CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL-LSI

TEMA 8

Mgtr. César Garau

Tema 8: Integrales Múltiples

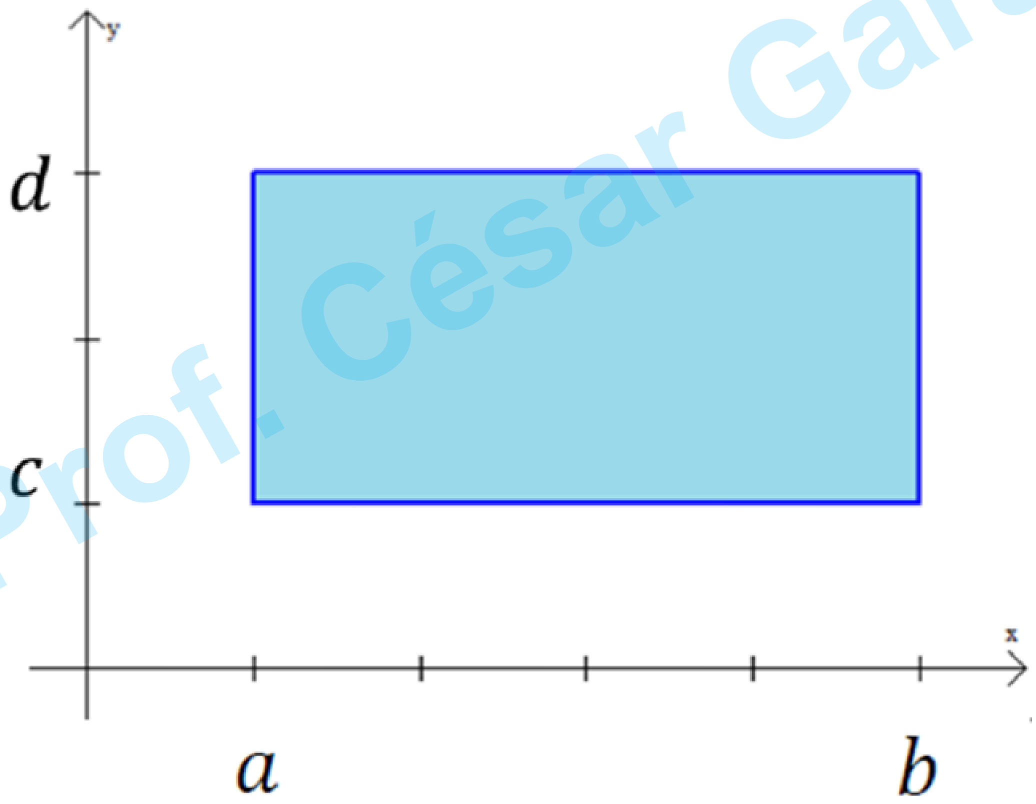
Región de integración. Propiedades de la integral doble. Cálculo de integrales dobles. Integrales iteradas. La integral triple.

Definición. Interpretación geométrica.

Sea R un rectángulo cerrado, que incluye a su frontera, de área A, del plano "xy".

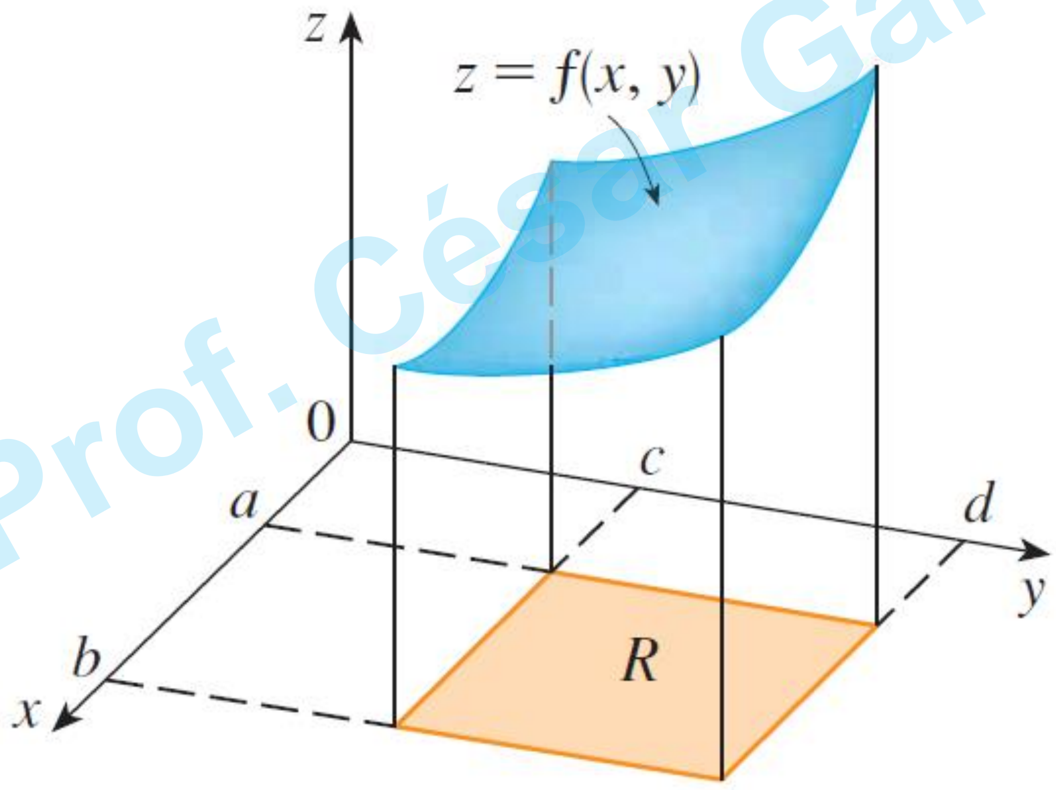
El rectángulo puede describirse de la forma:

$\mathrm{R} = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ o simplemente $\mathrm{R} = [a, b]x[c, d]$



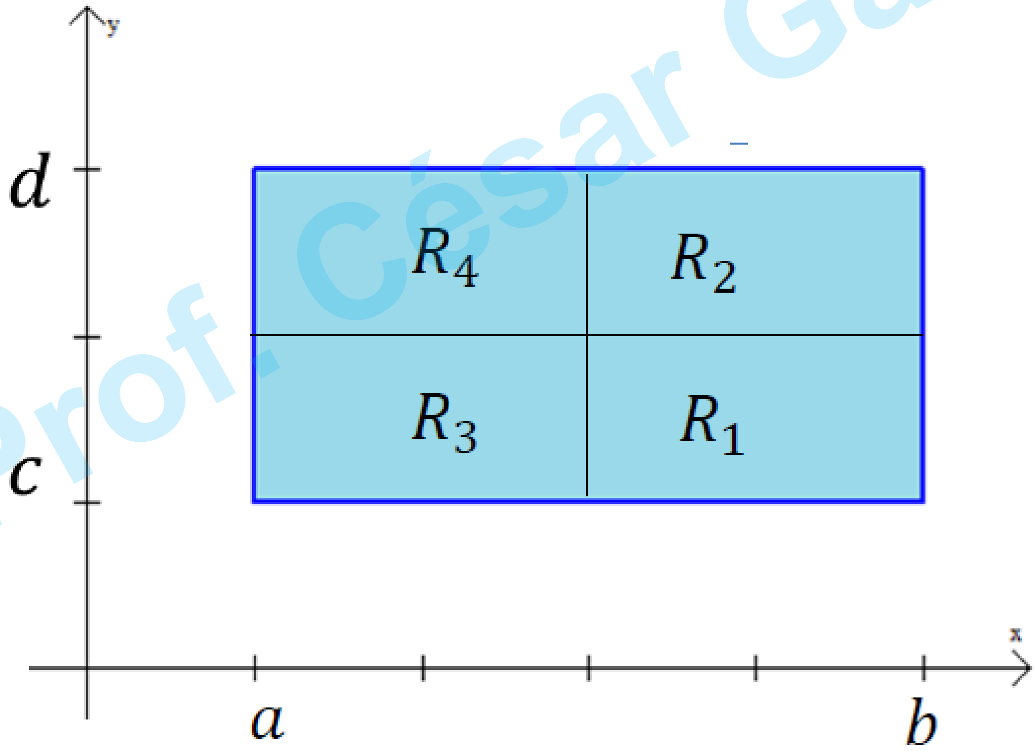
Sea $z = f(x, y)$ una función tal que su dominio contiene al rectángulo R y $f(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in R$. La gráfica de *f* es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$
Sea *S* el sólido que aparece arriba de *R* y debajo de la gráfica de *f*, es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R^2\}$$



El volumen de este sólido puede aproximarse sumando los volúmenes de paralelepípedos inscritos en el mismo.

Sea P_1 una partición del intervalo (a, b) y P_2 una partición del intervalo (c, d) que generan una partición del rectángulo R en sub-rectángulos. Es decir:



El volumen de cada paralelepípedo se determina de la siguiente forma:

Sea $A_i = A(R_i)$ el área de cada sub rectángulo

Sea $m_i = min\{f(x,y):(x,y) \in R_i\}$ $\quad M_i = Max\{f(x,y):(x,y) \in R_i\}$

$V(R_1) = A_1 . m_1 \quad V(R_2) = A_2 . m_2 \quad V(R_3) = A_3 . m_3 \quad V(R_4) = A_4 . m_4$

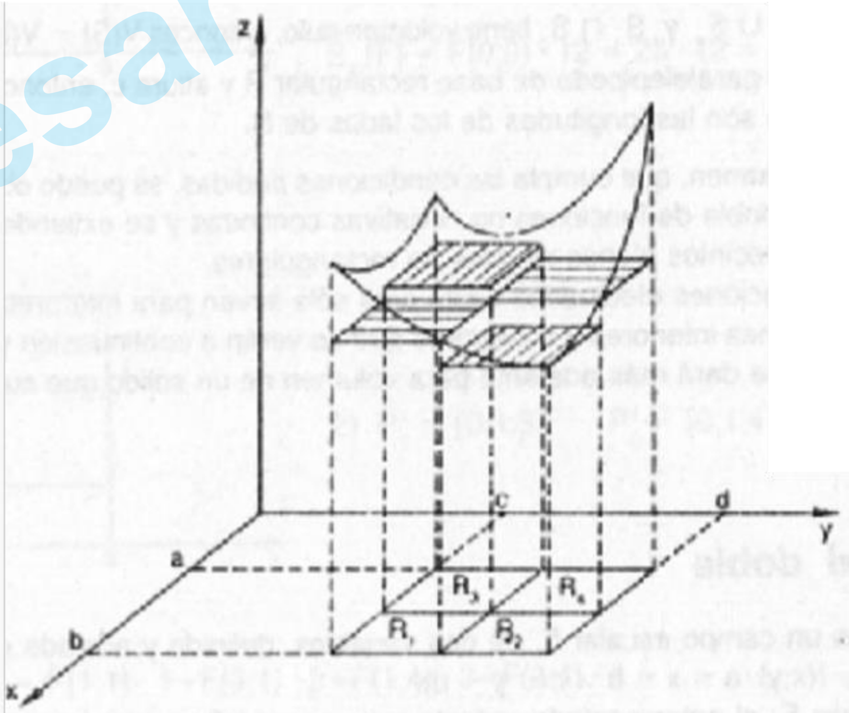
$V(R_1) + V(R_2) + V(R_3) + V(R_4) \leq V(S)$

$V(R_1') = A_1 . M_1 \quad V(R_2') = A_2 . M_2 \quad V(R_3') = A_3 . M_3 \quad V(R_4') = A_4 . M_4$

$V(R_1') + V(R_2') + V(R_3') + V(R_4') \geq V(S)$

$$\sum_{i=1}^{4} V(R_i) \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{4} V(R_i')$$

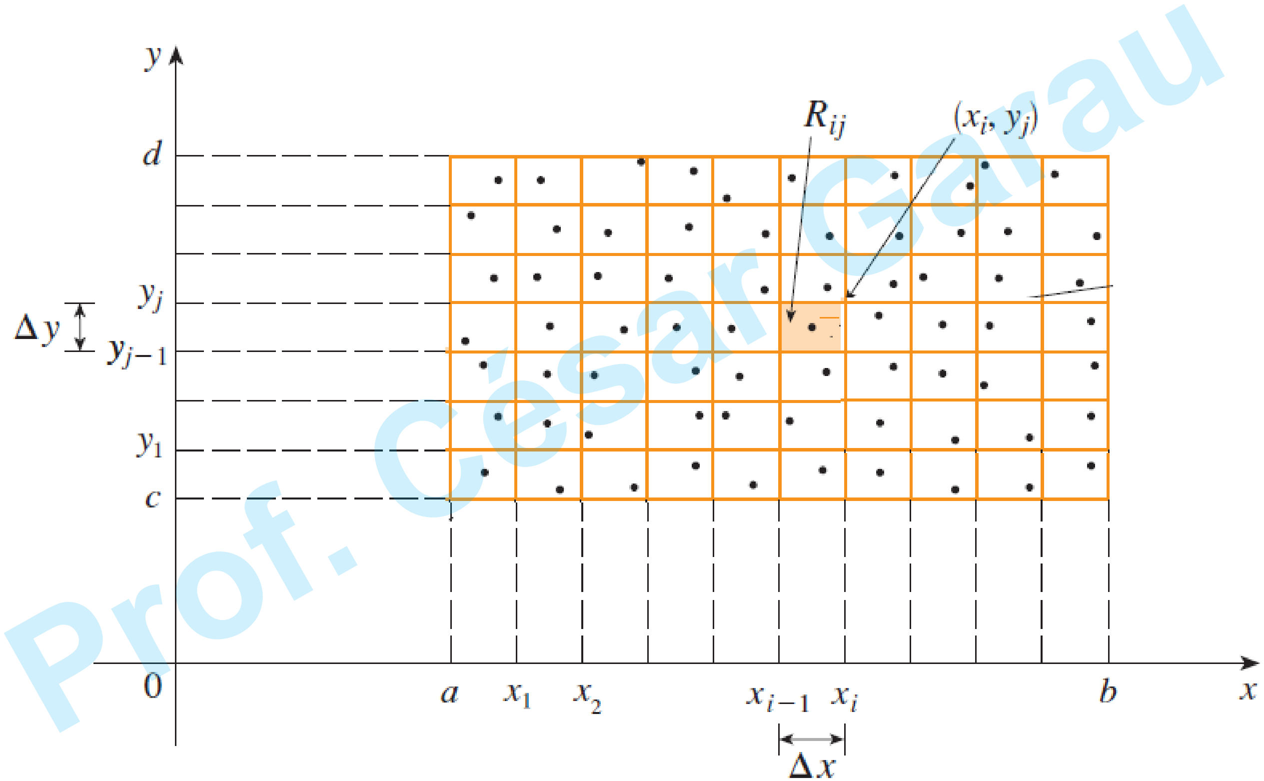
$\sum_{i=1}^{n} V(R_i)$ Suma integral



Considerando un mayor numero de particiones, tenemos

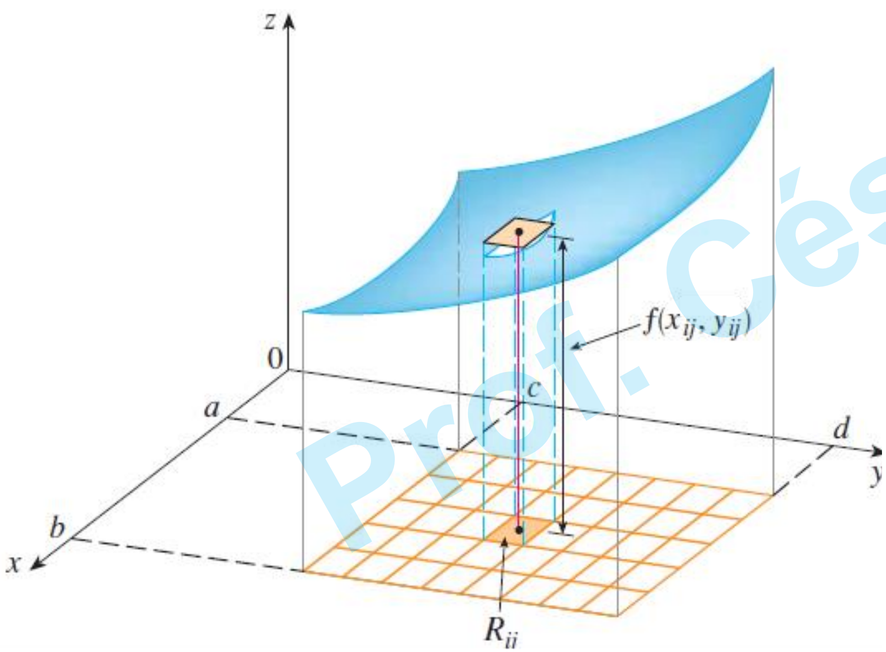
$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\ X\ [y_{i-1}, y_i] = \{(x, y): x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{i-1} \leq x \leq y_i\}$$

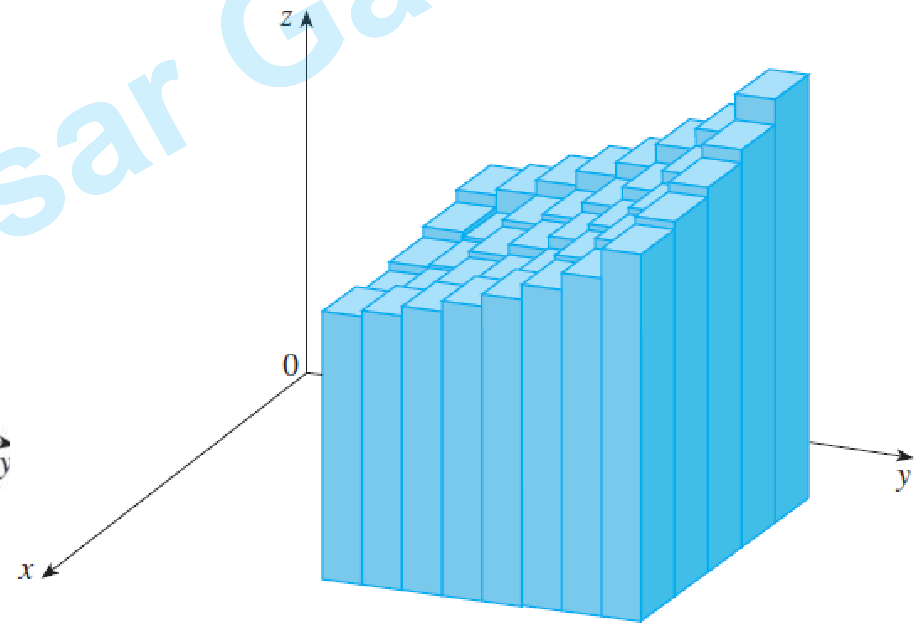
cada uno con un área $\Delta A = \Delta x. \Delta y$



Sea $m_i = min\{f(x,y):(x,y) \in R_i\}$ $\quad M_i = Max\{f(x,y):(x,y) \in R_i\}$

Entonces:
$$\sum_{i=1}^{n} V(R_i) \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{n} V(R_i')$$





V **EJEMPLO 1** Estime el volumen del sólido que está arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y debajo del paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R en cuatro cuadrados iguales y elija el punto muestra como la esquina superior derecha de cada cuadrado R_{ij}. Bosqueje el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.

Definición: Sea $f(x,y)$ una función continua en el dominio cerrado R, si la sucesión de las sumas integrales tiene límite cuando la norma $\|P\|$ de la partición P tiende a cero y $n\to\infty$.

Este límite no depende del modo en que se particione el recinto R ni del punto que se considere en cada sub-intervalo.

Este límite se llama integral doble de la función $f(x,y)$ sobre el recinto R y se simboliza con

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$$

R recibe el nombre de recinto de integración.

$$\lim_{\|P\|\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V(R_i) = \iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$$

Si $f(x,y) \geq 0$, entonces el volumen V del sólido que está sobre el rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x,y)$ es

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$$

Propiedades

1) $$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_R f(x,y)\,dxdy + \iint_R g(x,y)\,dxdy$$

2) $$\iint_R k.f(x,y)\,dxdy = k.\iint_R f(x,y)\,dxdy$$

3) Si $f(x,y)$ es integrable sobre una región cerrada R y $m \leq f(x,y) \leq M$ $\forall x,y \in R$, entonces si A designa el área de R, tenemos: $m.A \leq \iint_R f(x,y)\,dxdy \leq M.A$

4) Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall x,y \in R$, entonces $\iint_R f(x,y)\,dxdy \leq \iint_R g(x,y)\,dxdy$

5) Si el recinto R esta dividido en dos recintos parciales $R1$ y $R2$, que no tienen puntos interiores en común y la función $f(x,y)$ es continua en todo R, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dxd$$

Integrales iteradas

Suele ser difícil evaluar integrales individualmente de la definición de una integral, pero el Teorema Fundamental del Calculo proporciona un método más simple para calcularla.

Veamos una forma práctica que nos permitirá calcular integrales dobles.

Sea $f(x, y)$ una función continua de dos variables, definida en el rectángulo $\mathrm{R} = [a, b]x[c, d]$.

Sea la siguiente integral: $\int_c^d f(x, y)dy$. Esta notación expresa que la variable x queda fija cuando $f(x, y)$ se integra con respecto a la variable y, que varía desde $y = c$ hasta $y = d$.

Integrales iteradas

Observemos que $\int_c^d f(x,y)dy$ es una expresión que depende (solamente) de x. Si ahora se integra este primer resultado con respecto a la variable x, desde $x = a$ hasta $x = b$, se obtiene un número que se escribe: $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$ en el que se interpreta que el cálculo que figura entre paréntesis se realiza para x fijo. Esta expresión se conoce como *integral iterada* (iterar significa repetir, volver a hacer un proceso: en este caso la iteración consiste en hacer dos integrales simples sucesivas, integrando una vez y luego volviendo a integrar).

Por lo cual escribimos:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$$

En el que queda indicado que primero se integra con respecto a y, desde c hasta d, y luego se integra con respecto a x, desde a hasta b.

De forma similar, se tiene la siguiente integral iterada:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

indicando que primero se integra con respecto a x, desde a hasta b, y luego se integra la expresión resultante con respecto a y, desde c hasta d.

Evaluar las siguientes integrales iteradas:

$a)\ \int_0^2 \left(\int_1^3 x^2 y \, dy \right) dx; \quad b)\ \int_1^3 \left(\int_0^2 x^2 y \, dx \right) dy.$

Teorema de Fubini

Si $f: R \subset R^2 \to R$ es una función continua en el rectángulo

$\mathrm{R} = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

En general el teorema de Fubini se satisface aún bajo condiciones más débiles: basta con suponer que la función f esta acotada en R, que f es continua salvo quizás en un numero finito de curvas suaves, y que existen las integrales iteradas.

El teorema de Fubini permite, entonces, calcular la integral doble de una función continua sobre un rectángulo mediante integrales iteradas, esto es, integrando con respecto a una variable cada vez, y además en cualquier orden de integración,

■ **Ejemplo** Calcular $\displaystyle\iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\, dA$, donde $R = [0, 2] \times [-1, 1]$.

Para calcular la integral doble de la función continua $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ en el rectángulo R utilizamos el teorema de Fubini, pudiendo elegir el orden de integración. Elegimos calcular las siguientes integrales iteradas:

Integrales Triples

Del mismo modo que para las integrales dobles las integrales triples pueden expresarse en forma de integrales iteradas, lo que brinda un método practico para calcularlas:

Teorema de Fubini

Si $f\colon B \subset R^3 \to R$ es una función continua en el rectángulo

$\mathrm{B} = \{(x, y, z) \in R^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, s \leq z \leq t\}$, entonces:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_s^t \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

Las integrales iteradas de este enunciado indican que integramos primero con respecto a la variable x desde a hasta b (manteniendo fijas y y z), luego integramos la expresión que queda, con respecto a y desde c hasta d (manteniendo z fija), y por último integramos con respecto a z desde s hasta t. Hay otros cinco posibles ordenes en los que podemos integrar, y todos dan el mismo valor si f es continua en B. Por ejemplo, si integramos primero con respecto a z desde s hasta t, luego con respecto a x desde a hasta b y finalmente con respecto a y desde c hasta d, escribimos:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_s^t f(x,y,z)dz \right) dx \right) dy$$

En general el teorema de Fubini se cumple si suponemos que f esta acotada en B, es continua excepto quizás en un numero finito de superficies suaves, y existen las integrales iteradas.

Así vemos que al igual que la integral doble, la integral triple puede calcularse integrando con respecto a una variable a la vez en cualquier orden de integración, lo que muchas veces es muy conveniente, como veremos en el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo** Evaluar $\iiint_B (2x + 3y + z)\, dV$, donde $B = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

Comenzamos graficando la región sólida B. Notamos que en este ejemplo cualquier orden en el que realicemos las integrales iteradas demandará, en principio, un trabajo similar. Por lo tanto elegiremos uno cualquiera de los órdenes posibles:

$$
\begin{aligned}
\iiint_B (2x + 3y + z)\, dV &= \int_{-1}^{1} \left[\int_{1}^{2} \left(\int_{0}^{1} (2x + 3y + z)\, dz \right) dx \right] dy \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{1}^{2} \left[(2x + 3y)\, z + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{1}^{2} \left(2x + 3y + \tfrac{1}{2} \right) dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[x^2 + \left(3y + \tfrac{1}{2} \right) x \right]_{x=1}^{x=2} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(3y + \tfrac{7}{2} \right) dy = \left[3\frac{y^2}{2} + \frac{7}{2} y \right]_{y=-1}^{y=1} = \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{7}{2} \right) - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{7}{2} \right) = 7.
\end{aligned}
$$