CALCULO DE PREDICADOS

INTRODUCCION

El cálculo de proposiciones estudia los esquemas de inferencia o deductivos, por ejemplo:

$$\{p, p \to q\} \vdash q$$

es un esquema de inferencia válido, es tan válido para:

p: juan llora q: Juan tiene hambre

como para:

p: el planeta tierra no existe q: el Sena atraviesa París

Pero existen inferencias válidas que la *lógica de proposiciones* (LP) no permite expresar como válidas. Analicemos los siguientes ejemplos:

a) Todo hombre es mortal, Sócrates es un hombre, luego Sócrates es mortal. (Aristóteles)
b) Todo caballo es animal, luego toda cabeza de caballo es una cabeza de animal. (De Morgan)
c) Juan es mas grande que Pedro, Pedro es mas grande que Pablo, luego Juan es mas grande que Pablo.

Para estudiar estas proposiciones necesitamos *descomponerlas* pero la LP no estudia la estructura interna de las proposiciones.

Desde tiempos de Aristóteles en el estudio de las estructuras internas de las proposiciones se reconoció en ellas un *sujeto*, una *cópula* y un *predicado*. Ejemplo:

en:

"Todo hombre es mortal"

reconocemos *hombre* como sujeto, *es* como cópula y *mortal* como predicado (o atributo). La unión de estos tres elementos en la expresión: "Todo hombre es mortal" constituye una proposición donde *todo* determina la cantidad. La lógica clásica produjo una teoría bastante completa de las inferencias de este tipo en la *silogística*.

Pero en el caso b) a pesar de la analogía de la estructura de las expresiones, la silogística no es suficiente para dar cuenta de la validez del razonamiento.

En el caso c) la incapacidad de la silogística para abordar la validez del razonamiento es puesta de manifiesto con mayor evidencia. Si consideramos que las expresiones "más grande que Pedro" y "más grande que Pablo" son *predicados* el razonamiento no entra en ninguna de las inferencias válidas antes vistas; para ver la validez del razonamiento debemos tomar la expresión "es más grande que" como una *copula* dotada de una propiedad particular (la transitividad), pero esto no entra en ningún silogismo. Esto revela el límite de la lógica silogística y da inicio a la Lógica de Predicados o Cálculo de predicados (CP).

En la expresión

“Juan es más grande que Pedro”.

no hay un sujeto ligado a un predicado por una copula sino que hay *dos sujetos ligados entre sí por una relación.* En este caso la relación es: *es mas grande que*

El caso expuesto es una relación binaria (vincula a dos sujetos), pero las relaciones pueden ser ternarias, cuaternarias, n-arias.

Ejemplos:

8 es la suma de 6 y de 2 — es una relación ternaria

Juan y María son hijos de José y Laura — es una relación cuaternaria

Así el CP es en realidad un cálculo de relaciones, de cualquier aridad finita y que son llamadas predicados por un abuso de lenguaje.

El objetivo del CP es estudiar los esquemas de razonamientos válidos cuyos enunciado de base son *formas relacionales*.

Ejemplo: “*x* es mayor que *y*” es una *forma relacional* que se convierte en proposición si reemplazamos x e y por dos nombres propios.

SINTAXIS DEL CALCULO DE PREDICADOS

Alfabeto del cálculo de predicados

El alfabeto del cálculo de predicados $\mathcal{L}$ está compuesto de la manera siguiente:

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \mathbb{P} \cup \mathbb{Q} \cup K \cup \mathcal{P}$$

Donde:

1. $\mathcal{C}$ es un conjunto de constantes de individuo $\mathcal{C} = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_n\}$

2. $\mathcal{V}$ es un conjunto de variables de individuo $\mathcal{V} = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

3. F es un conjunto de funciones $F = \{f_1; f_2; f_3; \dots; f_n\}$ donde el subíndice llamado aridad indica en número de variables de la función,

4. $\mathbb{P}$ es un conjunto de predicados (en $\mathbb{P}$ están los predicados unarios, binarios (de dos argumentos, … n-arios). $\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_1; \mathbb{P}_2; \mathbb{P}_3; \dots; \mathbb{P}_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$

5. $\mathbb{Q}$ es un conjunto de cuantificadores $\mathbb{Q} = \{\forall; \exists\}$

6. K es un conjunto de conectores $K = \{\neg\} \cup \{\wedge; \vee; \rightarrow, \leftrightarrow\}$

7. $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos auxiliares $\mathcal{P} = \{(;)\}$

<u>Diferencia entre funciones y predicados</u>

La *función* (de cualquier aridad) es una asignación que depende de los valores que tomen las variables. Por ejemplo:

$$f_{(x,y)} = x + 2y$$

es una función binaria (dos variables).

El *predicado* es un concepto que dice algo de alguna propiedad de un objeto o que establece relaciones entre los objetos.

$$x > y$$

Algunas expresiones como

$$x = y$$

pueden ser funciones o predicados:

como función $y = x$ declaramos una función que a cada valor de la variable x le asigna el mismo valor para la variable y.

como predicado $Q(x,y)$: $y = x$ declaramos que dos variables x e y son iguales.

<u>Uso de los cuantificadores</u>

Cuando escribimos $\forall x P(x)$ estamos refiriendo que todas las variables *x* verifican la propiedad P

Cuando escribimos $\exists x P(x)$ estamos refiriendo que algunas las variables *x* (al menos una o todas menos una) verifican la propiedad *P*

Se pueden negar las expresiones que contienen cuantificadores

La negación de $\forall x P(x)$ queda:

$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

La negación de $\exists x P(x)$ queda:

$\neg\exists x P(x) \equiv \nexists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

<u>Cuantificadores anidados</u>

a. Sea el predicado $P(x,y)$: "$x + y = 0$"

podemos escribir: $\forall x \exists y P(x,y) \equiv \forall x \exists y\ (x + y = 0)$

esto lo podemos pensar como: $Q(x)$: $\exists y\ (x + y = 0)$ si asumimos que el existencial está asignando un valor particular a la variable y .

entonces: $\forall x \exists y P(x,y) \equiv \forall x Q(x)$

Así afirmo que para cada x existe algún y que verifica el predicado $(x + y = 0)$

(lo cual es verdad en el conjunto de los Reales por ejemplo)

b. Ahora bien, si escribo: $\exists x \forall y P(x,y) \equiv \exists x \forall y: (x + y = 0)$

lo podemos pensar como: $R(y)$: $\forall y\ (x + y = 0)$ si asumimos que el universal no asigna un valor particular a la variable y , la expresión

$\exists x \forall y P(x,y) \equiv \exists x R(y)$ resulta falsa, porque la afirmación es que: existe un valor de x de manera tal que no interesa cual sea el valor de y , el predicado $(x + y = 0)$ se verifica. En el contraejemplo si $x = 4$, y $y = 2$, el predicado no se verifica, por tanto la formula resulta falsa.

c. Otro caso, $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall x, y : (x + y = 0)$

El contra ejemplo de esta expresión se encuentra fácilmente con tal que los valores asignados a las variables no sean opuestos.

Cuantificadores en dos variables:

	La fórmula es verdadera	La fórmula es falsa
$\forall x, y: P(x,y)$ $\forall y, x: P(x,y)$	Cuando $P(x,y)$ resulta verdad sin importar cuales sean los valores asignados a las variables.	Cuando exista al menos un par de valores de las variables para los cuales $P(x,y)$ resulte falso.
$\forall x \exists y: P(x,y)$	Cuando sin importar el valor que tome la variable x , habrá algún valor de y que haga verdadera la proposición $P(x,y)$	Cuando exista al menos un valor de la variable x , para el cual cualquier valor que pueda tomar y nos lleve a que $P(x,y)$ es falsa.
$\exists x \forall y: P(x,y)$	Cuando existe algún valor de la variable x para el cual $P(x,y)$ sea	Cuando para cualquier valor de la variable x $P(x,y)$ resulta falsa sin

	verdadero con cualquier valor de la variable y .	importar cual sea el valor de la variable y .
$\exists x \exists y: P(x, y)$	Cuando existe algún par de valores para las variables x e y de manera que $P(x, y)$ resulte verdadera.	Cuando para cualquier par de valores para las variables x e y la formula $P(x, y)$ resulta falsa.

Negación de cuantificadores anidados

Tomemos: $\forall x \exists y P(x, y)$ recordemos que lo hemos pensado como $\forall x Q(x)$ donde: $Q(x): \exists y P(x, y)$; entonces aplicamos la negación a la formula inicial

$$\neg[\forall x \exists y P(x, y)] \equiv \neg \forall x Q(x) \equiv \exists x \neg Q(x) \equiv \exists x \neg[\exists y P(x, y)] \equiv \exists x \forall y \neg P(x, y)$$

Siguiendo este razonamiento podemos confeccionar la siguiente tabla:

Afirmación	Negación
$\forall x \forall y P(x, y)$	$\exists x \exists y \neg P(x, y)$
$\forall x \exists y P(x, y)$	$\exists x \forall y \neg P(x, y)$
$\exists x \forall y P(x, y)$	$\forall x \exists y \neg P(x, y)$
$\exists x \exists y P(x, y)$	$\forall x \forall y \neg P(x, y)$

Ejercicios: Escriba las fórmulas lógicamente equivalentes aplicando las reglas de la negación de las fórmulas cuantificadas.

1. $\neg(\forall x \left(\exists y\big(P(x, y)\big) \rightarrow Q(x)\right))$
2. $\exists x \neg Q(x)$
3. $\neg(\forall x \left(\big(S(x) \vee Q(x)\big) \rightarrow R(x)\right))$
4. $\neg(\forall x \neg \left(\big(S(a) \vee Q(x)\big) \rightarrow \neg(\exists x R(x)\right)))$
5. $\forall x(S(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$
6. $\neg(\exists x \neg \left(R(x) \vee \big(\exists y \neg Q(y)\big)\right))$
7. $\neg(\forall x \exists y(R(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \neg P(x, y))$
8. $\neg(\exists x \forall y(\neg R(x) \vee P(x, y)))$

Reglas de buena formación para las EBF del CP

Vamos a llamar *términos* del lenguaje a las expresiones del lenguaje que identifican posibles objetos del mundo.

Las constantes del conjunto $\mathcal{C}$ identifican objetos determinados, por tanto las constantes son términos del lenguaje.

Las variables del conjunto $\mathcal{V}$ identifican objetos genéricos, por tanto las variables son términos del lenguaje.

Las funciones aplicadas a otros términos del lenguaje son también términos del lenguaje, es decir que si f es de aridad n y $t_1; t_2; t_3; \ldots; t_n$ son términos del lenguaje, entonces $f(t_1; t_2; t_3; \ldots; t_n)$ también es un término del lenguaje

Regla 1.

Si $\mathbb{P}_n$ es un predicado de aridad n y $t_1; t_2; t_3; \dots; t_n$ son términos del lenguaje, entonces $\mathbb{P}_n = \{t_1; t_2; t_3; \dots; t_n\}$ es una EBF. Esta es una fórmula atómica (se llama así porque no puede ser descompuesta)

Regla 2.

Si ϕ es una EBF, entonces $\neg\phi$ también es una EBF.

Regla 3.

Si ϕ es una EBF, entonces: $\forall x\, \phi$ y $\exists x\, \phi$ son EBF.

Regla 4.

Si ϕ y ψ son EBF, entonces $\phi \wedge \psi$; $\phi \vee \psi$; $\phi \rightarrow \psi$; $\phi \leftrightarrow \psi$ son EBF.

Regla 5.

Solo son EBF las obtenidas por la aplicación de las reglas precedentes.

Ejemplos de EBF

$P_2(x_1, x_2)$ es una EBF

$\forall x_1\, \exists x_2\, P_3(x_1,\ x_2,\ x_3)$ es una EBF

$P_2(x_{5,}\ x_6) \rightarrow \exists x_5\, P_1(x_5)$ es una EBF

$\forall a\, P(a)$ NO es una EBF porque al ser a una constante, no puede estar afectada de un cuantificador.

Asumiendo que P es de aridad 2, $P(x)$ NO es una EBF porque P es de aridad dos y en la expresión abarca a un solo término.

<u>Convenciones</u>

En adelante cuando sea posible y para simplificar las expresiones podemos eliminar los subíndices asignándoles diferentes denominaciones a las variables por ej. en vez de $x_1;\ x_2$ escribiremos $x,\ y$. Eventualmente en vez de escribir $P(x_1,\ x_2)$ se puede escribir $P(x\, y)$.

<u>Alcance de los cuantificadores</u>:

El alcance del cuantificador universal en $\forall x \phi$ es $\emptyset$. Análogamente el alcance del cuantificador existencial en $\exists x \phi$ es $\emptyset$

Ejemplo:

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. $\forall y(\exists xP(x) \wedge Q(y))$
3. $\forall xP(x) \rightarrow Q(x)$
4. $P(x) \rightarrow \forall xQ(x)$

En el caso 1. el alcance del cuantificador universal es la fórmula $P(x) \rightarrow Q(x)$

En el caso 2. El alcance del cuantificador universal es la formula $\exists xP(x) \wedge Q(y)$ y el del cuantificador existencial es $P(x)$

En el caso 3. el alcance del cuantificador universal es la fórmula $P(x)$

En el caso 4. el alcance del cuantificador universal es la fórmula $Q(x)$

Ejemplo:

Dadas las siguientes oraciones:

1. Juan es amigo de Pepe
2. No es cierto que Pepe sea amigo de Luis
3. Todos los amigos de Juan son amigos de Pepe
4. Algunos amigos de Juan no son amigos de Luis
5. Ninguno es amigo de todos

Vamos a construir un vocabulario para expresar las oraciones dadas en CP

Si a = Juan; b = Pepe; c = Luis entonces: $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$

$\mathcal{V} = \{x, y\}$

$F = \emptyset$

$P(x, y) = x \quad es\ amigo\ de \quad y$

entonces:

1. $P(a, b)$
2. $\neg P(b, c)$
3. $\forall xP(x, a) \rightarrow P(x, b)$
4. $\exists xP(x, a) \wedge \neg P(x, c)$
5. $\forall x(\exists y \neg P(x, y))$

<u>Variables libres y variables ligadas</u>

Una variable x es ligada en una fórmula cuando la aparición de x está inmediatamente a continuación de un cuantificador o cuando la aparición de x está en el ámbito de un cuantificador que tiene a x como variable ligada.

Ejemplo: en $\forall xP(x)$ las dos apariciones de x son ligadas.

Una aparición de x que no es ligada, se dice que es libre.

Si ψ es una formula y ϕ es otra fórmula del tipo $\neg\psi$, las apariciones libres de una variable en ϕ son las apariciones libres de la misma variable en ψ.

Si ψ es una formula y x una variable, asimismo ϕ es de la forma $(\forall x\psi)$ o $(\exists x\psi)$ entonces todas las apariciones de x en ϕ son ligadas.

Ejemplo: Determinemos la aparición de variables libres y/o ligadas en las siguientes formulas.

1. $(\forall yP(x,y)) \rightarrow Q(x,z)$
2. $(\exists xP(x)) \vee Q(x,y)$
3. $R(x,y)$ y $P(y)$
4. $\forall yP(y)$
5. $(R(x,y) \vee \left(\forall yP(y)\right))$
6. $\left(\exists xR(x,y) \vee \left(\forall yP(y)\right)\right)$
7. $P(a,b)$ y $R(f(a))$
8. $\exists yP(x,y)$

En 1. x y z aparecen como variables libres y las apariciones de y son como variable ligada.

En 2. las dos primeras apariciones de x son ligadas, la restante es libre al igual que la aparición de y.

En 3. Ninguna de las variables aparece ligada.

En 4. La variable y tiene dos apariciones ligadas.

En 5. Solo son ligadas las dos últimas apariciones de y .

En 6. Es ligada la variable x y la segunda y tercera aparición de la variable y, las restantes son libres.

En 7. No hay aparición de variables.

En 8. La variable y aparece dos veces ligada y x libre.

<u>Fórmula cerrada</u> (o sentencia, o enunciado)

Una EBF es una *formula cerrada (o enunciado)* si no contiene variables libres.

Ejemplos:

1. $\forall yQ(y,a)$ es un enunciado
2. $(\forall xP(x) \vee R(x,f(c)))$ es un enunciado
3. $(\exists xP(x)) \vee Q\left(x,f(a)\right)$ No es un enunciado (la última aparición de x es libre)
4. $\forall x\exists y(P(x,y) \leftrightarrow \forall zR(x,y,z))$ es un enunciado

<u>Fórmula básica</u>

Una fórmula se llama básica si no contiene variables. Todas las fórmulas básicas son enunciados, pero la implicación recíproca no es verdadera.

Sustitución de las apariciones libres de una variable

Sea s una variable o una constante en una formula ϕ , designamos $\emptyset(x/s)$ al resultado de sustituir todas las apariciones libres de la variable x por la variable (o constante) s en la formula ϕ .

Ejemplo:

1. $\emptyset = \forall x(P(x) \wedge P(y))$ $\emptyset(y/a) = \forall x(P(x) \wedge P(a))$
2. $\emptyset = \forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \rightarrow P(x,u,z))$ $\emptyset(u/x) = \forall x \forall y \exists z(P(x,y,z) \rightarrow P(x,x,z)$

TRABAJOS PRACTICOS

Trabajo Práctico Nº 1

Sea $< \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathbb{P} >$ un vocabulario de una lenguaje de primer orden donde $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F} = \{f\}$; donde f es una función unaria y $\mathbb{P} = \{P, R\}$ h donde P es un predicado unario y R es un predicado binario. Diga si las siguientes expresiones son EBF de un lenguaje de primer orden. Justifique. (Asumimos que $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$).

1. $(\forall y R(a, y) \rightarrow \forall x P(f(x)))$
2. $(\exists x((\forall y R(b, y) \vee P(x, f(a)))))$
3. $(P(f(a)) \wedge \neg R\big(f\big(f(a)\big), b\big)$
4. $(\forall y f(P(y)))$
5. $((P(a) \rightarrow P(b)) \rightarrow (\exists z R(z, f(z)))$
6. $(\exists z R(b, z) \vee (\forall x P(x, f(c)))$