

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG II. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. Hệ Cramer

Bài 1.1. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 15 \end{cases}$$

Bài 1.2. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer (với a là tham số)

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 - x_3 &= 2 \\ ax_1 + 4x_2 - ax_3 &= 3 \\ -3x_1 + ax_2 + 2x_3 &= 3 \end{cases}$$

Bài 1.3. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 3x_1 - ax_2 + x_3 &= 4 \\ ax_1 - 2x_2 - ax_3 &= 3 \\ x_1 + ax_2 - 5x_3 &= -2 \end{cases}$$

Bài 1.4. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 4x_1 - ax_2 - x_3 &= -2 \\ ax_1 + 2x_2 - ax_3 &= 1 \\ -x_1 + ax_2 - 2x_3 &= 1 \end{cases}$$

Bài 1.5. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 - 5x_3 &= 3 \\ ax_1 + x_2 - ax_3 &= 2 \\ -x_1 + ax_2 + 4x_3 &= -2 \end{cases}$$

Bài 1.6. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - ax_3 &= 2 \\ ax_1 + 5x_2 + ax_3 &= -3 \\ ax_1 + ax_2 + 3x_3 &= 1 \end{cases}$$

Bài 1.7. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} -x_1 + ax_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 - 4x_2 + ax_3 &= 3 \\ ax_1 - ax_2 + 3x_3 &= -4 \end{cases}$$

Bài 1.8. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 - ax_3 &= 3 \\ ax_1 - x_2 - ax_3 &= 5 \\ ax_1 + ax_2 - x_3 &= -1 \end{cases}$$

Bài 1.9. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} 4x_1 - ax_2 + ax_3 &= 1 \\ ax_1 - x_2 - ax_3 &= -2 \\ -ax_1 + ax_2 - 3x_3 &= 1 \end{cases}$$

Bài 1.10. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 &= 1 \\ ax_1 + (-1+a)x_2 + ax_3 + ax_4 &= 1 \\ ax_1 + ax_2 + (1+a)x_3 + ax_4 &= 2 \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 + (-1+a)x_4 &= 2 \end{cases}$$

Bài 1.11. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} (1+a)x_1 - ax_2 + ax_3 - ax_4 &= 2 \\ -ax_1 + (-1+a)x_2 - ax_3 + ax_4 &= -2 \\ ax_1 - ax_2 + (1+a)x_3 - ax_4 &= 3 \\ -ax_1 + ax_2 - ax_3 + (-1+a)x_4 &= -3 \end{cases}$$

Bài 1.12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 &= a \\ ax_1 + (-1+a)x_2 + ax_3 + ax_4 &= a \\ ax_1 + ax_2 + (1+a)x_3 + ax_4 &= a \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 + (-1+a)x_4 &= a \end{cases}$$

Bài 1.13. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} (1+a)x_1 - ax_2 + ax_3 - ax_4 &= a \\ -ax_1 + (-1+a)x_2 - ax_3 + ax_4 &= -a \\ ax_1 - ax_2 + (1+a)x_3 - ax_4 &= a \\ -ax_1 + ax_2 - ax_3 + (-1+a)x_4 &= -a \end{cases}$$

Bài 1.14. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= -2 \\ 4x_1 + \lambda x_2 + 5x_3 &= 7 \end{cases}$$

Hãy tìm λ để hệ trên có một nghiệm duy nhất.

Bài 1.15. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$$

Hãy tìm λ để hệ trên có một nghiệm duy nhất.

Bài 1.16. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax_1 + (a+1)x_2 + (a-2)x_3 + (a+4)x_4 = 2 \\ (a-1)x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 + (a-2)x_4 = 1 \\ (a+2)x_1 + (a-1)x_2 + ax_3 + (a+1)x_4 = 1 \\ (a-4)x_1 + (a+2)x_2 + (a-1)x_3 + ax_4 = 2 \end{cases}$$

Hãy chỉ ra rằng hệ trên là hệ Cramer với mọi giá trị của tham số a

Bài 1.17. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + ax_3 = a \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ trên là hệ Cramer với mọi số thực a .

Bài 1.18. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ ax_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + ax_2 + 5x_3 = a - 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ trên là hệ Cramer với mọi số thực a .

Bài 1.19. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 + bx_3 = 1 \\ -ax_1 + 3x_2 + cx_3 = 3 \\ -bx_1 - cx_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ trên là hệ Cramer với mọi số thực a, b, c .

Bài 1.20. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn phương trình $A^{2021} + 2A^5 = 3I$ và cho B là một ma trận cột kích thước $n \times 1$. Hãy chứng minh rằng hệ phương trình tuyến tính $Ax = B$ là một hệ Cramer.

II. Giải hệ bằng phương pháp khử Gauss

Bài 2.1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \end{cases}$$

Bài 2.2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 7 \end{cases}$$

Bài 2.3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 &= 6 \end{cases}$$

Bài 2.4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \end{cases}$$

Bài 2.5. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 5 \end{cases}$$

Bài 2.6. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 12 \end{cases}$$

Bài 2.7. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 4 \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 2x_5 &= 11 \end{cases}$$

Bài 2.8. Giải hệ phương trình sau theo phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 4 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 8 \end{cases}$$

Bài 2.9. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 12 \end{cases}$$

Bài 2.10. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 &= 5 \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 7 \end{cases}$$

Bài 2.11. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 7 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 9 \end{cases}$$

Bài 2.12. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 11 \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 23 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 14 \end{cases}$$

Bài 2.13. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 17 \end{cases}$$

Bài 2.14. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 16 \\ 9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 12 \end{cases}$$

Bài 2.15. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6 \end{cases}$$

Bài 2.16. Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 10x_5 &= 6 \end{cases}$$

Bài 2.17. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 &= 4 \end{cases}$$

Bài 2.18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 &= 8 \end{cases}$$

Bài 2.19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 &= \lambda \end{cases}$$

Bài 2.20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 8x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= \lambda \end{cases}$$

Bài 2.21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 11x_3 + \lambda x_4 &= 7 \end{cases}$$

Bài 2.22. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 9x_1 + 7x_2 + 11x_3 + \lambda x_4 &= 0 \end{cases}$$

Bài 2.23. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - ax_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2ax_4 &= 7 \end{cases}$$

Bài 2.24. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - ax_4 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2ax_4 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5ax_4 &= 3 \end{cases}$$

III. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

Bài 3.1. Tìm λ để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 7x_1 + x_2 + 10x_3 - 17x_4 &= \lambda \end{cases}$$

Bài 3.2. Tìm giá trị của λ để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 &= 6 \end{cases}$$

Bài 3.3. Tìm giá trị của λ để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ -3x_1 + x_2 + 6x_3 &= 11 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 &= 15 \end{cases}$$

Bài 3.4. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= \lambda \end{cases}$$

Bài 3.5. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= \lambda \end{cases}$$

Bài 3.6. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 8 \end{cases}$$

Bài 3.7. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 8 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= -12 \end{cases}$$

Bài 3.8. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 &= 29 \end{cases}$$

Bài 3.9. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + \lambda x_4 &= 8 \end{cases}$$

Bài 3.10. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= \lambda \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 - x_5 &= \lambda \end{cases}$$

Bài 3.11. Tìm λ để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} ax_1 + (a-1)x_2 + (a-2)x_3 + (a-3)x_4 + (a-4)x_5 &= 5 \\ (a+1)x_1 + ax_2 + (a-1)x_3 + (a-2)x_4 + (a-3)x_5 &= -2 \\ (a+2)x_1 + (a+1)x_2 + ax_3 + (a-1)x_4 + (a-2)x_5 &= \lambda \end{cases}$$

Bài 3.12. Hãy xác định giá trị của a, b để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 + 14x_5 &= a \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 8x_5 &= b \end{cases}$$

IV. Cấu trúc tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Bài 4.1. Giải hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.2. Giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.3. Giải hệ thuần nhất sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.4. Giải hệ thuần nhất sau với mỗi giá trị của tham số a

$$\begin{cases} ax_1 + (a-1)x_2 + (a-2)x_3 + (a-3)x_4 + (a-4)x_5 &= 0 \\ (a+1)x_1 + ax_2 + (a-1)x_3 + (a-2)x_4 + (a-3)x_5 &= 0 \\ (a+2)x_1 + (a+1)x_2 + ax_3 + (a-1)x_4 + (a-2)x_5 &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= \lambda \end{cases}$$

a) Tìm λ để hệ có nghiệm.

b) Giải hệ thuần nhất ứng với hệ được cho.

Bài 4.6. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 &= \lambda \end{cases}$$

a) Tìm λ để hệ có nghiệm.

b) Giải hệ thuần nhất ứng với hệ được cho.

Bài 4.7. Giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.8. Giải hệ phương trình thuần nhất sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.9. Cho hệ thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 &= 0 \end{cases}$$

Hãy mô tả nghiệm tổng quát của hệ theo hệ nghiệm cơ bản.

Bài 4.10. Cho hệ thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \end{cases}$$

Hãy mô tả nghiệm tổng quát của hệ theo hệ nghiệm cơ bản.

Bài 4.11. Cho hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 &= 7 \end{cases}$$

Hãy mô tả nghiệm tổng quát theo công thức cấu trúc nghiệm.

Bài 4.12. Cho hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 4x_5 &= 6 \end{cases}$$

Hãy mô tả nghiệm tổng quát theo công thức cấu trúc nghiệm.

V. Các bài tập ứng dụng

Bài 5.1. Một điểm được dịch chuyển bằng một phép dời hình có ma trận là

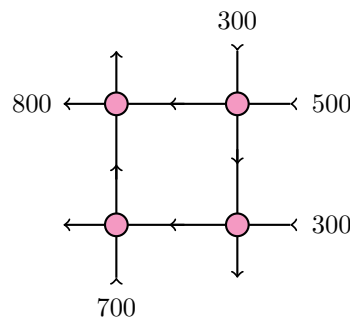
$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vị trí của điểm này sau khi được dịch chuyển là $(2, 1, 3, 4)$. Hãy tính vị trí của điểm khi chưa dịch chuyển.

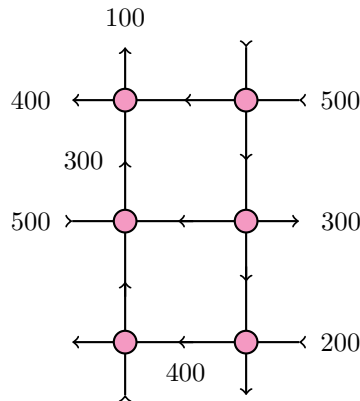
Bài 5.2. Cho tứ diện A, BCD với $A = (1, -1, 1), B = (4, 1, 1), C = (2, 3, 4), D = (1, 5, 4)$. Người ta đặt tại mỗi đỉnh tứ diện một viên bi sắt sao cho có tổng khối lượng 4 viên bi là $m = 12kg$. Hệ 4 viên bi này có trọng tâm chung là $G = (2, 3, 3)$. Hãy xác định khối lượng của mỗi viên bi sắt.

Bài 5.3. Một hệ 4 vật nặng có tổng khối lượng là $m = 50kg$ và trọng tâm của cả hệ là điểm $M(3, 4, 4)$. Vật thứ nhất trong hệ có trọng tâm riêng là $M_1 = (1, 1, -2)$. Trọng tâm riêng của vật thứ 2, 3, 4 của hệ này tương ứng là $M_2 = (3, 5, 1), M_3 = (4, 7, 9), M_4 = (2, -5, 5)$. Hãy tính khối lượng của từng vật trong hệ này.

Bài 5.4. Hãy xác định các dòng giao thông (số lượng phương tiện trong một giờ) ứng mạng giao thông sau đây



Bài 5.5. Hãy xác định các dòng giao thông (số lượng phương tiện trong một giờ) ứng mạng giao thông sau đây



Bài 5.6. Trong một chương trình khuyến mại, một công ty bán các gói hàng giống nhau, mỗi gói gồm 5 sản phẩm, cho những khách hàng tham gia. Ưu đãi dành cho người tham gia là được bốc thăm để lựa chọn một trong 5 sản phẩm của gói hàng. Sản phẩm bốc thăm sẽ được khuyến mãi và công ty hoàn trả 100% giá bán của một sản phẩm được khuyến mãi đó cho khách hàng. Do đó số tiền thực tế mà những khách hàng tham gia chương trình bỏ ra để mua một gói hàng có sự khác nhau và chúng là 1 trong các giá trị sau: 1500, 3000, 3650, 3900, 3950 (tính theo nghìn đồng). Hãy tính giá bán của công ty đối với từng sản phẩm.

Bài 5.7. Một nhân viên bán hàng của đại lý văn phòng phẩm có nhiệm vụ ghi chép lại số lượng vở Campus 80 trang, 120 trang và 200 trang và số tiền (tính theo nghìn đồng) tương ứng bán được theo từng ngày. Bảng ghi chép này của nhân viên bán hàng trong tuần trước là như sau:

Campus	Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7
Vở 80tr	?	13	20	7	16	5
Vở 120tr	18	15	14	6	?	18
Vở 200tr	8	6	11	8	4	12
Tổng tiền	582	499	674	?	421	608

Trong bảng có 3 giá trị bị bỏ sót. Hãy xác định các giá trị còn thiếu trong bảng.

Bài 5.8. Bảng ghi chép của một nhân viên bán hàng về số lượng được bán của 4 mặt hàng trong một tuần là như sau

Tên mặt hàng	Thứ 2	Thứ 3	Thứ 4	Thứ 5	Thứ 6	Thứ 7	CN
Giấy IK Plus	4	6	5	5	8	2	3
Giấy Double A	3	8	6	3	1	4	2
Giấy Super	5	2	?	7	4	0	1
Bìa A4	2	1	2	0	?	4	1
Tổng tiền	903	1146	1051	?	874	608	457

Trong bảng có 3 giá trị bị bỏ sót và số tiền được tính theo nghìn đồng. Hãy xác định các giá trị còn thiếu trong bảng.

Bài 5.9. Trong một phiên giao dịch, một nhà đầu tư đã thực hiện thành công việc mua vào một số lượng cổ phần của 4 mã chứng khoán. Giá mỗi cổ phần (tính theo nghìn đồng) lúc mua vào, giá bán ra sau đó 1 tuần, 2 tuần, 3 tuần của 4 mã chứng khoán trên và tổng giá trị mà nhà đầu tư đang nắm giữ của toàn bộ số lượng cổ phần này (tính theo nghìn đồng) được mô tả trong bảng sau:

	Giá mua vào	Giá bán sau 1 tuần	Giá bán sau 2 tuần	Giá bán sau 3 tuần
Mã thứ nhất	15, 8	14, 5	16, 2	16, 9
Mã thứ hai	26, 5	28, 8	27, 2	24, 9
Mã thứ ba	31, 2	35, 5	37, 6	38, 3
Mã thứ tư	52, 1	47, 5	49, 2	49, 9
Tổng giá trị	1298100	1367100	1411200	1406700

Hãy xác định số lượng cổ phần ứng với từng mã chứng khoán trong khoản đầu tư trên.

Bài 5.10. Trong một phiên giao dịch, một nhà đầu tư đã thực hiện thành công việc mua vào một số lượng cổ phần của 4 mã chứng khoán. Giá mỗi cổ phần (tính theo nghìn đồng) lúc mua vào, giá bán ra sau đó 1 tuần, 2 tuần, 3 tuần của 4 mã chứng khoán trên và tổng giá trị mà nhà đầu tư đang nắm giữ của toàn bộ số lượng cổ phần này (tính theo nghìn đồng) được mô tả trong bảng sau:

	Giá mua vào	Giá bán sau 1 tuần	Giá bán sau 2 tuần	Giá bán sau 3 tuần
Mã thứ nhất	11, 3	10, 8	10, 2	10, 6
Mã thứ hai	23, 5	24, 2	24, 8	22, 7
Mã thứ ba	37, 6	39, 2	39, 5	39, 8
Mã thứ tư	58, 3	58, 5	58, 2	59, 1
Tổng giá trị	1534300	1572400	1584700	1555600

Hãy xác định lợi nhuận của nhà đầu tư nếu ông ta quyết định bán tất cả số lượng cổ phần thuộc khoản đầu tư này sau 6 tuần với giá của từng mã chứng khoán theo thứ tự là 12, 3; 26, 4; 43, 5; 58, 6.

Bài 5.11. Một nhà đầu tư bỏ ra một khoản tiền để mua một số lượng cổ phần của 3 mã chứng khoán vào ngày 1/10. Sau đó ngày 12/10 ông ta tiếp tục mua thêm một số lượng cổ phần của ba mã chứng khoán trên. Sau khi được mua thêm, số lượng cổ phần của các mã chứng khoán thứ nhất, thứ hai và thứ ba tương ứng bằng với 200%, 150% và 300% số lượng đã mua ở ngày 1/10. Bảng dưới đây ghi lại giá mua bán (tính theo nghìn đồng) và tổng giá trị của số lượng cổ phần (tính theo nghìn đồng) của nhà đầu tư tại 5 ngày khác nhau.

	Giá mua ngày 1/10	Giá bán ngày 5/10	Giá bán ngày 8/10	Giá mua ngày 12/10	Giá bán ngày 15/10
Mã thứ nhất	17, 8	18, 1	18, 3	18, 5	19, 8
Mã thứ hai	26, 5	26, 7	27, 1	27, 2	28, 6
Mã thứ ba	42, 1	41, 5	41, 8	42, 3	44, 8
Tổng giá trị	?	334600	338400	?	757200

Hãy xác định số tiền nhà đầu tư đã chi ra để mua cổ phần ở lần thứ nhất và lần thứ 2.

Bài 5.12. Một nhà đầu tư thực hiện các giao dịch mua bán các cổ phần thuộc một nhóm gồm 4 mã chứng khoán M_1, M_2, M_3, M_4 trong các ngày 1, 5, 9, 15, 20 của tháng 10. Ngày 1/10 ông ta mua một số lượng cổ phần của các mã M_1, M_2, M_3 . Ngày 5/10 ông ta bán 50% số lượng M_1 , 20% số lượng M_3 , lấy số tiền nhận được và thêm vào 16 triệu đồng để mua các cổ phần mã M_4 . Ngày 9/10 ông ta bán nốt số cổ phần M_1 , 1000 cổ phần M_3 , 1000 cổ phần M_4 , tách số tiền nhận được thành 2 phần. Ông ta giữ lại phần thứ nhất là 28 triệu và lấy phần thứ 2 mua cổ phần M_2 . Ngày 15/10 ông ta bán một nửa số cổ phần của hai mã M_2, M_4 hiện đang giữ, sau đó cho thêm vào số tiền nhận được 17,9 triệu đồng để mua 1000 cổ phần M_3 và các cổ phần M_1 . Ngày 20/10 ông ta bán đi tất cả số cổ phần của 4 mã này và nhận về số tiền là 1,7935 tỷ đồng. Hãy tính số tiền ông ta bỏ ra ở ngày 1/10. Cho biết bảng giá (tính theo nghìn đồng) áp dụng cho giao dịch (mua và bán) của nhà đầu tư trong các ngày nói trên là

	Giá mua (bán) 1/10	Giá bán (bán) 5/10	Giá bán (bán) 9/10	Giá mua (bán) 15/10	Giá bán (bán) 20/10
M_1	16, 2	16, 8	17, 3	17, 5	19, 2
M_2	22, 4	21, 5	22, 2	24, 6	26, 2
M_3	38, 3	38, 1	38, 7	39, 2	39, 8
M_4	40, 4	38, 8	37, 2	39, 8	42, 2