Propiedad 1): Derivada de la Suma:

Demostración

Sean $y = f(x) + g(x) = h(x)$

$$\Delta y = h(x+\Delta x) - h(x)$$

$$\Delta y = [f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]$$

$$\Delta y = [f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]$$

Divido todo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

Distribuyo convenientemente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} = f'(x) + g'(x) = u' + v'$$

$$\therefore y' = f'(x) + g'(x) = u' + v'$$

Propiedad 2): Derivada del Producto:

- Sean u y v dos funciones derivables en x y $u = f(x)$ y $v = g(x)$.
  Si $y = u.v$ entonces $y' = u'.v + u.v'$

Demostración

Sean $y = f(x).g(x) = h(x)$

$$\Delta y = h(x+\Delta x) - h(x)$$

$$\Delta y = [f(x+\Delta x).g(x+\Delta x)] - [f(x).g(x)]$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)$$

Sumo y resto: $f(x).g(x+\Delta x)$

$$\Delta y = [f(x+\Delta x) - f(x)].g(x+\Delta x) + f(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]$$

Prop. Distributiva

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)].g(x+\Delta x) + f(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

Divido todo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)].g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x) - f(x)].g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}.g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} f(x).\frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

Reacomodo todo convenientemente

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}}_{f'(x)}.\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)}_{g(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} f(x)}_{f(x)}.\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}_{g'(x)} =$$

$$= f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = u'.v + u.v'$$

$$\therefore y' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = u'.v + u.v'$$

Propiedad 3): Derivada del Cociente:

- Sean u y v dos funciones derivables en x y $u = f(x)$ y $v = g(x)$, con $g(x) \neq 0$

  Si $y = \frac{u}{v}$ entonces $y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Demostración

Sean $y = \frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$

$$\Delta y = h(x+\Delta x) - h(x)$$

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x) + f(x) - f(x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$ Sumo y resto: $f(x)$

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)} + \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$ Distribuyo convenientemente

$$\Delta y = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)} + \frac{f(x).g(x) - g(x+\Delta x).f(x)}{g(x+\Delta x).g(x)}$$ Opero y determino un común denominador

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)} + \frac{f(x).g(x) - g(x+\Delta x).f(x)}{g(x+\Delta x).g(x)}}{\Delta x}$$ Divido todo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)}}{\Delta x} + \frac{\frac{f(x).g(x) - g(x+\Delta x).f(x)}{g(x+\Delta x).g(x)}}{\Delta x}$$ Distribuyo convenientemente

Operando convenientemente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)} + \frac{f(x).g(x) - g(x+\Delta x).f(x)}{g(x+\Delta x).g(x).\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)} + \frac{-f(x).[g(x) - g(x+\Delta x)]}{-g(x+\Delta x).g(x).\Delta x}$$ Divido y multiplico por -1

Prop. Distributiva

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x+\Delta x).g(x).\Delta x}$$ Convierto: $g(x) - g(x+\Delta x)$ en $g(x+\Delta x) - g(x)$ operando con el signo -

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)}{g(x+\Delta x).g(x).}$$ Operando convenientemente y Propiedades de limite

Limite del cociente

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)} - \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}.\frac{\lim_{\Delta x\to 0} f(x)}{\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(x)}{g(x)} - g'(x).\frac{f(x)}{g(x).g(x)}$$ Def. de Derivada y Def. de limite

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x).f(x)}{g(x).g(x)}$$

$$\therefore y' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$ Opero y determino un común denominador

Propiedad. Teorema de la Derivada y la Continuidad: Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto.

Propiedad

Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto y sea $x = a$ un punto de dicho intervalo.

Si la función $f(x)$ es derivable en a, entonces es continua en a.

Demostración

Como $f(x)$ es derivable en el punto a, Recordemos la definición de derivada en un punto $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Si se escribe $x = a + \Delta x$, entonces $\Delta x = x - a$ y Δx tiende a 0 si y solo si x tiende a a. En consecuencia, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada es:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \textbf{(1)}$$

Para probar que $f(x)$ es continua en $x = a$, primero vamos a probar que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0 cuando x tiende a a

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim_{x \to a} \left[f(x) - f(a).\frac{x - a}{x - a}\right] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.x - a\right] =$$

Multiplicamos y dividimos por $x - a$ Reagrupamos convenientemente

Por propiedades de limite

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.\lim_{x \to a} x - a = f'(a).0 = 0$$

Por (1) y definición de limite

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$$

Recordemos la definición de función continua en un punto:

La función $f(x)$ es continua en $x = a$ si y solo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \underbrace{\left[\lim_{x \to a} f(x) - f(a)\right]} + \lim_{x \to a} f(a) = 0 + f(a) = f(a)$$

Sumamos y restamos $f(a)$ Por propiedades de limite

$\therefore f(x)$ es continua en $x = a$

Derivada de la Función Constante:

Derivada de funciones algebraicas

Sea $y = f(x)$
Si $y = c$, siendo c una constante, entonces $y' = 0$

Demostración

Sea $y = f(x) = c$ y $f(x + \Delta x) = c$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$$

Divido todo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 = y'$$

$$\therefore \boldsymbol{y' = 0}$$

Derivada de la Función Identidad:

Derivada de funciones algebraicas

Sea $y = f(x)$
Si $y = x$ entonces $y' = 1$

Demostración

Sea $y = f(x) = x$ y $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$$

Divido todo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 = y'$$

$$\therefore \boldsymbol{y' = 1}$$

Derivada de la Función Potencia:

Derivada de funciones algebraicas

- Si $y = f(x)$ es una función de la forma $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $y' = n.x^{n-1}$

Demostración

Sea $f(x) = x^n$ y $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}.\Delta x^k\right] - x^n$$

Binomio de Newton

Desarrollando el binomio

$$\Delta y = \left[\cancel{x^n} + \binom{n}{1}.x^{n-1}.\Delta x + \binom{n}{2}.x^{n-1}.(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}.(\Delta x)^n\right] - \cancel{x^n}$$

Divido todo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\binom{n}{1}.x^{n-1}.\Delta x + \binom{n}{2}.x^{n-1}.(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}.(\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Propiedad distributiva respecto a Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}.\left[\binom{n}{1}.x^{n-1} + \binom{n}{2}.x^{n-1}.(\Delta x)^1 + \cdots + \binom{n}{n}.(\Delta x)^{n-1}\right]}{\cancel{\Delta x}}$$

Simplificando

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1}.x^{n-1} + \binom{n}{2}.x^{n-1}.(\Delta x)^1 + \cdots + \binom{n}{n}.(\Delta x)^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\binom{n}{1}.x^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{2}.x^{n-1}.(\Delta x)^1 + \cdots + \binom{n}{n}.(\Delta x)^{n-1}}_{\to 0}\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1}.x^{n-1} = n.x^{n-1}$$

$\therefore \boldsymbol{y' = n.x^{n-1}}$

Derivada de la Función Logaritmo Natural:

- Sea $y = f(x)$ una función de la forma $y = \ln x$ entonces $y' = \frac{1}{x}$

Demostración

Sea $f(x) = \ln x$ y $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x$$

Propiedad de logaritmo

$$\Delta y = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)$$

Divido todo por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Multiplico y divido por x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{x}.\frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Reordeno convenientemente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\frac{x}{\Delta x}.\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Propiedad de logaritmo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\ln\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\ln\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{1}{x}.\ln\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]\right\}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}.\lim_{\Delta x \to 0} \ln \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]}_{e}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.\ln e$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

$\therefore \boldsymbol{y' = \frac{1}{x}}$

Derivada de la Función Exponencial y la Función Exponencial Compuesta (usando regla de la cadena)

- Sea $y = f(x)$ una función de la forma $y = \sqrt[2]{x}$ entonces $y' = \frac{1}{2.\sqrt[2]{x}}$

Demostración

$$y = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2.\sqrt[2]{x}}$$

Por regla de la cadena:

- Si $y = \sqrt[2]{u}$ entonces $y' = \frac{u'}{2.\sqrt[2]{u}}$

- Sea $y = f(x)$ una función de la forma $y = e^x$ entonces $y' = e^x$

Demostración

$\ln y = \ln(e^x)$ Tomamos $\ln$ a ambos miembros

$\ln y = x.\ln e$ Propiedad de logaritmos

$(\ln y)' = (x.1)'$ Derivando ambos miembros

$$\frac{y'}{y} = 1$$

$$y' = y$$

$$y' = e^x$$

$\therefore \boldsymbol{y' = e^x}$

Por regla de la cadena:

$y = e^u$ entonces $y' = u'.e^u$

$u = u(x)$

Demostraciones de Derivadas de Funciones Compuestas con Regla de la Cadena:

Por regla de la cadena:

Si $y = \ln u$ entonces $y' = \frac{1}{u}.u' = \frac{u'}{u}$

Si $y = u^n$ entonces $y' = n.u^{n-1}.u'$

Demostración

$\ln y = \ln(u^n)$ Tomamos $\ln$ a ambos miembros

$\ln y = n.\ln u$ Propiedad de logaritmos

$(\ln y)' = (n.\ln u)'$ Derivando ambos miembros

$$\frac{y'}{y} = (n)'.\ln(u) + n.(\ln u)'$$

$$\frac{y'}{y} = n.\frac{u'}{u}$$

$$y' = n.\frac{u'}{u}.y$$

$$y' = n.\frac{u'}{u}.u^n$$

$$y' = n.u^{n-1}.u'$$

$$\therefore y' = n.u^{n-1}.u'$$

- Sea $y = f(x)$ una función de la forma $y = \sqrt[2]{x}$ entonces $y' = \frac{1}{2.\sqrt[2]{x}}$

Demostración

$$y = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2.\sqrt[2]{x}}$$

Por regla de la cadena:

- Si $y = \sqrt[2]{u}$ entonces $y' = \frac{u'}{2.\sqrt[2]{u}}$