BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG I. MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

I. Ma trận và các phép tính cơ bản

Bài 1.1. Cho các ma trận vuông cấp ba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hãy tính $AB - BA$.

Bài 1.2. Cho các ma trận vuông cấp 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Tính $A^2 + 2AB + B^2$.
b) Tính $(A + B)^2$ và so sánh với kết quả câu a.

Bài 1.3. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính AB và BA.

Bài 1.4. Cho các ma trận vuông cấp 2

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra các đẳng thức

$$HE - EH = 2E; \quad HF - FH = -2F; \quad EF - FE = H.$$

Bài 1.5. Bộ ba ma trận của Pauli là các ma trận

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I_2$.
b) Hãy chỉ ra các đẳng thức sau

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3; \quad \sigma_2\sigma_3 = \sigma_1; \quad \sigma_3\sigma_1 = \sigma_2.$$

Bài 1.6. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $A^n = A$ với mọi $n \geqslant 2$.

Bài 1.7. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng $A^6 = I_3$.
b) Hãy tính A^{2021}.

Bài 1.8. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính A^{2021}.

Bài 1.9. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính A^{2021}.

Bài 1.10. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $A^{2021} = A$.

Bài 1.11. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $A^{2021} = 2^{2020}A$.

Bài 1.12. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ -6 & -6 & -8 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $A^{2021} = 2^{1010}A$.

Bài 1.13. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $A^{2021} = 3^{1010}A$.

Bài 1.14. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy tính AB và BA.
b) Tính $(AB)^{2021}$ và $(BA)^{2021}$.

Bài 1.15. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ -4 & 13 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy tính AB và BA.
b) Tính $(AB)^{2021}$ và $(BA)^{2021}$.

Bài 1.16. Cho các ma trận vuông cấp 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Tính A^{2021} và B^{2021}.
b) Tính $(AB)^{2021} - A^{2021}B^{2021}$.
c) Tính $(BA)^{2021} - B^{2021}A^{2021}$.

Bài 1.17. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy tính A^{2021} và B^{2021}.
b) Hãy tính $(AB)^{2021}$ và $(BA)^{2021}$.

Bài 1.18. Cho các ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Tính A^n, B^n với $n \geqslant 2$.
b) Tính AB và BA. Từ đó chỉ ra rằng $(A+B)^n = A^n + B^n$.
c) Tính $(A+B)^{2021}$.

Bài 1.19. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = A^{99} = A$ thì $A^k = A$ với mọi $k \geqslant 2$.

Bài 1.20. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = A$ và $A^{28} = -A$ thì $A^k = (-1)^{k-1}A$ với mọi $k \geqslant 2$.

Bài 1.21. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = A^{62} = I$ thì $A = I$.

Bài 1.22. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = -I$ và $A^{50} = I$ thì $A = -I$.

Bài 1.23. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = 0$ và $A^5 = A$ thì $A = 0$.

Bài 1.24. Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = I$ và $A^8 = A$ thì $A = I$.

Bài 1.25. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $(AB)^8 = AB$ và $(BA)^{2021} = 0$ thì $AB = 0$.

Bài 1.26. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $(AB)^{54} = AB$ và $(BA)^{2021} = BA$ thì $(AB)^2 = AB$ và $(BA)^2 = BA$.

Bài 1.27. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $(AB)^{101} = 100.AB$ và $(BA)^{2021} = 2020.BA$ thì $AB = BA = 0$.

Bài 1.28. Chứng minh rằng nếu A là một ma trận vuông cấp 2 tùy ý thì tích

$$B = A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A$$

là một ma trận đối xứng.

Bài 1.29. Một ma trận A cỡ 2×2 được gọi là một ma trận Lorentz cấp 2 nếu nó thỏa mãn yêu cầu

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng ma trận

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

là một ma trận Lorentz.
b) Hãy chỉ ra rằng tất cả các ma trận Lorentz thực cấp 2 đều thuộc về một trong 2 dạng sau đây

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad A = \pm \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & -1 \end{pmatrix},$$

trong đó k là một số thực và $k \in [0, 1)$.

Bài 1.30. Có 5 ma trận vuông cấp 4 đặc biệt được gọi là các ma trận Dirac. Bốn ma trận đầu tiên trong số chúng là các ma trận sau

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận cuối cùng trong các ma trận Dirac là $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^3$.
a) Hãy chỉ ra rằng

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Hãy chỉ ra rằng

$$(\gamma^0)^2 = (\gamma^5)^2 = I_4.$$

c) Hãy chỉ ra rằng

$$(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -I_4.$$

II. Định thức

Bài 2.1. Tính các định thức cấp 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -x & -x \\ x & -1 & -x \\ x & x & -1 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.2. Tính các định thức cấp 4

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.3. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $\det(I_2 - AB)$ và $\det(2I_3 + BA)$.

Bài 2.4. Cho các ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $\det(AB)$.

Bài 2.5. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $\det(A^n)$ với mỗi $n \geqslant 1$.

Bài 2.6. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy tính $\det(2A^3B^2 + 3A^2B^3)$.
b) Hãy tính $\det(4A^3B^2 + A^2B^2)$.

Bài 2.7. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $\det(2A^4 + 5A^3)$.

Bài 2.8. Cho ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 4 & x & x \\ -x & -2 & x \\ -x & -x & -2 \end{pmatrix}.$$
Hãy tính $\det(A^4 + 2A^3)$.

Bài 2.9. Cho các ma trận vuông cấp 3
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
Hãy tính $\det(A + B) - \det A - \det B$.

Bài 2.10. Cho ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
Tính $\det(A^3 + 5A^2) - (\det A)^3 - 5(\det A)^2$.

Bài 2.11. Cho các ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Hãy tính $\det(2I + (AB)^{2021})$.

Bài 2.12. Chứng minh rằng không tồn tại ma trận thực A vuông cấp 3 sao cho $A^2 = -I$.

Bài 2.13. Cho ma trận vuông cấp 3
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$
Hãy chỉ ra rằng không thể tồn tại ma trận thực B vuông cấp 3 để cho $B^2 = A$.

Bài 2.14. Cho các ma trận vuông cấp 3
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Hãy chỉ ra rằng, không tồn tại ma trận X vuông cấp 3 sao cho $AX = B$.

Bài 2.15. Cho 2 ma trận A, B vuông thực cấp 3 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $\det A \neq \det B$.

Bài 2.16. Cho A là một ma trận vuông cấp 3. Chứng minh rằng nếu $\det(2A) = 2\det A$ thì $\det A = 0$.

Bài 2.17. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp 4 nào đấy. Hãy so sánh định thức của các ma trận sau

$$M_1 = (AB)^{2021};\ M_2 = (BA)^{2021};\ M_3 = A^{2021}B^{2021};\ M_4 = B^{2021}A^{2021}.$$

Bài 2.18. Cho A là hai ma trận vuông cấp n sao cho $\det(A^4+A^3) = \det(A^3+A^2) = 5$. Chứng minh rằng $\det(A^5 + A^4) = 5$.

Bài 2.19. Cho A là hai ma trận vuông cấp n sao cho $\det(A^6+A^5)+\det(A^5+A^4) = 0$. Chứng minh rằng $\det(A^4 + A^3) + \det(A^3 + A^2) = 0$.

Bài 2.20. Cho A là ma trận phản đối xứng cấp lẻ. Chứng minh rằng $\det A = 0$.

Bài 2.21. Cho A, B là các ma trận đối xứng cấp 5. Chứng minh rằng

$$\det(AB - BA) = 0.$$

Bài 2.22. Tính các định thức cấp 3

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & x & -x \\ -x & 2 & x \\ x & -x & -1 \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -x & x \\ x & -1 & -x \\ -x & x & 3 \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -x & -2 & -x \\ -x & x & 3 \end{vmatrix},\quad D_4 = \begin{vmatrix} -2 & -x & x \\ x & 5 & x \\ -x & -x & -3 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.23. Tính các định thức cấp 4

$$D_1 = \begin{vmatrix} x & 1 & x & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & x \\ 1 & 1 & x & x \end{vmatrix},\qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1+x & -x & x & -x \\ -x & 1+x & -x & x \\ x & -x & 1+x & -x \\ -x & x & -x & 1+x \end{vmatrix}.$$

Bài 2.24. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x & x & x & 1 \\ x & 1 & x & x \\ 1 & x & 1 & x \\ x & x & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.25. Tính định thức
$$D = \begin{vmatrix} 2 & x & x & 1 \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Bài 2.26. Tính định thức
$$D = \begin{vmatrix} x & x-1 & x-1 & x-1 \\ x+1 & x & x-2 & x-2 \\ x+1 & x+2 & x & x-3 \\ x+1 & x+2 & x+3 & x \end{vmatrix}.$$

Bài 2.27. Giải phương trình
$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ -1 & -2 & x \\ 2 & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

Bài 2.28. Giải phương trình: $\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 2 & 1 & x \\ x & 2 & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Bài 2.29. Tính giá trị định thức
$$D = \begin{vmatrix} x & 2 & x & 2 \\ x & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & x \\ 2 & x & 2 & x \end{vmatrix}.$$

Bài 2.30. Tính định thức cấp 11
$$D = \begin{vmatrix} x & x-1 & x-2 & \dots & x-10 \\ x+1 & x & x-1 & \dots & x-9 \\ x+2 & x+1 & x & \dots & x-8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+10 & x+9 & x+8 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

III. Ma trận nghịch đảo

Bài 3.1. Tính nghịch đảo của các ma trận sau
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x & x+2 \\ x-2 & x \end{pmatrix}.$$

Bài 3.2. Tính nghịch đảo của các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x & -x & 1 \\ -x & 2 & x \\ -3 & x & -x \end{pmatrix}.$$

Bài 3.3. Tính nghịch đảo của các ma trận sau

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & x & x \\ -x & 2 & -x \\ -x & x & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -x & x \\ x & -3 & x \\ x & x & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 4 & x & x \\ x & x & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.4. Giải phương trình ma trận

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.5. Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.6. Giải phương trình ma trận

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.7. Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.8. Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.9. Chứng minh rằng phương trình ma trận sau không có nghiệm

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.10. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 3 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận A, B có phải là các ma trận khả nghịch hay không? Hãy giải thích chi tiết.

Bài 3.11. Tìm x để ma trận sau khả nghịch:

$$A = \begin{pmatrix} a & x & x & x \\ b & b & x & x \\ c & c & c & x \\ d & d & d & d \end{pmatrix}$$

với a, b, c, d là các số cho trước.

Bài 3.12. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Hãy tìm x để $A^4 - 2A^3$ là một ma trận khả nghịch.

Bài 3.13. Tìm x để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & 3 & 3 \\ x & x & 2 & 2 \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 3.14. Tìm x để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & 1 & x \\ x & x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x & x \end{pmatrix}.$$

Bài 3.15. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^3B^3 = I$ và $(AB^2)^2 = B^2$ thì $B = A^{-1}$.

Bài 3.16. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $(AB)^{2021} = I$ và $ABA = A$ thì $B = A^{-1}$.

Bài 3.17. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{12}B^{12} = I$ và $A^{2021}B^{2021} = I$ thì $B = A^{-1}$.

Bài 3.18. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^2 + 3A$ và $B^2 + 3BA$ là hai ma trận khả nghịch thì $3A^4B^3 + A^3B^4$ cũng là một ma trận khả nghịch.

Bài 3.19. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn điều kiện $AB = A + B$. Chứng minh rằng $I - A$ và $I - B$ là các ma trận khả nghịch. Tiếp theo hãy chỉ ra đẳng thức $AB = BA$ có đúng hay không?

Bài 3.20. Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn điều kiện $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0$.
a) Chứng minh rằng A là một ma trận khả nghịch.
b) Chứng minh rằng $I + 2A$ là một ma trận khả nghịch.
c) Chứng minh rằng $A^{2021} + 2A^{2020}$ là một ma trận khả nghịch.

Bài 3.21. Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^3 = 0$. Chứng minh rằng $I + A$ và $I - A + A^2$ là các ma trận khả nghịch.

Bài 3.22. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = 0$ thì $I + A$ là một ma trận khả nghịch.

Bài 3.23. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $(A^2+2A)^{100} = 0$ thì $I + A$ là một ma trận khả nghịch.

Bài 3.24. Cho A là một ma trận vuông cấp n.
a) Chứng minh rằng $2I + (A^2 + 3A)(2A + 3) = (I + A)(2I + 7A + 2A^2)$.
b) Chứng minh rằng nếu $(A^2 + 3A)^{100} = 0$ thì $I + A$ là một ma trận khả nghịch.

Bài 3.25. Cho A là một ma trận vuông khả nghịch cấp $n > 2$. Hãy chứng minh rằng nếu $A^{-1} = (2A + 3B)^{-1}$ thì $A = -3B$.

Bài 3.26. Cho A, B, C là ba ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $(A+2B)^{-1} = (B + 2C)^{-1} = (C + 2A)^{-1}$ thì $A = B = C$.

Bài 3.27. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu A và $I + A$ là hai ma trận khả nghịch thì $I + A^{-1}$ cũng là một ma trận khả nghịch và ta có

$$(I + A)^{-1} + (I + A^{-1})^{-1} = I.$$

Bài 3.28. Cho A là một ma trận vuông sao cho $I - 3A$ và $I + 2A$ là hai ma trận khả nghịch. Đặt $B = (I - 3A)^{-1}, C = (I + 2A)^{-1}$. Chứng minh rằng B, C đều giao hoán với A và

$$ABC(I + 6A) = BC - I.$$

Bài 3.29. Cho A là một ma trận vuông sao cho $I + 3A$ và $I - 2A$ là hai ma trận khả nghịch. Đặt $B = (I + 3A)^{-1}, C = (I - 2A)^{-1}$. Chứng minh rằng B, C đều giao hoán với A và

$$ABC(I - 6A) = I - BC.$$

Bài 3.30. Chứng minh rằng nếu một ma trận đối xứng là ma trận khả nghịch thì nghịch đảo của nó cũng là một ma trận đối xứng. Kết quả này còn đúng hay không nếu ta thay ma trận đối xứng thành ma trận phản đối xứng.

IV. Hạng của ma trận

Bài 4.1. Hãy chỉ ra rằng các ma trận dưới đây đều có định thức khác 0. Từ kết quả đó hãy cho biết kết luận về hạng của chúng.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & x & x \\ -x & 5 & x \\ -x & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.2. Hãy sử dụng định nghĩa hạng của ma trận để chỉ ra rằng ma trận sau có hạng bằng 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.3. Một ma trận được gọi là *ma trận có hạng đủ* nếu nó có hạng đúng bằng kích thước lớn nhất của các định thức con của nó. Nói cách khác, ma trận A có hạng đủ thì hạng của nó bằng số hàng hoặc bằng số cột của ma trận.
a) Nếu A là một ma trận hạng đủ và A có kích thước là 3×4 thì hạng của A là bao nhiêu.
b) Nếu B là một ma trận hạng đủ và B có kích thước là 6×4 thì hạng của B là bao nhiêu.

Bài 4.4. Hãy chỉ ra các ma trận dưới đây là ma trận hạng đủ bằng cách lựa chọn một định thức con cấp 3 của nó và chỉ ra giá trị của định thức được lựa chọn là giá trị khác 0.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.5. Hãy chỉ ra rằng các ma trận sau đều là ma trận hạng đủ

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.6. Hãy chỉ ra rằng các ma trận dưới đây đều có hạng là 3:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x & -x & 2 & -2 \\ -x & 1 & x & -1 \\ 4 & x & -x & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & x & x & 6 \\ -x & -1 & -x & 3 \\ -x & x & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.7. Hãy chỉ ra rằng ma trận dưới đây có hạng là 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.8. Cho ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định các giá trị của x sao cho $r(A) = 2$.

Bài 4.9. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 & x+4 \\ x-1 & x & x+1 & x+2 \\ x-2 & x-1 & x & x+1 \\ x-4 & x-2 & x-1 & x \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng $r(A) = 4$ với mọi x.

Bài 4.10. Cho ma trận vuông cấp 4

$$A = \begin{pmatrix} x+3 & x & x & x \\ x & x-3 & x & x \\ x & x & x-2 & x \\ x & x & x & x+2 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng ma trận A có hạng là 4 với mọi giá trị của x.

Bài 4.11. Tính hạng của ma trận sau theo phương pháp khử Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài 4.12. Hãy chỉ ra rằng các ma trận dưới đây đều có hạng là 2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 7 & 9 & 13 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.13. Hãy chỉ ra rằng các ma trận dưới đây đều có hạng là 3:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 12 & 16 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.14. Tính hạng của ma trận sau theo giá trị của x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \end{pmatrix}.$$

Bài 4.15. Tính hạng của ma trận sau theo giá trị của x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x & x \\ 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.16. Tính hạng của ma trận sau theo x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ x & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & x \end{pmatrix}.$$

Bài 4.17. Tính hạng của ma trận sau theo x

$$A = \begin{pmatrix} x & x-1 & x-2 & x-3 \\ x+1 & x & x-1 & x-2 \\ x+2 & x+1 & x & x-1 \\ x+3 & x+2 & x+1 & x \end{pmatrix}.$$

Bài 4.18. Tính hạng của ma trận sau theo x

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 2 & x \end{pmatrix}.$$

Bài 4.19. Tính hạng của ma trận sau theo x

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & x & x & 1 \\ x & x & 1 & 1 \\ x & 1 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.20. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 1 & x & x \\ 1 & x & 2 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính x biết $r(A) = 2$.

Bài 4.21. Tính hạng của ma trận sau theo giá trị của x:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & x \\ x & x & x & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.22. Tính hạng của ma trận sau theo giá trị của x:

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 1 & x \\ x & 1 & x & 1 \\ 8 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Bài 4.23. Cho ma trận vuông cấp 11

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 11 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 13 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 10 & 11 & 12 & \dots & 20 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $r(A) = 2$.

Bài 4.24. Cho ma trận vuông cấp 12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \dots & 11 & -12 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & \dots & -12 & 13 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & \dots & 13 & -14 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -12 & 13 & -14 & 15 & \dots & -22 & 23 \end{pmatrix}.$$

Hãy chỉ ra rằng $r(A) = 2$.

Bài 4.25. a) Cho A là một ma trận vuông. Chứng minh rằng nếu $r(A) < r(A+I)$ thì $\det A = 0$.
b) Cho A là một ma trận vuông. Chứng minh rằng nếu $\det A = 2$ và $r(A) = 3$ thì $\det(2A) = 16$.

Bài 4.26. Cho A là một ma trận vuông thỏa mãn các điều kiện $\det A = 5$, $r(A) + r(-A) = 6$. Hãy tính $\det(4A^3)$.

Bài 4.27. Cho A là một ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $A^{2021} = 0$ thì $r(I + A) = n$.

Bài 4.28. Cho A là một ma trận vuông thực cấp n. Chứng minh rằng nếu $\det(A^3 + 4A) > \det(A^2 + A)$ thì $r(A) = n$.

Bài 4.29. Cho A là một ma trận vuông cấp 4 sao cho $A^4 = I$. Chứng minh rằng $r(A + 2I) = 4$.

Bài 4.30. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp 4. Chứng minh rằng nếu $r(A)+r(B) = r(A + B)$ thì $\det(A^4B^3 + 2AB^2) = 0$.

V. Các bài toán ứng dụng

Bài 5.1. Ký hiệu $R_{O,\varphi}$ là phép quay của mặt phẳng quanh gốc tọa độ $O = (0, 0)$ theo góc quay φ. Nếu $M(x, y)$ là một điểm nào đấy trên mặt phẳng thì phép quay này sẽ chuyển M thành một điểm mới M' và ta ký hiệu là $M' = R_{O,\varphi}(M)$. Hãy chỉ ra rằng nếu tọa độ của M' là (x', y') thì ta có đẳng thức

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bài 5.2. Cho $I = (a, b)$ là một điểm nào đấy trên mặt phẳng. Ký hiệu $R_{I,\varphi}$ là phép quay của mặt phẳng quanh tâm I với góc quay φ. Nếu $M(x, y)$ là một điểm nào đấy trên mặt phẳng thì phép quay chuyển M thành một điểm mới M' và ta ký hiệu là $M' = R_{I,\varphi}(M)$.

a) Hãy chỉ ra rằng nếu tọa độ của M' là (x', y') thì ta có đẳng thức

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

b) Hãy chỉ ra rằng đẳng thức trên tương đương với đẳng thức sau

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a(1 - \cos\varphi) + b\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -a\sin\varphi + b(1 - \cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bài 5.3. Trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật, người ta sử dụng ma trận cột $p_M = (x, y, 1)^T$ để mô tả vị trí của điểm $M = (x, y)$ thuộc mặt phẳng tọa độ. Một phép quay với tâm quay là gốc tọa độ, góc quay φ sẽ biến mỗi điểm M với vị trí $p_M = (x, y, 1)^T$ thành một điểm N với vị trí $p_N = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, 1)^T$. Để mô tả phép quay này bằng ma trận, ta cần xác định một ma trận có dạng

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sao cho $p_N = Rp_M$ với mọi điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng tọa độ. Hãy chỉ ra rằng ma trận cần xác định ở trên là

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.4. Người ta nói rằng nếu một phép quay của mặt phẳng quanh tâm $I(a, b)$ chuyển mỗi điểm $M = (x, y)$ thành một điểm khác $M' = (x', y')$ thì tồn tại duy nhất một ma trận có dạng

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \alpha \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

để $p_{M'} = Rp_M$. Phát biểu này là đúng hay sai? Hãy giải thích.

Bài 5.5. Người ta gọi một ma trận có dạng

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \alpha \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

là ma trận của phép quay trong mặt phẳng (nói ngắn gọn là *ma trận phép quay*). Góc quay φ của phép quay này được xác định theo khối 2×2 của R, nằm ở 2 hàng đầu và hai cột đầu

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tâm quay (a, b) được xác định theo góc quay φ và các giá trị α, β ở cột 3. Hãy xác định góc quay và tâm quay của phép quay có ma trận là

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bài 5.6. Cho các ma trận quay

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \alpha_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \alpha_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Người ta nói rằng, nếu quay mặt phẳng theo phép quay có ma trận R_1, sau đó quay tiếp mặt phẳng theo phép quay có ma trận R_2 thì việc kết hợp hai phép quay như vậy thực ra cũng là một phép quay và ma trận của phép quay này là R_2R_1. Hãy chỉ ra sự đúng đắn của phát biểu này.
b) Hãy lấy một ví dụ về 2 ma trận quay R_1, R_2 mà $R_1R_2 \neq R_2R_1$.
c) Hãy chỉ ra rằng nếu R_1, R_2 có chung tâm quay thì $R_1R_2 = R_2R_1$.

Bài 5.7. Phép tịnh tiến của mặt phẳng theo véc tơ $v = (a, b)$ là một biến đổi mà mỗi điểm $M(x, y)$ thành điểm $N(x + a, y + b)$. Ta cần mô tả phép tịnh tiến này bằng một ma trận kích thước 3×3 có dạng

$$T_v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sao cho $p_N = Rp_M$ với mọi điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng tọa độ. Ở đây $p_M = (x, y, 1)^T$ và $p_N = (x + a, y + b, 1)^T$. Hãy chỉ ra rằng ma trận của phép tịnh tiến là ma trận sau đây:

$$T_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài 5.8. Cho A là một ma trận vuông thực cấp n. Nếu $A^T A = I$ thì A được gọi là ma trận trực giao cấp n.
a) Chứng minh rằng tích của hai ma trận trực giao cấp n cũng là một ma trận trực giao.
b) Chứng minh rằng các ma trận

$$A_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix};$$

đều là ma trận trực giao.

Bài 5.9. Trong không gian ba chiều thông thường với hệ tọa độ $Oxyz$, phép quay quanh trục Oz với góc quay φ sẽ biến mỗi điểm $M(x, y, z)$ thành một điểm N có tọa độ $(x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi, z)$. Để mô tả phép quay bằng ma trận, ta cần xác định một ma trận $R_{z,\varphi}$ kích thước 3×3 sao cho đẳng thức

$$\begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{pmatrix} = R_{z,\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

đúng với mọi x, y, z. Hãy chỉ ra rằng ma trận

$$R_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

chính là ma trận duy nhất cần xác định. Ma trận này được gọi là ma trận của phép quay quanh trục Oz.

Bài 5.10. Hãy chỉ ra rằng ma trận 3×3 mô tả phép quay quanh trục Ox của không gian ba chiều là

$$R_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Bài 5.11. Hãy chỉ ra rằng ma trận 3×3 mô tả phép quay quanh trục Oy của không gian ba chiều là

$$R_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Bài 5.12. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

với a, b, c, d là các số thực và $ad > 0$. Chứng minh rằng nếu A là một ma trận trực giao thì A là ma trận của một phép quay quanh trục Ox với góc quay φ nào đấy.

Bài 5.13. a) Cho ma trận

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

trong đó i đơn vị ảo ($i^2 = -1$). Ma trận J_x được gọi là *phôi vi phân* của các phép quay quanh trục Ox trong hệ tọa độ $Oxyz$ của không gian. Hãy tính J_x^2 và J_x^n.
b) Tiếp theo cho các ma trận

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận J_y (tương ứng J_z) được gọi là các phôi vi phân của các phép quay quanh trục Oy (tương ứng Oz). Hãy tính $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$.
c) Hãy chỉ ra các đẳng thức sau

$$J_xJ_y - J_yJ_x = iJ_z; \quad J_yJ_z - J_zJ_y = iJ_z; \quad J_zJ_x - J_xJ_z = iJ_y.$$

Bài 5.14. Nếu điểm M có tọa độ trong không gian là (x_1, x_2, x_3) thì trong cơ học người ta cũng mô tả vị trí của điểm M dưới dạng ma trận cột $x_M = (x_1, x_2, x_3, 1)^T$. Phép tịnh tiến là một biến đổi của không gian. Một phép tịnh tiến theo véc tơ $v = (a, b, c)$ sẽ biến mỗi điểm $M = (x_1, x_2, x_3)$ thành một điểm $N = (x_1 + a, x_2 + b, x_3 + c)$. Phép tịnh tiến cũng được mô tả dưới dạng một ma trận T_v có kích thước 4×4 dưới dạng

$$T_v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sao cho ma trận này phải thỏa mãn điều kiện

$$x_N = Ax_M$$

với mọi điểm M. Ở đây $x_M = (x_1, x_2, x_3, 1)^T$ và $x_N = (x_1 + a, x_2 + b, x_3 + c, 1)^T$ là 2 ma trận cột mô tả tọa độ của M và N. Hãy chỉ ra rằng ma trận T_v thỏa mãn phương trình trên là ma trận sau đây

$$T_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.15. Hãy sử dụng các ký hiệu được gắn vào các điểm của không gian ba chiều như trong bài tập trên và chỉ ra rằng ma trận cỡ 4×4 mô tả phép quay góc φ quanh trục tọa độ thứ nhất là

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.16. Các ma trận Lorentz cấp 4 là một công cụ tính toán được sử dụng trong thuyết tương đối hẹp. Một ma trận A cỡ 4×4 được gọi là ma trận Lorentz cấp 4 nếu nó thỏa mãn yêu cầu

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng tích của hai ma trận Lorentz cấp 4 cũng là một ma trận Lorentz.
b) Hãy chỉ ra rằng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\psi & \sinh\psi \\ 0 & 0 & \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

là ma trận Lorentz với mọi φ, ψ. Ở đây

$$\sinh\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{2}, \quad \cosh\psi = \frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2}.$$

Bài 5.17. Các ma trận Lorentz cấp 3 cũng là một công cụ tính toán được sử dụng trong thuyết tương đối và được dùng để giải các bài toán về hệ hành tinh (chẳng hạn như hệ mặt trời) hay là các bài toán về các thiên hà dạng đĩa. Một ma trận A cỡ 3×3 được gọi là ma trận Lorentz cấp 3 nếu nó thỏa mãn yêu cầu

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Hãy chỉ ra rằng tích của hai ma trận Lorentz cấp 3 cũng là một ma trận Lorentz.
b) Hãy chỉ ra rằng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\psi & \sinh\psi \\ 0 & \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

là ma trận Lorentz với mọi ψ.

Bài 5.18. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

với a, b, c, d là các số thực và $a > 0, d > 0$. Chứng minh rằng nếu A là một ma trận Lorentz thì tồn tại ψ để

$$a = d = \cosh\psi; \quad b = c = \sinh\psi.$$

Bài 5.19. Chứng minh rằng nếu A là một ma trận trực giao thì $\det A = \pm 1$.

Bài 5.20. Chứng minh rằng nếu A là một ma trận Lorentz (cấp 2, 3, 4) thì $\det A = \pm 1$.

Bài 5.21. Một ma trận vuông thực cấp 3 được gọi là ma trận của một phép quay trong không gian ba chiều (quanh một trục nào đấy và có một góc quay nào đấy) nếu nó là ma trận có định thức là 1 và là ma trận trực giao. Nói cách khác, A là ma trận của phép quay 3 chiều nếu $A^T A = I_3$ và $\det A = 1$. Hãy chỉ ra rằng các ma trận sau đây là ma trận của phép quay

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.22. Một ma trận vuông thực cấp 4 được gọi là một ma trận biểu diễn phép dời hình của không gian 3 chiều nếu như nó là một ma trận có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sao cho từ các phần tử của 3 hàng đầu và 3 cột đầu ta có ma trận

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

là ma trận trực giao cấp 3 có định thức là 1.
a) Hãy chỉ ra rằng nếu A là ma trận biểu diễn một phép dời hình của không gian 3 chiều thì A^TA là ma trận có dạng

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

b) Hãy chỉ ra rằng hai ma trận sau là ma trận của phép dời hình trong không gian 3 chiều

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.23. Các ma trận Jacobi được sử dụng trong các tính toán thể tích, khối lượng và nhiều số đo khác của các vật thể 2 hoặc 3 chiều. Mỗi ma trận Jacobi được xác định theo một phép đổi biến số cho các số đo mô tả vật thể. Đối với các vật phẳng có dạng hình tròn hoặc một phần hình tròn, người ta thường dùng phép đổi biến số của các số đo tọa độ từ tọa độ Đề-các sang tọa độ cực. Ma trận Jacobi của phép đổi biến này là

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Hãy tính định thức $|J|$ của ma trận này.

Bài 5.24. Phép đổi biến của các số đo tọa độ tọa độ từ tọa độ Đề-các sang tọa độ trụ là biến đổi thường được sử dụng khi tính toán với các vật thể có dạng hình trụ tròn xoay hoặc là một phần hình trụ tròn xoay. Phép đổi biến này có ma trận Jacobi là

$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính định thức $|J|$ của ma trận này.

Bài 5.25. Phép đổi biến của các số đo tọa độ tọa độ từ tọa độ Đề-các sang tọa độ cầu là biến đổi được áp dụng với các vật thể có dạng hình cầu hoặc là một phần cầu. Phép đổi biến này có ma trận Jacobi là

$$J = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính định thức $|J|$ của ma trận này.

Bài 5.26. Robot lau nhà là một thiết bị thông minh. Các bánh xe của robot tạo thành một tam giác cân. Trục đối xứng của tam giác cân này được gọi là trục chính của robot. Vị trí của robot được xác định theo tâm $M(a, b)$ của nó trên mặt sàn và tư thế của robot được xác định theo góc quay φ từ trục Ox tới trục chính của nó. Các số liệu này được mô tả lại theo ma trận

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a \\ \sin\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

và ta gọi A là ma trận vị trí - tư thế của robot. Cho biết rằng, ở hai thời điểm khác nhau ma trận vị trí tư thế của một robot nào đấy là

$$A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Số liệu mô tả sự thay đổi vị trí tư thế của robot từ A_1 sang A_2 là một ma trận X sao cho $XA_1 = A_2$. Hãy xác định ma trận X.

Bài 5.27. Một robot lau nhà tại một thời điểm nào đấy có ma trận vị trí tư thế là A. Vì robot hoạt động nên một phút sau nó có ma trận vị trí tư thế mới là

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Số liệu về việc thay đổi vị trí tư thế của robot sau một phút nói trên được mô tả bằng ma trận

$$X = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Từ các thông tin trên hãy xác định ma trận A.

Bài 5.28. Do các xe nâng hàng có phạm vi làm việc là mặt sàn của kho bãi nên vị trí tư thế của xe cũng được mô tả bằng các ma trận 3×3. Cho biết vị trí tư thế của xe nâng hàng ở thời điểm lấy kiện hàng và thời điểm trả kiện hàng là các ma trận

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định ma trận X mô tả sự biến đổi vị trí tư thế của xe nâng hàng từ vị trí thứ nhất sang vị trí thứ 2.

Bài 5.29. Ma trận vị trí tư thế 3×3 cũng được sử dụng trong các phần mềm xử lý đồ họa để chỉnh sửa vị trí của các hình ảnh 2 chiều. Cho biết vị trí tư thế của một hình ảnh 2 chiều trước khi được chỉnh vị trí và sau khi được chỉnh vị trí tương ứng là các ma trận

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}; \quad A_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định ma trận X mô tả tác động của việc chỉnh sửa vào vị trí tư thế của hình ảnh.

Bài 5.30. Trong các bài toán về đồ họa máy tính, điều khiển robot và cơ học, người ta cũng sử dụng các ma trận vuông cấp 4 có dạng trùng với biểu diễn của một phép dời hình (xem bài tập 5.22)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

để mô tả vị trí - tư thế của một vật rắn 3 chiều.

Giả thiết rằng một vật rắn nào đấy có các ma trận vị trí - tư thế ở hai thời điểm khác nhau là

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sự biến đổi của vật rắn giữa 2 thời điểm được mô tả bằng một ma trận X sao cho đẳng thức sau là đúng

$$XA = B.$$

Từ đẳng thức trên hãy xác định ma trận X mô tả dịch chuyển của vật.