# Resolución del Recuperatorio del 1° Parcial de Álgebra(LSI)

**TEMA 1**

**1.** Dadas las siguientes proposiciones simples:

***p*: "6 es un número par"** ; ***q*: "5 es divisible por 3"** ; ***r*: una proposición cualquiera.**

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, justificando el desarrollo:

**a)** $\neg(q \wedge r) \veebar p$ **b)** $(p \vee r) \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$

Como p es V y q es F, podemos decir:

a) $\neg(q \wedge r) \vee p$
$\neg(F \wedge r) \veebar V$
$\neg(F) \veebar V$
$V \veebar V$
$F$

b) $(p \vee r) \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$
$(V \vee r) \Rightarrow (\neg F \Leftrightarrow V)$
$V \Rightarrow (V \Leftrightarrow V)$
$V \Rightarrow V$
$V$

**2.** Dada la siguiente proposición, en donde "$x$" e "$y$" son números enteros:

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} / \ x + y = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

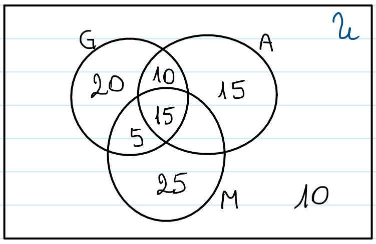
**a)** Escribir la proposición cuantificada equivalente a su negación.

**b)** Determinar el valor de verdad de ambas proposiciones. Justificar.

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} / \ x + y = 2K + 1, \ k \in \mathbb{Z} \longrightarrow V \rightarrow$ Para cada número entero, es posible encontrar otro número entero, tal que la suma entre ambos es un número impar.

Negación: $\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \neq 2k + 1, \ k \in \mathbb{Z} \longrightarrow F$

**3.** En una encuesta aplicada a 100 inversionistas de la bolsa de valores, se supo que 50 tienen acciones en Google, 40 tienen acciones en Apple y 45 los tienen en Microsoft. Además, se determinó que 20 tienen acciones en Google y Microsoft, 15 tienen acciones en Apple y Microsoft, 25 tienen acciones en Google y Apple y 10 no tienen acciones en ninguna de estas 3 empresas *¿Cuántos inversores tienen acciones en las 3 empresas? ¿Cuántos tienen acciones sólo en Google? ¿Cuántos tienen acciones en Google o Apple, pero no en Microsoft?*




$\# \mathcal{U} = 100$
$\#(G \cup A \cup M) = 100 - 10 = 90$
$\# G = 50, \ \# A = 40, \ \# M = 45$
$\#(G \cap M) = 20, \ \#(A \cap M) = 15, \ \#(G \cap A) = 25$
$\#(G \cap M \cap A) = x$

Por el principio de inclusión-exclusión:

$\cancel{90} = \cancel{50} + \cancel{40} + 45 - 20 - 15 - 25 + x$

$\boxed{15 = x}$

- 15 inversionistas tienen acciones en las 3 empresas.
- 20 " " " sólo en Google
- 45 " " " en Google o Apple, pero no en Microsoft.

**4.** Dado $A = \{a, b, c\}$, se define la relación $R \subset A^2 / R = \{(a,a); (a,b); (b,c); (b,b); (c,c); (b,a); (c,b); (c,a)\}$.

**a)** Construir la matriz de adyacencia asociada a la relación $R$.

**b)** Determinar si $R$ es reflexiva, antisimétrica y/o transitiva . Justificar.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexiva: $a \in A \wedge (a,a) \in R$ V
  $b \in A \wedge (b,b) \in R$ V
  $c \in A \wedge (c,c) \in R$ V

  $\boxed{\text{Luego: } R \text{ es reflexiva}}$

- Antisimétrica: $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$ F Luego: $\boxed{R \text{ es no antisimétrica}}$
- Transitiva: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ F Luego: $\boxed{R \text{ es no transitiva}}$

**5.** Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x < 4\}$, $B = \{-1, 0, 3, 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 10\}$ y las funciones

$f: A \rightarrow B / f(x) = x^2 - 1$ y $g: B \rightarrow C / f(x) = x + 2$.

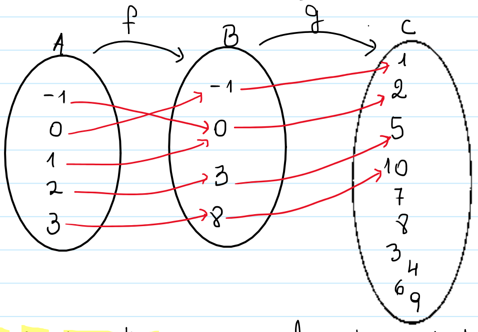
**a)** Determinar $f$ y $g$ por extensión y clasificarlas.

**b)** Definir la composición $g \circ f \subset AxC$ por extensión y determinar si es o no una función. Justificar.

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ; $B = \{-1, 0, 3, 8\}$ ; $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

a) $f: A \to B \,/\, f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f = \{(-1,0); (0,-1); (1,0); (2,3); (3,8)\}$

$g: B \to C \,/\, g(x) = x + 2 \Rightarrow g = \{(-1,1); (0,2); (3,5); (8,10)\}$




- $f$ no es inyectiva, pues: $\exists -1, 1 \in A \,/\, -1 \neq 1 \wedge f(-1) = f(1) = 0$
- $f$ es sobreyectiva, pues todo elemento de $B$ es imagen de, al menos, un elemento de $A$.
- $g$ es inyectiva, pues a elementos distintos de $B$ le corresponden imágenes distintas en $C$.
- $g$ no es sobreyectiva, pues: $\exists\, 3 \in C \,/\, \forall x \in B: 3 \neq g(x)$

b) $g \circ f: A \to C \,/\, g \circ f: \{(-1,2); (0,1); (1,2); (2,5); (3,10)\}$

$g \circ f$ es una función, pues: $Im(f) = B \subset Dom(g) = B$

**6.** Demostrar por inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}: 7^n - 1 = 6k$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Sea $P(n): 7^n - 1 = 6K,\ K \in \mathbb{N}$

$P(1): 7^1 - 1 = 7 - 1 = 6 = 6 \cdot 1 \quad (K = 1)$

$P(h): 7^h - 1 = 6K,\ K \in \mathbb{N}$ H. I

$P(h+1): 7^{h+1} - 1 = 6K',\ K' \in \mathbb{N}$ T. I

Dem

$$7^{h+1} - 1 \overset{\text{Prod. de pot. de igual base}}{=} 7^h \cdot 7 - 1 \overset{7=1+6}{=} 7^h(1+6) - 1 \overset{\text{Prop. Distrib.}}{=} 7^h + 7^h \cdot 6 - 1 \overset{\text{Conmut. y Asoc.}}{=} 7^h \cdot 6 + (7^h - 1) \overset{\text{H.I}}{=} 7^h \cdot 6 + 6K =$$

$$\underset{\text{Factor común}}{=} 6 \cdot (7^h + K) = 6K' \ ; \quad K' \underset{\text{ley de cierre de la suma y el producto en } \mathbb{N}.}{=} (7^h + K) \in \mathbb{N}$$

---

**TEMA 2**

**1.** Dadas las siguientes proposiciones simples:

*p: "3 es un número impar"* ; *q: "7 es divisible por 3"* ; *r: una proposición cualquiera.*

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, justificando el desarrollo:

**a)** $\neg(q \wedge r) \veebar p$ ***(8 ptos)*** **b)** $(p \vee r) \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$ ***(8 ptos)***

Como $p$ es V y $q$ es F, resultan los mismos valores de verdad que en el tema 1.

**2.** Dada la siguiente proposición, en donde "$x$" e "$y$" son números enteros:

$\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z}: x - y = 2k - 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

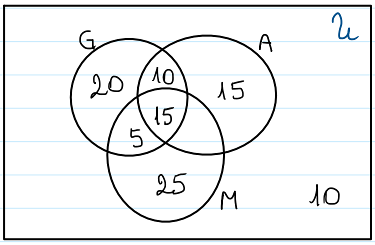
**a)** Escribir la proposición cuantificada equivalente a su negación. ***(7 ptos)***

**b)** Determinar el valor de verdad de ambas proposiciones. Justificar. ***(7 ptos)***

$\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z}: x - y = 2K - 1,\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ F $\rightarrow$ No es cierto que existe un número entero cuya diferencia con cualquier otro número entero sea un impar.

Negación: $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}: x - y \neq 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ V

**3.** En una encuesta aplicada a 100 inversionistas de la bolsa de valores, se supo que 50 tienen acciones en Google, 40 tienen acciones en Apple y 45 los tienen en Microsoft. Además, se determinó que 20 tienen acciones en Google y Microsoft, 15 tienen acciones en Apple y Microsoft, 25 tienen acciones en Google y Apple y 10 no tienen acciones en ninguna de estas 3 empresas *¿Cuántos inversores tienen acciones en las 3 empresas? ¿Cuántos tienen acciones sólo en Apple? ¿Cuántos tienen acciones en Microsoft o Apple, pero no en Google?* ***(20 ptos)***




$\# \mathcal{U} = 100$

$\#(G \cup A \cup M) = 100 - 10 = 90$

$\# G = 50$ , $\# A = 40$ , $\# M = 45$

$\#(G \cap M) = 20$ , $\#(A \cap M) = 15$, $\#(G \cap A) = 25$

$\#(G \cap M \cap A) = x$

Por el principio de inclusión-exclusión:

$\cancel{90} = \cancel{50} + \cancel{40} + 45 - 20 - 15 - 25 + x$

$\boxed{15 = x}$

- 15 inversionistas tienen acciones en las 3 empresas.
- 15 " " " sólo en Apple
- 40 " " " en Microsoft o Apple, pero no en Google

**4.** Dado $A = \{a, b, c\}$, se define la relación $R \subset A^2 / R = \{(a,c);(a,b);(b,c);(b,a);(c,b);(c,a);(a,a)\}$.

**a)** Construir la matriz de adyacencia asociada a la relación $R$. ***(5 ptos)***

**b)** Determinar si $R$ es arreflexiva, simétrica y/o transitiva . Justificar. ***(10 ptos)***

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Arreflexiva: $a \in A \wedge (a,a) \notin R$ F

$\boxed{\text{Luego: } R \text{ es no arreflexiva}}$

- Simétrica: $(a,c) \in R \Rightarrow (c,a) \in R$ V
  - $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ V
  - $(b,c) \in R \Rightarrow (c,b) \in R$ V
  - $(b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$ V
  - $(c,b) \in R \Rightarrow (b,c) \in R$ V
  - $(c,a) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ V
  - $(a,a) \in R \Rightarrow (a,a) \in R$ V

Luego: $\boxed{R \text{ es simétrica}}$

- Transitiva: $(b,c) \in R \wedge (c,b) \in R \Rightarrow (b,b) \in R$ F Luego: $\boxed{R \text{ es no transitiva}}$

**5.** Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x < 4\}$, $B = \{-2,-1,2,7\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 10\}$ y las funciones:

$f: A \to B / f(x) = x^2 - 2$ y $g: B \to C / g(x) = x + 3$.

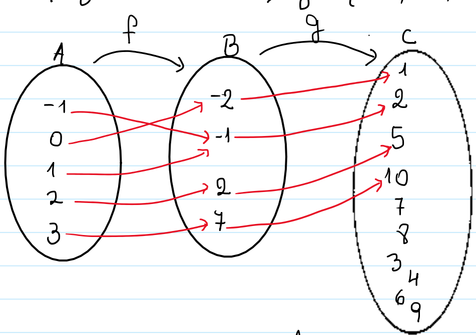
**a)** Determinar $f$ y $g$ por extensión y clasificarlas. ***(10 ptos)***

**b)** Definir la composición $g \circ f \subset AxC$ por extensión y determinar si es o no una función. Justificar.***(10 ptos)***

$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ; $B = \{-2, -1, 2, 7\}$ ; $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

a) $f: A \to B / f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f = \{(-1,-1);(0,-2);(1,-1);(2,2);(3,7)\}$

$g: B \to C / g(x) = x + 3 \Rightarrow g = \{(-2,1);(-1,2);(2,5);(7,10)\}$




- $f$ no es inyectiva, pues: $\exists -1, 1 \in A / -1 \neq 1 \wedge f(-1) = f(1) = -1$
- $f$ es sobreyectiva, pues todo elemento de $B$ es imagen de, al menos, un elemento de $A$.
- $g$ es inyectiva, pues a elementos distintos de $B$ le corresponden imágenes distintas en $C$.
- $g$ no es sobreyectiva, pues: $\exists\, 3 \in C / \forall x \in B: 3 \neq g(x)$

b) $g\circ f: A \to C \,/\, g\circ f: \{(-1,2);(0,1);(1,2);(2,5);(3,10)\}$

$g\circ f$ es una función, pues: $Im(f) = B \subset Dom(g) = B$

**6.** Demostrar por inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}: 8^n - 1 = 7k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. ***(15 ptos)***

Sea $P(n): 8^n - 1 = 7K$, $K \in \mathbb{N}$

$P(1): 8^1 - 1 = 8 - 1 = 7 = 7\cdot 1 \quad (K = 1)$

$P(h): 8^h - 1 = K$, $K \in \mathbb{N}$ H. I

$P(h+1): 8^{h+1} - 1 = K'$, $K' \in \mathbb{N}$ T. I

Dem

$$8^{h+1} - 1 \overset{\text{Prod. de pot. de igual base}}{=} 8^h \cdot 8 - 1 \overset{8=1+7}{=} 8^h.(1+7) - 1 \overset{\text{Prop. Distrib.}}{=} 8^h + 8^h.7 - 1 \overset{\text{Conmut. y Asoc.}}{=} 8^h.7 + (8^h - 1) \overset{\text{H.I}}{=} 8^h.7 + 7K =$$

$$\underset{\text{Factor común}}{=} 7\cdot(8^h + K) = 7K' \;;\quad K' \underset{\text{ley de cierre de la suma y el producto en } \mathbb{N}.}{=} (8^h + K) \in \mathbb{N}$$

---

**TEMA 3**

**1.** Dadas las siguientes proposiciones simples:

*p: "10 es un número par"* ; *q: "6 es múltiplo 4"* ; *r: una proposición cualquiera.*

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, justificando el desarrollo:

**a)** $\neg(q \wedge r) \,\underline{\vee}\, p$ ***(8 ptos)*** **b)** $(p \vee r) \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow p)$ ***(8 ptos)***

Como p es V y q es F, resultan los mismos valores de verdad que en los temas anteriores.

**2.** Dada la siguiente proposición, en donde "$x$" e "$y$" son números enteros:

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} / \ x + y = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

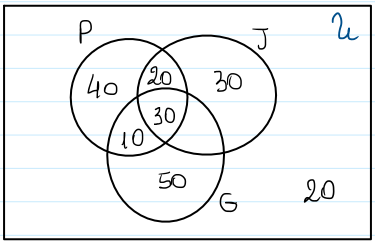
**a)** Escribir la proposición cuantificada equivalente a su negación. ***(7 ptos)***

**b)** Determinar el valor de verdad de ambas proposiciones. Justificar. ***(7 ptos)***

$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} / \ x + y = 2K$, $K \in \mathbb{Z} \to$ V $\to$ Para cada número entero, es posible encontrar otro número entero, tal que la suma entre ambos es un número par.

Negación: $\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z}: x + y \neq 2K$, $K \in \mathbb{Z} \to$ F

**3.** En una encuesta aplicada a 200 programadores, se supo que 100 utilizan como lenguaje de programación a *Python*, 80 utilizan *Java* y 90 utilizan *Go*. Además, se determinó que 40 emplean *Python* y *Go*, 30 emplean *Java* y *Go*, 50 emplean *Python* y *Java* y 20 no utilizan ninguno de estos 3 lenguajes. *¿Cuántos programadores emplean los 3 lenguajes de programación? ¿Cuántos emplean únicamente Python? ¿Cuántos utilizan Python o Java, pero no Go?* ***(20 ptos)***




$\# U = 200$

$\#(P \cup J \cup G) = 200 - 20 = 180$

$\# P = 100$, $\# J = 80$, $\# G = 90$

$\#(P \cap G) = 40$, $\#(J \cap G) = 30$, $\#(P \cap J) = 50$

$\#(P \cap J \cap G) = x$

Por el principio de inclusión - exclusión:

$\cancel{180} = \cancel{100} + \cancel{80} + 90 - 40 - 30 - 50 + x$

$\boxed{30 = x}$

- 30 programadores emplean los 3 lenguajes
- 40 " " únicamente Python.
- 90 " " Python o Java, pero no Go.

**4.** Dado $A = \{1,2,3\}$, se define la relación $R \subset A^2 \,/\, R = \{(1,1);(1,2);(2,3);(2,2);(3,3);(2,1);(3,2);(3,1)\}$.

**a)** Construir la matriz de adyacencia asociada a la relación $R$. ***(5 ptos)***

**b)** Determinar si $R$ es reflexiva, antisimétrica y/o transitiva . Justificar. ***(10 ptos)***

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexiva: $1 \in A \wedge (1,1) \in R$ V
  $2 \in A \wedge (2,2) \in R$ V
  $3 \in A \wedge (3,3) \in R$ V

$\boxed{\text{Luego: } R \text{ es reflexiva}}$

- Antisimétrica: $(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R \Rightarrow 1 = 2$ F Luego: $\boxed{R \text{ es no antisimétrica}}$

- Transitiva: $(1,2) \in R \wedge (2,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ F Luego: $\boxed{R \text{ es no transitiva}}$

**5.** Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 3\}$, $B = \{-1,0,3,8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / x < 11\}$ y las funciones:
$g: A \to B / g(x) = x^2 - 1$ y $f: B \to C / f(x) = x + 2$.
**a)** Determinar $f$ y $g$ por extensión y clasificarlas. ***(10 ptos)***
**b)** Definir la composición $f \circ g \subset AxC$ por extensión y determinar si es o no una función. Justificar. ***(10 ptos)***

Igual al tema 1

**6.** Demostrar por inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}: 7^n - 1 = 6k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. ***(15 ptos)***

Igual al tema 1

---

**TEMA 4**

**1.** Dadas las siguientes proposiciones simples:
*p: "11 es un número impar"* ; *q: "7 es múltiplo por 2"* ; *r: una proposición cualquiera.*
Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas, justificando el desarrollo:

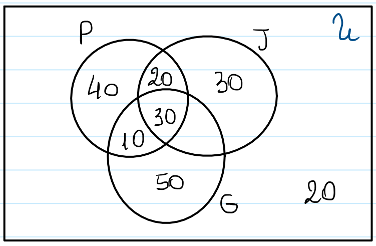
Como p es V y q es F, resultan los mismos valores de verdad que en los temas anteriores.

**2.** Dada la siguiente proposición, en donde "$x$" e "$y$" son números enteros:
$\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z}: x - y = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$
**a)** Escribir la proposición cuantificada equivalente a su negación. ***(7 ptos)***
**b)** Determinar el valor de verdad de ambas proposiciones. Justificar. ***(7 ptos)***

$\exists x \in \mathbb{Z} / \forall y \in \mathbb{Z}: x - y = 2k, \; k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ F $\rightarrow$ No es cierto que existe un número entero cuya diferencia con cualquier otro número entero sea par.

Negación: $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}: x - y \neq 2k, \; k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ V

**3.** En una encuesta aplicada a 200 programadores, se supo que 100 utilizan como lenguaje de programación a *Python*, 80 utilizan *Java* y 90 utilizan *Go*. Además, se determinó que 40 emplean *Python* y *Go*, 30 emplean *Java* y *Go*, 50 emplean *Python* y *Java* y 20 no utilizan ninguno de estos 3 lenguajes. *¿Cuántos programadores emplean los 3 lenguajes de programación? ¿Cuántos emplean únicamente Java? ¿Cuántos utilizan Java o Go, pero no Python?* ***(20 ptos)***




$\# U = 200$
$\#(P \cup J \cup G) = 200 - 20 = 180$
$\# P = 100, \; \# J = 80, \; \# G = 90$
$\#(P \cap G) = 40, \; \#(J \cap G) = 30, \; \#(P \cap J) = 50$
$\#(P \cap J \cap G) = x$

Por el principio de inclusión-exclusión:
$\cancel{180} = \cancel{100} + \cancel{80} + 90 - 40 - 30 - 50 + x$
$\boxed{30 = x}$

- 30 programadores emplean los 3 lenguajes
- 30 " " únicamente Java
- 80 " " Java o Go, pero no Python

**4.** Dado $A = \{1,2,3\}$, se define la relación $R \subset A^2 / R = \{(1,3); (1,2); (2,3); (2,1); (3,2); (3,1); (1,1)\}$.
**a)** Construir la matriz de adyacencia asociada a la relación $R$. ***(5 ptos)***
**b)** Determinar si $R$ es arreflexiva, simétrica y/o transitiva . Justificar. ***(10 ptos)***

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Arreflexiva: $1 \in A \wedge (1,1) \notin R$ F $\boxed{\text{Luego: } R \text{ es no arreflexiva}}$

• Simétrica: $(1,3) \in R \Rightarrow (3,1) \in R$ V

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$ V

$(2,3) \in R \Rightarrow (3,2) \in R$ V

$(2,1) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$ V

$(3,2) \in R \Rightarrow (2,3) \in R$ V

$(3,1) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ V

$(1,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$ V

Luego: $\boxed{R \text{ es simétrica}}$

• Transitiva: $(1,2) \in R \wedge (2,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ F Luego: $\boxed{R \text{ es no transitiva}}$

**5.** Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 3\}$, $B = \{-2, -1, 2, 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / x < 11\}$ y las funciones:

$g: A \to B / g(x) = x^2 - 2$ y $f: B \to C / f(x) = x + 3$.

**a)** Determinar $f$ y $g$ por extensión y clasificarlas. ***(10 ptos)***

**b)** Definir la composición $f \circ g \subset AxC$ por extensión y determinar si es o no una función. Justificar. ***(10 ptos)***

Igual al tema 2

**6.** Demostrar por inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}: 8^n - 1 = 7k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. ***(15 ptos)***

Igual al tema 2