

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0 , nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0 , và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0 : $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0 : $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Nhận xét:

- i) $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$
- ii) Một cách tổng quát, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm bất kỳ có thể tính theo công thức

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ví dụ.

- (1) Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \geq 0 \\ 2x & \text{với } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.
- (2) Tính đạo hàm theo định nghĩa của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm bất kỳ.



Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Bảng các đạo hàm cơ bản

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

* Tính chất của đạo hàm cấp 1

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0 . Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx , và $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ khi $\Delta x \rightarrow 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0 .

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 , ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$


Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Một cách tổng quát ta có thể biểu diễn công thức vi phân cấp 1 của hàm $y = f(x)$ dưới dạng

$$dy = f'(x)dx \text{ hay } dy = y'dx$$

Ví dụ. Xét tính khả vi của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{nếu } x \geq 0 \\ a.x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

 Lightshot

Lightshot

Screenshot đã được lưu tại
để mở. Go to Settings to

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.
- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.
- Tại $x = 0$, $f(0) = 0^2 + 2.0 = 0$,

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên \mathbb{R}

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

2.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Đạo hàm cấp cao

Ta thường xây dựng công thức đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$ một cách quy nạp như sau:

- $(y')' = y''$,
- $(y'')' = y^{(3)}, \dots$
- $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}.$



Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

- | | | |
|--|--------------------------|---------------------------------------|
| (1) $y = x^5 + 5x^2 + 2;$ | (2) $y = e^{ax};$ | (3) $y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$ |
| (4) $y = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R};$ | (5) $y = \frac{1}{1-x};$ | (6) $y = \frac{1}{1+x}$ |
| (7) $y = \frac{1}{ax+b};$ | (8) $y = \sin x;$ | (9) $y = \cos x$ |

$$(1) \ y = x^5 + 5x^2 + 2$$

$$y' = 5x^4 + 10x$$

$$y'' = 20x^3 + 10$$

$$y^{(3)} = 60x^2$$

$$y^{(4)} = 120x$$

$$y^{(5)} = 120$$

$$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$$

$$(2) \ y = e^{ax}$$

$$y' = ae^{ax}$$

$$y'' = a^2 e^{ax}$$

...

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}.$$

$$(3) \ y = x^n$$

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

...

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 x^0 = n!.$$

$$(4) \ y = x^{\alpha}$$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

...

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

$$(5) \ y = \frac{1}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}$$

...

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(7) \quad y = \frac{1}{ax+b}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$(8) \ y = \sin x$$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

...

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

$$(9) \ y = \cos x$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$


Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Tính chất của đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại các đạo hàm đến cấp n của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
- $(C.f(x))^{(n)} = C.f^{(n)}(x)$
- $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum_k^n C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

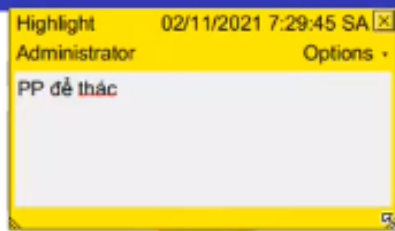
Ví dụ. Tính các đạo hàm cấp cao

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(100)}(0)$ 

(2) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$. Tính $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

Bài tập



1.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$f^{(100)}(x) = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(100)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(100)} = \frac{(-1)^{100} \cdot 100!}{(x-2)^{101}} - \frac{(-1)^{100} \cdot 100!}{(x-1)^{101}}$$

$$f^{(100)}(x) = 100! \left(\frac{1}{(x-2)^{101}} - \frac{1}{(x-1)^{101}} \right)$$

$$f^{(100)}(0) = 100! \left(\frac{1}{(-2)^{101}} - \frac{1}{(-1)^{101}} \right)$$

2.

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{\frac{1}{2}} + 2(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} + 2(-\frac{1}{2})(x-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(x-1)^{-\frac{3}{2}} + 2(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(x-1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\dots(\frac{1}{2}-n+1)(x-1)^{\frac{1}{2}-n} + 2(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)(x-1)^{-\frac{1}{2}-n}$$

3. $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$

Áp dụng công thức Leibnitz ta có

$$f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (x^2 + 2x + 3)^{(k)} \cdot (e^x)^{(100-k)}$$

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= C_{100}^0 (x^2 + 2x + 3)^{(0)} \cdot (e^x)^{(100)} + C_{100}^1 (x^2 + 2x + 3)' \cdot (e^x)^{(99)} \\ &\quad + C_{100}^2 (x^2 + 2x + 3)'' \cdot (e^x)^{(98)} \end{aligned}$$

Tính chất của đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại các đạo hàm đến cấp n của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
- $(C.f(x))^{(n)} = C.f^{(n)}(x)$
- $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum_k^n C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ. Tính các đạo hàm cấp cao

(1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(100)}(0)$

(2) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$. Tính $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y' dx$
- $d^2y = y'' dx^2$
- ...
- $d^n y = y^{(n)} dx^n$.

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2.3. Ứng dụng của đạo hàm vi phân cấp cao

1. Đạo hàm của hàm số cho dưới dạng tham số

Xét hàm số cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Ta cần tính các đạo hàm $y'(x), y''(x), \dots$

Theo công thức vi phân của hàm số $y(x)$ ta có

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}$$

Do đó

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{hay} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2. Quy tắc L'Hospital

Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $\left(\frac{0}{0} \text{ hoặc } \frac{\infty}{\infty}\right)$. Khi đó

nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. và ta thường viết

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Chú ý: Điều ngược lại của quy tắc Lôpital không đúng, tức là có thể tồn tại

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ nhưng không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ví dụ. Tính các giới hạn sau

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - x}{\ln(1 + x^2)}$$

3. Công thức khai triển Taylor

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận x_0 , có các đạo hàm đến cấp $(n+1)$ tại x_0 . Khi đó với x thuộc lân cận x_0 ta có thể biểu diễn

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x_0)$$

trong đó $R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, và c nằm giữa x và x_0 .

Ta thường viết $R_n(x_0) = O((x - x_0)^n)$.

Khi $x_0 = 0$ ta có khai triển Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(0).$$

Ví dụ. Khai triển Maclaurin đến cấp n của các hàm số sau

$$(1). f(x) = e^x, \quad (2). f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (3). f(x) = \frac{1}{1+x},$$
$$(4). f(x) = \sin x, \quad (5). f(x) = \cos x.$$

Giải: Bằng cách tính toán trực tiếp các đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ rồi thay vào công thức khai triển ta có thể biểu diễn:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n). \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^n). \quad \forall x : |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + O(x^n). \quad \forall x : |x| < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1}). \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1}). \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 1: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x}$ bằng

A. 1 D. 6
B. $\frac{1}{2}$ E. -1
C. 3 F. 4

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{\ln(x^2+1)}$.
Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
B. Hàm liên tục trên toàn bộ \mathbb{R}
C. Hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
D. Hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{e\}$
E. Hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
F. Hàm liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; e\}$

Câu 3: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1)$ bằng

A. $-\infty$ D. $+\infty$
B. -2 E. -3
C. 7 F. 8

Câu 4: Khi $x \rightarrow 0$, VCB $e^x - 1$ tương đương với

A. $\frac{1}{x}$ D. $-x$
B. x^2 E. $-2x$
C. x F. x^2

Câu 5: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $\frac{1}{10}$ D. $-\infty$
B. $-\frac{1}{2}$ E. -1
C. $+\infty$ F. 2

Câu 6: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin 3x}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$ D. 2
B. $\frac{1}{2}$ E. -1
C. $+\infty$ F. 0

Câu 7: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

A. 1 D. $-\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{2}$ E. -2
C. $\frac{1}{4}$ F. -1

Câu 8: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$

A. 0 D. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{2}$ E. 2
C. 1 F. 1

Câu 9: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x}$

A. 0 D. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{3}$ E. 2
C. -1 F. 1

Câu 10: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x-\pi}$

A. 0 D. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{2}$ E. 2
C. 1 F. $-\frac{1}{2}$

Câu 11: Tìm k để hàm $f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x} - 2 & \text{nếu } x \neq 0, \\ 2k + 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$ liên tục:

A. $-\frac{1}{4}$ D. 2
B. $\frac{1}{2}$ E. -1
C. 1 F. 2/3

Câu 12: Tìm k để hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{\ln(1+x^2)} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 2k + 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$ liên tục:

A. 3 D. 2
B. 1 E. 0
C. -1 F. -1

Câu 13: Nếu $y = \sin 3x$ thì $y' =$

A. $3 \cos 3x$ D. $-\frac{1}{3} \cos 3x$
B. $-3 \sin 3x$ E. $-3 \cos 3x$
C. $-\cos 3x$ F. $3 \cos 3x$

Câu 14: Nếu $y = \arctan 2x$ thì $y' =$

A. $2 \arccot 2x$ D. $\frac{2}{1+4x^2}$
B. $2 \tan 2x$ E. $\frac{1}{1+2x^2}$
C. $\frac{-2}{1+4x^2}$ F. $-\frac{1}{1+4x^2}$

Câu 15: Công thức đạo hàm nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ D. $(\cot x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
B. $(\sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ E. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
C. $(\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$ F. $(\tan x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}$

Câu 16: Tìm dy biết $y = a^x, a > 0, a \neq 1$

A. $dy = a^x dx$ D. $dy = xa^{x-1} \ln 3 dx$
B. $dy = xa^{x-1} dx$ E. $dy = \frac{xa^{x-1}}{\ln 2} dx$
C. $dy = \frac{a^x}{\ln 3} dx$ F. $dy = a^x \ln a dx$

Câu 17: Nếu $f(x) = \sin(\pi \sin x)$ thì $f'(0) = ?$

A. $\frac{\pi}{2}$ D. 1
B. $-\frac{\pi}{2}$ E. $\frac{1}{2}$
C. 0 F. Đáp án khác

Câu 18: Nếu $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$ thì $f'(\frac{\pi}{4}) = ?$

A. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}$
B. 0 E. $-\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ F. $-\frac{1}{2}$

Câu 19: Nếu $f(x) = \arctan^3 x + \tan 2x$ thì $f'(x) = ?$

A. $3(1+x^2) \arctan^2 x - \frac{2}{\tan^2 2x}$
B. $\frac{3 \arctan^2 x}{1+x^2} + \frac{2}{\sin^2 2x}$
C. $3(1+x^2) \arctan^2 x + \frac{2}{\sin^2 2x}$
D. $3 \arctan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x}$
E. $\frac{3 \arctan^2 x}{1+x^2} + \frac{2}{\cos^2 2x}$
F. $3 \arccot x \arctan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x}$

Câu 20: Nếu $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ thì $f'(x) = ?$

A. $\frac{-2}{(\sin x + \cos x)^2}$ D. $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$
B. $\frac{-\sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$ E. $\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$
C. $\frac{2 - \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$ F. $\frac{2 + \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$

Câu 21: Nếu $y = -\frac{2}{\tan(x)}$ thì $dy = ?$

A. $dy = \frac{4x}{\sin^2(x)} dx$ D. $dy = \frac{-4x}{\sin(1-2x)} dx$
B. $dy = \frac{-4x}{\sin^2(x)} dx$ E. $dy = \frac{-4}{\sin(x)} dx$
C. $dy = \frac{2}{\sin^2(x)} dx$ F. Đáp án khác

Câu 22: Nếu $y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ thì $dy = ?$

A. $dy = \frac{8+x}{\sqrt{(x^2+2)^3}} dx$ D. $dy = \frac{8+x}{\sqrt{x^2+2}} dx$
B. $dy = \frac{8-x}{\sqrt{(x^2+2)^3}} dx$ E. $dy = \frac{-x}{\sqrt{x^2+2}} dx$
C. $dy = \frac{8-x}{\sqrt{x^2+2}} dx$ F. $dy = \frac{8}{\sqrt{(x^2+2)^3}} dx$

Câu 23: Nếu $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1+e^{x-1}} & \text{nếu } x \neq 1, \\ 0 & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$ thì $f'_x(1) = ?; f''(1) = ?$

A. 1 và 0 D. 0 và 1
B. 1 và 2 E. 0 và 1
C. -1 và 2 F. 1 và 1

Câu 24: Nếu $f(x) = |x|x$ thì $f''(0) = ?$

A. 1 D. 0
B. 2 E. -2
C. -1 F. Đáp án khác

Câu 25: Nếu $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$ thì $f^{(n)}(x) = ?$

A. $3 \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + 2 \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ D. $\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - 2 \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$
B. $3 \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ E. $\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + 2 \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$
C. $3 \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - 2 \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ F. $3 \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$