0.2. Trabajo Práctico N° 2 - La Derivada y sus Aplicaciones

1. Sabiendo que la función $f(x) = x^2 + 2x$ es continua.

   a) Construir su gráfica.

   b) Calcular el incremento Δy de la función f cuando $x_0 = 1$ y $\Delta x = 0{,}5$.

   c) Calcular el cociente incremental correspondiente para $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 1{,}5$.

   d) Calcular $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. ¿Qué se obtiene?

   e) Calcular la derivada de la función f en $x_0 = 1$.

2. Determinar las derivadas de cada una de las siguientes funciones, en los puntos indicados, utilizando la definición:

   a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $x_1 = -1$

   b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$

   c) $h(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$

3. Utilizando las fórmulas de derivación, calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
a(x) &= 7x^3 - 2x^2 + 5x + 1 & l(x) &= cotgx \\
b(x) &= (x^2 - x)^4 & m(x) &= xsenx + \sqrt[3]{x^2} \\
c(x) &= 7x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-2} + ex + 1 & n(x) &= 3sen(5x^2 + 1) \\
d(x) &= \frac{2}{x^3} & o(x) &= sen^2 x^3 \\
e(x) &= 7e^x - 2^x & p(x) &= sen(cosx) \\
f(x) &= \sqrt{4x^3 - 3x^2 + 4x + 1} & q(x) &= tg^2 x \\
g(x) &= \frac{x^3 - 2}{x + 1} & r(x) &= x^2 + e^{senx} \\
h(x) &= 3^{2x+1} & s(x) &= 2^{tgx} \\
i(x) &= senx & t(x) &= ln^2(x^2 + 2) \\
j(x) &= cos^4 x & u(x) &= arcsen\sqrt{x} \\
k(x) &= (lnx + 1)\sqrt[3]{x^2 - x} & v(x) &= arccos(1 + x^2)
\end{aligned}
$$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones, aplicando la derivación logarítmica.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^x & h(x) &= x^{\sqrt{x}} \\
g(x) &= (senx)^{(senx)} & i(x) &= (lnx)^x
\end{aligned}
$$

5. a) Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 0$.

   b) Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, que son paralelas a la recta de ecuación $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

   c) Determinar la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2$, en el punto de abscisa $x = 1$.

6. Dadas las siguientes funciones.

   i) $y = x^4 - 2x^2$

   ii) $y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$

   iii) $y = sen2x$ en $[0, 2\pi]$

   iv) $x^3(x+2)^2$

   Determinar:

   a) Máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

   b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

   c) Intervalos de concavidad positiva y negativa.

   d) Construir un gráfico y representar todo lo obtenido en los puntos anteriores.

7. a) Determinar a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto $(3, -1)$.

   b) Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo local en el punto $(-1, 3)$ y un punto de inflexión en $(0, 1)$.

8. Hallar dos números cuya suma sea 20 sabiendo que el producto es máximo.

9. Verificar los siguientes límites:

   a) $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$

   b) $\lim_{x \to 0} \frac{x - senx}{x^3} = \frac{1}{6}$

   c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x + lnx}{xlnx} = 0$

   d) $\lim_{x \to 1} (\frac{1}{lnx} - \frac{1}{x-1}) = \frac{1}{2}$

   e) $\lim_{x \to 0} (sec \cdot cosecx - cosecx) = 0$

   f) $\lim_{x \to 0} (lnx \cdot tgx) = 0$

   g) $\lim_{x \to 0} x^x = 0$

   h) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (cosx^{cosx}) = 1$

   i) $\lim_{x \to \infty} \frac{lnx}{x^4} = 0$

   j) $\lim_{x \to \infty} [(x - senx)lnx] = 0$

10. Calcular el polinomio de Taylor o Mc-Laurin según corresponda en los siguientes casos:

    a) $f(x) = cosx$, $n = 7$, $c = \frac{\pi}{2}$.

    b) $g(x) = e^{-x}$, $n = 4$, $c = 0$.

11. Hallar el diferencial de:

    a) $y = x^3 - 2x$

    b) $y = ln(x + 1)$

12. (Eficiencia laboral) Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores del turno matutino de una fábrica indica que el número N de artículos ensamblados por un trabajador promedio está dada por la relación : $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15$ siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio del turno (8 a 13 horas). Se pide hallar:

    a) ¿A qué hora de la mañana la tasa de producción del trabajador (eficiencia) es máxima?

    b) ¿A qué hora es la mínima?

    c) Graficar la curva de producción $N(t)$ para $0 \leq t \leq 5$.

0.2.1. Ejercicios Complementarios

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$,

    a) Hallar el cociente incremental (razón o tasa de cambio promedio) de la función.

    b) Calcular la tasa de cambio promedio en $x = 3 \quad y \quad \Delta x = 0,3$ e interpretar elresultado.

    c) Hallar e interpretar la derivada o razón de cambio instantánea de la función aplicando la definición.

    d) Calcular el valo de la derivada en $x = 3$. Intepretar el resultado.

    e) Calcular el valor del ángulo que determina la recta tangente a la curva con el semieje positivo de las abscisas.

    f) Representar la función y destacar en el gráfico los incrementos en el punto $x = 3$.

2. Derivar las siguientes funciones.

    a) $y = 4x^5 - \dfrac{1}{2}x^4 + 5x - 3$

    b) $(1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$

    c) $y = \dfrac{2}{5}x^{\frac{7}{2}} + \dfrac{11}{\sqrt[3]{x}}$

    d) $y = \frac{6+2x}{4x^2-3x}$

    e) $\sqrt[5]{7 - 8x^2}$

    f) $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

    g) $y = ln^3(x^2 + 1)$

    h) $e^{\frac{1}{x}} ln(x + 2)$

3. Calcular las derivadas sucesivas de las siguientes funciones hasta el orden indicado.

    a) $y = 3x^4 - 2x^3 - 1 \quad hasta \quad n = 5,$

    b) $sen(17x) \quad hasta \quad n = 3.$

4. Considerando la función del ejercicios 1).

    a) Calcular su diferencial.

    b) Comparar Δy y dy en $x = 3$ y $\Delta x = 0,4$.

    c) Representar en la gráfica, el dy.