Finite Difference Method

CP2a

Betingelsene fra 8.2.2a)

$u_{tt} = 4u_{xx}$
$u(x,0) = 0$ for $0 \leq x \leq 1$
$u_t(x,0) = 2\pi \sin \pi x$ for $0 \leq x \leq 1$
$u(0,t) = 0$ for $0 \leq t \leq 1$
$u(1,t) = 0$ for $0 \leq t \leq 1$

Dette gir at $c = \sqrt{4} = 2$, $g(x) = 2\pi \sin \pi x$, $f(x) = l(x) = r(x) = 0$

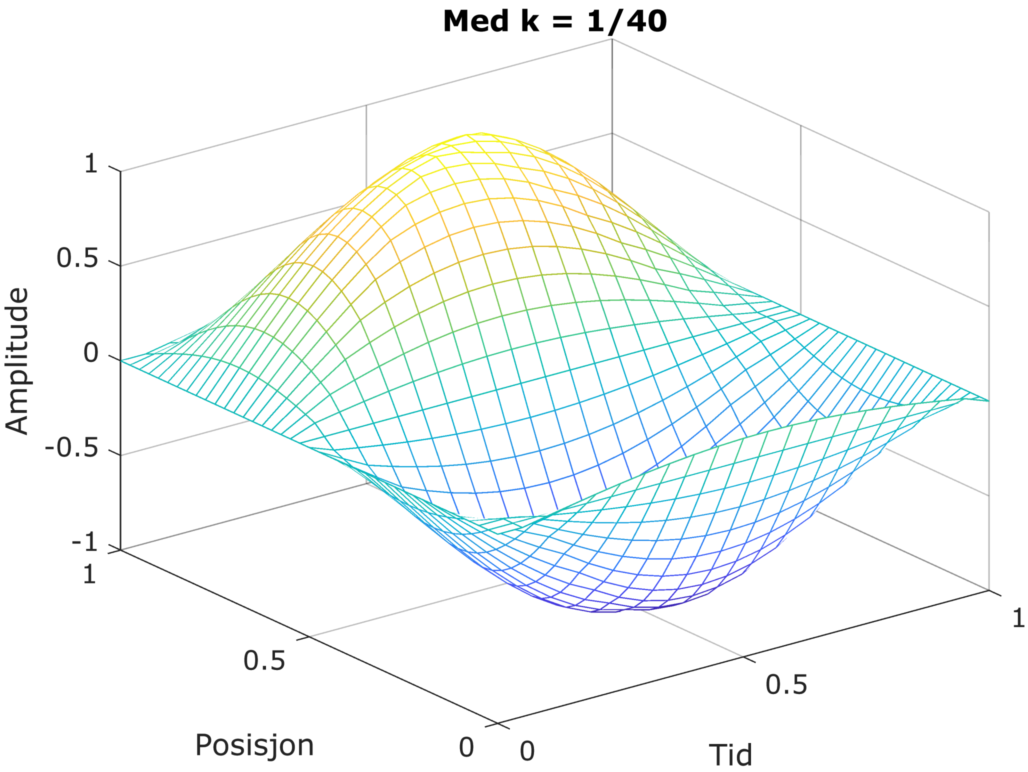
```
c = 2;
f = @(x) x*0;
g = @(x) 2*pi*sin(pi*x); % negativ versjon gir korrekt w...
l = f;
r = f;
```

Skal løses med $h = 0.05$ og en *k* som tilfredsstiller $\sigma = \frac{ck}{h} \leq 1$ – altså med $\frac{2 \cdot k}{0.05} = 2 \cdot 20 \cdot k = 40k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{40}$

```
h = 0.05;
M = 1/h;
k = 1/40;
N = 1/k;
```

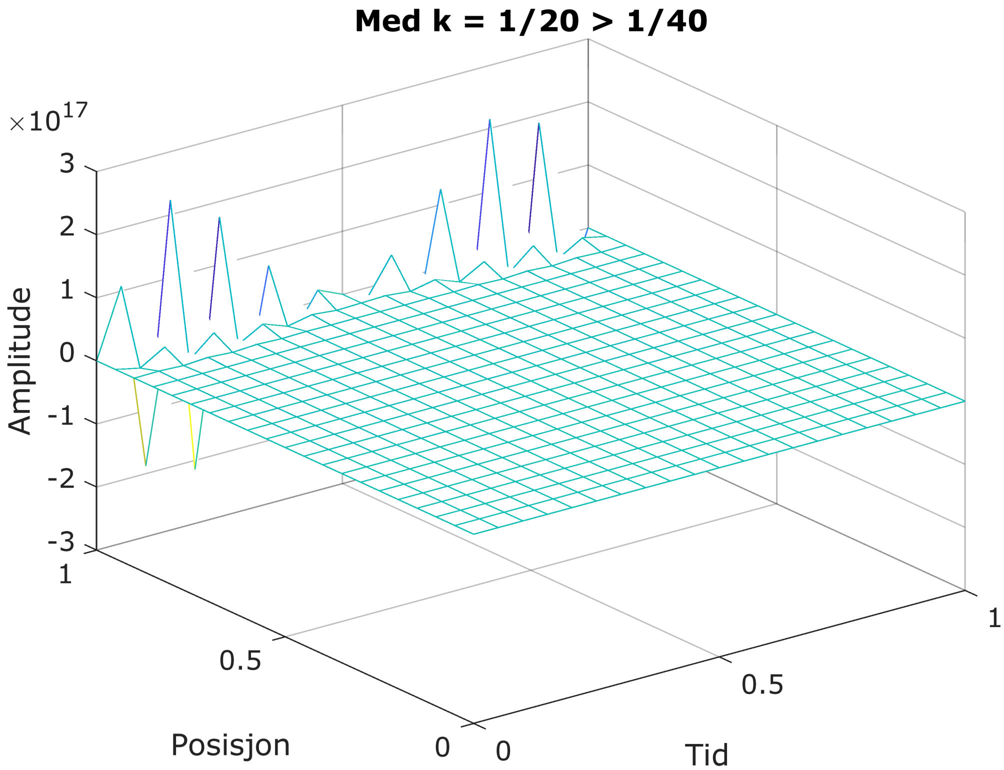
Så, med $k = 1/40$:

```
finiteDfference(0, 1, 1, M, N, c, f, g, l, r);
title("Med k = 1/40")
```



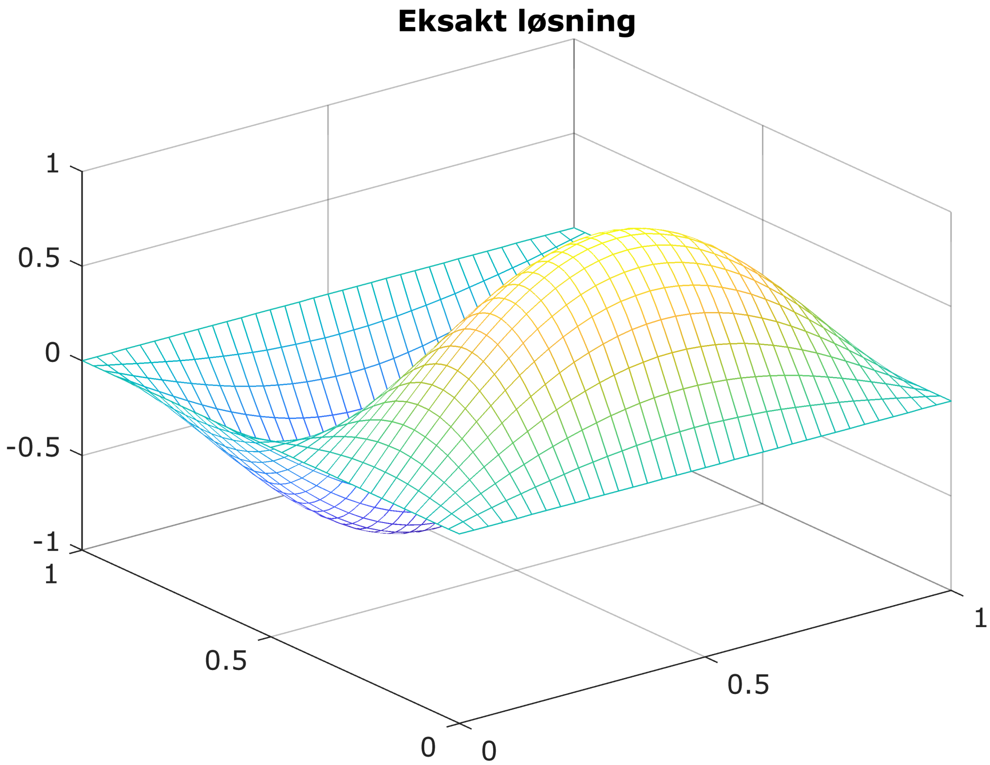
Med $k = 1/20 > 1/40$ ser vi at det er litt dårligere stilt:

```
finiteDfference(0, 1, 1, M, 20, c, f, g, l, r);
title("Med k = 1/20 > 1/40")
```



Tester med den eksakte løsningen $u(x, t) = \sin \pi x \sin 2\pi t$:

```
fmesh(@(x,t) sin(pi.*x) .* sin(2*pi.*t), [0 1])
title("Eksakt løsning");
```



Ser at min løsning er en flippet versjon av den eksakte – antar det skyldes en fortegnsfeil, men ser virkelig ikke hvor den feilen kan skje.

Om enten initalbetingelsen $g(x)$ eller $k \cdot g(x)$-leddet i initialvektoren settes negative, blir grafene like. Det har vi ikke grunnlag for å gjøre.

```
function finiteDfference(a, b, T, M, N, c, f, g, l, r)
%FINITEDIFFERENCE Finite Difference Method for the wave equation
%   Løser  u_tt = c² u_xx  numerisk
%   a og b er grensebetingelsene u(a,t)=l(t) og u(b,t)=r(t)
%   T utgjør øvre grense i tidsintervallet [0,T]
%   f(x) er initialbetingelsen for u(x,a)
%   g(x) er initialbetingelsen for u_t(x,a)
%   c er en bølgefartparameteren til den originale likningen
%   M og N er antall samplinger langs x- og t-aksen
%   NB: f, g, l og r er funksjoner

    % Beregner steglengder og sigma
    h = (b-a)/M;
    k = T/N;
    sigma = c*k / h;
    m = M-1;

    % Setter opp aksene
    x = linspace(a,b,M+1)'; % avstand (b-a)/(M+1-1) = h
    t = linspace(0,T,N+1);  % avstand T/(N+1-1) = k
```

```
    % Lager diagonalmatrisen A
    e = ones(m, 1);
    A = spdiags([sigma*sigma*e, (2-2*sigma*sigma)*e, sigma*sigma*e], [-1,0,1], m, m);

    % Lager kolonne 1 i w basert på initialbetingelsene
    w = zeros(m,N);
    s = 1/2 * sigma^2 * [l(0); zeros(m-2,1); r(0)];
    w(:,1) = 1/2 * A * f(x(1:m)) + k*g(x(1:m)) + s;
    % om vi isteden tar - k*g(x) her, får vi rett svar
    % men det har vi ikke grunnlag for

    % Regner ut resten av w
    for j = 2:N
        s = sigma^2 * [l(t(j)); zeros(m-2,1); r(t(j))];
        w(:,j+1) = A * w(:,j) - w(:,j-1) + s;
    end

    % Sleng grensene på w ("oppe og nede" == venstre og høyre i normalt koordinatsystem
    w = [l(t); w; r(t)];

    % Plott w
    [X,T] = meshgrid(x,t);
    mesh(X,T,w')
    xlabel('Tid')
    ylabel('Posisjon')
    zlabel('Amplitude')
end
```