BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG IV. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

I. Tính toán với ánh xạ tuyến tính

Bài 1.1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$f(x, y) = (y, x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Hãy chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 1.2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (4x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3 + \alpha),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ (α là tham số). Hãy xác định α để ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 1.3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1).$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy cho biết ánh xạ f có là một ánh xạ tuyến tính hay không? Tiếp theo hãy giải thích chi tiết câu trả lời được đưa ra.

Bài 1.4. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + 3x_2, 0, x_1 - x_2, 0).$$

với mọi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Hãy chỉ ra rằng f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 1.5. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, 2),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy chỉ ra rằng f không phải là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 1.6. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (|x_1| + |x_2|, 2x_1 + x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3).$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy chỉ ra rằng $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^3$ và với mọi $\lambda > 0$.
b) Hãy chỉ ra rằng f không phải là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 1.7. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_1x_2 + 2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy chỉ ra rằng f không phải là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 1.8. Cho $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ nào đấy. Giả sử rằng tồn tại các phần tử u_1, u_2, u_3 của $\mathbb{R}^3$ sao cho $f(u_1) = (2, 1, 1)$; $f(u_2) = (-1, 2, 3)$; $f(u_3) = (3, 1, 1)$ và $f(u_1 + u_2 + u_3) = (5, 6, 7)$. Hãy chỉ ra rằng f không phải là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 1.9. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại một số thực a để $f(x) = ax$ với mọi $x \in \mathbb{R}^1$.

Bài 1.10. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ là một ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng tồn tại các số thực a, b, c để $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Bài 1.11. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ký hiệu $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Cho biết rằng $f(e_1) = (3, 2, 4)$; $f(e_2) = (2, -1, -3)$; $f(3, 2, 1) = (5, 8, 8)$. Hãy xác định $f(4, 3, -3)$.

Bài 1.12. Cho $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ là một ánh xạ tuyến tính. Tiếp theo cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của $\mathbb{R}^4$ thỏa mãn các điều kiện

$$u_1 + 2u_2 - u_3 + u_4 = 0$$

và $f(4u_1 + 3u_2 + u_3) = 0$. Hãy tính $f(u_4)$ biết rằng $f(u_1) = (1, 2, -1, 2)$ và $f(u_2) = (-2, 1, 1, 1)$.

Bài 1.13. Cho $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ là một ánh xạ tuyến tính. Tiếp theo cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của $\mathbb{R}^4$ thỏa mãn các điều kiện

$$3u_1 - u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 0$$

và $f(u_1 + u_2 - u_3) = f(u_4)$. Hãy tính $f(u_4)$ biết rằng $f(u_1) = (1, 1, -2, 2)$ và $f(u_2) = (3, 1, 1, 2)$.

Bài 1.14. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 + 5x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy xác định x để $f(x) = (5, -2, 17)$.

Bài 1.15. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 - x_3, 3x_1 - 5x_2 + 2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy xác định x để $f(x) = f(1, 2, 5)$.

Bài 1.16. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4, 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Hãy xác định x để $f(x) = f(1, 2, -1, -1)$.

Bài 1.17. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 + x_2 + x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy xác định x để $f(x + 2e_1) = (5, 3, 5)$, trong đó e_1 là phần tử thứ nhất trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Bài 1.18. Cho $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính nào đấy. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của $\mathbb{R}^3$. Hãy tính $f(u_1 + 2u_2 + u_3)$ biết rằng $f(u_1 + u_4) = (3, 2, -4)$; $f(u_2 + u_3) = (1, 5, 2)$ và $f(u_1 + u_3) = (-1, -2, 1)$.

Bài 1.19. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng $u_1, u_2, \ldots, u_{2021}$ là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ sao cho chúng thỏa mãn điều kiện $f(u_i + u_j + u_k) = 0$ với mọi bộ ba chỉ số $i < j < k$. Chứng minh rằng $f(u_i) = 0$ với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, 2021\}$.

Bài 1.20. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(u_1 + u_2) = u_2 + u_3; \quad f(u_2 + u_3) = u_3 + u_1; \quad f(u_3 + u_1) = u_1 + u_2.$$

Chứng minh rằng $f(u_1) = u_2$; $f(u_2) = u_3$, $f(u_3) = u_1$.

Bài 1.21. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(u_1 + u_2 + u_3) = u_1 + u_2 + u_3; \quad f(u_1 - u_2) = u_2 - u_3; \quad f(u_2 - u_3) = u_3 - u_1.$$

Chứng minh rằng $f(u_1) = u_2$; $f(u_2) = u_3$, $f(u_3) = u_1$.

Bài 1.22. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(2u_1 - u_2) = 2u_2 - u_3; \quad f(2u_2 - u_3) = 2u_3 - u_1; \quad f(2u_3 - u_1) = 2u_1 - u_2.$$

Chứng minh rằng $f(u_1) = u_2$; $f(u_2) = u_3$, $f(u_3) = u_1$.

Bài 1.23. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(3u_1 + u_2 - u_3) = 0; \quad f(2u_1 - u_2 + 4u_3) = 0; \quad f(u_1 + u_2 + u_3) \neq 0.$$

Chứng minh rằng $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ đều khác 0.

Bài 1.24. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính ba chiều U và $f : U \longrightarrow U$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả thiết rằng

$$f(3u_1 - 2u_2) = 3u_1 - 2u_2; \quad f(3u_2 - 2u_3) = 3u_2 - 2u_3; \quad f(3u_3 - 2u_1) = 3u_3 - 2u_1.$$

Hãy chỉ ra rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in U$.

Bài 1.25. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính ba chiều U và $f : U \longrightarrow U$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả thiết rằng

$$f(3u_1 + 2u_2) = 5u_1; \quad f(4u_2 + 3u_3) = 7u_1; \quad f(5u_3 + 4u_1) = 9u_1.$$

Hãy xác định $f(x)$ với mọi $x \in U$.

Bài 1.26. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính bốn chiều U. Hãy cho biết có tồn tại hay không một xạ tuyến tính $f : U \longrightarrow U$ mà nó thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{aligned} f(u_1 + 2u_2 + u_3) &= u_1 + u_2 + u_3, \quad & f(u_2 + 2u_3 + u_4) &= u_2 + u_3 + u_4, \\ f(u_3 + 2u_4 + u_1) &= u_3 + u_4 + u_1, \quad & f(u_4 + 2u_1 + u_2) &= u_4 + u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Bài 1.27. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(u_1 - u_2) = 2u_3; \quad f(u_2 - u_3) = 3u_1; \quad f(u_3 - u_1) = 4u_2.$$

Chứng minh rằng $f(u_2) = \dfrac{5}{3}u_1 + \dfrac{4}{3}u_2$.

Bài 1.28. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(u_1 - u_2) = u_3; \quad f(u_2 - u_3) = 2u_4; \quad f(u_3 - u_4) = 3u_1, \quad f(u_4 - u_1) = 4u_2.$$

Chứng minh rằng $f(u_2) = -\dfrac{3}{10}(u_1 + 4u_2 + 2u_3)$.

Bài 1.29. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(u_1 + u_2) = u_3; \quad f(u_2 + u_3) = 2u_4; \quad f(u_3 + u_4) = 3u_1, \quad f(u_4 + u_1) = 4u_2.$$

Chứng minh rằng $f(u_2) = \dfrac{3}{10}(u_1 - 4u_2 + 2u_3)$.

Bài 1.30. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 5x_3, x_1 + 3x_2 + x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Cho $u = (1, -1, 2)$. Hãy tìm $x \in \mathbb{R}^3$ để

$$f(x + 2u) + f(2x - u) = (11, -7, 18).$$

b) Cho $u = (2, -1, 2)$. Hãy tìm $x \in \mathbb{R}^3$ để

$$f(x + u) + f(x + 2u) + \ldots + f(x + 5u) = f(36x + 108u).$$

II. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Bài 2.1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4, x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, x_1 - x_3 + x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.
b) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.

Bài 2.2. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4, x_1 + x_2, x_3 + x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.

Bài 2.3. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + 3x_2 - x_3, 2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Bài 2.4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)(1, -1, 1, -1, 1),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^5$.

Bài 2.5. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + x_2 - 3x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$
b) Xác định $x \in \mathbb{R}^3$ để $f(x) = (6, 2, 6)$.

Bài 2.6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 - x_4, 3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_3 - 2x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.
b) Tìm tất cả $x \in \mathbb{R}^4$ để $f(x) = f(1, 2, 1, 2)$.

Bài 2.7. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 - 3x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên các cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$, biết rằng

$$a_1 = (0, 2, 0), \quad a_2 = (-2, 0, 0); \quad a_3 = (0, 0, 3).$$

Bài 2.8. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + 2x_2 - 5x_3, 2x_1 + x_2 + 3x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.
b) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$, biết rằng $a_1 = (0, 4, 0)$, $a_2 = (2, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, -1)$.

Bài 2.9. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + 4x_2 - x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm ma trận của f trên cơ sở mới $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (2, 1, -1), \; a_2 = (1, -2, 3), \; a_3 = (3, 2, 1).$$

Bài 2.10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ma trận của f trên cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định ma trận của ánh xạ f trên cơ sở $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, biết rằng

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_2 + 3a_3, \quad b_3 = 4a_1 - a_2 - 2a_3.$$

Bài 2.11. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính ba chiều U và $f : U \longrightarrow U$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả thiết rằng

$$f(u_1 + u_2) = 3u_1 - u_2 + 4u_3; \quad f(u_2 + u_3) = 4u_1 + 3u_2 + u_3; \quad f(u_3 + u_1) = u_1 + 6u_2 + 3u_3.$$

Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở (u).

Bài 2.12. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính ba chiều U và $f : U \longrightarrow U$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả thiết rằng

$$f(u_1+u_2+u_3) = 8u_1+6u_2+3u_3;\;\; f(u_2-u_3) = -4u_1+u_2-3u_3;\;\; f(u_3-u_1) = 3u_1+u_2-3u_3.$$

Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở (u).

Bài 2.13. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính ba chiều U và $f : U \longrightarrow U$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả thiết rằng

$$f(2u_1 - u_2) = 5u_1;\;\; f(2u_2 - u_3) = u_1 + 10u_2 + u_3;\;\; f(2u_3 - u_1) = -u_1 - 6u_2 + 5u_3.$$

Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở (u).

Bài 2.14. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính ba chiều U và $f : U \longrightarrow U$ là một ánh xạ tuyến tính. Giả thiết rằng

$$f(2u_1 - u_2 - u_3) = 0;\;\; f(u_1 + 3u_2 - 4u_3) = 0;\;\; f(2u_1 + 2u_2 - 5u_3) = u_1 + 2u_2 + 3u_3.$$

Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở (u).

Bài 2.15. Trong không gian tuyến tính 3 chiều U với hai cơ sở là $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ trong đó

$$b_1 = 2a_1 - 3a_2 + 4a_3,\;\; b_2 = 5a_1 - a_2 + 3a_3,\;\; b_3 = 4a_1 + 2a_2 - a_3.$$

Hãy xác định ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : U \longrightarrow U$ trên cơ sở (a), biết rằng $f(b_1) = b_2, f(b_2) = b_3$ và $f(b_3) = b_1$.

Bài 2.16. Trong không gian tuyến tính 3 chiều U với hai cơ sở là $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ trong đó

$$b_1 = 2a_1 + a_2 - a_3,\;\; b_2 = a_1 + a_2 + 2a_3,\;\; b_3 = 3a_1 + a_2 - 3a_3.$$

Hãy xác định ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : U \longrightarrow U$ trên cơ sở (a), biết rằng $f(b_1 + b_2) = 3b_1 + b_2 - 5b_3$, $f(b_2 + b_3) = 2b_1 + 3b_2 + 4b_3$ và $f(b_3 + b_1) = b_1 + 4b_2 + 3b_3$.

Bài 2.17. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (5x_1 - 6x_3, 6x_1 - x_2 - 6x_3, -3x_1 + 3x_2 + 2x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Hãy chỉ ra rằng ma trận của f trên cơ sở gồm ba véc tơ sau đây của $\mathbb{R}^3$ là một ma trận đường chéo.

$$a_1 = (2, 2, 1),\;\; a_2 = (1, 1, 0),\;\; a_3 = (1, 0, 1).$$

Bài 2.18. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_2 + 5x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy chỉ ra rằng ma trận của f trên cơ sở mới $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (1, 1, 2),\ \ a_2 = (2, 2, -3),\ \ a_3 = (1, -1, 0)$$

là một ma trận đường chéo.

Bài 2.19. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1+4x_2-2x_3-6x_4, 4x_1+x_2+6x_3+10x_4, 2x_1+6x_2+4x_3-4x_4, -6x_1-10x_2-4x_3+6x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Hãy chỉ ra rằng ma trận của f trên cơ sở gồm bốn véc tơ sau đây của $\mathbb{R}^4$ là một ma trận đường chéo.

$$a_1 = (1, -2, 2, -2),\ \ a_2 = (2, -3, 2, -2),\ \ a_3 = (2, -2, 1, -2),\ \ \ a_4 = (2, -2, 2, -3).$$

Bài 2.20. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (8x_1+5x_2+7x_3+12x_4, -13x_1-6x_2-11x_3-16x_4, -11x_1-7x_2-8x_3-14x_4, 6x_1+2x_2+4x_3+5x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Hãy chỉ ra rằng ma trận của f trên cơ sở gồm bốn véc tơ sau đây của $\mathbb{R}^4$ là một ma trận đường chéo.

$$a_1 = (0, 1, 1, -1),\ \ a_2 = (1, -2, -1, 1),\ \ a_3 = (1, -1, -2, 1),\ \ \ a_4 = (-1, 1, 1, 0).$$

III. Giá trị riêng véc tơ riêng của ma trận và ánh xạ tuyến tính

Bài 3.1. Cho A là một ma trận vuông thực cấp ba. Nếu có

$$\det(A - I) = \det(A + 2I) = \det(A - 5I) = 0$$

thì có thể xác định được tất cả các giá trị riêng của A hay không? Tại sao?

Bài 3.2. Cho A là một ma trận vuông thực cấp 4. Nếu đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9$$

thì các giá trị riêng của A là gì?

Bài 3.3. Xác định đa thức đặc trưng của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -8 & 9 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.4. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận vuông cấp hai sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.5. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận vuông cấp ba sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.6. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ma trận vuông cấp bốn sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.7. Cho a, b là các tham số và cho ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng $x = (1, 1, 1)$ là một véc tơ riêng của A.
b) Hãy xác định tất cả các giá trị riêng của ma trận A.

Bài 3.8. Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.9. Cho a, b là các tham số và cho ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & -b \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng $x = (1, -1, 1)$ là một véc tơ riêng của A.
b) Hãy xác định tất cả các giá trị riêng của ma trận A.

Bài 3.10. Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.11. Cho a, b là các tham số và cho ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ -a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng $x = (1, 1, -1)$ là một véc tơ riêng của A.
b) Hãy xác định tất cả các giá trị riêng của ma trận A.

Bài 3.12. Nếu u_1, u_2 đều là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ của ma trận thực A vuông cấp n thì $2u_1 - u_2$ có là véc tơ riêng của A hay không? Tại sao?

Bài 3.13. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 là các véc tơ riêng của f tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$. Hãy cho biết $u_1 + u_2 - u_3$ có là véc tơ riêng của f hay không? Giải thích tại sao?

Bài 3.14. Cho ma trận A vuông cấp n và có n giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Chứng minh rằng tất cả các giá trị riêng của ma trận $-A$ là $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$.

Bài 3.15. Cho ma trận A vuông cấp n và có n giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Chứng minh rằng tất cả các giá trị riêng của ma trận $A^3 + 2A$ là $\lambda_1^3 + 2\lambda_1, \lambda_2^3 + 2\lambda_2, \ldots, \lambda_n^3 + 2\lambda_n$.

Bài 3.16. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n sao cho $AB = BA$. Giả sử rằng $x \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ riêng của A và $Bx \neq 0$. Hãy chỉ ra rằng Bx cũng là một véc tơ riêng của A.

Bài 3.17. Nếu $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ là một véc tơ riêng của ma trận A thì x có là véc tơ riêng của ma trận $A^2 - A$ hay không? Tại sao?

Bài 3.18. Cho A là một ma trận vuông thực cấp n khả nghịch. Chứng minh rằng nếu tồn tại $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho x là một véc tơ riêng chung của A^3 và A^8 thì x cũng chính là một véc tơ riêng của A.

Bài 3.19. Cho A là một ma trận vuông thực cấp n khả nghịch. Chứng minh rằng nếu tồn tại $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho x là một véc tơ riêng của A^3 ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 8$ và x cũng là một véc tơ riêng của $A^4 + A^2$ thì x cũng chính là một véc tơ riêng của A.

Bài 3.20. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Giả thiết rằng tồn tại $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho x là một véc tơ riêng của $A^2 + A$ và x cũng là một véc tơ riêng của $A^4 + A^3$.
a) Chứng minh rằng x cũng là một véc tơ riêng của $A^3 + A^2$ và $A^5 + A^4$.
b) Véc tơ x có là véc tơ riêng của $A^{2021} + A^{2020}$ hay không? Tại sao?

Bài 3.21. Cho A là một ma trận vuông cấp n sao cho $A^2 - A$ là một ma trận khả nghịch. Giả thiết rằng tồn tại $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho x là một véc tơ riêng của $A^7 - A^6$ và x cũng là một véc tơ riêng của $A^{14} - A^{13}$. Chứng minh rằng x cũng là một véc tơ riêng của A.

Bài 3.22. Cho A là một ma trận vuông cấp n sao cho $A^2 - A$ là một ma trận khả nghịch. Giả thiết rằng tồn tại $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho x là một véc tơ riêng của $A^5 - A^4$ và x cũng là một véc tơ riêng của $A^3 - A^2$. Chứng minh rằng x cũng là một véc tơ riêng của A.

Bài 3.23. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 - 2x_2 + 2x_3, -5x_1 - 10x_2 + 7x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ f.

Bài 3.24. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4, 3x_2 - x_3 + 6x_4, 3x_3 + 5x_4, 3x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.
b) Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ f.

Bài 3.25. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1, -3x_1 + 2x_2, 5x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.
b) Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ f.

Bài 3.26. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy xác định các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ f.

Bài 3.27. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 + x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy xác định các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ f.
c) Hãy xây dựng một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ bao gồm ba véc tơ riêng của f.

Bài 3.28. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)(1, -1, 2, -2, 2)$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Hãy xác định các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính f.

Bài 3.29. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(1, 1, 2, -2, -2)$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Hãy xác định các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính f.

Bài 3.30. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ được xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(1, 1, 1, 1, 1) + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(1, -1, 1, -1, 1)$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Hãy xác định các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ tuyến tính f.

IV. Ma trận chéo hóa được

Bài 4.1. Cho ma trận vuông thực A. Chứng minh rằng nếu đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

thì A là một ma trận chéo hóa được. Kế tiếp hãy xác định một ma trận đường chéo đồng dạng với A.

Bài 4.2. Cho ma trận vuông thực A. Chứng minh rằng nếu đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^2 + 16\lambda - 12$$

thì A là một ma trận chéo hóa được. Kế tiếp hãy xác định một ma trận đường chéo đồng dạng với A.

Bài 4.3. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 2 sau đây là ma trận chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.4. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 3 sau đây là ma trận chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.5. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 3 sau đây là ma trận chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.6. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 4 sau đây là ma trận chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.7. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 4 sau đây là ma trận chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.8. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 2 sau đây là ma trận không chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.9. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 3 sau đây là ma trận không chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.10. Chứng minh rằng các ma trận vuông thực cấp 4 sau đây là ma trận không chéo hóa được

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.11. Cho A là ma trận vuông thực cấp 3 chéo hóa được và A đồng dạng với ma trận chéo sau đây

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $A^4 + 2A^3$ cũng chéo hóa được và hãy xác định một ma trận chéo đồng dạng với $A^4 + 2A^3$.

Bài 4.12. Cho A là một ma trận vuông cấp n chéo hóa được. Chứng minh rằng $A^2 + 4A$ cũng là một ma trận chéo hóa được.

Bài 4.13. Cho A là một ma trận vuông thực. Hãy xác định đa thức đặc trưng của ma trận A^2 biết rằng đa thức đặc trưng của A là $P_A(\lambda) = \lambda - \lambda^3$.

Bài 4.14. Cho A là một ma trận vuông đồng dạng với ma trận B và B là một ma trận chéo hóa được. Hãy cho biết ma trận A có chéo hóa được hay không? Tại sao?

Bài 4.15. Cho A là một ma trận vuông đồng dạng với ma trận B và B là một ma trận không chéo hóa được. Hãy cho biết ma trận A có chéo hóa được hay không? Tại sao?

Bài 4.16. Cho A là một ma trận vuông cấp n không chéo hóa được. Chứng minh rằng ma trận $A + 2I$ cũng không chéo hóa được.

Bài 4.17. Cho A là một ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn điều kiện

$$r(A) = r(A + 2I) = r(A - 5I) = 2.$$

Hãy cho biết ma trận A có chéo hóa được hay không? Tại sao?

Bài 4.18. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng A là ma trận không chéo hóa được.
b) Hãy tính A^2 và chỉ ra rằng A^2 là ma trận chéo hóa được.

Bài 4.19. Cho ma trận vuông cấp 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Tính A^3 và chỉ ra rằng A^3 là ma trận chéo hóa được.
b) Hãy chỉ ra rằng A là ma trận không chéo hóa được.

Bài 4.20. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng với mọi $k \geqslant 1$, ma trận A^k là ma trận không chéo hóa được.

Bài 4.21. Hãy xác định một ma trận đường chéo đồng dạng với ma trận vuông cấp 2 sau đây (nếu có)

$$a)\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad b)\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.22. Hãy xác định một ma trận đường chéo đồng dạng với ma trận vuông cấp 3 sau đây (nếu có)

$$a)\ A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad b)\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad c)\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.23. Cho hai ma trận đường chéo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy cho biết A, B có là các ma trận đồng dạng với nhau hay không? Nếu có hãy xây dựng ma trận chuyển T để $B = T^{-1}AT$.

Bài 4.24. Cho ma trận vuông cấp 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng, nếu $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ thì $Ax = (x_1 + x_3 + x_5)u_1 + (x_2 + x_4)u_2$ với

$$u_1 = (1, 0, 1, 0, 1), \qquad u_2 = (0, 1, 0, 1, 0).$$

b) Từ kết quả câu a hãy chỉ ra rằng ma trận A có hai giá trị riêng khác 0 là $\lambda_1 = 3$ và $\lambda_2 = 2$. Tiếp theo hãy xác định các véc tơ riêng ứng với hai giá trị riêng này.
c) Hãy tìm tất cả các véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 0$.
d) Từ kết quả của b, c hãy lựa chọn một cơ sở của $\mathbb{R}^5$ gồm các véc tơ riêng của A để chỉ ra rằng A là một ma trận chéo hóa được. Hãy đưa ra một ma trận đường chéo đồng dạng với A.

Bài 4.25. Cho ma trận vuông cấp 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng, nếu $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ thì $Ax = (x_1 + x_2 + x_3)u_1 + (x_4 + x_5)u_2$ với

$$u_1 = (1, 1, 1, 2, 2), \qquad u_2 = (2, 2, 2, 1, 1).$$

b) Hãy xác định các giá trị riêng khác 0 của ma trận A.
c) Hãy chỉ ra A là một ma trận chéo hóa được và hãy đưa ra một ma trận đường chéo đồng dạng với A.

Bài 4.26. Hãy xác định ma trận đường chéo đồng dạng với ma trận sau (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 10 \\ 2 & 3 & \dots & 11 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 10 & 11 & \dots & 19 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.27. Cho A là một ma trận vuông thực cấp 4 với các cột giống nhau và tổng của 4 hàng khác với hàng 0. Hãy chỉ ra rằng A là một ma trận chéo hóa được.

Bài 4.28. Hãy xây dựng một ví dụ về một ma trận vuông thực cấp 4 với các cột giống nhau mà là ma trận không chéo hóa được.

Bài 4.29. Cho ma trận vuông cấp hai

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hãy chéo hóa ma trận A và từ đó tính A^n.

Bài 4.30. Cho ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -6 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy chéo hóa ma trận A và từ đó tính A^n.

V. Các bài toán ứng dụng

Bài 5.1. Một công ty sản xuất một sản phẩm công nghệ có ba cấu hình 1, 2, 3. Cho biết chi phí để sản suất 1000 sản phẩm ở mỗi cấu hình 1, 2, 3 tương ứng là các véc tơ

$$v_1 = (60, 1, 20, 25); \quad v_2 = (80, 2, 24, 27); \quad v_3 = (100, 3, 30, 30).$$

Trong các véc tơ có dạng $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ được đưa ra ở trên thì y_1 là chi phí vật tư, y_2 là chi phí bao bì phụ kiện, y_3 là chi phí nhân công và y_4 là chi phí máy móc và vận hành. Các đơn đặt hàng của các đối tác phân phối sản phẩm được mô tả bằng các véc tơ $u = (x_1, x_2, x_3)$ với x_i là số lượng sản phẩm cấu hình thứ i được đặt hàng. Ký hiệu $f(u)$ là chi phí sản suất của công ty để thực hiện đơn hàng u.
a) Hãy viết công thức mô tả ánh xạ f.
b) Với công thức ở câu (a), f được nhìn nhận như là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^3$ đến $\mathbb{R}^4$ (mở rộng phạm vi biến thiên của x_1, x_2, x_3). Chứng minh rằng ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 5.2. Một đại lý lớn cung cấp các loại giấy in khổ A_4 cho các nhà bán lẻ. Giá cung cấp mỗi ram giấy Double A, IK plus, Paper one tương ứng là $57, 55, 54$ (nghìn đồng). Ký hiệu $u = (x_1, x_2, x_3)$ là đơn hàng của nhà bán lẻ với x_1 là số ram Double A, x_2 là số ram IK plus, x_3 là số ram Paper one. Ký hiệu $f(u)$ là số tiền đại lý thu về từ đơn hàng u của nhà bán lẻ.
a) Hãy viết công thức mô tả ánh xạ f.
b) Với công thức ở câu (a), f được nhìn nhận như là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^3$ đến $\mathbb{R}^1$. Chứng minh rằng ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 5.3. Một nhà hàng sử dụng một thực đơn gồm 20 món ăn để cung cấp cho thực khách. Số liệu trong mỗi hóa đơn được khách hàng thanh toán sau khi ăn được nhìn nhận là một véc tơ $u = (x_1, x_2, \dots, x_{20})$, trong đó x_i là số lượng phần ăn của món ăn thứ i mà khách hàng đã sử dụng. Giá các món ăn tương ứng là $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ cho mỗi phần ăn. Ký hiệu $f(u)$ là số tiền nhà hàng thu được từ đơn hàng u.
a) Hãy viết công thức mô tả ánh xạ f.
b) Với công thức ở câu (a), f được nhìn nhận như là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^{20}$ đến $\mathbb{R}^1$. Chứng minh rằng ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 5.4. Một loại tinh dầu được chiết suất từ lá, thân và rễ của một loại cây. Theo các nghiên cứu, số ml tinh dầu chiết suất được từ mỗi kg lá, thân, rễ của loại cây này tương ứng là a_1, a_2, a_3 trong điều kiện nguyên liệu đạt tiêu chuẩn. Trong mỗi lần mua nguyên liệu thô từ nông dân, xưởng sản xuất ghi lại số liệu dưới dạng $u = (x_1, x_2, x_3)$ với x_1 là số kg lá, x_2 là số kg thân và x_3 là số kg rễ đã được tách riêng và đạt tiêu chuẩn. Ký hiệu $f(u)$ là số ml tinh dầu thu được từ lượng nguyên liệu có số liệu là u.
a) Hãy viết công thức mô tả ánh xạ f.
b) Với công thức ở câu (a), f được nhìn nhận như là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^3$ đến $\mathbb{R}^1$. Chứng minh rằng ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 5.5. Cấp phối bê tông mác 150, 200, 250 cho $1m^3$ bê tông được đưa ra theo tiêu chuẩn của Bộ xây dựng trong bảng sau

Mác bê tông	Xi măng (kg)	Cát vàng (m^3)	Đá 1×2 (m^3)	Nước (lít)
150	288,02	0,5	0,913	185
200	350,55	0,48	0,9	185
250	415,12	0,46	0,88	185

Lượng sản phẩm của một trạm trộn trong một tuần được ký hiệu là $u = (x_1, x_2, x_3)$ với x_1, x_2, x_3 tương ứng là số m^3 bê tông mác $150, 200, 250$. Số lượng nguyên vật liệu được sử dụng để sản xuất lượng sản phẩm u được ký hiệu là $f(u)$.
a) Hãy viết công thức mô tả ánh xạ $f(u)$.
b) Với công thức ở câu (a), f được nhìn nhận như là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^3$ đến $\mathbb{R}^4$. Chứng minh rằng ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 5.6. Một nhà máy sản suất và lắp ráp ba loại sản phẩm công nghệ khác nhau. Mối quan hệ giữa số lượng sản phẩm được sản suất theo đơn hàng với thời gian thực hiện và nhân công được mô tả bằng một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ theo công thức

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_2, 55x_1 + 39x_2 + 84x_3)$$

trong đó x_1, x_2, x_3 tương ứng là số lượng (tính theo nghìn sản phẩm) của các sản phẩm thứ nhất, thứ 2 và thứ 3. Ảnh của ánh xạ f là các véc tơ 2 chiều $y = (y_1, y_2)$ với y_1 là thời gian sản suất số lượng sản phẩm của đơn hàng và y_2 là số công (đã quy chuẩn).
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f.
b) Cho biết thời gian thực hiện và nhân công của một đơn hàng là $y = (19, 372)$. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của đơn hàng.

Bài 5.7. Ta coi tất cả các véc tơ $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ là các véc tơ có điểm gốc trùng với gốc tọa độ O của hệ tọa độ Descartes Oxy. Với cách nhìn này, hãy chỉ ra rằng phép quay tâm O với góc quay φ chính là một ánh xạ tuyến tính từ không gian $\mathbb{R}^2$ vào chính nó. Hãy chỉ ra rằng ma trận của phép quay này trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Bài 5.8. Để mô tả một phép quay của không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$ với trục quay là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ, người ta sử dụng một ma trận trực giao A (nghĩa là $A^T A = I$) có định thức là 1. Khi đó phép quay sẽ biến đổi mỗi véc tơ $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ (được coi là véc tơ có điểm gốc trùng với gốc tọa độ O của hệ tọa độ Descartes $Oxyz$) thành một véc tơ $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ mà $y = Ax$.
a) Hãy chỉ ra rằng, mỗi phép quay quanh một trục nào đấy đi qua gốc tọa độ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ đến chính nó.
b) Cho biết rằng, ma trận A của phép quay có một giá trị riêng thực duy nhất là $\lambda = 1$. Véc tơ chỉ phương của trục quay là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$. Hãy xác định trục quay của phép quay có ma trận sau đây:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.9. Giả sử rằng một phép quay của không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$ với trục quay là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ là phép quay có ma trận sau đây

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy xác định trục quay của phép quay nói trên.
b) Cho biết rằng hai giá trị riêng phức của A là $\lambda = \cos\varphi \pm \sin\varphi$ với φ là góc quay. Cho biết thêm rằng góc quay sẽ đổi dấu nếu ta đổi hướng của trục quay và như vậy ta có thể đổi hướng của trục quay nếu cần để $\sin\varphi > 0$. Hãy xác định góc quay φ của phép quay nói ứng với $\sin\varphi > 0$ (với hướng của trục quay được lựa chọn phù hợp).

Bài 5.10. Cho ma trận của phép quay trong không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng trục quay là trục tọa độ thứ ba Oz.
b) Hãy chỉ ra rằng góc quay chính là φ (theo một hướng phù hợp của trục Oz).

Bài 5.11. Cho ma trận của phép quay trong không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng trục quay là trục tọa độ thứ hai Oy.
b) Hãy chỉ ra rằng góc quay chính là φ (theo một hướng phù hợp của trục Oy).

Bài 5.12. Cho ma trận của phép quay trong không gian 3 chiều $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng trục quay là trục tọa độ thứ nhất Ox.
b) Hãy chỉ ra rằng góc quay chính là φ (theo một hướng phù hợp của trục Ox).

Bài 5.13. Các phép quay $R_z(\varphi)$ quanh trục tọa độ thứ ba Oz của hệ tọa độ $Oxyz$ được mô tả bằng ma trận

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Phôi vi phân của các phép quay $R_{z,\varphi}$ được định nghĩa là

$$J_z = i \lim_{\varphi \to 0} \frac{R_z(\varphi) - R_z(0)}{\varphi}.$$

Hãy xác định ma trận J_z.
b) Hãy chỉ ra rằng $R_z(\varphi) = e^{-i\varphi J_z}$.

Bài 5.14. Ma trận mô tả các phép quay quanh trục tọa độ thứ nhất Ox của hệ tọa độ $Oxyz$ là

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Tính phôi vi phân của các phép quay $R_x(\varphi)$ theo công thức

$$J_x = i \lim_{\varphi \to 0} \frac{R_x(\varphi) - R_x(0)}{\varphi}.$$

b) Hãy chỉ ra rằng $R_x(\varphi) = e^{-i\varphi J_x}$.

Bài 5.15. Ma trận mô tả các phép quay quanh trục tọa độ thứ hai Oy của hệ tọa độ $Oxyz$ là

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

a) Tính phôi vi phân của các phép quay $R_y(\varphi)$ theo công thức

$$J_y = i \lim_{\varphi\to 0} \frac{R_y(\varphi) - R_y(0)}{\varphi}.$$

b) Hãy chỉ ra rằng $R_y(\varphi) = e^{-i\varphi J_y}$.

Bài 5.16. Một phép quay của hệ tọa độ $Oxyz$ quanh một trục tùy ý chứa gốc O được mô tả theo phương $n = (n_x, n_y, n_z)$ của trục quay ($n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$) và theo góc quay φ. Ma trận của phép quay như thế được chỉ ra là ma trận sau

$$R_n(\varphi) = \begin{pmatrix} c + (1-c)n_x^2 & n_x n_y(1-c) - s n_z & n_x n_z(1-c) + s n_y \\ n_y n_x(1-c) + s n_z & c + (1-c)n_y^2 & n_y n_z(1-c) - s n_x \\ n_z n_x(1-c) - s n_y & n_z n_y(1-c) + s n_x & c + (1-c)n_z^2 \end{pmatrix}$$

trong đó $c = \cos\varphi,\ \ s = \sin\varphi$.
a) Chỉ ra rằng phôi vi phân của của phép quay nói trên

$$J = i \lim_{\varphi\to 0} \frac{R_n(\varphi) - R_n(0)}{\varphi}$$

là ma trận

$$J = i \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Người ta chỉ ra được rằng $R_n(\varphi) = e^{-i\varphi J}$. Hãy nhận xét về đẳng thức này khi n là một trong các véc tơ sau: $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$.

Bài 5.17. Phép chiếu song song là một công cụ toán học được sử dụng trong việc thực hiện các bản vẽ kỹ thuật và trong đồ họa máy tính. Nhắc lại rằng, việc thực hiện phép chiếu song song để chiếu các điểm của không gian 3 chiều theo một phương chiếu $u = (u_1, u_2, u_3)$ lên một mặt phẳng đi qua gốc tọa độ là một ánh xạ tuyến tính. Xét phép chiếu P có phương chiếu là $u = (1,2,1)$ lên mặt phẳng có phương trình là

$$x + y - 2z = 0.$$

a) Hãy xác định ma trận của phép chiếu P trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Một chương trình đồ họa cần vẽ hình chiếu của tam giác ABC với $A = (3,5,-1)$, $B = (3,2,2)$, $C = (5,2,3)$. Hãy xác định tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC.

Bài 5.18. Xét phép chiếu song song P có phương chiếu là $u = (3, 2, 4)$ lên mặt phẳng có phương trình là
$$4x + 2y + z = 0.$$
a) Hãy xác định ma trận của phép chiếu P trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Một chương trình đồ họa cần vẽ hình chiếu của tam giác ABC với $A = (2, 2, 1)$, $B = (1, 5, 2)$, $C = (4, 3, 3)$. Hãy xác định tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC.

Bài 5.19. Xét phép chiếu song song P có phương chiếu là $u = (1, 1, 1)$ lên mặt phẳng có phương trình là
$$x + y + 2z = 4.$$
a) Cho $A = (x, y, z)$ là một điểm tùy ý của không gian $\mathbb{R}^3$. Hãy chỉ ra rằng nếu $A' = (x', y', z')$ là hình chiếu của A theo phương chiếu u lên mặt phẳng $x + y + 2z = 0$ và $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng $x+y+2z = 4$ thì $\overrightarrow{A'A_1} = (1, 1, 1)$.
b) Lập ma trận của phép chiếu song song với phương chiếu u lên mặt phẳng $x+y+2z = 0$.
c) Một chương trình đồ họa cần vẽ hình chiếu của tam giác ABC với $A = (5, 6, 3)$, $B = (1, 2, 4)$, $C = (-4, 2, 1)$ theo phép chiếu P. Hãy xác định tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC.

Bài 5.20. Trong thuyết tương đối hẹp, việc chuyển đổi dữ liệu không - thời gian giữa hai hệ quy chiếu quán tính được mô tả như sau:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(I_3 + \frac{\gamma - 1}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} vv^T\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{\gamma}{c} tv,$$
$$t' = -\frac{\gamma}{c^2}(v_1 x + v_2 y + v_3 z) + \gamma t.$$

Trong công thức trên (x, y, z) và (x', y', z') là tọa độ không gian của biến cố được quan sát trong hệ quy chiếu quán tính thứ nhất và thứ hai; t, t' là dữ liệu về thời gian của biến cố trong hai hệ quy chiếu quán tính; $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ là véc tơ cột mô tả vận tốc chuyển động đều của hệ quy chiếu thứ hai so với hệ quy chiếu thứ nhất; c là vận tốc ánh sáng, c xấp xỉ 299.792.458 mét/giây, khi lấy số đo độ dài (cho $x, y, \ldots$) là năm ánh sáng (quãng đường khoảng $9466, 4108$ tỷ km mà ánh sáng đi được trong 1 năm) và lấy số đo của t là năm thì c được quy chuẩn là 1; $\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}$.
a) Hãy chỉ ra rằng việc chuyển đổi số liệu không thời gian $u = (x, y, z, t)$ của các biến cố trong hệ quy chiếu quán tính thứ nhất sang số liệu không thời gian $f(u) = (x', y', z', t')$ trong hệ quy chiếu quán tính thứ hai là một ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.
b) Ma trận của ánh xạ tuyến tính f là gì?