SEGUNDO PARCIAL – ÁLGEBRA (LSI)

TEMA 1

1) a) Con las letras de la palabra CANTO ¿Cuántas palabras distintas con o sin sentido se pueden formar? ¿Cuántas de ellas terminan en O?

La palabra CANTO tiene 5 letras y ninguna se repite. Como debemos formar palabras con todas ellas y el orden de los elementos sí importa (ya que CANTO ≠ CNATO), usaremos una permutación de 5 elementos:

$\boldsymbol{P_5 = 5! = 120}$

Para saber cuántas de éstas terminan en O, dejaremos "fija" la última letra y sólo usaremos las 4 restantes. En ese caso, como hay 4 letras para ubicar en 4 lugares, haremos una permutación de 4 elementos:

$\boldsymbol{P_4 = 4! = 24}$

Rta.: Con las letras de la palabra CANTO se pueden formar 120 palabras distintas, de las cuales 24 terminan en O.

b) Calcular el anteúltimo término del desarrollo del binomio $(x^2 - \frac{2}{x})^8$

El desarrollo ordenado del binomio dado tiene 9 términos. Por lo tanto, el anteúltimo corresponde al 8vo término. Usaremos la fórmula del término k-ésimo (en este caso, $n = 8,\ k = 8,\ a = x^2,\ b = -\frac{2}{x}$)

$$\boldsymbol{T_8 = \binom{8}{7}.(x^2)^1.\left(-\frac{2}{x}\right)^7 = 8.x^2.\frac{(-2)^7}{x^7} = 8.(-128).\frac{x^2}{x^7} = -\frac{1024}{x^5} = -1024.x^{-5}}$$

2) a) Hallar el cociente y el resto de la división entera: $-587 : 28$

Buscamos q y r (enteros) de manera tal que $-587 = 28.q + r$, siendo $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < 28$ (por el algoritmo de la división en Z, sabemos que existen y que son únicos)

$-587 = 28.(-21) + 1$

Luego: $\boldsymbol{q = -21}$ ***y*** $\boldsymbol{r = 1}$

(Observación: Si pusiéramos $q = -20$, el resto tendría que valer -27 y en ese caso no cumpliría la condición de ser mayor o igual que 0)

b) Usando el algoritmo de Euclides, hallar el $mcd\ (136, 512)$

$512 = 136.3 + 104$
$136 = 104.1 + 32$
$104 = 32.3 + 8$
$32 = 8.4 + 0$

El último resto no nulo es 8. Luego: $\boldsymbol{mcd\ (136, 512) = 8}$

3) Dados los polinomios: $P(x) = 2x^5 - 4x^4 - 32x + 64$ y $Q(x) = x + 1$

a) Hallar el cociente y el resto de $P(x) : Q(x)$

Como el polinomio divisor Q(x) es Mónico y de grado 1, podemos realizar la división utilizando la regla de Ruffini. Recordemos que el polinomio dividendo P(x) debe estar completo y ordenado: $P(x) = 2x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 32x + 64$ *y en el ángulo de los dos segmentos, debemos colocar el opuesto del término independiente del polinomio divisor (en este caso, -1)*

	2	-4	0	0	-32	64
-1		-2	6	-6	6	26
	2	-6	6	-6	-26	$\boxed{90}$

Por lo tanto:

$\boldsymbol{C(x) = 2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x - 26}$ *y* $\boldsymbol{R(x) = 90}$

b) Hallar las raíces de $P(x)$ sabiendo que $\alpha = 2$ es raíz doble de P. Justificar cada paso.

Como $\alpha = 2$ *es raíz doble, podemos dividir al polinomio P(x) por el polinomio (x-2) dos veces. Para ello, usaremos la regla de Ruffini:*

	2	-4	0	0	-32	64
2		4	0	0	0	-64
	2	0	0	0	-32	$\boxed{0}$
2		4	8	16	32	
	2	4	8	16	$\boxed{0}$	

Luego: $P(x) = (x-2)^2.(2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

Nos quedan por hallar 3 raíces y para ello usaremos el teorema de Gauss teniendo en cuenta el polinomio obtenido en la última división, es decir $P'(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

Término independiente= 16 → divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

Coeficiente principal= 2 → divisores: $\pm 1, \pm 2$

Posibles raíces de P´(x): $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm \frac{1}{2}$

Haciendo las respectivas cuentas (ya sea con el teorema del resto o con la regla de Ruffini) llegamos a que $\alpha = -2$ *es una raíz del polinomio P´(x).*

	2	4	8	16
-2		-4	0	-16
	2	0	8	$\boxed{0}$

Luego: $P'(x) = (x+2).(2x^2 + 8)$

Para hallar las dos raíces restantes, calculamos:

$2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm 2i$

Por lo tanto, las raíces del polinomio P(x) son: $\boldsymbol{\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -2, \alpha_4 = 2i, \alpha_5 = -2i}$

4) a) Sean las matrices A, B y C
Calcular: $A.B + C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

La matriz A es de clase 2x3, mientras que la B es de clase 3x2. Dado que la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B, es posible realizar el producto A.B y la matriz resultante será de clase 2x2.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A.B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$ *y* $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. *Como ambas matrices son de clase 2x2, son conformables para la suma. Entonces:*

$$\boldsymbol{A.B + C^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -16 & 10 \end{bmatrix}}$$

b) Hallar el valor de x que verifique:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 5 & 2x & 1 \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -13$$

Dado que tenemos una matriz de clase 3x3, podemos aplicar la regla de Sarrus para calcular su determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 5 & 2x & 1 \\ 10 & -2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 5 & 2x & 1 \end{vmatrix} = -13 \Leftrightarrow (-6x + 0 + 10x) - (0 + 2 + 15x) = -13 \Leftrightarrow 4x - 2 - 15x = -13 \Leftrightarrow$$

$$4x - 15x = -13 + 2 \Leftrightarrow -11x = -11 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$$

5) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

a) Clasificarlo aplicando el Teorema de Rouché- Frobenius.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + z = 5 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 13 \end{cases}$$

Completamos y ordenamos el sistema de ecuaciones lineales dado:

$$\begin{cases} x + 0y + 2z = 5 \\ 0x + y + z = 5 \\ x + 2y + 0z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 13 \end{cases}$$

Armamos la matriz ampliada del sistema y calculamos su rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 13 \end{bmatrix} \underset{\substack{(-1)F_1 + F_3 \to F_3 \\ (-3)F_1 + F_4 \to F_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{(-2)F_2 + F_3 \to F_3 \\ (-1)F_3 + F_4 \to F_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego: $r(A) = 3 = r(A')$ → el sistema es compatible

*Además, como $n = 3 = r(A)$ → el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**, es decir, admite solución única.*

b) Si es posible, determinar el conjunto solución

A partir de la matriz escalonada, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales equivalente al original, cuyo conjunto solución es el mismo.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + z = 5 \\ -4z = -12 \end{cases}$$

$-4z = -12 \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = \frac{-12}{-4} = \mathbf{3}$

$y + z = 5 \Leftrightarrow y + 3 = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = 5 - 3 = \mathbf{2}$

$x + 2z = 5 \Leftrightarrow x + 2.3 = 5 \Leftrightarrow x + 6 = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 5 - 6 = \mathbf{-1}$

Luego: $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{-1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\}$ es el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales dado.

SEGUNDO PARCIAL – ÁLGEBRA (LSI)

TEMA 2

1) a) Con las letras de la palabra PERMUTO ¿Cuántas palabras distintas con o sin sentido se pueden formar? ¿Cuántas de ellas comienzan con P?

La palabra PERMUTO tiene 7 letras y ninguna se repite. Como debemos formar palabras con todas ellas y el orden de los elementos sí importa (ya que PERMUTO ≠ PREMUTO), usaremos una permutación de 7 elementos:

$\boldsymbol{P_7 = 7! = 5040}$

Para saber cuántas de éstas comienzan con P, dejaremos "fija" la primera letra y sólo usaremos las 6 restantes. En ese caso, como hay 6 letras para ubicar en 6 lugares, haremos una permutación de 6 elementos:

$\boldsymbol{P_6 = 6! = 720}$

Rta.: Con las letras de la palabra PERMUTO se pueden formar 5040 palabras distintas, de las cuales 720 comienzan con P.

b) Calcular el término central del desarrollo del binomio $(x^2 - \frac{2}{x})^8$

El desarrollo ordenado del binomio dado tiene 9 términos. Por lo tanto, el término central corresponde al 5to término (como n es par, tiene un único término central, en el lugar $k = \frac{8}{2} + 1 = 5$*).*
Usaremos la fórmula del término k-ésimo (en este caso, $n = 8,\ k = 5,\ a = x^2,\ b = -\frac{2}{x}$*)*

$$\boldsymbol{T_5 = \binom{8}{4}.\left(x^2\right)^4.\left(-\frac{2}{x}\right)^4 = 70.x^8.\frac{(-2)^4}{x^4} = 70.16.\frac{x^8}{x^4} = 1120.x^4}$$

2) a) Hallar el cociente y el resto de la división entera: $-528 : 36$

Buscamos q y r (enteros) de manera tal que $-587 = 36.q + r$ *, siendo* $\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r} < 36$ *(por el algoritmo de la división en Z, sabemos que existen y que son únicos)*

$-528 = 36.(-15) + 12$

Luego: $\boldsymbol{q = -15\ \ y\ \ r = 12}$

(Observación: Si pusiéramos $q = -14$*, el resto tendría que valer -24 y en ese caso no cumpliría la condición de ser mayor o igual que 0)*

b) Usando el algoritmo de Euclides, hallar el $mcd\,(512, 624)$

$624 = 512.1 + 112$
$512 = 112.4 + 64$
$112 = 64.1 + 48$
$64 = 48.1 + 16$
$48 = 16.3 + 0$

El último resto no nulo es 16. Luego: $\boldsymbol{mcd\,(512, 624) = 16}$

3) Dados los polinomios: $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 32x - 64$ y $Q(x) = x + 1$

a) Hallar el cociente y el resto de $P(x): Q(x)$

Como el polinomio divisor Q(x) es Mónico y de grado 1, podemos realizar la división utilizando la regla de Ruffini. Recordemos que el polinomio dividendo P(x) debe estar completo y ordenado: $P(x) = 2x^5 + 4x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 32x - 64$ *y en el ángulo de los dos segmentos, debemos colocar el opuesto del término independiente del polinomio divisor (en este caso, -1)*

	2	4	0	0	-32	-64
-1		-2	-2	2	-2	34
	2	2	-2	2	-34	$\boxed{-30}$

Por lo tanto:

$\boldsymbol{C(x) = 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 34}$ *y* $\boldsymbol{R(x) = -30}$

b) Hallar las raíces de $P(x)$ sabiendo que $\alpha = -2$ es raíz doble de P. Justificar cada paso.

Como $\alpha = -2$ *es raíz doble, podemos dividir al polinomio P(x) por el polinomio (x+2) dos veces. Para ello, usaremos la regla de Ruffini:*

	2	4	0	0	-32	-64
-2		-4	0	0	0	64
	2	0	0	0	-32	$\boxed{0}$
-2		-4	8	-16	32	
	2	-4	8	-16	$\boxed{0}$	

Luego: $P(x) = (x+2)^2.(2x^3 - 4x^2 + 8x - 16)$

Nos quedan por hallar 3 raíces y para ello usaremos el teorema de Gauss teniendo en cuenta el polinomio obtenido en la última división, es decir $P´(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

Término independiente= -16 → *divisores:* $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$

Coeficiente principal= 2 → *divisores:* $\pm1, \pm2$

Posibles raíces de P´(x): $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16, \pm\frac{1}{2}$

Haciendo las respectivas cuentas (ya sea con el teorema del resto o con la regla de Ruffini) llegamos a que $\alpha = 2$ *es una raíz del polinomio P´(x).*

	2	-4	8	-16
2		4	0	16
	2	0	8	$\boxed{0}$

Luego: $P´(x) = (x-2).(2x^2 + 8)$

Para hallar las dos raíces restantes, calculamos:

$2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm 2i$

Por lo tanto, las raíces del polinomio P(x) son: $\boldsymbol{\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 2i, \alpha_5 = -2i}$

4) a) Sean las matrices A, B y C
Calcular: $C^T + A.B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

La matriz A es de clase 2x3, mientras que la B es de clase 3x2. Dado que la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B, es posible realizar el producto A.B y la matriz resultante será de clase 2x2.

	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$

$A.B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$ *y* $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. *Como ambas matrices son de clase 2x2, son conformables para la suma. Entonces:*

$$\boldsymbol{C^T + A.B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -16 & 10 \end{bmatrix}}$$

b) Hallar el valor de x que verifique:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2x & x \\ 10 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -13$$

Dado que tenemos una matriz de clase 3x3, podemos aplicar la regla de Sarrus para calcular su determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2x & x \\ 10 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2x & x \end{vmatrix} = -13 \Leftrightarrow (-6x + 0 + 10x) - (0 + 2x + 15) = -13 \Leftrightarrow 4x - 2x - 15 = -13 \Leftrightarrow$$

$$4x - 2x = -13 + 15 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$$

5) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

a) Clasificarlo aplicando el Teorema de Rouché- Frobenius.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 13 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Completamos y ordenamos el sistema de ecuaciones lineales dado:

$$\begin{cases} x + 0y + 2z = 5 \\ x + 2y + 0z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = 13 \\ 0x + y + z = 5 \end{cases}$$

Armamos la matriz ampliada del sistema y calculamos su rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(-1)F_1 + F_2 \rightarrow F_2$

$(-3)F_1 + F_3 \rightarrow F_3$

$(-1)F_2 + F_3 \rightarrow F_3$

$\left(-\frac{1}{2}\right) F_2 + F_4 \rightarrow F_4$

$F_3 \leftrightarrow F_4$

Luego: $r(A) = 3 = r(A')$ *→ el sistema es compatible*

Además, como $n = 3 = r(A)$ *→ el sistema es* ***COMPATIBLE DETERMINADO****, es decir, admite solución única.*

b) Si es posible, determinar el conjunto solución

A partir de la matriz escalonada, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales equivalente al original, cuyo conjunto solución es el mismo.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ 2y - 2z = -2 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

$2z = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$

$2y - 2z = -2 \Leftrightarrow 2y - 2.3 = -2 \Leftrightarrow 2y - 6 = -2 \Leftrightarrow 2y = -2 + 6 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$

$x + 2z = 5 \Leftrightarrow x + 2.3 = 5 \Leftrightarrow x + 6 = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 5 - 6 = \mathbf{-1}$

Luego: $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{-1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\}$ *es el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales dado.*

SEGUNDO PARCIAL – ÁLGEBRA (LSI)

TEMA 3

1) a) Con las letras A, B, C, D, E ¿Cuántas palabras distintas con o sin sentido de 4 letras se pueden formar? ¿Cuántas de ellas comienzan con A?

Disponemos de 5 letras y debemos formar palabras de 4 letras con todas ellas. El orden de los elementos sí importa (ya que ABCD ≠ BACD) y como la consigna no pide que las palabras tengan letras DISTINTAS, usaremos un arreglo con repetición de 5 elementos agrupados de a 4:

$\boldsymbol{A^5_{4,r} = 5^4 = 625}$

Para saber cuántas de éstas comienzan con A, dejaremos "fija" la primera letra En este caso, nos quedan 5 letras para ubicar en 3 lugares, haremos un arreglo con repetición de 5 elementos tomados de a 3:

$\boldsymbol{A^5_{3,r} = 5^3 = 125}$

Rta.: Con las letras A, B, C, D, E se pueden formar 625 palabras distintas, de las cuales 125 comienzan con A.

b) Calcular el quinto término del desarrollo del binomio $(x^2 - \frac{2}{x})^8$

Usaremos la fórmula del término k-ésimo (en este caso, $n = 8,\ k = 5,\ a = x^2,\ b = -\frac{2}{x}$*)*

$$\boldsymbol{T_5 = \binom{8}{4}.(x^2)^4.\left(-\frac{2}{x}\right)^4 = 70.x^8.\frac{(-2)^4}{x^4} = 70.16.\frac{x^8}{x^4} = 1120.x^4}$$

2) a) Hallar el cociente y el resto de la división entera: $-528 : 25$

Buscamos q y r (enteros) de manera tal que $-528 = 25.q + r$ *, siendo* $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < 25$ *(por el algoritmo de la división en Z, sabemos que existen y que son únicos)*

$-528 = 25.(-22) + 22$

Luego: $\boldsymbol{q} = \mathbf{-22}$ ***y*** $\boldsymbol{r} = \mathbf{22}$

(Observación: Si pusiéramos $q = -21$*, el resto tendría que valer -3 y en ese caso no cumpliría la condición de ser mayor o igual que 0)*

b) Usando el algoritmo de Euclides, hallar el $mcd\ (624, 1024)$

$1024 = 624.1 + 400$
$624 = 400.1 + 224$
$400 = 224.1 + 176$
$224 = 176.1 + 48$
$176 = 48.3 + 32$
$48 = 32.1 + 16$
$32 = 16.2 + 0$

El último resto no nulo es 16. Luego: $\boldsymbol{mcd\ (624, 1024) = 16}$

3) Dados los polinomios: $P(x) = 2x^5 + 2x^4 - 2x - 2$ y $Q(x) = x + 1$

a) Hallar el cociente y el resto de $P(x) : Q(x)$

Como el polinomio divisor Q(x) es Mónico y de grado 1, podemos realizar la división utilizando la regla de Ruffini. Recordemos que el polinomio dividendo P(x) debe estar completo y ordenado: $P(x) = 2x^5 + 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x - 2$ *y en el ángulo de los dos segmentos, debemos colocar el opuesto del término independiente del polinomio divisor (en este caso, -1)*

	2	2	0	0	-2	-2
-1		-2	0	0	0	2
	2	0	0	0	-2	$\boxed{0}$

Por lo tanto:

$\boldsymbol{C(x) = 2x^4 - 2}$ *y* $\boldsymbol{R(x) = 0}$

b) Hallar las raíces de $P(x)$ sabiendo que $\alpha = -1$ es raíz doble de P. Justificar cada paso.

Como $\alpha = -1$ *es raíz doble, podemos dividir al polinomio P(x) por el polinomio (x+1) dos veces. Para ello, usaremos la regla de Ruffini:*

	2	2	0	0	-2	-2
-1		-2	0	0	0	2
	2	0	0	0	-2	$\boxed{0}$
-1		-2	2	-2	2	
	2	-2	2	-2	$\boxed{0}$	

Luego: $P(x) = (x+1)^2 . (2x^3 - 2x^2 + 2x - 2)$

Nos quedan por hallar 3 raíces y para ello usaremos el teorema de Gauss teniendo en cuenta el polinomio obtenido en la última división, es decir $P'(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

Término independiente= -2 → divisores: $\pm 1, \pm 2$

Coeficiente principal= 2 → divisores: $\pm 1, \pm 2$

Posibles raíces de P´(x): $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$

Haciendo las respectivas cuentas (ya sea con el teorema del resto o con la regla de Ruffini) llegamos a que $\alpha = 1$ *es una raíz del polinomio P´(x).*

	2	-2	2	-2
1		2	0	2
	2	0	2	$\boxed{0}$

Luego: $P'(x) = (x-1).(2x^2 + 2)$

Para hallar las dos raíces restantes, calculamos:

$2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$

Por lo tanto, las raíces del polinomio P(x) son: $\boldsymbol{\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = i, \alpha_5 = -i}$

4) a) Sean las matrices A, B y C
Calcular: $C^T + A.B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

La matriz A es de clase 2x3, mientras que la B es de clase 3x2. Dado que la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B, es posible realizar el producto A.B y la matriz resultante será de clase 2x2.

	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$

$A.B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$ *y* $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. *Como ambas matrices son de clase 2x2, son*

conformables para la suma. Entonces:

$$\boldsymbol{C^T + A.B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -16 & 10 \end{bmatrix}}$$

b) Hallar el valor de x que verifique:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 10 & -2x & 3 \end{vmatrix} = -13$$

Dado que tenemos una matriz de clase 3x3, podemos aplicar la regla de Sarrus para calcular su determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 10 & -2x & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -13 \Leftrightarrow (-6 + 0 + 10x) - (0 + 2x + 15x) = -13 \Leftrightarrow -6 + 10x - 2x - 15x = -13 \Leftrightarrow$$

$$-7x = -13 + 6 \Leftrightarrow -7x = -7 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$$

5) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

a) Clasificarlo aplicando el Teorema de Rouché- Frobenius.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + z = 5 \\ x + 2y = 3 \\ x - 2y + 4z = 7 \end{cases}$$

Completamos y ordenamos el sistema de ecuaciones lineales dado:

$$\begin{cases} x + oy + 2z = 5 \\ 0x + y + z = 5 \\ x + 2y + 0z = 3 \\ x - 2y + 4z = 7 \end{cases}$$

Armamos la matriz ampliada del sistema y calculamos su rango: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \underset{\substack{(-1)F_1 + F_3 \to F_3 \\ (-1)F_1 + F_4 \to F_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{(-2)F_2 + F_3 \to F_3 \\ F_3 + F_4 \to F_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego: $r(A) = 3 = r(A')$ → el sistema es compatible

*Además, como $n = 3 = r(A)$ → el sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**, es decir, admite solución única.*

b) Si es posible, determinar el conjunto solución

A partir de la matriz escalonada, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales equivalente al original, cuyo conjunto solución es el mismo.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + z = 5 \\ -4z = -12 \end{cases}$$

$-4z = -12 \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = \frac{-12}{-4} = \mathbf{3}$

$y + z = 5 \Leftrightarrow y + 3 = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = 5 - 3 = \mathbf{2}$

$x + 2z = 5 \Leftrightarrow x + 2.3 = 5 \Leftrightarrow x + 6 = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 5 - 6 = \mathbf{-1}$

*Luego**:** $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{-1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\}$ es el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales dado.*

SEGUNDO PARCIAL – ÁLGEBRA (LSI)

TEMA 4

1) a) Con las letras de la palabra PERLA ¿Cuántas palabras distintas con o sin sentido de pueden formar? ¿Cuántas de ellas terminan en A?

La palabra PERLA tiene 5 letras y ninguna se repite. Como debemos formar palabras con todas ellas y el orden de los elementos sí importa (ya que PERLA ≠ PRELA), usaremos una permutación de 5 elementos:

$\boldsymbol{P_5 = 5! = 120}$

Para saber cuántas de éstas terminan en A, dejaremos "fija" la última letra y sólo usaremos las 4 restantes. En ese caso, como hay 4 letras para ubicar en 4 lugares, haremos una permutación de 4 elementos:

$\boldsymbol{P_4 = 4! = 24}$

Rta.: Con las letras de la palabra PERLA se pueden formar 120 palabras distintas, de las cuales 24 terminan en A.

b) Calcular el octavo término del desarrollo del binomio $(x^2 - \frac{2}{x})^8$

Usaremos la fórmula del término k-ésimo (en este caso, $n = 8,\ k = 8,\ a = x^2,\ b = -\frac{2}{x}$*)*

$$\boldsymbol{T_8 = \binom{8}{7}.(x^2)^1.\left(-\frac{2}{x}\right)^7 = 8.x^2.\frac{(-2)^7}{x^7} = 8.(-128).\frac{x^2}{x^7} = -\frac{1024}{x^5} = -1024.x^{-5}}$$

2) a) Hallar el cociente y el resto de la división entera: $-528 : 27$

Buscamos q y r (enteros) de manera tal que $-528 = 27.q + r$ *, siendo* $\boldsymbol{0 \leq r} < 27$ *(por el algoritmo de la división en Z, sabemos que existen y que son únicos)*

$-528 = 27.(-20) + 12$

Luego: $\boldsymbol{q = -20\ \ y\ \ r = 12}$

(Observación: Si pusiéramos $q = -19$*, el resto tendría que valer -15 y en ese caso no cumpliría la condición de ser mayor o igual que 0)*

b) Usando el algoritmo de Euclides, hallar el $mcd\,(624, 728)$

$728 = 624.1 + 104$

$624 = 104.1 + 0$

El último resto no nulo es 104. Luego: $\boldsymbol{mcd\,(624, 728) = 104}$

3) Dados los polinomios: $P(x) = 2x^5 - 2x^4 - 2x + 2$ y $Q(x) = x + 1$

a) Hallar el cociente y el resto de $P(x): Q(x)$

Como el polinomio divisor Q(x) es Mónico y de grado 1, podemos realizar la división utilizando la regla de Ruffini. Recordemos que el polinomio dividendo P(x) debe estar completo y ordenado: $P(x) = 2x^5 - 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 2$ y en el ángulo de los dos segmentos, debemos colocar el opuesto del término independiente del polinomio divisor (en este caso, -1)

	2	-2	0	0	-2	2
-1		-2	4	-4	4	-2
	2	-4	4	-4	2	$\boxed{0}$

Por lo tanto:

$\boldsymbol{C(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2}$ *y* $\boldsymbol{R(x) = 0}$

b) Hallar las raíces de $P(x)$ sabiendo que $\alpha = 1$ es raíz doble de P. Justificar cada paso.

Como $\alpha = 1$ es raíz doble, podemos dividir al polinomio P(x) por el polinomio (x-1) dos veces. Para ello, usaremos la regla de Ruffini:

	2	-2	0	0	-2	2
1		2	0	0	0	-2
	2	0	0	0	-2	$\boxed{0}$
1		2	2	2	2	
	2	2	2	2	$\boxed{0}$	

Luego: $P(x) = (x-1)^2.(2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$

Nos quedan por hallar 3 raíces. Observemos que, en el ítem anterior, el resto de la división fue 0, eso quiere decir que el -1 es también una raíz del polinomio P. Por lo tanto, usando la regla de Ruffini en el último polinomio hallado, tenemos:

	2	2	2	2
-1		-2	0	-2
	2	0	2	$\boxed{0}$

Para hallar las dos raíces restantes, calculamos:

$2x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$

Por lo tanto, las raíces del polinomio P(x) son: $\boldsymbol{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = i, \alpha_5 = -i}$

4) a) Sean las matrices A, B y C
Calcular: $A.B + C^T$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

La matriz A es de clase 2x3, mientras que la B es de clase 3x2. Dado que la cantidad de columnas de A coincide con la cantidad de filas de B, es posible realizar el producto A.B y la matriz resultante será de clase 2x2.

	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$

$A.B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix}$ *y* $C^T = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. *Como ambas matrices son de clase 2x2, son conformables para la suma. Entonces:*

$$\boldsymbol{A.B + C^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -14 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -16 & 10 \end{bmatrix}}$$

b) Hallar el valor de x que verifique:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & x \\ 10 & -2 & 3x \end{vmatrix} = -13$$

Dado que tenemos una matriz de clase 3x3, podemos aplicar la regla de Sarrus para calcular su determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & x \\ 10 & -2 & 3x \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & x \end{vmatrix} = -13 \Leftrightarrow (-6x + 0 + 10x) - (0 + 2x + 15x) = -13 \Leftrightarrow 4x - 17x = -13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -13x = -13 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$$

5) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

a) Clasificarlo aplicando el Teorema de Rouché- Frobenius.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ x + 2y = 3 \\ x - 2y + 4z = 7 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Completamos y ordenamos el sistema de ecuaciones lineales dado:

$$\begin{cases} x + oy + 2z = 5 \\ x + 2y + 0z = 3 \\ x - 2y + 4z = 7 \\ 0x + y + z = 5 \end{cases}$$

Armamos la matriz ampliada del sistema y calculamos su rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2&5\\1&2&0&3\\1&-2&4&7\\0&1&1&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&2&5\\0&2&-2&-2\\0&-2&2&2\\0&1&1&5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&2&5\\0&2&-2&-2\\0&0&0&0\\0&0&2&6\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&2&5\\0&2&-2&-2\\0&0&2&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$(-1)F_1 + F_2 \to F_2$

$(-1)F_1 + F_3 \to F_3$

$\left(-\frac{1}{2}\right) F_2 + F_4 \to F_4$

$F_2 + F_3 \to F_3$

$F_3 \leftrightarrow F_4$

Luego: $r(A) = 3 = r(A')$ *→ el sistema es compatible*

Además, como $n = 3 = r(A)$ *→ el sistema es* ***COMPATIBLE DETERMINADO****, es decir, admite solución única.*

b) Si es posible, determinar el conjunto solución

A partir de la matriz escalonada, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales equivalente al original, cuyo conjunto solución es el mismo.

$$\begin{cases} x + 2z = 5 \\ 2y - 2z = -2 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

$2z = 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$

$2y - 2z = -2 \Leftrightarrow 2y - 2.3 = -2 \Leftrightarrow 2y - 6 = -2 \Leftrightarrow 2y = -2 + 6 \Leftrightarrow 2y = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$

$x + 2z = 5 \Leftrightarrow x + 2.3 = 5 \Leftrightarrow x + 6 = 5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 5 - 6 = \mathbf{-1}$

Luego: $\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{-1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})\}$ *es el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales dado.*