CHƯƠNG: HÀM NHIỀU BIẾN

Nguyễn Văn Kiên

Bộ môn Toán Giải tích
Trường Đại học Giao thông vận tải

Ngày 1 tháng 3 năm 2022

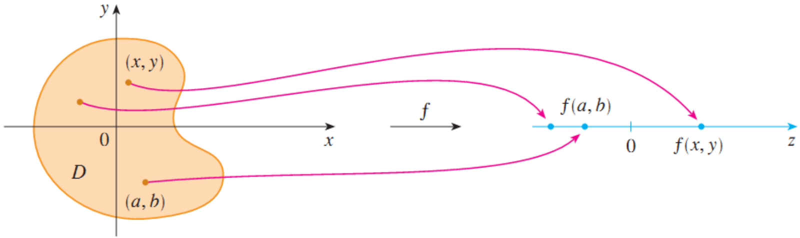
Hàm nhiều biến

Trong chương này chúng ta xét:

1. Giới hạn và liên tục của hàm nhiều biến
2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần cấp một của hàm nhiều biến
3. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao của hàm nhiều biến
4. Đạo hàm của hàm hợp, hàm ẩn
5. Cực trị của hàm nhiều biến

Khái niệm hàm nhiều biến

Khái niệm. Cho D là một miền trong mặt phẳng Oxy, nếu với mỗi điểm $(x, y) \in D$ tồn tại duy nhất một giá trị $f(x, y) \in \mathbb{R}$ ta nói $f(x, y)$ là hàm của hai biến x, y, D được gọi là miền xác định của hàm f.



Một cách tương tự ta có khái niệm của hàm nhiều biến hơn.

Khi cho hàm số $f(x, y)$ dưới dạng một biểu thức đại số mà không giải thích gì thêm về miền xác định ta hiểu miền xác định là tập hợp các cặp số (x, y) sao cho biểu thức có nghĩa.

Ví dụ.

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ xác định trên miền $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- $f(x, y) = \ln(xy)$ có miền xác định là $\{(x, y) : xy > 0\}$.
- $f(x, y, z) = x(1 + y)^z$ xác định trên miền $\{(x, y, z) : y > -1\}$.

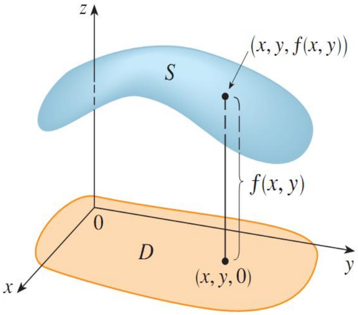
Ví dụ. Cho $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$. Tính $f(\sqrt{3}, 1)$, $f(1, \sqrt{3})$, $f(x + y, x - y)$.

Giải. Ta có

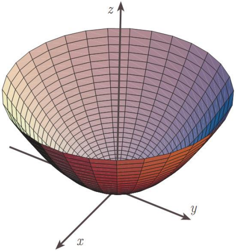
- $f(\sqrt{3}, 1) = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$
- $f(1, \sqrt{3}) = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$
- $f(x + y, x - y) = \arctan \frac{x+y}{x-y}$.

Đồ thị của hàm hai biến

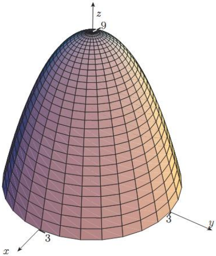
Cho $z = f(x, y)$ là hàm hai biến xác định trên D. Đồ thị của hàm số $z = f(x, y)$ là tập hợp các điểm trong không gian có tọa độ $(x; y; f(x, y))$ trong đó $(x; y)$ thuộc miền xác định D của f.



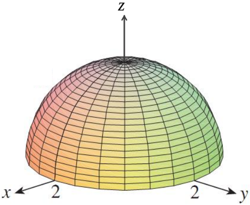
(a) Mặt Paraboloid $z = x^2 + y^2$



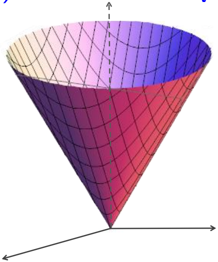
(b) Mặt Paraboloid $z = 9 - x^2 - y^2$



(c) Mặt cầu $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



(d) Mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Định nghĩa. Hàm $f(x, y)$ được gọi là có giới hạn là A khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ nếu $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $(x, y) \in D$ và $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ thì $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Khi đó ta viết

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A.$$

Định nghĩa. Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên tập D và $(x_0, y_0) \in D$. Hàm số $f(x, y)$ được gọi là liên tục tại (x_0, y_0) nếu

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Hàm số $f(x, y)$ được gọi là liên tục trên miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm trên D.

Đạo hàm riêng cấp 1

Định nghĩa. Cho $f(x,y)$ xác định trong miền D và $(x_0,y_0) \in D$. Cho Δx đủ bé sao cho $(x_0+\Delta x, y_0) \in D$. Giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \quad \left(= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \right)$$

được gọi là đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo biến x tại (x_0,y_0) và kí hiệu là

$$f'_x(x_0,y_0) \qquad \text{hoặc} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Tương tự, đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo biến y

$$f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng $f'_x(1,2)$ và $f'_y(1,2)$ của $f(x,y) = x^2y^3$.

Giải. Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} f'_x(1,2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x, 2) - f(1,2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 2^3 - 1^2 \cdot 2^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8(2\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (16 + 8\Delta x) = 16 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} f'_y(1,2) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(1, 2+\Delta y) - f(1,2)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1^2 \cdot (2+\Delta y)^3 - 1^2 \cdot 2^3}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{12\Delta y + 6\Delta y^2 + \Delta y^3}{\Delta y} = 12. \end{aligned}$$

Quy tắc tìm đạo hàm riêng

- Cho $f(x, y)$, để tính f'_x ta coi y là hằng số và tính như hàm một biến với biến x, tương tự để tính f'_y ta coi x là hằng số và tính như hàm một biến đối với biến y.
- Hàm số của n biến có n đạo hàm riêng cấp 1.
- Đạo hàm của một số hàm cơ bản

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(a^x)' = a^x \ln a.$
4. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng f'_x, f'_y, và $f'_x(1,2)$ của hàm số

$$f(x,y) = x^2y^3.$$

Giải. Ta có

$$f'_x = \left(x^2y^3\right)'_x = y^3(x^2)'_x = 2xy^3, \qquad f'_x(1,2) = 2\cdot 1\cdot 2^3 = 16$$
$$f'_y = \left(x^2y^3\right)'_y = x^2\left(y^3\right)'_y = 3x^2y^2$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng f'_x, f'_y của hàm số

$$f(x,y) = \ln(e^x + \sin y)$$

Giải. Ta có

$$f'_x = \frac{(e^x + \sin y)'_x}{e^x + \sin y} = \frac{e^x}{e^x + \sin y}$$
$$f'_y = \frac{(e^x + \sin y)'_y}{e^x + \sin y} = \frac{\cos y}{e^x + \sin y}.$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$.

Giải. Ta có

$$f'_x = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y^2}{x^2+y^2}.\frac{1}{y}.(x)'_x = \frac{y^2}{x^2+y^2}.\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$f'_y = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{y^2}{x^2+y^2}.x.\left(\frac{1}{y}\right)'_y = \frac{y^2}{x^2+y^2}.x.\frac{-1}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng cấp 1 của $g(x,y,z) = y^2x^z$.

Giải. Ta có

$$g'_x = y^2\left(x^z\right)'_x = y^2z.x^{z-1}, \qquad g'_y = x^z\left(y^2\right)'_y = 2yx^z$$

$$g'_z = y^2\left(x^z\right)'_z = y^2x^z\ln x.$$

Vi phân toàn phần cấp 1

Định nghĩa. Hàm $f(x,y)$ được gọi là khả vi tại điểm (x_0,y_0) nếu ta có

$$\begin{aligned}\Delta f := & f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\ &= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,\end{aligned}$$

trong đó $\varepsilon_1 \to 0$ và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$. Biểu thức

$$df(x_0,y_0) := f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$$

được gọi là vi phân toàn phần cấp 1 của $f(x,y)$ tại (x_0,y_0).
Đặt $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ ta viết lại

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy.$$

Vi phân của hàm $f(x, y)$ tại điểm (x, y) bất kỳ ta viết

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Đôi khi ta viết ngắn gọn là

$$df = f'_x dx + f'_y dy.$$

Ví dụ. Tìm df của hàm số

$$f(x, y) = x\cos(xy).$$

Giải. Ta có các đạo hàm riêng của hàm số là

$$f'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy), \qquad f'_y = -x^2\sin(xy).$$

Vậy

$$df = (\cos(xy) - xy\sin(xy))dx - x^2\sin(xy)dy.$$

Ví dụ. Tìm df và $df(3,4)$ của hàm số $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Giải. Ta có

$$f(x,y) = \ln[(x^2+y^2)^{1/2}] = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 là

$$f'_x = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Vậy

$$df = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$$

và

$$df(3,4) = \frac{3}{25}dx + \frac{4}{25}dy.$$

Với hàm 3 biến $f(x, y, z)$ ta có

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz.$$

Ví dụ. Tìm vi phân toàn phần cấp 1 của

$$f(x, y, z) = x^2 e^{2y+3z}.$$

Giải. Hàm $f(x, y, z)$ là hàm số của ba biến số. Ta có

$$f'_x = 2xe^{2y+3z}, \quad f'_y = x^2 e^{2y+3z}(2y + 3z)'_y = 2x^2 e^{2y+3z}$$

và

$$f'_z = x^2 e^{2y+3z}(2y + 3z)'_z = 3x^2 e^{2y+3z}.$$

Vậy ta có

$$df = 2xe^{2y+3z}dx + 2x^2 e^{2y+3z}dy + 3x^2 e^{2y+3z}dz.$$

Ví dụ. Tìm vi phân toàn phần cấp 1 của $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Giải. Hàm $g(x,y,z)$ là hàm số của ba biến số. Ta viết lại

$$g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Khi đó nó có các đạo hàm riêng:

$$\begin{aligned} g'_x &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2+y^2+z^2)'_x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

và tương tự

$$g'_y = -y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}, \qquad g'_z = -z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Từ đó ta có vi phân toàn phần cấp 1

$$dg = -(xdx+ydy+zdz)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ứng dụng của vi phân để tính gần đúng

Ta có các công thức tính gần đúng

- Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) và Δx, Δy đủ bé ta có

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

- Đối với hàm 3 biến $f(x, y, x)$ ta có công thức

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$$
$$\approx f(x_0, y_0, z_0) + f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 là f'_x và f'_y. Khi đó các đạo hàm riêng cấp hai của $f(x, y)$ được định nghĩa là các đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm f'_x và f'_y. Ký hiệu

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := (f'_x)'_x, \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := (f'_x)'_y$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := (f'_y)'_x, \qquad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := (f'_y)'_y.$$

- Với hàm 3 biến $g(x, y, z)$ có 9 đạo hàm riêng cấp hai.
- Nếu hàm $f(x, y)$ tồn tại các đạo hàm riêng cấp hai f''_{xy} và f''_{yx} và các đạo hàm riêng này liên tục tại điểm (x, y) thì $f''_{xy} = f''_{yx}$.
- Các đạo hàm riêng cấp cao hơn được định nghĩa tương tự.

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng cấp 2 của

$$f(x,y) = x^3\cos(2y).$$

Giải. Ta có

$$f'_x = 3x^2\cos(2y)$$

$$f'_y = -2x^3\sin(2y).$$

Từ đó ta có các đạo hàm riêng cấp 2 của $f(x,y)$ là

$$f''_{x^2} = \left(3x^2\cos(2y)\right)'_x = 6x\cos(2y)$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(3x^2\cos(2y)\right)'_y = -6x^2\sin(2y)$$

$$f''_{y^2} = \left(-2x^3\sin(2y)\right)'_y = -4x^3\cos(2y).$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm riêng cấp 2 của

$$f(x,y) = \arctan \frac{x}{y}.$$

Giải. Ta có

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad f'_y = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

đã tính ở ví dụ trên. Từ đó ta có các đạo hàm riêng cấp 2 của $f(x,y)$ là

$$f''_{x^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{-y(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{y^2} = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{x(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{(y)'_y(x^2+y^2) - y(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ví dụ. Tìm các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{y^2} và f''_{yz} của

$$f(x, y, z) = z^3 e^{x^2+y^2}.$$

Giải. Các đạo hàm riêng cấp 1 của $f(x, y, z)$ là

$$f'_x = z^3 e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)'_x = 2xz^3 e^{x^2+y^2}, \qquad f'_y = 2yz^3 e^{x^2+y^2}.$$

Khi đó

$$f''_{xy} = (2xz^3 e^{x^2+y^2})'_y = 2xz^3 e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)'_y = 4xyz^3 e^{x^2+y^2}$$
$$f''_{yz} = (2yz^3 e^{x^2+y^2})'_z = 6yz^2 e^{x^2+y^2}$$

và

$$f''_{y^2} = (2yz^3 e^{x^2+y^2})'_y = (2yz^3)'_y e^{x^2+y^2} + 2yz^3 (e^{x^2+y^2})'_y$$
$$= 2z^3 e^{x^2+y^2} + 4y^2 z^3 e^{x^2+y^2}.$$

Vi phân cấp cao của hàm nhiều biến

- Vi phân cấp 2 của hàm hai biến $f(x, y)$ được ký hiệu và cho bởi công thức dưới đây:

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{y^2} dy^2.$$

- Vi phân cấp n của hàm 2 biến $f(x, y)$

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f.$$

- Vi phân cấp hai của hàm 3 biến $f(x, y, z)$ cho bởi công thức:

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + f''_{y^2} dy^2 + f''_{z^2} dz^2 + 2f''_{xy} dxdy + 2f''_{xz} dxdz + 2f''_{yz} dydz.$$

Ví dụ. Tìm vi phân cấp 2 của $f(x,y) = \sin(xy)$

Giải. Ta có các đạo hàm riêng cấp 1

$$f'_x = (xy)'_x \cos(xy) = y\cos(xy)$$
$$f'_y = (xy)'_y \cos(xy) = x\cos(xy)$$

và các đạo hàm riêng cấp 2 là

$$f''_{x^2} = \big(y\cos(xy)\big)'_x = -y^2\sin(xy)$$
$$f''_{y^2} = \big(x\cos(xy)\big)'_y = -x^2\sin(xy)$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = \big(y\cos(xy)\big)'_y = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

Vậy theo công thức vi phân cấp 2 ta có:

$$d^2f = -y^2\sin(xy)dx^2 + 2\big[\cos(xy) - xy\sin(xy)\big]dxdy - x^2\sin(xy)dy^2.$$

Ví dụ. Tìm vi phân cấp 2 của $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

Giải. Ta có

$$f'_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad f'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

và các đạo hàm riêng cấp 2 là

$$f''_{x^2} = \frac{(x)'_x(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{y^2} = \frac{(y)'_y(x^2+y^2) - y(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{x(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Vậy theo công thức vi phân cấp 2 ta có:

$$d^2f = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx^2 - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}dxdy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy^2.$$

Đạo hàm của hàm hợp

• Trường hợp 1. Giả sử $f(u)$ là hàm của u và $u = u(x, y)$ là hàm của hai biến x, y. Khi đó hàm hợp

$$z(x, y) := f(u(x, y))$$

là hàm của hai biến x, y.

Ví dụ. Cho $f(u) = u^2$ và $u(x, y) = xe^y$. Khi đó ta có hàm hợp

$$z(x, y) := f(u(x, y)) = x^2 e^{2y}.$$

Ta có công thức đạo hàm riêng

$$\begin{cases} z'_x = f'(u)u'_x \\ z'_y = f'(u)u'_y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

• Trường hợp 2. Giả sử $f(x, y)$ là hàm của x, y và $x = x(t)$, $y = y(t)$ là các hàm của biến t. Khi đó hàm hợp

$$z(t) = f(x(t), y(t))$$

là hàm của biến t.

Ví dụ. Cho $f(x, y) = xy^2$ và $x(t) = e^t$, $y(t) = \sin(t)$. Khi đó ta có hàm hợp

$$z(t) := f(x(t), y(t)) = e^t \sin^2 t.$$

Ta có công thức đạo hàm

$$z'(t) = f'_x \cdot x'(t) + f'_y \cdot y'(t) \qquad \left(\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\right).$$

• Trường hợp 3. Giả sử $f(u,v)$ là hàm của hai biến u,v và $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ là hàm của hai biến x,y. Khi đó ta có hàm hợp

$$z(x,y) := f(u(x,y), v(x,y))$$

là hàm của hai biến độc lập x,y.

Ta có công thức tính các đạo hàm riêng z'_x và z'_y như sau:

$$\begin{cases} z'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x \\ z'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y. \end{cases} \text{hoặc} \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Ví dụ. Tìm đạo hàm $z'(t)$ của hàm số $z(t) = f(x(t), y(t))$ với

$$f(x, y) = x^2 + xy, \qquad x = \sin t, \qquad y = t^3.$$

Giải. Ta có

$$f'_x = 2x + y, \qquad f'_y = x, \qquad x'(t) = \cos t, \qquad y'(t) = 3t^2.$$

Do đó đạo hàm của $z(t)$ là

$$z'(t) = f'_x x'(t) + f'_y y'(t) = (2\sin t + t^3)\cos t + 3t^2 \sin t.$$

Cách khác: Ta thay $x = \sin t,\ y = t^3$ vào hàm số $f(x, y)$ để nhận được

$$z(t) = \sin^2 t + t^3 \sin t.$$

Từ đó ta có

$$z'(t) = 2\sin t\cos t + t^3\cos t + 3t^2\sin t$$

Ví dụ. Cho $z = f(u(x,y), v(x,y))$ là hàm của hai biến x, y, trong đó

$$f(u,v) = \ln(u^2+v^2), \qquad u = xy, \qquad v = \frac{x}{y}.$$

Tính các đạo hàm riêng z'_x và z'_y.

Giải. Ta có các đạo hàm riêng liên quan:

$$f'_u = \frac{2u}{u^2+v^2}, \qquad f'_v = \frac{2v}{u^2+v^2}$$

và

$$u'_x = y, \qquad u'_y = x, \qquad v'_x = \frac{1}{y}, \qquad v'_y = \frac{-x}{y^2}.$$

Thay vào công thức ta được

$$z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = \frac{2xy}{(xy)^2 + \frac{x^2}{y^2}}.y + \frac{2\frac{x}{y}}{(xy)^2+\frac{x^2}{y^2}}.\frac{1}{y} = \frac{2}{x}$$

$$z'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = \frac{2xy}{(xy)^2 + \frac{x^2}{y^2}}.x + \frac{2\frac{x}{y}}{(xy)^2+\frac{x^2}{y^2}}.\frac{-x}{y^2} = \frac{2y^4-2}{y(y^4+1)}.$$

Hàm ẩn

Trường hợp 1. Hàm ẩn $y = y(x)$. Giả sử rằng y là hàm của biến x trong miền D nào đó nhưng ta không biết dạng tường minh của hàm này mà ta chỉ biết giữa x và y có mối liên hệ qua $F(x, y) = 0$. Khi đó ta nói $F(x, y) = 0$ xác định cho ta một hàm số một biến $y = y(x)$.

▶ Như vậy hàm cho dưới dạng tường là hàm cho bởi một biểu thức của biến độc lập, trong khi hàm ẩn được cho bởi một phương trình của biến độc lập và biến phụ thuộc.

Hàm cho dưới dạng tường	Hàm ẩn
$y = x^2 + x + 1$	$x^2 + y^2 = 15$
$y = \sin(x + 3)$	$xy + 1 = e^{x+y}$

Đạo hàm của hàm ẩn

Để tìm đạo hàm $y'(x)$ của hàm ẩn $y(x)$ xác định từ phương trình

$$F(x, y) = 0$$

ta có "hai" cách sau:

1. Đạo hàm hai vế của phương trình (theo x) $F(x, y) = 0$ với y là hàm của x.
2. Dùng công thức

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Ví dụ. Cho $y = y(x)$ là hàm ẩn xác định từ phương trình $x^2 + y^2 = 25$. Tính $y'(x)$.

Giải. Đạo hàm hai vế của phương trình ta có

$$(x^2 + y^2)' = (25)'$$
$$(x^2)' + (y^2)' = (25)'$$
$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

Từ đó ta nhận được

$$y \cdot y' = -x \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Cách khác. Trong ví dụ này ta có $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ và

$$F'_x = 2x, \qquad F'_y = 2y.$$

Từ đó ta nhận được

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x}{y}.$$

Ví dụ. Tính $y(0)$ và $y'(x)$ biết $y = y(x)$ xác định từ phương trình

$$xe^y + ye^x = 1.$$

Giải. Khi $x = 0$ ta có

$$0 \cdot e^y + y \cdot e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Suy ra $y(0) = 1$. Đặt

$$F(x, y) = xe^y + ye^x - 1.$$

Ta có

$$F'_x = e^y + ye^x$$

$$F'_y = xe^y + e^x.$$

Vậy

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}.$$

Ví dụ. Tính đạo hàm $y'(x)$ biết $y = y(x)$ xác định từ phương trình

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}.$$

Giải. Đặt

$$F(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\frac{y}{x}.$$

Khi đó ta có

$$F'_x = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$F'_y = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)'_y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2}.\frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Vậy

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Trường hợp 2. Hàm ẩn $z = z(x, y)$. Giả sử z là hàm của hai biến x và y nhưng ta không biết công thức tường minh mà chỉ biết giữa x, y, và z có mối liên hệ qua phương trình $F(x, y, z) = 0$. Khi đó ta nói $z(x, y)$ là hàm ẩn xác định từ $F(x, y, z) = 0$. Các đạo hàm riêng của hàm $z(x, y)$ được tính "theo một trong hai cách sau"

1. Để tìm z'_x ta đạo hàm hai vế của phương trình $F(x, y, z) = 0$ theo biến x với z là hàm của x và y là hằng số. Tương tự để tính z'_y ta đạo hàm hai vế của $F(x, y, z) = 0$ theo y với z là hàm của y và x là hằng số
2. Sử dụng công thức

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Ví dụ. Tìm vi phân của hàm ẩn $z(x, y)$ biết $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình

$$x + y^3 + z^2 = e^z.$$

Giải. Đặt

$$F(x, y, z) = x + y^3 + z^2 - e^z.$$

Khi đó ta có các đạo hàm riêng cấp 1 của $z(x, y)$ là

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{2z - e^z} = \frac{1}{e^z - 2z}$$

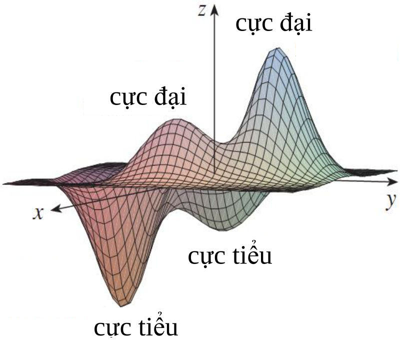
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3y^2}{2z - e^z} = \frac{3y^2}{e^z - 2z}.$$

Vậy

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{dx}{e^z - 2z} + \frac{3y^2 dy}{e^z - 2z}.$$

Cực trị của hàm nhiều biến

- Hàm $f(x, y)$ đạt cực tiểu tại (x_0, y_0) nếu $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ khi (x, y) gần (x_0, y_0). Giá trị $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực tiểu.
- Hàm $f(x, y)$ đạt cực đại (x_0, y_0) nếu $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ khi (x, y) gần (x_0, y_0). Giá trị $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị cực đại.



Tính chất. Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0, y_0) và các đạo hàm riêng của f tại điểm này tồn tại thì $f'_x(x_0, y_0) = 0$ và $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Định nghĩa. Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm tới hạn (hay điểm dừng) của hàm khả vi $f(x, y)$ nếu

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Ví dụ. Tìm các điểm tới hạn của hàm số

$$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2.$$

Giải. Điểm tới hạn của $f(x, y)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Như vậy hàm số đã cho chỉ có một điểm tới hạn (điểm dừng) là $(2, 0)$.

Các bước để tìm cực trị của hàm 2 biến $f(x, y)$

1. Giải hệ sau để tìm các điểm tới hạn:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \to M(x_0, y_0).$$

2. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 và Δ

$$A = f''_{x^2}, \qquad B = f''_{xy}, \qquad C = f''_{y^2}, \qquad \Delta = B^2 - AC.$$

3. Xét tại điểm M
   - Nếu $\Delta < 0$ và $A > 0$ thì $M(x_0, y_0)$ là cực tiểu
   - Nếu $\Delta < 0$ và $A < 0$ thì $M(x_0, y_0)$ là cực đại
   - Nếu $\Delta > 0$ thì $M(x_0, y_0)$ không là cực trị

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 2y + 2$$

Giải. • Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ta được điểm dừng là $M(2,1)$.

• Các đạo hàm riêng cấp 2 là

$$A = f''_{x^2} = 2, \qquad C = f''_{y^2} = 2$$

$$B = f''_{xy} = 0, \qquad \Delta = B^2 - AC = 0 - 2.2 = -4$$

• Tại $M(2,1)$ ta có $\Delta = -4 < 0$ và $A > 0$ nên $M(2,1)$ là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu là $f(2,1) = 1$

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = xy - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Giải. • Điểm dừng của hàm số là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - \frac{1}{y^2} = 0. \end{cases} \Rightarrow y + y^4 = 0 \Rightarrow \; y = -1.$$

Ta được điểm dừng là $M(1,-1)$.

• Các đạo hàm riêng cấp 2 của $f(x,y)$:

$$A = f''_{x^2} = -\frac{2}{x^3}, \qquad B = f''_{xy} = 1, \qquad C = f''_{y^2} = \frac{2}{y^3}.$$

Khi đó

$$\Delta = B^2 - AC = 1 + \frac{4}{x^3y^3}.$$

• Tại $M(1,-1)$ thì $\Delta = -3,\; A = -2$ suy ra $M(1,-1)$ là điểm cực đại và giá trị cực đại là $f(1,-1) = -3$.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$

Giải. • Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 15y = 0 \\ 3y^2 - 15x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5y \\ y^2 = 5x \end{cases} \Rightarrow y^4 = 5^3 y.$$

Ta được các điểm dừng là

$$M_1(0, 0), \qquad M_2(5, 5).$$

• Các đạo hàm riêng cấp 2 là

$$A = f''_{x^2} = 6x, \qquad C = f''_{y^2} = 6y$$

$$B = f''_{xy} = -15, \qquad \Delta = B^2 - AC = 15^2 - 36xy$$

• Tại $M_1(0, 0)$ ta có $\Delta = 15^2 > 0$ nên M_1 không là cực trị.

Tại $M_2(5, 5)$ ta có $\Delta = 15^2 - 36 \cdot 25 < 0$, $A = 30 > 0$ nên M_2 là điểm cực tiểu và giá trị cực tiểu là $f(5, 5) = -125$.

HẾT