UNIDAD 6: POLINOMIOS

Se llama polinomio en una indeterminada x, con coeficientes en R, de grado n, a toda expresión de la forma abreviada:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Cada una de las expresiones $a_i x^i$ se llama término del polinomio, a_n es el coeficiente principal y a_0 es el término independiente.

POLINOMIO NULO:

Es aquel en el que todos sus coeficientes son iguales a cero.
Notación: P(x) = 0

POLINOMIO MONICO:

Es aquel cuyo coeficiente principal es 1
POR EJEMPLO:
P(x) = x + 2 es un polinomio mónico de grado 1.

CLASIFICACION

Según el número de términos, los polinomios se llaman:

- Monomio: si tiene un único término
- Binomio: si tiene sólo dos términos.
- Trinomio: si tiene sólo tres términos.
- Cuatrinomio: si tiene sólo cuatro términos
- Polinomio: si tiene más de cuatro términos.

OPERACIONES DE MONOMIOS:

Monomios Semejantes : Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal, es decir sólo se diferencian en el coeficiente. Sólo pueden sumarse dos monomios si éstos son semejantes. La suma es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma de los coeficientes. La suma de dos monomios semejantes es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma de los coeficientes

Por ejemplo: Sean $P(x) = 5x^2 \quad Q(x) = 13x^2$

$$P(x) + Q(x) = 5x^2 + 13x^2 = 18x^2$$

$$P(x) - Q(x) = 5x^2 - 13x^2 = -8x^2$$

El producto de dos monomios siempre es otro monomio, por ejemplo:

$$5x^4.(2x^2) = 10x^6$$

El resultado de la división de dos monomios puede ser otro monomio o una expresión algebraica fraccionaria.

$$a) \quad 10x^4 : (2x^2) = 5x^2$$

$$b) \quad 5x^4 : (2x^6) = \frac{5}{2x^2}$$

OPERACIONES DE POLINOMIOS:

Para sumar dos polinomios, se agrupan los términos semejantes y se suman sus coeficientes.

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta. Se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y se suman los términos semejantes obtenidos.

ALGORITMO DE LA DIVISION:

Dados los polinomios P(x) y Q(x), Existen y son únicos dos polinomios C(x) y R(x), tales que:
P (x) = C(x) . Q(x) + R(x)
donde R(x) = 0 ∨ gr (R) < gr (Q)
Los polinomios P, Q, C y R se llaman, respectivamente, dividendo, divisor, cociente y resto

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Sea $gr(P) = m$ y $gr(Q) = n$

- Si $m < n \Rightarrow C(x) = 0 \text{ y } R(x) = P(x)$

- Si $m \geq n \Rightarrow gr(C) = m - n \quad y \quad gr(R) \leq n - 1$

Si el divisor Q es un polinomio mónico y gr (Q) = 1, el proceso anterior puede simplificarse utilizando la **Regla de Ruffini:**

1. En el primer renglón se escriben todos los coeficientes del dividendo completo y ordenado en forma decreciente según los exponentes de la indeterminada.
2. En el ángulo de las dos rectas se escribe el opuesto del término independiente del polinomio divisor.
3. El primer coeficiente del dividendo se repite en el tercer renglón, debajo de la línea horizontal, y luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente; se coloca este resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo y se realiza la suma de los números que quedaron alineados. El resultado se escribe en el tercer renglón, debajo de la línea horizontal
4. Se repite este proceso hasta el último coeficiente del polinomio dividendo.

El último valor obtenido es el resto (R) de la división y los valores que le preceden son los coeficientes del cociente C
Si al dividir dos polinomios P y Q se obtiene como resto el polinomio nulo, entonces se dice que la división es exacta y que "P ES MULTIPLO DE Q", En este caso se cumple que:
P(x) = Q(x) . C(x)

ESPECIALIZACION DE UNA INDETERMINADA X:

es el valor numérico que toma el polinomio cuando se sustituye la indeterminada x, por el número α y se realizan las operaciones indicadas en el polinomio.

TEOREMA DEL RESTO:

Hemos visto que al dividir un polinomio P(x) por otro Q(x) mónico y de grado 1 el resto R(x) es necesariamente, de grado cero.

El resto de dividir un polinomio P(x) por otro Q(x) = x - a, es la especialización de P por a.
Es decir: R = P(a)

RAICES DE UN POLINOMIO:

Sea P(x) un polinomio de grado n y **α** un número cualquiera. Se dice que **α** es una raíz de P si y sólo si la especialización de la indeterminada x por **α** es cero.

α es raíz de P(x) ⇒ P(**α**) = 0

Propiedad: α es raíz de P sí y solo si (x-α) es divisor de P

Por ejemplo: $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

$$P(1) = 1^4 - 2.1^3 - 1.1^2 + 2.1 = 0$$

$\alpha = 1$ es raíz de P

$$P(1/2) = (1/2)^4 - 2.(1/2)^3 - 1.(1/2)^2 + 2.(1/2) = 9/16$$

$\alpha = 1/2$ no es raíz de P

$$P(2) = 2^4 - 2.2^3 - 1.2^2 + 2.2 = 0$$

$\alpha = 2$ es raíz de P

PROPIEDADES DE LAS RAICES DE LOS POLINOMIOS:

1. Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio P con coeficientes en R y de grado mayor que cero, admite una raíz en C.
2. Todo polinomio de grado n, admite n raíces, no necesariamente distintas
3. Si un polinomio admite una raíz compleja, entonces admite a su conjugada. Es decir, si un número complejo es raíz de un polinomio, su conjugado también lo es.

TEOREMA DE GAUSS

Si un polinomio real P de grado n, con coeficientes enteros, admite raíces racionales, de la forma $\frac{p}{q}$ (siendo p y q coprimos), entonces p es divisor del término independiente a_0 y q es divisor del coeficiente principal a_n.

DESCOMPOSICION FACTORIAL DE POLINOMIOS REALES:

TEOREMA: Todo polinomio real P de grado n ≥ 1, puede escribirse de manera única, como un producto de la forma abreviada:

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$$

RELACIONES ENTRE RAICES Y COEFICIENTES:

Por el teorema de identidad de Polinomios:

"Dos polinomios son idénticos si y sólo si tienen igual grado y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales"

En resumen:

- La suma de las raíces es igual al segundo coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

- La suma de los productos binarios de las raíces es igual al tercer coeficiente dividido por el coeficiente principal

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

- La suma de los productos ternarios de las raíces es igual al cuarto coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal.

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

- El producto de las n raíces es igual al término independiente dividido por el coeficiente principal, con signo + o – según n sea par o impar, respectivamente.

$$\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$