TDAT3024 – Matteøving 3

Tore Bergebakken, Jon Åby Bergquist, Kristoffer Vanebo

NB: CP-oppgavene står bakenfor de tekstlige oppgavene siden de er eksportert fra Live Editor i Matlab.

8.1.4

Vi skal undersøke om bakoverdifferansemetoden er stabil for varmelikninger med $c < 0$. Antar at c er konstanten som ellers kalles D, i en generell varmelikning

$$u_{tt} = cu_{xx}$$

Da er $\sigma = \frac{ck}{h^2} < 0$ siden både k og h er positive.

Fra Von Neumann-stabilitetsanalysen i læreboka vet vi at metodens kjerne, iterasjonen $w_j = A^{-1}w_{j-1} + b$, er stabil for $|1 + 2\sigma(1 - \cos x)| > 1 \Rightarrow \sigma > 0$ (8.17). Siden vi nå fant at for $c < 0$ er $\sigma < 0$, kan ikke bakoverdifferansemetoden være betingelsesløst stabil for varmelikninger med $c < 0$, Q.E.D.

8.2.1b

Skal vise at $u(x,t) = e^{-x-2t}$ er en løsning på

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

med initialbetingelsene

$$\begin{cases} u(x,0) = e^{-x} \text{ for } 0 \leq x \leq 1 \\ ut(x,0) = -2e^{-x} \text{ for } 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = e^{-2t} \text{ for } 0 \leq t \leq 1 \\ u(1,t) = e^{-1-2t} \text{ for } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Viser først at løsningen passer i likninga:

$$
\begin{aligned}
u &= e^{-x-2t} \\
u_x &= -e^{-x-2t} \\
u_{xx} &= e^{-x-2t} \\
u_t &= -2e^{-x-2t} \\
u_{tt} &= 4e^{-x-2t} \\
\Rightarrow u_{tt} &= 4u_{xx}
\end{aligned}
$$

Så tar vi for oss betingelsene:

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= e^{-x-2\cdot 0} = e^{-x} \\
u_t(x,0) &= -2e^{-x-2\cdot 0} = -2e^{-x} \\
u(0,t) &= e^{-0-2t} = e^{-2t} \\
u(1,t) &= e^{-1-2t}
\end{aligned}
$$

Betingelsene er oppfylt, så u er en gyldig løsning av likningen.

8.2.3

Skal vise at $u_1(x,t) = \sin \alpha x \cos c\alpha t$ og $u_2(x,t) = e^{x+ct}$ er løsninger av bølgelikningen $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

8.2.3 – Løsning 1

Deriverer u_1:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sin \alpha x \cos c\alpha t \\
u_{1t} &= -c\alpha \sin \alpha x \sin c\alpha t \\
u_{1tt} &= -c^2\alpha^2 \sin \alpha x \cos c\alpha t \\
u_{1x} &= \alpha \cos \alpha x \cos c\alpha t \\
u_{1xx} &= -\alpha^2 \sin \alpha x \cos c\alpha t
\end{aligned}
$$

Setter inn i likningens to sider:

$$
\begin{aligned}
u_{1tt} &= -c^2\alpha^2 \sin \alpha x \cos c\alpha t \\
c^2 u_{1xx} &= -\alpha^2 \sin \alpha x \cos c\alpha t \\
u_{1tt} &= c^2 u_{1xx} \\
-c^2\alpha^2 \sin \alpha x \cos c\alpha t &= -c^2\alpha^2 \sin \alpha x \cos c\alpha t
\end{aligned}
$$

Har da vist at u_1 er en løsning på bølgelikningen.

8.2.3 – Løsning 2

Deriverer u_2:

$$
\begin{aligned}
u_2 &= e^{x+ct} \\
u_{2t} &= ce^{x+ct} \\
u_{2tt} &= c^2 e^{x+ct} \\
u_{2x} &= e^{x+ct} \\
u_{2xx} &= e^{x+ct}
\end{aligned}
$$

Setter inn i likningens to sider:

$$
\begin{aligned}
u_{2tt} &= c^2 e^{x+ct} \\
c^2 u_{2xx} &= c^2 e^{x+ct} \\
u_{2tt} &= c^2 u_{2xx} \\
c^2 e^{x+ct} &= c^2 e^{x+ct}
\end{aligned}
$$

Har da vist at u_2 er en løsning på bølgelikningen.