COTAS, EXTREMOS Y ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Cota superior

El número ***k*** es una cota superior de un conjunto ***C*** si y sólo si $\forall x : (x \in C \Rightarrow x \leq k)$.

En este caso se dice que ***C*** está acotado superiormente.

Extremo superior o *Supremo*, se define como la mínima cota superior.

Máximo, un conjunto ***C*** posee máximo si tiene supremo y éste pertenece al mismo.

Ejemplo:

Los conjuntos $M = (-\infty, 5]$ y $N = (-\infty, 5)$ están acotados superiormente. Para ambos el supremo es 5. Sin embargo, M tiene máximo, pues $5 \in M$, mientras que N no posee máximo, ya que $5 \notin N$.

Cota inferior

El número ***j*** es una cota inferior de un conjunto ***B*** si y sólo si $\forall x : (x \in B \Rightarrow x \geq j)$.

En este caso se dice que ***B*** está acotado inferiormente.

Extremo inferior o *Ínfimo*, se define como la máxima cota inferior.

Mínimo, un conjunto ***B*** posee mínimo si tiene ínfimo y éste pertenece al mismo.

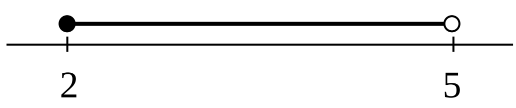
Ejemplo:

Los conjuntos $P = [2, \infty)$ y $Q = (2, \infty)$ están acotados inferiormente. Para ambos el ínfimo es 2. No obstante, P tiene mínimo, pues $2 \in P$, en tanto que Q no posee mínimo, puesto que $2 \notin Q$.

Por último, diremos que un conjunto ***D*** es **acotado**, si está acotado superior e inferiormente.

Ejemplo:

$D = [2, 5)$, o bien $D = \{x / x \in R \wedge 2 \leq x < 5\}$



VALOR ABSOLUTO

Valor absoluto de un número real ***a***, se escribe $|a|$, es el mismo número ***a*** cuando es positivo o cero, y opuesto de ***a***, si ***a*** es negativo.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

a) $|7| = 7 \qquad |-7| = 7 \qquad |0| = 0$

b) $|x| = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \wedge \quad x = -4$

Propiedades

1) $\forall a : \left(a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0\right)$

2) $\forall a : |a| = |-a|, \quad |a| = \sqrt{a^2}$

3) $\forall a : -|a| \leq a \leq |a|$

4) $\forall a,b : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

5) $\forall k > 0, \forall x : \left(|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k\right)$

6) $\forall k > 0, \forall x : \left(|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k \vee x \leq -k\right)$

7) $\forall a,b : |a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad triangular)

8) $\forall a,b : |a| - |b| \leq |a - b|$

9) $\forall a,b : |a - b| \geq \left||a| - |b|\right|$

INTERVALOS Y ENTORNOS

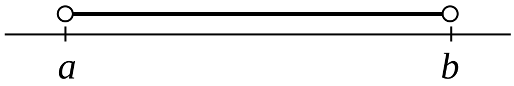
Definición de Intervalo

Se llama *intervalo*, *intervalo matemático* o *intervalo numérico*, al conjunto de números reales comprendido entre otros dos dados, digamos *a* y *b*, que se llaman extremos inferior y superior, respectivamente, del intervalo.

Intervalo abierto (*a*, *b*): es el conjunto de números reales formado por todos los números comprendidos entre *a* y *b*, siendo $a < b$. La longitud del intervalo (a, b) es el número positivo $b - a$.

En símbolos: $(a,b) = \{x / x \in R \wedge a < x < b\}$

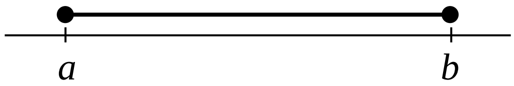
En la recta real se representa:



Intervalo cerrado [*a*, *b*]: es el conjunto de números reales formado por *a*, *b* y todos los números comprendidos entre *a* y *b*.

En símbolos: $[a,b] = \{x / x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$

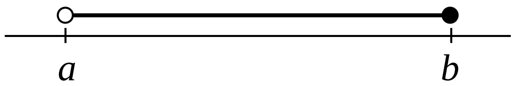
En la recta real se representa:



Intervalo semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha (*a*, *b*]: es el conjunto de números reales formado por *b* y todos los números comprendidos entre *a* y *b*.

En símbolos: $(a,b] = \{x / x \in R \wedge a < x \leq b\}$

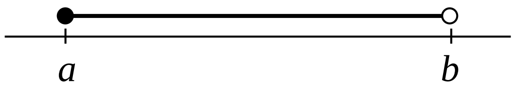
En la recta real se representa:



Intervalo semicerrado a izquierda o semiabierto a derecha [*a*, *b*): es el conjunto de números reales formado por *a* y todos los números comprendidos entre *a* y *b*.

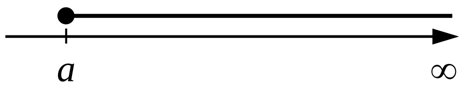
En símbolos: $[a,b) = \{x / x \in R \wedge a \leq x < b\}$

En la recta real se representa:

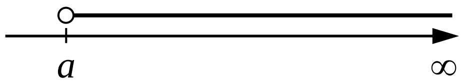


Además, podemos definir otros subconjuntos de *R*, que denominaremos *intervalos semiinfinitos*, considerando las semirrectas. Las semirrectas quedan determinadas por un número; en una semirrecta se encuentran todos los números iguales o mayores (menores) que él, o solamente mayores (menores) que dicho número.

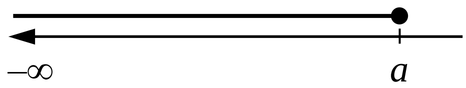
$[a,\infty)=\{x/x\in R\wedge x\geq a\}$



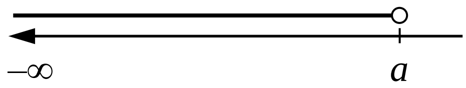
$(a,\infty)=\{x/x\in R\wedge x>a\}$



$(-\infty,a]=\{x/x\in R\wedge x\leq a\}$



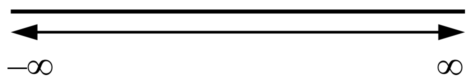
$(-\infty,a)=\{x/x\in R\wedge x<a\}$



Se recuerda que los símbolos ∞ y $-\infty$ se utilizan por conveniencia de notación (indican que no hay límite en la dirección positiva o en la dirección negativa), no representan números reales.

Finalmente tendríamos la recta, que al igual que los anteriores es un intervalo no acotado.

$(-\infty,\infty)=\{x/x\in R\}=R$

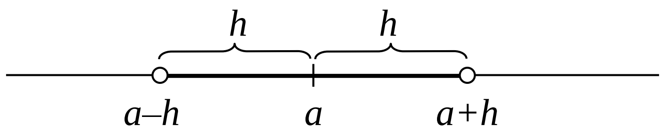


Definición de Entorno

Si ***a*** es un punto cualquiera de la recta real y ***h*** un número positivo, llamamos entorno de centro ***a*** y radio o amplitud ***h*** al intervalo abierto $(a-h,a+h)$. Se lo designa $E(a,h)$ o $E(a)$, en símbolos:

$$E(a,h)=\{x/x\in R\wedge\ a-h<x<a+h\}, \text{ o bien}$$

$$E(a,h)=\{x/x\in R\wedge\ |x-a|<h\}$$

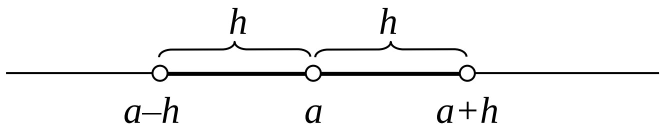


Entorno reducido

Se llama entorno reducido de centro ***a*** y radio ***h*** al intervalo abierto $(a-h,a+h)$, del cual se excluye el punto ***a***. Se lo designa $E'(a,h)$ o $E'(a)$, en símbolos:

$$E'(a,h)=\{x\in R/x\neq a\wedge\ a-h<x<a+h\}=E(a,h)-\{a\}, \text{ o bien}$$

$$E'(a,h)=\{x / x \in R \wedge \ 0<|x-a|<h\}$$



La condición $0<|x-a|$ equivale a decir que $x \neq a$, ya que $|x-a|=0 \Leftrightarrow x=a$.

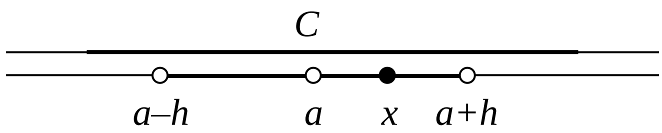
Podemos considerar al entorno reducido como la unión de dos intervalos abiertos:

$$(a-h\,,a)\cup(a\,,a+h)$$

Punto de acumulación

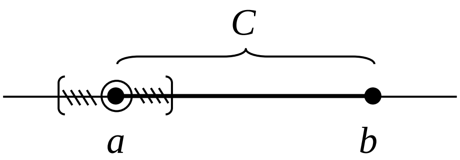
a es un punto de acumulación de ***C*** $\Leftrightarrow \forall E'(a): \exists x / x \in C \wedge x \in E'(a)$

o bien, ***a*** es un punto de acumulación de ***C*** $\Leftrightarrow \forall E'(a): E'(a) \cap C \neq \varnothing$

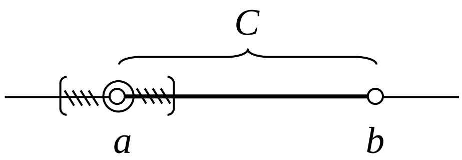


Ejemplo:

Si el conjunto ***C*** es un intervalo abierto o cerrado, todos sus puntos serán de acumulación, inclusive los extremos en caso que ***C*** fuera un intervalo abierto, aunque según se sabe no pertenezcan a ***C***.



$E'(a) \cap C \neq \varnothing$



$E'(a) \cap C \neq \varnothing$

Punto interior

a es un punto interior a ***C*** $\Leftrightarrow a \in C \wedge \exists E(a) / E(a) \subseteq C$

Ejemplos:

1) Cualquier número real es interior al conjunto ***R***.
2) Un número racional no es interior al conjunto ***Q***, pues en todo entorno de un número racional habrá números irracionales que no pertenecen a ***Q***.