ĐN: Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Khi đó mt nghịch đảo của mt A nếu ∃, đc KH là: A^{-1}, là một mt vuông cùng cấp với A t/m:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Cý: +) Mt nghịch đảo của mt A nếu ∃ thì là ! . Thật vậy, g/sử B, C là 2 mt nghịch đảo của A thì:

$$B = B.I_n = B(A.C) = (B.A).C = I_n.C = C.$$

+) Nếu mt A có mt nghịch đảo, ta nói A là một mt khả nghịch (k/n).

ĐL: Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Khi đó A k/n $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Bài 1.19. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. Hãy tìm x để $A^4 - 3A^3$ là một ma trận khả nghịch.

Giải: Mt $(A^4 - 3A^3)$ k/n $\Leftrightarrow \det(A^4 - 3A^3) \neq 0$

$\Leftrightarrow \det[A^3(A - 3I)] \neq 0 \Leftrightarrow (\det A)^3.\det(A - 3I) \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \det A \neq 0 \\ \det(A - 3I) \neq 0 \end{cases}$ (*)

Ta có:

+) $\det A = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 8x - 20x = -12x$

+) $\det(A - 3I) = \begin{vmatrix} x-3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -10(x-3) - 20(x-3) = -30(x-3)$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A_{ij}\right)^t_{n\times n} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Bài 1.16. Tính nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải: Ta có:

+) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6+2+6-9-1-8 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

+) $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

cột 1 cột 2 cột 3

+) Vậy $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$

3. Ứng dụng để giải phương trình mt bậc nhất.

Bài 1.24. Giải phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Giải: Đặt $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

Vậy $(*) \Leftrightarrow AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1} \ (**)$

+) $\left.\begin{array}{ll} A_{11} = |2| = 2; & A_{21} = -|3| = -3 \\ A_{12} = -|3| = -3; & A_{22} = |4| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$

+) $\left.\begin{array}{ll} B_{11} = |2| = 2; & B_{21} = -|5| = -5 \\ B_{12} = -|3| = -3; & B_{22} = |7| = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow B^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$

+) $(**) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}.$

§4. Hạng của mt

Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

1. Khái niệm:

B3: So sánh $r(A)$ và $r(\bar{A})$. Nếu:

+) $r(A) \neq r(\bar{A})$ thì hpt (1) vô n_o;

+) $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (số ẩn) thì hpt (1) có n_o!;

+) $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$ ~ vô số n_o với $(n-r)$ ẩn tự do.

Bài 2.8. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số α

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + (\alpha+5)x_4 = 3 \end{cases} \quad (*)$$

Giải: +) MtHs mở rộng:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & -5 & \alpha+5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[2H_3 - 3H_1 \to H_3]{2H_2 - H_1 \to H_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 2\alpha+4 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_3 + H_2 \to H_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha+4 & 0 \end{array}\right)$$

ảnh hưởng đến $r(A)$ và $r(\bar{A})$ ⟶ biện luận.

+) Nếu $2\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ thì $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$ (số ẩn) $\Rightarrow$ Hpt $(*)$ có vô số n_o với 2 ẩn tự do. Khi đó:

Chương 3. Không gian tuyến tính

2. Tổ hợp t² (tht²) và biểu diễn t² (bdt²).

$\mathbb{R}^n$ - Kgt², cho hệ vectơ $(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $(\{a_i\}_{i=\overline{1,m}})$ (cụ rằng $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$).

Khi đó:

⊛ Với mỗi bộ m số thực $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, ta gọi:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

là một tht² của hệ vectơ (a).

VD1: $\mathbb{R}^3$ - Kgt², cho hệ vectơ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, ở đó: $a_1 = (1, 1, 1)$

Khi đó: $a_2 = (1, 2, 3)$

+) $\theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4$ là một tht² của (a); $a_3 = (2, 3, 4)$

+) $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4$ ~~~~~~ $a_4 = (4, 6, 8)$.

+) $\sqrt{2} \cdot a_1 + \pi \cdot a_2 + \sin 1 \cdot a_3 + \lg 3 \cdot a_4$ ~~~~~~

. . . .

NX: Đ/v một hệ vectơ cho trước, có vô số tht².

⊛ Cho x là một vectơ trong kgt^2 $\mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{R}^n$), khi đó nếu x là một tht^2 của hệ vectơ (a) thì ta nói x bdt^2 đc qua (a), ngc lại ta nói x ko bdt^2 đc qua (a). Trong TH x bdt^2 đc qua (a) thì $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ s/c:

$$x = \boxed{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i} \to \text{đgl một bdt}^2 \text{ của } x \text{ qua (a)}$$

VD2: Xét lại VD1, ta có:

+) $\theta = \boxed{0.a_1 + 0.a_2 + 0.a_3 + 0.a_4} \to$ một bdt^2 của θ qua (a)

+) $\theta = \boxed{(-1).a_1 + (-1)a_2 + (-1)a_3 + 1.a_4} \to$ một bdt^2 khác của θ qua (a)

$\Rightarrow$ θ bdt^2 được qua (a).

NX: có thể có nhiều bdt^2 khác nhau của vectơ x qua hệ vectơ (a).

Btoán tìm bdt^2 của vectơ x qua hệ vectơ $(a) = \{a_i\}_{i=\overline{1,m}}$:

Cg: Xét: $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m})$

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \{$ (1) là một hpt t^2 mẫn $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

$i=1$

Bài 3.4. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với $a_1 = (1,1,2)$, $a_2 = (2,3,-1)$ $a_3 = (3,-1,2)$, $a_4 = (2,8,-2)$. Hãy tìm tất cả các biểu diễn tuyến tính có thể có của a_4 trên hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

Giải: +) Xét: $a_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,4})$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 + 8\lambda_4 = 8 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = -2 \end{cases} \quad (1)$$

+) Mtbs mở rộng của (1):

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[H_3 - 2H_1 \to H_3]{H_2 - H_1 \to H_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & -6 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{H_3 + 5H_2 \to H_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -24 & 24 & 24 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$ (số ẩn) $\Rightarrow$ Hpt(1) có vô số n₀ với 1 ẩn tự do. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 2 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 + 6\lambda_4 = 6 \\ -24\lambda_3 + 24\lambda_4 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 - \lambda_4 \\ \lambda_2 = 2 - 2\lambda_4 \\ \lambda_3 = \lambda_4 - 1 \\ \lambda_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy tất cả các bdtt của a_4 qua hệ vectơ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là:

$$a_4 = (1 - \lambda_4)a_1 + (2 - 2\lambda_4)a_2 + (\lambda_4 - 1)a_3 + \lambda_4 a_4 \quad (\lambda_4 \in \mathbb{R}).$$

Nếu:

+) $r(A) = m \Rightarrow$ hpt (2) có ! một n_0 là n_0 tầm thg $\Rightarrow$ (a) đlt^2;

+) $r(A) < m \Rightarrow$ ~ n_0 ko tầm thg $\Rightarrow$ (a) pttt.

Bài 3. 10. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3\}$ với

$a_1 = (1, 2, -1, 1)$, $a_2 = (1, -2, 2, 1)$, $a_3 = (1, 1, -1, 1)$.

a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

Giải: +) Xét: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

+) Mths của (1):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_3 + H_1 \to H_3 \\ H_4 - H_1 \to H_4}]{H_2 - 2H_1 \to H_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4H_3 + 3H_2 \to H_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 3$ (số ẩn) $\Rightarrow$ hpt(1) có một n_0 ! là n_0 tầm thg $\Rightarrow (a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ đlt^2.

Bài 3.15. Xác định giá trị của λ để hệ $\{a_1, a_2, a_3\}$ được cho dưới đây là hệ phụ thuộc tuyến tính:

$a_1 = (2, 3, -2, 3),\ a_2 = (2, -1, 2, 1),\ a_3 = (1, 1, 1, \lambda)$.

Giải:

+) Xét: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda.\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

+) Mths của (1):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_3 + H_1 \to H_3 \\ 2H_4 - 3H_1 \to H_4}]{2H_2 - 3H_1 \to H_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2\lambda-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[2H_4 - H_2 \to H_4]{2H_3 + H_2 \to H_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4\lambda-5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(a=3)]{3H_4 - (4\lambda-5)H_3 \to H_4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = 3$ (số ẩn), $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hpt (1) có no ! là no tầm thg, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ đltt, $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$ để (a) pttt.

4. Cơ sở và số chiều của kgt²

⊛ k/n hệ sinh: $\mathbb{R}^n$ - Kgt², cho hệ vectơ $(a) = \{a_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Khi đó (a) đgl một hệ sinh của kgt² $\mathbb{R}^n$ nếu mọi vectơ trong kgt² $\mathbb{R}^n$ đều bdt² được qua (a). Tức là: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ đều $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ t/m:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i.$$

⊛ k/n cơ sở: $\mathbb{R}^n$ - kgt², cho hệ vectơ (a) = $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Khi đó (a) đgl một cơ sở của kgt² $\mathbb{R}^n$ nếu (a) vừa là hệ sinh của kgt² $\mathbb{R}^n$, vừa đlt².

z k

⊗ k/n số chiều:

ĐL1: Mọi cơ sở của một kgt² đều có số phần tử bằng nhau.

ĐN1: Số chiều của một kgt² E chính bằng số phần tử của một cơ sở của kgt² E, KH là: dim E.

VD3: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$; $\dim \mathbb{R}^3 = 3$; $\dim \mathbb{R}^n = n$.

ĐL2: Mọi hệ đlt² trong kgt² $\mathbb{R}^n$ có tối đa n phần tử.

ĐL3: ______ mà có n phần tử đều là cơ sở của kgt² $\mathbb{R}^n$.

Bài 3. 13. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với
$a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (1, 2, -1, 1)$,
$a_3 = (2, 1, 3, 1)$, $a_4 = (1, 3, -2, 2)$.
a) Chứng minh rằng hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
b) Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ có là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ hay không? Tại sao?

Giải: a) SV tự CM

b) Ở ý a), ta đã biết hệ vec tơ $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ đlt² trong kgt² $\mathbb{R}^4$, mà (a) có 4 phần tử $\Rightarrow$ (a) là một cơ sở của kgt² $\mathbb{R}^4$.

Bài 3. 14. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ cho hệ véc tơ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ với
$a_1 = (1, 1, -1, 2)$, $a_2 = (2, 3, -1, 1)$,
$a_3 = (-1, 1, 1, 3)$, $a_4 = (2, 2, 5, 6)$.
a) Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là hệ độc lập tuyến tính hay là hệ phụ thuộc tuyến tính?
b) Cho $b \in \mathbb{R}^4$ là một phần tử nào đấy. Hãy cho biết hệ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b\}$ là hệ độc lập tuyến tính hay là hệ phụ thuộc tuyến tính?

Giải: a) SV tự làm

b) Ta đã biết, trong kgt^2 $\mathbb{R}^4$, mọi hệ đlt^2 có tối đa 4 ptử, mà hệ vectơ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, b\}$ có 5 ptử $\Rightarrow$ nó ko đlt^2
$\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3, a_4, b\}$ pttt.

ĐL4: Cho $(a) = \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ là một cơ sở của kgt^2 $\mathbb{R}^n$. Khi đó mọi vectơ trong kgt^2 $\mathbb{R}^n$ đều bdt^2 một cách ! qua (a). Tức là:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \exists!\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \ \text{s/c}: \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

ĐN2: Với các kí hiệu như trong ĐL4, bộ n số thực $(x_1, \ldots, x_n)$ đgl tọa độ của vectơ x trên cơ sở (a) của kgt^2 $\mathbb{R}^n$. KH là:

$$(x)_{(a)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (\text{dạng hàng})$$

$$[x]_{(a)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\sim \text{cột})$$

λ_n

Cý: +) Một kgt² có vô số cs, chính vì vậy khi đề cập đến k/n tọa độ, ta cần xem xét xem tọa độ của vectơ đc cho trong cs nào của kgt². Nếu ko đề cập gì tới cs, ta hiểu tọa độ của vectơ đc cho trong csct của kgt² đó.

+) Muốn tìm tọa độ của vectơ x trên cs $(a) = \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ của kgt² $\mathbb{R}^n$, trước tiên ta cần tìm bdt² của x qua (a).

Bài 3.17. Hãy tìm tọa độ của véc tơ $x = (10, 9, 9)$ trong cơ sở dưới đây của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = (1, 1, 2);\ a_2 = (1, 2, 3);\ a_3 = (3, 1, -1).$$

Giải: KH: $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$. Xét:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 10 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 9 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 = 9 \end{cases}$$

Cý: Hpt t² 3pt, 3ẩn hoặc 2pt, 2ẩn dùng phép sd máy tính cầm tay để tìm n₀.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

Vậy $x = a_1 + 3a_2 + 2a_3$

$$\Longrightarrow (x)_{(a)} = (1, 3, 2).$$

5. Ma trận chuyển cs và phép bđổi tọa độ.

Trong kg t² $\mathbb{R}^n$, cho:

Acti
Go to

5. Mt chuyển cs8 và phép bđổi toạ độ.

Trong kg t^2 $\mathbb{R}^n$, cho:

$$\left.\begin{array}{l}(a) = \{a_i\}_{i=\overline{1,n}} \\ (b) = \{b_i\}_{i=\overline{1,n}}\end{array}\right\}$$ là 2 cs8 của kgt^2 $\mathbb{R}^n$. Khi đó:

⊛ Mt chuyển cs8 từ cs8 (a) sang cs8 (b) là một mt vuông cấp n, KH là T_{ab}, đc ĐN như sau:

$$T_{ab} := \left(\underset{\uparrow}{[b_1]_{(a)}} \; [b_2]_{(a)} \; \dots \; [b_n]_{(a)} \right)_{n \times n}$$

cột 1 của Tab là toạ độ dưới dạng cột của b_1 trên cs8 (a)

Cý: Tab là một mt k/n và $T_{ab}^{-1} = T_{ba}$.

⊛ Cho $x \in \mathbb{R}^n$, khi đó ta có CT biến đổi tọa độ của vectơ x từ csở (a) sang csở (b) và ngc lại như sau:

$$[x]_{(a)} = T_{ab}[x]_{(b)} \quad \text{(nên dùng)}$$

và $$[x]_{(b)} = T_{ab}^{-1}[x]_{(a)}.$$

Bài 3.27. Trong không gian tuyến tính ba chiều U cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$b_1 = a_1 + a_2 - 3a_3$, $b_2 = 2a_1 - 3a_2 + 2a_3$, $b_3 = 4a_1 + 5a_2 + a_3$

Cho biết phần tử x có tọa độ trong cơ sở thứ nhất (a) là $[x]_a = (1, -3, 5)$. Hãy tính tọa độ $[x]_b$ của phần tử x trong cơ sở thứ hai (b).

Giải: +) Ta có:

$$b_1 = a_1 + a_2 - 3a_3 \Rightarrow [b_1]_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = 2a_1 - 3a_2 + 2a_3 \Rightarrow [b_2]_{(a)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = 4a_1 + 5a_2 + a_3 \Rightarrow [b_3]_{(a)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{ab} = \left([b_1]_{(a)}\ [b_2]_{(a)}\ [b_3]_{(a)}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

+) G/sử $(x)_{(b)} = (x_1, x_2, x_3)$. ADCT:

$$[x]_{(a)} = T_{ab}[x]_{(b)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -79/73 \\ x_2 = 60/73 \\ x_3 = 8/73 \end{cases}.$$

Vậy $(x)_{(b)} = \frac{1}{73}(-79, 60, 8)$.

Giải: ADCT: $T_{ab} = T_{ae} \cdot T_{eb} = T_{ea}^{-1}\ T_{eb}$

Bài 3.33. Trong không gian tuyến tính $\mathbb{R}^3$ cho hai hệ cơ sở $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ với

$$a_1 = (3,1,4),\ a_2 = (5,-4,2),\ a_3 = (2,1,1),$$
$$b_1 = (3,-2,3),\ b_2 = (4,1,-2),\ b_3 = (3,4,2).$$

Hãy tính ma trận chuyển cơ sở từ hệ (b) sang hệ (a).

Giải: C1 +) Xét: $a_1 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 68/97 \\ \lambda_2 = -27/97 \\ \lambda_3 = 65/97 \end{cases} \Rightarrow [a_1]_{(b)} = \begin{pmatrix} 68/97 \\ -27/97 \\ 65/97 \end{pmatrix}$$

+) Làm T² với $a_2, a_3 \Rightarrow T_{ba} =$

C2: KH (e) là csct của kgt² $\mathbb{R}^3$. Khi đó:

$$T_{ea} = \left([a_1]_{(e)}\ [a_2]_{(e)}\ [a_3]_{(e)}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};\quad T_{eb} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Chương 4. Ánh xạ tuyến tính (Axt²)

1 K/n ánh xạ:

ĐN: Cho $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ là các kgt². Axạ $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ đgl một Axt² nếu 2 đK sau

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$$

đc t/m:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

ii) $f(\lambda . x) = \lambda . f(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Cý: Axt² $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ đgl một biến đổi t² (bđt²).

T/c: Nếu $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là một Axt² thì:

+) $f(\theta_{\mathbb{R}^n}) = \theta_{\mathbb{R}^m}$

+) $f(\lambda x + \beta y) = \lambda f(x) + \beta f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Bài 4.3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3 + \alpha),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ (α là tham số).

a) Hãy xác định α để ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.

Giải: ĐKcần: Để f là một Axt² thì đK cần là:

$f(\theta_{\mathbb{R}^3}) = \theta_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow f((0,0,0)) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (0,0,\alpha) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0$.

ĐKđủ: Với $\alpha = 0$, Axạ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

3. Mt của Axt²

⊛ Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một Axt². G/sử:

$(a) = \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ là một cơsở của kgt² $\mathbb{R}^n$

$(b) = \{b_j\}_{j=\overline{1,m}}$ ~ $\mathbb{R}^m$.

Khi đó, mt của Axt² f đ/v cơsở (a) của kgt² $\mathbb{R}^n$ và cơsở (b) của kgt² $\mathbb{R}^m$ là một mt cỡ $m \times n$, KH là A_{ab}, và đc ĐN như sau:

$$A_{ab} := \left([f(a_1)]_{(b)} \ [f(a_2)]_{(b)} \ \dots \ [f(a_n)]_{(b)} \right)$$

cột 1 của A_{ab} là tọa độ chiều dạng cột của $f(a_1)$ theo cơsở (b)

C/ý: +) Ta có CT: $[f(x)]_{(b)} = A_{ab} [x]_{(a)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

+) Trong TH f là một bđt², nghĩa là $m = n$, thì A_{ab} là một mt vuông cấp n. Thêm nữa, trong TH này nếu cơsở (b) trùng với cs (a) thì mt A_{aa} đc KH đơn giản là A_a và đgl mt của Axt² (bđt²) f đ/v cơsở (a) của kgt² $\mathbb{R}^n$.

Bài 4.2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi công

Bài 4.3. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3 + \alpha),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ (α là tham số).
a) Hãy xác định α để ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính.
b) Với α tìm được hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Giải. a) đã làm

b) Với $\alpha = 0$, Axt^2 f có dạng:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3)$$

KH: $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ là csct của kgt^2 $\mathbb{R}^3$, khi đó: $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$; $e_3 = (0,0,1)$.

(Nháp: $(a) = (e)$, $(b) = (e)$)

Ta có:

+) $f(e_1) = f((1,0,0)) = (3,1,1) = 3e_1 + e_2 + e_3 \Rightarrow [f(e_1)]_{(e)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

+) $f(e_2) = f((0,1,0)) = (-2,1,0) = -2e_1 + e_2 + 0e_3 \Rightarrow [f(e_2)]_{(e)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

+) $f(e_3) = f((0,0,1)) = (1,1,-1) = e_1 + e_2 - e_3 \Rightarrow [f(e_3)]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vậy mt của f đ/v csct của kgt^2 $\mathbb{R}^3$ là:

$$A_e = \left([f(e_1)]_{(e)}\ [f(e_2)]_{(e)}\ [f(e_3)]_{(e)} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bài 4.7. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (x_1 + x_2 - x_4, 3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_3 - 2x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm tất cả $x \in \mathbb{R}^4$ để $f(x) = f(1, 2, 1, 2)$.

Giải: a) KH: $(e) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là csct của kgt² $\mathbb{R}^4$

$(e') = \{e_1', e_2', e_3'\}$ ~~~~ $\mathbb{R}^3$.

(Nháp: $(a) = (e)$, $(b) = (e')$)

Ta có:

+) $f(e_1) = f((1,0,0,0)) = (1,3,1) = e_1' + 3e_2' + e_3' \Rightarrow [f(e_1)]_{(e')} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

+) $f(e_2) = f((0,1,0,0)) = (1,-2,0) = e_1' - 2e_2' + 0e_3' \Rightarrow [f(e_2)]_{(e')} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

+) $f(e_3) = f((0,0,1,0)) = (0,1,1) = 0e_1' + e_2' + e_3' \Rightarrow [f(e_3)]_{(e')} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

+) $f(e_4) = f((0,0,0,1)) = (-1,0,-2) = -e_1' + 0e_2' - 2e_3' \Longrightarrow [f(e_4)]_{(e')} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vậy mt của Axt² f đ/v csct của $\mathbb{R}^4$ và $\mathbb{R}^3$ là:

$$A_{ee'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 4}.$$

b) G/sử $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ là vectơ cần tìm. Ta có:

$f(1,2,1,2)=(1,0,-2)$, vì vậy: $f(x)=f(1,2,1,2)$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2-x_4,\ 3x_1-2x_2+x_3,\ x_1+x_3-2x_4)=(1,0,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \quad (*) \\ x_1+x_3-2x_4=-2 \end{cases}$$

+) Mths mở rộng của (*) là:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[H_3-H_1\to H_3]{H_2-3H_1\to H_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{5H_3-H_2\to H_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -12 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow r(A)=r(\bar{A})=3<4$ (số ẩn) $\Rightarrow$ hpt (*) có vô số n₀ với 1 ẩn tự do. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_4=1 \\ -5x_2+x_3+3x_4=-3 \\ 4x_3-8x_4=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=x_4 \\ x_3=2x_4-3 \\ x_4\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy vectơ x cần tìm có dạng: $x=(1,x_4,2x_4-3,x_4)$ $(x_4\in\mathbb{R})$.

Bài 4.4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + 4x_2 - x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm ma trận của f trên cơ sở mới $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (2, 1, -1), \; a_2 = (1, -2, 3), \; a_3 = (3, 2, 1).$$

Giải: a) SV tự làm.

b) C1: KH $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$. Ta có:

(Nháp: $(a) = (a)$, $(b) = (a)$)

+) $f(a_1) = f((2,1,-1)) = (1,5,11)$. Xét:

$$f(a_1) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 5 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -15/2 \\ \lambda_2 = -11/16 \\ \lambda_3 = 89/16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [g(a_1)]_{(a)} = \begin{pmatrix} -15/2 \\ -11/16 \\ 89/16 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{cột 1 của } A_a$$

+) Thực hiện T^2 với $g(a_2)$, $g(a_3)$, ta lập được A_a.

Khi đó, ta có CT:

$$A_b = T_{ab}^{-1} . A_a . T_{ab}$$

Bài 4.4. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + 4x_2 - x_3),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
a) Hãy lập ma trận của ánh xạ f trên cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm ma trận của f trên cơ sở mới $\{a_1, a_2, a_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ với

$$a_1 = (2, 1, -1), \; a_2 = (1, -2, 3), \; a_3 = (3, 2, 1).$$

b) C2: Ở ý a), ta đã lập được mt của ƒ đ/v csct(e) là:

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

KH: $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ và A_a là mt của ƒ đ/v cs ở (a).

(Nháp: (a) = (e), (b) = (a))

Khi đó, ta có CT:

$$A_a = T_{ea}^{-1} A_e . T_{ea},$$

ở đó: $T_{ea} = ([a_1]_{(e)} \; [a_2]_{(e)} \; [a_3]_{(e)}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (SV tự làm tiếp)

Phát biểu khác của btoán 4.4b): Cho $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là một bđt² có mt trên csct (e) của $\mathbb{R}^3$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm mt B của f trên cs (a) $= \{a_1, a_2, a_3\}$, với $a_1 = (2,1,-1)$, $a_2 = (1,-2,3)$, $a_3 = (3,2,1)$.

Cg: ADCT:

$$B = T_{ea}^{-1} \cdot A \cdot T_{ea}, \quad \text{với } T_{ea} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Giá trị riêng (GTR), vectơ riêng (VTR).

<u>ĐN</u>: Cho $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là một bđt², có mt $A = (a_{ij})_{n \times n}$ đối với cơ sở chính tắc (e) của kgt² $\mathbb{R}^n$. Khi đó, số λ đgl một GTR của bđt² f (hoặc của mt A) nếu $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta$ s/c:

$$f(x) = \lambda . x \quad \left(\Longleftrightarrow A.[x]_{(e)} = \lambda . [x]_{(e)} \right),$$

vectơ x như trên đgl <u>VTR</u> ứng với <u>GTR λ</u> của f (hoặc A).

⊗ Cách tìm GTR, VTR của bđt² $\mathcal{J}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: 3 bước

B1: Lập mt $A = (a_{ij})_{n \times n}$ của $\mathcal{J}$ đ/v csct của kg t² $\mathbb{R}^n$

B2: Giải pt đặc trưng: $\det(A - \lambda I) = 0$, các no của pt chính là các GTR cần tìm

B3: Ứng với GTR λ tìm đc, VTR $x = (x_1, \dots, x_n)$ là no ko tầm thg của hpt thuần nhất:

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Cý: +) Nếu btoán y/c tìm GTR, VTR của mt $A = (a_{ij})_{n \times n}$ thì ta bỏ qua B1.

+) Hpt thuần nhất $(*)$ có mt hs chính là mt $(A - \lambda I)$ và luôn có vô số no.

Bài 4.26. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của A.

Giải +) Xét pt đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(3-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0$$

pt bậc n = 3 hệ số tự do

$$\Longleftrightarrow -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + \underline{\underline{7}} = 0 \overset{\text{Giải thích}}{\Longleftrightarrow} (1-\lambda)^2(7-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \ (\text{bội } m_1 = 2) \\ \lambda_2 = 7 \ (\text{bội } m_2 = 1) \end{array}\right.$$

Sd máy tính: giải pt bậc 3 ra 2 no pb là 1 và 7 ⟹ pt bậc 3 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (\underline{\underline{7}}-\lambda)^2(\underline{\underline{1}}-\lambda) = 0 & (\text{loại vì hệ số tự do bằng } 49) \\ (1-\lambda)^2(7-\lambda) = 0 & (\text{ok, vì} \sim\sim 7) \end{array}\right.$

+) Ứng với GTR $\lambda_1 = 1$, VTR $x = (x_1, x_2, x_3)$ là n_0 ko tầm thg của hpt thuần nhất:

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Mths của (1):

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_3 - H_1 \to H_3]{H_2 - H_1 \to H_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A - \lambda_1 I) = 1 < 3$ (số ẩn) $\Rightarrow$ Hpt(1) có vô số n_0 với 2 ẩn tự do. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Vậy VTR $x = (x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, 0) + (-x_3, 0, x_3)$

$$= \underbrace{x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1)}_{\neq (0,0,0)} \quad (x_2^2 + x_3^2 \neq 0)$$

Điều kiện

+) Ứng với GTR $\lambda_2 = 7$, VTR $x = (x_1, x_2, x_3)$ là n₀ ko tầm thg của hpt thuần nhất:

$$(A - \lambda_2 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

M ths của (2):

$$A - \lambda_2 I = A - 7I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[2H_3 + H_1 \to H_3]{2H_2 + H_1 \to H_2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_3 + H_2 \to H_3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A - \lambda_2 I) = 2 < 3$ (số ẩn) $\Rightarrow$ Hpt(2) có vô số n₀ với 1 ẩn tự do. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Vậy VTR $x = (x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_3, x_3) = \underbrace{x_3(1,1,1)}_{\neq (0,0,0)} \quad (x_3 \neq 0)$.

ĐK

7\. Chéo hoá mt.

Btoán: Cho mt $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Hãy tìm mt k/n T và mt đg chéo B t/m:

$$B = T^{-1} A T.$$

+) Trong TH btoán có n_0 (tìm được T và B), ta nói mt A chéo hoá được (hay còn nói là mt A đồng dạng với một mt đg chéo).

+) ——— vô n_0, ta nói mt A ko chéo hoá được.

ĐK chéo hoá: G/sử mt A có k GTR pbiệt là: (giải pt đặc trưng)

λ_1 (bội m_1)

λ_2 ($\sim m_2$)

...

λ_k ($\sim m_k$)

Khi đó: mt A chéo hoá được $\Longleftrightarrow \begin{cases} m_1 + m_2 + \dots + m_k = n \text{ (cấp của mt } A) \\ r(A - \lambda_i I) = n - m_i, \; i = \overline{1,k} \end{cases}$

(k+1 đkiện)

Cý: +) Nếu GTR λ_j có bội $m_j = 1$ thì ta luôn có $r(A - \lambda_j I) = n - 1$.

+) Nếu mt $A = (a_{ij})_{n\times n}$ có n GTR pbiệt thì A chéo hoá được.

Bài 4.26. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của A.

b) Ma trận A có chéo hóa được không? Tại sao?

Giải:

b) ở ý a), ta đã biết mt A có 2 GTR p.biệt là:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \ (\text{bội } m_1 = 2) \\ \lambda_2 = 7 \ (\sim m_2 = 1) \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 + m_2 = 2 + 1 = 3 = n \\ r(A - \lambda_1 I) = 1 = 3 - 2 = n - m_1 \\ r(A - \lambda_2 I) = 2 = 3 - 1 = n - m_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mt } A \text{ chéo hóa được.}$$

Bài 4.21. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh rằng ma trận A không chéo hóa được

Giải: +) Xét pt đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 3 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) - 6 + 3 + 3(3-\lambda) - 2(1-\lambda) - 3(2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \ (\text{bội } m_1 = 2) \\ \lambda_2 = 4 \ (\sim m_2 = 1) \end{array}\right.$$

+) Ta có:

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_3 + H_1 \to H_3 \\ H_2 \Leftrightarrow H_3}]{H_2 - H_1 \to H_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A - \lambda_1 I) = 2 \neq 1 \ (n - m_1 = 3 - 2 = 1) \Rightarrow A \text{ ko chéo hóa được (đpcm).}$$

Bài 4.26. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Tìm giá trị riêng và véc tơ riêng của A.
b) Ma trận A có chéo hóa được không? Tại sao? Nếu được hãy tìm ma trận T và ma trận đường chéo B để cho $B = T^{-1}AT$.

b) (tiếp) Ở ý a), ta đã biết:

+) VTR ứng với GTR $\lambda_1 = 1$ (bội $\underline{m_1 = 2}$) là:

$$x = x_2 \underbrace{(-1, 1, 0)} + x_3 \underbrace{(-1, 0, 1)} \quad (x_2^2 + x_3^2 \neq 0).$$

2 VTR đlt² cần tìm

. Chọn $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$, ta đc VTR $a_1 = (-1, 1, 0)$

. Chọn $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$, ———— $a_2 = (-1, 0, 1)$.

+) VTR ứng với GTR $\lambda_2 = 7$ (bội $\underline{m_2 = 1}$) là:

$$x = x_3 \underbrace{(1, 1, 1)} \quad (x_3 \neq 0)$$

1 GTR đlt² cần tìm

Chọn $x_3 = 1$, ———— $a_3 = (1, 1, 1)$.

+) Vậy mt k/n T có dạng: $T = \left([a_1]_{(e)} \; [a_2]_{(e)} \; [a_3]_{(e)} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

+) Mt đg chéo B t.ứ với T có dạng : $B = \boxed{T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}$

SV tự ktra tính đúng sai ?

Bài 4.12. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức

$$f(x) = (2x_1, -3x_1+2x_2, 5x_1-x_2+2x_3, 2x_1-x_2+4x_3+2x_4),$$

với mọi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

a) Hãy lập ma trận A của ánh xạ f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^4$.

b) Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của ánh xạ f.

c) A chéo hóa đc ko? Tại sao?

a) ...

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) +) Xét pt đặc trưng:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\text{định thức } \Delta \text{ chéo}} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ (bội } m = 4).$$

+) Ứng với GTR $\lambda = 2$, VTR $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ là no ko tầm thg của hpt thuần nhất:

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 = 0 \\ 5x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Vậy VTR $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, x_4) = x_4(0, 0, 0, 1)$ $(x_4 \neq 0)$

c) Ta có: $r(A-\lambda I) = \underset{n}{4} - \underset{\text{số ẩn tự do}}{1} = 3 \neq 0$ $(n - m = 4 - 4 = 0)$

$\Rightarrow$ A ko chéo hóa được.

Chương 5. Không gian Euclid

K/n kgian Euclid $\mathbb{R}^n$

ĐN: Tập hợp $\mathbb{R}^n$ cùng với ba phép toán (1), (2), (3) đgl một kgian Euclid $\mathbb{R}^n$. (vì vậy một kg Euclid là một kgt^2)

T/c: $\mathbb{R}^n$ - kgian Euclid. Khi đó với mọi $\begin{cases} x, x_1, \dots, x_n, y, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n \\ \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \end{cases}$, ta có:

+) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

+) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

+) $\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$

$\Rightarrow \begin{cases} \langle \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \dots + \lambda_n\langle x_n, y\rangle \\ \langle x, \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n\rangle = \lambda_1\langle x, y_1\rangle + \dots + \lambda_n\langle x, y_n\rangle \end{cases}$

+) $\langle x, x\rangle \geq 0$ và $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta_{\mathbb{R}^n}$.

VD: $\mathbb{R}^3$ - kg Euclid, cho $x = (2, 1, 2)$, $y = (-3, 5, 2)$. Khi đó:

$$\langle x, y\rangle = 2.(-3) + 1.5 + 2.2 = 3$$

$$\langle x, x\rangle = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9$$

$$\langle x, 3x - 5y\rangle = 3\langle x, x\rangle - 5\langle x, y\rangle = 3.9 - 5.3 = 12$$

$$\langle 2x - y, 2x + 3y\rangle = 4\langle x, x\rangle + 6\langle x, y\rangle - 2\langle y, x\rangle - 3\langle y, y\rangle$$

$$= 4.9 + 6.3 - 2.3 - 3((-3)^2 + 5^2 + 2^2)$$

$$= -66$$

2. Cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn của Kgian Euclid $\mathbb{R}^n$.

Cho $\mathbb{R}^n$ - Kgian Euclid.

⊛ Độ dài của vectơ: Cho $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó độ dài của x, KH là: $\|x\|$, đc ĐN như sau:

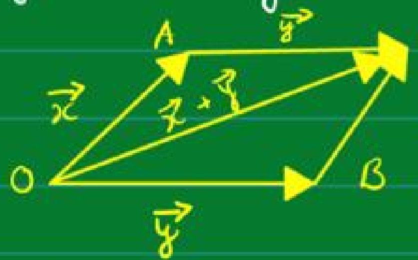
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

C/ý: +) Nếu $\|x\| = 1$, ta nói x có độ dài đơn vị.

+) Khoảng cách giữa 2 vectơ x, y, KH là: $d(x,y) := \|x - y\|$.

T/c: +) $\|k.x\| = |k| . \|x\| \quad (k \in \mathbb{R})$

+) Bđt Δ: $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$



$\Rightarrow OC \leqslant OA + AC$

+) Bđt Bunhia: $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| . \|y\|$

$$\left(\Longleftrightarrow |x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leqslant \sqrt{(x_1^2 + \cdots + x_n^2).(y_1^2 + \cdots + y_n^2)} \right)$$

⊛ Hai vectơ x, y đgl trực giao với nhau, KH là: $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.

(*) Hai vectơ x, y đgl trực giao với nhau, KH là: $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.

Bài 5.6. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ

$u_1 = (1, -1, 1, 2),\ u_2 = (-2, 1, 2, 3),\ v = (2, \lambda, -1, \mu)$.

Hãy xác định giá trị của λ và μ để $v \perp u_1,\ v \perp u_2$.

Giải: Từ gt, ta có:

$$\begin{cases} v \perp u_1 \\ v \perp u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle v, u_1 \rangle = 0 \\ \langle v, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \lambda - 1 + 2\mu = 0 \\ -4 + \lambda - 2 + 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 2\mu = -1 \\ \lambda + 3\mu = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 1 \end{cases}.$$

Bài 5.1. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ hãy tìm véc tơ có độ dài đơn vị trực giao đồng thời với véc tơ sau:

$v_1 = (1, 0, 10, 12),\ v_2 = (2, 2, -4, -5),$
$v_3 = (3, 11, -4, -1)$.

Giải: G/sử $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ là vectơ cần tìm.

Theo gt, ta có:

$$\begin{cases} \langle x, v_1 \rangle = 0 \\ \langle x, v_2 \rangle = 0 \\ \langle x, v_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 10x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 11x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dễ thấy rằng (1) là một hpt t^2 thuần nhất 4 ẩn và có $r(A) = 3 < 4 \Rightarrow$ Hpt (1) có vô số nₒ với 1 ẩn tự do. (Điều này có nghĩa là 4 ẩn x_1, x_2, x_3, x_4

Bài 5. 4. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với

$$u_1 = (2, 1, -1, -2), \quad u_2 = (1, -2, 3, -2),$$
$$u_3 = (2, 1, -4, 1), \quad u_4 = (-2, 1, -3, 4).$$

Hãy chỉ ra rằng nếu phần tử $x \in \mathbb{R}^4$ nào đấy thỏa mãn $x \perp u_1, x \perp u_2, x \perp u_3$ thì ta phải có $x \perp u_4$.

Giải: G/sử $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ là vectơ cần tìm.

Theo gt, ta có:

$$\begin{cases} \langle x, u_1 \rangle = 0 \\ \langle x, u_2 \rangle = 0 \\ \langle x, u_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dễ thấy rằng (1) là một hpt t² thuần nhất 4 ẩn và có $r(A) = 3 < 4 \Rightarrow$ Hpt (1) có vô số no với 1 ẩn tự do. (Điều này có nghĩa là 4 ẩn x_1, x_2, x_3, x_4 đc quy về 1 ẩn chính là ẩn tự do, hay tọa độ của x phụ thuộc vào 1 ẩn. Thực hiện $\langle x, u_4 \rangle$ ta được đpcm)

Bài 5.12. Trong không gian $\mathbb{R}^6$ cho M là không gian con ba chiều có một cơ sở gồm 3 véc tơ

$$u_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1),\ u_2 = (2, -3, 4, 1, 5, 2),$$
$$u_3 = (3, -4, 10, 2, 1, 3).$$

Hãy xác định trong M véc tơ có độ dài đơn vị trực giao với cả hai véc tơ

$$v_1 = (2, -1, 1, 3, 1, -4),\ v_2 = (3, -2, 1, 2, 1, -1).$$

Giải: G/sử x là vectơ cần tìm. Do:

$$x \in M \xRightarrow[\text{là } \{u_1, u_2, u_3\}]{M \text{ có một cơ sở}} \exists!\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ s/c}:$$

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3.$$

Theo gt, ta có:

$$\begin{cases} \langle x, v_1\rangle = 0 \\ \langle x, v_2\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3, v_1\rangle = 0 \\ \langle \quad\quad\quad\quad , v_2\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1\langle u_1, v_1\rangle + \lambda_2\langle u_2, v_1\rangle + \lambda_3\langle u_3, v_1\rangle = 0 \\ \lambda_1\langle u_1, v_2\rangle + \lambda_2\langle u_2, v_2\rangle + \lambda_3\langle u_3, v_2\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 11\lambda_2 + 15\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 21\lambda_2 + 29\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

(1) là một hpt t² thuần nhất 3 ẩn, có $r(A) = 2 < 3$. (Điều này có nghĩa là 3 ẩn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ đc quy về 1 ẩn chính là ẩn tự do, hay tọa độ của x phụ ∈ vào 1 ẩn, g trị chính xác của ẩn tự do này đc tìm qua gt còn lại của b toán là $\|x\| = 1$)

Bài 5.18. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho M là một không gian con hai chiều có một cơ sở là $\{u_1, u_2\}$ với

$$u_1 = (3,1,1,1),\ u_2 = (-1,-3,1,-1).$$

Hãy tìm $x \in M$ sao cho $\|x - u_1\| = 6, \|x - u_2\| = 6$.

Giải: G/sử x là vectơ cần tìm. Do:

$$x \in M \xRightarrow[\text{là } \{u_1,u_2\}]{M \text{ có một csở}} \exists!\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ s/c}:$$

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2.$$

Theo gt, ta có:

+) $\|x-u_1\| = 6 \Leftrightarrow \|x-u_1\|^2 = 36 \Leftrightarrow \langle(\lambda_1-1)u_1 + \lambda_2 u_2, (\lambda_1-1)u_1 + \lambda_2 u_2\rangle = 36$

$\Leftrightarrow (\lambda_1-1)^2\langle u_1,u_1\rangle + 2(\lambda_1-1)\lambda_2\langle u_1,u_2\rangle + \lambda_2^2\langle u_2,u_2\rangle = 36$

$\Leftrightarrow 12(\lambda_1-1)^2 - 12(\lambda_1-1)\lambda_2 + 12\lambda_2^2 = 36$

$\Leftrightarrow (\lambda_1-1)^2 - (\lambda_1-1)\lambda_2 + \lambda_2^2 = 3 \quad (1)$

+) $\|x-u_2\|^2 = 6 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (\lambda_2-1)^2 - (\lambda_2-1)\lambda_1 + \lambda_1^2 = 3. \quad (2)$

Trừ vế với vế của (1) cho (2), ta được: $-3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2. (3)$

Thế (3) vào (1), ta được: $\lambda_1^2 - \lambda_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = -1\\ \lambda_1 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 2\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -(u_1+u_2) = (-2,2,-2,0).\\ x = 2(u_1+u_2) = (4,-4,4,0)\end{array}\right.$$

ĐN: +) Hệ vectơ $(a) = \{a_i\}_{i=\overline{1,m}}$ đgl một hệ trực giao nếu $\langle a_i, a_j\rangle = 0, \forall i \neq j$.

+) $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ chuẩn nếu (a) là một hệ trực giao, đồng thời các vectơ của hệ có độ dài đơn vị, nghĩa là: $\begin{cases}\langle a_i, a_j\rangle = 0, & \forall i \neq j\\ \|a_i\| = 1, & i = \overline{1,m}\end{cases}$

$x_i = \langle x, u_i \rangle,\ i = \overline{1,n}.$

Bài 5.31. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho hệ véc tơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ với

$$u_1 = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}),\quad u_2 = (\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}),\quad u_3 = (\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}).$$

a) Hãy chỉ ra rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^3$.
b) Hãy tìm tọa độ của phần tử $x = (3, 4, 5)$ trên cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$.

Giải: a) Ta có:

$$\begin{cases} \langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0 \\ \|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ là một csở trực chuẩn của kgian Euclid $\mathbb{R}^3$.

b) KH: $(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$. G/sử $(x)_{(u)} = (x_1, x_2, x_3)$, do (u) là csở trực chuẩn của kg Euclid $\mathbb{R}^3$, nên ta có:

+) $x_1 = \langle x, u_1 \rangle = \frac{1}{7}(6 + 12 + 30) = 48/7$

+) $x_2 = \langle x, u_2 \rangle = \frac{1}{7}(18 + 8 - 15) = 11/7$

+) $x_3 = \langle x, u_3 \rangle = \frac{1}{7}(9 - 24 + 10) = -5/7$

$\Rightarrow (x)_{(u)} = \frac{1}{7}(48, 11, -5).$

Bài 5.32. Giả sử rằng $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ và ta được biết rằng $u_1 = \frac{1}{6}(3,5,1,1)$, $u_2 = \frac{1}{6}(-5,3,1,-1)$, $u_3 = \frac{1}{6}(-1,-1,3,5)$. Giả sử phần tử $x = (4,2,1,-5)$ có tọa độ trên $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là (x_1, x_2, x_3, x_4). Hãy tính x_4^2.

Giải: KH: $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Do (u) là cs trực chuẩn của kg Euclid $\mathbb{R}^4$, nên ta có:

+) $x_1 = \langle x, u_1 \rangle = \frac{1}{6}(12+10+1-5) = 3$

+) $x_2 = \langle x, u_2 \rangle = \frac{1}{6}(-20+6+1+5) = -4/3$

+) $x_3 = \frac{1}{6}(-4-2+3-25) = -14/3$.

Mặt $\neq$ $(x)_{(u)} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ nên $x = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$. Vì vậy:

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4, x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 \rangle$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (1)$$

(Do $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$ và $\|u_i\| = 1$)

Ta lại có $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 4^2 + 2^2 + 1^2 + (-5)^2 = 46$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow x_4^2 = 46 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 46 - 3^2 - (-4/3)^2 - (-14/3)^2 = 121/9$.

cũng là một kgian con của $\mathbb{R}^n$, và đgl phần bù trực giao của M.

Bài 5.13. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ cho M là không gian con hai chiều có một cơ sở gồm hai véc tơ $u_1 = (1, 2, -3, 3)$; $u_2 = (2, 1, -1, 5)$. Hãy phân tích phần tử $x = (6, 1, 4, 8)$ thành $x = u + v$ trong đó $u \in M$ và $v = M^{\perp}$.

Giải: Do:

$$u \in M \xRightarrow[\text{cs là } \{u_1, u_2\}]{\text{M có một}} \exists!\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ s/c}: u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

$\Rightarrow v = x - u = x - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2$, Do $v \in M^{\perp}$ nên $\begin{cases} \langle v, u_1 \rangle = 0 \\ \langle v, u_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle x - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2, u_1 \rangle = 0 \\ \langle \sim\sim\sim, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, u_1 \rangle - \lambda_1 \langle u_1, u_1 \rangle - \lambda_2 \langle u_2, u_1 \rangle = 0 \\ \langle x, u_2 \rangle - \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle - \lambda_2 \langle u_2, u_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$

Bài 5. 30. Bằng phương pháp trực chuẩn hóa Gram–Schmidt hãy xây dựng cơ sở trực chuẩn của không gian $\mathbb{R}^4$ từ cơ sở được cho sau đây:

$$a_1 = (1, 0, 1, -1); \quad a_2 = (0, 2, 2, 2);$$
$$a_3 = (5, -2, 3, 2); \quad a_4 = (3, 1, 1, 1).$$

Tính tọa độ của phần tử $x = (1, 2, 5, 6)$ trên cơ sở nhận được.

Giải: +) Đặt $u_1 = a_1 = (1, 0, 1, -1)$.

+) Tìm $\lambda_{21} \in \mathbb{R}$ s/c $u_2 = a_2 + \lambda_{21} u_1$ trực giao với u_1. Khi đó:

$$\lambda_{21} = -\frac{\langle a_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = 0, \text{ nên } u_2 = a_2 = (0, 2, 2, 2)$$

+) Tìm $\lambda_{31}, \lambda_{32} \in \mathbb{R}$ s/c: $u_3 = a_3 + \lambda_{32} u_2 + \lambda_{31} u_1$ trực giao với u_1, u_2. Khi đó:

$$\lambda_{32} = -\frac{\langle a_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}; \quad \lambda_{31} = -\frac{\langle a_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Vậy $u_3 = a_3 - \frac{1}{2} u_2 - 2 u_1 = (5, -2, 3, 2) - \frac{1}{2}(0, 2, 2, 2) - 2(1, 0, 1, -1) = (3, -3, 0, 3)$.

+) Tìm $\lambda_{41}, \lambda_{42}, \lambda_{43} \in \mathbb{R}$ s/c: $u_4 = a_4 + \lambda_{43} u_3 + \lambda_{42} u_2 + \lambda_{41} u_1$ trực giao với u_1, u_2, u_3. Khi đó:

$$\lambda_{43} = -\frac{\langle a_4, u_3\rangle}{\langle u_3, u_3\rangle} = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}; \quad \lambda_{42} = -\frac{\langle a_4, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}; \quad \lambda_{41} = -\frac{\langle a_4, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Vậy $u_4 = a_4 - \frac{1}{3} u_3 - \frac{1}{2} u_2 - u_1 = (3, 1, 1, 1) - \frac{1}{3}(3, -3, 0, 3) - \frac{1}{2}(0, 2, 2, 2) - (1, 0, 1, -1) = (1, 1, -1, 0)$.

+) Hệ vectơ $(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là csở trực chuẩn cần xdựng.

+) G/sử $(x)_{(v)} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thì:

$$x_1 = \langle x, v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+5-6) = 0$$

$$x_2 = \langle x, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+5+6) = \frac{13}{\sqrt{3}}$$

$$x_3 = \langle x, v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1-2+6) = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$x_4 = \langle x, v_4 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+2-5) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Vậy $(x)_{(v)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 13, 5, -2)$.

THE END!