CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL-LSI
TEMA 5

Mgtr. César Garau

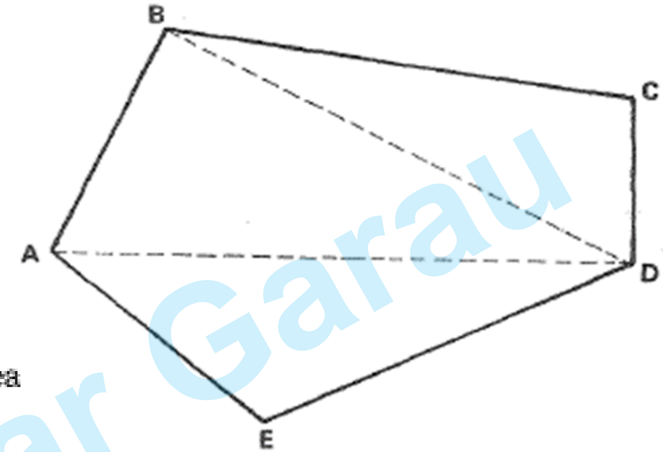
Tema 5: Integrales Definidas. Aplicaciones.

Definición e interpretación geométrica de la integral definida. Propiedades de la integral. Teorema del valor medio del cálculo integral. La derivada de la integral definida. Cálculo de la integral definida mediante la primitiva. Barrow. Integrales generalizadas e impropias. Algunas aplicaciones de la integral definida.

Prof. César Garau

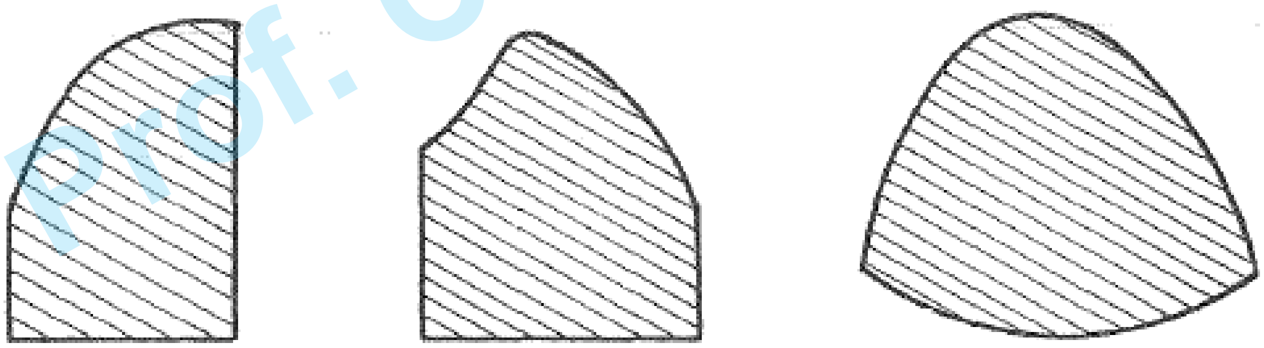
Definición e interpretación geométrica de la integral definida

El estudio de la integral definida se inició históricamente con la resolución del problema de cálculo de áreas de figuras planas. Sabemos que si se trata de un polígono, por irregular que sea, se descompone en triángulos y el área del polígono, es igual a la suma de las áreas de todos esos triángulos, así:



Area políg. ABCDE = Area $\overset{\triangle}{BCD}$ + Area $\overset{\triangle}{ABD}$ + Area

Pero si la figura está limitada por uno o más arcos de curva, por ejemplo:



ya no es posible en la mayoría de los casos obtener el área mediante fórmulas geométricas.

Prof. César Garau

Definición e interpretación geométrica de la integral definida

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$.

Consideremos a P una partición del intervalo $[a, b]$, es decir:

$P = [a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b]$, tal que cumple:

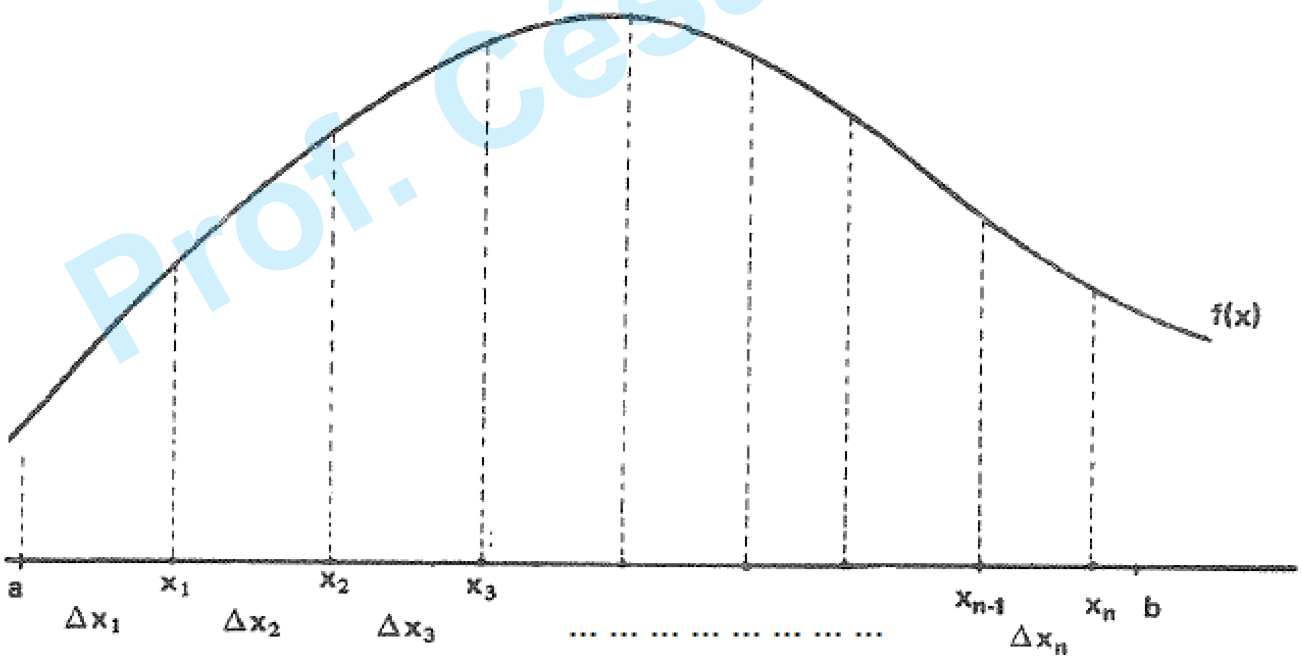
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

Supongamos además que:

$x_1 - x_0 = \Delta x_1$ $\quad x_2 - x_1 = \Delta x_2$ $\quad x_3 - x_2 = \Delta x_3$ $\quad \dots\dots \quad x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$

es decir:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Prof. César Garau

Designaremos por m y M a sus valores mínimo y máximo respectivamente en el intervalo. Es decir:

$$M_i = Máx\{f(x), x \in [\, x_{i-1}, x_i] \,\}$$

$$m_i = mín\{f(x), x \in [\, x_{i-1}, x_i] \,\}$$

Por lo cual consideremos los valores mínimo m y máximo M de la función $f(x)$ en cada intervalo tenemos:

Intervalo: $[x_0, x_1]$ y m_1, M_1
Intervalo: $[x_1, x_2]$ y m_2, M_2
……………………………………..
Intervalo: $[x_{n-1}, x_n]$ y m_n, M_n

Formamos las siguientes sumas:

$$\underline{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{n}} = m_1.\Delta x_1 + m_2.\Delta x_2 + \cdots + m_n.\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i \longrightarrow \text{Suma integral inferior}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{n}} = M_1.\Delta x_1 + M_2.\Delta x_2 + \cdots + M_n.\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i \longrightarrow \text{Suma integral superior}$$

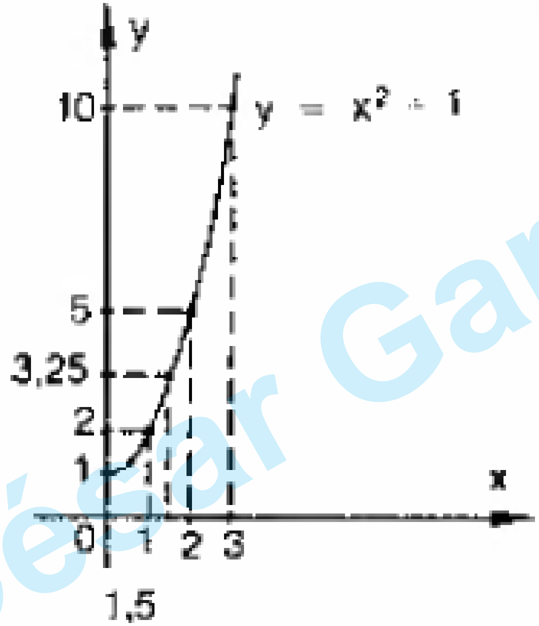
Prof. César Garau

Ejemplo 2

Calcular $\underline{S}$ y $\overline{S}$ para $f: \to x^2 + 1$ en $[0; 3]$ para las subdivisiones siguientes:

1) $P = [0; 1; 2; 3]$

2) $P' = [0; 1; 1{,}5; 2; 3]$



1) $\underline{S}_P(f) = f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = \underline{8}$

$\overline{S}_P(f) = f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 = 2\cdot 1 + 5\cdot 1 + 10\cdot 1 = \underline{17}$

2) $\underline{S}_{P'}(f) = f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 0{,}5 + f(1{,}5)\cdot 0{,}5 + f(2)\cdot 1 =$

$= 1\cdot 1 + 2\cdot 0{,}5 + 3{,}25\cdot 0{,}5 + 5\cdot 1 = \underline{8{,}625}$

$\overline{S}_{P'}(f) = f(1)\cdot 1 + f(1{,}5)\cdot 0{,}5 + f(2)\cdot 0{,}5 + f(3)\cdot 1 =$

$= 2\cdot 1 + 3{,}25\cdot 0{,}5 + 5\cdot 0{,}5 + 10\cdot 1 = \underline{16{,}125}$

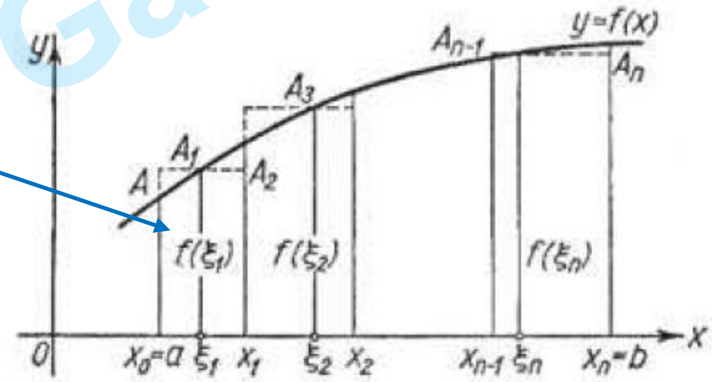
Prof. César Garau

En cada uno de los intervalos definidos, consideremos un punto que designaremos respectivamente: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n$.

Es decir: $\xi_1 \in [x_0, x_1]$ $\quad \xi_2 \in [x_1, x_2]$ $\qquad \xi_3 \in [x_2, x_3]$ $\quad \dots \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$

En el que se cumple que: $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < x_n$

Entonces: $m_i < f(\xi_i) < M_i \quad \Rightarrow m_i.\Delta x_i < f(\xi_i).\Delta x_i < M_i.\Delta x_i$



Si sumamos todos los términos resulta:

$$S_n = f(\xi_1).\Delta x_1 + f(\xi_2).\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n).\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x$$

Con todos los $\Delta x_i > 0$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i.\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i \Rightarrow \underline{S}_n \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i \leq \overline{S}_n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i\right] = S$$

Prof. César Garau

Definición: La función $f(x)$ se dice integrable, en el intervalo $[a, b]$, si el limite

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i\right] = S$$

existe para la función $f(x)$.

Al valor limite se le denomina integral indefinida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y se la denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

Prof. César Garau

Extremo superior de integración

Símbolo de integración

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}}dx$$

Variable de integración

Extremo inferior de integración

Prof. César Garau

Ejemplo:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{3} \,.\, \Delta x_i = \int_a^b x^3 \; dx$$

En general se omite escribir $n \longrightarrow \infty$.

Propiedades de las integrales definidas

Propiedad 1: La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función. Es decir:

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_1^7 3\cdot x^5 dx = 3\cdot \int_1^7 x^5 dx \qquad \int_0^3 4x^2 dx = 4\int_0^3 x^2 dx$$

Propiedad 2: Sea $f(x)$ una función y $a \in Dm_f$, entonces se cumple:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_3^3 x^2 dx = 0$$

Prof. César Garau

Propiedad 3: La integral indefinida de la suma algebraica de dos, o más, funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales. Es decir:

$$\int_a^b [f(x) + g\ (x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_1^{10} [\ x^2 + x^3]\ dx = \int_1^{10} x^2 dx + \int_1^{10} x^3 dx \qquad \int_1^4 (2x+3) = \int_1^4 2x dx + \int_1^4 3dx$$

Prof. César Garau

Propiedad 4: Si en el intervalo $[a, b]$, donde se cumple que $a < b$, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $f(x) \leq g(x)$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Propiedad 4: Si en el intervalo $[a, b]$, donde se cumple que $a < b$, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen que $g(x) \leq f(x)$ entonces:

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 6. Consideremos dos funciones $g(x) = x$ y $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. Queremos demostrar la propiedad de monotonía, que establece que si $g(x)$ es siempre menor o igual a $f(x)$ en un intervalo, entonces la integral definida de $g(x)$ en ese intervalo es menor o igual a la integral definida de $f(x)$.

Veamos primero si se cumple que $f(x) \geq g(x)$: Para cada valor de x en el intervalo $[0, 2]$, $g(x) = x$ es siempre menor o igual a $f(x) = x^2$ ya que el cuadrado de cualquier número es siempre mayor o igual así mismo.

Ahora veamos que ocurre con las integrales definidas de cada función en el intervalo $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 x dx &= \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2}(2^2 - 0^2) \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \int_0^2 x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Comparando los valores de las integrales definidas obtenemos que: $2 \leq \dfrac{8}{3}$

Prof. César Garau

Propiedad 5: Dados tres números arbitrarios a, b y c se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx = 7.$$

Propiedad 6: Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, en el que se cumple que $a \leq b$, entonces:

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$$

Prof. César Garau

Teorema del Valor Medio del cálculo integral

Sea $y = f(x)$ es una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y además

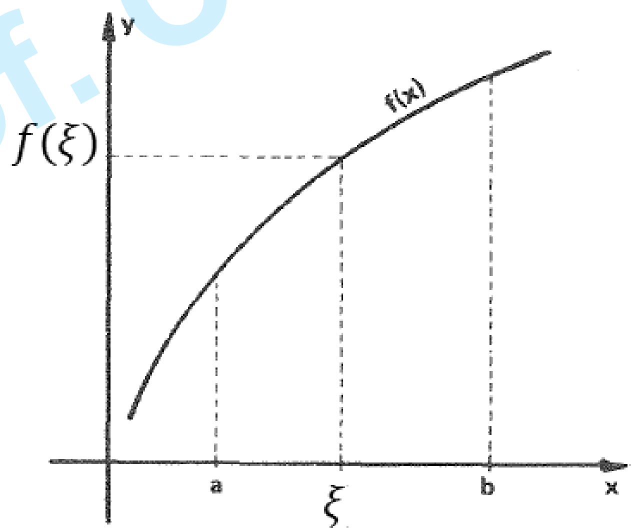
$M_i = Máx\{f(x), x \in [\,x_{i-1}, x_i]\,\}$ $\qquad\qquad$ $m_i = mín\{f(x), x \in [\,x_{i-1}, x_i]\,\}$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} . \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Si además la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$.
Entonces existe $\xi \in [a, b]$ que verifica:

$$\int_a^b f(x)dx \leq (b-a). f(\xi)$$

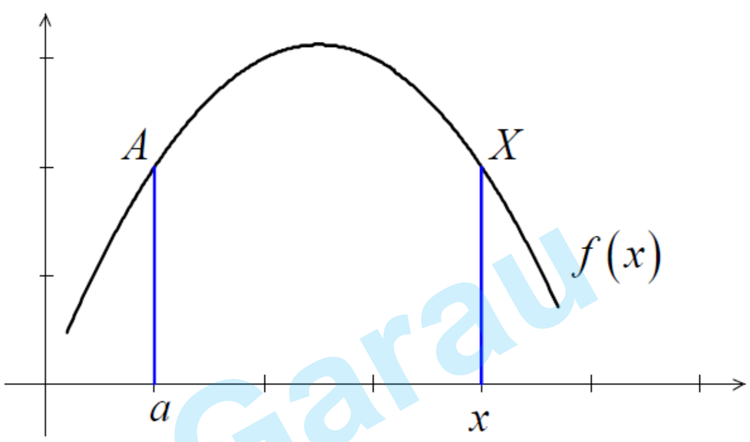
que expresa que la integral definida de una función continua, es igual al producto del valor que toma la función en un punto interior del intervalo, por la amplitud del mismo.



Prof. César Garau

La función Área

Sea la integral definida: $\int_a^b f(x)dx$



Supongamos el extremo inferior a fijo, mientras que el superior b varia. Es evidente que variara también el valor de la integral, es decir, la integral será una función de su limite superior.

Designemos el extremo superior por x y para evitar toda confusión designaremos la variable de integración por t (el valor de la integral no depende de la designación de la variable de integración). Por lo cual ahora definimos una nueva función, llamada área, como:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt \quad , f(t) \geq 0$$

El valor de $A(x)$ será numéricamente igual al área del trapecio curvilíneo. Evidentemente esta área varia en función del cambio x. Por lo cual, hallaremos la derivada de A respecto de x, es decir la derivada de la integral respecto a su limite superior.

Prof. César Garau

Calculemos la derivada de la función $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ respecto a la variable independiente x.

Damos a x un incremento arbitrario Δx y obtenemos para $A(x)$ el incremente de $\Delta A(x)$, es decir:

$$\Delta A(x) = A(x+\Delta x) - A(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$ (por propiedad aditiva)

$$= \cancel{\int_a^x f(t)dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \cancel{- \int_a^x f(t)dt} = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad \therefore \Delta A(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Si f es continua, aplicamos el TVM del calculo integral: $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x. f(\xi) \quad , x < \xi < x + \Delta x$

Determinamos el cociente incremental:

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}. f(\xi)}{\cancel{\Delta x}} = f(\xi)$$

Cuando Δx tiende a cero, ξ tiende a x y como $f(x)$ es continua, resulta

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x) \qquad \therefore A'(x) = f(x)$$

Lo que nos expresa la igualdad es que la función área es una primitiva de $f(x)$ y queda así establecida una relación de fundamental importancia entre las integrales definidas e indefinidas

Prof. César Garau

Regla de Barrow

Sea la integral definida: $\int_a^b f(x)dx$

Hallemos una primitiva cualquiera $F(x)$, es decir: $F'(x) = f(x)$

Y además: $A'(x) = f(x)$

y por el teorema Fundamental del Cálculo Integral, sabemos que dos primitivas de una misma función difieren en una constante:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

Si $x = a$ $\quad A(a) = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C = 0$

Retomando la ultima igualdad resulta: $F(a) + C = 0 \qquad \therefore C = -F(a)$

De donde: $A(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + F(a)$

Introduciendo la notación : $F(b) + F(a) = [F(x)]_a^b$

Resulta: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) + F(a)}$

La regla de Barrow especifica que para evaluar la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, basta encontrar una primitiva cualquiera de $f(x)$ y restar los valores indicados de dicha primitiva.

Prof. César Garau

Integrales generalizadas o impropias

En la definición de integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se exigen dos condiciones:
1º) que el Intervalo de integración sea finito y 2º) que la función integrando sea continua o por lo menos que si tiene puntos de discontinuidad este acotada en el intervalo de integración. Cuando alguna de estas dos condiciones no se cumple, se extiende el concepto de integral definida y se obtiene las que se llaman integrales impropias o generalizadas.

Integrales impropias de 1º especie

Son aquellas en que el intervalo de integración es infinito, pero la función integrando cumple la condición impuesta de ser acotada. Por lo cual:

Si el extremo b tiende a $+\infty$, el intervalo es $[a, +\infty]$ y se tiene la integral impropia:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ Que se define como $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ es decir:

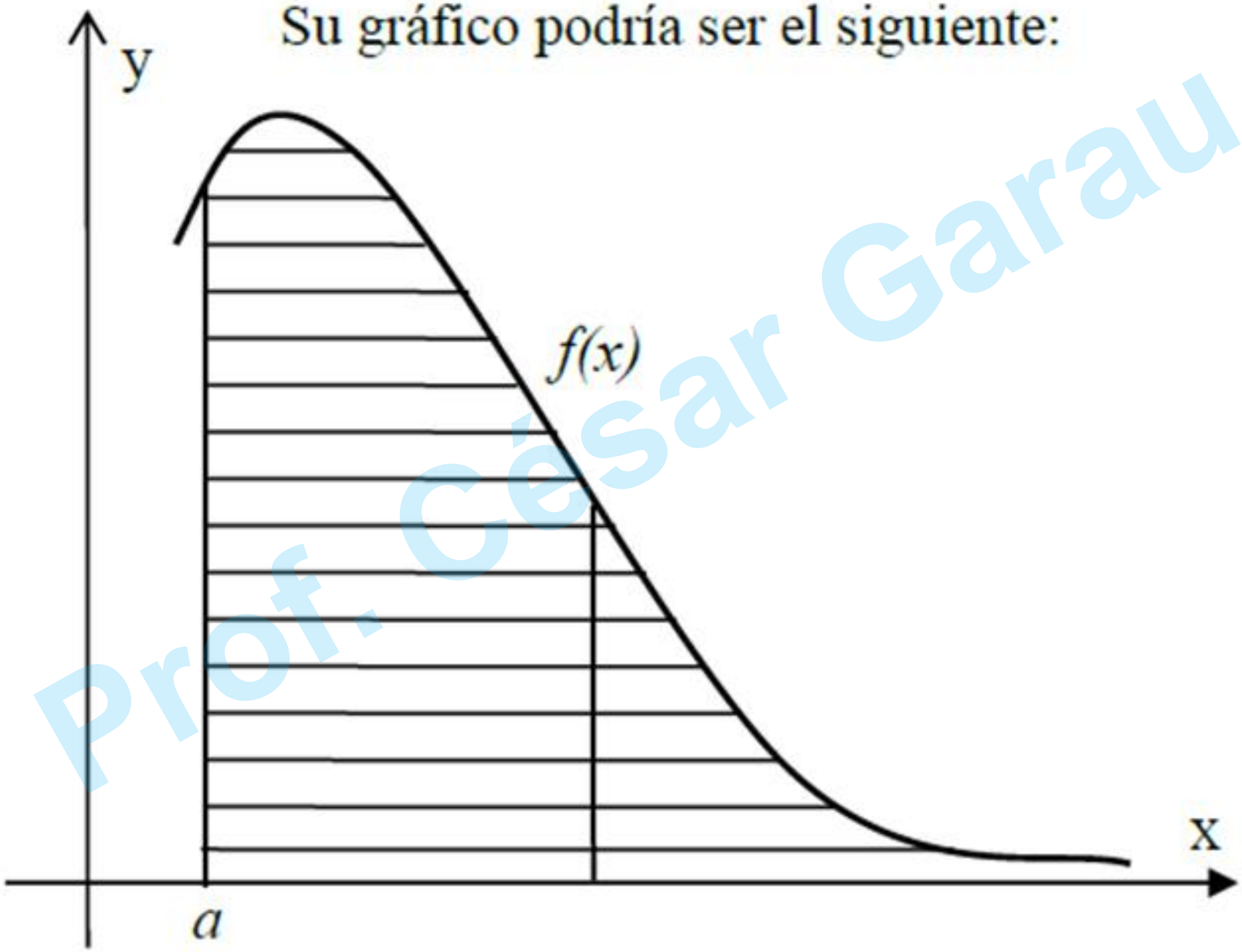
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si este limite es finito, la integral impropia se dice convergente, si el limite es infinito la integral impropia se dice divergente.

Prof. César Garau

En este caso la integral a resolver es: $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$

Su gráfico podría ser el siguiente:



Prof. César Garau

Ejemplos:

1°) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$ es cómodo calcular la integral en el intervalo $[\,0\,;\,b\,]$ y luego tomar límite cuando $b \longrightarrow +\infty$, así:

$$\int_0^b \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1}\Big/_0^b = -\frac{1}{b+1} - \left(-\frac{1}{0+1}\right) = -\frac{1}{b+1} + 1$$

luego $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b+1} + 1\right] =$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b+1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = 1$

Prof. César Garau

2°) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$

$$\int_1^b e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_1^b = -e^{-b} - (-e^{-1}) = -\frac{1}{e^b} + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{e^b} + \frac{1}{e}\right] = \left[\lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{e^b}\right] + \frac{1}{e} = 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

luego $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = \frac{1}{e}$

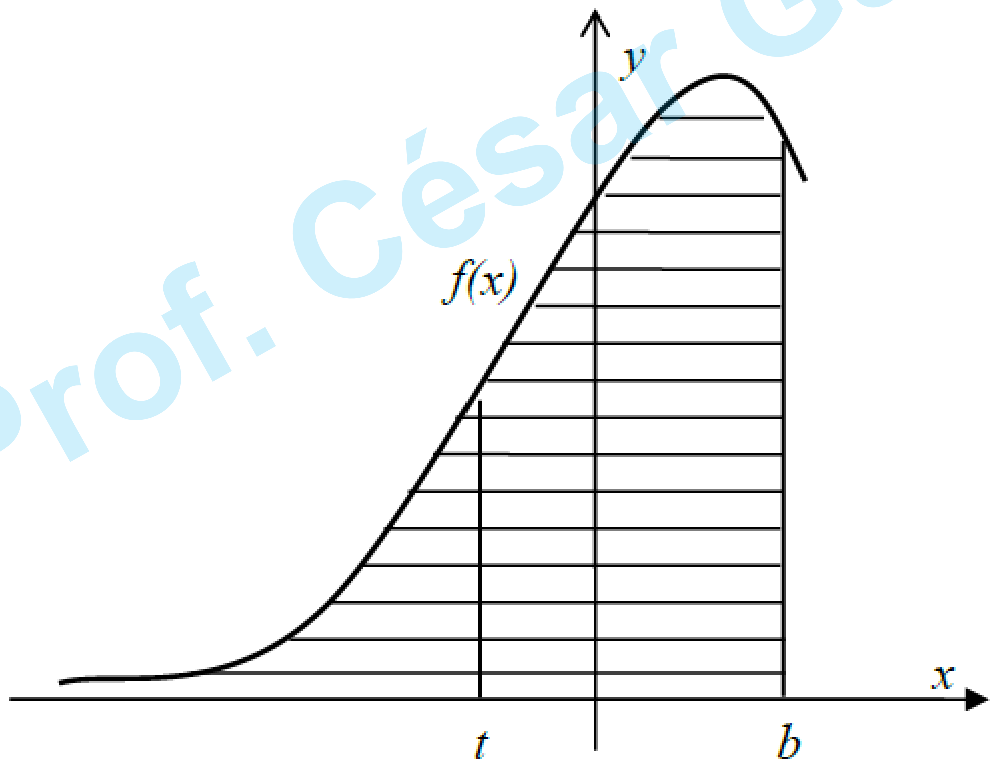
Prof. César Garau

Analogamente, cuando b es finito, pero el extremo inferior a tiende a $-\infty$, la integral impropia es:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Ahora la integral a calcular resulta: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

Y podemos suponer su que su gráfico es el siguiente:



Prof. César Garau

Ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(3-x)^2}\, dx$$

$$\int_a^1 \frac{1}{(3-x)^2}\, dx = (3-x)^{-1}\Big|_a^1 = (3-1)^{-1} - (3-a)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3-a}$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^1 \frac{1}{(3-x)^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3-a}\right] = \frac{1}{2} - \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{3-a} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

luego $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(3-x)^2}\, dx = \frac{1}{2}$

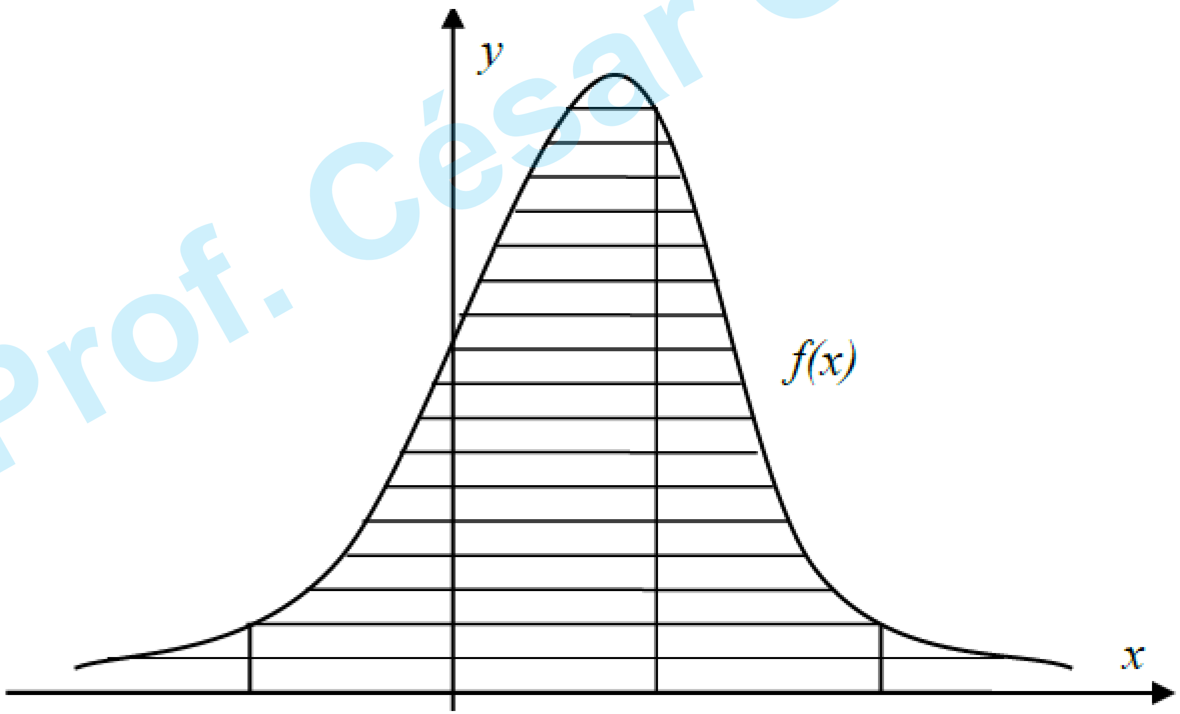
Prof. César Garau

Cuando el extremo a tiende a $-\infty$ y además b tiende a $+\infty$, la integral impropia se descompone en dos integrando:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

Entonces la integral a resolver es del tipo: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$

Y su grafica puede ser:



Prof. César Garau

Integrales impropias de 2º especie

Se llama así cuando la función integrando no esta acotada en uno de los extremos del intervalo, o sea tiene una discontinuidad infinita en algunos de sus extremos.

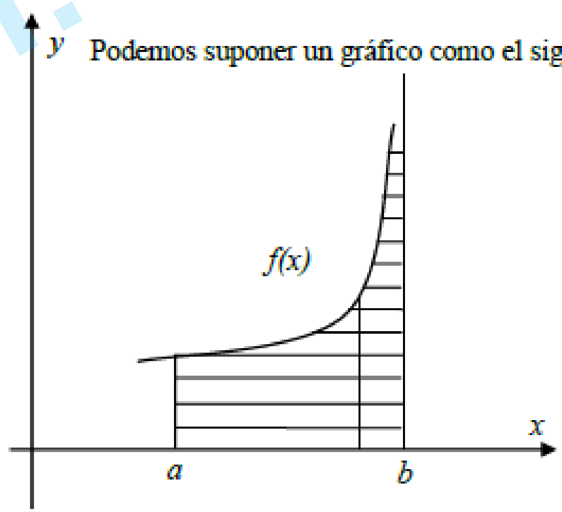
Si la discontinuidad es en el extremo b, es decir

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$ se define $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx}$

es decir c tiende a b por la izquierda o bien, lo que es equivalente, pero que resulta más cómodo para el cálculo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx}$$

Podemos suponer un gráfico como el siguiente:



Prof. César Garau

Ejemplo

$$\int_2^6 \frac{1}{2\sqrt{6-x}}\, dx$$

la función integrando tiende a ∞ en el extremo 6 pues el denominador $\longrightarrow 0$.

Como $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{6-x}}\, dx = -\sqrt{6-x}$. Se aplica la definición anterior

$$\int_2^6 \frac{1}{2\sqrt{6-x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_2^{6-\epsilon} \frac{1}{2\sqrt{6-x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\sqrt{6-x} \right|_2^{6-\epsilon} =$$

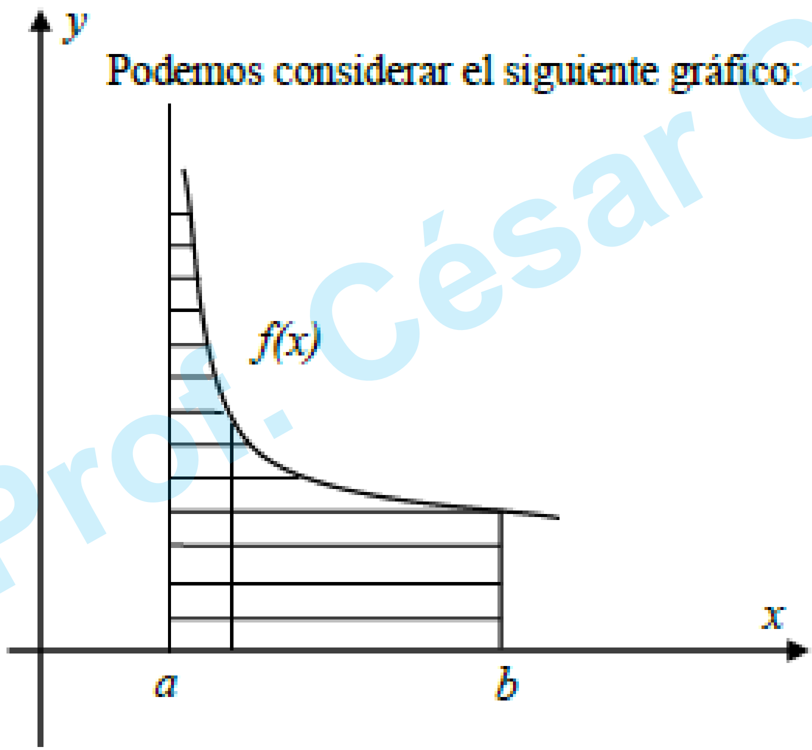
$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\sqrt{6-(6-\epsilon)} - \left(-\sqrt{6-2} \right) \right] = \lim_{\epsilon \to 0} \left[-\sqrt{6-(6-\epsilon)} \right] + \sqrt{4} = -\sqrt{6-6} + 2 = 0 + 2 = 2$$

Prof. César Garau

Análogamente, si la discontinuidad infinita es en el extremo inferior a es decir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx}$$

Podemos considerar el siguiente gráfico:



Prof. César Garau

Ejemplo:

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx \qquad \text{en el extremo } \ x = 1 \ \text{ la función } \ \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \longrightarrow \infty$$

Como $$\int \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx = 3\,(x-1)^{\frac{1}{3}} + C$$

$$\int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx = 3\left[(2-1)^{\frac{1}{3}} - (1+\epsilon-1)^{\frac{1}{3}}\right] = 3\left[1^{\frac{1}{3}} - \epsilon^{\frac{1}{3}}\right]$$

luego

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \ 3\left[1^{\frac{1}{3}} - \epsilon^{\frac{1}{3}}\right] = 3\,.\,1 - 3\,.\,0 = 3$$

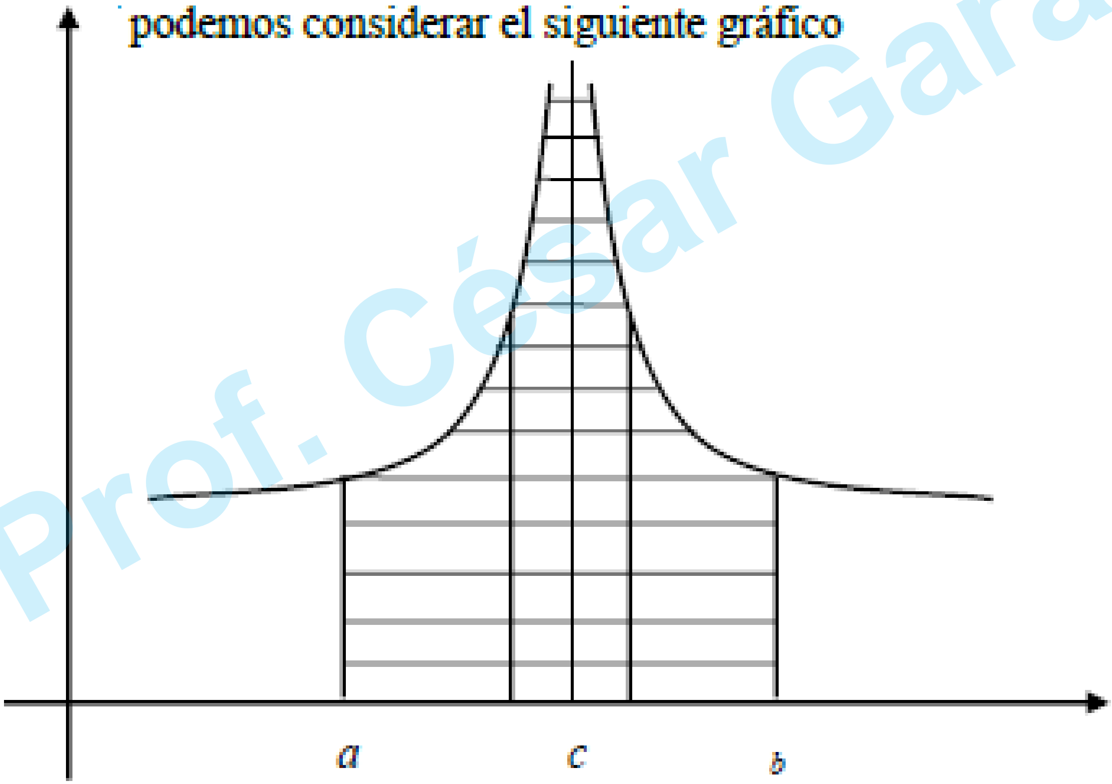
Por lo tanto $$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\, dx = 3$$

Prof. César Garau

Si la discontinuidad infinita de la función integrando $f(x)$ se presenta en un punto c interior del intervalo $[a, b]$, la integral se descompone en la suma de dos integrales impropias:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

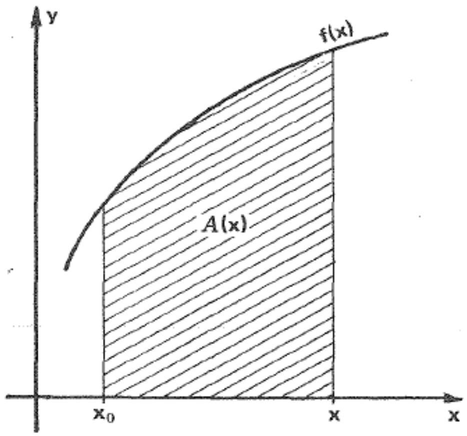
podemos considerar el siguiente gráfico



Prof. César Garau

Cálculo de áreas

Sea una función $f(x)$



Si la función $f(x) \geq 0$ es una función definida y continua en el intervalo $[a, b]$, entonces el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a:

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

Si la función $f(x) \leq 0$ es una función definida y continua en el intervalo $[a, b]$, la integral (*) es también menor o igual a cero.. Entonces el valor absoluto es igual al área del trapecio curvilíneo correspondiente, es decir:

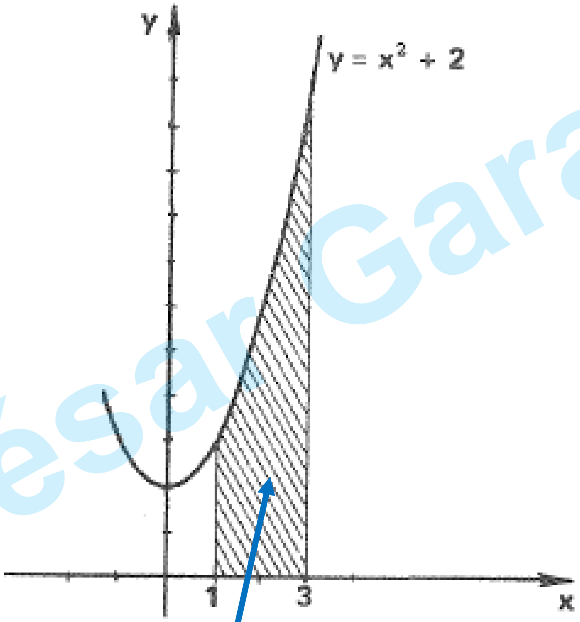
$$A = \int_a^b |f(x)|dx$$

Prof. César Garau

Ejemplos:

1°) Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 + 2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Siempre es conveniente hacer la gráfica correspondiente



$$A = \int_1^3 (x^2 + 2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x\Big|_1^3 = \left(\frac{1}{3}3^3 + 2\,.\,3\right) - \left(\frac{1}{3} + 2\right) = 9 + 6 - \frac{1}{3} - 2 = \frac{38}{3}$$

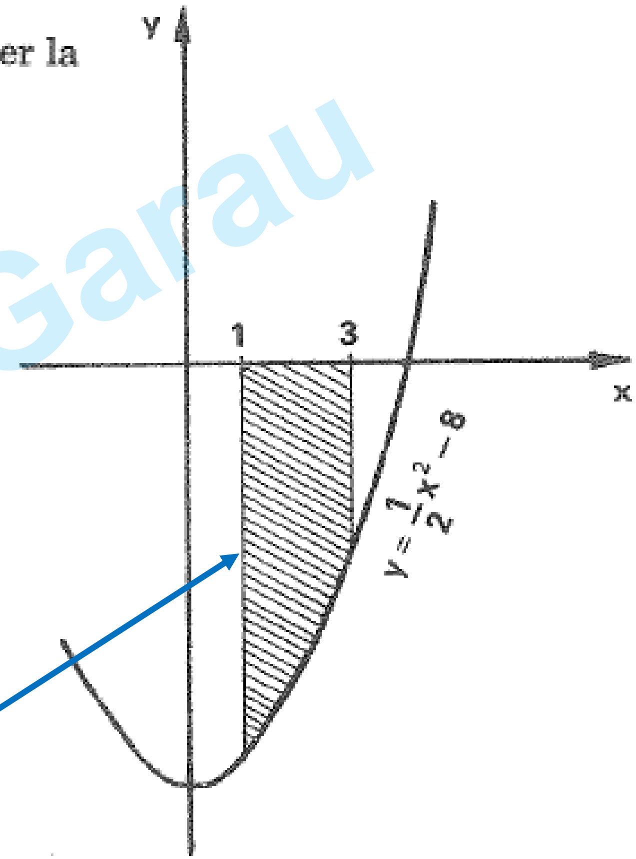
$$A \simeq 12{,}66$$

Prof. César Garau

Ejemplos:

1°) Calcular el área comprendida entre la parábola $y = \frac{1}{2}x^2 - 8$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Siempre es conveniente hacer la gráfica correspondiente



$$\int_1^3 \left|\left(\frac{1}{2}x^2 - 8\right)\right| dx = \left|\frac{1}{6}x^3 - 8x\right|_1^3 =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{6}\,27 - 8\,.\,3\right) - \left(\frac{1}{6} - 8\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{9}{2} - 24 - \frac{1}{6} + 8\right| =$$

$$= \left|-16 + \frac{13}{3}\right| = \left|-\frac{35}{3}\right|$$

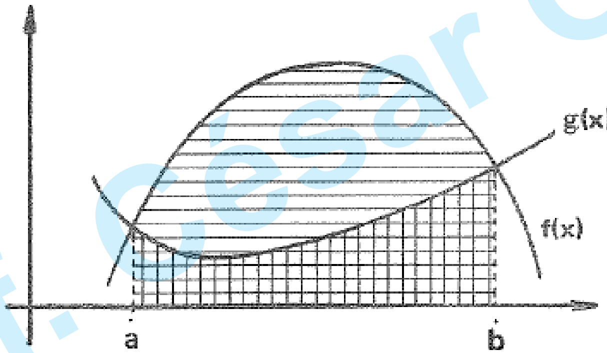
$$A = \frac{35}{3}$$

Prof. César Garau

Cálculo de área entre dos curvas

Sean dos funciones, $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ definidas y continuas en el intervalo $[a, b]$. Se interceptan en los puntos $x = a$ y $x = b$ y además se cumple que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área de la región comprendida entre ambas funciones se puede obtener de la siguiente forma:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



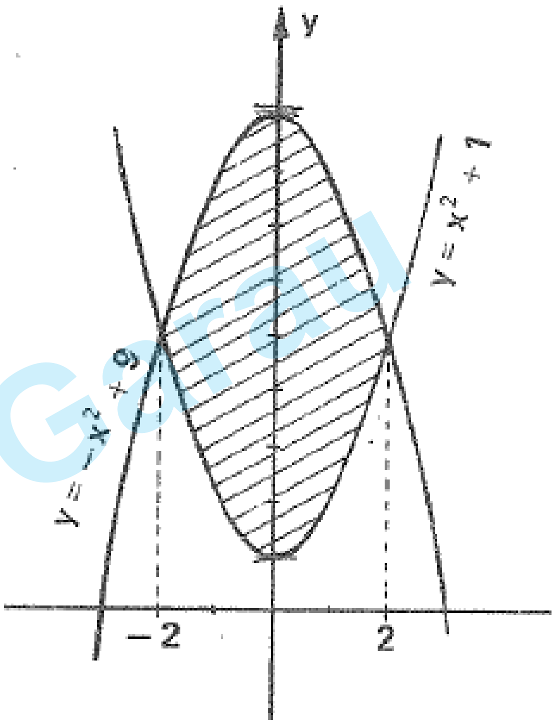
Observación: la igualdad anterior puede aplicarse aun cuando las funciones tengan valores negativos, pero siempre y cuando se cumpla que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$

Prof. César Garau

1°) Calcular el área de la región limitada por las curvas

$$y = x^2 + 1$$

$$y = -x^2 + 9$$



Como siempre es conveniente hacer primero las gráficas. Los puntos comunes a las dos curvas corresponden a ordenadas iguales, es decir

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9 \Longrightarrow 2x^2 = 8 \Longrightarrow x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

Prof. César Garau

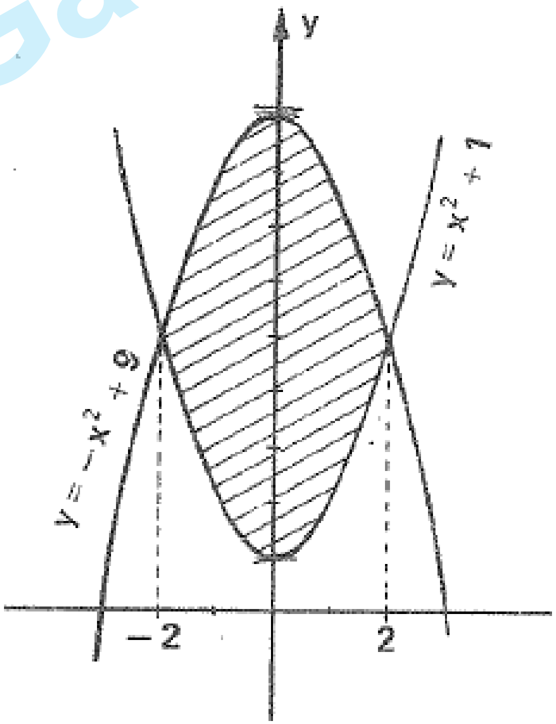
el intervalo de integración es $[-2\,;2]$ pero dada la simetría de la figura con respecto al eje y, se integra en el intervalo $[0\,;2]$ y se obtiene la mitad del área. Por otra parte, como la curva que limita superiormente la figura es la gráfica de $f(x) = -x^2 + 9$ se tiene:

$$\frac{1}{2}A = \int_0^2 \left[(-x^2+9) - (x^2+1)\right] dx = \int_0^2 [-x^2+9-x^2-1]\,dx = \int_0^2 [-2x^2+8]\,dx$$

$$\frac{1}{2}A = -\frac{2}{3}x^3 + 8x \Big|_0^2 = -\frac{2}{3}8 + 8\,.\,2$$

$$\frac{1}{2}A = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3}$$

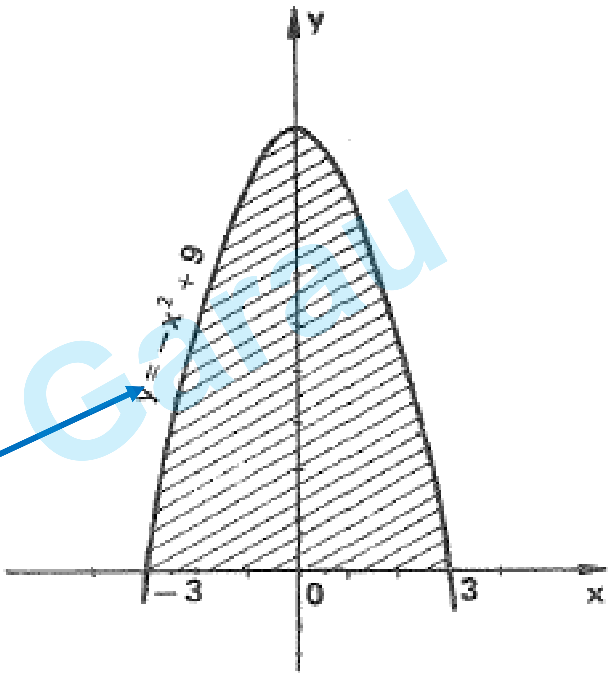
$$A = \frac{64}{3}$$



Prof. César Garau

2°) Calcular el área comprendida entre la parábola $y = -x^2 + 9$, y el eje x. La curva corta al eje x en los puntos -3 y 3.

Para calcular el área habría que integrar en el intervalo $[-3 ; 3]$, pero para evitar el extremo negativo, dada la simetría de la figura se integra entre $x = 0$ y $x = 3$ y se obtiene la mitad del área, es decir:



$$\frac{1}{2} A = \int_0^3 (-x^2 + 9)\, dx = -\frac{1}{3} x^3 + 9x \Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} 27 + 9 . 3 = -\frac{27}{3} + 27 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} A = \frac{54}{3} = 18 \Longrightarrow A = 36$$

Prof. César Garau

2°) Calcular el área de la región limitada por las curvas

$y = x^2 - 4$

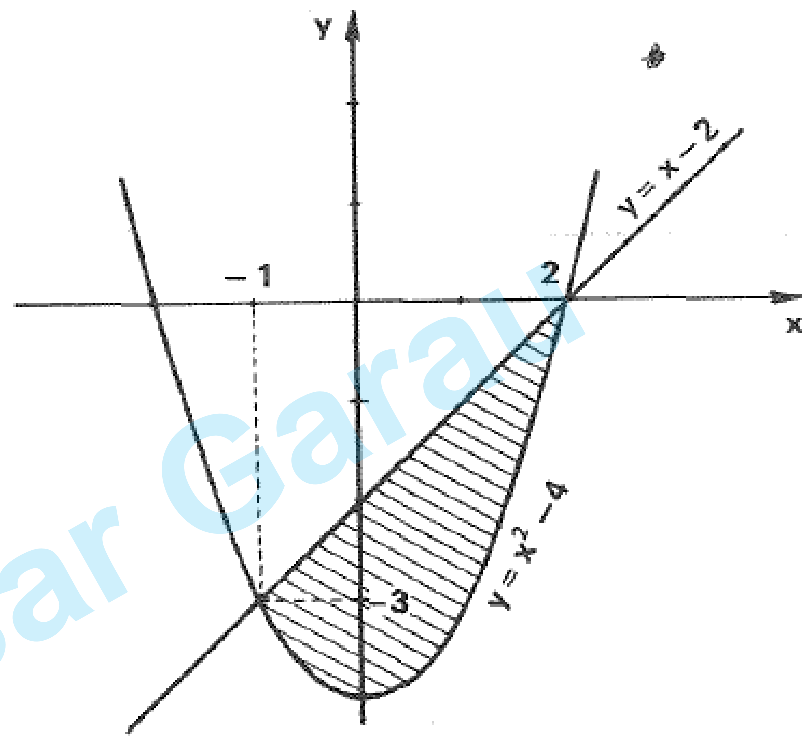
$y = x - 2$

Los puntos en que se cortan las curvas corresponden a los de ordenadas iguales, es decir:

$$x^2 - 4 = x - 2 \Longrightarrow x^2 - 4 - x + 2 = 0$$

o bien $x^2 - x - 2 = 0$, ecuación de segundo grado, cuyas raíces son:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$



Prof. César Garau

En este caso el intervalo de integración es $[-1 ; 2]$, como no hay simetría, no se puede evitar el extremo negativo. Además la zona está limitada superiormente por $y = x - 2$, luego:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(x - 2) - (x^2 - 4)\right] dx \Longrightarrow A = \int_{-1}^{2} [\, x - 2 - x^2 + 4 \,] \, dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} [\, x - x^2 + 2 \,]\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 - \frac{1}{3}\, x^3 + 2\, x \Big|_{-1}^{2} =$$

$$\left[\frac{1}{2}\, 2 - \frac{1}{3}\, 2^3 + 2 \,.\, 2\right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{1}{3}(-1)^3 + 2\,(-1)\right]$$

$$A = \left[2 - \frac{8}{3} + 4\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right] = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 8 - 3 - \frac{1}{2}$$

$$A = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Prof. César Garau

A veces porque las curvas se cortan en más de dos puntos o por otras características de la figura, se descompone el área total en la suma de dos o más áreas.

Ejemplo 1°)

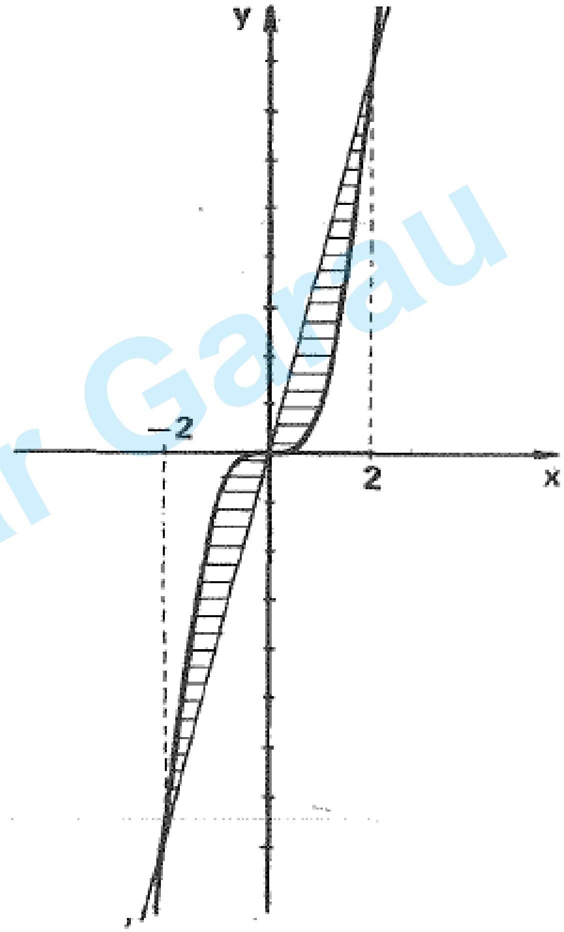
Calcular el área de la región limitada por la parábola cúbica $y = x^3$ y la recta $y = 4\,x$. Los puntos comunes de la parábola cúbica y la recta, tienen igual ordenada, o sea:

$$x^3 = 4\,x \Longrightarrow x^3 - 4\,x = 0$$

o sea

$$x\,(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

es decir que se cortan en tres puntos, el de abscisa $x_0 = 0$, el de abscisa $x_1 = -2$ y el de abscisa $x_2 = 2$.



En verdad quedan determinadas dos zonas, la del semiplano inferior con respecto al eje x y la del semiplano superior, pero como son simétricas con respecto al origen, las áreas son iguales, basta calcular la de una de ellas, la del intervalo $[\,0\,;\,2\,]$ por ejemplo, y el área total es el duplo de ella.

Prof. César Garau

Así:

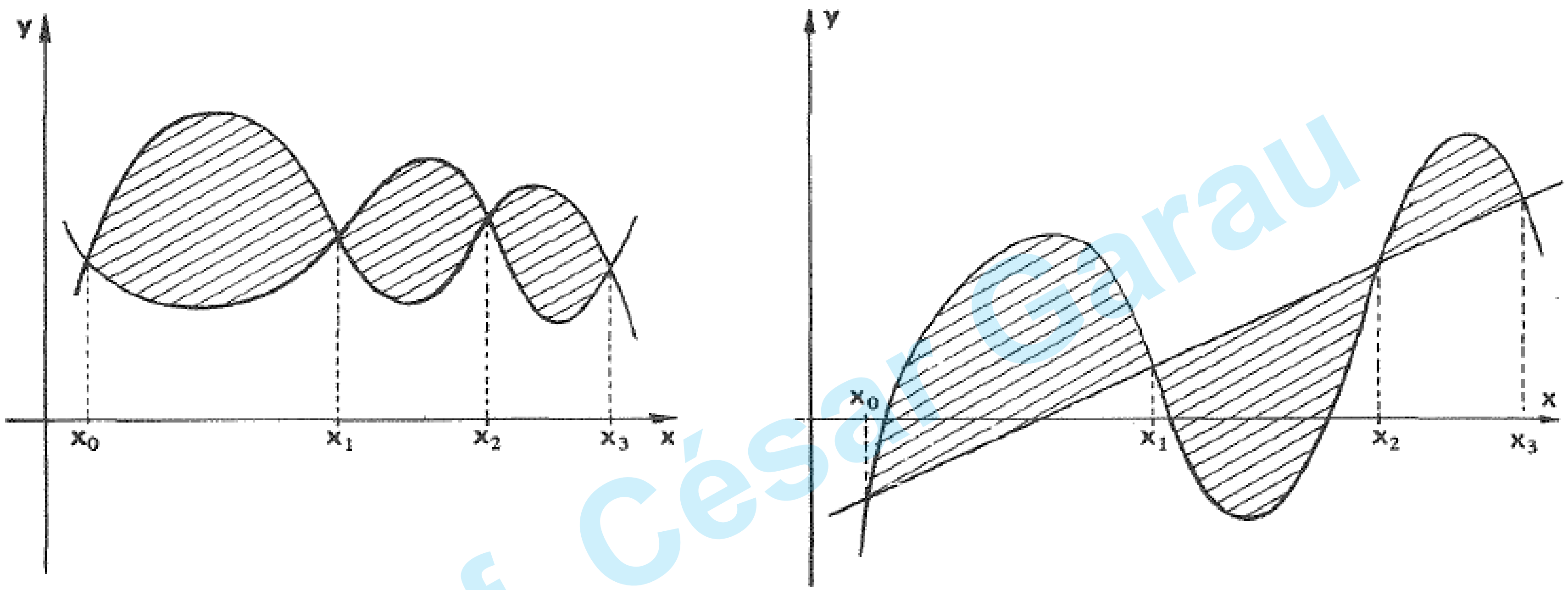
$$A_1 = \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^2 = 2\,.\,4 - \frac{1}{4}\;16 = 8 - 4 = 4$$

el área total es

$$A = 2 \times 4 = 8$$

Prof. César Garau

En general, hay problemas en que la superficie total se subdivide en 3 o más partes, por ejemplo los que corresponden a las gráficas que figuran a continuación:



Se divide en tres partes, una de las cuales corresponde respectivamente a los intervalos $[x_0 \,; x_1]$ $[x_1 \,; x_2]$ $[x_2 \,; x_3]$.

Prof. César Garau

Cambios de variables en la integral definida.

Sea una función $f(x)$ definida y continua en el intervalo $[a, b]$ y su integral $\int_a^b f(x)dx$, y existe $x = g(u)$, tal que :

1) $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$
2) $g(u)$ y $g'(u)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$
3) $f[g(u)]$ esta definida y es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f[g(u)].g'(u)du$$

Ejemplo

Calcula $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{4x+5}$.

Solución:

$u = 4x + 5$. Entonces $du = 4dx$.

Límite inferior: Para $x = 0,\ u = 4 \cdot 0 + 5 = 5$

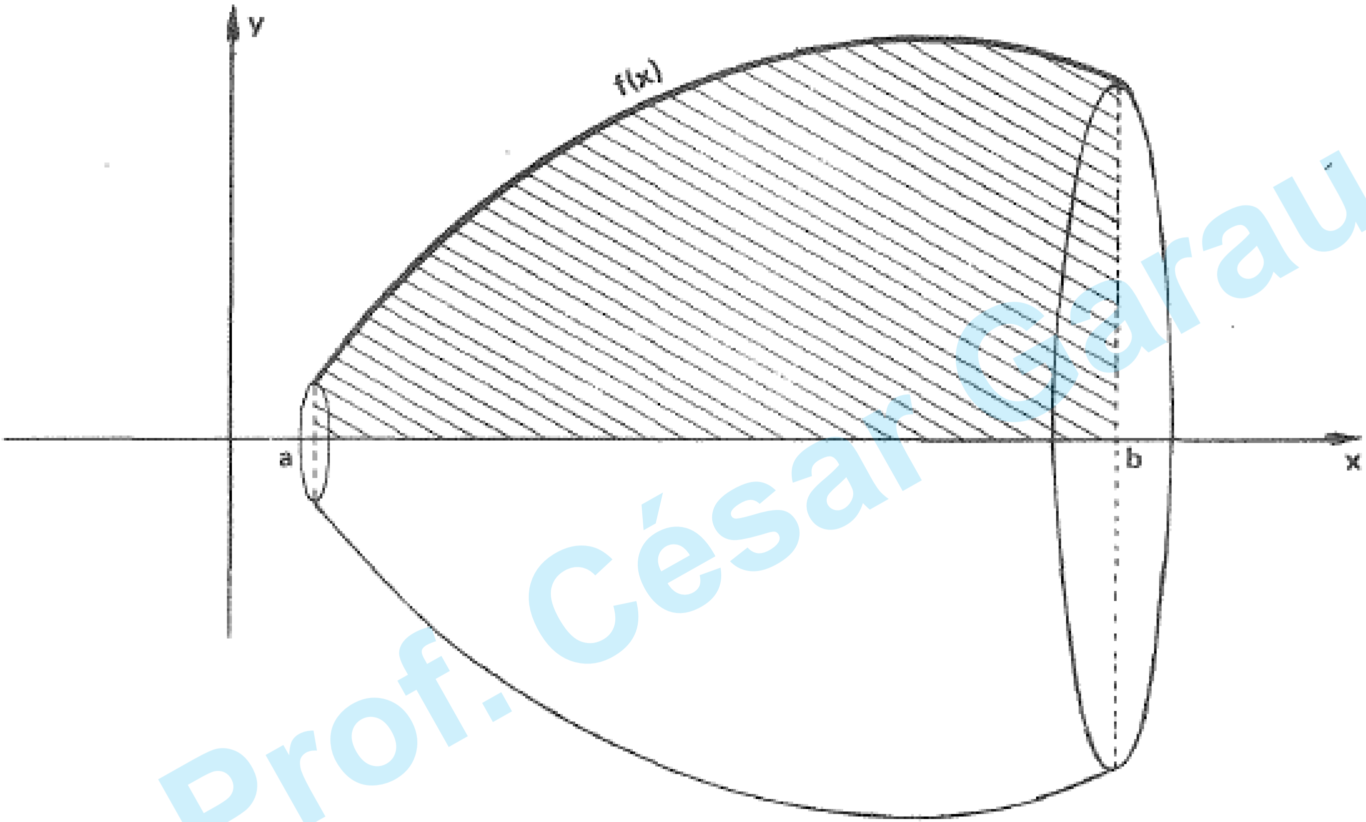
Límite superior: Para $x = 3,\ u = 4 \cdot 3 + 5 = 17$.

Por lo tanto $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{4x+5} = \int_5^{17} \frac{du}{4u} = \frac{1}{4}[\ln u]_5^{17} = \frac{1}{4}[\ln 17 - \ln 5]$

Prof. César Garau

Volumen de un sólido de revolución.

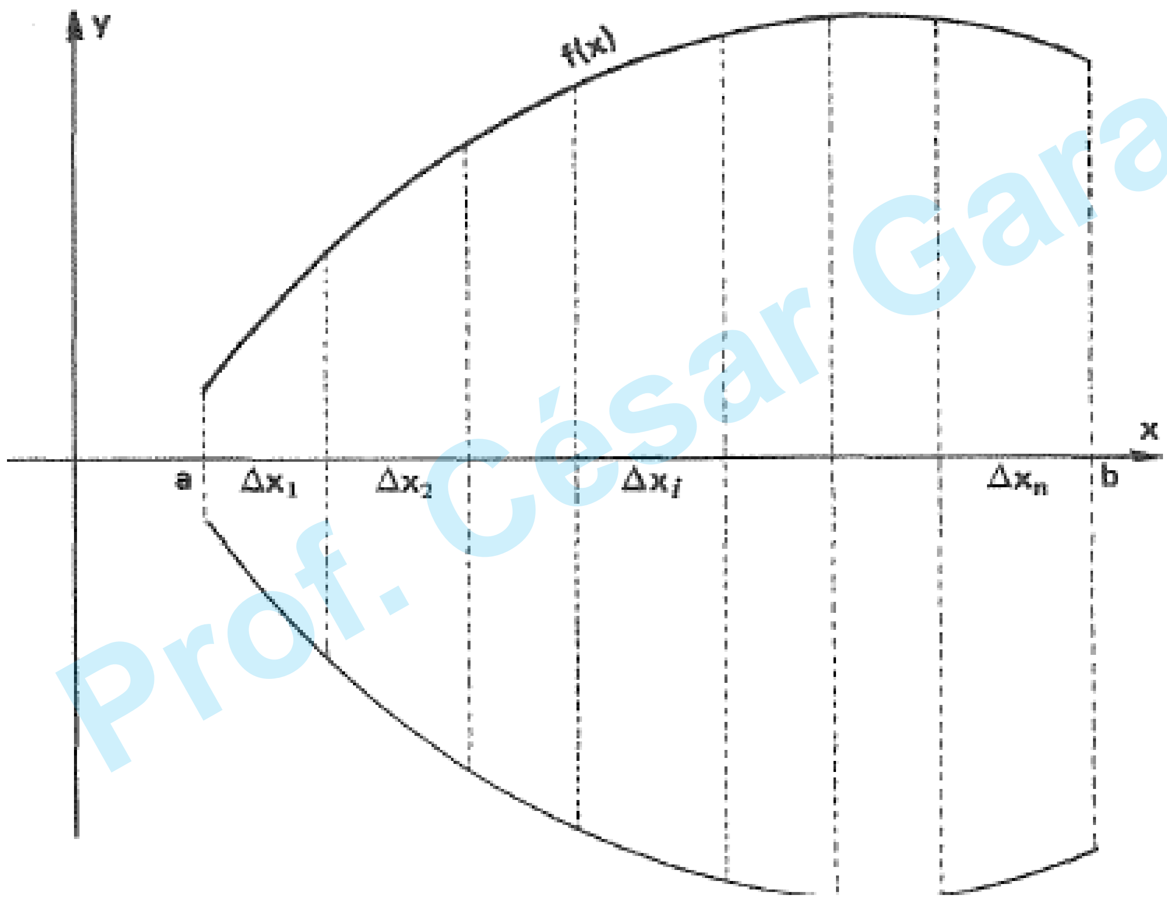
El arco de curva de la figura, es parte de la gráfica de la función continua $f(x)$



Prof. César Garau

La proyección del arco sobre el eje x es el intervalo $[a ; b]$. Se quiere obtener el volumen del cuerpo engendrado por la zona rayada limitada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ cuando gira alrededor del eje x.

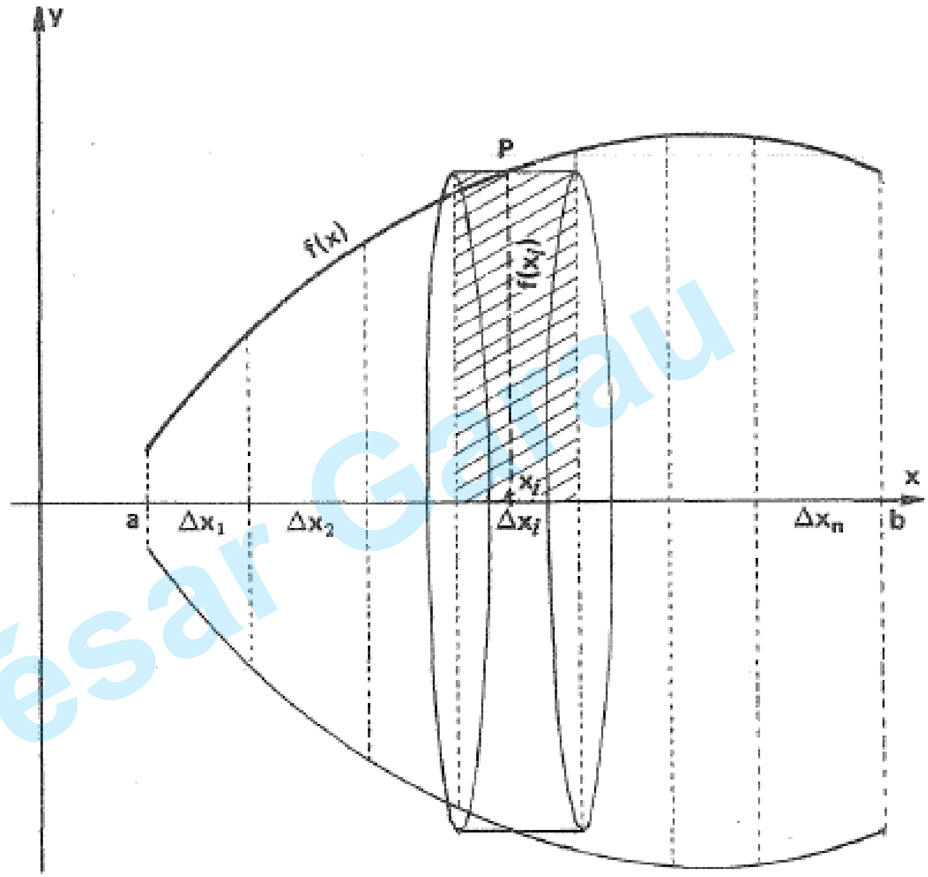
Se divide el intervalo $[a ; b]$ en n subintervalos de amplitudes Δx_1 ; Δx_2 ; . . . . . . Δx_n respectivamente. Por los extremos de los subintervalos se trazan perpendiculares al eje x, de tal forma, la superficie sombreada queda dividida en n bandas. El volumen del cuerpo total es igual a la suma de los volúmenes de los cuerpos engendrados por cada banda.



Prof. César Garau

Se considera una cualquiera de las bandas, sea la de amplitud Δx_i, por un punto x_i interior a su base se traza la perpendicular al eje x que corta a la curva en el punto P y queda determinado el segmento cuya medida es $f(x_i)$.

Por P se traza una paralela al eje x y se tiene un rectángulo de base Δx_i y altura $f(x_i)$. Este rectángulo, al girar alrededor del eje x engendra un cilindro, que, como se destaca en la figura tiene altura Δx_i y radio de la base igual a $f(x_i)$.



El volumen del cilindro es igual a π por el cuadrado del radio de la base, por la altura, en este caso llamando V_i a ese volumen:

$$V_i = \pi \left[f(x_i) \right]^2 \Delta x_i$$

Prof. César Garau

Si se repite la operación en cada subintervalo, se tienen n cilindros; la suma de los volúmenes de esos n cilindros aplicando el signo sumatoria es:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \Delta x_i \qquad \text{se saca } \pi \text{ factor común} \qquad \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \right]^2 \Delta x_i$$

Esta suma de los volúmenes de los n cilindros se aproxima al volumen del cuerpo de revolución engendrado por la figura rayada, tanto más, cuanto más pequeñas sean las amplitudes Δx_i de cada uno de los subintervalos y en consecuencia el número n se hace tanto mayor.

Se define el volumen del cuerpo total, como el límite de la sumatoria cuando cada uno de los Δx_i tiende a cero. Es decir:

$$V = \lim_{\Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \right]^2 \Delta x_i$$

$$V = \pi \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \right]^2 \Delta x_i$$

Pero por definición de integral, como $\left[f(x_i) \right]^2$ es el factor de Δx_i en la sumatoria:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) \right]^2 \Delta x_i = \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

reemplazando en la expresión de V el límite de la sumatoria por la integral, se tiene

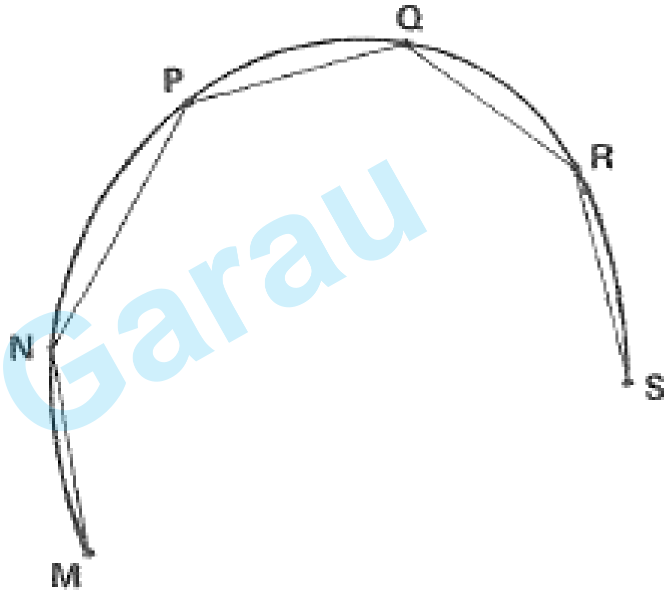
$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx}$$

que es la fórmula buscada.

Prof. César Garau

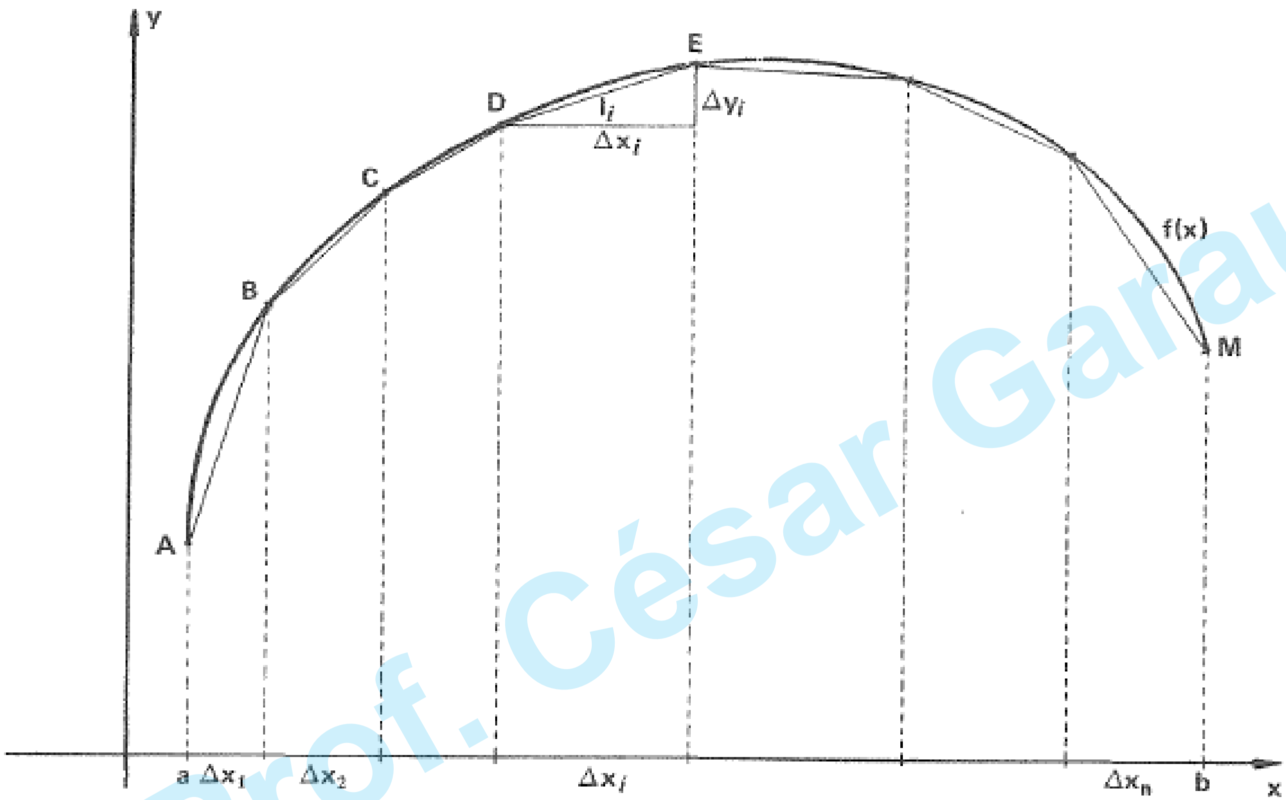
Longitud de un arco de curva

Se define la longitud de un arco de curva, como el límite de la longitud de una poligonal inscripta en él, cuando la longitud de cada lado de la misma tiende a 0 y en consecuencia el número de lados tiende a ∞. La poligonal MNPQRS está inscripta en el arco de curva, pues todos sus vértices pertenecen al mismo.



Prof. César Garau

Nos proponemos encontrar la integral que determina la longitud del arco que es gráfica de la función derivable $f(x)$ con derivada continua en el intervalo $[\, a \,;\, b \,]$



La poligonal de n lados inscripta en ese arco es ABCDE . . . . . . M. Por los vértices de la poligonal trazamos las perpendiculares al eje x, el intervalo $[\, a \,;\, b \,]$ queda así dividido en n subintervalos de amplitud Δx_1 ; Δx_2 ; . . . . ; Δx_n respectivamente. Consideramos uno cualquiera de esos lados, el $\overline{DE}$ por ejemplo, cuya longitud llamaremos l_i. Dicho lado es hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son Δx_i y Δy_i que es el incremento correspondiente de la función.

Por un corolario del Teorema de Pitágoras, es:

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Prof. César Garau

Pero el incremento de la función derivable en un intervalo, de acuerdo con el Teorema del valor medio es igual al producto de la derivada de la función en un punto interior del intervalo por el incremento de la variable independiente, es decir

$\Delta y_i = f'(x_i) \cdot \Delta x_i$ donde x_i es un punto interior del intervalo Δx_i .

Necesitamos $(\Delta y_i)^2$ $(\Delta y)^2 = \left[f'(x_i)\right]^2 (\Delta x_i)^2$

reemplazamos $(\Delta x_i)^2$ en la raíz cuadrada:

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left[f'(x_i)\right]^2 (\Delta x_i)^2}$$

sacamos $(\Delta x_i)^2$ factor común

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left\{1 + \left[f'(x_i)\right]^2\right\}}$$

o sea

$$l_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \left[f'(x_i)\right]^2}$$

Prof. César Garau

la longitud de la poligonal, es la suma de la longitud de cada uno de sus n lados.

$$\text{longitud de la poligonal} = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left[f'(x_i) \right]^2}$$

la longitud del arco de curva, es el límite a que tiende la longitud de la poligonal, cuando la longitud de cada uno de sus lados y en consecuencia la amplitud de cada Δx_i tiende a 0, luego:

$$\text{longitud del arco} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left[f'(x_i) \right]^2}$$

Recordemos que: $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \,.\, \Delta x_i$$

en la sumatoria anterior el factor de Δx_i es $\sqrt{1 + \left[f(x_i) \right]^2}$ que determina el integrando, por lo tanto

$$\boxed{\text{longitud del arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2}\, dx}$$

Prof. César Garau