CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL-LSI

TEMA 1

Tema 1: Funciones. Límite y Continuidad en funciones de una variable.

Valor absoluto. Intervalos. Entornos. Funciones de una variable real. Límite de una función. Definición. Interpretación Geométrica. Limites laterales. Propiedades de los límites. Limites infinitos. Cálculo de límites indeterminados. Continuidad. Propiedades de las funciones continuas.

Modulo o Valor Absoluto de un numero Real

Dado un numero real x, llamaremos modulo o valor absoluto de x al mismo x si x es positivo o cero, y -x si x es negativo, es decir:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Lo que afirmamos es que, el módulo de un numero real es siempre mayor o igual a cero.

Bibliografía

- Calculo Diferencial e Integral - Ricardo Noriega - pagina 56.
- Introducción al Análisis Matemático. Calculo 1. Hebe Rabuetti. Pagina 16.

Propiedades:

Sean $x, y \in \mathbb{R}$

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $|x| = |-x| = ||x||$
4) $|x - y| = |y - x|$
5) $\forall\, x \in \mathbb{R}: +\sqrt{x^2} = |x|$.
6) $|x.y| = |x|.|y|$
7) $\forall n \in \mathbb{N}: |x^n| = |x|^n$
8) Si $y \neq 0$: $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
9) $-|x| \leq x \leq |x|$
10) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ / $\alpha > 0$, entonces:

i. $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$ (forma abreviada de escribir $x \geq -\alpha \wedge x \leq \alpha$)

ii. $|x| > \alpha \Leftrightarrow x < -\alpha \vee x > \alpha$

iii. $|x| = \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha \vee x = \alpha$

iv. $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$

v. $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \leq -\alpha \vee x \geq \alpha$

vi. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Intervalos

Sean $x, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

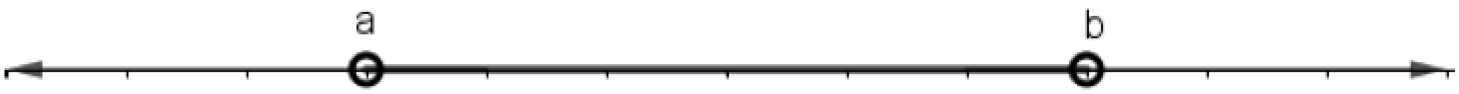
- **Intervalo Cerrado [a; b],** es el conjunto de números reales formado por a, b y todos los comprendidos entre ambos.

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

La longitud del intervalo [a; b] es el numero no negativo b - a.

- **Intervalo Abierto (a; b),** s el conjunto de números reales comprendidos entre a y b.

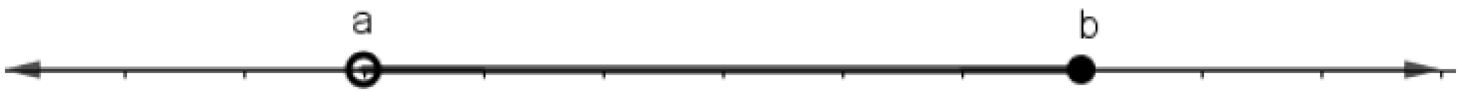
$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



La longitud del intervalo (a; b) es también el numero no negativo b - a.

- **Intervalo Semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha (a; b]**, es el conjunto de números reales formado por b y los números comprendidos entre a y b.

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$$



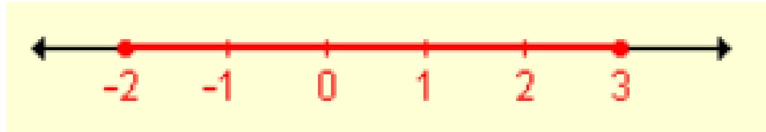
Análogamente se define el intervalo [a; b).

Generalizando, tenemos:

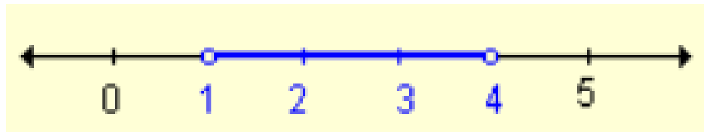
- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$
- $(b, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}/x > b\}$
- $(-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq c\}$
- $(-\infty, d) = \{x \in \mathbb{R}/x < d\}$
- $(-\infty, -\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Ejemplo. Interprete gráficamente los intervalos: **a)** $[-2, 3]$ **b)** $(1, 4)$ **c)** $(0, 5]$ **d)** $[1, +\infty)$ **e)** $(-\infty, 3)$

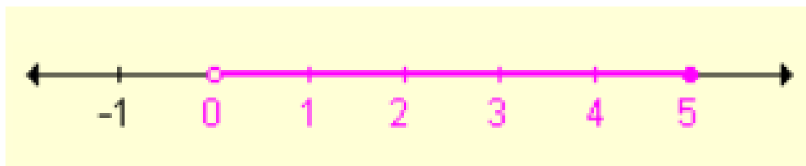
$[-2, 3]$



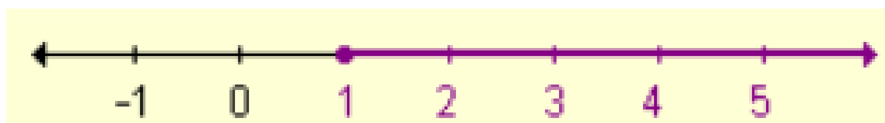
$(1, 4)$



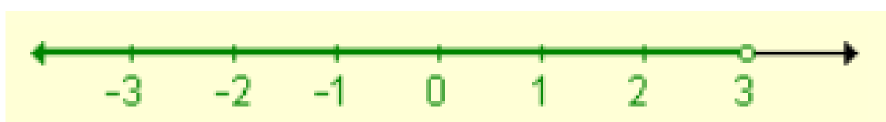
$(0, 5]$



$[1, +\infty)$



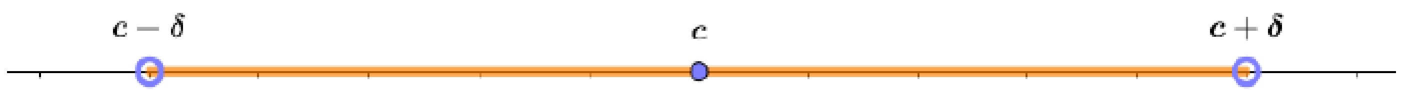
$(-\infty, 3)$



Entorno

Si c es un punto cualquiera de la recta real y δ un numero real positivo. Entorno de centro c y radio δ es el intervalo abierto $(c-\delta, c+\delta)$ y lo denotamos por $E_{(c,\delta)}$.

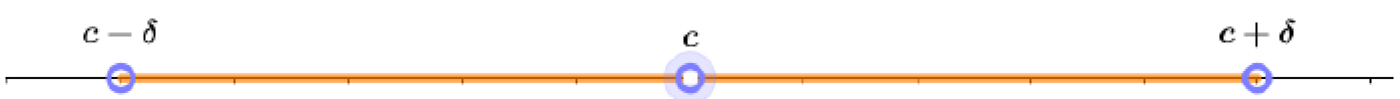
$$E_{(c,\delta)} = \{x \in \mathbb{R} / c-\delta < x < c+\delta\} = \{x \in \mathbb{R} / |x-c| < \delta\}$$



Entorno Reducido

Si c es un punto cualquiera de la recta real y δ un numero real positivo. Entorno reducido de centro c y radio δ es el intervalo abierto $(c-\delta, c+\delta)$ del cual se extrae el punto c y lo denotamos por $E'_{(c,\delta)}$.

$$E'_{(c,\delta)} = \{x \in \mathbb{R} / c-\delta < x < c+\delta \wedge x \neq c\} = \{x \in \mathbb{R} / 0 < |x-c| < \delta\}$$



Conjuntos Acotados

- **Cota Superior**

k es una cota superior de un conjunto C de números reales si y solo si k es un numero real que no es superado por ningún elemento del conjunto. Es decir,

$$k \text{ es cota superior del conjunto C} \Leftrightarrow \forall x \in C: x \leq k$$

Un conjunto esta acotado superiormente, si y solo si tiene cota superior. Por ejemplo, $\mathbb{R}^{-}$ esta acotado superiormente, ya que cualquier real no negativo es una cota superior de dicho conjunto. Observemos que si un conjunto tiene una cota superior, tiene infinitas cotas superiores. En el ejemplo anterior, el cero es una cota superior, ya que si $x \in \mathbb{R}^{-}$, resulta x < 0. Obviamente, cualquier numero real positivo a, es también una cota superior para el conjunto $\mathbb{R}^{-}$,
pues si x < 0 ∧ 0 < a, entonces x < a.
El conjunto de los números reales no esta acotado superiormente ya que, para cualquier numero real k, siempre es posible encontrar otro numero real x tal que x > k.

- **Supremo**

s es Supremo de un conjunto C de números reales si y solo si:

1. s es cota superior de C, y
2. si k es cualquier cota superior de C, entonces $s \leq k$.

- **Máximo**

Un subconjunto de números reales tiene máximo, si tiene supremo y este pertenece al subconjunto.

- **Cota inferior**

i es una cota inferior de un conjunto C de números reales si y solo si i es un numero real que no supera a ningún elemento del conjunto. Es decir,

$$i \text{ es cota inferior del conjunto } C \Leftrightarrow \forall x \in C: i \leq x$$

- **Ínfimo**

j es el ínfimo de un conjunto *C* de números reales si y solo si:

1. j es cota inferior de *C*, y

2. si l es cualquier cota inferior de *C*, entonces $l \leq j$.

- **Mínimo**

Un subconjunto de números reales tiene mínimo, si tiene ínfimo y este pertenece al subconjunto.

Decimos que un conjunto esta acotado si y solo si esta acotado superior e inferiormente.

Ejemplo:

Para la siguiente desigualdad: $|x-3|<5$

1. Determinar los valores que puede tomar la variable.

2. Representar gráficamente.

3. De ser posible, determinar la amplitud del intervalo, sus cotas y extremos.

$$|x-3|<5$$

$$-5<x-3<5$$

$$-5+3<x<5+3$$

$$-2<x<8$$

$$x\in(-2,8)$$

$c.s.=\{c\in R/\quad c\geq 8\}$

$Supremo: 8$

$Máximo:\ \ no\ tiene$

$c.i.=\{d\in R/\quad d\leq -2\}$

$Infimo: -2$

$Mínimo:\ \ no\ tiene$

Funciones

Definición:

Dados dos conjuntos $A\ y\ B$

Una relación f entre los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B es una función de A en B si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Existencia: $\forall x \in A, \exists y \in B\ /\ (x, y) \in f$

2) Unicidad: $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

El conjunto A se denomina Dominio. Siendo $A = \{x \in A\ /\ (x, y) \in f\} = Dm_f$

El siguiente subconjunto de B se denomina Imagen, siendo

$$Im_f = \{y \in B\ /\ (x, y) \in f\}$$

Para referirnos a una función utilizaremos la notación: $f: A \rightarrow B / f(x) = y$

Para el caso particular en que $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$, llamaremos <u>función real de una variable real</u> (o función escalar). Siendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Clasificación

Definición:

Sea $f: A \to B$ una función. Entonces:

- f es **inyectiva** si, y sólo si, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ con $x, y \in A$.

  Es equivalente a: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

- f es **sobreyectiva** si, $\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)$
- f es **biyectiva** si, y sólo si, f es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplos

$$f: R \longrightarrow R / f(x) = 3$$

f **no es inyectiva**

$f(1) = 3 \qquad f(2) = 3$

$$\underbrace{f(1) = f(2) \Rightarrow 1 = 2}_{\text{Falso}}$$

$$f: R \longrightarrow R / f(x) = x^2$$

f **no es sobreyectiva**

$\exists -9 \in R / \forall x \in Dm_f: -9 \neq f(x)$

Tipos de Funciones

Funciones Algebraicas

- Función Lineal
- Función Cuadrática
- Función Racional Entera
- Función Homográfica
- Función Racional Fraccionaria
- Función Irracional

Funciones Trascendentes

- Función Potencial
- Función Exponencial
- Función Logarítmica
- Función Trigonométrica
- Función Trigonométrica Inversa
- Función Hiperbólica
- Función Hiperbólica Inversa

Limite de una función

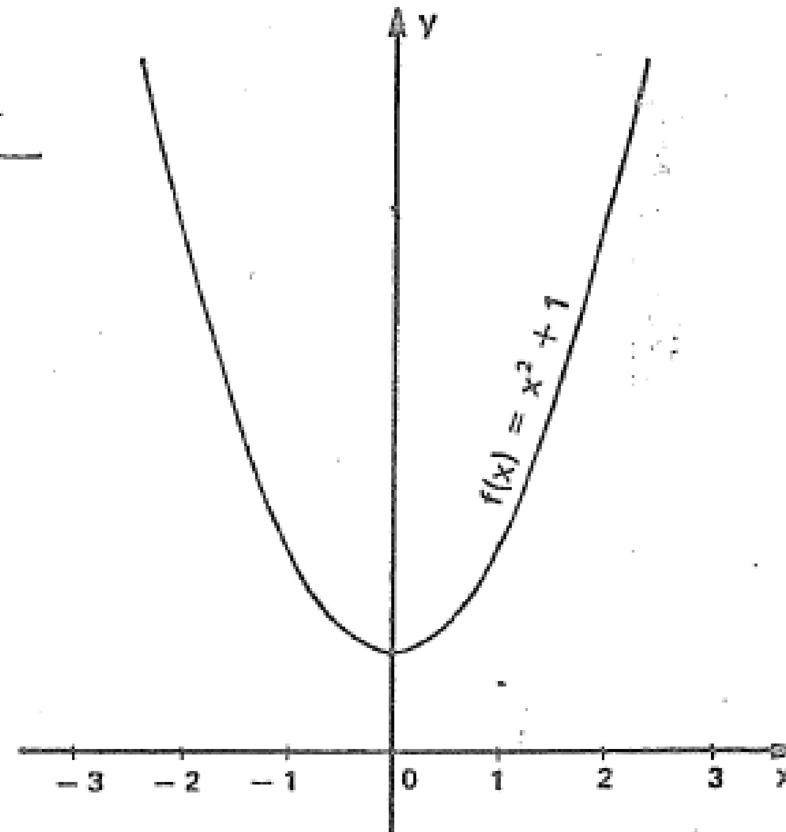
Ejemplo

Sea la función: $f(x) = x^2 + 1$

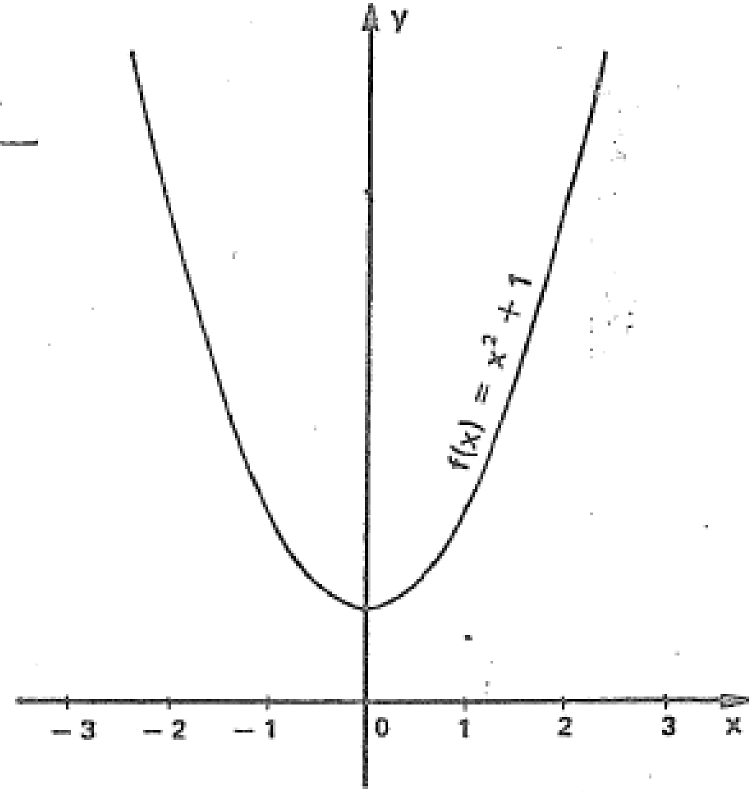
Trataremos de calcular el límite de la misma, en el punto $x = 2$. Para ello calculamos los valores de la función que corresponden a valores de x que se aproximan a 2 por la derecha, es decir por valores mayores que 2 y también valores de la función que corresponden a valores de x que se aproximan a 2 por la izquierda, es decir por valores menores que 2.

En la siguiente tabla figuran algunos

	x	$f(x) = x^2 + 1$
valores de x que se aproximan a 2 por la derecha; por valores mayores que 2.	2,2	5,84
	2,1	5,41
	2,01	5,04
	2,001	5,004
valores de x que se aproximan a 2 por la izquierda; por valores menores que 2.	1,9	4,61
	1,99	4,96
	1,999	4,996



	x	$f(x) = x^2 + 1$
valores de x que se aproximan a 2 por la derecha; por valores mayores que 2.	2,2	5,84
	2,1	5,41
	2,01	5,04
	2,001	5,004
valores de x que se aproximan a 2 por la izquierda; por valores menores que 2.	1,9	4,61
	1,99	4,96
	1,999	4,996



Como se observa, a medida que los valores de x se aproximan cada vez más a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores que determina la función se aproximan cada vez más al número 5. Esto se expresa diciendo que la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene límite 5 en el punto $x = 2$ o cuando x tiende a 2, que se indica simbólicamente:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$$

Que se lee: límite de $(x^2 + 1)$, para x tendiendo a 2 es igual a 5. También se dice que dicha función tiende a 5 cuando x tiende a 2.

Limite de una función

Punto de acumulación

Sea C un conjunto de puntos de la recta real, un punto a es de acumulación de C si a todo entorno reducido de a pertenece por lo menos un punto de C. El punto a puede o no pertenecer al conjunto C.

Se dice que una función tiene como limite el numero L en un punto de acumulación a, si los valores $y = f(x)$ que determina la función, se aproximan a L tanto como se quiera, con tal de considerar valores de x suficientemente próximo a *a*, por lo cual podemos enunciar:

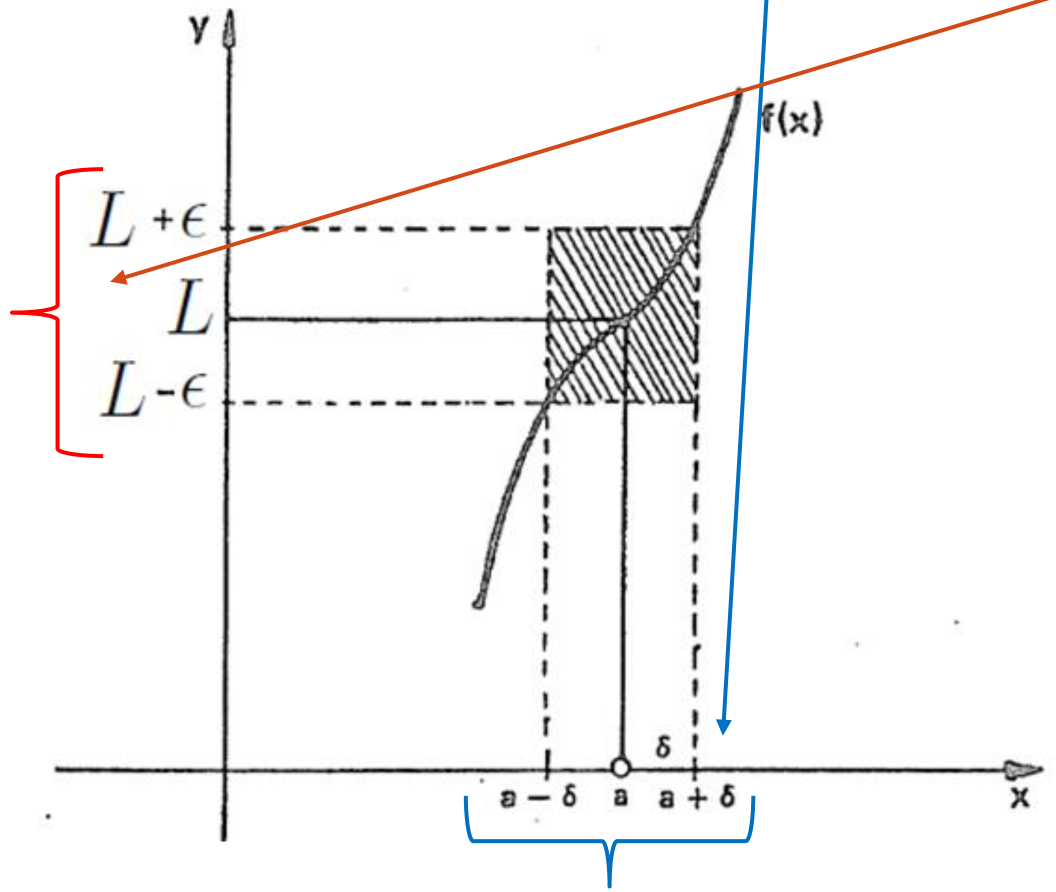
Definición: la función $f(x)$ tiene como limite el número L en el punto de acumulación x= a, cuando el valor absoluto de la diferencia entre los valores de $f(x)$ y L se puede hacer tan pequeño como se quiera con tal de considerar valores x suficientemente próximos a a.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Gráficamente:



Teorema: (Unicidad del Límite) Si una función tiene límite finito, dicho límite es único.

Límites Laterales

Límite por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Límite por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Considerando en cada caso semientornos a la derecha o a la izquierda del punto a.

Propiedad: una función admite al mismo numero real L como límite por la derecha y por la izquierda de un punto a si y solo si dicha función tiene límite finito L en el punto a, es decir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \ \wedge \lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Operaciones con Límites

Supongamos que c es una constante y que los límites $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existen, es decir $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, entonces:

1) Suma de Límites: $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2) Producto de Límites $\lim_{x \to a}(f.g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$

3) $\lim_{x \to a} c.f(x) = c.\lim_{x \to a} f(x)$

4) Cociente de Límites $\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, si \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x \to a} c. = c$

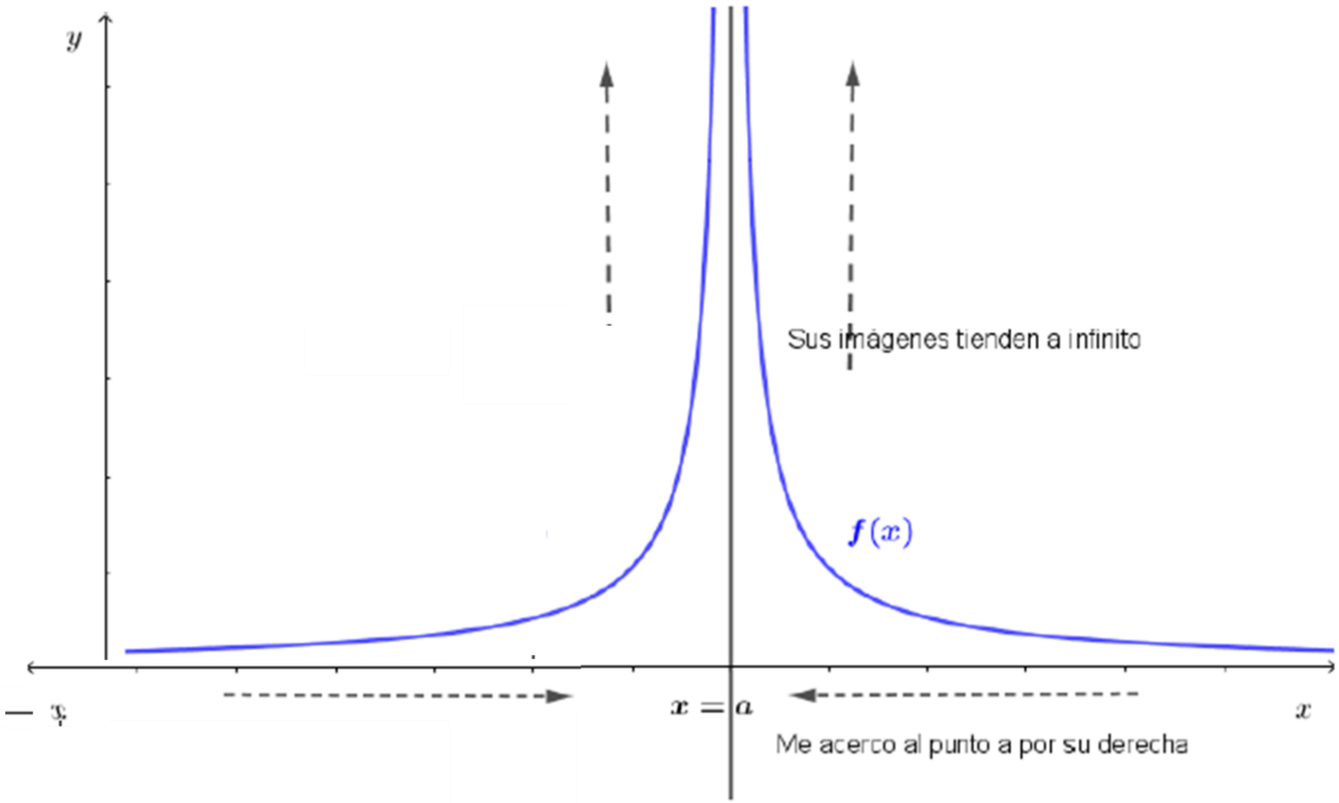
Tipo de Límites

Límites infinitos en un punto finito

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

En la situación de la grafica se dice que el límite cuando x tiende al punto a es $+\infty$, pues a medida que x se acerca a "*a*", la función tiende a infinito:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$



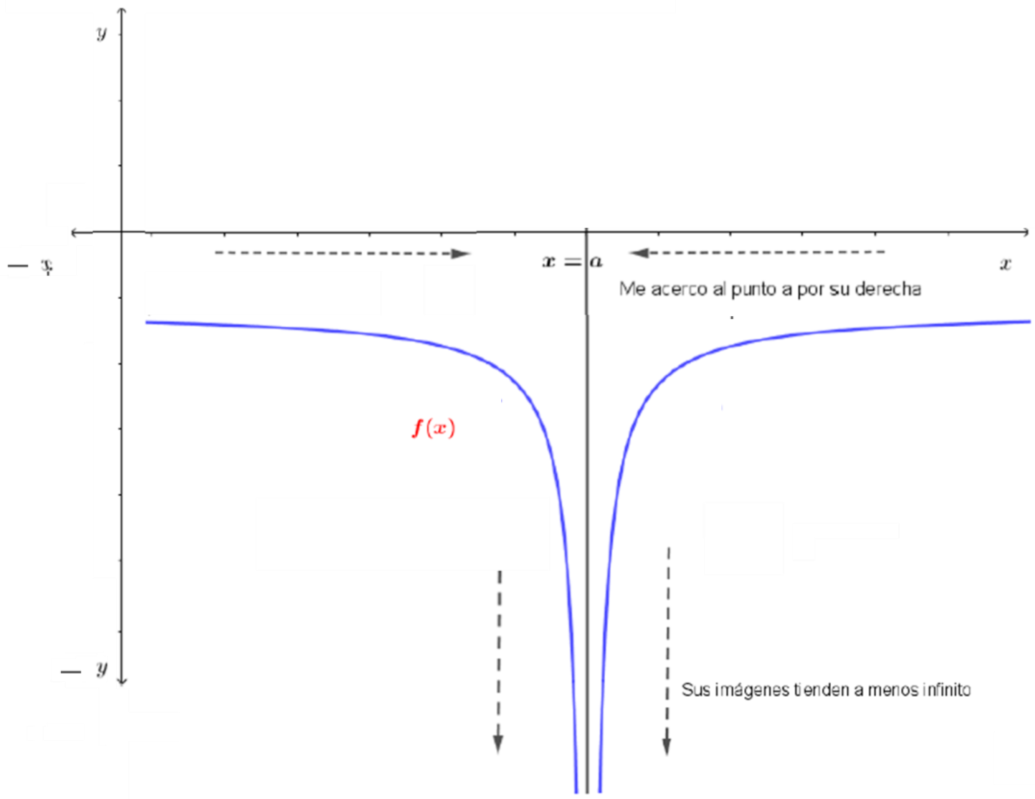
Tipo de Límites

Límites infinitos en un punto finito

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

En la situación de la gráfica se dice que el límite cuando x tiende al punto a es $-\infty$, pues a medida que x se acerca a "*a*", la función tiende a infinito:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

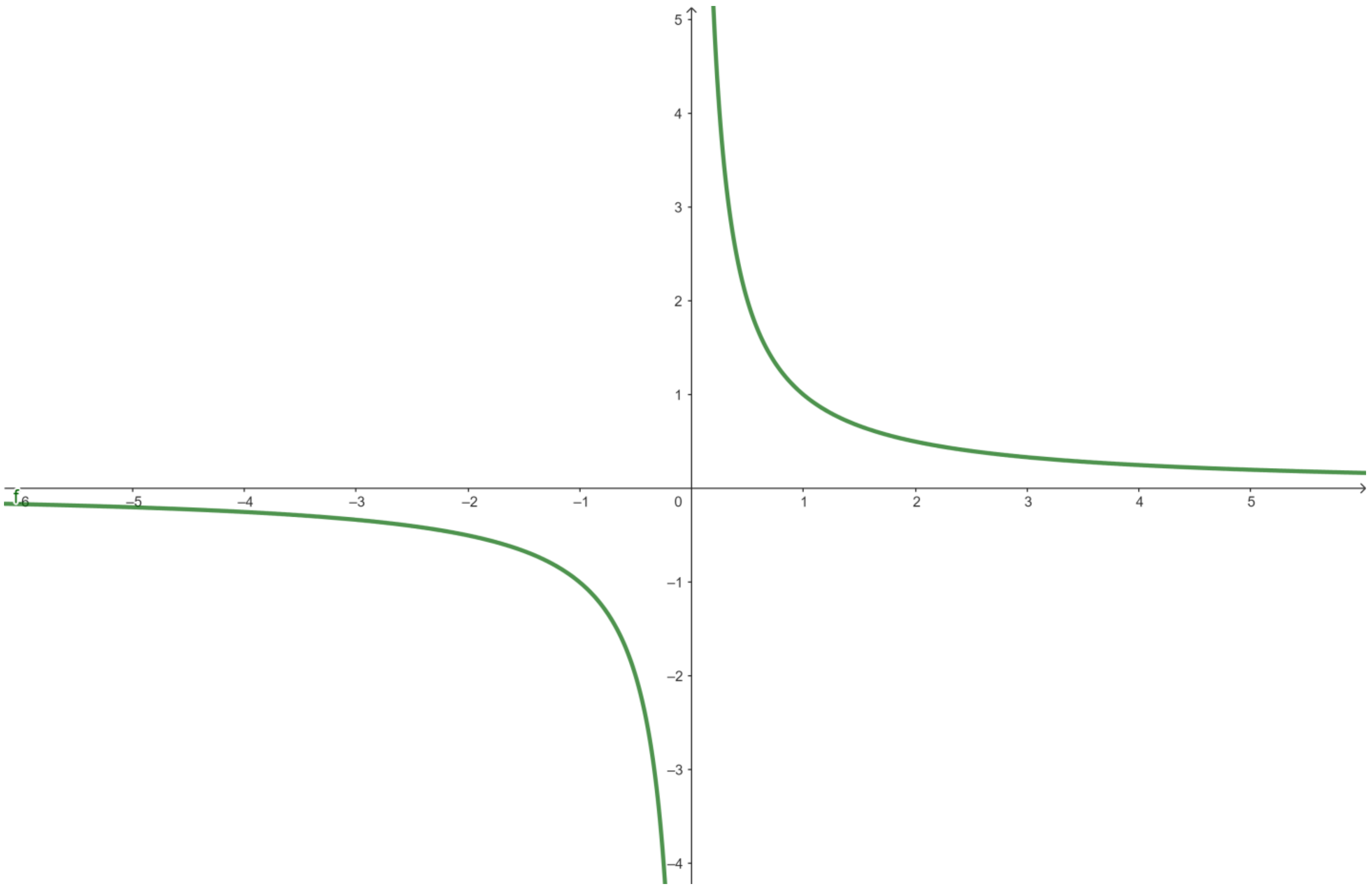


Tipo de Límites

Límites infinitos en un punto finito

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

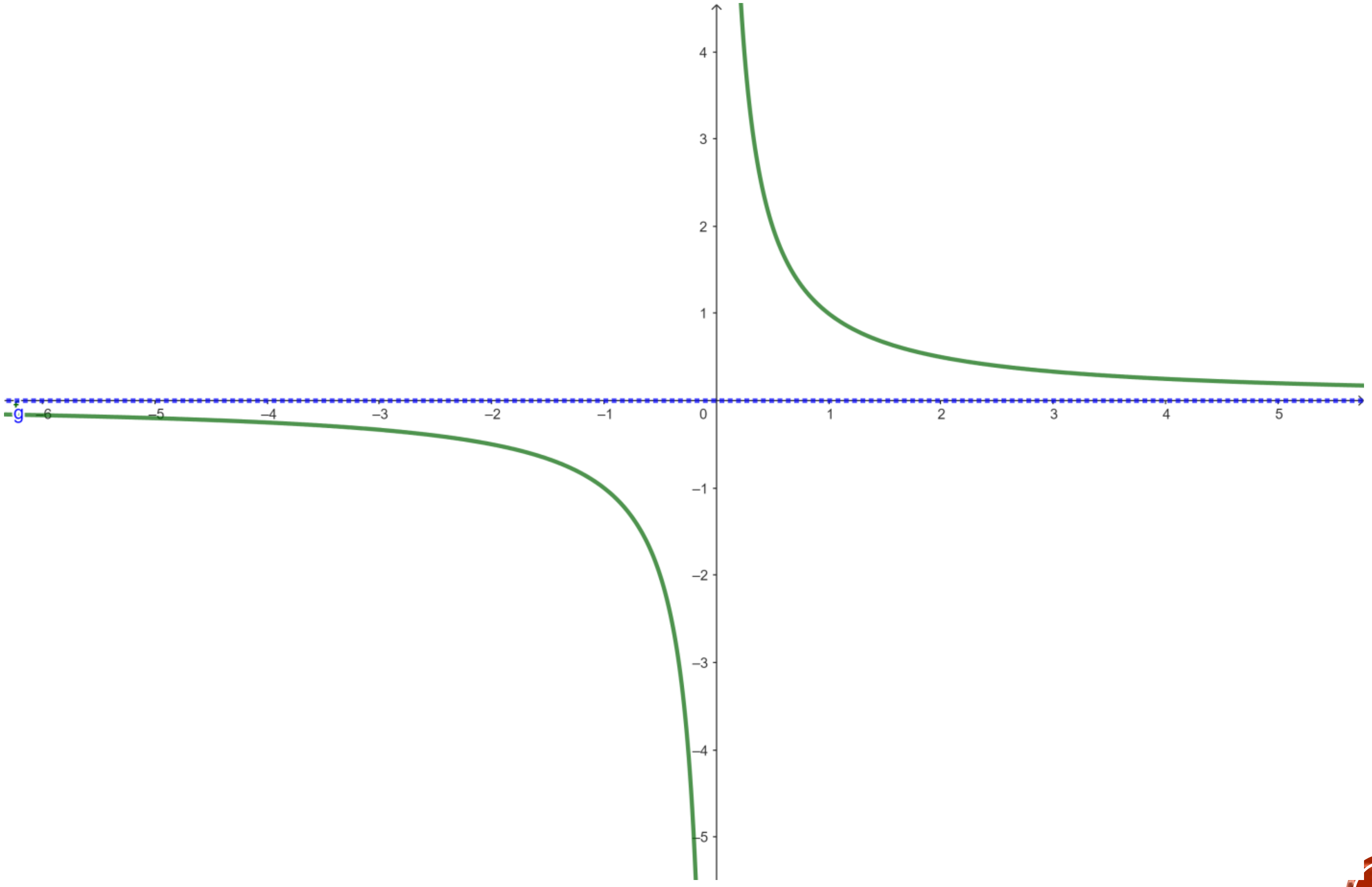


Límites finitos en el infinito.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists H > 0 / x > H \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Decimos que una función tiene límite L cuando x tiende a ∞ , cuando la función tiende a L a medida que x tiende al infinito, es decir:

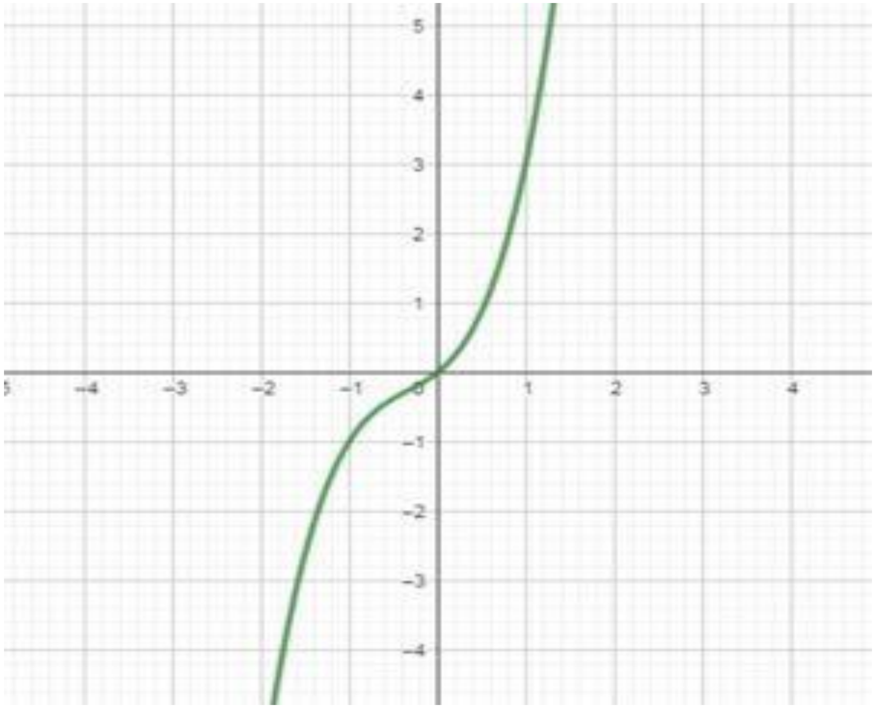
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$



Límites infinitos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \colon \exists H > 0 / x > H \Rightarrow |f(x)| > M$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$



Observación: Consideramos la noción de limite para el caso que exista y sea finito, no los casos anteriores. Por lo menos en la teoría que nosotros manejamos.

En los casos en el que los limites son infinitos, en todas las variantes mencionadas, diremos que el limite No existe.

Infinitésimos

Tienen especial importancia en el calculo diferencial e integral las funciones que tienen por limite cero, denominados **Infinitésimos**, estos se definen de la siguiente forma:

Definición:

Una función $f(x)$ es un infinitésimo para x tendiendo a a si $f(x)$ tiene limite 0 cuando x tiende a a, es decir: $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Por ejemplo

$f_1(x) = sen\ x$ es infinitésimo en $x = 0$ $(x \to 0)$.

$f_2(x) = x^3$ es infinitésimo en $x = 0$ $(x \to 0)$.

$f_3(x) = 1 - x$ es infinitésimo en $x = 1$ $(x \to 1)$.

Observaciones:

-No existen números infinitésimos, sino funciones infinitésimas en un punto.

-Las funciones no son infinitésimas en general, sino en determinados puntos de x.

Operaciones con infinitésimos:

1)La suma algebraica de infinitésimos en un mismo punto x=a es un infinitésimo en el punto a.

2) El producto de dos infinitésimos en un mismo punto x=a es un infinitésimo en el punto a.

3) El producto de un infinitésimo en un punto x=a por una constante K cualquiera es un infinitésimo en el punto a.

Número e

Consideremos la siguiente expresión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, con $n \in N$, a la cual llamaremos sucesión de números naturales:

Para distintos valores de n, tenemos lo siguiente:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \qquad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25 \qquad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \simeq 2{,}37\ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$a_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \simeq 2{,}7048\ldots \qquad a_{999} = \left(1 + \frac{1}{999}\right)^{999} \simeq 2{,}7169\ldots$$

$$\ldots$$

Por lo tanto podemos intuir que los valores crecen indefinidamente hacia una cota superior. **Este valor que acota superiormente la sucesión es el número e**.

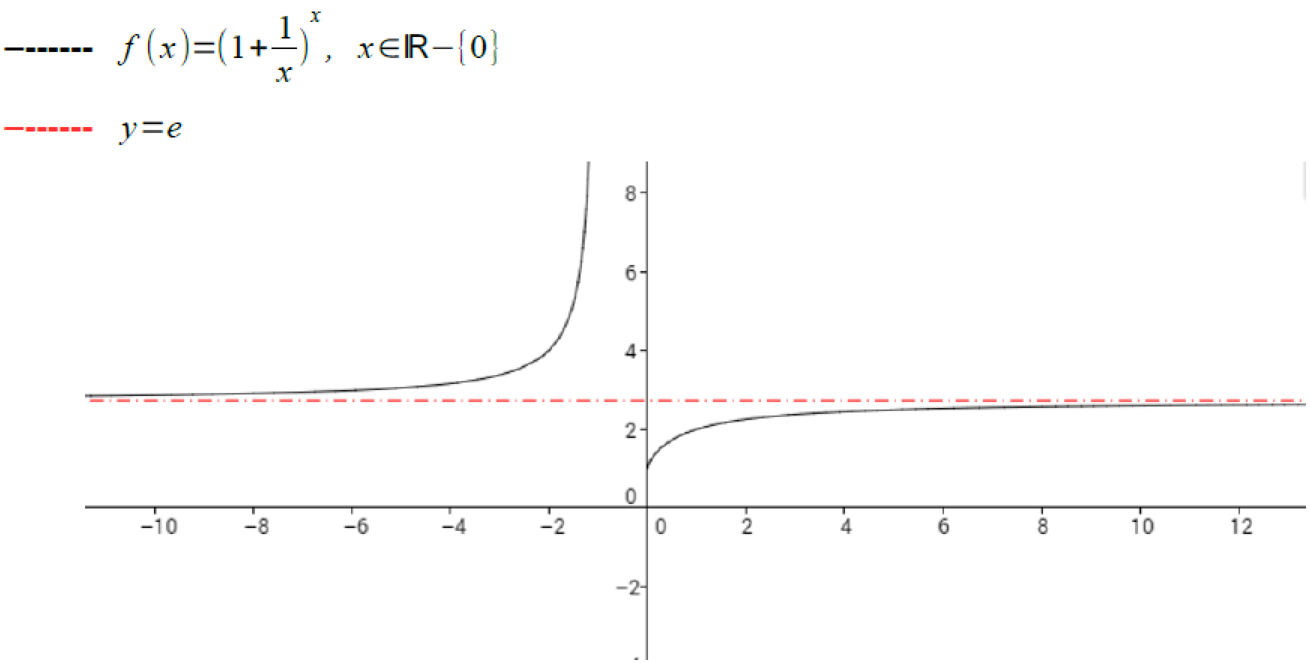
Es decir: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7169$ ...con $n \in N$

El numero e es un numero irracional, con infinitos decimales, y aparece, por ejemplo, en fenómenos naturales como el tiempo de desintegración medio de átomos radiactivos, en ecuaciones que modelan las señales eléctricas de los circuitos electrónicos, en ecuaciones que estiman la probabilidad de ciertos sucesos estadísticos, etc.

Pues bien, si en vez de considerar números naturales (valores discretos) la expresamos para números reales tendremos una **función de variable real cuya asíntota horizontal converge al número e** (recordamos que la base de una potencia debe ser positiva si el exponente es una función de variable real).

Es decir, si $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e \approx 2{,}7169\ldots$$



Para mayor claridad, leer el libro Cálculo Diferencial e Integral de Ricardo Noriega.

CASOS DE INDETERMINACIÓN DEL LIMITE

1. Cociente de dos infinitésimos: $\frac{0}{0}$

2. Cociente de dos infinitos: $\frac{\infty}{\infty}$

3. Producto de un infinitésimo por un infinito: $0.\infty$

4. suma de dos infinitos de distinto signo: $\infty - \infty$

5. $[f(x)]^{g(x)}$ si $f(x) \to 1$ y $g(x) \to \infty$. : 1^{∞}

6. $[f(x)]^{g(x)}$ si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$. : 0^{0}

7. $[f(x)]^{g(x)}$ si $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to 0$. : ∞^{0}

Para calcular límites en el que se presentan casos de indeterminación, conviene recurrir a artificios de tipo algebraico.

Continuidad

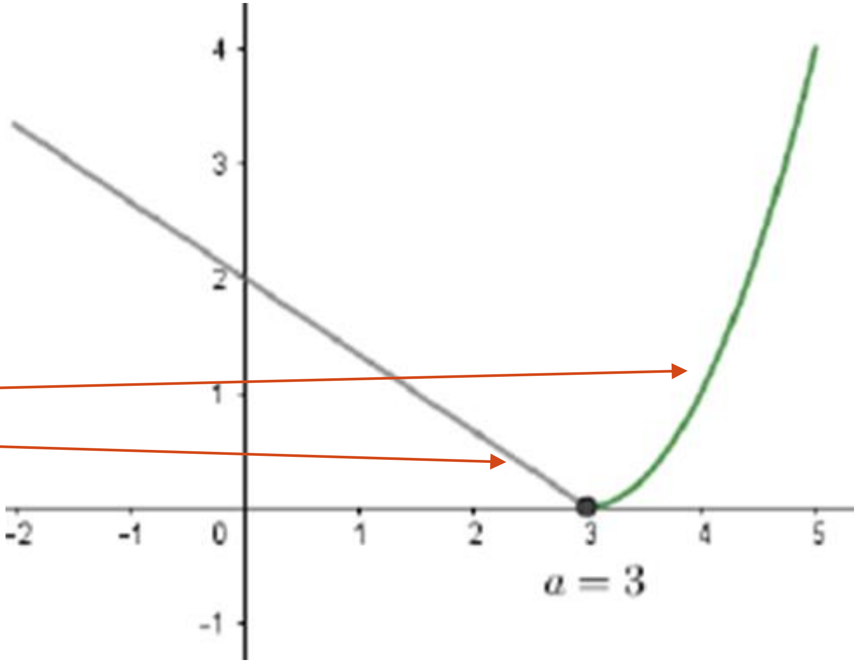
Función continua en un punto

Definición: sea $f(x)$ una función y a un punto de acumulación del Dm_f.
La función $f(x)$ es continua en $x = a$ si y solo si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Note que la definición requiere implícitamente tres cosas.
Para que la función f sea continua en $x = a$, se han de verificar las tres condiciones siguientes:

1. $\exists f(a)$ (esto es, *a* pertenece al dominio de *f*)
2. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo:
Analizar la continuidad de la función en x=3



1) $\exists f(3) = 0$

2) $\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = \ 0$

3) $\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = f(3)$

∴ f es continua en x=3

Función continua en un intervalo

Definición:
Una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a; b), si y solo si la función es continua en todo punto $x \in (a; b)$.

Función continua

Definición:
Una función $f(x)$ es continua si es continua en todo punto x de su dominio, es decir $x \in Dm_f$.

Discontinuidad

Si no se verifica la definición de continuidad en un punto, la función considerada es discontinua en dicho punto.

Una función $f(x)$ puede ser discontinua en $x = a$, si:

$\nexists f(a)$ $\quad\quad$ $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ $\quad\quad$ $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente, se pueden dar por las siguientes causas:

-No pertenecer el punto al dominio de la función, es decir, no existe la imagen en dicho punto.

-La no existencia del límite en el punto.

-En el caso de existir la imagen y el límite en el punto, ambos no coincidan.

Clasificación:

Evitable

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en el punto $x = a$ si y solo si existe el limite finito de f en a.

Esencial

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial en el punto $x = a$ si y solo si no tiene limite finito en a.

Evitable

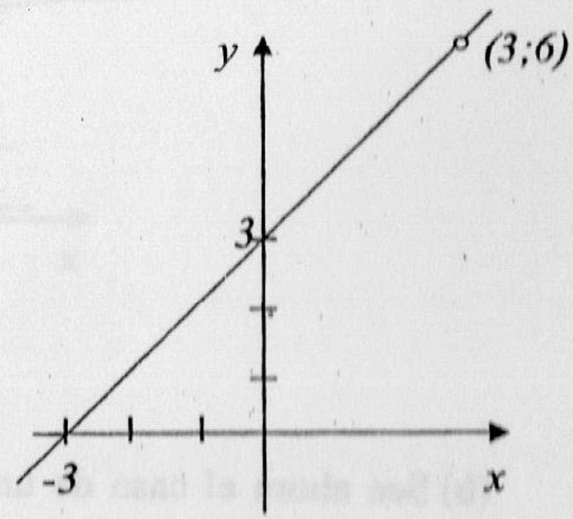
Ejemplo:

En este caso particular, como la función no esta definida en $x = a$, pero existe el limite finito en dicho punto, se dice que la función presenta en $x = a$ una Discontinuidad evitable.

Ejemplo: Sea: $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 3$.

(1)- $\nexists\, f(3)$

(2)- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} x + 3 = 6$



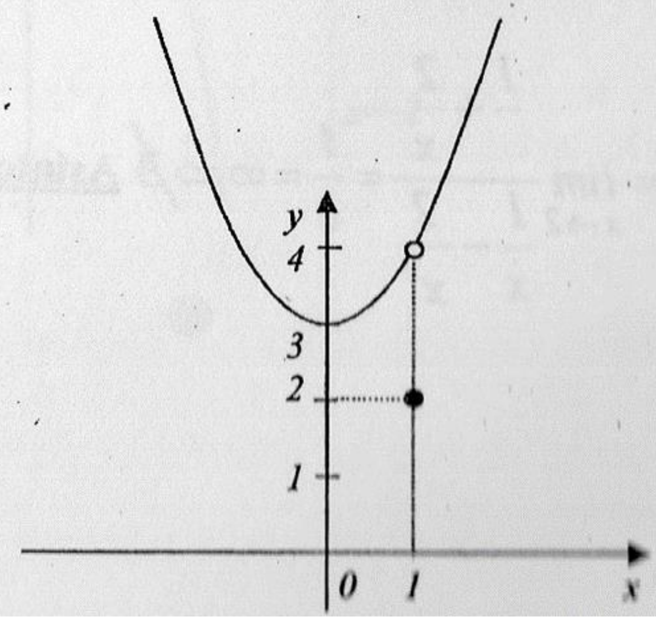
redefiniendo: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & ;\ \text{si } x \neq 3 \\ 6 & ;\ \text{si } x = 3 \end{cases} \Rightarrow$ f(x) es continua. $\therefore\ f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ tiene una Discontinuidad evitable, pues basta tomar como valor de la función en el punto considerado el valor de su límite para que desaparezca la discontinuidad.

Ejemplo:

En este caso, la función presenta una discontinuidad en $x = a$ (definiéndose a $x = a$ como punto aislado), puesto que el valor de la función $f(a)$, es distinto a los límites laterales.

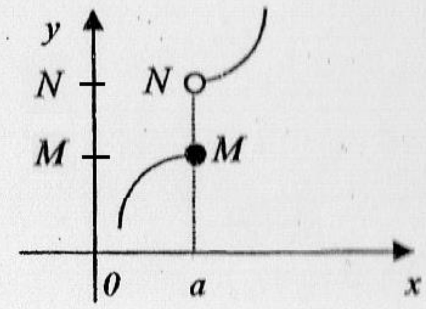
<u>Ejemplo</u>: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \ ; \ si \ x \neq 1 \\ 2 \ ; si \ x = 1 \end{cases}$

$$f(1) = 2 \neq \lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = 4$$



Esencial

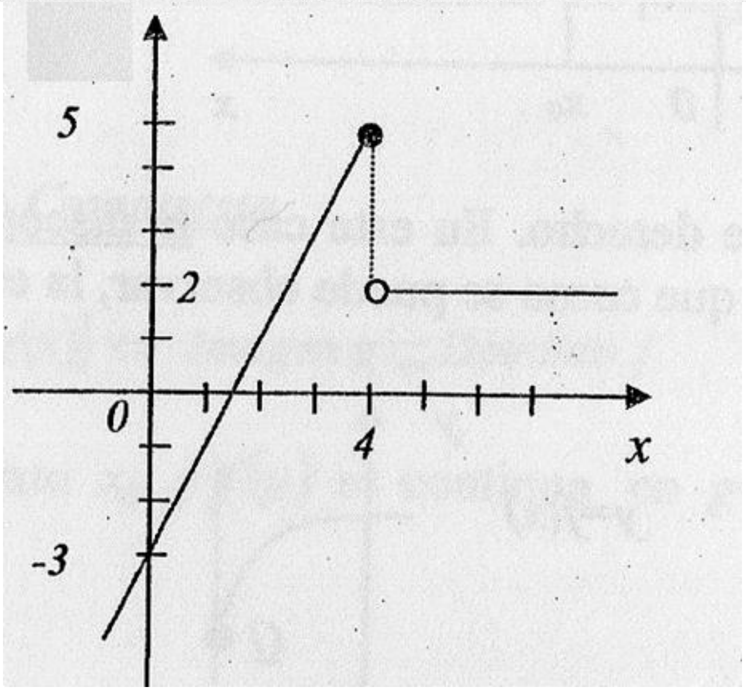
Según la gráfica: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = M \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = N \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$



Ejemplo:

<u>Ejemplo</u>: Sea: $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & ; \ si\ x \leq 4 \\ 2 & ; \ si\ x > 4 \end{cases}$; Estudiaremos las condiciones de continuidad en $x = 4$.

Ejemplo: Sea: $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & ; \; si\; x \le 4 \\ 2 & ; \; si\; x > 4 \end{cases}$; Estudiaremos las condiciones de continuidad en $x = 4$.



(1)- $f(4)=5$

(2)- $\nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x)$; pues: $\lim\limits_{x\to 4^+} 2 = 2 \;\wedge\; \lim\limits_{x\to 4^-} 2x-3 = 5$

Propiedades de las funciones continuas.

1) Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $x = a$, entonces:

a) $f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$

b) $f(x)\ .\ g(x)$ es continua en $x = a$

c) *Si* $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$

2) Toda función polinómica de grado n es continua