Teorema (Unicidad del Limite)

Teorema: (Unicidad del Límite), si una función tiene límite finito en un punto, dicho límite es único

Sea $f(x) / \exists \lim_{x\to a} f(x)$, quiero probar que es único, para ello supongo que no es así, es decir, que

$\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x)=L_2$, $L_1\neq L_2$

Si $L_1>L_2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{L_1-L_2}{2}>0$

Como: $\lim_{x\to a} f(x)=L_1 \Rightarrow$ Para $\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists \delta_1>0 /$ si $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x\to a} f(x)=L_2 \Rightarrow$ Para $\frac{\varepsilon}{2}$, $\exists \delta_2>0 /$ si $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$

Considero $x / 0<|x-a|<\delta$, $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$0<L_1-L_2=|L_1-L_2|=|L_1-f(x)+f(x)-L_2|=|-(f(x)-L_1)+(f(x)-L_2)|\leq|-(f(x)-L_1)|+|f(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$
$=\varepsilon$

$\therefore 0<L_1-L_2<\varepsilon=\frac{L_1-L_2}{2}$ ABS

$\therefore$ El límite es único.

Limite por izquierda y por derecha

Demostración límites por izquierda y por derecha:

Quiero probar que $\lim_{x\to a^+} f(x)=L \wedge \lim_{x\to a^-}=L$, sabiendo que $\lim_{x\to a} f(x)=L$

Por hipótesis se tiene que: $\lim_{x\to a}=L$ entonces por def:

Dado que $\varepsilon>0, \exists\delta>0 / 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L<\varepsilon$

Si $x / 0<0<x-a<\delta \Rightarrow 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\therefore \lim_{x\to a^+} f(x)=L$

1)Suma de Limites:

1) Suma de Límites: $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$

Demostración: Por Hipótesis: $\lim_{x\to a}f(x)=L_1$ y $\lim_{x\to a}g(x)=L_2$

Por Hipótesis: $\exists\lim_{x\to a}f(x)=L_1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0 / 0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ ①

$\exists\lim_{x\to 0}g(x)=L_2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0 / 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ ②

Sea $\varepsilon>0$ Quiero Probar que $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=L_1+L_2$

Considero $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $x/0<|x-a|<\delta$

$$|(f(x)+g(x))-(L_1+L_2)|=|f(x)+g(x)-L_1-L_2|=|f(x)-L_1+g(x)-L_2|\le\underbrace{|f(x)-L_1|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{|g(x)-L_2|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\therefore |f(x)+g(x)-(L_1+L_2)|<\varepsilon$

$\therefore \lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=L_1+L_2$ //

2)Producto de Limites

2) Producto de Límites: $\lim (f\cdot g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$

Demostración:

Por Hipótesis $\lim_{x\to a}f(x)=L_1 \wedge \lim_{x\to a}g(x)=L_2$

Sea $\varepsilon>0$, y $\delta_1>0 / 0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2.|L_2|}$ $L_2\neq 0$ ①

Considero $M=$ Supremo $\{|f(x)|, 0<|x-a|<\delta_1\}$ ③ y $\delta_2>0 / 0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2.M}$ ②

Sea $\delta=\text{Min}\{\delta_1,\delta_2\}$, $x/0<|x-a|<\delta$

$$|f(x).g(x)-L_1.L_2|=|f(x).g(x)\underbrace{-f(x).L_2+f(x).L_2}_{\text{sumamos y Restamos } -f(x).L_2+f(x).L_2}-L_1.L_2|\le|f(x).g(x)-f(x).L_2|+|f(x).L_2-L_1.L_2|=$$

$$=|f(x).(g(x)-L_2)|+|L_2.(f(x)-L_1)|=\underbrace{|f(x)|}_{<M\ ③}.\underbrace{|g(x)-L_2|}_{<\frac{\varepsilon}{2.M}}+|L_2|.\underbrace{|f(x)-L_1|}_{<\frac{\varepsilon}{2.|L_2|}}<\cancel{M}.\frac{\varepsilon}{2.\cancel{M}}+\cancel{|L_2|}.\frac{\varepsilon}{2.\cancel{|L_2|}}=$$

$\therefore |f(x).g(x)-L_1.L_2|<\varepsilon$ $\therefore \lim_{x\to a}(f(x).g(x))=L_1.L_2$

5) Cociente de Limites

5) $\lim_{x \to a} c. = c$ Límite de función constante.

Demostración

Sea $f(x) = c$, función constante

Sea $\varepsilon > 0$, considero $\delta = \varepsilon$; $x / 0 < |x-a| < \delta$

Quiero probar que $= |f(x) - c| < \varepsilon$

Como $f(x) = c$, entonces $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

$\therefore \lim_{x \to a} c = c$