RESOLUCIÓN PRIMER PARCIAL – ALGEBRA (LSI)	21/04/2022 - TEMA 1

1) Sabiendo que $p \wedge r$ es verdadera, determinar el valor de verdad de $(p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow \neg p)$. **(10 puntos)**

*Si $p \wedge r$ es V, entonces **p es V** y **r es V**, lo que implica que $\neg$**p es F**. Luego:*

$(p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow \neg p)$

$(\boldsymbol{V} \vee q) \Rightarrow (\boldsymbol{V} \Leftrightarrow \boldsymbol{F})$

$\boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{F}$

Por lo tanto, el valor de verdad de $(p \vee q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow \neg p)$ es Falso.

2) Dada la siguiente proposición: $p: \forall\, x\ \in\ Z: \exists\, y\ \in\ Z /\ y = 2x$

a) Determinar su valor de verdad y expresarla en lenguaje coloquial. **(20 puntos)**

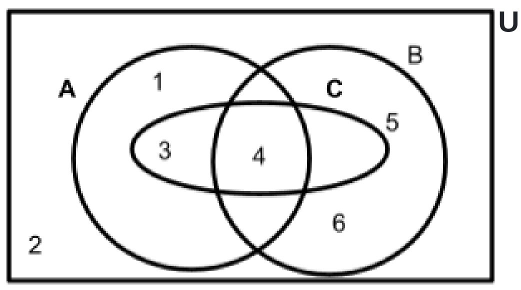
Para cada número entero, existe otro número entero que es igual a su doble → V

b) Hallar la negación, sin hacer uso del signo ¬, expresarlo en lenguaje simbólico y coloquial.

$\neg \boldsymbol{P(x,y)}: \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z} / \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}: \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{2x}$

Existe, al menos, un número entero, cuyo doble es distinto a cualquier otro entero.

3) Dado el siguiente diagrama de Venn:



a) Expresar U, A, B y C por extensión.

U= {1, 2, 3, 4, 5, 6}; A= {1, 3, 4};

B= {4, 5, 6}; C= {3, 4}

b) Hallar:

$i)\ (A \cup B) - C^c$ $\qquad$ $ii)\ (A - B)^c \cap C$

i) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{6}\}$

$\boldsymbol{C^C} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{6}\}$

$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{C^c} = \{\boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}\}$

ii) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}\}$

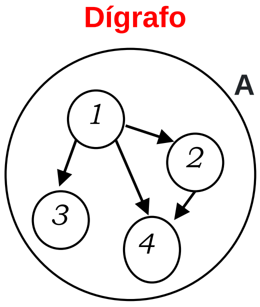
$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{C}} = \{\boldsymbol{2}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{6}\}$

$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{c}} \cap \boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{4}\}$

(20 puntos)

4) Sea $A = \{1,2,3,4\}, R \subset A^2$ tal que $R = \{(1,2), (1,3), (2,4), (1,4)\}$. Construir su dígrafo y su matriz de adyacencia. Analizar si R es transitiva y arreflexiva. Justificar la validez de tus afirmaciones.
(15 puntos)

Dígrafo



Matriz de adyacencia

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{4x4}}$$

Analicemos las propiedades:

- *Transitividad:*

$(1,2) \in R \wedge (2,4) \in R \Rightarrow (1,4) \in R \quad \boldsymbol{V}$

Luego, R es transitiva

- *Arreflexividad:*

$1 \in A \wedge (1,1) \notin R \quad \boldsymbol{V}$

$2 \in A \wedge (2,2) \notin R \quad \boldsymbol{V}$

$3 \in A \wedge (3,3) \notin R \quad \boldsymbol{V}$

$4 \in A \wedge (4,4) \notin R \quad \boldsymbol{V}$

Luego, R es arreflexiva

5) a) Sean $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2,3,4\}, R$ una relación definida de A en B de manera que $R=\{(a,1),(b,4),(c,1)\}$. Analizar si R es función y si es posible, clasificarla. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**

- *Existencia:*

$a \in A, \exists\, 1 \in B/(a,1) \in R$
$b \in A, \exists\, 4 \in B/(b,4) \in R$
$c \in A, \exists\, 1 \in B/(c,1) \in R$
Luego, R verifica la condición de existencia.

- *Unicidad:*

Como no hay pares ordenados que tengan la primera componente igual, podemos afirmar que R verifica la condición de unicidad.
Por lo tanto, R es una función.

- *Inyectividad*

$\exists\, a, \exists c \in A/a \neq c \wedge R(a)=R(c)=1$
Luego, R no es inyectiva.

- *Sobreyectividad*

$\exists\, 2 \in B/\forall x \in A: R(x) \neq 2 \quad o \quad \exists\, 3 \in B/\forall x \in A: R(x) \neq 3$
Luego, R no es sobreyectiva.

b) Sean las siguientes funciones, $f: R \to R/f(x)=2x-1$ y $g: R \to R/g(x)=x^2-1$. Definir gof, si es función. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**
En $f: R \to R/f(x)=2x-1$ *: Img f =R*
En $g: R \to R/g(x)=x^2-1$ *: Dom g= R*
Como $R \subset R$***, decimos que*** gof ***es una función.*** *Luego:*
$g \circ f: R \to R/\boldsymbol{g \circ f(x)} = g[f(x)] = g(2x-1) = (2x-1)^2-1 = [(2x)^2-2.2x.1+1^2]-1 = \boldsymbol{4x^2-4x}$

6) Demostrar por inducción la validez de la siguiente proposición:
$\forall\, n \in N: \sum_{i=1}^{n} 4i-2 = 2n^2$ **(15 puntos)**
Sea n=1.
$\sum_{i=1}^{1} 4i-2 = 4.1-2 = 2$
$2n^2 = 2.1^2 = 2$
$\therefore P(1)\ es\ V$

Supongamos que P(h) es V y probemos que P(h+1) es V también.
$P(h): \sum_{i=1}^{h} 4i-2 = 2h^2$ → *Hipótesis Inductiva (H.I)*
$P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} 4i-2 = 2(h+1)^2$ → *Tesis inductiva (T.I)*

Demostración:
$\sum_{i=1}^{h+1} 4i-2 = \sum_{i=1}^{h} 4i-2+[4.(h+1)-2] = 2h^2+[4h+4-2] = 2h^2+4h+2 = 2.(h^2+2h+1) = 2.(h+1)^2$

P(h+1) es V, podemos afirmar que P(h) es V. Luego, se verifica: $\forall\, n \in N: \sum_{i=1}^{n} 4i-2 = 2n^2$

RESOLUCIÓN PRIMER PARCIAL – ALGEBRA (LSI)	21/04/2022 - TEMA 2

1) Sabiendo que p ∧ q es verdadera, determinar el valor de verdad de$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \Rightarrow r)$. **(10 puntos)**

Si $p \wedge q$ es V, entonces p es V y q es V, lo que implica que ¬p y ¬q son F . Luego:

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \Rightarrow r)$

$(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{V}) \wedge (\boldsymbol{F} \Rightarrow r)$

$\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}$

$\boldsymbol{V}$

Por lo tanto, el valor de verdad de $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \Rightarrow r)$ es Verdadero.

2) Dada la siguiente proposición $p: \forall\, x\; \in\; Z: \exists\, y\; \in\; Z/\; x + y = 0$

a) Determinar su valor de verdad y expresarla en lenguaje coloquial. **(20 puntos)**

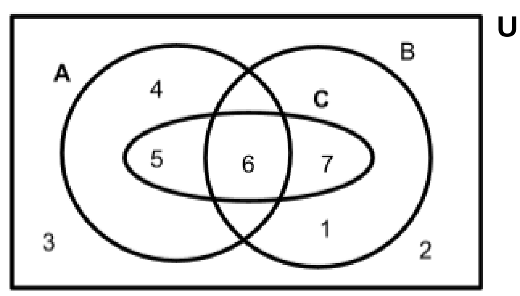
Para cada número entero, existe otro número entero, cuya suma es igual a 0 → V

b) Hallar la negación, sin hacer uso del signo ¬, expresarlo en lenguaje simbólico y coloquial.

$\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z} / \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$

Existe, al menos, un número entero, cuya suma con cualquier otro número entero, es distinta de 0.

3) Dado el siguiente diagrama de Venn:



a) Expresar U, A, B y C por extensión.

U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; A= {4, 5, 6};

B= {1, 6, 7}; C= {5, 6, 7}

b) Hallar:

$i)\ (A \cup C^c) - B$ $\quad$ $ii)\ (C - A)^c \cap B$

(20 puntos)

$i)\ \boldsymbol{C^C} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}\}$

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C^C} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{6}\}$

$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C^C}) - \mathbf{B} = \{\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}\}$

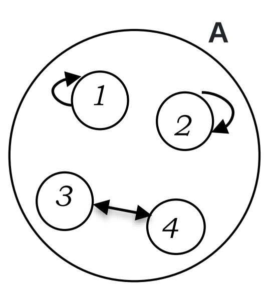
$ii)\ \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{7}\}$

$(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A})^{\boldsymbol{C}} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{6}\}$

$(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A})^{\boldsymbol{c}} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{6}\}$

4) Sea $A = \{1,2,3,4\}, R \subset A^2$ tal que $R = \{(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)\}$. Construir su dígrafo y su matriz de adyacencia. Analizar si R es transitiva y simétrica. Justificar la validez de tus afirmaciones.
(15 puntos)

Dígrafo



Matriz de adyacencia

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{4x4}}$$

Analicemos las propiedades:

- *Transitividad:*

$(3,4) \in R \wedge (4,3) \in R \Rightarrow (3,3) \in R$ $\quad \boldsymbol{F}$

Luego, R es no transitiva

- *Simetría:*

$(1,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$ $\quad \boldsymbol{V}$

$(2,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R$ $\quad \boldsymbol{V}$

$(3,4) \in R \Rightarrow (4,3) \in R$ $\quad \boldsymbol{V}$

$(4,3) \in R \Rightarrow (3,4) \in R$ $\quad \boldsymbol{V}$

Luego, R es simétrica

5) a) Sean $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2,3,4\}, R$ una relación definida de A en B de manera que $R = \{(a, 1), (b, 4), (a, 2), (c, 1)\}$. Analizar si R es función y si es posible, clasificarla. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**

- *Existencia:*

$a \in A, \exists\ 1 \in B / (a, 1) \in R$

$b \in A, \exists\ 4 \in B / (b, 4) \in R$

$c \in A, \exists\ 1 \in B / (c, 1) \in R$

Luego, R verifica la condición de existencia.

- *Unicidad:*

$(a, 1) \in R \wedge (a, 2) \in R \wedge 1 \neq 2$

Luego, R no verifica la condición de unicidad.

Por lo tanto, R no es una función y no puede ser clasificada.

b) Sean las siguientes funciones, $f: R \to R / f(x) = 3x + 1$ y $g: R \to R / g(x) = 2x^2$. Definir gof, si es función. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**

En $f: R \to R / f(x) = 3x + 1$ *: Img f =R*

En $g: R \to R / g(x) = 2x^2$ *: Dom g= R*

Como $\boldsymbol{R \subset R}$***, decimos que*** $\boldsymbol{gof}$ ***es una función.*** *Luego:*

$g \circ f: R \to R / \boldsymbol{g \circ f(x)} = g[f(x)] = g(3x + 1) = 2.(3x + 1)^2 = 2.[(3x)^2 + 2.3x.1 + 1^2] = 2.(9x^2 + 6x + 1) = \boldsymbol{18x^2 + 12x + 2}$

6) Demostrar por inducción la validez de la siguiente proposición:

$\forall\ n\ \in N: \sum_{i=1}^{n} 6i - 3\ =\ 3n^2$ **(15 puntos)**

Sea n=1.

$\sum_{i=1}^{1} 6i - 3 = 6.1 - 3 = 3$

$3n^2 = 3.1^2 = 3$

$\therefore P(1)\ es\ V$

Supongamos que P(h) es V y probemos que P(h+1) es V también.

$P(h): \sum_{i=1}^{h} 6i - 3 = 3h^2$ → *Hipótesis Inductiva (H.I)*

$P(h + 1): \sum_{i=1}^{h+1} 6i - 3 = 3(h + 1)^2$ → *Tesis inductiva (T.I)*

Demostración:

$\sum_{i=1}^{h+1} 6i - 3 = \sum_{i=1}^{h} 6i - 3 + [6.(h + 1) - 3] = 3h^2 + [6h + 6 - 3] = 3h^2 + 6h + 3 = 3.(h^2 + 2h + 1) = 3.(h + 1)^2$

P(h+1) es V, podemos afirmar que P(h) es V. Luego, se verifica: $\forall\ n\ \in N: \sum_{i=1}^{n} 6i - 3\ =\ 3n^2$

RESOLUCIÓN PRIMER PARCIAL – ALGEBRA (LSI)	21/04/2022 - TEMA 3

1) Sabiendo que p ∨ q es falso, determinar el valor de verdad de $(\neg p \vee q) \wedge (r \Rightarrow \neg q)$. **(10 puntos)**

Si $p \vee q$ *es F, entonces* p *es F y* q *es F, lo que implica que* $\neg p$ *y* $\neg q$ *son* V *. Luego:*

$(\neg p \vee q) \wedge (r \Rightarrow \neg q)$

$(\boldsymbol{V} \vee \boldsymbol{F}) \wedge (r \Rightarrow V)$

$\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}$

$\boldsymbol{V}$

Por lo tanto, el valor de verdad de $(\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{r} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q})$ ***es Verdadero.***

2) Dada la siguiente proposición $p: \exists\, x \in Z, \forall\, y \in Z /\, x + y = y$

a) Determinar su valor de verdad y expresarla en lenguaje coloquial. **(20 puntos)**

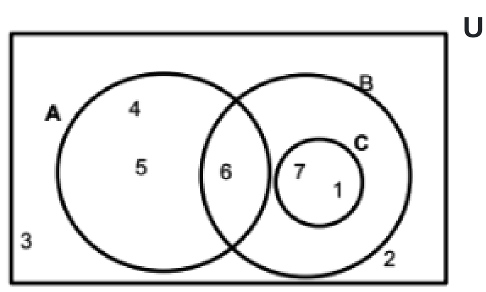
Existe, al menos, un número entero, cuya suma con cualquier otro número entero es igual a éste último → V

b) Hallar la negación, sin hacer uso del signo ¬, expresarlo en lenguaje simbólico y coloquial.

$\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}, \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}$

Para cada número entero, existe otro número entero, cuya suma es distinta de éste último.

3) Dado el siguiente diagrama de Venn:



a) Expresar U, A, B y C por extensión.

U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; A= {4, 5, 6};

B= {1, 6, 7}; C= {1, 7}

b) Hallar:

$i)\ (A \cup B) - C^c$ $\qquad ii)\ (B - A)^c \cap (C \cup B)$

(20 puntos)

i) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}\}$

$\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{C}} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$

$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{C}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{7}\}$

ii) $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{7}\}$

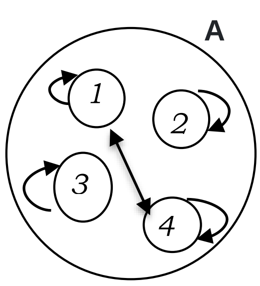
$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})^{\boldsymbol{C}} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{7}\}$

$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})^{c} \cap (\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B}) = \{\mathbf{6}\}$

4) Sea $A = \{1,2,3,4\}, R \subset A^2$ tal que $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,4), (4,1)\}$. Construir su dígrafo y su matriz de adyacencia. Analizar si R es simétrica y reflexiva. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(15 puntos)**

Dígrafo



Matriz de adyacencia

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{4x4}}$$

Analicemos las propiedades:

- *Reflexividad:*

$1 \in A \wedge (1,1) \in R \quad \boldsymbol{V}$

$2 \in A \wedge (2,2) \in R \quad \boldsymbol{V}$

$3 \in A \wedge (3,3) \in R \quad \boldsymbol{V}$

$4 \in A \wedge (4,4) \in R \quad \boldsymbol{V}$

Luego, R es reflexiva

- *Simetría:*

$(1,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$ $\boldsymbol{V}$
$(2,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R$ $\boldsymbol{V}$
$(3,3) \in R \Rightarrow (3,3) \in R$ $\boldsymbol{V}$
$(4,4) \in R \Rightarrow (4,4) \in R$ $\boldsymbol{V}$
$(1,4) \in R \Rightarrow (4,1) \in R$ $\boldsymbol{V}$
$(4,1) \in R \Rightarrow (1,4) \in R$ $\boldsymbol{V}$
Luego, R es simétrica

5) a) Sean $A = \{a,b,c\}, B = \{1,2,3\}, R$ una relación definida de A en B de manera que $R = \{(a,1),(b,3),(c,2)\}$. Analizar si R es función y si es posible, clasificarla. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**

- *Existencia:*

$a \in A, \exists\ 1 \in B/(a,1) \in R$
$b \in A, \exists\ 3 \in B/(b,3) \in R$
$c \in A, \exists\ 2 \in B/(c,2) \in R$
Luego, R verifica la condición de existencia.

- *Unicidad:*

Como no hay pares ordenados que tengan la primera componente igual, podemos afirmar que R verifica la condición de unicidad.
Por lo tanto, R es una función.

- *Inyectividad*

$a \neq b \Rightarrow R(a) = R(b)$ $\boldsymbol{V}$
$a \neq c \Rightarrow R(a) = R(c)$ $\boldsymbol{V}$
$b \neq c \Rightarrow R(b) = R(c)$ $\boldsymbol{V}$
Luego, R es inyectiva.

- *Sobreyectividad*

$1 \in B \wedge \exists a \in A: R(a) = 1$
$2 \in B \wedge \exists c \in A: R(c) = 2$
$3 \in B \wedge \exists b \in A: R(b) = 3$
Luego, R es sobreyectiva.
Por lo tanto, R es BIYECTIVA.

b) Sean las siguientes funciones, $f: R \to R/f(x) = 2x^2$ y $g: R \to R/g(x) = x + 4$. Definir fog, si es función. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**
En $g: R \to R/g(x) = x + 4$ *: Img g= R*
En $f: R \to R/f(x) = 2x^2$ *: Dom* $f = R$
Como $R \subset R$, decimos que fog es una función. *Luego:*
$f \circ g: R \to R/\boldsymbol{f \circ g(x)} = f[g(x)] = f(x+4) = 2.(x+4)^2 = 2.[(x)^2 + 2.x.4 + 4^2] = 2.(x^2 + 8x + 16) =$ $\boldsymbol{2x^2 + 16x + 32}$

6) Demostrar por inducción la validez de la siguiente proposición:
$\forall\, n \in N: \sum_{i=1}^{n} 8i - 4 = 4n^2$ **(15 puntos)**
Sea n=1.
$\sum_{i=1}^{1} 8i - 4 = 8.1 - 4 = 4$
$4n^2 = 4.1^2 = 4$
$\therefore P(1)\ es\ V$

Supongamos que P(h) es V y probemos que P(h+1) es V también.
$P(h): \sum_{i=1}^{h} 8i - 4 = 4h^2$ → *Hipótesis Inductiva (H.I)*
$P(h+1): \sum_{i=1}^{h+1} 8i - 4 = 4(h+1)^2$ → *Tesis inductiva (T.I)*

Demostración:
$\sum_{i=1}^{h+1} 8i - 4 = \sum_{i=1}^{h} 8i - 4 + [8.(h+1) - 4] = 4h^2 + [8h + 8 - 4] = 4h^2 + 8h + 4 = 4.(h^2 + 2h + 1) = 4.(h+1)^2$

P(h+1) es V, podemos afirmar que P(h) es V. Luego, se verifica: $\forall\, n \in N: \sum_{i=1}^{n} 8i - 4 = 4n^2$

RESOLUCIÓN PRIMER PARCIAL – ALGEBRA (LSI)	**21/04/2022 - TEMA 4**

1) Sabiendo que p ∨ q es falso, determinar el valor de verdad de $(p \vee \neg q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$. **(10 puntos)**

Si p ∨ q es F, entonces p es F y q es F, lo que implica que ¬q es V . Luego:

$(p \vee \neg q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$

$(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{V}) \Rightarrow (r \Rightarrow \boldsymbol{V})$

$\boldsymbol{V} \Rightarrow \boldsymbol{V}$

$\boldsymbol{V}$

Por lo tanto, el valor de verdad de $(\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}) \Rightarrow (\boldsymbol{r} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q})$ es Verdadero.

2) Dada la siguiente proposición $p: \exists\, x \in Z, \forall\, y \in Z / x.y = y$

a) Determinar su valor de verdad y expresarla en lenguaje coloquial. **(20 puntos)**

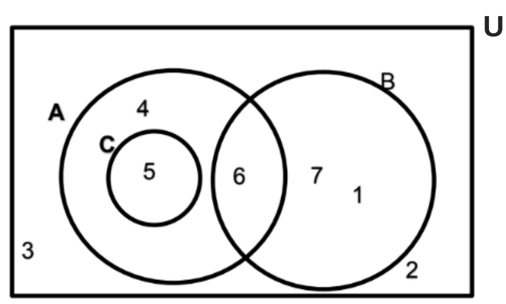
Existe, al menos, un número entero, cuyo producto con cualquier otro número entero es igual a éste último → V

b) Hallar la negación, sin hacer uso del signo ¬, expresarlo en lenguaje simbólico y coloquial.

$\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}, \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Z}: \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}$

Para cada número entero, existe otro número entero, cuyo producto es distinto de éste último.

3) Dado el siguiente diagrama de Venn:



a) Expresar U, A, B y C por extensión.

U= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}; A= {4, 5, 6};

B= {1, 6, 7}; C= {5}

b) Hallar:

$i)\ (A \cap C)^{\ c} \cap B$ $\qquad ii)\ (A - C) \cup (B \cap A)$

(20 puntos)

i) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C} = \{\mathbf{5}\}$

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})^{\boldsymbol{C}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{6}, \mathbf{7}\}$

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})^{\boldsymbol{C}} \cap \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{7}\}$

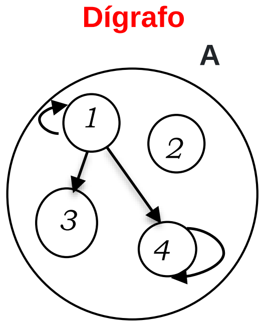
ii) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} = \{\mathbf{4}, \mathbf{6}\}$

$\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A} = \{\mathbf{6}\}$

$(\mathbf{A} - \mathbf{C}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}) = \{\mathbf{4}, \mathbf{6}\}$

4) Sea $A = \{1,2,3,4\}, R \subset A^2$ tal que $R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (4,4)\}$. Construir su dígrafo y su matriz de adyacencia. Analizar si R es antisimétrica y arreflexiva. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(15 puntos)**

Dígrafo



Matriz de adyacencia

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{\mathbf{4x4}}$$

Analicemos las propiedades:

- *Arreflexividad:*

$1 \in A \wedge (1,1) \notin R \quad \boldsymbol{F} \qquad o \qquad 4 \in A \wedge (4,4) \notin R \quad \boldsymbol{F}$

Luego, R es no arreflexiva

➢ *Antisimetría:*

$(1,1) \in R \wedge (1,1) \in R \Rightarrow 1 = 1$ $\quad \boldsymbol{V}$

$(4,4) \in R \wedge (4,4) \in R \Rightarrow 4 = 4$ $\quad \boldsymbol{V}$

Luego, R es antisimétrica

5) a) Sean $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2,3\}, R$ una relación definida de A en B de manera que $R = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3)\}$. Analizar si R es función y si es posible, clasificarla. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**

➢ *Existencia:*

$a \in A, \exists\, 3 \in B/(a, 3) \in R$

$b \in A, \exists\, 3 \in B/(b, 3) \in R$

$c \in A, \exists\, 3 \in B/(c, 3) \in R$

Luego, R verifica la condición de existencia.

➢ *Unicidad:*

Como no hay pares ordenados que tengan la primera componente igual, podemos afirmar que R verifica la condición de unicidad.

Por lo tanto, R es una función.

❖ *Inyectividad*

$\exists\, a, \exists b \in A/a \neq b \wedge R(a) = R(b) = 3$

Luego, R no es inyectiva.

❖ *Sobreyectividad*

$\exists\, 1 \in B/\forall x \in A{:}\, R(x) \neq 1 \quad o \quad \exists\, 2 \in B/\forall x \in A{:}\, R(x) \neq 2$

Luego, R no es sobreyectiva

b) Sean las siguientes funciones, $f{:}\, R \to R/f(x) = x^2 - 1$ y $g{:}\, R \to R/g(x) = 2x + 3$. Definir fog, si es función. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**

En $g{:}\, R \to R/g(x) = 2\mathrm{x} + 3$ *: Img g= R*

En $f{:}\, R \to R/f(x) = x^2 - 1$ *: Dom f = R*

Como $\boldsymbol{R \subset R}$***, decimos que*** $\boldsymbol{fog}$ ***es una función.*** *Luego:*

$f \circ g{:}\, R \to R/\boldsymbol{f \circ g(x)} = f[g(x)] = f(2x + 3) = (2x + 3)^2 - 1 = [(2x)^2 + 2.2x.3 + 3^2] - 1 = (4x^2 + 12x + 9) - 1 = \boldsymbol{4x^2 + 12x + 8}$

6) Demostrar por inducción la validez de la siguiente proposición:

$\forall\, n \in N{:}\ \sum_{i=1}^{n} 10i - 5 = 5n^2$ **(15 puntos)**

Sea n=1.

$\sum_{i=1}^{1} 10i - 5 = 10.1 - 5 = 5$

$5n^2 = 5.1^2 = 5$

$\therefore P(1)\ es\ V$

Supongamos que P(h) es V y probemos que P(h+1) es V también.

$P(h){:} \sum_{i=1}^{h} 10i - 5 = 5h^2$ → *Hipótesis Inductiva (H.I)*

$P(h + 1){:} \sum_{i=1}^{h+1} 10i - 5 = 5(h + 1)^2$ → *Tesis inductiva (T.I)*

Demostración:

$\sum_{i=1}^{h+1} 10i - 5 = \sum_{i=1}^{h} 10i - 5 + [10.(h + 1) - 5] = 5h^2 + [10h + 10 - 5] = 5h^2 + 10h + 5 = 5.(h^2 + 2h + 1) = 5.(h + 1)^2$

P(h+1) es V, podemos afirmar que P(h) es V. Luego, se verifica: $\forall\, n \in N{:}\ \sum_{i=1}^{n} 10i - 5 = 5n^2$