Chương 3. Tích phân hàm số 1 biến

3.1. Tích phân không xác định

1. Các khái niệm

- Ta nói hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên (a, b) nếu

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a, b).$$

- Ký hiệu $\int f(x)dx = F(x) + C$, nó gọi là tích phân không xác định của hàm số $f(x)$.

Ví dụ: Ta có

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Từ bảng các đạo hàm cơ bản của Chương 2 ta có thể suy ra bảng tích phân sau:

Bảng các tích phân cơ bản

$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \lvert x + \sqrt{x^2+a} \rvert + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	

Nhận xét: Nếu $f(x)$ liên tục thì tồn tại $\int f(x)dx$.

2. *Tính chất của tích phân*

- $$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
- $$\int K.f(x)dx = K. \int f(x)dx$$
- Giả sử $F'(x) = f(x)$, và $u(x)$ là một hàm khả vi khi đó
$$\int f(x)u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

3. Các phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến

+ Giả sử $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$. Khi đó

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

+ Giả sử $t = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(t)dt$. Khi đó

$$\int f(x)dx = \int f(g^{-1}(t))(g^{-1}(t))'dt.$$

b. Phương pháp từng phần

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ví dụ. Tính các tích phân sau

(1). $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$; (2). $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^3}$; (3). $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

(4). $\displaystyle\int (x+1)\cos 2xdx$; (5). $\displaystyle\int \cos(\ln x)dx$; (6). $\displaystyle\int e^x \cos xdx$;

(7). $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$; (8). $\displaystyle\int \frac{x.\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$; (9). $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2}$.

Giải: **HD**:

(1). $t = x^2+1$; (2). $t = \sqrt{x}+1$; (3). $t = \sqrt{1-x}$;

(4). $\begin{cases} u = (x+1) \\ dv = \cos 2xdx \end{cases}$; (5). $\begin{cases} u = \cos(\ln x) \\ dv = dx \end{cases}$; (6). $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos xdx \end{cases}$;

(7). $u = \sqrt{x}$; (8). $t = \arctan x$; (9). $\dfrac{1}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{(x+1)^2}$.

3.2. Tích phân xác định

1. Các khái niệm

a) Bài toán dẫn đến tích phân xác định

Bài toán 1

Tính diện tích hình (*thang cong*) giới hạn bởi: hàm liên tục $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a, x = b$.

Bài toán 2

Tính công của 1 lực thay đổi $f(x)$ tác động vào một chất điểm M trên đoạn thẳng $[a, b]$.

Tích phân hàm 1 biến

b) Định nghĩa tích phân xác định

Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên đoạn $[a, b]$. Ta chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ tùy ý bởi các điểm chia

$$a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b$$

Trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ ta lấy tùy ý 1 điểm c_i và lập tổng

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \;\; \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$ mà $I_n \to I$ xác định không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và cách chọn c_i, thì ta nói hàm $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$, và I được gọi là tích phân xác định của $f(x)$ trên $[a, b]$, ký hiệu là: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Như vậy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Tích phân hàm 1 biến

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì khả tích trên đó
- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
- $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$

Tích phân hàm 1 biến

c) Tính chất của tích phân xác định

- $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$
- $\int\limits_a^b K.f(x)dx = K.\int\limits_a^b f(x)dx,$
- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,\ c \in [a, b],$
- Nếu $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

,

- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$f(c)[b - a] = \int_a^b f(x)dx.$$

1:24:50

Tích phân hàm 1 biến

d) Công thức Newton-Leibnitz Giả sử trên $[a, b]$ ta có $F'(x) = f(x)$. Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Nhận xét:

Công thức trên cho ta mối liên hệ giữa tích phân xác định và tích phân không xác định. Do đó việc tính tích phân xác định tương tự tích phân không xác định. Ta chỉ lưu ý trong tích phân xác định thì:

- Trong công thức đổi biến: Đổi biến $\Rightarrow$ Đổi cận
- Trong công thức từng phần:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

2. Ứng dụng của tích phân xác định

a) Tính diện tích hình phẳng

+ (D): $\{y = f(x); y = 0; x \in [a, b]\} \Rightarrow S = \int\limits_a^b |f(x)|dx$

+ (D): $\{y = f_1(x); y = f_2(x); x \in [a, b]\} \Rightarrow S = \int\limits_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$

+ (D): $\{x = x(t); y = y(t); t \in [a, b]\} \Rightarrow S = \int\limits_a^b |y(t)x'(t)|dt$

+ (D): $\{r = r(\varphi); \varphi \in [\alpha, \beta]\} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

Tích phân hàm 1 biến

Ví dụ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

(1). $y = x^2; x = y^2;$ (2). $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$ (3). $r = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0.$

Giải: (Xem hình vẽ)

(1). $S = \displaystyle\int_0^1 |\sqrt{x} - x^2|dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx =$

(2). $x = a\cos t; y = b\sin t;\ t \in [0, 2\pi];\ x'(t) = -a\sin t$

$S = \displaystyle\int_0^{2\pi} |y(t)x'(t)|dt = 4.\int_0^{\pi/2} |b\sin t(-a\sin t)|dt = \ldots$

(3). $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}.2.\int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \ldots$

b) Tính độ dài đường cong

+ (AB): $\{y = y(x); x \in [a, b]\} \Rightarrow L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$

+ (AB): $\{x = x(y); y \in [c, d]\} \Rightarrow L = \int\limits_c^d \sqrt{(x')^2 + 1} dy$

+ (AB): $\{x = x(t); y = y(t); t \in [a, b]\} \Rightarrow L = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

+ (AB): $\{r = r(\varphi); \varphi \in [\alpha, \beta]\} \Rightarrow L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$

Tích phân hàm 1 biến

Ví dụ. Tính độ dài của đường cong

(1). $AB: \; x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln y}{2}; \; 1 \le y \le e$ (2). $AB: x^2 + y^2 = a^2, \; a > 0$.

Giải:

(1) Ta có: $x' = \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{2y}$, vậy

$$L = \int_1^e \sqrt{(x')^2 + 1}dy = \int_1^e \sqrt{(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y})^2 + 1}dy = \int_1^e \sqrt{(\frac{y}{2} + \frac{1}{2y})^2}dy = \ldots$$

(2) Ta có: $x = a\cos t; y = a\sin t; \; 0 \le t \le 2\pi$, vậy

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = \ldots$$

c) Tính thể tích vật thể tròn xoay

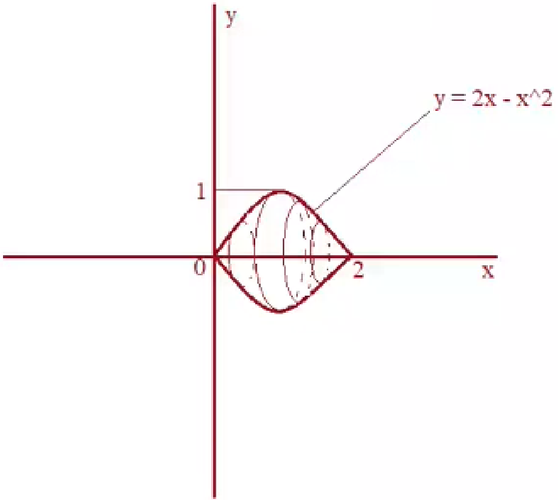
\+ Xét vật thể giới hạn bởi $\{y = f(x) \geq 0, y = 0, x \in [a, b]\}$, quay quanh trục Ox (Xem hình vẽ).

Khi đó nếu cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox thì tiết diện $S(x)$ thu được có dạng hình tròn bán kính bằng $f(x)$. Do đó

$$V_{Ox} = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

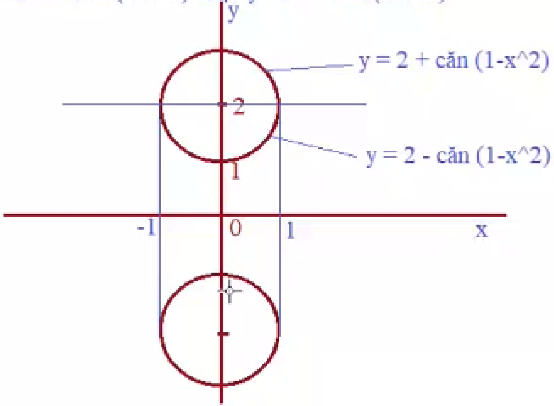
Tương tự ta có vật thể giới hạn bởi $\{f_1(x) \leq y \leq f_2(x), x \in [a, b]\}$, quay quanh trục Ox

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx.$$



$x^2 + (y-2)^2 = 1$ quanh trục Ox.

y - 2 = + căn (1-x^2) hoặc y - 2 = - căn (1-x^2)



Tích phân hàm 1 biến

+ Vật thể giới hạn bởi $\{x = g(y) \geq 0, x = 0, y \in [c, d]\}$, quay quanh trục Oy

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d g^2(y)dy.$$

Ví dụ. Tính thể tích của vật thể tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

(1). $y = 2x - x^2, y = 0$ quanh trục Ox.

(2). $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ quanh trục Ox.

Giải: (1). Ta có

$$V_{Ox} = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \dots$$

(2). Ta có

$$V_{Ox} = \pi \int_{-1}^1 [(2 + \sqrt{1 - x^2})^2 - (2 - \sqrt{1 - x^2})^2] dx = \dots$$

3.3. Tích phân suy rộng

1. Tích phân suy rộng loại 1

a) Các khái niệm

* *Trường hợp 1.* Tích phân dạng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $[a, +\infty)$, khả tích trên $[a, b]$, $\forall b > a$. Khi đó:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b$$

Nếu giới hạn trên tồn tại bằng I hữu hạn thì ta nói tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ là hội tụ và có giá trị bằng I. Ngược lại, ta nói tích phân $\int\limits^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

* *Trường hợp 2.* Tích phân dạng $\int_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ không bị chặn tại a.

Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $(a, b]$, khả tích trên $[a+\varepsilon, b]$, $\forall\varepsilon > o$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^b$$

Nếu giới hạn trên tồn tại bằng I hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là hội tụ và có giá trị bằng I. Ngược lại, ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

* *Trường hợp 3.* Tích phân dạng $\int\limits_a^b f(x)dx$, trong đó $f(x)$ không bị chặn tại $c \in (a, b)$.

Khi đó

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

và VT hội tụ khi và chỉ khi các tích phân VP hội tụ.

Nhận xét: TPSR loại 2 cũng có tính chất tương tự tích phân suy rông loại 1.

Chú ý: Trong TPSR loại 2 ta có thể đánh giá được 2 loại tích phân Riemann sau

+) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$, phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

+) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$, phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

Tích phân hàm 1 biến

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

(1). $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$; (2). $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$; (3). $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$.

Giải:

(1). Ta xét $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$. Khi đó

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to+\infty} \arctan x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

(2). Xét $I = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$, (đặt $t = x^2+1$...), ta được $I = \frac{-1}{4(x^2+1)^2} + C$.

Do đó

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3} = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{4(x^2+1)^2}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{-1}{4(b^2+1)^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

(3). Ta có $\displaystyle\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln|x| + C \ , \ \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C \ , \ \alpha \neq 1 \end{cases}$. Do đó:

\+ Với $\alpha = 1$ thì $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln|b| - \ln a) = +\infty.$

\+ Với $\alpha \neq 1$ thì

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty \ , \ \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C \ , \ \alpha > 1 \end{cases}.$$

Vậy ta có thể kết luận (Tích phân Riemann)

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \ a > 0$$

hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

Tích phân hàm 1 biến

Nhận xét. Theo tính chất của giới hạn ta có thể suy ra:

Đối với tích phân suy rộng loại 1, trên cùng một miền lấy tích phân ta có

- Tổng của 2 tích phân hội tụ $\Longrightarrow$ hội tụ
- Tổng của 1 tích phân hội tụ và 1 tích phân phân kỳ $\Longrightarrow$ phân kỳ
- Tuy nhiên tổng của 2 tích phân phân kỳ có thể hội tụ, có thể phân kỳ. Trong trường hợp này ta phải xét cụ thể.

Lưu ý: Ở đây tích phân xác định luôn hội tụ *b) Tiêu chuẩn so sánh*

Định lý 1 Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn $0 \leq f(x) \leq g(x),\ \forall x \geq a$. Khi đó:

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,
- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Định lý 2 Giả sử các hàm $f(x), g(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K,\ (K \neq 0, \infty)$. Khi đó:

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc phân kỳ.

Đặc biệt khi $K = 1$, ta viết $f(x) \sim g(x),\ x \to +\infty$.

Nhận xét: Với $K = 0$, thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ kéo theo $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.