基于有限差分方法的雪球式期权产品定价研究

□ 许子贤,吕昭河

(云南大学 经济学院,云南 昆明 650091)

摘 要: 本文针对雪球式期权的内在结构,将其分解为多个更易进行定价的不同期权,采用PDE和Black-Scholes模型对各期权结构进行求解,通过价格累加以实现雪球式期权的定价。为验证所提思路的可行性,选择具有不同波动率(20.81%~44.83%)的股票,构建不同合约期限和敲出水平的雪球期权合约,将所计算得到的票息与市场报价进行对比分析。结果表明,本文所述方法基本能够反映各标的期权价格,所计算得到的票息与市场报价较为接近,因此,可认为所述方法是可行有效的。

关键词: 雪球式期权;定价;PDE;Black-Scholes模型

中图分类号: F830.91 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-0714(2023)006-0121-04

Finite Difference Method for Pricing Snowball Structured Option Products

XU Zi-xuan, LV Zhao-he

(School of Economics, Yunnan University, 650091, Yunnan, Kunming, China)

Abstract: The option market develops from standard option to exotic option, pricing exotic option is becoming more and more important, and confronted with great change. The snowball structured option is broken up into different options, the prices of those different options are calculated based on partial differential equation (PDE) and Black-Scholes model. The sum up of those options reflect the price of snowball structured option. To verify the reasonability and feasibility of the mentioned method above, 15 stocks with different volatilities (ranging from 20.81% to 44.83) are selected to snowball structured option products, whcih have different contract periods, knock in and knock out level. The calculated coupons are also in contrast to the market prices. Results show that the prososed method can be used for pricing different snowball structured option products, the calcualted coupons are closed to the market prices. Therefore, the prososed method can be regarded as an effective way to price the snowball structured option.

Keywords: Snowball Structured Option; Pricing; PDE; Black-Scholes Model

一、引言

随着衍生品市场日趋成熟,期权被视为一种重要且基础的衍生品工具,其防范风险、价值发现和投资属性等功能不断被挖掘并广泛运用[1]。在竞争激烈的期权市场环境下,期权的发行正由标准期权向奇异期权转变;而在众多奇异期权中,雪球式期权在近年来尤为受捧[2]。雪球式期权通过构建不同的收益架构满足不同的投资需求,其结构变得更为复杂,同时,也面临着如何准确确定其价格的巨大挑战。

雪球式期权定价目前常采用Black-Scholes模型、二叉树法等方法实现,其中Black-Scholes 模型被运用得尤为广泛[3]。

为兼顾计算效率和稳定性,本文在针对雪球式期权定价过程中,将雪球期权结构进行分解与复制成更容易求解的期权结构,采用有限差分法对各期权结构进行求解,进而累加各期权结构价格,实现对雪球式期权的定价。

二、雪球式期权结构分解与复制

雪球式期权属于奇异期权,其定价基本假设和定价逻辑均能够在Black-Scholes期权定价模型中得到解释[4]。在Black-Scholes期权定价模型框架下,假如标的在t时刻的价格为P,相应标的期权价格则可视为$V(P,t)$,则雪球式期权价格满足偏微分方程$\frac{\partial V}{\partial t}+rP\frac{\partial V}{\partial P}+\frac{1}{2}\sigma^2P^2\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}-rV=0$,式中∂为标的历史价格波动率,r为无风险利率[5]。由于$V(P,t)$可以表示为不同的投资组合,通过设定不同的边界,可以求解不同期权价格。

1.雪球式期权结构分解

雪球式期权本质是多个障碍期权的合体,根据挂钩标的当日收盘价格在任意观察日是否突破所设的障碍价格界限,可以分为5种情景;而这5种情景根据合约是否发生敲入或敲出可划分为敲出、没敲入没敲出、敲入和没敲出三种情景;而根据盈亏情况可归纳为获利、保本和亏损三种情景。敲入、没敲入没敲出、敲入没敲出三种情景符合相互独立、完全穷尽的Mutually Exclusive Collectively Exhaustive原则,因此,可以通过这三个情景的盈亏情况进行各自定价,进而对各情景进行加和得到所挂钩标的雪球产品的定价。

2.雪球式期权结构复制

根据期权合约的是否敲入或敲出,可以通过复制相应的结构以实现雪球式期权的定价。

①敲出情景。在任一敲出观察日中,敲出情景下挂钩标的当日收盘价格高于敲出观察障碍价格界限(L_h),即不考虑之前是否发生挂钩标的当日收盘价格低于敲入观察障碍价格界限(L_l)的情况。该情景的支付可以通过上涨生效触碰(OTU)期权进行复制,由于敲出观察通常是用一个月的间隔进行观察是否敲出,其障碍是离散的,其在不同敲出观察日发生敲出获得

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的返还收益是各异的。敲出情景下的支付(V_1)计算公式为:$V_1 = OTU[R=(\frac{c\%}{12},\frac{2c\%}{12},\frac{3c\%}{12},\cdots,\frac{nc\%}{12})]$);其中c%表示挂钩标的年化收益率,n表示挂钩标的雪球式期权合约的期限,其单位为月。

②没敲入没敲出情景。在任意敲出或敲入观察日中,挂钩标的当日收盘价格不高于L_h或低于L_l。该情景的支付可通过双边失效触碰(DNT)期权进行复制,其支付(V_2)计算公式为:$V_2 = DNT(R=\frac{n}{12}c\%)$。

③敲入没敲出情景。敲入没敲出情景的支付本质是一个卖出本金为$\frac{1}{s_0}$(其中s_0为挂钩标的期初价格)、行权价格$K = s_0$的看跌期权,其收益率为$\frac{1}{s_0}\min(K - s_T, 0)$,其中$s_T$为期权合约到期日当日收盘价。敲入没敲出情景的支付(V_3)可通过上涨失效看跌障碍(UOP)期权和双边失效看跌障碍(DKOP)期权进行复制,其计算公式为:$V_3 = \frac{1}{s_0}\times[DKOP(K = s_0, L_h, L_l) - UOP(K = s_0, L_h)]$,式中$\frac{1}{s_0}$为UOP期权和DKOP期权的本金。

三、雪球式期权定价理论

Black-Scholes期权定价偏微分方程属于复杂的变系数抛物线偏微分方程,只有通过设定不同的边界条件方可避免无数解的情况。基于以上分析可以得到,雪球式期权的定价($V_{snowball}$),可以表示为$V_{snowball} = V_1 + V_2 + V_3$,即通过分别求解$V_1$、$V_2$、$V_3$的数值即可得到相应的定价。本文采用偏微分方程有限差分方法对其进行求解。雪球式期权敲出观察并非连续的,而是在每个月特定日期进行观察,其上障碍是离散的。因此,基于偏微分方程有限差分(PDE)方法计算时,其上障碍边界需要在L_h的基础上进行相应的延展,本文将其延展至$S_{max} = 4\times\max(s_0, L_h)$。

1.不同敲出敲入情景下期权边界设定

①敲出情景。敲出情景下的雪球式期权本质是一个OTU期权,如果在任一敲出观察日都没有触发障碍,其将无法获得返还,即其终值条件为0(图1a)。由于该情景下仅敲出才可以获得相应返还,所以基于PDE方法构建的下边界返还边界$V(S_{max}, t)$设为0,其中t表示当前时间;根据其敲出日期,所获得的返还为$V(S_{max}, t) = R\times e^{-r(n-t)}$(图1a)。

②没敲入没敲出情景。没敲入没敲出情景的雪球式期权本质是DNT期权,即不触碰障碍需进行返还;与之互补的是触碰障碍需进行返还的双边触碰生效(DOT)期权。这两个期权之间存在现金平价关系,这一关系可以表示为:$V_{DOT} + V_{DNT} = R\times e^{n-t}$。这一关系通过PDE方法先求解DOT期权的返还$V_{DOT}$,进而通过现金平价关系求解DNT期权的返还$V_{DNT}$。基于PDE方法对DOT期权进行求解时,由于下障碍是连续观察的,因此,将下边界返还边界设为L_l,其他边界设定与敲出情景一致(图1b)。

③敲入没敲出情景。敲入没敲出情景的本质是UOP期权和DKOP期权组合而成。基于PDE方法对这两个期权进行求解时,其终值边界条件不再为0,其终值边界条件均为$V(S,T) = \frac{1}{s_0}(S - K)$(图1c、1d),其中$T = n$、S为合约到期日收盘价。

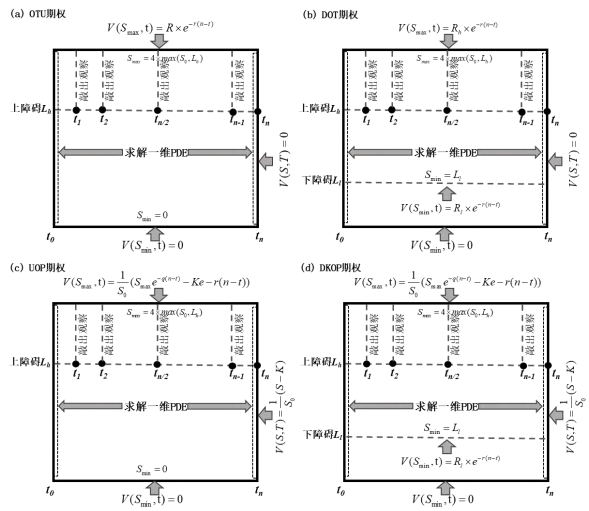

图1 基于PDE方法对不同期权进行求解的边界示意图

2.有限差分(PDE)方法

Black-Scholes期权定价偏微分方程属于复杂的变系数抛物线偏微分方程,只有通过设定不同的边界条件方可避免无数解的情况。基于前述的边界条件限制,本文采用PDE方法进行偏微分方程的求解。

PDE方法[6]的求解思路是将偏微分方程离散为不同的差分方程,进而通过不断迭代进行差分方程的求解。即将标的期权合约期限(n)和标的期权价格L_l和L_h之间的范围进行离散化处理,将n离散为步长$\Delta t = \frac{n-t}{M}$,将L_l和L_h之间的范围离散为步长为$\Delta l = \frac{L_h - L_l}{N}$,其中M、N分别表示合约期限和价格范围的间隔数,所分解处理的不同期权结构的Δt和Δl的取值可不同。

综合兼顾计算速度和稳定性,本文采用显性有限差分方法进行相关求解,即将Black-Scholes期权定价偏微分方程分别采用下述差分方式进行求解。

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_K^{m+1} - V_K^m}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial pi} = \frac{V_{K+1i}^{m+1} - V_{K-1i}^{m+1}}{2\Delta l_i}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial P_i^2} = \frac{V_{K+1i}^{m+1} - 2V_K^{m+1} + V_{K-1i}^{m+1}}{(\Delta l_i)^2}$$

式中,m=0,1,2,…,M;i表示第i个资产(即基于雪球式期权结构分解得到的期权结构),i=1,2,,3,4;K表示标的执行价。为保证显式偏微分方程的稳定性和收敛性,需令其同时满足$0<\Delta l_i<\frac{1}{|L_i|}$、$0<\Delta t<\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(\Delta l_i)^2}$这两个条件。其中$(L_i)^T = A^{-1}(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2)^T$。

四、实证分析

1.挂钩雪球式期权产品基本要素

雪球式期权产品基本要素通常包含交易结构类型、产品期限、敲入敲出价格及其观察日、票息等基本要素。本文按照产品要素设计,选择15只具有市场报价且不同波动率的个股,用于计算相应标的雪球期权合约的票息定价。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2.票息定价对比分析

为验证分解雪球式期权结构进而复制其他期权结构以实现雪球期权票息的可行性，本文选取了具有市场报价且历史波动率介于20%至45%之间的个股作为标的，分别构建相应标的雪球期权结构产品，并采用PDE方法计算各产品的票息定价。每个标的雪球期权均设置了6个月或12个月两种期限，同时，也设置了100%期初价格和103%期初价格两种敲出水平，以反映本文所述方法的可行性及稳健性。值得一提的是，为保证历史波动率数据具有足够的代表性，6个月或12个月两种期限产品均是采用起始日之前一年的历史收盘价进行波动率计算。

表1 个股标的雪球期权合约产品要素

雪球期权合约要素	15只个股标的的雪球凭证
期限	6个月、12个月两种期限（敲出可提前结束合约）
挂钩标的	SZ000002、SZ000063、SZ000166、SZ000333、SZ000400、SZ000425、SZ000537、SZ000538、SZ000555、SZ000718、SZ000719、SZ000728、SZ000731、SZ000762、SZ000776
敲出水平	期初价格×100%或103%两种水平
敲入水平	敲出价格×80%
起始日	2022年10月14日
到期日	2023年4月13日或2023年10月13日两个到期日
敲出事件（间隔一个月观察）	在任一敲出观察日，挂钩标的收盘价大于等于敲出水平
敲入事件（每日观察）	在任一敲入观察日，挂钩标的收盘价小于敲入水平
保证金	追保型并保证保证金不低于30%
其他要素	略

基于本文所构建的个股标的雪球期权票息定价体系，分别对各挂钩标的雪球期权产品进行了计算，并将所得到的结果与市场报价进行比较（表2及表3）。由于为市场报价中，未提供敲出水平为100%期初价格的报价，因此在此仅展示期权结构为敲出水平为100%期初价格的报价对比结果。

由表2和表3可以看出，本文所构建的雪球期权票息计算方法所得到的结果与市场报价较为接近，二者的差值的绝对值基本维持在小于5%的水平，所计算的票息总体上高于市场报价，但部分出现相反的情况，出现这种情况主要是由于本文在定价过程中，仅考虑了期权本身的理论价值，为从卖方角度考虑期权可以通过对冲等手段减少一定成本，因此造成本文所计算得到的期权票息定价整体偏高。此外，个别标的也会根据对冲的难易程度，相应地人为增减报价，以获得相应标的期权产品或增加标的安全垫。这一现象在吴龙舟等[7]的研究中，也出现类似的现象，即采用不同的方法其定价结果会产生0~5%左右的差异；而面向真实可交易的市场报价，其影响的因素会更多，因此认为这一差异是可以接受的。

整体上来看，当敲出水平越高时，所计算的票息与市场报价票息的差异随之增大，即计算票息比市场报价整体偏高。其中100%期初价格敲出、6个月期限的期权结构产品中，所计算得到的票息与市场报价差值绝对值小于3%的为12个标的；103%期初价格敲出、6个月期限的期权结构产品中，所计算得到的票息与市场报价差值绝对值小于3%的为9个标的，而小于5%的为13个标的。造成这种差异的原因可能考虑到敲出水平越高时，期权敲出的概率越小，反之敲入的概率越大；并且对冲操作难度有所下降，导致市场报价相对偏低。对比表2和表3可以看出，随着合约期限的增长，也出现类似的现象。

表2 期限为6个月各标的雪球期权票息定价与市场价格对比

序号	标的代码	波动率	期权结构：100%期初价格敲出、6个月期限			期权结构：103%期初价格敲出、6个月期限		
			本文计算票息	市场报价	与市场报价差值	本文计算票息	市场报价	与市场报价差值
1	SZ000166	20.81%	7.83%	7.70%	0.13%	4.42%	6.62%	−2.20%
2	SZ000538	22.56%	10.77%	12.17%	−1.40%	7.22%	10.88%	−3.66%
3	SZ000425	23.01%	11.57%	13.64%	−2.07%	8.02%	12.31%	−4.29%
4	SZ000002	26.51%	18.34%	20.42%	−2.08%	15.11%	19.14%	−4.04%
5	SZ000333	26.61%	18.55%	17.74%	0.81%	15.33%	16.40%	−1.07%
6	SZ000718	28.53%	22.55%	23.82%	−1.27%	19.76%	22.70%	−2.94%
7	SZ000728	29.80%	25.22%	29.70%	−4.47%	22.81%	29.05%	−6.24%
8	SZ000776	30.43%	26.56%	28.60%	−2.05%	24.10%	27.85%	−3.75%

↓接下表

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

↑接上表

9	SZ000063	31.18%	28.15%	25.99%	2.17%	26.23%	25.01%	1.22%
10	SZ000719	33.42%	32.87%	38.80%	−5.93%	31.90%	39.36%	−7.47%
11	SZ000555	34.80%	35.73%	33.85%	1.88%	35.39%	33.69%	1.70%
12	SZ000731	36.09%	38.36%	38.16%	0.20%	38.65%	38.62%	0.03%
13	SZ000400	39.98%	45.97%	45.75%	0.23%	49.21%	47.49%	1.72%
14	SZ000762	42.13%	50.00%	53.50%	−3.50%	53.08%	56.69%	−3.61%
15	SZ000537	44.83%	54.90%	53.69%	1.21%	59.02%	56.92%	2.10%

表3 期限为12个月各标的雪球期权票息定价与市场价格对比

序号	标的代码	波动率	期权结构：103%期初价格敲出、12个月期限		
			本文计算票息	市场报价	与市场报价差值
1	SZ000166	20.81%	9.00%	10.45%	−1.45%
2	SZ000538	22.56%	11.55%	14.90%	−3.35%
3	SZ000425	23.01%	12.30%	16.25%	−3.96%
4	SZ000002	26.51%	18.06%	21.93%	−3.86%
5	SZ000333	26.61%	18.22%	19.79%	−1.57%
6	SZ000718	28.53%	21.24%	24.47%	−3.23%
7	SZ000728	29.80%	23.14%	28.53%	−5.39%
8	SZ000776	30.43%	24.01%	27.80%	−3.79%
9	SZ000063	31.18%	25.13%	26.01%	−0.87%
10	SZ000719	33.42%	28.23%	34.31%	−6.08%
11	SZ000555	34.80%	30.06%	31.21%	−1.15%
12	SZ000731	36.09%	31.75%	33.91%	−2.16%
13	SZ000400	39.98%	37.70%	38.79%	−1.09%
14	SZ000762	42.13%	39.37%	43.66%	−4.30%
15	SZ000537	44.83%	42.73%	43.79%	−1.06%

结合不同期权结构下各标的的计算票息、市场报价与波动率之间的关系可以看出，随着波动率的增大，计算票息亦随之增大；而市场报价整体上随着波动率升高而提高，但不同标的出现一定波动情况，这也在一定程度上印证了面对复杂的市场报价，在针对特定标的可能会进行针对性的处理；此外，这也可能是由于所采用不同方法所带来的差异。

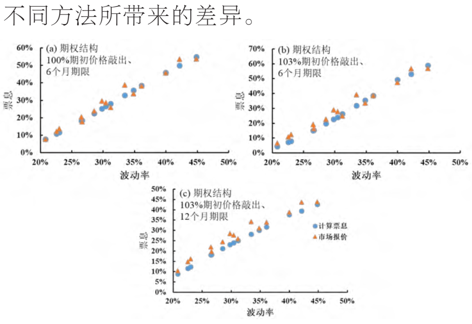

图2 不同期权结构下各标的的计算票息、市场报价与波动率之间的关系

五、结论

本文针对雪球式期权票息定价展开了研究和讨论，采用PDE方法和Black-Scholes期权定价模型进行定价求解，通过构建不同期权合约期限和敲出水平的雪球期权产品，对比市场相应标的的票息报价，验证了通过分解雪球式期权结构并将其复制成其他期权结构，可实现雪球期权票息的定价。通过结合PDE方法和Black-Scholes期权定价模型，可以较为快速地实现期权价格的计算，兼顾了准确性、稳定性和计算速度。实证分析结果显示，所构建的雪球期权票息计算方法所得到的结果与市场报价较为接近，但整体上较市场报价高，二者的差值的绝对值基本小于5%，对比前人研究结果，认为由于计算方法和产品对冲结构设置不同，导致出现这种差异是合理的。

参考文献：

[1]彭文，许栩．基于有限差分法的上证50ETF期权定价研究[J].时代金融，2020,(34)：62-65.

[2]王慎敏.雪球式期权买方收益分析[J].现代商贸工业.2021，36：163-166.

[3]于涛，韦才敏，李傲霜，等.基于分数布朗运动的亚式期权模糊定价研究[J]．汕头大学学报(自然科学版).2022,37(03):22-34.

[4]Aghdam Y E,Mesgarani H,Adl A,et al.The Convergence Investigation of a Numerical Scheme for the Tempered Fractional Black-Scholes Model Arising European Double Barrier Option[J]. Computational Economics, 2021:1-16.

[5]MacBeth J D,Merville L J.An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model [J].The journal of finance,1979,34(05):1173-1186.

[6]张琪，左平，郝永乐，等.美式多资产期权定价问题的有限差分法[J].吉林大学学报（理学版),2020,58(05):1113-1118.

[7]吴龙舟，温鲜，霍海峰，等.基于次分数Black-scholes模型的欧式障碍期权定价[J].桂林航天工业学院学报,2021,26(03):337-342.

作者简介：

许子贤(1998-)，男，汉族，浙江台州人，云南大学经济学院在读硕士。从事金融、环境经济与管理研究。

吕昭河(1956-)，男，云南昆明人，云南大学经济学院教授，从事人口经济理论、计量经济等研究。

收稿日期：2023-02-17

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net