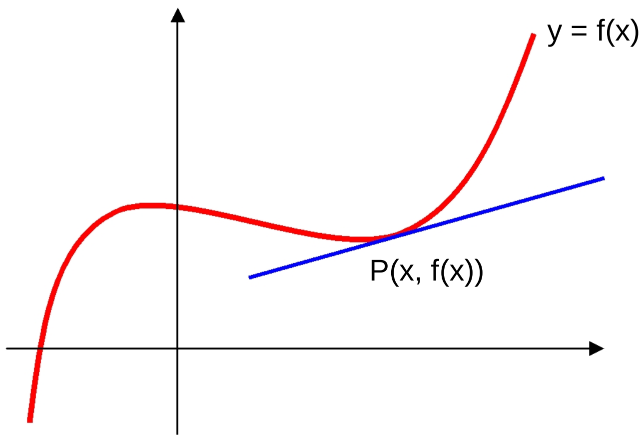
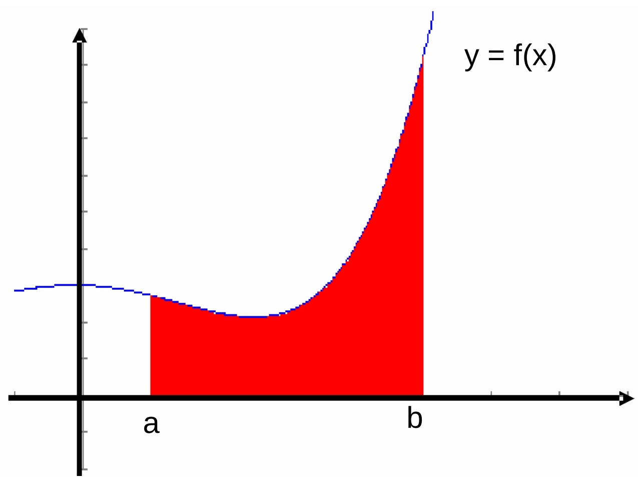
CONCEPTO Y DEFINICIÓN DE LÍMITES. LÍMITES FINITOS E INFINITOS. SUCESIONES. EL NÚMERO e.



La base del Calculus, gira en torno a dos problemas geométricos fundamentales, que han sido estudiados hace muchos años, el primero de ellos se le conoce con el nombre del Problema Fundamental del Cálculo Diferencial y su formulación es la siguiente: *Dado un punto P(x,f(x)) sobre la curva y=f(x), ¿cómo calcular la pendiente de la recta tangente en P?*



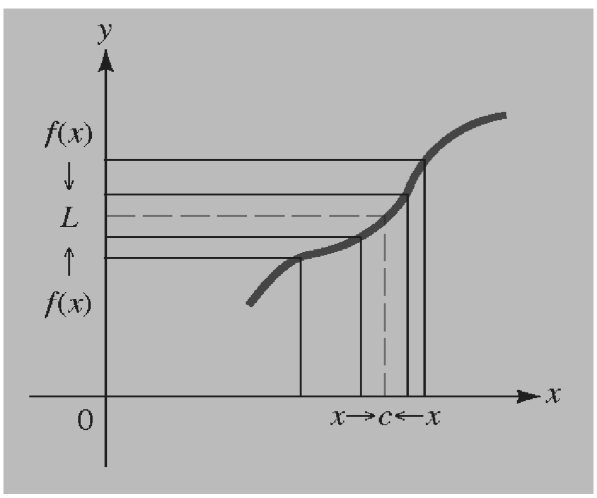
El problema de la tangente es un problema geométrico, pero su respuesta (en la forma de derivadas) es la clave para la solución de diversos problemas de aplicación en muchas áreas científicas y técnicas.
El segundo problema, llamado Problema Fundamental del Cálculo Integral, se formula así: Si f(x)≥0 para x en el intervalo [a,b], *¿cómo calcular el área A de la región plana que está bajo la curva y=f(x) y sobre este intervalo?*
Si bien ambos problemas serán resueltos más adelante (Unidades III y VIII), hoy estudiaremos el concepto rector en el Calculus: el concepto de límite, sobre el que se asientan las soluciones de ambos problemas. Si bien existen distintas aproximaciones, nosotros seguiremos la formulación de Cauchy.
El límite de una función en un cierto numero c describe lo que le sucede a esa función a medida que la variable x se aproxima a c.
Suponga que se desea conocer qué le sucede a la función

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, x≠1, a medida que x se acerca a 1. Analicemos la siguiente tabla de valores:

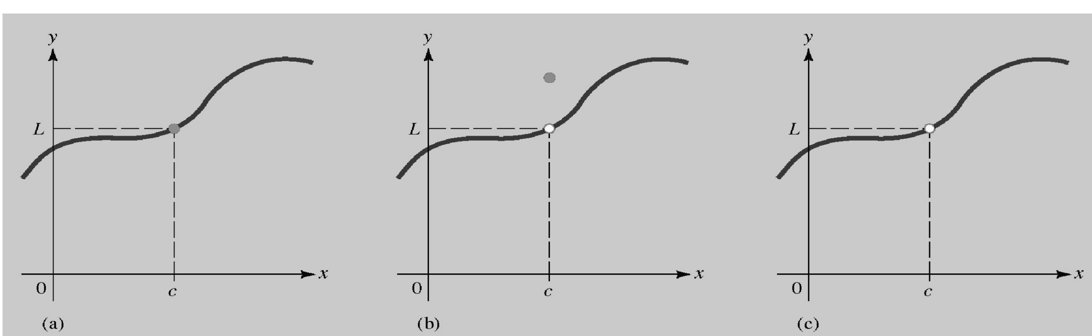
x tiende a 1 por la izquierda			$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, x≠1			x tiende a 1 por la derecha		
0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25
2.313	2.710	2.970	2.997	?	3.003	3.030	3.310	3.813

Aunque f no está definida en x=1, la situación puede resolverse calculando f(x) para valores de x que se acercan cada vez más a 1 por la izquierda y por la derecha.

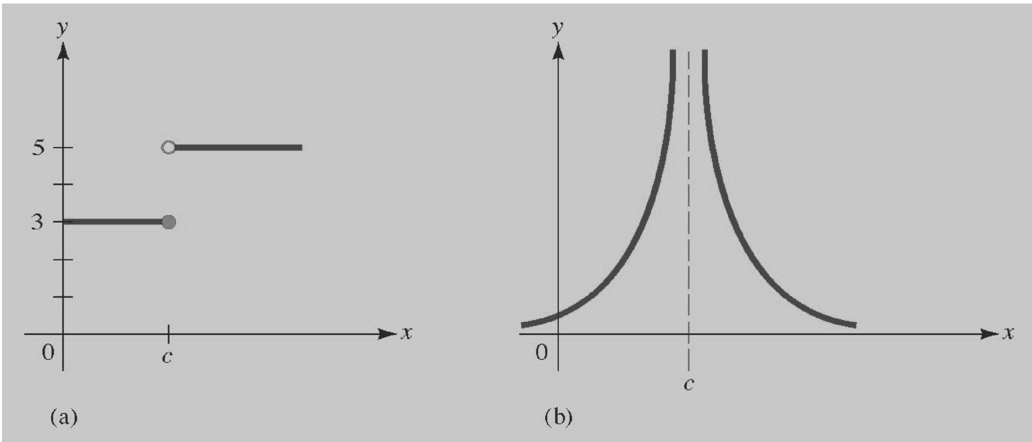
Definición provisional. La función f *tiende* hacia el *límite* L cerca de c, si se puede hacer que f(x) esté tan cerca como queramos de L, haciendo que x esté suficientemente cerca de c, pero siendo *distinto* de c, y se dice que *el límite de f(x) es igual a L cuando x tiende a c*, lo que se denota como $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$.



Volvamos a la tabla anterior, así vemos que *sí 0,999<x<1,001, entonces 2,997<f(x)<3,003*, usando valor absoluto, lo anterior se puede escribir como *si* $|x-1|<0{,}001$ *entonces* $|f(x)-3|<0{,}003$, donde c=1, y L=3.
Analicemos los siguientes gráficos.



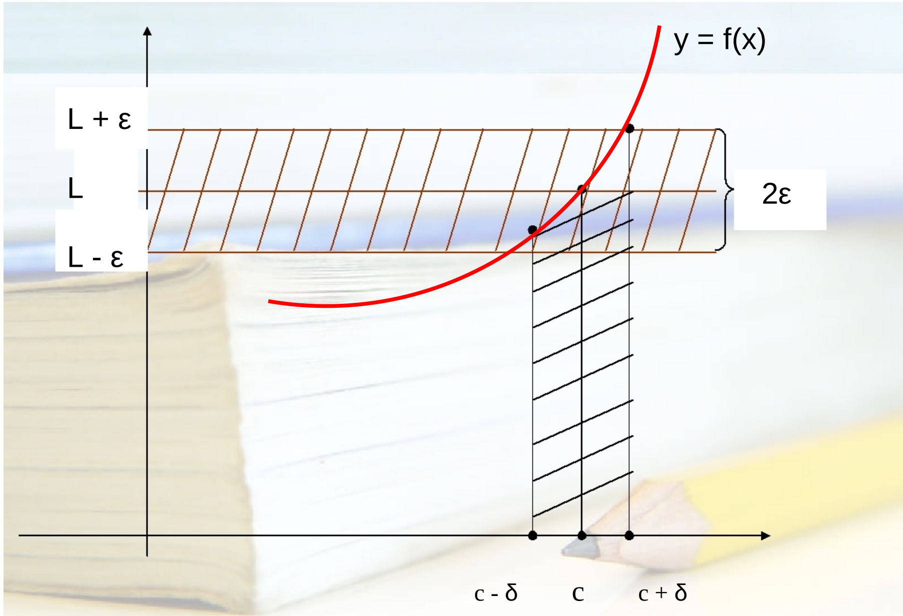
Las tres funciones representadas, tienen comportamientos distintos *cerca* del punto c, la función del inciso (a), está definida en el punto y las imágenes de valores cercanos a c, está cercanos a L; en el inciso (b), f(c) no está cerca de las imágenes de argumentos cerca de c; y en el inciso (c), ni siquiera está definida en el punto, sin embargo, en los tres casos, el límite de la función en el punto c es L.
Veamos ahora las siguientes funciones.



Es claro que en ambos casos, valores cercanos a c no producen, en sus imágenes, ningún acercamiento a un valor dado L: en el inciso (a) porque por la derecha y la izquierda se toman valores distintos y en el inciso (b), porque la función crece sin cota.
En lo que sigue, a menos que se establezca lo contrario, se considerará que f es una función real, definida sobre un dominio X y c (no necesariamente un punto de X) es un punto de acumulación de dicho conjunto, es decir, un punto que en cualquier vecindad suya, contiene puntos del conjunto X, distintos de el.

Definición 1 (Límite según Cauchy). El número L, se llama límite de la función f en el punto c, si cualquiera sea $\varepsilon>0$, se puede encontrar un $\delta=\delta(\varepsilon)$, para el cual la condición $|x-c|<\delta$, $x\neq c$, implica que $|f(x)-L|<\varepsilon$. Esto se denota como $\underset{x\to c}{Lim}\ f(x)=L$.

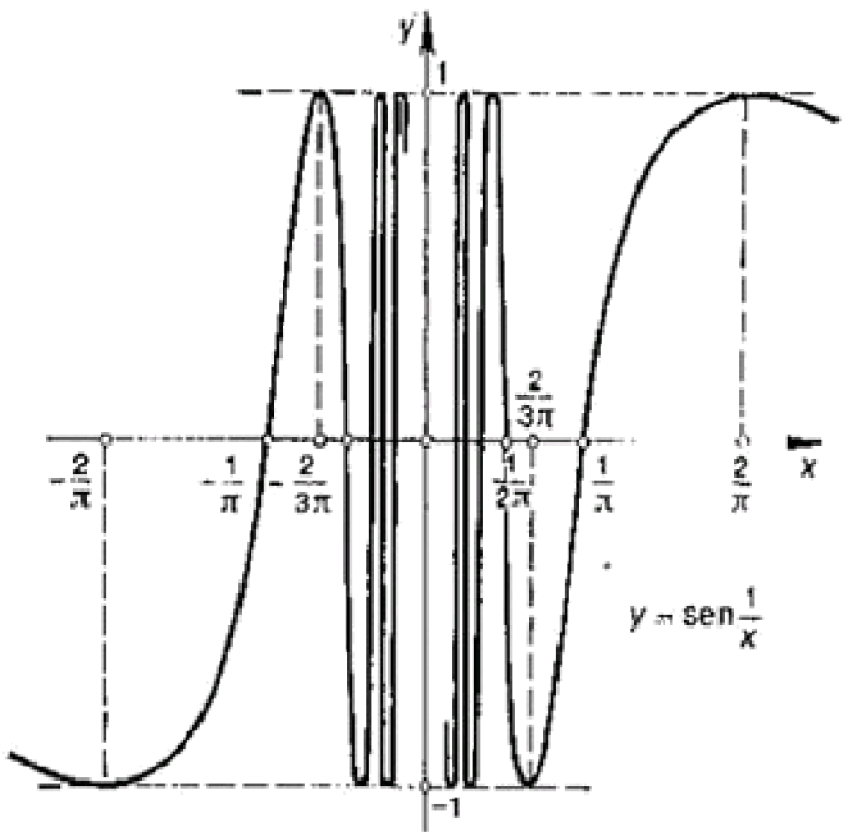
Gráficamente esto significa que dentro de la franja horizontal del plano (x,y), comprendida entre (L- ε, L+ ε), están todos los puntos del gráfico de la función, correspondientes al intervalo (c-δ, c+δ) excepto, posiblemente, el de c. En consecuencia, *dos funciones que son iguales para todos los valores de x, distintos de c, tienen el mismo límite para x→c*.



¿Qué significa esto en la práctica? Que es correcto, antes de calcular el límite, hacer en la función todas las simplificaciones convenientes, incluso la supresión de factores comunes que se anulan para x=c, siempre que éstos no se anulen para otros valores de x, próximos a c. Así la función $f(x)=\frac{x^2+2x}{x}$, tiene como límite 2, cuando $x\rightarrow 0$, puesto que para todo valor $x\neq 0$, f(x) es x+2.
Geométricamente, la definición anterior puede ilustrarse en el siguiente gráfico.

Y ahora llegamos a un punto clave. El valor L es *único*. Sin embargo, si aceptamos que tanto L como K son límites de f(x) en el punto c, resulta que si $|x-c|<\delta$, f(x) tiene que estar simultáneamente cerca de L y de K, como f(x) es una función uniforme, esto no es posible. ***En consecuencia, no es posible que una función tenga dos límites distintos.*** Su demostración es muy sencilla y la dejamos como entretenimiento (Spivak, p.120).
Observemos que con la indicación $x\rightarrow c$, decimos que x se aproxima indefinidamente al valor c, pero puede tomar valores mayores o menores que c, puede acercarse a c, por la derecha o la izquierda. Veamos el siguiente gráfico.
Obsérvese que al tender x a 0, y oscila indefinidamente, sin tender hacia ningún valor fijo; por el contrario, toma infinitas veces todos los valores entre -1 y +1, de ahí que sea imposible que exista algún

valor L. Esto equivale a decir que no es verdad que para todo ε>0 para el que se cumpla que |f(x)-0 |<ε eligiendo x suficientemente pequeño y distinto de cero. Para demostrar esto, nos basta con encontrar un ε>0 para el cual no se pueda garantizar la condición |f(x)-0 |<ε, por pequeño que se haga |x|. De hecho, ε=1/2 cumple lo dicho, es imposible asegurar que |f(x)|<1/2 por pequeño que sea |x|; pues si A es un intervalo cualquiera que contiene al cero, existe x=1/(π/2+2nπ) que está en dicho intervalo (a partir de un cierto valor de n), para el que se cumple que f(1/(π/2+ 2nπ)=1>1/2.
La misma argumentación puede utilizarse para demostrar que f no



se aproxima a ningún número cerca de 0. Para demostrar esto debemos encontrar, cualquiera que sea el número particular L, algún número ε>0 tal que |f(x)-L |<ε no se cumpla, por pequeño que se haga x. En particular, ε=1/2 sirve cualquiera sea L, la razón sigue siendo la misma: para cualquier intervalo A que contenga el cero, existirá un número de la forma en dicho intervalo cuya imagen es 1 (también existen números de la forma 1/(3π/2+ 2mπ) en este intervalo, tal que su imagen es -1). Pero el intervalo L-1/2 a L+1/2 no puede contener a la vez a 1 y -1, pues su longitud es solamente 1, así no se puede tener a la vez |1-L |<1/2 y |-1-L |<1/2, sea cual sea el valor de L.

Debemos aclarar el hecho de que la oscilación de un función puede impedir que esta tenga límite en el punto, si tomamos en consideración la función $f(x) = xsen\frac{1}{x}$, vemos que las ordenadas de la función anterior están multiplicadas por x, y cuando ésta disminuye, las oscilaciones de la función van decreciendo y están limitadas a la región comprendida entre las dos bisectrices de los ejes (x y –x), de aquí que cuando x tiende a cero, f(x) también lo hace, por lo que L=0.
No obstante, estas observaciones nos llevan a la consideración del *modo* de tender x a c, es decir, a considerar los *Límites laterales*.

Límite lateral izquierdo. El límite lateral izquierdo de f(x) cuando x tiende a c (o límite de f(x) cuando x tiende a c por la izquierda) es igual a L si podemos acercar arbitrariamente a L los valores de f(x) aproximando x lo suficiente a c, con valores de x menores que c y se escribe $\underset{x \to c^-}{Lim}\ f(x) = L$.

Límite lateral derecho. Análogamente, el límite lateral derecho de f(x) cuando x tiende a c (o límite de f(x) cuando x tiende a c por la derecha) es igual a L si podemos acercar arbitrariamente a L los valores de f(x) aproximando x lo suficiente a c, con valores de x mayores que c y se escribe $\underset{x \to c^+}{Lim}\ f(x) = L$.

Es claro que si en el punto c, ambos límites laterales existen y son iguales, entonces el límite en el punto existe y es igual a dicho valor común, es decir, $\underset{x \to c^+}{Lim}\ f(x) = \underset{x \to c^-}{Lim}\ f(x) = L = \underset{x \to c}{Lim}\ f(x)$.
Recíprocamente, la existencia de límite en el punto, implica la existencia e igualdad de ambos límites laterales. Sin embargo, ambos límites laterales pueden existir y no ser iguales, por ejemplo, la función y=sgn x, tiene límite lateral derecho en el cero igual a 1 y límite lateral izquierdo igual a -1, es claro entonces que no existe el límite de la función en x=0. Estas observaciones nos permiten formular el siguiente resultado.

Condición para la existencia del límite de una función en un punto. Para que una función tenga límite en el punto c, es necesario y suficiente que *ambos límites laterales existan y sean iguales*.

Esto nos dice que los límites laterales son un instrumento útil para determinar si una función tiene o no límite en un punto. Veamos otro ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}, & si\ x<0\\ x^3, & si\ x>0\end{cases}$$

Para dicha función, vemos que ambos límites laterales existen y son iguales a cero, de aquí que la función tendrá límite en el punto y su valor será 0.

¿Qué pasa si ambos límites laterales son iguales pero infinitos? En este caso diremos que la función tiene *límite infinito* en el punto c, tomemos como ejemplo la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ en el punto x=2; por supuesto que ambos límites laterales pueden ser infinitos de distintos signos, sea el caso de la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, cuyo límite lateral derecho es $+\infty$ y el izquierdo $-\infty$, cuando x tiende a 1.
Ahora bien, si queremos demostrar que una función no tiene límite en el punto, no siempre tenemos que calcular sus límites laterales, basta con negar *con cuidado y correctamente* la definición 1.

Si *no* es verdad que

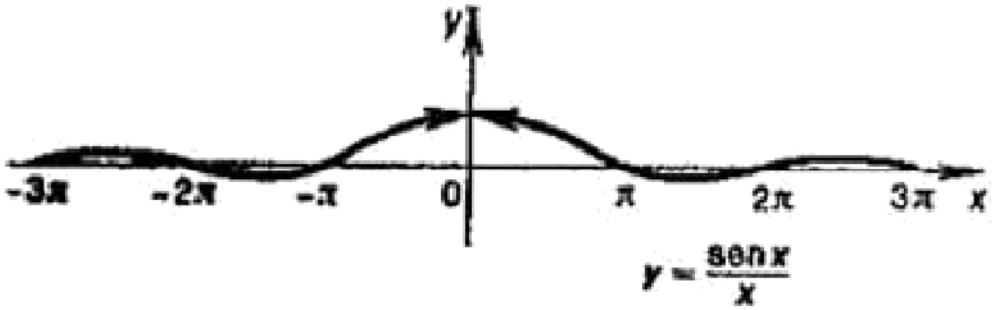
> cualquiera sea $\varepsilon>0$, se puede encontrar un $\delta=\delta(\varepsilon)$, para el cual la condición $|x-c|<\delta$, $x\neq c$, implica que $|f(x)-L|<\varepsilon$,

se cumple entonces que,

> existe *algún* $\varepsilon>0$, tal que para todo $\delta>0$, existe *algún* x para el que se cumple que $|x-c|<\delta$, pero no $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Así, para demostrar que la función $f(x)=sen\dfrac{1}{x}$ no tiene límite en x=0, consideramos $\varepsilon=1/2$ y observamos que para todo $\delta>0$ existe un x con $|x|<\delta$, pero para el que no se cumple que $\left|sen\dfrac{1}{x}-0\right|<\dfrac{1}{2}$, a saber, un x de la forma $1/(\pi/2+n\pi)$ con n suficientemente grande, tal que $1/(\pi/2+n\pi)<\delta$.
Para ilustrar como se plica la definición a una función que tiende a un límite, probemos que $\underset{x\to 1}{Lim}(3x-8)=-5$.

Sea ε arbitrario. Debemos encontrar $\delta>0$ tal que si $|x-1|<\delta$, $x\neq 1$, entonces $|(3x-8)-(-5)|<\varepsilon$, En otras palabras, es necesario resolver la



desigualdad

$$|(3x-8)-(-5)|=3|x-1|<\varepsilon.$$

Evidentemente, si $\delta=\varepsilon/3$, para $|x-1|<\delta$ se cumple que

$$|(3x-8)-(-5)|<3\delta<3(\varepsilon/3)= \varepsilon.$$

Hasta ahora, hemos analizado la existencia (o no) del límite de una función en un punto c cualquiera (pero finito), ¿cómo extender estas nociones al caso en que c sea ∞?
Observemos el siguiente gráfico.
A medida que x crece en magnitud (hacia la derecha o a la izquierda), el cociente senx/x toma valores cada vez más pequeños. En realidad, lo que estamos diciendo es que si x se hace infinitamente grande (a $+\infty$ ó $-\infty$), senx/x tiende a cero y se escribe $\underset{x\to\infty}{Lim}\dfrac{senx}{x}=0$. Un límite de la forma $\underset{x\to\infty}{Lim}\ f(x)$ suele llamarse *límite al infinito*.

Formalmente, $\underset{x\to\infty}{Lim}\ f(x)=L$ significa que, para todo $\varepsilon>0$, existe un número N tan grande, que, para todo x, si x>N, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.
Debe quedar clara la analogía con los límites que hemos tratado hasta ahora (finitos o no), mientras la condición $|x-c|<\delta$, expresa el hecho que x está *cerca* de x, la condición x>N, expresa el hecho que x es *suficientemente grande*.
En el cálculo de límites, no siempre es posible disponer del gráfico de la función. Por esta razón, es conveniente saber determinar el límite de una función mediante procedimientos algebraicos. Para esto es necesario conocer algunos límites básicos y una cierta *álgebra de límites*.

ÁLGEBRA DE LÍMITES

Si existen (finitos) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, entonces:

1) $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$

¿El recíproco es cierto? Dé un ejemplo.

2) $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\bullet g(x)\right]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\bullet \lim\limits_{x\to c} g(x)$

3) Si $\lim\limits_{x\to c} g(x)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ (ambos no nulos)

Estas propiedades excluyen, por ejemplo, el resultado ∞-∞ en la propiedad 1, pues la hemos establecido para límites finitos y será estudiada más adelante en lo que se conoce como indeterminaciones.

Otras propiedades fundamentales son las siguientes.

Propiedad del acotamiento. Si una función tiene límite en un punto, existe un entorno de ese punto en el que la función está acotada.

Propiedad de la conservación del signo. Si el límite de una función en un punto no es cero, existe un entorno de ese punto en el que la función tiene el mismo signo que el límite.

Propiedad del emparedado. Sean h, f y g tres funciones definidas en un entorno reducido de un punto c, y tales que en ese entorno se verifica h(x)≤f(x)≤g(x). Si existen los límites de h(x) y de g(x) cuando x tiende al punto c y ambos límites tienen el mismo valor, por ejemplo K, entonces también existe el límite de f(x) cuando x tiende al punto c y ese límite es necesariamente K.

Dentro de las funciones reales, ocupan un lugar especial las que están definidas sobre el dominio de los números naturales **N**, dichas funciones reciben el nombre de *sucesiones.*

Una sucesión se simboliza por x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... en la que el subíndice n indica, exactamente, el lugar que cada término ocupa en la misma. Así, x_5 es el quinto término de la sucesión.

Cuando en una sucesión haya que referirse a un término cualquiera sin especificar el lugar que ocupa se hará siempre mención al término x_n, denominado término *n*-ésimo. En definitiva, el lugar que cada término tome en una sucesión será de vital importancia a la hora de hacer un mínimo análisis del comportamiento de la sucesión. Los subíndices son los números naturales porque una

sucesión tiene tantos elementos como números naturales hay; es decir, una sucesión tiene una cantidad infinita numerable de términos.
Se debe recordar que el *término general de una sucesión* es una expresión que permite conocer un elemento cualquiera siempre que se sepa el lugar que ocupa, es decir, el valor de n.
Es claro entonces, que las propiedades de las funciones reales que hemos estudiado, son aplicables a las sucesiones, como caso particular de estas. Lo mismo es válido para los límites, con la salvedad que el único caso a considerar sería cuando $n\rightarrow+\infty$, ya que ningún otro comportamiento, arroja una infinidad de valores. En términos precisos, una sucesión que tenga límite finito se dice convergente.
No obstante, queríamos detenernos en un resultado que nos lleva a una constante muy significativa para las Matemáticas y sus aplicaciones: *el número e*. El que obtendremos como límite de una sucesión muy particular. Primeramente, veamos el siguiente resultado.

Teorema 1. Toda sucesión x_n acotada superiormente (inferiormente) y monótona creciente (decreciente) es convergente y se tiene que lim x_n=sup $\{x_n\}$ (lim x_n=inf $\{x_n\}$).

Sea $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$, n=1,2,3,… Probemos que esta sucesión converge. Aplicando la Fórmula del Binomio de Newton, obtenemos:

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3}+...+\frac{n(n-1)(n-2)...1}{1.2.3...n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+...+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})....(1-\frac{n-1}{n})$$

Todos los sumandos son positivos y al pasar de n a n+1, su número aumenta. Además, es una sucesión creciente, es decir, $x_n< x_{n+1}$. En la expresión anterior, cada paréntesis de la forma (1-s/n) es menor que la unidad y $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$ (demuéstrelo!!!!) se obtiene

$$x_n< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} \leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$$

como $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2^n}$, se tendrá en definitiva que 2< x_n<3. Por el Teorema 1, la sucesión es convergente a su supremo y este límite se define como e, es decir, $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Un resultado más general, $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ se demuestra en Piskunov, pp. 51-52.

Por último, queríamos presentar un ejemplo "patológico" de una función real, definida sobre todo **R**, que solo tiene límite en un punto.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x, & x\in Q \\ -x, & x\in I \end{cases}$, ¿en qué punto únicamente tiene límite?, ¿por qué?

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. M. (1960)-"Análisis Matemático", Reverté, Barcelona.

Piskunov, N. (1994)-"Cálculo diferencial e integral", Limusa, México. (pp.28-54)

Rey Pastor, J.; P. Pi Callejas y C. A. Trejo (1958)-"Análisis Matemático", I, Kapelusz, Buenos Aires. (pp.372-387)

Rabuffetti, H. T. (2002)-"Introducción al análisis matemático", Buenos Aires, El Ateneo.

Spivak, Michael (1999)-"Calculus. Cálculo infinitesimal", Segunda Edición, Ed. Reverté. (pp.107-140)

Sánchez, Carlos (1982)-"Análisis Matemático", Tomo I, Editorial Pueblo y Educación, La Habana. (pp. 78-140 y 227-242)

SITIOS WEB RELACIONADOS

http://hilbert.dartmouth.edu/~m3f02/
http://www.math.harvard.edu
http://math.smith.edu/Local/cicintro/cicintro.html/
http://king.mcs.drexel.edu/~hanton/
http://www.mathcentre.ac.uk/staff.php/all_subjects/graphs/simple/
http://www.learner.org/channel/courses/learningmath/algebra/session5/index.html
http://math.exeter.edu/rparris
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Analisis/Funciones_polinomicas/
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Analisis/Funciones_elementales/unidad3.htm

http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Limite_en_un_punto_continuidad/Dominio_definicion_funcion_1.htm
http://www.geocities.com/cscience_sky/composicionfunciones.htm
http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/cap_03/cap3_3-1.html

Anexo

Uno de las primeras constantes que encontró el hombre es el número π, sin embargo hay un gran contraste cuando se le compara con el desarrollo histórico de otra constante no menos famosa: el número e. El número e es, en comparación con π, un recién llegado a la escena matemática.

El número *e* llega por primera vez a las matemáticas de forma muy discreta. Sucedió en 1618 cuando, en un apéndice al trabajo de Napier sobre logaritmos, apareció una tabla dando el logaritmo natural de varios números. Sin embargo, no se reconoció que estos fueran logaritmos en base *e*, ya que la base sobre la que se calculan los logaritmos no surgió en la manera en la que se pensaba en los logaritmos en aquel entonces. Aunque hoy consideramos a los logaritmos como los exponentes a los que se debe elevar una base para obtener el número deseado, esta es una forma moderna de pensar. Regresaremos después a este punto. Dicha tabla en el apéndice, aunque no tiene el nombre del autor, es casi seguro que fue escrita por Oughtred. Unos años después, en 1624, *e* estuvo a punto de volver a la literatura matemática pero no lo logró. En ese año, Briggs dio una aproximación numérica al logaritmo base diez de *e* sin mencionar a *e* específicamente en su trabajo.

La siguiente posible aparición de *e* es de nuevo dudosa. En 1647, Saint-Vincent calculó el área bajo una hipérbola rectangular. Si reconoció o no la conexión con los logaritmos es debatible y, aún si lo hubiera hecho, no había realmente razón para que se encontrara explícitamente con el número *e*. Sin lugar a dudas, hacia 1661 Huygens comprendió la relación entre la hipérbola rectangular y el logaritmo. Examinó explícitamente la relación entre el área bajo la hipérbola rectangular $yx = 1$ y el logaritmo. Por supuesto, el número *e* es tal que el área bajo la hipérbola rectangular entre 1 y *e* es igual a 1. Ésta es la propiedad que hace que *e* sea la base de los logaritmos naturales pero los matemáticos de la época no lo entendían, aunque se estaban acercando lentamente a ello.

Huygens hizo otro avance en 1661. Definió una curva a la que llamó "logarítmica" pero no en los términos en los que nosotros nos referimos a una curva exponencial, con la forma $y = ka^x$.

Nuevamente, a partir de esto sale el logaritmo base 10 de *e*, que Huygens calculó a 17 decimales. Sin embargo, en su trabajo aparece como el cálculo de una constante y no es reconocida como el logaritmo de un número (cerca otra vez pero *e* sigue sin ser reconocido).
Hay trabajos posteriores sobre los logaritmos en los que todavía no aparece el número *e* como tal pero que contribuyen al desarrollo de los logaritmos. En 1668, Nicolás Mercator publicó *Logarithmotechnia* que contiene la expansión en serie de log (1+ *x*). En este trabajo, Mercator usa el término "logaritmo natural" por primera vez para los logaritmos en base *e*. El número *e* otra vez no aparece explícitamente y continúa escondido en las cercanías.
Tal vez de manera sorprendente, ya que los trabajos sobre los logaritmos habían estado tan cerca de reconocer al número *e*, la primera vez en que *e* es "descubierto" no tiene que ver con la noción de logaritmo sino más bien en un estudio del interés compuesto. En 1683, Jacobo Bernoulli examinó el problema del interés compuesto y, durante su análisis del interés compuesto continuamente, trató de encontrar el límite de $(1 + 1/n)^n$ cuando n tiende a infinito. Usó el teorema del binomio para demostrar que el límite tenía que estar entre 2 y 3, por lo que podríamos considerar que esta es la primera aproximación que se encontró para *e*. También, si aceptamos ésta como una definición de *e*, sería la primera vez en que un número fue definido mediante un proceso de límite. De hecho, Bernoulli no reconoció en ningún momento la conexión entre su trabajo y aquellos sobre los logaritmos.
Mencionamos arriba que, al inicio de su desarrollo, no se pensaba que los logaritmos tuvieran relación alguna con los exponentes. Claro que de la ecuación $x = a^t$, deducimos que $t = \log x$ donde log es el logaritmo en base *a* pero esto es una forma de pensar muy posterior. Aquí realmente estamos pensando en log como una función mientras que los primeros trabajos sobre logaritmos lo consideraban meramente como un número que ayudaba en los cálculos. Es posible que el primero en comprender la manera en que la función log es la inversa de la función exponencial haya sido Jacobo Bernoulli. Por otro lado, la primera persona que hizo la conexión entre logaritmos y exponentes puede haber sido James Gregory. En 1684, sin duda reconoció esta conexión pero podría no haber sido el primero.
Hasta donde sabemos, la primera vez que el número *e* aparece explícitamente es en 1690. En ese año, Leibniz le escribió una carta a Huygens en la que usa la notación b para lo que nosotros hoy

llamamos *e*. Por fin el número *e* tenía nombre (aunque no sea el actual) y era reconocido. El lector puede preguntarse, no sin cierta razón, por qué no empezamos este artículo sobre la historia de *e* en el punto en el que hace su primera aparición. La razón es que, aunque los trabajos descritos antes nunca consiguieron exactamente identificar a *e*, una vez que se le identificó, entonces se dieron cuenta poco a poco de que los trabajos anteriores son importantes. En retrospectiva, los desarrollos iniciales del logaritmo forman parte de la comprensión del número *e*.

Más arriba se mencionaron los problemas que surgen del hecho de que no se pensara en log como una función. Es necesario mencionar que Johann Bernoulli comenzó el estudio del cálculo de la función exponencial en 1697 cuando publicó **“Principia calculi exponentialium seu percurrentium”**. Este trabajo incluye el cálculo de varias series exponenciales y muchos resultados se obtienen mediante integración término a término.

Es tanta la notación matemática actual que le debemos a Euler que no sorprende descubrir que la notación *e* para este número se la debemos a él. La afirmación que se ha hecho algunas veces de que Euler usó la letra *e* porque era la primera letra de su nombre es ridícula. Es probable que *e* ni siquiera venga de "exponencial" sino que sea simplemente la vocal que sigue de la a, la cual Euler ya estaba usando en su trabajo. Sea cual fuera la razón, la notación *e* aparece por primera vez en una carta que le escribió Euler a Goldbach en 1731. Euler hizo varios descubrimientos respecto a *e* en los años siguientes pero no fue sino hasta 1748 con la publicación de su **“Introductio in Analysin infinitorum”** cuando Euler dio un tratamiento completo a las ideas alrededor de *e*. Demostró que

$$e = 1 + {}^{1}/_{1!} + {}^{1}/_{2!} + {}^{1}/_{3!} + \dots$$

y que *e* es el límite de $(1 + {}^{1}/_{n})^{n}$ cuando *n* tiende a infinito. Euler dio una aproximación de *e* con 18 decimales, e=2.718281828459045235 sin decir de dónde salió. Es probable que haya calculado el valor él mismo, pero de ser así no hay indicios de cómo lo hizo. De hecho, tomando unos 20 términos de $1 + {}^{1}/_{1!} + {}^{1}/_{2!} + {}^{1}/_{3!} + \dots$ se obtiene la aproximación dada por Euler. Entre otros resultados interesantes, en este trabajo está la relación entre las funciones seno y coseno y la función exponencial compleja, lo cual Euler dedujo usando la fórmula de De Moivre.

Es interesante que Euler también haya dado el desarrollo de *e* en fracciones continuas y que haya notado un patrón en la expresión. Específicamente dio

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

y

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}}}}$$

Euler no dio una prueba de que los patrones que encontró continuaran (lo cual sí sucede) pero sabía que si diera esta prueba sería equivalente a probar que *e* es irracional. Ya que, si la fracción continua para (*e* -1)/2 siguiera el patrón mostrado por los primeros términos, 6,10, 14,18, 22, 26,... (sumando cuatro cada vez), entonces nunca terminaría; por ello (*e* -1)/2 (así como *e*) no puede ser racional. Esto sin duda podría considerarse como el primer intento de probar que *e* no es racional.
Aquella pasión que llevó a tantos a calcular π con más y más decimales nunca se dio para el caso de *e*. Sin embargo, sí hubo quienes calcularon su expansión decimal y el primero en dar *e* con un gran número de dígitos fue Shanks en 1854. Vale la pena hacer notar que Shanks fue aún más entusiasta calculando la expresión decimal de p. Glaisher mostró que las primeras 137 posiciones de los cálculos de Shanks estaban correctas pero encontró un error que, después de ser corregido por Shanks, dio *e* con 205 decimales. De hecho, se necesitan unos 120 términos de $1 + {}^1/_{1!} + {}^1/_{2!} + {}^1/_{3!} + \ldots$ para obtener 200 decimales de *e*.
En 1864, Benjamín Peirce se tomó una foto parado delante de un pizarrón en el que había escrito la fórmula $i^{-i} = \sqrt{(e^{\pi})}$. En sus clases,

decía a sus estudiantes: "*Señores, no tenemos la menor idea de lo que significa esta ecuación pero podemos estar seguros de que su significado es algo muy importante".*
Casi todo el mundo acepta que Euler fue el primero en probar que e es irracional. Y sin duda fue Hermite quien probó en 1873 que *e* no es un número algebraico. Si e^e es algebraico es todavía una pregunta abierta, aunque claro que lo único que falta es una prueba - ¡ningún matemático consideraría seriamente que e^e es algebraico! Hasta donde sabemos, lo más cerca que los matemáticos han llegado a probarlo es un resultado reciente que dice que al menos uno de estos dos números es trascendente: e^e y *e* elevado a la potencia e^2.
Más cálculos de la expresión decimal siguieron. En 1884 Boorman calculó *e* con 346 decimales y encontró que su cálculo coincidía con el del Shanks hasta la posición 187 pero después variaban. En 1887, Adams calculó el logaritmo base 10 de *e* con 272 decimales. Hoy, con los modernos equipos de cómputo, estos cálculos son fácilmente obtenidos, pero en aquellos tiempos era una verdadera tarea de titanes.
Daremos otra vía para su definición después de resolver una serie de problemas en los que se aplica solamente un resultado sobre límites de sucesiones.

Problema 1. Demostrar que cualquiera que sean los números positivos a, b (a≠b), es válida la desigualdad $\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$.
Su solución es inmediata.■

Problema 2. Demostrar que a medida que aumenta n, también aumentan las magnitudes $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, o sea, que ambas sucesiones son monótonas crecientes.

Solución. Tomando a=1, y b=1 + 1/n en la desigualdad del problema anterior, encontramos

$$\sqrt[n+1]{1.\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)} < \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{1+n+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

Elevando ambos miembros de esta desigualdad a $(n+1)$ tendremos

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, o sea, $x_n < x_{n+1}$.

La segunda desigualdad se demuestra análogamente.■

Problema 3. Demostrar que $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ decrece a medida que aumenta n.

Solución. Tenemos

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}$$

(véanse las notaciones del problema 2). Como z_n aumenta a medida que aumenta n, resulta que y_n decrece.■

En los problemas 2 y 3 hemos demostrado que

$$x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2 < x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2} = 2{,}25 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots,$$

$$y_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{2} = 4 > y_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{3} = 3{,}375 > y_3 > \ldots > y_n > \ldots$$

Por otra parte,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4$$

Luego, la sucesión x_n satisface dos condiciones

1) x_n crece monótonamente a medida que aumenta n;

2) x_n es una sucesión acotada ($2 < x_n < 4$).

En virtud del Teorema 1, presentado más arriba, toda sucesión acotada y monótona creciente tiene límite. Por lo tanto, existe el límite de la sucesión x_n. Este límite se designa por la letra *e*, o sea,

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Como quiera que la sucesión x_n tiende a su límite de una manera creciente, resulta que x_n es menor que su límite, o sea, $x_n < e$.

Es fácil ver que e<3. En efecto, si n es grande, tenemos $x_n<y_n<y_5=\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$ =2,985984…. Por lo tanto, e<2,985984…

Análogamente se demuestra que el límite de la sucesión y_n es también igual a e.

Observación. Tratamientos alternativos a los aquí brindados, pueden encontrarse en:

- Gabriel Klambauer-"Aspects of Calculus", Springer 1986, ISBN 0-387-96274-3;
- Ivan Niven-"Maxima and Minima without Calculus", Mathematical Association of America (The Dolciani Math.Expositions 6), 1981;
- sin olvidar, desde luego, el texto
- Karl R.Stromberg-"An Introduction to Classical Real Analysis", *Wadsworth, Intl.Group*, 1981.