Giải tích 1

Đào Việt Cường

Ngày 15 tháng 12 năm 2020

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (2)$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0: $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0: $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (2)$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (2)$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chương 2. Đạo hàm và vi phân hàm số 1 biến

2.1. Đạo hàm và vi phân cấp 1

1. Đạo hàm cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0, nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, và ký hiệu là $f'(x_0)$.

- Trong (1) nếu ta đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì ta có thể viết lại

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{2}$$

- Đạo hàm trái của $f(x)$ tại x_0: $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Đạo hàm phải của $f(x)$ tại x_0: $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Nhận xét:

i) $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

ii) Một cách tổng quát, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm bất kỳ có thể tính theo công thức

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ví dụ.

(1) Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \geq 0 \\ 2x & \text{với } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

(2) Tính đạo hàm theo định nghĩa của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm bất kỳ.

Giải:

Nhận xét:

i) $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

ii) Một cách tổng quát, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm bất kỳ có thể tính theo công thức

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ví dụ.

(1) Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \geq 0 \\ 2x & \text{với } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

(2) Tính đạo hàm theo định nghĩa của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm bất kỳ.

Giải:

Nhận xét:

i) $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

ii) Một cách tổng quát, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm bất kỳ có thể tính theo công thức

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ví dụ.

(1) Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \geq 0 \\ 2x & \text{với } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

(2) Tính đạo hàm theo định nghĩa của hàm số $f(x) = x^2$ tại điểm bất kỳ.

Giải:

Bảng các đạo hàm cơ bản

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(arccot\ x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Bảng các đạo hàm cơ bản

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(arccot\ x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

*** Tính chất của đạo hàm cấp 1**

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

*** Tính chất của đạo hàm cấp 1**

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

*** Tính chất của đạo hàm cấp 1**

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

*** Tính chất của đạo hàm cấp 1**

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

*** Tính chất của đạo hàm cấp 1**

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

*** Tính chất của đạo hàm cấp 1**

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

*** Tính chất của đạo hàm cấp 1**

Giả sử tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(C.f(x))' = C.f'(x)$
- $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
- Giả sử $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Khi đó

$$y'(x) = f'(u).u'(x)$$

Ví dụ. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$(1)\ y = \sin\sqrt{x^2+1}, \quad (2)\ y = \arctan\frac{1}{x}, \quad (3)\ y = \arcsin\sqrt{x}$$

Giải:

Ví dụ. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$(1)\ y = \sin\sqrt{x^2+1}, \quad (2)\ y = \arctan\frac{1}{x}, \quad (3)\ y = \arcsin\sqrt{x}$$

Giải:

Ví dụ. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$(1)\ y = \sin\sqrt{x^2+1}, \quad (2)\ y = \arctan\frac{1}{x}, \quad (3)\ y = \arcsin\sqrt{x}$$

Giải:

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx, và $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx, và $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx, và $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx, và $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx, và $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx, và $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

2. Vi phân cấp 1

- Cho hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0. Ta gọi số gia của x và $f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng là: Δx và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
- Nếu ta có thể biểu diễn $\Delta f(x_0) = A.\Delta x + \alpha(\Delta x)$, trong đó A là đại lượng không phụ thuộc vào Δx, và $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ khả vi tại điểm x_0.

Ta gọi $A.\Delta x$ là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ khả vi tại x_0 thì liên tục tại x_0
- Các hàm số sơ cấp luôn khả vi trong khoảng xác định của nó
- $f(x)$ khả vi tại x_0 khi và chỉ khi $\exists f'(x_0)$ và ta có

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x$$

Một cách tổng quát ta có thể biểu diễn công thức vi phân cấp 1 của hàm $y = f(x)$ dưới dạng

$$dy = f'(x)dx \ \text{ hay } \ dy = y'dx$$

Ví dụ. Xét tính khả vi của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{nếu } \ x \geq 0 \\ a.x & \text{nếu } \ x < 0 \end{cases}.$$

Một cách tổng quát ta có thể biểu diễn công thức vi phân cấp 1 của hàm $y = f(x)$ dưới dạng

$$dy = f'(x)dx \ \text{ hay } \ dy = y'dx$$

Ví dụ. Xét tính khả vi của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{nếu } \ x \geq 0 \\ a.x & \text{nếu } \ x < 0 \end{cases}.$$

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.
- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.
- Tại $x = 0$, $f(0) = 0^2 + 2.0 = 0$,

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Tại $x = 0$, $f(0) = 0^2 + 2.0 = 0$,

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Tại $x = 0$, $f(0) = 0^2 + 2.0 = 0$,

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Tại $x = 0$, $f(0) = 0^2 + 2.0 = 0$,

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Tại $x = 0, f(0) = 0^2 + 2.0 = 0,$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Tại $x = 0, f(0) = 0^2 + 2.0 = 0,$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Tại $x = 0, f(0) = 0^2 + 2.0 = 0,$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

Giải:

Ta chia làm các trường hợp sau:

- Với $x > 0$, $f(x) = x^2 + 2x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Với $x < 0$, $f(x) = a.x$ là hàm số sơ cấp xác định nên khả vi.

- Tại $x = 0, f(0) = 0^2 + 2.0 = 0,$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x + 2) = 2,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a.x}{x} = a.$$

Vậy, với $a = 2$ thì $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$

với $a \neq 2$ thì $f(x)$ không khả vi tại $x = 0$.

2.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Đạo hàm cấp cao

Ta thương xây dựng công thức đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$ một cách quy nap như sau:

- $(y')' = y''$,
- $(y'')' = y^{(3)}, \ldots$
- $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$; (2) $y = e^{ax}$; (3) $y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

(4) $y = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$; (5) $y = \dfrac{1}{1-x}$; (6) $y = \dfrac{1}{1+x}$

(7) $y = \dfrac{1}{ax+b}$; (8) $y = \sin x$; (9) $y = \cos x$

2.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Đạo hàm cấp cao

Ta thương xây dựng công thức đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$ một cách quy nap như sau:

- $(y')' = y''$,
- $(y'')' = y^{(3)}, \ldots$
- $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$; (2) $y = e^{ax}$; (3) $y = x^n, \ n \in \mathbb{N}$

(4) $y = x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$; (5) $y = \dfrac{1}{1-x}$; (6) $y = \dfrac{1}{1+x}$

(7) $y = \dfrac{1}{ax+b}$; (8) $y = \sin x$; (9) $y = \cos x$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

2.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Đạo hàm cấp cao

Ta thương xây dựng công thức đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$ một cách quy nap như sau:

- $(y')' = y''$,
- $(y'')' = y^{(3)}, \dots$
- $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$; (2) $y = e^{ax}$; (3) $y = x^n, \ n \in \mathbb{N}$

(4) $y = x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$; (5) $y = \dfrac{1}{1-x}$; (6) $y = \dfrac{1}{1+x}$

(7) $y = \dfrac{1}{ax+b}$; (8) $y = \sin x$; (9) $y = \cos x$

2.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Đạo hàm cấp cao

Ta thương xây dựng công thức đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$ một cách quy nap như sau:

- $(y')' = y''$,
- $(y'')' = y^{(3)}, \ldots$
- $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$; (2) $y = e^{ax}$; (3) $y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

(4) $y = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$; (5) $y = \dfrac{1}{1-x}$; (6) $y = \dfrac{1}{1+x}$

(7) $y = \dfrac{1}{ax+b}$; (8) $y = \sin x$; (9) $y = \cos x$

2.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

1. Đạo hàm cấp cao

Ta thương xây dựng công thức đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$ một cách quy nap như sau:

- $(y')' = y''$,
- $(y'')' = y^{(3)}, \ldots$
- $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Ví dụ: Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$; (2) $y = e^{ax}$; (3) $y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

(4) $y = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$; (5) $y = \dfrac{1}{1-x}$; (6) $y = \dfrac{1}{1+x}$

(7) $y = \dfrac{1}{ax+b}$; (8) $y = \sin x$; (9) $y = \cos x$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$

$y' = 5x^4 + 10x$

$y'' = 20x^3 + 10$

$y^{(3)} = 60x^2$

$y^{(4)} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$

$y' = 5x^4 + 10x$

$y'' = 20x^3 + 10$

$y^{(3)} = 60x^2$

$y^{(4)} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$

$y' = 5x^4 + 10x$

$y'' = 20x^3 + 10$

$y^{(3)} = 60x^2$

$y^{(4)} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$

$y' = 5x^4 + 10x$

$y'' = 20x^3 + 10$

$y^{(3)} = 60x^2$

$y^{(4)} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$

$y' = 5x^4 + 10x$

$y'' = 20x^3 + 10$

$y^{(3)} = 60x^2$

$y^{(4)} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$

$y' = 5x^4 + 10x$

$y'' = 20x^3 + 10$

$y^{(3)} = 60x^2$

$y^{(4)} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$

(1) $y = x^5 + 5x^2 + 2$

$y' = 5x^4 + 10x$

$y'' = 20x^3 + 10$

$y^{(3)} = 60x^2$

$y^{(4)} = 120x$

$y^{(5)} = 120$

$y^{(n)} = 0, \forall n \geq 6.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(2) $y = e^{ax}$

$y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2 e^{ax}$

$\ldots$

$y^{(n)} = a^n e^{ax}.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

$$(2)\ y = e^{ax}$$

$$y' = ae^{ax}$$

$$y'' = a^2 e^{ax}$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}.$$

$$(2)\ y = e^{ax}$$

$$y' = ae^{ax}$$

$$y'' = a^2 e^{ax}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = a^n e^{ax}.$$

(2) $y = e^{ax}$

$y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2e^{ax}$

$\ldots$

$y^{(n)} = a^n e^{ax}.$

(2) $y = e^{ax}$

$y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2 e^{ax}$

$\ldots$

$y^{(n)} = a^n e^{ax}.$

(3) $y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$

$\ldots$

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1x^0 = n!.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(3) $y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$

$\dots$

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\dots 2.1x^0 = n!.$

(3) $y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$

$\dots$

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\dots 2.1x^0 = n!.$

(3) $y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$

$\ldots$

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1x^0 = n!.$

(3) $y = x^n$

$y' = nx^{n-1}$

$y'' = n(n-1)x^{n-2}$

$\dots$

$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\dots 2.1x^0 = n!.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(4) $y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\dots$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$

(4) $y = x^{\alpha}$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\dots$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(4) $y = x^{\alpha}$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\ldots$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$

(4) $y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\dots$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$

(4) $y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$

$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\ldots$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(5) $y = \dfrac{1}{1-x}$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$(5)\ y = \frac{1}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$(5)\ y = \frac{1}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

$$(5)\ y = \frac{1}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$(5)\ y = \frac{1}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$(5)\ y = \frac{1}{1-x}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$y'' = \frac{1.2}{(1-x)^3}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$(6)\ y = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(7)\ y = \frac{1}{ax+b}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

$$(6)\ y = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(7)\ y = \frac{1}{ax+b}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$(6)\ y = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(7)\ y = \frac{1}{ax+b}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$(6)\ y = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(7)\ y = \frac{1}{ax+b}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

$$(6)\ y = \frac{1}{1+x}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$(7)\ y = \frac{1}{ax+b}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

(8) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$

$\ldots$

$y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).$

(9) $y = \cos x$

$y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(8) $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$$

$\ldots$

$$y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

(9) $y = \cos x$

$$y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

(8) $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$$

$\ldots$

$$y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

(9) $y = \cos x$

$$y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

(8) $y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$

$\ldots$

$y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).$

(9) $y = \cos x$

$y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).$

$$(8)\ y = \sin x$$

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

$$(9)\ y = \cos x$$

$$y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

$$
\begin{aligned}
&(8)\ y = \sin x \\
&y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\
&y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2}) \\
&\dots \\
&y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(9)\ y = \cos x \\
&y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(8)\ y = \sin x\\
&y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})\\
&y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})\\
&\dots\\
&y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(9)\ y = \cos x\\
&y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

$$(8)\ y = \sin x$$
$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2.\frac{\pi}{2})$$
$$\ldots$$
$$y^{(n)} = \sin(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

$$(9)\ y = \cos x$$
$$y^{(n)} = \cos(x + n.\frac{\pi}{2}).$$

Tính chất của đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại các đạo hàm đến cấp n của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Khi đó

- $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
- $(C.f(x))^{(n)} = C.f^{(n)}(x)$
- $(f(x).g(x))^{(n)} = \sum_{k}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ. Tính các đạo hàm cấp cao

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(100)}(0)$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$. Tính $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

Tính chất của đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại các đạo hàm đến cấp n của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Khi đó

- $\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
- $\left(C.f(x)\right)^{(n)} = C.f^{(n)}(x)$
- $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ. Tính các đạo hàm cấp cao

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(100)}(0)$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$. Tính $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Tính chất của đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại các đạo hàm đến cấp n của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Khi đó

- $\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
- $\left(C.f(x)\right)^{(n)} = C.f^{(n)}(x)$
- $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ. Tính các đạo hàm cấp cao

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(100)}(0)$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$. Tính $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

Tính chất của đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại các đạo hàm đến cấp n của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Khi đó

- $\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
- $\left(C.f(x)\right)^{(n)} = C.f^{(n)}(x)$
- $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ. Tính các đạo hàm cấp cao

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(100)}(0)$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$. Tính $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

Tính chất của đạo hàm cấp cao

Giả sử tồn tại các đạo hàm đến cấp n của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Khi đó

- $\left(f(x) \pm g(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$
- $\left(C.f(x)\right)^{(n)} = C.f^{(n)}(x)$
- $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k}^{n} C_n^k f^{(k)}(x).g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ. Tính các đạo hàm cấp cao

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. Tính $f^{(100)}(0)$

(2) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$. Tính $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x) = e^x(x^2 + 2x + 3)$. Tính $f^{(100)}(x)$.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y'dx$
- $d^2y = y''dx^2$
- $\ldots$
- $d^ny = y^{(n)}dx^n.$

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y'dx$
- $d^2y = y''dx^2$
- $\ldots$
- $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y'dx$
- $d^2y = y''dx^2$
- $\ldots$
- $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y'dx$
- $d^2y = y''dx^2$
- $\ldots$
- $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y' dx$
- $d^2y = y'' dx^2$
- $\ldots$
- $d^n y = y^{(n)} dx^n$.

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y'dx$
- $d^2y = y''dx^2$
- $\ldots$
- $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2. Vi phân cấp cao

Công thức của vi phân cấp cao đối với hàm 1 biến cũng được xây dựng một cách quy nạp và có thể viết như sau:

- $dy = y'dx$
- $d^2y = y''dx^2$
- $\ldots$
- $d^ny = y^{(n)}dx^n$.

Nhận xét: Vi phân cấp cao có tính chất tương tự đạo hàm cấp cao.

2.3. Ứng dụng của đạo hàm vi phân cấp cao

1. Đạo hàm của hàm số cho dưới dạng tham số

Xét hàm số cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Ta cần tính các đạo hàm $y'(x), y''(x), \ldots$.

Theo công thức vi phân của hàm số $y(x)$ ta có

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}$$

Do đó

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{hay} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2.3. Ứng dụng của đạo hàm vi phân cấp cao

1. Đạo hàm của hàm số cho dưới dạng tham số

Xét hàm số cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Ta cần tính các đạo hàm $y'(x), y''(x), \ldots$.

Theo công thức vi phân của hàm số $y(x)$ ta có

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}$$

Do đó

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{hay} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2.3. Ứng dụng của đạo hàm vi phân cấp cao

1. Đạo hàm của hàm số cho dưới dạng tham số

Xét hàm số cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Ta cần tính các đạo hàm $y'(x), y''(x), ...$

Theo công thức vi phân của hàm số $y(x)$ ta có

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}$$

Do đó

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{hay} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2.3. Ứng dụng của đạo hàm vi phân cấp cao

1. Đạo hàm của hàm số cho dưới dạng tham số

Xét hàm số cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Ta cần tính các đạo hàm $y'(x), y''(x), ...$

Theo công thức vi phân của hàm số $y(x)$ ta có

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}$$

Do đó

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \text{ hay } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2.3. Ứng dụng của đạo hàm vi phân cấp cao

1. Đạo hàm của hàm số cho dưới dạng tham số

Xét hàm số cho dưới dạng tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Ta cần tính các đạo hàm $y'(x), y''(x), \ldots.$

Theo công thức vi phân của hàm số $y(x)$ ta có

$$dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}$$

Do đó

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{hay} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Ta lại áp dung công thức vi phân cho y' ta có $d(y') = y''dx$.

Vì vậy

$$y''(x) = \frac{h'(t)}{x'(t)}, \text{ với } h(t) = y'(x)$$

Hay

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Ví dụ. Tính $y'(x), y''(x)$ biết

$$(1) \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Giải: (1) Ta có $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$. Do đó

$$y'(x) = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t \Rightarrow y''(x) = \frac{(-\cot t)'}{-a\sin t} = \frac{-1}{a\sin^3 t}$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Ta lại áp dung công thức vi phân cho y' ta có $d(y') = y''dx$.

Vì vậy

$$y''(x) = \frac{h'(t)}{x'(t)}, \text{ với } h(t) = y'(x)$$

Hay

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Ví dụ. Tính $y'(x), y''(x)$ biết

$$(1) \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Giải: (1) Ta có $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$. Do đó

$$y'(x) = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t \Rightarrow y''(x) = \frac{(-\cot t)'}{-a\sin t} = \frac{-1}{a\sin^3 t}$$

Ta lại áp dung công thức vi phân cho y' ta có $d(y') = y''dx$.

Vì vậy

$$y''(x) = \frac{h'(t)}{x'(t)}, \text{ với } h(t) = y'(x)$$

Hay

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Ví dụ. Tính $y'(x), y''(x)$ biết

$$(1) \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Giải: (1) Ta có $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$. Do đó

$$y'(x) = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t \Rightarrow y''(x) = \frac{(-\cot t)'}{-a\sin t} = \frac{-1}{a\sin^3 t}$$

Ta lại áp dung công thức vi phân cho y' ta có $d(y') = y''dx$.

Vì vậy

$$y''(x) = \frac{h'(t)}{x'(t)}, \text{ với } h(t) = y'(x)$$

Hay

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Ví dụ. Tính $y'(x), y''(x)$ biết

$$(1) \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Giải: (1) Ta có $x'(t) = -a\sin t$, $y'(t) = a\cos t$. Do đó

$$y'(x) = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t \Rightarrow y''(x) = \frac{(-\cot t)'}{-a\sin t} = \frac{-1}{a\sin^3 t}$$

2. Quy tắc L'hospital

Xét giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $(\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty})$. Khi đó

nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. và ta thường viết

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{L}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Chú ý: Điều ngược lại của quy tắc Lôpitan không đúng, tức là có thể tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ví dụ. Tính các giới hạn sau

$$(1)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad (2)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \qquad (3)\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - x}{\ln(1 + x^2)}$$

2. Quy tắc L'hospital

Xét giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $(\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty})$. Khi đó

nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. và ta thường viết

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{L}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Chú ý: Điều ngược lại của quy tắc Lôpitan không đúng, tức là có thể tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ví dụ. Tính các giới hạn sau

$$(1)\ \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad (2)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \qquad (3)\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - x}{\ln(1 + x^2)}$$

2. Quy tắc L'hospital

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $(\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty})$. Khi đó

nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$. và ta thường viết

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\stackrel{L}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

Chú ý: Điều ngược lại của quy tắc Lôpitan không đúng, tức là có thể tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ví dụ. Tính các giới hạn sau

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\qquad (2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3},\qquad (3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-x}{\ln(1+x^2)}$$

2. Quy tắc L'hospital

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng $(\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty})$. Khi đó

nếu $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. và ta thường viết

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{L}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Chú ý: Điều ngược lại của quy tắc Lôpitan không đúng, tức là có thể tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ví dụ. Tính các giới hạn sau

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}, \quad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - x}{\ln(1+x^2)}$$

3. Công thức khai triển Taylor

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận x_0, có các đạo hàm đến cấp $(n+1)$ tại x_0. Khi đó với x thuộc lân cận x_0 ta có thể biểu diễn

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0)$$

trong đó $R_n(x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, và c nằm giữa x và x_0.

Ta thường viết $R_n(x_0) = O((x-x_0)^n)$.

Khi $x_0 = 0$ ta có khai triển Maclaurent:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(0).$$

3. Công thức khai triển Taylor

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận x_0, có các đạo hàm đến cấp $(n+1)$ tại x_0. Khi đó với x thuộc lân cận x_0 ta có thể biểu diễn

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0)$$

trong đó $R_n(x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, và c nằm giữa x và x_0.

Ta thường viết $R_n(x_0) = O((x-x_0)^n)$.

Khi $x_0 = 0$ ta có khai triển Maclaurent:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(0).$$

3. Công thức khai triển Taylor

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận x_0, có các đạo hàm đến cấp $(n+1)$ tại x_0. Khi đó với x thuộc lân cận x_0 ta có thể biểu diễn

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0)$$

trong đó $R_n(x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, và c nằm giữa x và x_0.

Ta thường viết $R_n(x_0) = O((x-x_0)^n)$.

Khi $x_0 = 0$ ta có khai triển Maclaurent:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(0).$$

3. Công thức khai triển Taylor

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận x_0, có các đạo hàm đến cấp $(n+1)$ tại x_0. Khi đó với x thuộc lân cận x_0 ta có thể biểu diễn

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x_0)$$

trong đó $R_n(x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, và c nằm giữa x và x_0.

Ta thường viết $R_n(x_0) = O((x-x_0)^n)$.

Khi $x_0 = 0$ ta có khai triển Maclaurent:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(0).$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Ví dụ. Khai triển Maclaurent đến cấp n của các hàm số sau

$$(1).\ f(x) = e^x, \quad (2).\ f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (3).\ f(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$(4).\ f(x) = \sin x, \quad (5).\ f(x) = \cos x.$$

Giải: Bằng cách tính toán trực tiếp các đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ rồi thay vào công thức khai triển ta có thể biểu diễn:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x < 1|$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Ví dụ. Khai triển Maclaurent đến cấp n của các hàm số sau

$$(1).\ f(x) = e^x, \quad (2).\ f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (3).\ f(x) = \frac{1}{1+x},$$
$$(4).\ f(x) = \sin x, \quad (5).\ f(x) = \cos x.$$

Giải: Bằng cách tính toán trực tiếp các đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ rồi thay vào công thức khai triển ta có thể biểu diễn:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x < 1|$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Ví dụ. Khai triển Maclaurent đến cấp n của các hàm số sau

$$(1).\ f(x) = e^x, \quad (2).\ f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (3).\ f(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$(4).\ f(x) = \sin x, \quad (5).\ f(x) = \cos x.$$

Giải: Bằng cách tính toán trực tiếp các đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ rồi thay vào công thức khai triển ta có thể biểu diễn:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n). \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^n). \ \ \forall x : |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + O(x^n). \ \ \forall x : |x < 1|$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1}). \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n}). \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Ví dụ. Khai triển Maclaurent đến cấp n của các hàm số sau

$$(1).\ f(x) = e^x, \quad (2).\ f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (3).\ f(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$(4).\ f(x) = \sin x, \quad (5).\ f(x) = \cos x.$$

Giải: Bằng cách tính toán trực tiếp các đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ rồi thay vào công thức khai triển ta có thể biểu diễn:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x < 1|$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến

Ví dụ. Khai triển Maclaurent đến cấp n của các hàm số sau

$$(1).\ f(x) = e^x, \quad (2).\ f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (3).\ f(x) = \frac{1}{1+x},$$
$$(4).\ f(x) = \sin x, \quad (5).\ f(x) = \cos x.$$

Giải: Bằng cách tính toán trực tiếp các đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ rồi thay vào công thức khai triển ta có thể biểu diễn:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n). \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^n). \quad \forall x : |x| < 1$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + O(x^n). \quad \forall x : |x < 1|$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1}). \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n}). \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ví dụ. Khai triển Maclaurent đến cấp n của các hàm số sau

$$(1).\ f(x) = e^x, \quad (2).\ f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad (3).\ f(x) = \frac{1}{1+x},$$
$$(4).\ f(x) = \sin x, \quad (5).\ f(x) = \cos x.$$

Giải: Bằng cách tính toán trực tiếp các đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$ rồi thay vào công thức khai triển ta có thể biểu diễn:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^n).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x| < 1$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + O(x^n).\ \ \forall x : |x < 1|$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+1}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n}).\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

2.4. Các định lý về hàm số khả vi

2.4. Các định lý về hàm số khả vi

Định lý Fermat

Định lý Rolle

Định lý Lagrange

Định lý Cauchy

2.4. Các định lý về hàm số khả vi

Định lý Fermat

Định lý Rolle

Định lý Lagrange

Định lý Cauchy

2.4. Các định lý về hàm số khả vi

Định lý Fermat

Định lý Rolle

Định lý Lagrange

Định lý Cauchy

2.4. Các định lý về hàm số khả vi

Định lý Fermat

Định lý Rolle

Định lý Lagrange

Định lý Cauchy

Đạo hàm và vi phân hàm 1 biến