MÔN HỌC: XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Giảng viên: Vũ Thị Hương

21st February 2022

Nội dung: XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Chương 1: Biến cố và xác suất của biến cố
Chương 2: Biến ngẫu nhiên rời rạc
Chương 3: Biến ngẫu nhiên liên tục
Chương 4: Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Nội dung: XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Chương 1: Biến cố và xác suất của biến cố
Chương 2: Biến ngẫu nhiên rời rạc
Chương 3: Biến ngẫu nhiên liên tục
Chương 4: Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Giáo trình: XÁC SUẤT THỐNG KÊ-TẬP 1, 2017. Tác giả: Trần Văn Long, Hoàng Việt Long, Phí Thị Vân Anh

Hiện tượng ngẫu nhiên. Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Hiện tượng ngẫu nhiên. Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Khái niệm phép thử ngẫu nhiên

Những quá trình, hiện tượng v. v. mà có kết quả khác nhau cho dù sự hình thành và tiến triển của nó được lặp lại nhiều lần với các điều kiện như nhau được gọi là các phép thử ngẫu nhiên.

Các ví dụ về phép thử

- Gieo một con xúc xắc.
- Gieo một đồng xu.
- Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong một lớp.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Không gian mẫu

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Không gian mẫu

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Chúng ta có thể nhìn nhận kết quả của một phép thử theo các chiều hướng khác nhau. Tương ứng với mỗi cách nhìn ta thiết lập được một không gian mẫu. Như vậy ứng với mỗi phép thử ta có thể xây những không gian mẫu khác nhau.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Không gian mẫu

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Chúng ta có thể nhìn nhận kết quả của một phép thử theo các chiều hướng khác nhau. Tương ứng với mỗi cách nhìn ta thiết lập được một không gian mẫu. Như vậy ứng với mỗi phép thử ta có thể xây những không gian mẫu khác nhau.

Ví dụ

Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp gồm 20 sinh viên .
Nếu ta quan tâm đến số thứ tự của sinh viên trong danh sách lớp thì không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 20\}.$$

Nếu ta quan tâm đến giới tính của bạn sinh viên được chọn thì không gian mẫu là

$$\Omega = \{\text{Nam}, \text{Nữ}\}.$$

Cách mô tả một không gian mẫu

Liệt kê các phần tử

Ví dụ

Gieo một con xúc xắc. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Cách mô tả một không gian mẫu

Liệt kê các phần tử

Ví dụ

Gieo một con xúc xắc. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ví dụ

Chọn ngẫu nhiên một số từ 1 đến 20. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 20\}.$$

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Không gian mẫu

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Ví dụ 1.4

Một vận động viên ném bóng vào rổ, anh ta ném liên tiếp cho đến khi nào có bóng trúng rổ thì dừng. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Ví dụ 1.4

Một vận động viên ném bóng vào rổ, anh ta ném liên tiếp cho đến khi nào có bóng trúng rổ thì dừng. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Ta ký hiệu T tương ứng với việc anh ta ném bóng trúng rổ, ký hiệu K tương ứng với việc anh ta ném bóng không trúng rổ trong một lần ném. Do không khống chế số lần ném và điều kiện là khi nào bóng trúng rổ thì mới dừng nên không gian mẫu có dạng

$$\Omega = \{T, KT, KKT, KKKT, ..., \underbrace{KK...K}_{n-1 \text{ lần}} T, ...\}.$$

Mỗi phần tử của không gian mẫu chỉ xuất hiện T ở cuối và số lượng phần tử không gian mẫu trên được gọi là vô hạn đếm được.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Khái niệm biến cố

- ➢ Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện của hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.
- ➢ Mỗi biến cố là một tập con của không gian mẫu.
- ▶ Kí hiệu biến cố bởi các chữ cái in hoa $A, B, C, \ldots$.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Khái niệm biến cố

- ➢ Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện của hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.
- ➢ Mỗi biến cố là một tập con của không gian mẫu.
- ▶ Kí hiệu biến cố bởi các chữ cái in hoa $A, B, C, \ldots$.

Xét phép thử: Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp gồm 20 sinh viên . Không gian mẫu

$$\Omega = \{1, 2, ..., 19, 20\}.$$

Gọi A là biến cố mô tả sự kiện:" Chọn được bạn sinh viên có số thứ tự chẵn". Ta có thể biểu diễn

$$A = \{2, 4, 6..., 20\}.$$

- ▶ $A \subset \Omega$,
- ▶ Nếu kết thúc phép thử, ta chọn được bạn sinh viên có số thứ tự 2 hoặc 4 ..., hoặc 20 thì biến cố A xảy ra. Ngược lại, nếu kết thúc phép thử, ta chọn được bạn sinh viên có số thứ tự 1 hoặc 3, ..., hoặc 19 thì biến cố A không xảy ra.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Khái niệm biến cố

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- Biến cố chắc chắn: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.
- Biến cố rỗng: Là biến cố không thể xảy ra mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- Biến cố ngẫu nhiên: Các biến cố khác với Ω và $\varnothing$ được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Khái niệm biến cố

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- **Biến cố chắc chắn**: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.
- **Biến cố rỗng**: Là biến cố không thể xảy ra mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- **Biến cố ngẫu nhiên**: Các biến cố khác với Ω và $\varnothing$ được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

Ví dụ

Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một bạn sinh viên trong lớp có 50 sinh viên. A là biến cố: "Chọn được sinh viên có số thứ tự trong danh sách lớp nhỏ hơn 60".
B là biến cố: "Chọn được sinh viên có số thứ tự trong danh sách lớp lớn hơn 50".
C là biến cố: "Chọn được sinh viên có số thứ tự trong danh sách lớp chia hết cho 5".
A là bc chắc chắn, B là bc rỗng,C là bc ngẫu nhiên.

Quan hệ kéo theo

Nếu sự xuất hiện của biến cố A chắc chắn kéo theo sự xuất hiện của biến cố B thì ta nói "A kéo theo B" và ký hiệu $A \subset B$.

Quan hệ kéo theo

Nếu sự xuất hiện của biến cố A chắc chắn kéo theo sự xuất hiện của biến cố B thì ta nói "A kéo theo B" và ký hiệu $A \subset B$.

Ví dụ

Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một bạn sinh viên trong lớp có 50 sinh viên. A là biến cố: "Chọn được sinh viên có số thứ tự trong danh sách lớp nhỏ hơn 5" hay

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

B là biến cố: "Chọn được sinh viên có số thứ tự trong danh sách lớp nhỏ hơn 3" hay

$$B = \{1, 2\}.$$

Dẫn tới $B \subset A$.

Quan hệ xung khắc

Hai biến cố A, B được gọi là xung khắc nếu chúng không thể cùng xuất hiện mỗi khi thực hiện phép thử.

Quan hệ xung khắc

Hai biến cố A, B được gọi là xung khắc nếu chúng không thể cùng xuất hiện mỗi khi thực hiện phép thử.

Gieo hai con xúc xắc. Ta xét các biến cố

- Biến cố A ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc bằng 7".
- Biến cố B ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc chia hết cho 2".
- Biến cố B ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc chia hết cho 3".

Tương ứng, biến cố A xung khắc với biến cố B, biến cố A xung khắc với biến cố C. Biến cố B và biến cố C không xung khắc với nhau.

Tổng của hai biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A+B$ (hoặc $A\cup B$). Biến cố $A+B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.

Ví dụ

Xét phép thử: một người đi xe máy từ nhà đến cơ quan qua 3 hệ thống đèn giao thông.
A là biến cố: " Người này không gặp đèn đỏ khi đi qua cả 3 vị trí đèn giao thông".
B là biến cố: " Người này gặp duy nhất một lần đèn đỏ khi đi qua cả 3 vị trí đèn giao thông".
Khi đó $A+B$ chính là biến cố: " Người này gặp *không quá* một lần đèn đỏ khi đi qua cả 3 vị trí đèn giao thông".

Tích của hai biến cố

của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.

Tích của hai biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.

Ví du

Xét phép thử: một người đi xe máy từ nhà đến cơ quan qua 3 hệ thống đèn giao thông. A_i là biến cố: "Người này gặp đèn màu đỏ khi đi qua hệ thống đèn thứ $i, i = 1, 2, 3$". Khi đó biến cố tích $A_1A_2A_3$ chính là biến cố người này gặp cả 3 lần đèn đỏ khi đi từ nhà tới cơ quan.

Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A được ký hiệu là $\overline{A}$. Biến cố $\overline{A}$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi A không xuất hiện.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

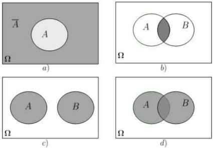
Phép toán giữa các biến cố

Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A được ký hiệu là $\overline{A}$. Biến cố $\overline{A}$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi A không xuất hiện.

Ví dụ

Ở ví dụ trên, $\overline{A_i}$ chính là biến cố: "Người này không gặp đèn màu đỏ khi đi qua hệ thống đèn thứ $i, i = 1, 2, 3$" hay tương đương với biến cố : "Người này gặp đèn màu xanh *hoặc* màu vàng khi đi qua hệ thống đèn thứ $i, i = 1, 2, 3$".



Các tính chất

1. $A + B = B + A, \qquad AB = BA.$
2. $(A + B) + C = A + (B + C), \qquad (AB)C = A(BC).$
3. $A(B + C) = AB + AC.$
4. $A + \Omega = \Omega, \qquad A\Omega = A.$
   $A + \varnothing = A, \qquad A\varnothing = \varnothing.$
   $A + \bar{A} = \Omega, \qquad A\bar{A} = \varnothing.$
   $A + A = A, \qquad AA = A.$
5. A, B xung khắc nếu và chỉ nếu $AB = \varnothing$.
6. Quy tắc De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Chú ý tính chất 4, 6, sinh viên hay sai

Luyện tập kỹ năng biểu diễn biến cố

Trong rất nhiều bài toán ở phần sau ta cần biểu diễn(phân tích) một biến cố thành tổng và tích của nhiều biến cố khác. Đây là một kỹ năng không dễ đối với sinh viên khi mới học. Để tránh các sai sót khi biểu diễn một biến cố chúng ta cần chú ý một số điểm sau:

- Hiểu kĩ định nghĩa và tính chất các phép toán giữa các biến cố.
- Chủ yếu dùng phép lấy tổng, phép ấy tích và biến cố đối.
- Nếu ta diễn đạt biến cố cần biểu diễn hoặc dạng tương đương với nó thành lời mà ta dùng đến chữ hoặc thì ta nên nghĩ đến phép lấy tổng, còn nếu ta dùng đến chữ và thì ta nên nghĩ đến phép lấy tích sau đó kiểm tra lại.
- Chú ý đến những cụm từ định lượng như: *không quá, không ít hơn, ít nhất, nhiều nhất, ít hơn, nhiều hơn, không vượt quá, . . .*

Ví dụ

Ba virus máy tính xâm nhập vào hệ thống thông qua thư điện tử.
"A_i là biến cố: " Virus thứ i gây hại cho hệ thống", $i = 1, 2, 3,$.
Hãy biểu diễn các biến cố sau theo các biến cố $A_i, i = 1, 2, 3$:
a) A là biến cố: "Hệ thống không bị gây hại bởi ba virus này".
b) B là biến cố: "Hệ thống bị gây hại bởi ít nhất một virus" c) C là biến cố: "Hệ thống bị gây hại bởi ít nhất một virus đồng thời không bị gây hại bởi virus thứ hai".
d) D là biến cố: "Hệ thống bị gây hại chỉ bởi một trong số ba virus này".

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Các quy tắc đếm

Trong nhiều bài toán xác suất ta cần xác định được số lượng phần tử của không gian mẫu và số phần tử trong không gian mẫu ứng với sự xuất hiện của một biến cố nào đấy. Khi số lượng phần tử cần đếm khá lớn chúng ta hướng tới việc sử dụng các quy tắc sau của toán tổ hợp để thực hiện.

- ➢ Quy tắc cộng
- ➢ Quy tắc nhân
  - Hoán vị - hoán vị vòng
  - Chỉnh hợp
  - Tổ hợp

Quy tắc cộng

Xét một công việc nào đấy có thể thực hiện theo k phương án khác nhau, trong đó

- Phương án 1 có n_1 cách thực hiện;
- Phương án 2 có n_2 cách thực hiện;

$\vdots$

- Phương án k có n_k cách thực hiện.

Ký hiệu n là số lượng cách thực hiện công việc. Ta có công thức cộng

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Quy tắc nhân

Xét một công việc nào đấy có thể hoàn thành qua k giai đoạn liên tiếp, trong đó

- Giai đoạn 1 có n_1 cách thực hiện;
- Ứng với mỗi cách thực hiện giai đoạn 1, giai đoạn 2 có n_2 cách thực hiện;
- Ứng với mỗi cách thực hiện hai giai đoạn 1, 2, giai đoạn 3 có n_3 cách thực hiện;

$\vdots$

- Ứng với mỗi cách thực hiện $k-1$ giai đoạn đầu, giai đoạn k có n_k cách thực hiện.

Ký hiệu n là số lượng cách thực hiện công việc. Ta có công thức nhân

$$n = n_1 n_2 n_3 \ldots n_k.$$

Ví dụ 1.17

Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số có thể lập được từ các số $0, 1, 2, 5, 7, 8$ mà mỗi chữ số chỉ xuất hiện đúng một lần?

Giải. Vì số cần lập là số chẵn, nên ta có $n_1 = 3$ cách lựa chọn cho số ở vị trí hàng đơn vị. Mặt khác, vì số có 4 chữ số nên chữ số hàng nghìn không thể là số 0. Vì vậy ta xem xét đến chữ số hàng đơn vị là 0 hoặc khác 0.

- Nếu chữ số hàng đơn vị là 0, tức là $n_1 = 1$, thì ta có $n_2 = 5$ cách lựa chọn chữ số hàng nghìn, $n_3 = 4$ cách lựa chọn chữ số hàng trăm và $n_4 = 3$ cách lựa chọn chữ số hàng chục. Như vậy, theo quy tắc nhân, ta sẽ có $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ cách tạo ra số có 4 chữ số khác nhau mà số cuối cùng là số 0.

- Còn nếu, chữ số hàng đơn vị là khác 0, tức là có $n_1 = 2$, thì có $n_2 = 4$ cách chọn chữ số hàng nghìn, $n_3 = 4$ cách chọn chữ số hàng trăm và $n_4 = 3$ cách chọn chữ số hàng chục. Như vậy có $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ cách tạo ra số có 4 chữ số khác nhau mà số cuối cùng khác 0.

Vì 2 trường hợp trên là 2 phương án khác nhau để thành lập số có 4 chữ số theo yêu cầu của bài, nên ta phải dùng quy tắc cộng để tính tổng số cách thực hiện là $60 + 96 = 156$ cách.

Hoán vị

Định nghĩa 1.4

Một hoán vị của một tập hợp có n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử của tập hợp đó thành một dãy có thứ tự.

Ví dụ 1.18

Đối với tập hợp có gồm 3 ký tự $\{a, b, c\}$, ta lập được 6 hoán vị là

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Số lượng các hoán vị của một tập có n phần tử

$$P_n = n!.$$

Hoán vị vòng

Một hoán vị vòng của n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử thành một vòng tròn.

Số lượng hoán vị vòng là $(n-1)!$.

Ví dụ 1.20

Có 4 người chơi đá cầu, khi đó có $3! = 6$ cách khác nhau để sắp xếp họ đứng thành hình tròn.

Hoán vị có lặp. Khi các phần tử trong tập đang xét không phân biệt, chúng có những phần tử giống nhau thì số lượng các hoán vị của tập đó có sự thay đổi. Ta trở lại Ví dụ 1.18 trong trường hợp có $b = c = x$. Khi đó 6 hoán vị của 3 ký tự đã cho sẽ trở thành: $axx, axx, xax, xxa, xax, xxa$. Như vậy, thực ra chỉ có 3 hoán vị khác biệt là: axx, xax, xxa.

Số lượng hoán vị có lặp

Xét một tập gồm n phần tử, trong đó có n_1 phần tử giống nhau thuộc loại thứ nhất, n_2 phần tử giống nhau thuộc loại thứ hai,..., và n_k phần tử giống nhau thuộc loại thứ k, ở đây $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Khi đó số lượng các hoán vị của tập n phần tử đó là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Hoán vị dạng này còn được mô tả ở dạng khác, đó là việc chia một tập gồm n phần tử thành k tập con, sao cho mỗi tập thứ i có n_i phần tử. Lúc này các phần tử trong tập ban đầu có thể giống hoặc khác nhau. Số lượng cách chia là

$$C_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}, \tag{1.1}$$

trong đó $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Ví dụ 1.22

Có bao nhiêu cách để sắp xếp đoàn có 7 nam thanh niên đi du lịch vào phòng nghỉ ở khách sạn, biết rằng khách sạn lúc đó có 1 phòng ba giường, 2 phòng giường đôi?

Giải. Đây chính là cách chia nhóm có 7 người thành 3 nhóm nhỏ, với nhóm thứ nhất có 3 người, 2 nhóm còn lại, mỗi nhóm có 2 người. Áp dụng công thức chia nhóm (1.1) ta có số cách sắp xếp 7 người vào 3 phòng là

$$C_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

Chỉnh hợp không lặp

Định nghĩa 1.5

Mỗi dãy có thứ tự bao gồm k phần tử phân biệt trong số n phần tử phân biệt được gọi là một chỉnh hợp (không lặp) chập k của n phần tử.

Số lượng chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.2}$$

Ví dụ 1.25

Một lớp có 25 sinh viên, cần chọn một Lớp trưởng, một Lớp phó và một Bí thư. Giả sử rằng cơ hội cho mỗi sinh viên là như nhau và mỗi người chỉ được giữ không quá một chức vụ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ban cán sự lớp?

Giải. Vì 3 vị trí được chọn là phân biệt, tức là có tính đến thứ tự sắp xếp, thứ tự sắp xếp khác nhau là cách chọn ban cán sự khác nhau, do đó đây là chỉnh hợp chập 3 của 25 phần tử. Vậy có tất cả

$$A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25.24.23 = 13800$$

số cách chọn ban cán sự.

Chỉnh hợp có lặp

Một chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử là dãy có thứ tự gồm k phần tử được lập ra từ n phần tử này mà trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại vài lần trong dãy.

Số lượng chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử là

$$N = n^k.$$

Ví dụ minh họa. Mỗi cách sắp xếp 8 hành khách lên một đoàn tàu gồm 6 toa là một chỉnh hợp có lặp của 6 số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Chẳng hạn chỉnh hợp lặp $(1, 2, 1, 4, 4, 4, 6, 6)$ là cách xếp các hành khách thứ nhất và thứ 3 lên toa 1; hành khách thứ 2 lên toa 2; hành khách 4, 5, 6 lên toa 4; hành khách 7, 8 lên toa 6. Số lượng cách sắp xếp 8 hành khách lên đoàn tàu là $N = 6^8$.

Tổ hợp. Một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử này. Nói cách khác ta có

Định nghĩa 1.6

Mỗi tổ hợp chập k của n phần tử là cách lấy k phần tử, không kể thứ tự, từ tập đó.

Số lượng hợp chập k của n phần tử

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.3}$$

Ví dụ 1.26

Một hộp có 8 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm cùng một lúc. Tính số khả năng có thể xảy ra của phép thử.

Giải. Khi lấy cùng một lúc thì 3 sản phẩm lấy ra không kể đến thứ tự, và đó là 3 sản phẩm phân biệt trong tổng số 8 sản phẩm. Nên mỗi cách lấy là một tổ hợp chập 3 của 8. Vậy tổng số cách lấy là:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

1.2 Định nghĩa về xác suất

Khái niệm xác suất

- Xác suất là thước đo lý thuyết dùng để đánh giá cơ hội xuất hiện của một sự kiện mỗi khi thực hiện phép thử.
- Xác suất của một biến cố A được ký hiệu là $\mathbb{P}(A)$. Giá trị của $\mathbb{P}(A)$ được xác định tùy theo mô hình xác suất được sử dụng cho không gian mẫu Ω.
- Việc tiếp cận một định nghĩa chung đòi hỏi sự chuẩn bị phức tạp về toán học. Để đơn giản chúng ta sẽ tiếp cận định nghĩa xác suất theo từng cách cụ thể:
  - Định nghĩa theo mô hình xác suất cổ điển.
  - Định nghĩa xác suất theo tần suất.
  - Định nghĩa xác suất theo số đo hình học.

1.2 Định nghĩa về xác suất

Mô hình cổ điển

Trong mô hình cổ điển không gian mẫu Ω có n phần tử và n phần tử này được nhìn nhận là đồng khả năng xuất hiện. Để thuận tiện ta gọi các phần tử của không gian mẫu Ω là các biến cố sơ cấp.

☞ Các ví dụ

1. Gieo một con xúc xắc, Ω chứa 6 biến cố sơ cấp.
2. Chọn ngẫu nhiên một số từ 1-20, Ω chứa 20 biến cố sơ cấp.
3. Chọn ngẫu nhiên ba quân bài từ một cỗ bài 52 quân, Ω chứa $n = C_{52}^3 = 22100$ phần tử.

Định nghĩa cổ điển

Xét phép thử có không gian mẫu Ω gồm n phần tử đồng khả năng xuất hiện. Nếu A là một biến cố và trong Ω có m_A phần tử ứng với sự xuất hiện của A thì xác suất của A là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m_A}{n}. \tag{1.4}$$

Ví dụ 1.28

Một lớp học môn Xác suất thống kê có 25 sinh viên ngành công trình, 10 sinh viên ngành cơ khí, 10 sinh viên ngành điện tử, và 8 sinh viên ngành xây dựng. Chọn ngẫu nhiên một người để trả lời câu hỏi. Hãy tính xác suất để sinh viên được chọn là:
a) Sinh viên ngành công trình.
b) Sinh viên ngành xây dựng hoặc sinh viên ngành điện tử.

Giải. Tổng số các sinh viên trong lớp là 53 nên số khả năng xảy ra là $n = 53$ và mọi người đều có cơ hội được chọn như nhau.
a) Gọi A là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành công trình. Vì có 25 sinh viên ngành công trình nên số khả năng thuận lợi cho A là $m = 25$. Do đó xác suất của biến cố A là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{53} = 0,4717.$$

1.2 Định nghĩa về xác suất

Mô hình cổ điển

b) Gọi B là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành xây dựng hoặc điện tử. Vì có 18 sinh viên ngành xây dựng hoặc điện tử, nên xác suất của B là

$$\mathbb{P}(B) = \frac{18}{53} = 0,3396.$$

Ví dụ 1.29

Một hộp chứa 15 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm cùng một lúc. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra thì:

a) Có 2 sản phẩm tốt.

b) Cả 3 sản phẩm đều tốt.

c) Có nhiều nhất 1 sản phẩm phế phẩm.

Giải. Khi lấy 3 sản phẩm cùng lúc trong tổng số 15 sản phẩm, thì các sản phẩm lấy ra không kể thứ tự, nên mỗi cách lấy là tổ hợp chập 3 của 15. Vậy tổng số cách lấy là

$$n = C_{15}^{3} = \frac{15!}{(15-3)!3!} = 455.$$

a) Gọi A là biến cố *"trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm tốt."*. Ta phân tích bài toán này chi tiết như sau: Mỗi trường hợp thuận lợi cho biến cố A chính là một cách lấy ra 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu (phế phẩm). Vậy ta chia việc lấy đó thành 2 công đoạn, công đoạn thứ nhất lấy 2 sản phẩm tốt, công đoạn thứ hai lấy 1 sản phẩm xấu. Vì lấy 2 sản phẩm tốt trong số $15 - 4 = 11$ sản phẩm tốt và lấy không kể thứ tự nên công đoạn thứ nhất có $C_{11}^2 = \frac{11!}{9!2!} = 55$ cách thực hiện. Tương tự, lấy 1 sản phẩm xấu trong số 4 sản phẩm xấu, nên công đoạn thứ hai có $C_4^1 = 4$ cách thực hiện. Nếu bỏ bất kỳ công đoạn nào trong hai công đoạn này thì phép thử đều không thành công. Do đó, đây là một biểu hiện cho ta thấy phải sử dụng quy tắc nhân để tính được số cách chọn, hay số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = C_{11}^2 C_4^1 = 55 \cdot 4 = 220$.
Vậy xác suất của A là:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{220}{455} = 0,4835.$$

b) Tương tự, gọi B là biến cố *"cả 3 sản phẩm đều tốt"*. Ta có

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_{11}^3}{C_{15}^3} = \frac{165}{455} = 0,3626.$$

c) Gọi C là biến cố *"có nhiều nhất một sản phẩm phế phẩm"*. Ở đây chúng ta phân tích việc có nhiều nhất một phế phẩm tương đương với tình huống trong 3 sản phẩm lấy ra có 0 hoặc 1 phế phẩm. Như vậy công việc C có thể thực hiện bằng 2 phương án khác nhau.
Phương án I là lấy 3 sản phẩm mà không có phế phẩm nào, số khả năng thuận lợi là $C_{11}^3 = 165$.
Phương án II là lấy 3 sản phẩm thì có 1 phế phẩm và 2 chính phẩm, số khả năng thuận lợi là $C_4^1.C_{11}^2 = 220$.

Hai phương án này là hai cách khác nhau để thực hiện công việc C, nếu bỏ một trong hai phương án thì phép thử vẫn thành công. Do đó, đây là một biểu hiện cho ta thấy cần sử dụng quy tắc cộng để tính được số cách chọn, hay số khả năng thuận lợi cho biến cố C là $m = 165 + 220 = 385$. Vậy xác suất của C là:

$$\mathbb{P}(C) = \frac{m}{n} = \frac{385}{455} = 0,8462.$$

1.2 Định nghĩa về xác suất

Định nghĩa theo tần suất

☞ Có nhiều phép thử không thuộc về mô hình cổ điển. Chẳng hạn ta chọn ngẫu nhiên một sinh viên và quan tâm đến chiều cao của sinh viên được chọn. Tương ứng không gian mẫu là tập số thực $\mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ có vô hạn phần tử nên phép thử này không thuộc về mô hình cổ điển.

☞ Chúng ta có thể xác định giá trị xác suất của một biến cố A thông qua việc theo dõi tần suất xuất hiện của biến cố đó. Cụ thể hơn ta theo dõi số lần xuất hiện của A trong một số lớn lần xuất hiện phép thử.

☞ Ký hiệu n là số lần thử và m là số lần xuất hiện A trong n lần thử đó. Ta gọi $f = \dfrac{m}{n}$ là tần suất xuất hiện của A.

☞ Quan sát thực tế người ta nhận thấy rằng nếu n tăng thì giá trị của f thay đổi không nhiều. Có thể nói giá trị của f dần ổn định và ta nhìn nhận về việc tồn tại một giới hạn của f và gọi giới hạn này là xác suất của A.

Định nghĩa 1.8

Giả sử khi thực hiện một phép thử n lần một cách độc lập, thì có m_A lần xuất hiện biến cố A. Khi đó tỷ số

$$f_n(A) = \frac{m_A}{n}$$

được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n lần thử. Xác suất của biến cố A được xác định là giới hạn của tần suất khi số phép thử tăng lên vô hạn, tức là

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A). \tag{1.5}$$

1.2 Định nghĩa về xác suất

Định nghĩa theo tần suất

Ví dụ 1.30

Để xác định xác suất bắn trúng đích của một xạ thủ chúng ta yêu cầu anh ta bắn kiểm tra nhiều lần mỗi lần bắn $n = 150$ viên. Nếu số đạn trúng đích ổn định ở cỡ $m = 125$ viên mỗi lần thì ta có thể coi tỷ số $\frac{125}{150}$ là giới hạn của tần suất. Tương ứng, ta nói rằng *"xác suất bắn trúng đích của xạ thủ là* $\frac{125}{150} = 0,8333 = 83,33\%.$*"*.

Ví dụ 1.31

Một hãng hàng không tuyên bố với công chúng là *"qua thống kê cho thấy, xác suất rơi máy bay của hãng bằng* 0%*"*. Lời tuyên bố này là chấp nhận được vì có thể qua khảo sát thực tế, các chuyến bay đã diễn ra của hãng thì chưa thấy chuyến nào có sự cố bị rơi, tần suất của việc rơi máy bay đến thời điểm quan sát bằng 0. Tuy nhiên, người dùng không thể hiểu xác suất đó là tuyệt đối vì đây chỉ là cách coi tần suất là xác suất khi số phép thử khá lớn, và số phép thử khá lớn bao nhiêu cũng chưa phải là tất cả, các chuyến bay vẫn tiếp tục.

1.2 Định nghĩa về xác suất

Định nghĩa hình học

Đối với một số phép thử ta có thể mô tả không gian mẫu Ω như một tập hợp trong mặt phẳng hoặc trong không gian. Tương ứng một biến cố A của phép thử là một tập con của Ω. Ta sử dụng một số đo hình học nào đấy $m(\Omega), m(A)$ cho Ω và A và định nghĩa $\mathbb{P}(A)$ là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Ví dụ

Có 2 điệp viên hẹn gặp nhau tại một địa điểm trong công viên. Họ giao ước rằng mỗi người trong số họ phải đến điểm gặp mặt trong khoảng thời gian từ 7h đến 8h. Khi đến điểm hẹn thì chỉ chờ người còn lại không quá 10 phút. Hãy tính xác suất để cuộc hẹn thành công.

Giải. Để thuận tiện, khoảng thời gian từ 7h đến 8h được đồng nhất với khoảng $[0, 60]$ (tính theo phút). Ta ký hiệu một kết quả của phép thử là (x, y) trong đó x, y tương ứng là thời điểm người thứ nhất và người thứ 2 tới điểm hẹn. Như vậy ta nhìn nhận Ω là hình vuông

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 60\}.$$

Gọi A là biến cố chỉ sự kiện "cuộc hẹn thành công". Biến cố A được biểu diễn bằng hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (hình vẽ). Như vậy ta xác định được $\mathbb{P}(A)$ bằng tỷ số của số đo diện tích

$$\mathbb{P}(A) = \frac{s(A)}{s(\Omega)} = \frac{3600 - 2500}{3600} = \frac{11}{36} =\approx 0,3056.$$

1.2 Định nghĩa về xác suất

Tiên đề về xác suất

Các định nghĩa khác nhau của xác suất giúp cho chúng ta tiếp cận thuận lợi việc tính toán xác suất trong các tình huống thực tế. Điểm chung các định nghĩa này là chúng đảm bảo các tiên đề sau đây về xác suất.

1. Nếu A là một biến cố thì $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Nếu $A_1, A_2, \ldots$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$$

Từ các tiên đề trên ta chứng minh được các công thức

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Nếu A là một biến cố thì $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

Chứng minh:

1. Sử dụng tiên đề 3 với $A_k = \varnothing, k = 1, 2, \ldots$ ta thu được

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + \ldots$$

Đẳng thức trên không thể xảy ra với $\mathbb{P}(\varnothing) > 0$. Như vậy $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2. Sử dụng tiên đề 3 với $A_1 = A$, $A_2 = \overline{A}$, $A_k = \varnothing, k = 3, 4, \ldots$ ta thu được

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A)$$

Do $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ nên ta có $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. Do $\mathbb{P}(\overline{A}) \geqslant 0$ nên từ 2. ta suy ra $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$. Kết hợp với tiên đề 1 ta có $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.