UNIDAD 7: MATRICES Y DETERMINANTES.

Se llama matriz de clase m x n a todo arreglo rectangular con m filas y n columnas, siendo m y n números naturales. Al conjunto de todas las matrices de clase m x n, lo notaremos:

K^{mxn}

donde puede ser el conjunto numérico Q, C, R.
Una matriz se representa con letra mayúscula y los elementos de dicha matriz se representan con letras minúsculas. Cada elemento de la matriz tiene dos subíndices, el primero indica la fila a la que pertenece y el segundo la columna.

MATRICES ESPECIALES:

De acuerdo a la disposición o naturaleza de sus elementos se pueden clasificar en:

- **MATRIZ CUADRADA:** Una matrizes cuadrada si y solo si, tiene el mismo número de filas que de columnas.(m=n).
- **MATRIZ RECTANGULAR:** Una matriz es rectangular si y solo si, el número de filas no coincide con el de columnas.(m ≠ n).
- **MATRIZ FILA:** Es aquella que tiene una sola fila (m = 1).
- **MATRIZ COLUMNA:**Es aquella que tiene una sola columna.
- **MATRIZ NULA:** Es la que tiene todos sus elementos nulos.
- **MATRIZ TRASPUESTA:** Dada una matriz A, se llama matriz traspuesta de A, a la matriz cuyas filas son las columnas de A y cuyas columnas son las filas de A. Por lo tanto, si A es una matriz de clase m x n, la traspuesta de A es una matriz de clase n x m
- **MATRIZ OPUESTA:** Dada la matriz A, indicamos su opuesta como –A y es la matriz que se obtiene con todos los elementos opuestos de A.

MATRICES CUADRAS PARTICULARES:

- **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR:** Una matriz es una matriz triangular superior si y solo si, los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros

$A=[a_{ij}]_{nxn}$ **es una matriz triangular superior, si y solo si,** $a_{ij}=0, \forall i>j$

- **MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR:** Una matriz es una matriz triangular inferior, si y solo si, los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros

$A=[a_{ij}]_{nxn}$ **es una matriz triangular inferior, si y solo si,** $a_{ij}=0, \forall i<j$

- **MATRIZ DIAGONAL:** Una matriz es una matriz diagonal, si y solo si, los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos

$A=[a_{ij}]_{nxn}$ **es una matriz diagonal, si y solo si,** $a_{ij}=0, \forall i \neq j$

- **MATRIZ ESCALAR:** Una matriz es escalar, si y solo si, es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales entre sí.
- **MATRIZ IDENTIDAD:** Una matriz es identidad, si y solo si, los elementos de la diagonal principal de una matriz escalar de clase nxn son iguales a 1.
- **MATRIZ SIMETRICA:** Son aquellas matrices que coinciden con su transpuesta

---

SUMA DE MATRICES

Dos matrices son conformables para la suma, si y sólo si, son de la misma clase. La suma de dos matrices de la misma clase, es otra matriz, de la misma clase que las dadas; y cada coeficiente de esta matriz se obtiene sumando los coeficientes de las matrices dadas que están en la misma posición.

Propiedades de la Suma de Matrices

La suma de matrices verifica las siguientes propiedades:

1) Propiedad Asociativa:

$$\forall A,B,C \in K^{mxn} : (A+B)+C = A+(B+C)$$

2) Propiedad Conmutativa:

$$\forall A,B \in K^{mxn} : A+B = B+A$$

3) Existencia de elemento neutro:

$$\exists N \in K^{mxn} / \forall A \in K^{mxn} : A+N = N+A = A$$

$$N=[0_{ij}]_{mxn}$$

4) Existencia de elemento opuesto:

$$\forall A \in K^{mxn} : \exists A' \in K^{mxn} / A+A' = A'+A = N$$

$$A'=[-a_{ij}]_{mxn}$$

DIFERENCIA DE MATRICES:

Dada dos matrices de la misma clase, la diferencia ***A - B*** la podemos expresar como ***A + (-B)*** ,es decir la suma de la matriz A y la opuesta de B.
La resta de dos matrices de la misma clase, es otra matriz, de la misma clase que las dadas; y cada coeficiente de esta matriz se obtiene restando los coeficientes de las matrices dadas que están en

la misma posición

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR:

El producto de una matriz por un escalar es otra matriz que se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por dicho número.

Dada una matriz $A=[a_{ij}]_{mxn}$ $y\ un\ escalar\ c \in K$

Se define la matriz: $c.A = c.[a_{ij}]_{mxn} = [c.a_{ij}]_{mxn} \quad \forall i, \forall j$

PRODUCTO DE UNA MATRIZ:

Dadas las matrices $A=[a_{ij}]_{mxn}$ y $B=[b_{ij}]_{pxq}$

- Dos matrices son conformables para el producto, si y solo si, el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda. (n = p)
- El producto de A.B es una matriz de clase mxq.
- Si n ≠ p, el producto A.B no está definido y se dice que A y B no son conformables para el producto.
-

PROPIEDADES DEL PROD. DE UNA MATRIZ CUADRADA

1) Ley de Cierre $\forall A, B \in K^{nxn} : A.B \in K^{nxn}$

2) Propiedad Asociativa:

$$\forall A, B, C \in K^{nxn} : (A.B).C = A.(B.C)$$

3) Existencia de elemento neutro:

$$\exists I_n \in K^{nxn} / \forall A \in K^{nxn} : A.I_n = I_n.A = A$$

OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS

Dada una matriz , se llaman operaciones elementales de filas a las siguientes:

- Permutación de dos filas: La fila F_i se reemplaza por la fila F_j y la fila F_j se reemplaza por la fila F_i (Se indica: $F_i \leftrightarrow F_j$)
- Reemplazo de todos los elementos de una fila por su producto por un escalar distinto de cero. (Se indica: $k.F_i \rightarrow F_i$).
- Reemplazo de una fila por su suma con otra. (Se indica: $F_i + k.F_j \rightarrow F_i$).

MATRICES EQUIVALENTES

Se dice que A es equivalente a B, si B se obtiene de A, por la sucesiva aplicación de un número finito de operaciones elementales.

RANGO DE UNA MATRIZ

Sea $A = [a_{ij}]_{mxn}$

Se llama rango fila de A al máximo número de filas linealmente independientes de A. Se llama rango columna de A al máximo número de columnas linealmente independientes de A. Teorema: El rango fila de toda matriz es igual a su rango columna.

PROPIEDADES DEL RANGO:

- El rango fila de la matriz nula, de cualquier clase, es cero
- El rango fila de la matriz identidad de clase nxn, es n.
- Dos matrices equivalentes por fila tienen el mismo rango fila

MATRICES ESCALONADAS

Una matriz es escalonada si, y solo si, verifica las dos condiciones siguientes:

- Las filas nulas, si existen, están después de todas las no nulas.
- En cada una de las filas no nulas, el número de ceros que precede al primer elemento no nulo es mayor que el anterior

Propiedad: El rango fila de una matriz escalonada, es igual al número de filas no nulas de esa matriz

MATRIZ ADJUNTA:

Dada una matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$

Llamamos matriz adjunta del elemento a_{ij} a la matriz de clase (n-1) x (n-1) que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A.

Se llama matriz adjunta de A y anotamos Adj A, a la traspuesta de la matriz que se obtiene al reemplazar cada elemento de A por sus respectivos adjuntos

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -20 \\ -1 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -20 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTES:

El determinante correspondiente a una matriz cuadrada A, es el valor de la suma de determinados productos que se realizan con los elementos que componen la matriz.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:

- Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero
- Si una matriz tiene una fila o una columna nula, su determinante es cero.
- El determinante del producto de dos matrices de la misma clase, es igual al producto de los determinantes de las matrices
- El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) o diagonal, es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
- El determinante de la matriz identidad de cualquier orden es 1.
- Si se multiplica un escalar no nulo por una fila o columna de una matriz, el determinante de la nueva matriz será igual al determinante de la matriz multiplicado por el escalar.
- Si en una matriz se permutan dos filas o dos columnas, el determinante de la nueva matriz es el opuesto del determinante de la primera
- Si una matriz tiene dos o más filas (o columnas) linealmente dependientes, su determinante es cero.
- Si una matriz tiene sus filas proporcionales, su determinante es nulo.

- El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

MATRIZ INVERSA

Una matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$ es regular, inversible o no singular si y solo si, existe una matriz de la misma clase (notada A^{-1}) tal que multiplicada a izquierda y derecha por A, da por resultado la matriz identidad de la misma clase.

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{nxn} \text{ es inversible} \Leftrightarrow \exists A^{-1} / A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n}$$

Propiedad: Una matriz cuadrada de clase nxn es inversible si, y solo si, su rango fila es igual a n.

CALCULO:

Sea $A = [a_{ij}]_{nxn}$ y A inversible. La matriz inversa de A es igual a la matriz adjunta de A dividida por el determinante de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$