



Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 1:

Lógica proposicional y Teoría intuitiva de conjuntos



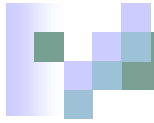
PROPOSICION

Una Proposición es toda oración declarativa que tiene asociado un valor de verdad. Su valor de verdad es único, verdadero o falso.

¿Cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones?

Si son proposiciones determinar su valor de verdad.

- a) Hallar: $\log 100$
- b) Mañana es viernes.
- c) No es cierto que 8 es múltiplo de 3.
- d) San Martín no nació en Yapeyú.
- e) Río de Janeiro es la capital de Brasil.



Las proposiciones que enuncian una sola propiedad de un sujeto se llaman “simples”.

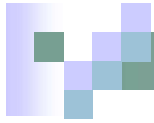
Las proposiciones simples se denotan con letras de imprenta minúsculas: p , q , r , ...

A partir de dos o más proposiciones simples se pueden realizar ciertas operaciones, usando los conectivos lógicos, obteniendo así otras proposiciones llamadas compuestas.



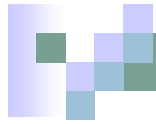
Conectivos lógicos

SIMBOLOS	OPERACIÓN ASOCIADA	SIGNIFICADO
\neg	Negación	No p o no es cierto que p
\wedge	Conjunción	p y q
\vee	Disyunción	p o q (o ambos)
\Rightarrow	Implicación	p implica q; si p entonces q Sólo si p, q q si p
\Leftrightarrow	Doble implicación	p si y sólo si q
$\underline{\vee}$	Disyunción exclusiva	p o q (pero no ambos)



TABLAS DE VERDAD

En una tabla de verdad se muestran los valores de verdad de una proposición compuesta en función de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.



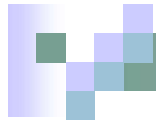
NEGACION DE UNA PROPOSICION SIMPLE

Notación: $\neg p$

Su tabla de verdad es:

p	$\neg p$
V	F
F	V

La negación de una proposición simple p , es la proposición que afirma exactamente lo contrario que p .



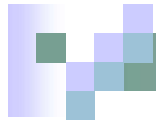
CONJUNCION

Notación: $p \wedge q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción es una proposición compuesta que es verdadera únicamente cuando las dos proposiciones simples que la forman son verdaderas.



DISYUNCION

Notación: $p \vee q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción es una proposición compuesta que es falsa únicamente cuando las dos proposiciones simples que la forman son falsas.



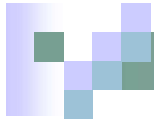
IMPLICACIÓN

Notación: $p \Rightarrow q$

Las proposiciones “p” y “q” se llaman antecedente y consecuente de la implicación, respectivamente.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



IMPLICACIÓN

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La implicación es una proposición compuesta que resulta verdadera siempre que “p” sea falsa y en el caso de que “p” y “q” sean verdaderas simultáneamente; el único caso en que la proposición compuesta resulta falsa es cuando “p” es verdadero y “q” es falsa.



DOBLE IMPLICACIÓN:

Notación: $p \Leftrightarrow q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble implicación es una proposición compuesta que resulta verdadera cuando las dos proposiciones simples que las constituyen tienen el mismo valor de verdad.



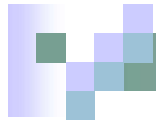
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Notación: $p \underline{\vee} q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción exclusiva es una proposición compuesta que resulta falsa cuando las dos proposiciones simples que la constituyen tienen el mismo valor de verdad.



LEYES LÓGICAS

Ley Lógica o tautología es una proposición compuesta que es verdadera independientemente del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen.

EJEMPLO: $p \vee \neg p$

CONTRADICCIÓN

Es una proposición compuesta que es FALSA, cualquiera sea la combinación de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman. EJEMPLO: $p \wedge \neg p$

CONTINGENCIA

Es una proposición compuesta que NO es tautología ni contradicción. EJEMPLO: $p \wedge \neg q$



LEYES LÓGICAS. PROPIEDADES

- 1) Conmutatividad de la conjunción: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- 2) Conmutatividad de la disyunción: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
- 3) Asociatividad de la conjunción: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
- 4) Asociatividad de la disyunción: $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- 5) Idempotencia de la conjunción: $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- 6) Idempotencia de la disyunción: $p \vee p \Leftrightarrow p$
- 7) Involutiva: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
- 8) Distributividad de la conjunción respecto a la disyunción: $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
- 9) Distributividad de la disyunción respecto a la conjunción: $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$



LEYES LÓGICAS. PROPIEDADES

10) Ley de D'Morgan

Negación de una conjunción: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Negación de una disyunción: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

11) Negación de una implicación: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

12) Implicación: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

13) Doble implicación $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Ejercicios: Probar que cada una de las proposiciones dadas es tautología.



IMPLICACIONES ASOCIADAS

Sea la implicación: $p \Rightarrow q$ a la que llamamos directa.
Es posible escribir otras tres implicaciones asociadas a esta.

Recíproca: $q \Rightarrow p$

Contraria: $\neg p \Rightarrow \neg q$

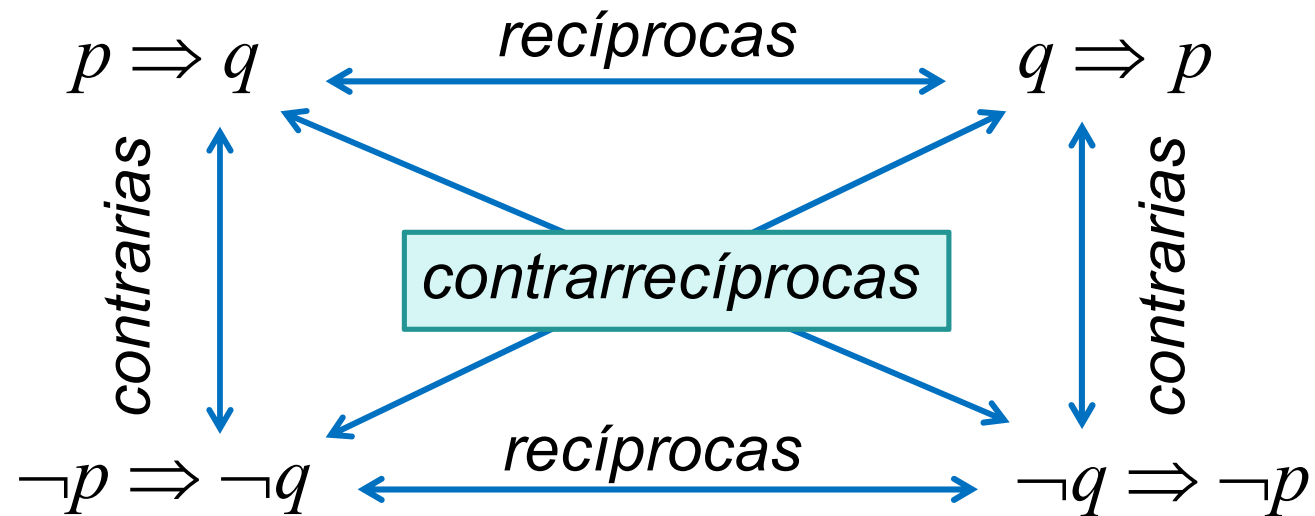
Contrarrecíproca: $\neg q \Rightarrow \neg p$

Ejemplo:

Dada la implicación: Si un número es múltiplo de 8,
dicho número es múltiplo de 2 y de 4.

Escribir las implicaciones asociadas y determinar su
valor de verdad.

IMPLICACIONES ASOCIADAS



Ejemplo:

p: Juan nació en Corrientes

q: Juan nació en Argentina

Ejercicio: Probar que las implicaciones contrarrecíprocas son equivalentes.



CONDICION NECESARIA O SUFICIENTE

Si $p \Rightarrow q$ es VERDADERA:

p es condición suficiente para q .

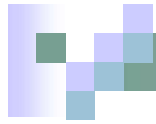
q es condición necesaria para p .

CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE

Si $p \Leftrightarrow q$ es VERDADERA:

p es condición necesaria y suficiente para q .

q es condición necesaria y suficiente para p .



Ejemplos:

1)

Si una persona es Correntina entonces es Argentina.

2)

Si 4 es un número natural par entonces es múltiplo de 2

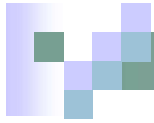


Funciones Proposicionales. Cuantificadores

El símbolo $P(x)$ es la representación de un predicado o propiedad relativos al objeto indeterminado x , perteneciente a cierto universo o conjunto.

Función Proposicional en una variable x es toda oración en la que figura x como sujeto u objeto directo, la cual se convierte en proposición para cada especificación de x . Se presentan también funciones proposicionales con dos o más variables.


Por ejemplo. $P(x)$: “El número x es impar”, con x entero
 $P(x,y)$: “ x es menor que y ”, con x,y reales



A partir de una función proposicional se pueden obtener proposiciones de dos maneras:

1) Especializando la variable: Asignando un valor a la variable.

Fijado un marco de referencia, al especializar las variables de una función proposicional usando cualquier elemento de ese dominio, se obtiene una proposición.



Ejemplos: En el conjunto de los números enteros:

Dada la función proposicional:

$P(x)$: “El número x es impar”

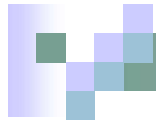
$P(5)$: “El número 5 es impar” resulta una proposición verdadera

$P(2)$: “El número 2 es impar” resulta una proposición falsa.

$P(x,y)$: “ x es menor que y ”

$P(2,14)$: “2 es menor que 14”, resulta una proposición verdadera.

$P(30,14)$: “30 es menor que 14”, resulta una proposición falsa.



2) Usando cuantificadores:

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación.

Asociados a la variable x , introducimos los símbolos: $\forall x$ (para todo x) y $\exists x$ (existe x) llamados cuantificadores universal y existencial respectivamente.



Elegido un conjunto como marco de referencia y anteponiendo estas expresiones a una función proposicional, se obtiene una proposición, que es verdadera:

- ❖ Mediante el cuantificador universal, si $P(x)$ es verdadera para cada x del universo del discurso.
- ❖ Mediante el cuantificador existencial, cuando existe al menos un elemento para el cual $P(x)$ es verdadera.



Negación de Propositiones cuantificadas

La negación de una función proposicional cuantificada universalmente es la proposición que se obtiene cambiando el cuantificador por el existencial, y negando la función proposicional.

$$\neg[\forall x : P(x)] \Leftrightarrow \exists x / \neg P(x)$$

La negación de una función proposicional cuantificada existencialmente es la proposición que se obtiene cambiando el cuantificador por el universal y negando la función proposicional.

$$\neg[\exists x / P(x)] \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$



Ejemplos:

Dadas las siguientes proposiciones cuantificadas:

$$a) \quad \forall x \in N : x > 1 \qquad b) \quad \exists x \in Z / x > 0$$

$$c) \quad \exists x \in Z / \forall y \in Z : x + y = y$$

$$d) \quad \forall x \in Z : \exists y \in Z / x + y = 0$$

Expresar en lenguaje coloquial, determinar su valor de verdad y luego obtener las proposiciones cuantificadas equivalentes a sus negaciones.



TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de objetos que podrían ser de cualquier naturaleza.

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas de imprenta; los elementos con letras minúsculas y los símbolos \in, \notin se usan para indicar que un elemento pertenece o no pertenece, respectivamente, a un conjunto.



TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS

❖ Un conjunto se define por extensión cuando se enumeran exhaustivamente los elementos que pertenecen al conjunto.

Ejemplos: $A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{-1, 0, 1\}$

❖ Un conjunto se define por comprensión cuando se da un criterio de pertenencia al conjunto, es decir, la propiedad que verifican todos los elementos que pertenecen al conjunto y sólo ellos.



La notación que se emplea para definir un conjunto por comprensión es:

$A = \{x / P(x)\}$ que se interpreta como el conjunto cuyos elementos x tales que $P(x)$ es verdadera, donde P representa la propiedad.

Ejemplos:

$$A = \{x / x \text{ es una vocal}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 4\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 1\}$$

De esta manera es posible determinar conjuntos cuyos elementos no pueden enumerarse todos, por ejemplo por ser infinitos. Ejemplo: $M = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 3 \leq x \leq 4\}$



CONJUNTOS ESPECIALES

Conjunto vacío: es el conjunto que carece de elementos y se lo denota con el símbolo ϕ ó $\{ \}$.

Conjunto universal o referencial: es el conjunto de todos los elementos del tema que se trata; generalmente se lo denota con U o E y se lo representa gráficamente mediante un rectángulo.

Conjunto Unitario: es el conjunto que posee un único elemento.



INCLUSIÓN-SUBCONJUNTO

Se dice que el conjunto A es un subconjunto (o una parte) del conjunto B , o bien, que A está incluido en B , si y sólo si todos los elementos de A son elementos de B .

En símbolos: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x: "x \in A \Rightarrow x \in B"$

Ejemplo

Sea el conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Determinar por extensión los siguientes subconjuntos de U .

$$A = \{x \in U / x^2 \in U\} \quad B = \{x \in U / (x + 1) \in U\}$$

$$C = \{x \in U / (3x + 1) \text{ es múltiplo de } 2\}$$



IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B , se dice que son iguales, si y sólo si tienen los mismos elementos.

En símbolos: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$



OPERACIONES CON CONJUNTOS

INTERSECCIÓN

La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.

En símbolos: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$

Si $A \cap B = \emptyset$, diremos que A y B son disjuntos. Estos conjuntos no poseen ningún elemento en común.

Ejercicios: Hallar en cada caso la intersección de ambos conjuntos.

a) $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 3\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x < 5\}$

b) $M = \{2,3,4\}$ y $N = \{7,8\}$

c) $P = \{1,2,3,4\}$ y $Q = \{2,4\}$



UNIÓN

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B , o a ambos.

En símbolos: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

Ejercicios: Hallar en cada caso la unión de ambos conjuntos.

a) $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 3\}$ $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x < 5\}$

b) $M = \{2,3,4\}$ y $N = \{7,8\}$

c) $P = \{1,2,3,4\}$ y $Q = \{2,4\}$



DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B .

En símbolos: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$

Ejercicios

Dados los conjuntos:

a) $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 3\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x < 5\}$

b) $M = \{2,3,4\}$ y $N = \{7,8\}$

c) $P = \{1,2,3,4\}$ y $Q = \{2,4\}$

Hallar: $A - B$, $B - A$, $M - N$, $N - M$, $P - Q$, $Q - P$.



DIFERENCIA SIMÉTRICA

Se llama diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B, pero no a ambos.

También se la puede definir como: $(A - B) \cup (B - A)$

En símbolos:

$$A \Delta B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Ejercicios: Hallar en cada caso la diferencia simétrica de ambos conjuntos.

a) $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 3\}$ $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x < 5\}$

b) $M = \{2,3,4\}$ y $N = \{7,8\}$

c) $P = \{1,2,3,4\}$ y $Q = \{2,4\}$



COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Se llama complemento del conjunto A , al conjunto formado por los elementos que no pertenecen a A .

Simbólicamente: $A^c = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$.

Ejercicios:

Dados los conjuntos:

a) $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \geq 3\}$, $U = \{x/x \in \mathbb{N}\}$

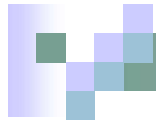
b) $M = \{2,3,4\}$ y $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Hallar: A^c y M^c



PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

- 1) Conmutatividad de la Unión: $A \cup B = B \cup A$
- 2) Conmutatividad de la Intersección: $A \cap B = B \cap A$
- 3) Asociatividad de la Unión: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- 4) Asociatividad de la Intersección: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 5) Idempotencia de la Unión: $A \cup A = A$
- 6) Idempotencia de la Intersección: $A \cap A = A$
- 7) Involutiva: $(A^c)^c = A$
- 8) Distributividad de la intersección con respecto a la unión. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- 9) Distributividad de la unión con respecto a la intersección $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- 10) Leyes de De Morgan
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



Conmutatividad de la Intersección: $A \cap B = B \cap A$

Demostración:

$$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in (B \cap A)$$

Asociatividad de la Intersección: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$\begin{aligned} \text{Demostración: } x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Idempotencia de la Unión: $A \cup A = A$

Demostración:

$$x \in (A \cup A) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \Leftrightarrow x \in A$$



CONJUNTOS DE PARTES

Dado un conjunto A , el conjunto de las partes de A , es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A .

Se denota $P(A)$ y el $\#P(A)=2^n$ siendo n la cantidad de elementos de A .

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

Ejercicio: Dado el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Determine el conjunto $P(B)$



PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto $A \neq \phi$ y los subconjuntos

$$A_1 \subset A, A_2 \subset A, \dots, A_n \subset A$$

Definición: Decimos que el conjunto formado por los subconjuntos de A , al que llamamos $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ constituyen una partición de A , si y solo si, se dan tres condiciones:

1) Ninguno de los subconjuntos es el conjunto vacío.

$$A_i \neq \phi \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

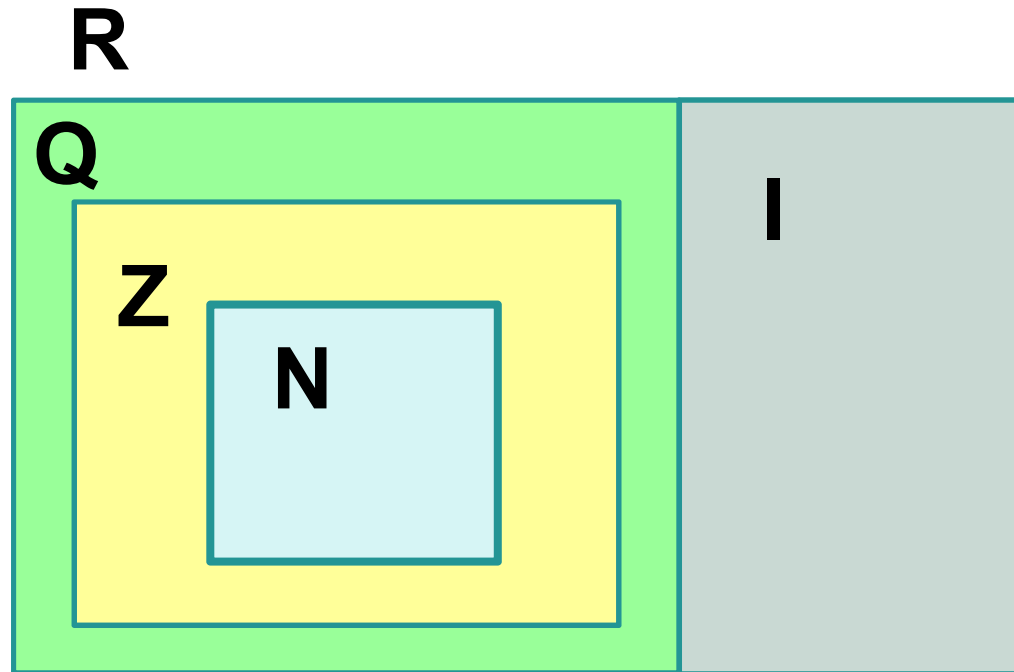
2) La intersección entre dos cualesquiera de ellos es vacía.

$$A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

3) La unión de todos los subconjuntos es igual a A .

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS



N: Conjunto de los números naturales.

Z: Conjunto de los números enteros.

Q: Conjunto de los números racionales.

R: Conjunto de los números reales.

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

$$Q \cup I = R$$



PRINCIPIO DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN

Muchos problemas de conteo tratan con una familia de subconjuntos de un universo finito y piden determinar cuántos elementos del universo hay en la unión de estos conjuntos.

Es decir, conociendo el cardinal de dos conjuntos, y el cardinal de la intersección de los mismos es posible hallar el cardinal la unión.

También, conociendo el cardinal de dos conjuntos, y el cardinal de la unión de los mismos es posible hallar el cardinal la intersección.



PRINCIPIO DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN

Problema:

Durante el mes de abril, una empresa ha fabricado diariamente productos del tipo A o B (o ambos), excepto 4 domingos durante los cuales no ha fabricado nada. Sabiendo que 15 días del mes ha fabricado A y 20 días ha fabricado B.

¿Cuántos días del mes ha fabricado ambos productos?

¿Cuántos días ha fabricado sólo productos del tipo B? ¿y sólo A?

¿Cuántos días ha fabricado sólo un tipo de producto?

En este caso se tiene como dato el cardinal de A, el de B y el de la unión de ambos. Se desea determinar el cardinal de la intersección de ambos.

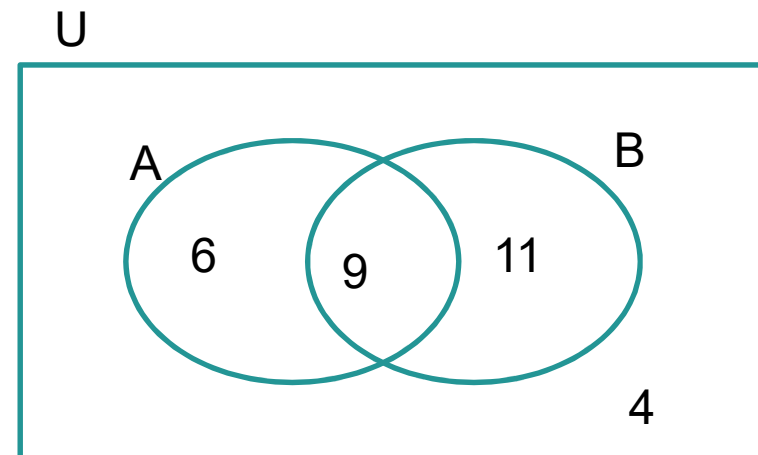
$$\#(A \cup B) = 26$$

$$\#A = 15$$

$$\#B = 20$$

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cup B)$$





Problema: En un club de esparcimiento de 500 socios se van a realizar unos campeonatos de ajedrez, cartas y dominó. Hay 90 personas que no van a participar, y se sabe que hay un total de 180 anotados en ajedrez, 200 a cartas y 220 a dominó. Hay 70 anotados a ajedrez y cartas, 90 a cartas y dominó y 80 a ajedrez y dominó.

Se desea saber el número de personas anotadas a un solo campeonato, a solo dos cualesquiera de ellos y a los tres.