LÍMITE POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA

Propiedad: Una función admite al mismo número real L como límite por la derecha y por la izquierda de un punto a si y solo si dicha función tiene límite finito L en el punto a, es decir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$$

DEMOSTRACIÓN:

$\Rightarrow)$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$

Quiero probar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, sabiendo que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Como, por hipótesis, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ ① $\wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ ②

Sea $\varepsilon_1 > 0$

Por ①, $\exists\ \delta_1 > 0 \ /\ 0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$

Por ②, $\exists\ \delta_2 > 0 \ /\ 0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$

Considerando δ = min$\{\delta_1, \delta_2\}$, sea $x/0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow\ 0 < x - a < \delta \le \delta_1 \Rightarrow 0 < x - a < \delta_1 \overset{①}{\Rightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon_1 \vee$

$-\delta < x - a < 0 \underset{\times -1}{\Longleftrightarrow} \delta > a - x > 0 \Leftrightarrow 0 < a - x < \delta \le \delta_2 \overset{②}{\Rightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon_1$

$\therefore\ |f(x) - L| < \varepsilon_1$ $\qquad \therefore\ \lim_{x\to a} f(x) = L$

$\Leftarrow)$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = L \Leftarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$

Quiero probar que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = L$, sabiendo que $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Por hipótesis, se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces, por definición:

Dado $\varepsilon_1 > 0, \exists\ \delta > 0/0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$

Si $x/0 < x - a < \delta \Longrightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$

$\therefore\ \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Si $x\ /\ 0 < a - x < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$

$\therefore \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

$\therefore\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$