Teorema Funcion Primitiva + c

Teorema

Si $F(x)$ es una primitiva para la función $f(x)$ en (a, b), entonces $F(x) + c$ es también una primitiva donde c es un número constante cualquiera.

Demostración

Tenemos $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

Ejemplo:

$F_1(x) = x^3$

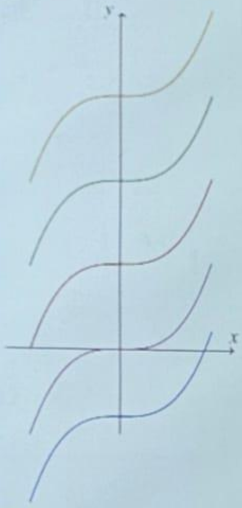
$F_2(x) = x^3 + 1$

$F_3(x) = x^3 + \pi$ $\dashrightarrow$ $f(x) = 3x^2$

$F_4(x) = x^3 - 3$

$\vdots$

$F_C(x) = x^3 + C$



Podemos decir que cualquier función de la forma $F_c(x) = x^3 + C$

(donde C puede ser cualquier número real) es una **primitiva** de la función $f(x) = 3x^2$ en todo $\mathbb{R}$.

Consecuencia inmediata de la definición de Integral 1) y 2)

1) La derivada de una integral indefinida es igual al integrando, es decir si
D $\int f(x)dx = f(x)$,   con $F'(x) = f(x)$

Demostración

Sabemos que $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, tal que $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

$$D\left(\int f(x)\,dx\right) = \quad D(F(x) + c) = \quad (F(x) + c)' = f(x)$$

Esta ultima igualdad significa que la derivada de una primitiva cualquiera es igual al integrando.

2) La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de la integración, es decir $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

Demostración

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \quad D\left(\int f(x)dx\right)dx = \quad f(x)dx$$

Consecuencia inmediata de la definición de Integral 3)

3) La integral indefinida de la diferencial de una cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria. Es decir: $\int df(x) = f(x) + c$

Demostración

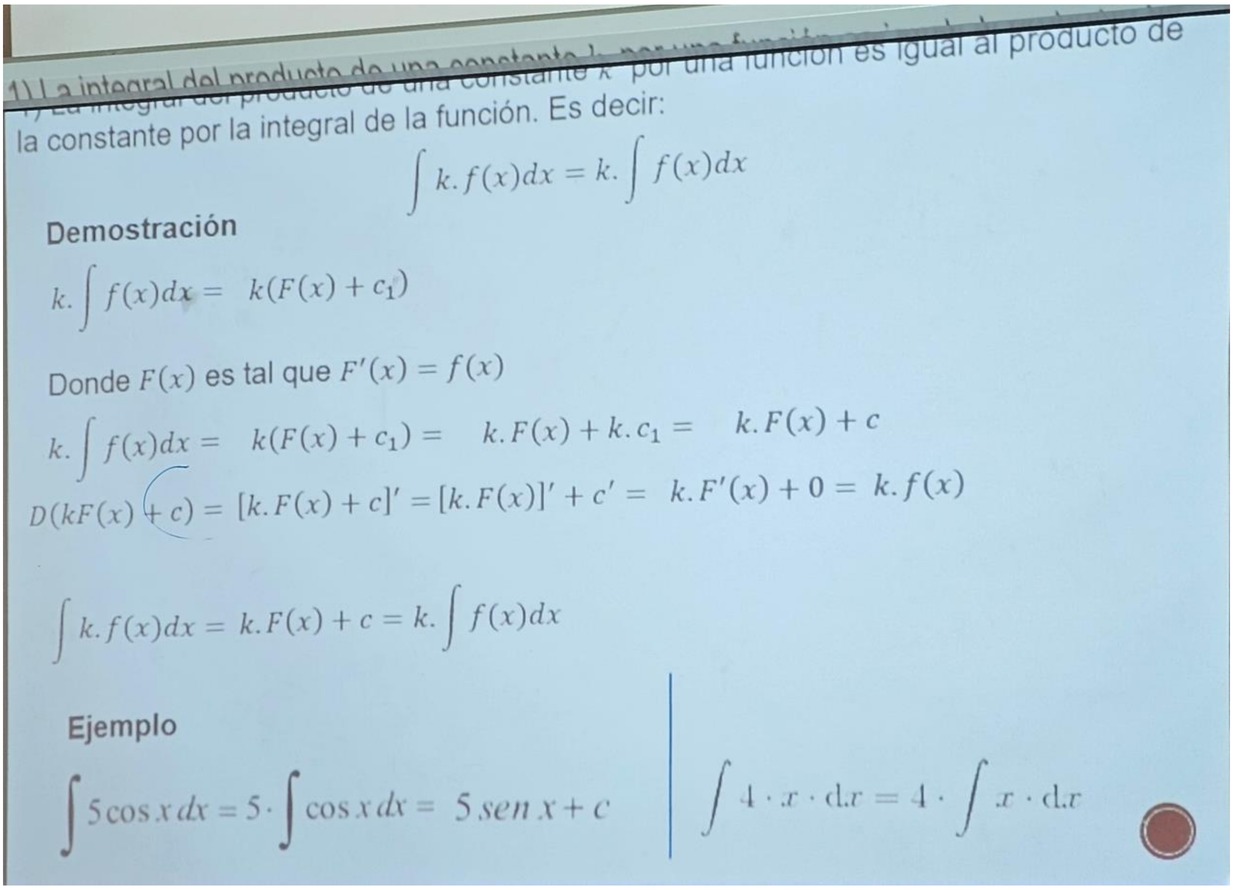
Sea una función $f(x)$ entonces $df(x) = f'(x)dx$

Como $f(x)$ es tal que $Df(x) = f'(x)$, entonces $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$, por lo cual se cumple que $\int f'(x)dx = f(x) + c$

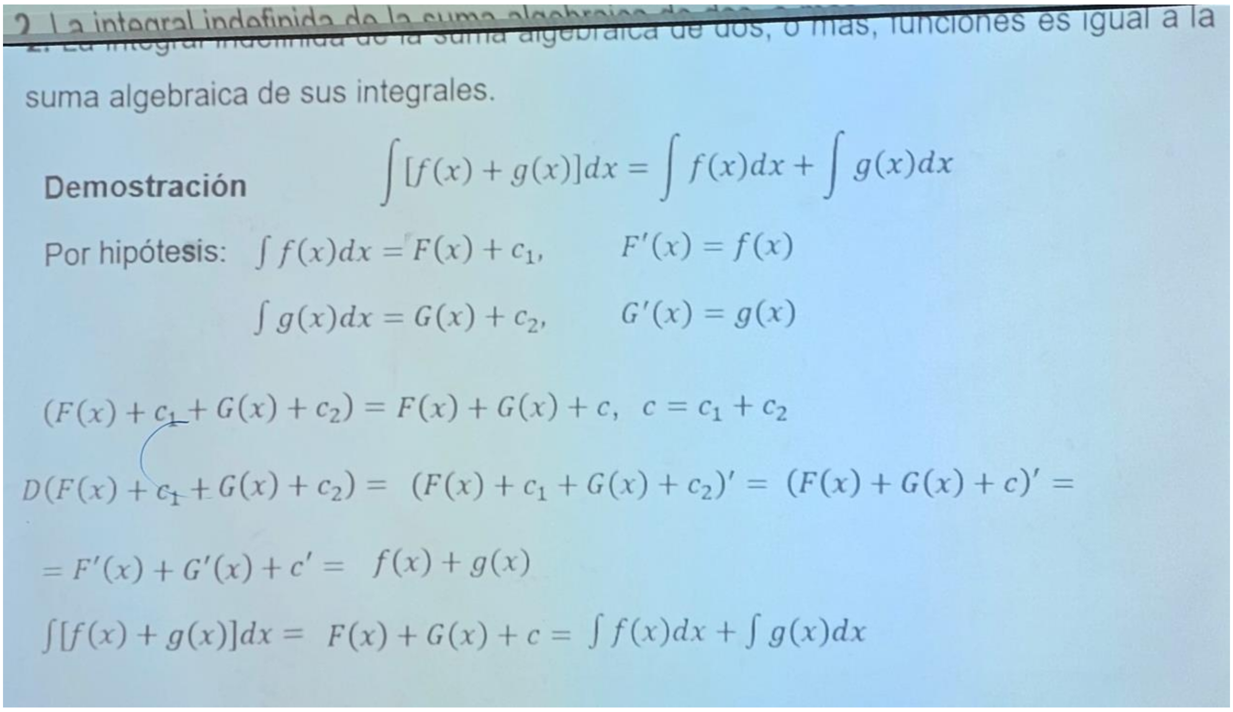
Entonces:

$$\int df(x) = \quad \int f'(x)dx = \quad f(x) + c$$

Propiedad Integral Indefinida – Producto constante k por una función



Propiedad Integral Indefinida – La suma de dos funciones es igual a la suma de sus integrales



Integrales Inmediatas

Integrales inmediatas

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Demostración

$$D\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)' = \left(\frac{1}{n+1}.x^{n+1}+c\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}}.(\cancel{n+1}).x^n = x^n$$

2) $\int dx = x + c$

Demostración

Por propiedad 3: $\int df(x) = f(x) + c$

Si consideramos $y = f(x)$, entonces $\int df(x) = \int dy = y + c$

Si en particular consideramos $y = f(x) = x$

$\int df(x) = \int dy = y + c = x + c$

3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

Demostración

$D(\ln x + c) = (\ln x + c)' = \frac{1}{x}$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

Demostración

$D(e^x + c) = (e^x + c)' = e^x$