BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG III. KHÔNG GIAN TUYẾN TÍNH

I. Không gian tuyến tính và không gian con

Bài 1.1. Cho U là một không gian tuyến tính thực và $x, y \in U$. Hãy rút gọn các biểu thức:
a) $5(2x+4y)-3(x-2y)$.
b) $2(-x+3y)+5(4x+2y)$.

Bài 1.2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử $x=(2,-1,1)$; $y=(3,-2,4)$; $z=(3,-3,2)$. Hãy thực hiện các tính toán sau:
a) $2x+3y-4z$,
b) $2(x-2y)+3(4x+y-z)$.

Bài 1.3. Cho x, y là các phần tử của $\mathbb{R}^4$ thỏa mãn các điều kiện:

$$x+y=(1,3,2,-1); \quad y-x=(3,7,4,5).$$

Hãy tính x, y.

Bài 1.4. Cho x, y là các phần tử của $\mathbb{R}^4$ thỏa mãn các điều kiện:

$$2x+y=(4,1,3,1); \quad y-7x=(13,-8,21,10).$$

Hãy tính x, y.

Bài 1.5. Cho x, y, z là các phần tử của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn các điều kiện:

$$2x+y+z=(3,-1,2); \quad x+2y+z=(1,5,1); \quad x+y+2z=(4,0,5).$$

Hãy tính x, y, z.

Bài 1.6. Cho x, y, z là các phần tử của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn các điều kiện:

$$3x+3y+z=(2,-1,3); \quad x+5y+2z=(4,-1,1); \quad 3x-2y-z=(3,4,1).$$

Hãy tính x, y, z.

Bài 1.7. Cho x, y, z là các phần tử của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn các điều kiện:

$$2x+3y-4z=(1,-1,1); \quad 3x+y+2z=(5,3,2); \quad 3x-2y+9z=(2,4,3).$$

Hãy tính $6x+5y-4z$.

Bài 1.8. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_5$ là các phần tử của $\mathbb{R}^4$. Giả thiết rằng ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 = (2,0,3,0); \quad u_2 + u_3 = (0,1,4,2); \quad u_3 + u_4 = (1,3,3,3); \\ &u_4 + u_5 = (3,2,3,4); \quad u_5 + u_1 = (2,2,3,1). \end{aligned}$$

Hãy tính u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

Bài 1.9. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_5$ là các phần tử của $\mathbb{R}^4$. Giả thiết rằng ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned} &u_1 + u_2 - u_3 = (2,0,3,0); \quad u_2 + u_3 - u_4 = (0,1,4,2); \quad u_3 + u_4 - u_5 = (1,3,3,3); \\ &u_4 + u_5 - u_1 = (3,2,3,4); \quad u_5 + u_1 - u_2 = (2,2,3,1). \end{aligned}$$

Hãy tính u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

Bài 1.10. Cho $u_1, u_2, \ldots, u_{20}$ là các phần tử của $\mathbb{R}^4$. Đặt với mỗi chỉ số $i \in \{1, 2, \ldots, 20\}$ ta đặt $u_{i+20} = u_i$. Hãy chỉ ra rằng nếu các phần tử được cho thỏa mãn các điều kiện

$$u_i + 2u_{i+1} + 3u_{i+1} + \ldots + 20u_{i+19} = (30, -30, 60, -60) \ \text{ với mỗi } i = 1, 2, \ldots, 20$$

thì

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{20} = \frac{1}{7}(1, -1, 2, -2).$$

Bài 1.11. Cho M là một không gian con của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2 đều là các phần tử của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $2u_1 + 7u_2, 3u_1 - 4u_2$ là hai phần tử của M thì các phần tử u_1, u_2 đều thuộc M.

Bài 1.12. Cho M là một không gian con của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 đều là các phần tử của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $3u_1 + u_2 + 5u_3, 2u_1 + 4u_2 + 3u_3, 4u_1 - u_3$ là ba phần tử của M thì các phần tử u_1, u_2, u_3 đều thuộc M.

Bài 1.13. Cho M là một không gian con của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$. Giả sử rằng $u_1, u_2, \ldots, u_{2021}$ đều là các phần tử của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu các phần tử sau đều là phần tử của M:

$$u_1 + u_2, \ u_2 + u_3, \ \ldots, \ u_{2020} + u_{2021}, \ u_{2021} + u_1$$

thì các phần tử $u_1, u_2, \ldots, u_{2021}$ cũng là các phần tử của M.

Bài 1.14. Cho M là một không gian con của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$. Giả sử rằng $u_1, u_2, \ldots, u_{2021}$ đều là các phần tử của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu các phần tử sau đều là phần tử của M:

$$u_1 + u_2 + u_3, \ u_2 + u_3 + u_4, \ \ldots, \ u_{2020} + u_{2021} + u_1, \ u_{2021} + u_1 + u_2$$

thì các phần tử $u_1, u_2, \ldots, u_{2021}$ cũng là các phần tử của M.

Bài 1.15. Cho M là một không gian con của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$. Giả sử rằng u_1, u_2, u_3 đều là các phần tử của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $2u_1+3u_2-u_3, u_1+4u_2+2u_3$ là hai phần tử của M và $3u_1+u_2+u_3 \notin M$ thì các phần tử u_1, u_2, u_3 đều không thuộc M.

Bài 1.16. Cho M là một không gian con của $\mathbb{R}^n$ và cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $2u_1-u_2+3u_3, 4u_1+2u_2+u_3, u_2+3u_3-4u_4$ là ba phần tử của M và $u_4 \notin M$ thì các phần tử u_1, u_2, u_3 đều không thuộc M.

Bài 1.17. Cho M là một tập con của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ và cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $u_1+2u_2+u_3, 2u_1-u_2+4u_3, 2u_1+3u_3+u_4, 3u_2-u_3+u_4$ là 4 phần tử của M, nhưng $u_3+u_4 \notin M$ thì M không phải là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

Bài 1.18. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho tập con

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\}.$$

Chứng minh rằng M là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

Bài 1.19. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho tập con

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, 2x_1 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 0\}.$$

Chứng minh rằng M là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

Bài 1.20. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho tập con

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leqslant 0\}.$$

Chứng minh rằng M là không phải là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

II. Các bài toán về tổ hợp tuyến tính

Bài 2.1. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Hãy cho biết biểu thức $2a_1 + a_2$ có là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a) hay không? Hãy giải thích kết quả do mình đưa ra.

Bài 2.2. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (2, 1, 3), \quad a_3 = (3, 2, 5).$$

Chứng minh rằng phần tử $x = (2, -1, 9)$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Bài 2.3. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 3, 2), \quad a_2 = (3, 4, 1), \quad a_3 = (2, 1, -1).$$

Chứng minh rằng phần tử $x = (7, 4, -3)$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Bài 2.4. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (2, 1, 1), \quad a_2 = (1, -2, 3), \quad a_3 = (5, 1, 4).$$

Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính của phần tử $x = (2, 5, -3)$ qua hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Bài 2.5. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 3, 4), \quad a_2 = (1, -2, -1), \quad a_3 = (3, -1, 2).$$

Hãy chỉ ra rằng phần tử $x = (5, 3, 3)$ không thể biểu diễn được qua hệ (a).

Bài 2.6. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (2, 1, 2, 1), \quad a_2 = (1, -1, 2, -2), \quad a_3 = (2, 3, 1, 2).$$

Hãy chỉ ra rằng phần tử $x = (0, 0, 0, 1)$ không thể biểu diễn được qua hệ (a).

Bài 2.7. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (2, -1, 1), \quad a_3 = (1, 2, 2), \quad a_4 = (5, 4, 6).$$

a) Hãy chỉ ra rằng phần tử $x = (6, -1, 3)$ có duy nhất một cách biểu diễn tuyến tính trên hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.
b) Hãy chỉ ra rằng phần tử x ở trên có vô số các biểu diễn tuyến tính trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Bài 2.8. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$a_1 = (2, -1, 1), \quad a_2 = (3, 2, -1), \quad a_3 = (1, 1, 2).$$

a) Chứng minh rằng phần tử $x = (3, -5, 4)$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2\}$.
b) Chứng minh rằng phần tử x ở trên không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_2, a_3\}$.
c) Phần tử x ở trên có phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ hay không? Hãy giải thích.

Bài 2.9. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Giả sử rằng trong $\mathbb{R}^n$ tồn tại một phần tử x sao cho x là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ nhưng x không phải là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_2, a_3, a_4\}$.
a) Hãy chỉ ra rằng x là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a).
b) Hãy chỉ ra rằng a_4 không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Bài 2.10. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$a_1 = (1, -2, 1), \quad a_2 = (2, -1, -1), \quad a_3 = (1, 4, 2), \quad a_4 = (3, 1, -4).$$

a) Chứng minh rằng a_4 không phải là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_2, a_3\}$.
b) Tìm tất cả biểu diễn tuyến tính của a_4 trên hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.
c) Tìm tất cả biểu diễn tuyến tính của a_4 trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Bài 2.11. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (2, 1, 3)$ $a_3 = (1, 4, 2)$, $a_4 = (3, 10, -2)$. Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính có thể có của a_4 trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Bài 2.12. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (4, 1, 3)$ $a_3 = (-2, 2, 1)$, $a_4 = (9, 10, 10)$. Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính có thể có của a_4 trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Bài 2.13. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các phần tử a_1, a_2, a_3, a_4. Giả sử rằng $x, y \in \mathbb{R}^n$ và x là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$; y là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_3, a_4\}$. Hiệu $x - y$ có là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ hay không? Hãy giải thích.

Bài 2.14. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các phần tử a_1, a_2, a_3, a_4. Giả sử rằng $x, y \in \mathbb{R}^n$ và x là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$; y là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_3, a_4\}$. Chứng minh rằng nếu phần tử $2x + y$ không thể có biểu diễn tuyến tính trên hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ thì phần tử a_4 không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Bài 2.15. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Giả sử rằng $x, y \in \mathbb{R}^n$ và x là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a). Chứng minh rằng nếu phần tử $3x + 2y$ không thể có biểu diễn tuyến tính trên hệ (a) thì phần tử $5x - y$ cũng vậy.

Bài 2.16. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Giả sử rằng $x = (1, 1, 0, 0)$, $y = (0, 0, 1, -1)$ đều là các tổ hợp tuyến tính của hệ (a). Hãy chỉ ra rằng phần tử $z = (3, 3, 2, -2)$ cũng là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a).

Bài 2.17. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Giả sử rằng $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ và x, y là các tổ hợp tuyến tính của hệ (a). Chứng minh rằng nếu z không thể biểu diễn được trên hệ (a) thì $x + y + z \neq 0$.

Bài 2.18. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Giả sử rằng $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng nếu $x + y, y + z, z + x$ đều là các tổ hợp tuyến tính của hệ (a) thì các phần tử x, y, z cũng vậy.

Bài 2.19. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Giả sử rằng $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ và $x - y, y - z$ đều là các tổ hợp tuyến tính của hệ (a).
a) Hãy chỉ ra rằng $z - x$ và $2x + 5y - 7z$ đều là các tổ hợp tuyến tính của hệ (a).
b) Hãy chỉ ra rằng nếu x không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ (a) thì $y + z$ cũng không phải là tổ hợp tuyến tính của hệ (a).

Bài 2.20. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ véc tơ $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Xác định biểu diễn tuyến tính của u_4 theo các véc tơ còn lại trong các trường hợp:

a) $u_1 + 4u_2 - 3u_3 + 2u_4 = 0$.

b) $2u_1 + 5u_2 + u_3 - 3u_4 = 0$.

Bài 2.21. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ 7 véc tơ $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_7\}$. Giả sử rằng các véc tơ được cho thỏa mãn các hệ thức

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 0,$$
$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + u_7 = 0.$$

Hãy xác định biểu diễn tuyến tính của hai phần tử u_6, u_7 trên hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_5\}$.

Bài 2.22. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ 4 véc tơ $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Giả sử rằng $x, y \in \mathbb{R}^n$ là các phần tử có biểu diễn tuyến tính trên hệ (u) như sau:

$$x = 3u_1 + 2u_2 - u_3 + 3u_4,$$
$$y = 2u_1 + u_2 + 3u_3 - 2u_4.$$

Hãy xác định một biểu diễn tuyến tính của u_3 qua hệ 4 phần tử $\{u_1, u_4, x, y\}$.

Bài 2.23. Tìm λ để $x = (1, 4, \lambda)$ biểu diễn được theo các véc tơ dưới đây, trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = (1, 1, -2);\ a_2 = (2, -3, 1);\ a_3 = (-1, -3, 4).$$

Bài 2.24. Tìm λ để $x = (2, 3, 2, \lambda)$ biểu diễn được theo các véc tơ dưới đây, trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = (1, 1, 2, 2);\ a_2 = (2, 3, 1, 4);\ a_3 = (3, 4, 2, 3).$$

Bài 2.25. Tìm λ để $x = (4, 12, -7, \lambda)$ biểu diễn được theo các véc tơ dưới đây, trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = (1, 1, -1, -2);\ a_2 = (1, 2, -3, -1);\ \ a_3 = (1, -1, 4, 2),\ a_4 = (1, 3, 2, 1).$$

Bài 2.26. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (1, 2, 3, 4),\quad a_2 = (2, 3, 5, 1),\quad a_3 = (1, 1, 3, \lambda);\quad a_4 = (-1, 4, 3, -2).$$

Hãy xác định theo λ tất cả các biểu diễn tuyến tính của phần tử $x = (2, 9, 11, 3)$ theo hệ (a).

Bài 2.27. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (1, 1, 3, 2), \quad a_2 = (1, 2, 4, -2), \quad a_3 = (-1, 2, 1, \lambda); \quad a_4 = (-1, 3, 1, 3).$$

Hãy chỉ ra rằng phần tử $x = (1, 3, 5, 9)$ không thể là tổ hợp tuyến tính của hệ (a) với mọi giá trị của λ.

Bài 2.28. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$u_1 = (2, -\lambda, 3); \quad u_2 = (\lambda, 1, -\lambda); \quad u_3 = (1, \lambda, 2).$$

Hãy chỉ ra rằng mọi phần tử của $\mathbb{R}^3$ đều là tổ hợp tuyến tính của hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Bài 2.29. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$u_1 = (2, 1, 3); \quad u_3 = (1, 4, 2); \; u_3 = (3, 2, 1).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Bài 2.30. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử

$$u_1 = (1, 1, 1, -1); \quad u_3 = (1, 1, -1, 1); \; u_3 = (1, -1, 1, 1); \quad u_4 = (-1, 1, 1, 1).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^4$.

III. Các bài toán về hệ độc lập tuyến tính

Bài 3.1. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$u_1 = (1, 1, 3); \quad u_3 = (4, 1, 1); \; u_3 = (1, 5, 1).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.2. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử

$$u_1 = (2, 1, 1, -1); \quad u_3 = (1, 2, -1, 1); \; u_3 = (1, -1, 2, 1).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.3. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các phần tử

$$u_1 = (1, 1, 1); \quad u_3 = (2, 1, 1); \; u_3 = (1, 4, 1), \quad u_4 = (1, 1, 5).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3.4. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử

$$u_1 = (1, 2, 1, 2); \quad u_3 = (2, 1, 2, 1); \; u_3 = (1, 1, 2, 2); \quad u_4 = (2, 2, 1, 1).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3.5. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho các phần tử

$$u_1 = (1, 2, 1, -1);\quad u_3 = (2, 1, -1, 1);\ u_3 = (1, -1, 2, 1);\quad u_4 = (-1, 1, 1, 2).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.6. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3, u_4 thỏa mãn điều kiện

$$u_1 - u_2 + 3u_3 - 2u_4 = 0.$$

Chứng minh rằng, nếu hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ độc lập tuyến tính thì hệ $\{u_2, u_3, u_4\}$ cũng là hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.7. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3, u_4 thỏa mãn điều kiện

$$u_1 + 2u_2 - u_3 - u_4 = 0.$$

Chứng minh rằng, nếu hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính thì hệ $\{u_2, u_3, u_4\}$ cũng là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3.8. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 thỏa mãn điều kiện

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 = 0.$$

Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là hệ độc lập tuyến tính thì hệ $\{u_1, u_3, u_5\}$ cũng là hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.9. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 thỏa mãn điều kiện

$$u_1 + 2u_2 - u_3 + 2u_4 - u_5 = 0.$$

Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_1, u_3, u_5\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính thì hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ cũng là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3.10. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3. Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_1 + u_2, u_1 - u_2, u_3\}$ là một hệ độc lập tuyến tính thì hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ cũng là một hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.11. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3. Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_1 + 2u_2, 2u_1 - u_2, u_3\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính thì hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ cũng là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3.12. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3, u_4. Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_1, u_2, u_3 - u_4\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính thì hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ cũng là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3. 13. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3, u_4. Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_1 - u_2, u_2 + u_3, u_3 - u_4\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính thì hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ cũng là một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3.14. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho các véc tơ u_1, u_2, u_3, u_4. Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một hệ độc lập tuyến tính thì hệ $\{u_1, u_2 + u_3, u_3 - 2u_4\}$ cũng là một hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.15. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ độc lập tuyến tính $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Xét các phần tử

$$w_1 = 3u_1 - u_2 + 2u_3, \quad w_2 = u_2 + u_3 + u_4, \quad w_3 = u_3 - 2u_4.$$

Hãy chứng minh rằng hệ $(w) = \{w_1, w_2, w_3\}$ cũng là hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.16. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$ cho hệ phụ thuộc tuyến tính $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Xét các phần tử

$$v_1 = u_1 + u_2, \quad v_2 = u_1 - u_2, \quad v_3 = u_3 + u_4, \quad v_3 = u_3 - u_4.$$

Hãy chứng minh rằng hệ $(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ cũng là hệ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 3.17. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (1, 1, -1, 1), \quad a_2 = (2, 3, -4, 1), \quad a_3 = (3, 3, 1, 2), \quad a_4 = (4, 5, -2, \lambda).$$

Hãy tìm λ để hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Bài 3.18. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, \lambda, 1), \quad a_2 = (\lambda, 3, -\lambda), \quad a_3 = (2, \lambda, 1).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính với mọi λ.

Bài 3.19. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (-3, \lambda, \lambda, 1), \quad a_2 = (1, -3, \lambda, \lambda), \quad a_3 = (1, 1, -3, \lambda), \quad a_4 = (1, 1, 1, -3).$$

Hãy tìm λ để hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là một hệ phụ thuộc lập tuyến tính.

Bài 3.20. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (-1, 1, 2, -1), \quad a_2 = (2, -1, 1, 2), \quad a_3 = (1, 3, 4, \lambda).$$

Hãy tìm λ để hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là một hệ phụ thuộc lập tuyến tính.

IV. Các bài toán về cơ sở và số chiều và tọa độ

Bài 4.1. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 3, -2), \quad a_2 = (2, -1, 1), \quad a_3 = (-4, 2, -2).$$

Có dấu hiệu đặc biệt nào cho thấy rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ không phải là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ hay không? Nếu có, hãy cho biết dấu hiệu đó.

Bài 4.2. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$ là hai cơ sở của không gian tuyến tính U. Hãy cho biết hệ $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ có phải là một cơ sở của không gian tuyến tính U hay không? Giải thích về câu trả lời mà bạn đưa ra.

Bài 4.3. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (1, 1, 1),\ a_2 = (1, 2, 3),\ a_3 = (2, 1, 4).$$

a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ có là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ hay không? Tại sao?

Bài 4.4. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với

$$a_1 = (1, 2, 1, 2),\ a_2 = (1, 2, -1, 1),\ \ a_3 = (2, 1, 3, 1),\ a_4 = (1, 3, -2, 2).$$

a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ có là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ hay không? Tại sao?

Bài 4.5. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (3, 1, 2);\ \ a_2 = (4, 3, 1),\ \ a_3 = (1, 2, 4).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Bài 4.6. Cho λ là một tham số thực và xét hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ được cho bởi

$$a_1 = (1, \lambda, -3),\ \ a_2 = (2, 1, \lambda),\ \ a_3 = (1, -2, 5).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ với mọi giá trị của λ.

Bài 4.7. Cho λ là một tham số thực và xét hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ được cho bởi

$$a_1 = (1, \lambda, 0, 0),\ \ a_2 = (-\lambda, 2, 0, 0),\ \ a_3 = (1, 2, 1, 4),\ \ a_4 = (2, 2, 5, 1).$$

Hãy chỉ ra rằng hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ với mọi giá trị của λ.

Bài 4.8. Cho λ là một tham số thực và xét hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ được cho bởi

$$a_1 = (1, \lambda, 2),\ \ a_2 = (2, 1, -1),\ \ a_3 = (3, 2, 1).$$

Hãy xác định điều kiện của λ để hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Bài 4.9. Cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử khác 0 của một không gian tuyến tính U. Giả thiết rằng các phần tử được cho thỏa mãn đẳng thức

$$u_1 + u_2 - 2u_3 - u_4 = 0.$$

Chứng minh rằng nếu $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của U thì $\{u_2, u_3, u_4\}$ cũng là một cơ sở của U.

Bài 4.10. Cho $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính U. Hãy cho biết hệ $\{u_2, u_3, u_2 + u_4, u_3 + u_4\}$ có phải là một cơ sở của không gian tuyến tính U hay không? Giải thích về câu trả lời mà bạn đưa ra.

Bài 4.11. Cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử khác 0 của một không gian tuyến tính U. Giả thiết rằng ba hệ sau đây

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad \{u_1, u_2, u_4\}, \quad \{u_1, u_3, u_4\}$$

đều không phải là cơ sở của U. Chứng minh rằng hệ $\{u_2, u_3, u_4\}$ cũng không phải là một cơ sở của U.

Bài 4.12. Cho u_1, u_2, u_3, u_4 là các phần tử khác 0 của một không gian tuyến tính U. Giả thiết rằng $\{u_1, u_2, u_4\}, \{u_1, u_3, u_4\}$ đều không phải là cơ sở của U. Chứng minh rằng nếu hệ $\{u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở của U thì hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ cũng là một cơ sở của U.

Bài 4.13. Hãy tìm tọa độ của véc tơ $x = (15, 4, 3)$ trong cơ sở dưới đây của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = (2, 1, 3); \; a_2 = (-1, -2, 1); \; a_3 = (3, 1, -1).$$

Bài 4.14. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (2, 3, 1), \quad a_2 = (-1, 2, 1), \quad a_3 = (1, -2, 3).$$

Hãy xác định tọa độ $[x]_a$ của phần tử $x = (4, 3, 1)$ trên cơ sở (a).

Bài 4.15. Hãy tìm tọa độ của véc tơ $x = (8, 8, 19, 19)$ trong cơ sở dưới đây của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$:

$$a_1 = (1, 1, 2, 3); \; a_2 = (2, 1, 3, 4); \quad a_3 = (2, 3, -2, 1); \; a_4 = (1, 3, 3, 1).$$

Bài 4.16. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ với

$$a_1 = (4, -3, 2), \quad a_2 = (1, 2, 1), \quad a_3 = (3, 2, -1).$$

a) Chứng minh rằng hệ (a) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
b) Tính $x \in \mathbb{R}^3$ biết rằng x có tọa độ trên cơ sở (a) là $[x]_a = (7, 4, -3)$. Tiếp theo hãy xác định tọa độ trên cơ sở (a) của các phần tử $x - a_1, x - a_2, x - a_3$.

Bài 4.17. Cho $(e) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính U. Giả sử $x \in U$ và x có tọa độ trên cơ sở (e) là $[x]_e = (2, -1, 1, 3)$. Hãy xác định tọa độ trên cơ sở (e) của các phần tử sau:
a) $x - e_2 + 3e_3$.
b) $3x + e_1 + 2e_3 - 5e_4$.

Bài 4.18. Cho $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính ba chiều U. Giả sử $x, y \in U$ và tọa độ của các phần tử này trên cơ sở (e) tương ứng là $[x]_e = (2, 3, -1)$, $[y]_e = (-1, 2, 4)$. Hãy xác định tọa độ của phần tử $3x - y + 2e_1 + 5e_3$ trên cơ sở (e).

Bài 4.19. Cho $(e) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính U. Phần tử $x \in U$ có tọa độ trên cơ sở (e) là $[x]_e = (2, 4, 1, 3)$. Hãy cho biết tọa độ của x trên cơ sở $\{e_2, e_1, e_4, e_3\}$.

Bài 4.20. Cho $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ là hai cơ sở của không gian tuyến tính U. Giả sử rằng

$$b_1 = 3a_1 - 2a_2 + a_3, \quad b_2 = a_1 + 4a_2 - 2a_3, \quad b_3 = a_1 + a_2 + 2a_3.$$

a) Hãy lập ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (a) sang cơ sở (b).
b) Hãy xác định ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (b) sang cơ sở (a).

Bài 4.21. Cho $(e) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là một cơ sở của không gian tuyến tính U. Hãy đưa ra ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (e) sang cơ sở $\{e_4, e_1, e_2, e_3\}$.

Bài 4.22. Trong không gian tuyến tính ba chiều U cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$b_1 = 2a_1 + 3a_2 - a_3, \; b_2 = a_1 + 4a_2 + 2a_3, \; b_3 = 3a_1 - a_2 + a_3.$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ (b) sang hệ (a).

Bài 4.23. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và véc tơ x có tọa độ trong cơ sở (a) là $[x]_a = (1, 2, -3)$. Hãy tìm tọa độ của véc tơ x trong cơ sở mới $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, biết ma trận chuyển từ cơ sở (a) sang cơ sở (b) là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.24. Trong không gian tuyến tính ba chiều U cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$b_1 = a_1 + a_2 - 3a_3, \; b_2 = 2a_1 - 3a_2 + 2a_3, \; b_3 = 4a_1 + 5a_2 + a_3.$$

Cho biết phần tử x có tọa độ trong cơ sở thứ nhất (a) là $[x]_a = (1, -3, 5)$. Hãy tính tọa độ $[x]_b$ của phần tử x trong cơ sở thứ hai (b).

Bài 4.25. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$a_1 = (1, 2, 5), \quad a_2 = (2, 1, 3), \quad a_3 = (-2, 3, 1),$$
$$b_1 = (-3, 3, 1), \quad b_2 = (4, 2, 3), \quad b_3 = (1, 1, 2).$$

Hãy xác định ma trận chuyển cơ sở T_{ab} từ (a) sang (b).

Bài 4.26. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho các cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$\begin{aligned} a_1 &= (2,1,1), \quad a_2 = (1,3,-2), \quad a_3 = (4,-1,3), \\ b_1 &= (2,-1,3), \quad b_2 = (-2,1,4), \quad b_3 = (3,1,-1). \end{aligned}$$

Hãy xác định ma trận chuyển cơ sở T_{ba} từ (b) sang (a).

Bài 4.27. Cho không gian con của $\mathbb{R}^3$

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}.$$

Hãy xác định một cơ sở và số chiều của M.

Bài 4.28. Cho không gian con của $\mathbb{R}^4$

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}.$$

Hãy xác định một cơ sở và số chiều của M.

Bài 4.29. Cho không gian con của $\mathbb{R}^4$

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|\, 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0\}.$$

Hãy xác định một cơ sở và số chiều của M.

Bài 4.30. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^4$ cho không gian con

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0\}$$

và phần tử $w \in M$ với $w = (1,5,1,1)$. Hãy xác định một cơ sở và số chiều của M và cho biết tọa độ của w trên cơ sở được đưa ra.

V. Các bài toán ứng dụng

Bài 5.1. Vị trí của một điểm $M(x,y,z)$ trong không gian ba chiều cũng được mô tả bằng ma trận cột $u_M = (x,y,z,1)$. Ký hiệu U là tập hợp tất cả các ma trận cột như vậy. Trong tập hợp U ta định nghĩa các phép toán

$$\begin{aligned} &(x,y,z,1) + (x',y',z',1) = (x+x', y+y', z+z', 1), \\ &\lambda(x,y,z,1) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, 1). \end{aligned}$$

Hãy chỉ ra rằng U với hai phép toán trên là một không gian tuyến tính.

Bài 5.2. Nếu một vật M chuyển động trong không gian và kích thước của nó là rất nhỏ so với quãng đường mà nó di chuyển thì vật M được nhìn nhận như một điểm. Khi đó vị trí của nó được ghi lại bằng các tọa độ $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$, trong đó t là biến chỉ thời gian.

Giả sử rằng số liệu về chuyển động của một vật M nào đấy được cho như sau $M(t) = (4t^2, 3t^2 + 2t, t^2 - 4t)$.
a) Hãy xác định véc tơ $M(t_0 + \Delta t) - M(t_0)$ mô tả sự thay đổi vị trí của vật M ứng với khoảng thời gian đóng $[t_0, t_0 + \Delta t]$ với $t_0 = 2, \Delta t = 0,1$.
b) Xác định vật tốc trung bình của vật M ứng với khoảng thời gian trên.
c) Nếu cố định t_0 thì vận tốc tức thời của vật M là giới hạn của vận tốc trung bình của khoảng thời gian đóng $[t_0, t_0 + \Delta t]$ khi cho $\Delta t \longrightarrow 0$. Hãy xác định vận tốc tức thời của vật M tại thời điểm $t_0 = 2$.

Bài 5.3. Vị trí của một vật chuyển động M được ghi lại là $M(t) = (2t + \sin 2t + 1, t^2 - t, 3t + 2\cos 2t)$.
a) Hãy xác định sự thay đổi vị trí của vật M ứng với khoảng thời gian đóng $[t_0, t_0 + \Delta t]$ với $t_0 = 1, \Delta t = 0,15$. Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian này.
b) Tính vận tốc tức thời của vật tại $t_0 = 1$.

Bài 5.4. Trong thiên văn học số liệu được ghi lại về chuyển động của một thiên thể M có dạng $M(s) = (x(s), y(s), z(s), t(s))$ trong đó x, y, z là các tọa độ của không gian, t là thời gian, s là tham số và trong nhiều ví dụ cụ thể s là biến chỉ độ dài quãng đường thiên thể M di chuyển. $M(s)$ được gọi là vị trí không-thời gian của thiên thể M.

Xét một thiên thể M có vị trí không thời gian được mô tả như sau $M(s) = (s + \sin 3s, s + \cos 2s, s + 3, 2s + \dfrac{1}{s^2+1})$.
a) Xác định sự thay đổi vị trí không thời gian của thiên thể ứng với khoảng đóng $[s_0, s_0 + \Delta s]$ với $s_0 = 1, \Delta s = 0,1$.
b) Xác định tốc độ thay đổi vị trí trung bình ứng với khoảng tham số trên.
c) Tính vận tốc thay đổi vị trí của thiên thể tại $s_0 = 1$.

Bài 5.5. Trong thuyết tương đối hẹp, người ta sử dụng các phần tử của $\mathbb{R}^4$ để mô tả vị trí không thời gian của những hình ảnh của vũ trụ. Nói cách khác, các phần tử của $\mathbb{R}^4$ được gọi là các biến cố. Một biến cố (x, y, z, t) ghi lại vị trí (x, y, z) của một hình ảnh nào đấy và t là thời điểm hình ảnh được ánh sáng chuyển tới đó.

Cho hai biến cố trong không thời gian là $M = (1, 2, 1, 0)$ và $N = (3, 4, 2, 3)$. Hãy chỉ ra rằng nếu tốc độ ánh sáng được quy chuẩn là 1 (nghĩa là các khoảng cách x, y, z được đo bằng năm ánh sáng và thời gian t được tính theo năm) thì một hình ảnh được truyền bằng ánh sáng đến vị trí không thời gian M cũng được truyền bằng ánh sáng đến vị trí không thời gian N.

Bài 5.6. Cho các biến cố $M = (4, 3, 7, 9)$ và $N = (3, 4, -5, 9)$ trong không thời gian $\mathbb{R}^4$. Nếu nói rằng M, N đều là vị trí không thời gian của cùng một hình ảnh thì ta có thể nói về hình ảnh này được truyền đi bằng ánh sáng từ vị trí không thời gian nào đấy hay không?

Bài 5.7. Trong không thời gian $\mathbb{R}^4$, tập con

$$M = \{(x, y, z, t) \mid x^2 + y^2 + z^2 = t^2\}$$

được gọi là nón ánh sáng của điểm gốc.
a) Hãy chỉ ra rằng nón ánh sáng M là tập con của $\mathbb{R}^4$ đóng kín với phép nhân.
b) Nón ánh sáng M có là một không gian con của $\mathbb{R}^4$ hay không? Tại sao?

Bài 5.8. Một quán đồ uống có giá bán 1 ly trà là 35 (nghìn đồng), 1 ly cà phê là 30 (nghìn đồng), 1 bánh ngọt là 25 (nghìn đồng). Giá combo thứ nhất (1 trà, 1 cà phê, 1 bánh) là 80 (nghìn đồng). Giá combo thứ hai (2 trà, 1 bánh) là 85 (nghìn đồng). Số liệu bán hàng sau một ngày được ghi lại dưới dạng véc tơ $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ với x_1, x_2, x_3 tương ứng là số ly trà, cà phê và số bánh đã bán; x_4 là số tiền nhận về. Tương tự, việc bán lẻ khách một ly trà được ghi lại bằng véc tơ $u_1 = (1, 0, 0, 35)$. Các véc tơ u_2, u_3 tương ứng là ghi chép về việc bán lẻ một cà phê, một bánh ngọt. Các véc tơ u_4, u_5 tương ứng là ghi chép về việc bán một combo thứ nhất, một combo thứ hai.

a) Véc tơ u có phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ $\{u_1, \dots, u_5\}$ hay không? Tại sao?
b) Số liệu bán hàng của một ngày nào đấy là $u = (54, 47, 25, 3795)$. Hãy xác định tất cả các biểu diễn tuyến tính của u trên hệ $\{u_1, \dots, u_5\}$. Cho biết ý nghĩa của các biểu diễn có thể có.

Bài 5.9. Một xưởng gia công hộp đựng đồ vật bằng nhựa ghi lại các số liệu về chi phí sản xuất trong ba ngày liên tiếp như sau:

$$u_1 = (88; 7,5; 5,8; 3,6); \quad u_2 = (94,5; 8,25; 6,4; 3,9); \quad u_3 = (117,5; 12,75; 6,8; 4,5).$$

Trong các véc tơ có dạng $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ được đưa ra ở trên thì x_1 là số kg hạt nhựa, x_2 là số kg bột tạo màu cho nhựa, x_3 là số công (đã quy đổi theo chuẩn) và x_4 là chi phí máy móc và vận hành. Ngày thứ nhất, xưởng làm được 3000 hộp nhựa cỡ nhỏ và 1000 hộp nhựa cỡ lớn. Ngày thứ 2, xưởng làm được 2500 hộp nhựa cỡ vừa và 2000 hộp nhựa cỡ nhỏ. Ngày thứ 3, xưởng làm được 1500 hộp nhựa cỡ vừa và 2000 hộp nhựa cỡ lớn.
a) Xác định số liệu về chi phí sản suất để làm ra 1000 hộp tương ứng cho các cỡ nhỏ, vừa và lớn.
b) Xác định số liệu về chi phí sản suất để xưởng này thực hiện một đơn đặt hàng gồm 8.000 hộp cỡ nhỏ, 20.000 hộp cỡ vừa và 5000 hộp cỡ lớn.

Bài 5.10. Một xưởng in đang thực hiện việc sản xuất vở học sinh và ghi lại các số liệu về chi phí sản xuất trong ba ngày liên tiếp như sau:

$$u_1 = (380; 34; 41; 7; 10); \quad u_2 = (565; 31,5; 56; 9; 11,5); \quad u_3 = (405; 29,5; 42; 7; 9,5).$$

Trong các véc tơ có dạng $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ được đưa ra ở trên thì x_1 là số kg giấy viết trắng, x_2 là số kg giấy bìa, x_3 là số kg mực in, x_4 là số công (đã quy đổi theo chuẩn) và x_5 là chi phí máy móc và vận hành. Ngày thứ nhất, xưởng làm được 2000 quyển vở 80 trang và 1000 quyển vở 120 trang. Ngày thứ 2, xưởng làm được 1000 quyển vở 120 trang và 1500 quyển vở 200 trang. Ngày thứ 3, xưởng làm được 1000 quyển vở 80 trang, 1000 quyển vở 120 trang và 500 quyển vở 200 trang.
a) Xác định số liệu về chi phí sản suất để làm ra 1000 quyển vở ứng cho các cỡ trang 80, 120 và 200.
b) Xác định số liệu về chi phí sản suất để xưởng này thực hiện một đơn đặt hàng gồm 16.000 vở 80 trang, 20.000 vở 120 trang và 7.000 vở 200 trang.

Bài 5.11. Một xưởng, đang thực hiện việc sản xuất các túi nilon đựng thực phẩm và in nhãn hàng lên các túi này theo một đơn đặt hàng, đã ghi lại các số liệu về chi phí sản xuất trong ba ngày liên tiếp như sau:

$$u_1 = (264; 21,2; 20,4; 11,4); \quad u_2 = (276; 20; 18,1; 11,6); \quad u_3 = (245; 18,5; 17,5; 10).$$

Trong các véc tơ có dạng $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ được đưa ra ở trên thì x_1 là số kg nhựa, x_2 là số kg mực in, x_3 là số công (đã quy đổi theo chuẩn) và x_4 là chi phí máy móc và vận hành. Ngày thứ nhất, xưởng làm được 10000 túi cỡ nhỏ và 8000 túi cỡ vừa. Ngày thứ 2, xưởng làm được 7000 túi cỡ vừa và 6000 túi cỡ lớn. Ngày thứ 3, xưởng làm được 10000 túi cỡ nhỏ và 5000 túi cỡ lớn.
a) Xác định số liệu về chi phí sản suất để làm ra 1000 túi ứng với các cỡ nhỏ, vừa và lớn.
b) Xác định số liệu về chi phí sản suất để xưởng này thực hiện đầy đủ đơn đặt hàng đó với 60.000 túi cỡ nhỏ, 120.000 túi cỡ vừa và 50.000 túi cỡ lớn.

Bài 5.12. Một nhà máy đang thực hiện sản xuất một sản phẩm công nghệ với 3 cấu hình khác nhau. Số liệu về chi phí sản xuất được ghi lại trong 3 tuần liên tiếp là như sau

$$u_1 = (3190, 187, 1220, 960); \quad u_2 = (3520, 189, 1220, 980); \quad u_3 = (3060, 186, 1160, 940).$$

Trong các véc tơ có dạng $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ được đưa ra ở trên thì x_1 là chi phí vật tư, x_2 là chi phí bao bì phụ kiện, x_3 là chi phí nhân công và x_4 là chi phí máy móc và vận hành. Tuần thứ nhất, nhà máy làm được 6000 sản phẩm có cấu hình 1, 5000 sản phẩm có cấu hình 2 và 2000 sản phẩm có cấu hình 3. Tuần thứ 2, nhà máy làm được 2000 sản phẩm có cấu hình 1, 7000 sản phẩm có cấu hình 2 và 3000 sản phẩm có cấu hình 3. Tuần thứ 3, nhà máy làm được 3000 sản phẩm có cấu hình 1, 2000 sản phẩm có cấu hình 2 và 6000 sản phẩm có cấu hình 3.
a) Xác định số liệu về chi phí sản suất để làm ra 1000 sản phẩm ứng với các cấu hình 1, 2, 3.
b) Xác định số liệu về chi phí sản suất để thực hiện đơn đặt hàng gồm 70.000 sản phẩm có cấu hình 1, 120.000 sản phẩm có cấu hình 2 và 80.000 sản phẩm có cấu hình 3.

Bài 5.13. Một hệ tọa độ được gắn cố định vào một máy bay. Trục tọa độ thứ nhất được đặt dọc theo thân máy bay, trục tọa thứ hai vuông góc với trục thứ nhất và tạo với trục thứ nhất một mặt phẳng nằm ngang theo tư thế của máy bay (song song với mặt đất khi máy bay đỗ ở sân bay). Gốc tọa độ là một điểm được lựa chọn phù hợp trên máy bay và trục tọa độ thứ ba là trục vuông góc với cả hai trục tọa độ đầu tiên. Khi máy bay chuyển động thì hệ tọa độ được gắn cố định vào máy bay cũng chuyển động theo nó và được gọi là hệ tọa độ động. Số liệu ghi lại vị trí điểm gốc, các véc tơ chỉ phương đơn vị của các trục tọa độ được lập thành ma trận vị trí tư thế của máy bay.

Giả thiết rằng một máy bay đang hoạt động trên bầu trời và có ý định công kích một mục tiêu trên mặt đất có tọa độ là $(6, -5, 0)$. Ở một thời điểm nào đấy ma trận vị trí tư thế của máy bay là

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & -12 \\ -3 & 6 & -2 & 24 \\ 2 & 3 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Hãy xác định tọa độ của mục tiêu nói trên trong hệ tọa độ động của máy bay tại chính thời điểm này.

Bài 5.14. Một tên lửa đang đuổi theo một máy bay không người lái. Tại một thời điểm nào đấy, ta ký hiệu A ma trận vị trí tư thế của tên lửa, B là ma trận vị trí tư thế của máy bay không người lái. Hãy cho biết số liệu về tọa độ của máy bay không người lái, theo hệ tọa độ động được gắn vào tên lửa, vào thời điểm này biết rằng

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & -6 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.15. Một radar được đặt tại một đỉnh đồi có ma trận vị trí tư thế là A. Tại một thời điểm nào đấy có một thiết bị bay không người lái bị radar phát hiện có ma trận vị trí tư thế là B. Tại thời điểm đó hãy tính.
a) Tọa độ của thiết bị bay không người lái theo hệ tọa độ của radar.
b) Nếu thiết bị bay không người lái cũng phát hiện được radar thì tọa độ của radar theo hệ tọa độ của thiết bị này là gì.

Cho biết các ma trận A, B là

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & 2 & 17 \\ -1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Bài 5.16. Một vị trí M cần được vặn đinh ốc có tọa độ $M = (2, 3, 2)$. Một cánh tay robot được lập trình để tự động siết chặt đinh ốc nói trên. Tại thời điểm robot bắt đầu được kích hoạt để di chuyển tới mục tiêu, ma trận vị trí tư thế của thiết bị vặn ốc gắn trên robot là A. Để có số liệu sử dụng cho chương trình điều khiển tự động, hệ thống định vị của robot cần xác định tọa độ của điểm M theo hệ tọa độ động được gắn vào thiết bị vặn ốc. Hãy xác định tọa độ này nếu biết rằng

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.17. Ta xét bài toán về phân bố nhiệt độ trên một dây đồng có độ dài lớn và đường kính của dây được coi là không đáng kể so với độ dài của nó. Nếu ký hiệu u là nhiệt độ trên dây thì u phụ thuộc vào vị trí x ở trên dây ($x \in \mathbb{R}$) và phụ thuộc vào thời gian t. Nói cách khác, nhiệt độ u là một hàm số $u = u(x,t)$ với hai biến x, t. Nếu mô tả nhiệt độ được cung cấp từ môi trường bên ngoài vào dây đồng là $f(x,t)$ thì hàm $u(x,t)$ thỏa mãn điều kiện sau

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

với $c^2 = 1,14$ là độ khuếch tán nhiệt của đồng nguyên chất.

a) Ta xét một dây đồng dài hữu hạn, nghĩa là $x \in [a, b]$ với $a < b$ nào đấy. Hãy chỉ ra rằng với mỗi $f(x,t)$ cố định, nếu $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ là hai nghiệm của phương trình (1) thì hàm $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ là một nghiệm của phương trình sau:

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t), \tag{2}$$

b) Hãy chỉ ra rằng, tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình (2) là một không gian tuyến tính.

Bài 5.18. Ký hiệu $u(x,y,z,t)$ là nhiệt độ của một sàn bê tông được đo tại vị trí (x,y,z) và tại thời điểm t. Người ta chỉ ra được rằng hàm u thỏa mãn phương trình sau

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big) + f, \tag{1}$$

với $f = f(x,y,z,t)$ là nhiệt độ cung cấp từ môi trường bên ngoài và $c^2 = 0,004$ là độ khuếch tán nhiệt của bê tông. Ta xét một sàn bê tông nào đấy mà ứng với nó các số đo vị trí thay đổi như sau: $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$; $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$, $c_1 \leqslant x \leqslant c_2$.
a) Chứng minh rằng nếu u_1, u_2 là các nghiệm của phương trình (1) thì hàm $v = u_1 - u_2$ là một nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big). \tag{2}$$

b) Hãy chỉ ra rằng, tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình (2) là một không gian tuyến tính.

Bài 5.19. Phương trình khuếch tán được sử dụng để mô tả sự lan truyền của các loại vật chất (như hóa chất, bụi, muối, v.v.) từ nơi có nồng độ cao tới nơi có nồng độ thấp. Nếu ký hiệu $C = C(x,y,z,t)$ là nồng độ vật chất thì C là nghiệm của phương trình khuếch tán sau đây

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D\frac{\partial C}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(D\frac{\partial C}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(D\frac{\partial C}{\partial z}\Big) + F(x,y,z,t). \tag{1}$$

Ở trên $D = D(x,y,z,t)$ là hệ số khuếch tán (D là hằng số nếu môi trường là đồng chất), F là mật độ nguồn.
a) Chứng minh rằng nếu C_1, C_2 là các nghiệm của phương trình (1) thì hàm $u = C_1 - C_2$ là một nghiệm của phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(D\frac{\partial u}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(D\frac{\partial u}{\partial z}\Big). \tag{2}$$

b) Hãy chỉ ra rằng, tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình (2) là một không gian tuyến tính.

Bài 5.20. Xét một sợi dây nào đấy dao động quanh vị trí cân bằng. Ta ký hiệu $u = u(x,t)$ là vị trí của một điểm x trên dây tại thời điểm t. Người ta chỉ ra được rằng, hàm u là một nghiệm nào đấy của phương trình sau

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

với $c = c(x)$ là hệ số có liên quan tới mật độ khối lượng của dây (c^2 là hằng số nếu dây có cấu tạo đồng chất).

a) Hãy chỉ ra rằng, nếu $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ là hai nghiệm của phương trình (1) thì hàm $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ là một nghiệm của phương trình sau:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t), \tag{2}$$

b) Hãy chỉ ra rằng, tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình (2) là một không gian tuyến tính.