ATP//ADP

30. En la primera fase del ciclo de Calvin, una molécula de CO_2 reacciona con un compuesto de cinco carbonos llamado ________________. El producto de esta reacción es un producto inestable que se rompe formándose así dos moléculas de _______________.

a. Ribulosabifosfato// fosfoglicerato

b. Fosfoglicerato// ribulosabifosfato

c. Rubisco// fosfoglicerato

d. Ribulosabifosfato// rubisco

31. Las _____________ son enzimas que se unen al ADN en el origen de replicación y rompen los enlaces de hidrógeno, causando la separación de las dos cadenas.

a. ADN polimerasas

b. ADN ligasas

c. ADN helicasas

d. ADN primasas

32. El codón de inicio corresponde al aminoácido:

a. Fenilalanina

b. Glicina

c. Serina

d. Metionina

33. ¿Cuál de los siguientes es un codón de parada?

a. UAA

b. UAG

c. UUG

d. a y b son correctas

34. En el jocote, el color amarillo de la fruta es codificado por un alelo dominante (R) y el color rojo por el alelo recesivo (r). Un alelo dominante de otro locus (E) produce frutos en forma alargada y su alelo recesivo (e) produce frutos redondos.

Si una variedad amarilla alargada (heterocigota para ambos caracteres) se cruza con una variedad roja y redonda, ¿cuál es la proporción fenotípica esperada de los miembros de la F1?

a. 9/16 amarillo, alargado: 3/16 rojo, alargado: 3/16 amarillo, redondo: 1/16 rojo, redondo.

b. 3/16 amarillo, redondo: 9/16 rojo, alargado: 1/16 rojo, redondo: 3/16 amarillo, alargado.

c. 4/16 amarillos alargados: 4/16 amarillos redondos: 4/16 rojos alargados: 4/16 rojos redondos

d. 9/16 rojo, alargado: 3/16 amarillo, redondo: 3/16 amarillo, alargado: 1/16 rojo redondo.

35. El síndrome de ________________ (XXY) produce varones con crecimiento mamario y testículos que degeneran lentamente.

a. Klinefelter

b. Down

c. Turner

d. X frágil

36. ¿Cuál de los siguientes No es parte del mecanismo de evolución propuesto por Darwin?

a. Herencia de caracteres adquiridos

b. Sobreproducción de descendientes

c. Variación en una población

d. Éxito reproductivo diferencial

37. La descripción “descendencia de híbrido interespecífico es incapaz de reproducirse con éxito” corresponde a la barrera postcigótica siguiente:

a. Inviabilidad del híbrido

b. Esterilidad del híbrido

c. Degradación de híbridos

d. Aislamiento conductual de híbridos

38. *Zea mays* es la especie del maíz. ¿A qué Familia pertenece esta planta?

a. Monocotiledóneas
b. Anthophyta
c. Poaceae
d. Commelinales

39. Delgados bastones irregulares que contienen una sustancia cerosa en sus paredes celulares; una especie causa la lepra y otra causa la tuberculosis.

a. Micobacterias
b. Actinomicetos
c. Clamidias
d. Espiroquetas

40. Las plantas del Filo__________ son plantas con semillas desnudas.

a. Gnetophyta
b. Lycopodiophyta
c. Pteridophyta
d. Anthocerophyta

41. Considere los siguientes géneros de plantas:

I *Equisetum*
II *Marchantia*
III *Selaginella*
IV *Sphagnum*

Ahora relaciónelos de manera adecuada con el Filo al que pertenecen.

a. I(Hepatophyta); II(Lycopodiophyta); III (Bryophyta); IV (Pteridophyta)
b. I (Pteridophyta); II (Hepatophyta); III (Lycopodiophyta); IV (Bryophyta)
c. I (Lycopodiophyta); II (Hepatophyta); III (Pteridopyta); IV (Bryophyta)
d. I (Brypophyta); II (Hepatophyta); III (Lycopodiophyta); IV (Pteridophyta)

42. Las cícadas están más estrechamente emparentadas con:

a. Ginkgos
b. Helechos
c. Monocotiledóneas
d. Hepáticas

43. ¿Cuál de las siguientes opciones contiene géneros de hongos apareados con el grupo al que pertenecen?

a. *Rhizopus* (glomeromiceto); *Allomyces* (quitridiomiceto); *Agaricus* (basidiomiceto)

b. *Rhizopus* (cigomiceto); *Allomyces* (basidiomiceto); *Agaricus*(ascomiceto)

c. *Rhizopus* (cigomiceto); *Allomyces* (quitridiomiceto); *Agaricus* (basidiomiceto)

d. *Rhizopus* (quitridiomiceto); *Allomyces* (cigomiceto); *Agaricus* (glomeromiceto)

44. Los _______________ son animales acelomados.

a. Platelmintos

b. Nematodos

c. Anélidos

d. Artrópodos

45. Considere los siguientes animales representativos de los moluscos:

I quitones

II caracoles y babosas

III almejas y ostras

IV calamares y pulpos

Elija la opción que los aparea con la Clase a la que pertenecen.

a. (I=Polyplacophora); (II=Cephalopoda); (III=Bivalvia); (IV=Gastropoda)

b. (I=Gastropoda); (II=Cephalopoda); (III=Bivalvia); (IV=Polyplacophora)

c. (I=Polyplacophora); (II=Gastropoda); (III=Bivalvia); (IV=Cephalopoda)

d. (I=Gastropoda); (II=Bivalvia); (III=Polyplacophora); (IV=Cephalopoda)

SEGUNDA SERIE:Verdadero o falso (35 puntos)

Instrucciones: Lea cada enunciado. Si el enunciado es verdadero, marque una X en la columna V de la hoja de respuestas, si es falso, marque una X en la columna F. (1 punto cada respuesta correcta).

1.	Una caloría (cal) es la cantidad de energía calorífica (equivalente a 4.184 joules) requerida para elevar la temperatura de 10 g de agua 1 grado Celsius.
2.	El ion potasio es el principal catión en el citoplasma de las células animales; también controla la apertura de los estomas en las plantas.
3.	El grupo sulfhídrilo se encuentra en las moléculas llamadas tioles.
4.	La ley de la segregación de Mendel, que afirma que los dos alelos para un carácter heredable se separan (segregan) y terminan en gametos diferentes, corresponde a la Profase de la meiosis.
5.	En la glucólisis y en el ciclo del ácido cítrico se forman 4 ATP por la fosforilación a nivel de sustrato.
6.	La clorofila absorbe luz sobre todo en las regiones azul y rojo del espectro visible.
7.	El centro de reacción del fotosistema I consiste en un par de moléculas de clorofila b con un pico de absorción de 680 nm
8.	La regla de Hershey y Chase establece que, en moléculas de ADN de doble cadena, el número de purinas es igual al número de pirimidinas.
9.	Ballenas y pitones tienen huesos vestigiales de extremidades posteriores.
10.	En una población humana de 2,000 personas 1,680 pueden enrollar la lengua (TT o Tt), mientras que el resto no puede enrollar la lengua (tt). De acuerdo al principio de Hardy Weinberg, la frecuencia del alelo dominante es igual a 0.48.
11.	El aislamiento temporal es un ejemplo de barrera precigótica.
12.	En la especiación simpátrica, una nueva especie evoluciona dentro de la misma región geográfica que la especie progenitora.
13.	Un grupo parafilético es un grupo que contiene un ancestro común y algunos de sus descendientes.
14.	Picornavirus es un virus de ADN que causa viruela en humanos.
15.	Los priones son agentes subvirales infecciosos formados por una cadena circular de ARN.
16.	Las cianobacterias son fotoautótrofas y la mayoría de arqueas son quimioautótrofas.

17.	El endospermo es un tejido nutritivo rico en lípidos, proteínas y carbohidratos que alimenta al embrión vegetal durante su crecimiento.
18.	Los glomeromicetos forman micorrizas arbusculares con raíces de plantas.
19.	*Candida* es un cigomiceto que habita la boca y vagina humanas y que puede causar enfermedades en esas partes del cuerpo.
20.	Los himenópteros carecen de alas, presentan partes bucales para perforar-succionar, sus patas están adaptadas para saltar y algunos son vectores de tifus.
21.	El blastoporo de los deuteróstomos se convierte en el ano o se ubica cerca del futuro sitio del ano.
22.	Los animales de los órdenes Urodela y Apoda presentan huevos amnióticos como adaptación a la vida terrestre.
23.	El aumento en circunferencia, que ocurre en áreas que ya no se alargan, se debe a divisiones celulares que tienen lugar en meristemas laterales.
24.	Las bandas de Caspari contienen un material graso impermeable llamado suberina.
25.	La producción de semillas y frutos sin reproducción sexual se denomina apomixis.
26.	En los humanos, la columna vertebral consta de la región cervical con 12 vértebras, la región torácica con 7 vértebras, la región lumbar con 5 vértebras y la región del cóccix compuesta de vértebras fusionadas.
27.	Los espacios en la vaina de mielina, llamados nodos de Ranvier, existen entre células de Schwann consecutivas.
28.	El diencéfalo origina el tálamo y el hipotálamo.
29.	Las células T maduran en la médula ósea del hueso, en la epífisis.
30.	Durante la exhalación, el diafragma se contrae.
31.	La capacidad de carga (K) representa la mayor población que un ambiente particular puede mantener por un período indefinido, en el supuesto de que en dicho ambiente no haya cambios.
32.	En la fijación de nitrógeno, el NH_3 es convertido en nitrógeno gaseoso.
33.	El bioma de sabana es una pradera tropical con grupos compactos de árboles altos que se encuentra en zonas de lluvia con precipitación constante.
34.	El metano y el óxido nítrico son ejemplos de gases de efecto invernadero.
35.	En el mimetismo batesiano, especies distintas, todas venenosas, dañinas o desagradables se parecen unas a otras.

TERCERA SERIE: Desarrollo de tema (20 pts.)

Instrucciones: Desarrolle el siguiente tema en las hojas en blanco que se le proporcionan. Desglose el tema en los subtemas que se listan a continuación. Escriba con letra clara y cuide su ortografía y redacción (3 páginas máximo).

Tema: Protistas

Subtemas:

1. Características generales de los protistas 2.5 puntos
2. Endosimbiosis 2.5 puntos
3. Diversidad de los protistas. (Por razones de tiempo, haga referencia especial a los siguientes grupos) 12 puntos
   - **a.** apicomplejos
   - **b.** ciliados
   - **c.** diatomeas
   - **d.** algas verdes
4. Funciones ecológicas de los protistas. 3 puntos

4.5 TECNOLOGÍA

UNDÉCIMA OLIMPIADA INTERUNIVERSITARIA
EXAMEN DEL AREATECNOLOGÍA

INSTRUCCIONES:

A continuación se le presenta una serie de problemas, cada problema tiene una valoración en puntos, debe tratar de realizar programas de computadora que resuelvan cada problema, puede resolver los problemas en cualquier orden deseado, al finalizar de resolver cada problema debe solicitar que sea validado con el archivo de prueba que le será entregado por los jueces, deberá generar su salida y entregarla para su verificación, si la verificación es correcta habrá obtenido los puntos en que se ha valorado el problema. Recuerde que el tiempo utilizado para resolver los problemas también es parte de la competencia. A menos que se indique otro método, los problemas deberán solicitar el nombre del archivo de entrada y generar la salida a un archivo nombrado salidaM-N.txt, donde M corresponde al número de grupo y N corresponde al número de problema (Ej. salida01-02.txt corresponde al problema 2 del grupo 1).

Problema 1: (15 puntos)

Tic-Tac-Toe-Tomek es un juego jugado en un tablero cuadrado de 4 x 4. El tablero comienza vacío, excepto que un solo símbolo de "T" puede aparecer en uno de los 16 cuadrados. Hay dos jugadores: X y O. Se turnan para hacer movimientos, con X comenzando. En cada movimiento un jugador pone su símbolo en uno de los cuadrados vacíos. El símbolo del jugador X es 'X', y el símbolo del jugador O es 'O'.

Después del movimiento de un jugador, si hay una fila, columna o una diagonal que contenga 4 de los símbolos de ese jugador, o que contenga 3 de sus símbolos y el símbolo 'T', gana y el juego termina. De lo contrario, el juego continúa con el movimiento del otro jugador. Si todos los campos están llenos de símbolos y nadie ganó, el juego termina en empate. Vea la entrada de muestra para ejemplos de varias posiciones ganadoras.

Dada una descripción de 4 x 4 tablas que contiene 'X', 'O', 'T' y '.' (donde '.' representa un cuadrado vacío), que describe el estado actual de un juego, determina el estado del juego Tic-Tac-Toe-Tomek. Los estados a elegir son:

1. "X gano" (el juego terminó y X ganó)
2. "O gano" (el juego ha terminado y O ha ganado)
3. "Draw" (el juego ha terminado, y terminó en un empate)
4. "El juego no ha terminado" (el juego aún no ha terminado)

Si hay celdas vacías, y el juego no ha terminado, debe salir "Juego no ha terminado", incluso si el resultado del juego es inevitable.

Entrada

La primera línea de la entrada da el número de casos de prueba, **T**. **T** casos de prueba siguen. Cada caso de prueba consta de 4 líneas con 4 caracteres cada una, con cada carácter siendo **'X', 'O', '.'** o **'T'** (apóstrofes para mayor claridad solamente). Cada caso de prueba es seguido por una línea vacía.

Salida

Para cada caso de prueba, la salida de una línea que contiene "Caso # x: y", donde **x** es el número de caso (a partir de 1) e **y** representa el estado de la partida "X gano", "O gano" , "Draw" para identificar un empate o "El juego no ha terminado". Asegúrese de presentar los estados exactamente correctos. Cuando ejecuta el código en la entrada de muestra, debe crear la salida de muestra exactamente, incluyendo el "Caso # 1:", la letra mayúscula "O" (no el número 0) o la letra mayúscula "X", y así sucesivamente.

Ejemplo

Entrada

```
6
XXXT
....
OO..
....

XOXT
XXOO
OXOX
XXOO

XOX.
OX..
....
....

OOXX
OXXX
OX.T
O..O

XXXO
..O.
.O..
T...

OXXX
XO..
..O.
...O
```

Salida

```
Caso #1:   X gano
Caso #2:   Draw
Caso #3:   El juego no ha terminado
Caso #4:   O gano
Caso #5:   O gano
Caso #6:   O gano
```

Problema 2: (15 puntos)

A John le gustan los palíndromos, y piensa que son justos (lo cual es una palabra elegante para agradar). Un palíndromo es sólo un número entero que lee lo mismo hacia atrás y hacia delante - así que 6, 11 y 121 son todos palíndromos, mientras que 10, 12, 223 y 2244 no son (aunque 010 = 10, no consideramos ceros a la hora de determinar si un número es un palíndromo).

Recientemente se interesó también por los cuadrados, y formó la definición de un número justo y cuadrado - es un número que es un palíndromo y el cuadrado de un palíndromo al mismo tiempo. Por ejemplo, 1, 9 y 121 son justos y cuadrados (siendo palíndromos y cuadrados, respectivamente, de 1, 3 y 11), mientras que 16, 22 y 676 no son justos y cuadrados: 16 no es un palíndromo, 22 no es un cuadrado, y mientras 676 es un palíndromo y un número cuadrado, es el cuadrado de 26, que no es un palíndromo.

Ahora quiere buscar números justos y cuadrados más grandes. Su tarea es, dado el intervalo que John está buscando, decirle cuántos números justos y cuadrados hay en el intervalo, así él sabrá cuándo los ha encontrado todos.

Entrada

La primera línea de la entrada da el número de casos de prueba, las líneas **T**. **T** líneas siguen. Cada línea contiene dos enteros, **A y B** - los extremos del intervalo que John está buscando.

Salida

Para cada caso de prueba, la salida de una línea que contiene "Caso # x: y", donde x es el número de caso (a partir de 1) e y es el número de números justos y cuadrados mayor o igual a **A** y menor o igual a **B**.

Ejemplo:

Entrada	**Salida**
3	Caso #1: 2
1 4	Caso #2: 0
10 120	Caso #3: 2
100 1000	

Problema 3: (35 puntos)

Siguiendo un viejo mapa, usted ha tropezado con el tesoro secreto de Larry, el Pirata del Pavor.

El tesoro se compone de N cofres cerrados, cada uno de los cuales sólo se puede abrir con una llave de un tipo específico. Además, una vez que se utiliza una llave para abrir un cofre, nunca se puede usar de nuevo. Dentro de cada cofre, por supuesto, encontrará un tesoro, y también puede encontrar una o más llaves que puede utilizar para abrir otros cofres. Un cofre puede contener varias llaves del mismo tipo, y puede contener cualquier número de llaves.

Usted ya tiene al menos una llave y su mapa dice qué otras llaves se pueden encontrar dentro de los diversos cofres. Con toda esta información, ¿puede averiguar cómo desbloquear todos los cofres?

Por ejemplo, supongamos que el tesoro se compone de cuatro cofres como se describe a continuación, y usted comenzó con exactamente una llave de tipo 1:

Numero de Cofre	Tipo de llave que abre el cofre	Tipo de llave dentro del cofre
1	1	Ninguna
2	1	1,3
3	2	Ninguna
4	3	2

Puede abrir todos los cofres en este ejemplo si los hace en el orden 2, 1, 4, 3. Si comienza abriendo primero el cofre # 1, habrá usado su única llave y quedará atrapado.

Entrada

La primera línea de la entrada da el número de casos de prueba, T. T casos de prueba siguen. Cada caso de prueba comienza con una sola línea que contiene dos enteros positivos K y N, que representan el número de llaves con las que empieza y el número de cofres que necesita para abrir.

Esto es seguido por una línea que contiene K enteros, que representa los tipos de las claves con las que se inicia.

Después de eso, habrá N líneas, cada una representando un solo cofre. Cada línea comenzará con los números enteros Ti y Ki, indicando el tipo de llave necesaria para abrir el cofre y el número de llaves dentro del cofre. Estos dos enteros serán seguidos por Ki más enteros, indicando los tipos de las llaves contenidas dentro del cofre.

Salida

Para cada caso de prueba, la salida de una línea que contiene "Caso #x: C1 C2 ... CN", donde x es el número de casos (a partir de 1), y donde Ci representa el índice (a partir de 1) que representa el cofre que deberías abrir.

Si hay múltiples formas de abrir todos los cofres, elige la forma "lexicográficamente más pequeña", es decir, debes elegir hacer C1 tan pequeño como sea posible, y si hay varias formas de hacer C1 lo más pequeño posible, elija el que haga que C2 sea lo más pequeño posible, y así sucesivamente.

Si no hay manera de abrir todos los cofres, en su lugar debería dar salida a una línea que contenga "Caso #x: IMPOSIBLE".

Ejemplo

Input

```
3
1 4
1
1 0
1 2 1 3
2 0
3 1 2
3 3
1 1 1
1 0
1 0
1 0
1 1
2
1 1 1
```

Output

```
Caso #1: 2 1 4 3
Caso#2: 1 2 3
Caso #3: IMPOSIBLE
```

Problema 4: (35 puntos)

Roller coasters are so much fun! It seems like everybody who visits the theme park wants to ride the roller coaster. Some people go alone; other people go in groups, and don't want to board the roller coaster unless they can all go together. And *everyone* who rides the roller coaster wants to ride again. A ride costs 1 Euro per person; your job is to figure out how much money the roller coaster will make today.

The roller coaster can hold **k** people at once. People queue for it in groups. Groups board the roller coaster, one at a time, until there are no more groups left or there is no room for the next group; then the roller coaster goes, whether it's full or not. Once the ride is over, all of its passengers re-queue in the same order. The roller coaster will run **R** times in a day.

For example, suppose **R**=4, **k**=6, and there are four groups of people with sizes: 1, 4, 2, 1. The first time the roller coaster goes, the first two groups [1, 4] will ride, leaving an empty seat (the group of 2 won't fit, and the group of 1 can't go ahead of them). Then they'll go to the back of the queue, which now looks like 2, 1, 1, 4. The second time, the coaster will hold 4 people: [2, 1, 1]. Now the queue looks like 4, 2, 1, 1. The third time, it will hold 6 people: [4, 2]. Now the queue looks like [1, 1, 4, 2]. Finally, it will hold 6 people: [1, 1, 4]. The roller coaster has made a total of 21 Euros!

Input

The first line of the input gives the number of test cases, **T**. **T** test cases follow, with each test case consisting of two lines. The first line contains three space-separated integers: **R**, **k** and **N**. The second line contains **N** space-separated integers $\mathbf{g_i}$, each of which is the size of a group that wants to ride. $\mathbf{g_0}$ is the size of the first group, $\mathbf{g_1}$ is the size of the second group, etc.

Output

For each test case, output one line containing "Case #x: y", where x is the case number (starting from 1) and y is the number of Euros made by the roller coaster.

Entrada

```
3
4 6 4
1 4 2 1
100 10 1
1
5 5 10
2 4 2 3 4 2 1 2 1 3
```

Salida

```
Case #1: 21
Case #2: 100
Case #3: 20
```