Chương 4. Lý Thuyết Chuỗi

4.1. Chuỗi số

1. Các khái niệm

+ Xét một dãy vô hạn các số thực: $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} = u_1, u_2, \dots u_n, \dots$

Khi đó tổng vô hạn

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots \tag{1}$$

được gọi là một chuỗi số.

+ u_n được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

+ Để tính tổng của chuỗi ta thực hiện như sau:

Lý thuyết chuỗi

+ Gọi

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$\ldots \qquad S_n = u_1 + u_2 + \ldots u_n.$$

Dãy $\{S_n\}$ được gọi là dãy tổng riêng của chuỗi (1). Và S_n gọi là tổng riêng thứ n.
+ Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ hữu hạn, thì ta nói chuỗi (1) hội tụ và có tổng bằng S, ngược lại ta nói chuỗi (1) phân kỳ.

Lý thuyết chuỗi

Ví dụ. Tính tổng của chuỗi

(1). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; (2). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$; (3). $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$; (4). $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$.

Giải:

(1). Ta có

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

Vậy ta nói chuỗi hội tụ và có tổng bằng 1.

Highlight 21/12/2021 7:32:38 SA
Administrator Options
Tổng của 1 cấp số nhân với số hạng đầu là u_1. Công bội q = u_2/u_1 = u_3/u_2 = ...
S_n = u_1. (1-q^n) / (1-q)

(2). Ta có

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2} . \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1.$$

Vậy ta nói chuỗi hội tụ và có tổng bằng 1.

(3). Ta có

$$S_n = -1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n$$
$$= \begin{cases} -1 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn.} \end{cases}$$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
Vậy ta nói chuỗi phân kỳ.

(4). Ta có

$$S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$
$$= q.\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- Ta thấy với $|q| < 1$ thì $q^n \to 0$ khi $n \to +\infty$, do đó $S_n \to \dfrac{q}{1-q}$.
- Với $q > 1$ thì $q^n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$, do đó $S_n \to +\infty$.
- Với $q \leq -1$ thì không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, do đó không tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
- Với $q = n$ thì $S_n = n$ do đó $S_n \to +\infty$.

Vậy ta có thể kết luận chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ hội tụ khi $|q| < 1$ và phân kỳ khi $|q| \geq 1$.

Lý thuyết chuỗi

2. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Nhận xét:

- Điều ngược lại của chuỗi nói chung không đúng (ví dụ chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$).

- Nếu không tồn tại $\lim_{n\to\infty} u_n$ hoặc $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ.

Ta thường sử dụng nhận xét này để chứng minh sự phân kỳ của một chuỗi.

Lý thuyết chuỗi

3. Tính chất của chuỗi số

\+ Sự hôi tụ của một chuỗi sẽ không thay đổi nếu ta thêm vào hay bớt đi một số hữu hạn các số hàng phía đầu.

\+ Tổng của 2 chuỗi hội tụ $\Longrightarrow$ hội tụ.

\+ Tổng của một chuỗi hội tụ và một chuỗi phân kỳ $\Longrightarrow$ phân kỳ.

\+ Tổng của hai chuỗi phân kỳ có thể hội tụ hoặc có thể phân kỳ.

Sau đây chúng ta chỉ xét một số dạng chuỗi số đặc biệt như: chuỗi số dương, chuỗi đan dấu.

27:12

4.2. Chuỗi số dương

1. Các khái niệm

+ Dạng tổng quát của chuỗi số dương

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\ ,\ u_n > 0,\ \forall n.$$

+ Trong chuỗi số dương ta thấy: $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$, do đó nếu dãy $\{S_n\}$ bị chặn trên (tức $S_n \leq M, \forall n$) thì chuỗi hội tụ.

Ví dụ. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Lý thuyết chuỗi

Ta thấy

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1.1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \ldots + \frac{1}{n.n} \\
&\leq 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\
&= 2 - \frac{1}{n} \leq 2, \ \forall n.
\end{aligned}
$$

Do đó $\{S_n\}$ bị chặn trên, vậy chuỗi hội tụ.

Tổng quát: Ta có thể chứng minh được chuỗi Riemann sau

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

Lý thuyết chuỗi

2. Các tiêu chuẩn đánh giá sự hội tụ của chuỗi số dương

a) Tiêu chuẩn so sánh

Định lý 1. Giả sử $0 \leq u_n \leq v_n,\ \forall n \geq n_0 \geq 1$. Khi đó:

- Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ,
- Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kỳ.

Định lý 2. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = K,\ 0 < K <= \infty$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

Đặc biệt, khi $K = 1$, ta viết $u_n \sim v_n$, khi $n \to \infty$.

Chú ý: Khi $K = 0$, ta thấy $u_n \leq v_n$ với n từ n_0 nào đó (áp dụng Định lý 1), tương tự khi $K = \infty$.

Lý thuyết chuỗi

Highlight 21/12/2021 8:09:51 SA
Administrator Options

Ta có 1- cos u tương với u^2 / 2 khi u --> 0

Vậy u_n = 1 - cos (1/n) tương đương với 1 / 2n^2 khi n --> vc

Do chuỗi của 1/ 2n^2 hội tụ

Nên chuỗi (3) hội tụ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

(1). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n^2 + 2}$; (2). $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 1}$; (3). $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$.

Giải:

Highlight 21/12/2021 8:06:43 SA
Administrator Options

Chú ý: Ta luôn có, với x đủ lớn thì

ln x <= x^alpha với mọi alpha > 0

(1). Ta có ln n <= n với mọi n >= 1

Nên u_n = ln n / (n^3 + n^2 + 2) < = n / (n^3 + n^2 + 2)
< = n / n^3 = 1/ n^2

Cho chuỗi của 1/n^2 hội tụ

Nên chuỗi (1) hội tụ

Highlight 21/12/2021 8:09:50 SA
Administrator Options

Ta có ln n >= ln 2 với mọi n >= 2

Nên u_n = n ln n / (n^2 -1) >= ln2 .n / (n^2-1)

> = ln2. n / n^2 = ln2 / n

Do chuỗi của ln2 / n phân kỳ

Nên chuỗi (2) phân kỳ

Lý thuyết chuỗi

b) Tiêu chuẩn Đa lăm be (D'Alembert)

Xét chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Giả sử ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = D$. Khi đó chuỗi hội tụ nếu $D < 1$, và phân kỳ nếu $D > 1$.

Trong trường hợp $D = 1$ ta không thể xét được theo tiêu chuẩn Đa lăm be.

c) Tiêu chuẩn Côsi (Cauchy)

Xét chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$. Giả sử ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$. Khi đó chuỗi hội tụ nếu $C < 1$, và phân kỳ nếu $C > 1$.

Trong trường hợp $C = 1$ ta không thể xét được theo tiêu chuẩn Côsi.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

(1). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$; (2). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n!}$; (3). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{n^n}$; (4). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.3^n}$.

Giải

Highlight 21/12/2021 7:40:19 SA
Administrator Options

(1) Ta có u_n = n^2 / 2^n

u_{n+1} = (n+1)^2 / 2^{n+1}

lim u_{n+1} / u_n = lim [(n+1)^2 / 2^{n+1}] .[2^n / n^2]

= lim (n+1)^2 / 2n^2

= 1/2 < 1

Chuỗi hội tụ

Highlight 21/12/2021 7:42:30 SA
Administrator Options

(2) lim u_{n+1} / u_n = ... = lim 2/n =0 <1

Chuỗi hội tụ

(3) lim u_{n+1} / u_n = ... = lim (n/n+1)^n

1/e < 1

Chuỗi hội tụ

Chú ý: lim(1+1/n)^n = e

Highlight 21/12/2021 7:42:39 SA
Administrator Options

lim (căn bậc n của u_n) = ... = lim (n+1)^n / 3n^n

e/3 < 1

Chuỗi hội tụ

c) Tiêu chuẩn Côsi (Cauchy)

Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Giả sử ta có $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$. Khi đó chuỗi hội tụ nếu $C < 1$, và phân kỳ nếu $C > 1$.

Trong trường hợp $C = 1$ ta không thể xét được theo tiêu chuẩn Côsi.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

(1). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$; (2). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$; (3). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$; (4). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}.3^n}$.

Giải:

Lý thuyết chuỗi

Nhận xét: Ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Đa lăm be và tiêu chuẩn Cô si cho các chuỗi có dấu bất kỳ bằng cách xét

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = D \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = C$$

Khi đó chuỗi hội tụ nếu $D < 1$ (hoặc $C < 1$) và phân kỳ nếu $D > 1$ (hoặc $C > 1$).

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n+7}\right)^n$$

Giải.

Highlight 21/12/2021 7:50:03 SA

Administrator Options

lim (căn bậc n của |u_n|) = lim (3n+2)/(2n+7) = lim 3n/2n = 3/2 >1

Chuỗi phân kỳ

d) Tiêu chuẩn tích phân

Giả sử $f(x)$ là một hàm số liên tục, không âm, đơn điệu giảm về 0 trên $[1, +\infty$ và thỏa mãn

$$f(n) = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ và tích phân $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

(1). $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$; (2). $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}$.

Giải:

(1) + Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; $x \geq 2$. Ta thấy $f(x)$ liên tục, không âm với mọi $x \geq 2$.

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0, \ \forall x \geq 2; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$$

Vậy $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm về 0 trên $[2, +\infty)$.

Lý thuyết chuỗi

$+$ Xét tích phân $I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$. Bằng cách đặt $t = \ln x$ ta đưa tích phân về dạng

$$I = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

đây là tích phân Riemann với $\alpha = 1$ nên phân kỳ.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn tích phân.

(2) Ta thấy

$$u_n = \frac{1}{n \ln(n-1)} \sim \frac{1}{n \ln n}, \ n \to +\infty$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ phân kỳ theo câu (1), nên chuỗi $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh.

Bài 1. Xét sự hội tụ của chuỗi số

1. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\dots$

2. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^3+n^2+2}$

4. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n\ln n}{n^2-1}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n.2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3.5.7\dots(2n+1)}{2.5.8\dots(3n-1)}$

7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n.n!}{n^n}$

8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\frac{1}{3n}-\sin\frac{1}{3n}\right)$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}3^n}$

12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^3}$

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$

14. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.\ln^k n}$

15. $\cancel{\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}}$

16. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\left(\frac{3n+2}{2n+7}\right)^n$

17. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\frac{3^n}{n^3}$

18. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$

Highlight 21/12/2021 8:07:18 SA
Administrator Options

(1). Tính S_n

(2),(3),(9),(10),(12), (13),. So sánh

(6), (7): Đa Lăm be

(5), (8), (11): Cô si

4.3. Chuỗi đan dấu

1. Sự hội tụ tuyệt đối và tương đối của một chuỗi

+ Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, trong đó u_n có dấu tùy ý. Khi đó nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cũng hội tụ, và trong trường hợp này ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ là hội tụ tuyệt đối.

+ Từ đây ta thấy nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ cũng phân kỳ.

+ Trong trường hợp chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ, còn $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ phân kỳ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ tương đối, hay còn gọi là hội tụ bán tuyệt đối.

Lý thuyết chuỗi

2. Chuỗi đan dấu

+ Dạng tổng quát của chuỗi đan dấu

$$\pm\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n; \quad u_n > 0$$

+ Đối với chuỗi đan dấu ta có tiêu chuẩn đánh giá như sau:

Định lý Leibnitz

Nếu $\{u_n\}$ là một dãy đơn điệu giảm về 0 khi $n \to +\infty$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ hội tụ và có tổng $\le u_1$.

Ví dụ. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

Lý thuyết chuỗi

Giải. Ta có $u_n = \frac{1}{n}$, và

$$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}, \ \forall n; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Do đó dãy $\{u_n\}$ đơn điệu giảm về 0, khi $n \to +\infty$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Nhận xét: Trong ví dụ trên nếu ta xét

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

ta thấy chuỗi vế bên phải là phân kỳ, do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ là hội tụ tương đối.

Bài 2. Xét sự hội tụ tuyệt đối, hội tụ tương đối

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(n+1)(n+2)}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} . \frac{2^n}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n^2+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi n^2}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n^2}\right)$

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

Administrator
28/12/2021 7:36:15 SA

(1) Chú ý cos(n pi) = (-1)^n
Chuỗi hội tụ tuyệt đối

(2) Hội tụ tuyệt đối theo Dalambe (D =0)

(3) Hội tụ tương đối (theo Lépnit)

(4) Hội tụ tương đối

(5) Hội tụ tương đối

(6) Hội tụ tương đối

4.4. Chuỗi hàm

1. Các khái niệm

+ Xét một dãy vô hạn các hàm số thực: $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x), \dots$
Khi đó tổng vô hạn

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots u_n(x) + \dots \qquad (2)$$

được gọi là một chuỗi hàm.

+ $u_n(x)$ được gọi là số hạng tổng quát của chuỗi.

+ Nếu cho $x = x_0$ ta thu được chuỗi số tương ứng $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$.

+ Như vậy chuỗi số là một trường hợp riêng của chuỗi hàm, và sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi hàm phụ thuộc vào giá trị mà x nhận được.

+ Tập các giá trị của x để chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của chuỗi.

2. Cách tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Giả sử

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = D, \quad (\text{hoặc } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = C).$$

Khi đó chuỗi hội tụ nếu $D < 1$ (hoặc $C < 1$) và phân kỳ nếu $D > 1$ (hoặc $C > 1$), còn tại $D = 1$ (hoặc $C = 1$) ta xét trực tiếp theo chuỗi số tương ứng.

Ví dụ. Tìm miền hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n+2}.$$

Giải:

Ta có $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{n+2}$, $u_{n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{n+3}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^{n+1}}{n+3} . \frac{n+2}{(-1)^n(x+1)^n} \right| = |x+1|$$

Chuỗi hội tụ nếu: $|x+1| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 0$.

\+ Tại $x = -2$, chuỗi có dạng

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \dfrac{(-1)^n}{n+2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+2}$ là chuỗi phân kỳ vì $\alpha = 1$.

\+ Tại $x = 0$, chuỗi có dạng

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . \dfrac{(1)^n}{n+2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+2}$ là chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Kết luận: Miền hội tụ của chuỗi là: $(-2, 0]$.

Bài 3. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n \arcsin^n x}{\pi^n (n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln x)^n}{2n+1}$

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n} e^{nx}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln x)^n}$

6. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n}$

7. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln^n x}}$

8. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n}$

9. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n}$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2x-3)^n}$

11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n4^n}$

12. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}}$

13. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n(2n-1)}$

14. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}}$

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n\pi^n} x^n$

16. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} x^n}$

17. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n^2}\right) x^n}$

18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(2n+1)}$

19. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(2n+1)}}$

20. $\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+2)}}$

21. $\cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{\sqrt{n^2+1}}}$