UNICIDAD DEL LÍMITE

TEOREMA: (Unicidad del Límite): Si una función tiene límite finito en un punto, dicho límite es único.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $f(x)/\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, quiero probar que es único, para ello supongo que no es así, es decir que

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2,\ L_1 \neq L_2$

Si $L_1 > L_2 \Rightarrow$ formo $\varepsilon_1 = \frac{L_1 - L_2}{2} > o$

Como: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 \Longrightarrow$ para $\frac{\varepsilon_1}{2}, \exists\ \delta_1 > 0$ / si $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow\ |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon_1}{2}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2 \Longrightarrow$ para $\frac{\varepsilon_1}{2}, \exists\ \delta_2 > 0$ / si $0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow\ |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon_1}{2}$

Considerando $x/0 < |x-a| < \delta, \delta$ = min $\{\delta_1, \delta_2\}$

$$0 < L_1 - L_2 = |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| = |-(f(x) - L_1) + (f(x) - L_2)| \leq \underbrace{|-(f(x) - L_1)|}_{<\varepsilon_1/2} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{<\varepsilon_1/2}$$
$$< \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1$$

$\therefore\ 0 < L_1 - L_2 < \varepsilon_1 = \frac{L_1 - L_2}{2}$ ABSCISA

$\therefore$ El límite es único

¿Si fuese? $L_2 > L_1$, considero $\varepsilon_1 = \frac{L_2 - L_1}{2}$