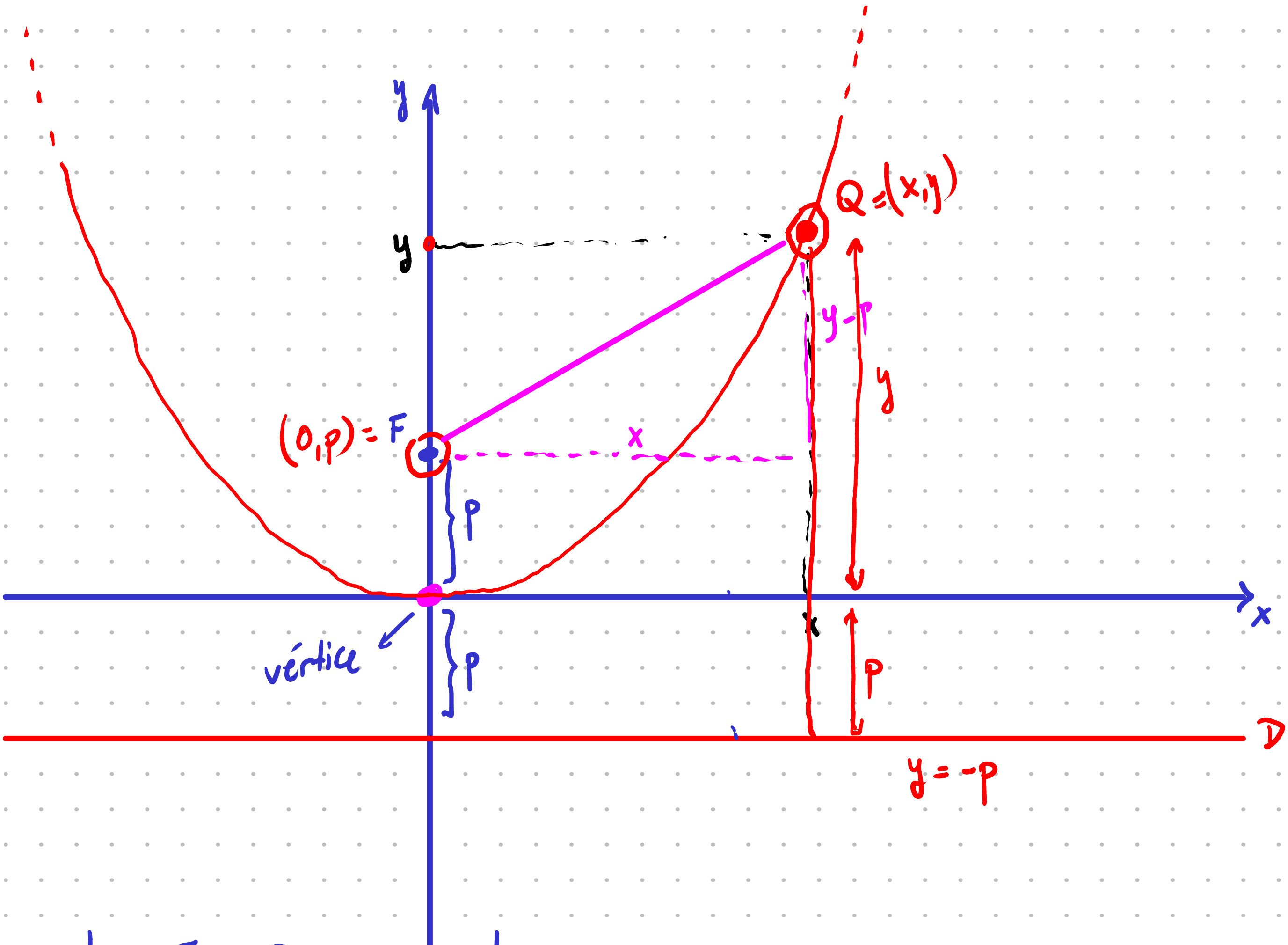
29/06/2023

# PARÁBOLA

Se llama parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado **foco** y de una recta fija llamada **directriz**.




distancia entre F y D es igual a 2p

Si $Q=(x,y)$ es un punto de la parábola, entonces la distancia de $Q$ a $D$ debe ser igual a la distancia de $Q$ a $F$

$$y+p=\sqrt{(y-p)^2+x^2}$$

Elevando al cuadrado

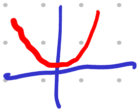
$$(y+p)^2=(y-p)^2+x^2$$

$$\cancel{y^2}+2py+\cancel{p^2}=\cancel{y^2}-2yp+\cancel{p^2}+x^2$$

$$2py+2py=x^2$$

$\boxed{4py = x^2}$ o también $y = \frac{1}{4p} \cdot x^2$

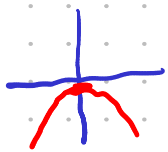
$a > 0$



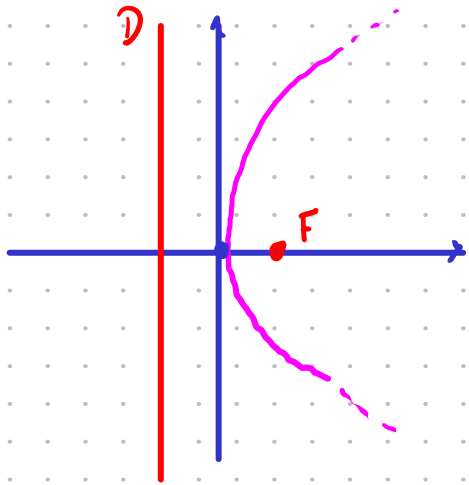
si invertimos la posición del foco con la recta directriz, la parábola se da vuelta

$-4py = x^2$ o bien $y = \frac{-1}{4p} \cdot x^2$

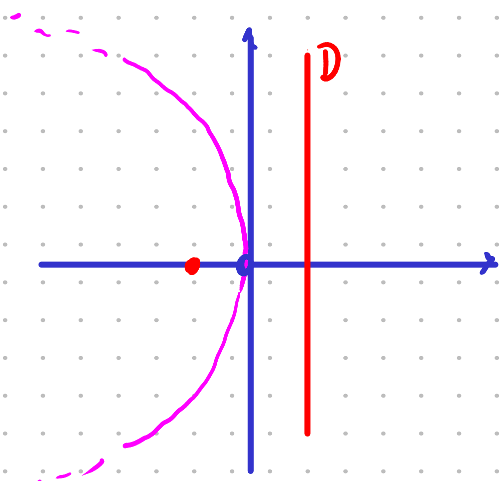
$a < 0$



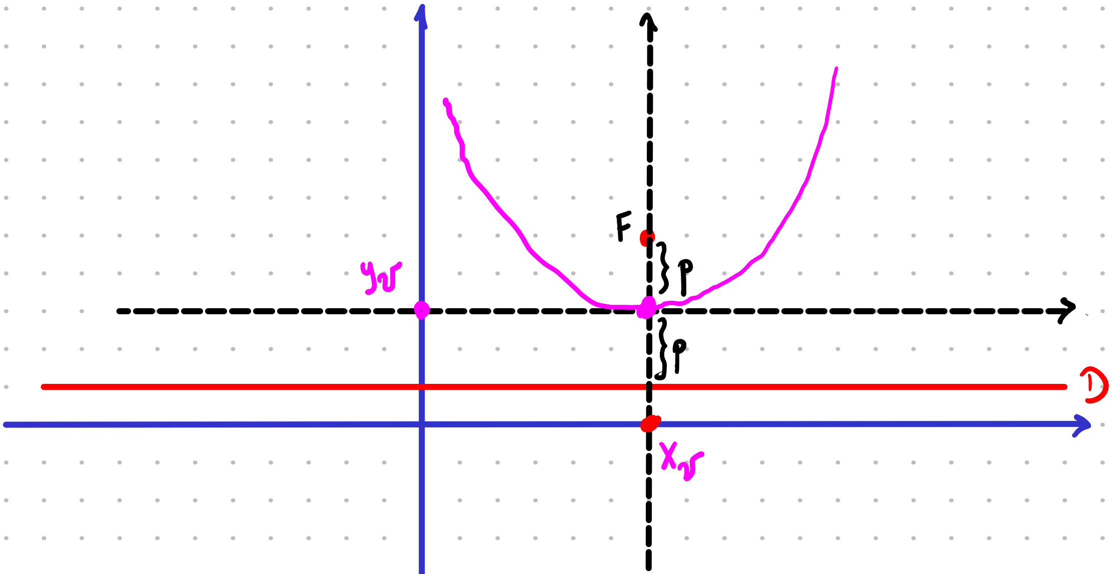
Si la recta directriz fuera vertical




$$y^2 = 4px$$




$$y^2 = -4px$$



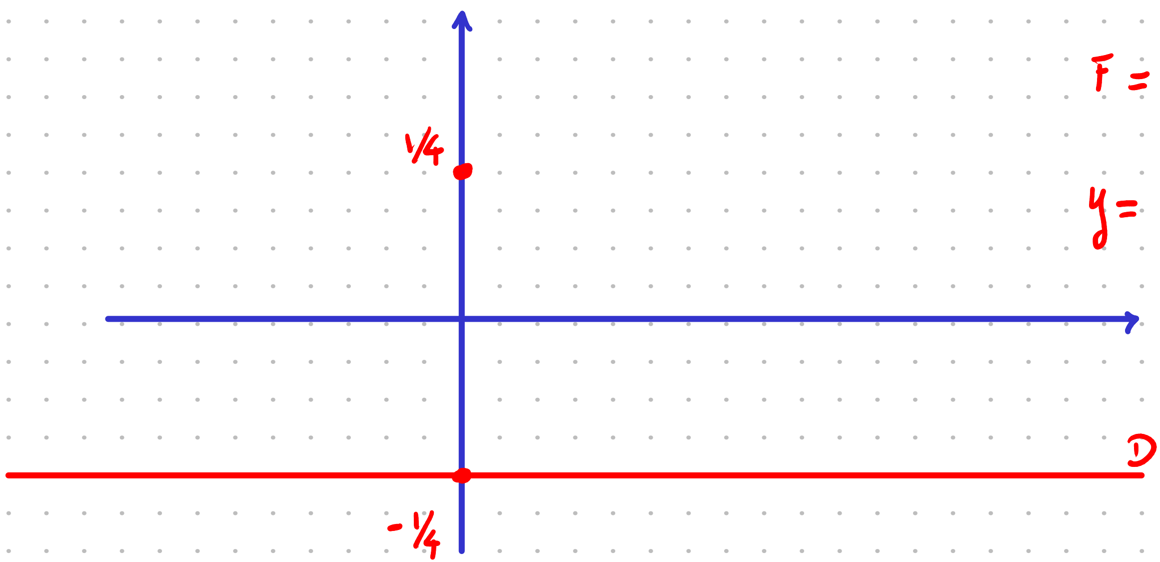

$$\boxed{(x - x_v)^2 = 4p\,(y - y_v)}$$

Ecuación de la parábola desplazada

Ej: Dada la ecuación $y = x^2$. Hallar la ubicación del foco y la ecuación de la recta directriz

$$y = \underbrace{\frac{1}{4p}}_{1} \cdot x^2$$

$$\frac{1}{4p} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

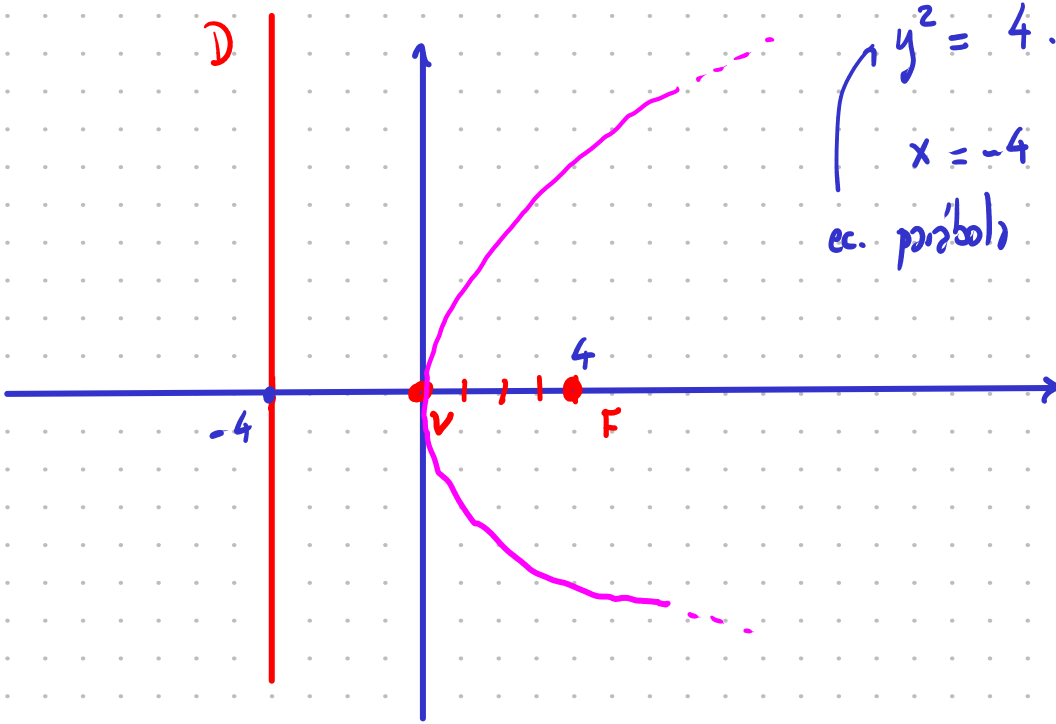



$F = (0, 1/4)$

$y = -1/4$

Ej: Hallar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen de coordenadas y su foco es el punto $F=(4,0)$.

Hallar la ecuación de la directriz




$y^2 = 4 . 4 . x = 16x$

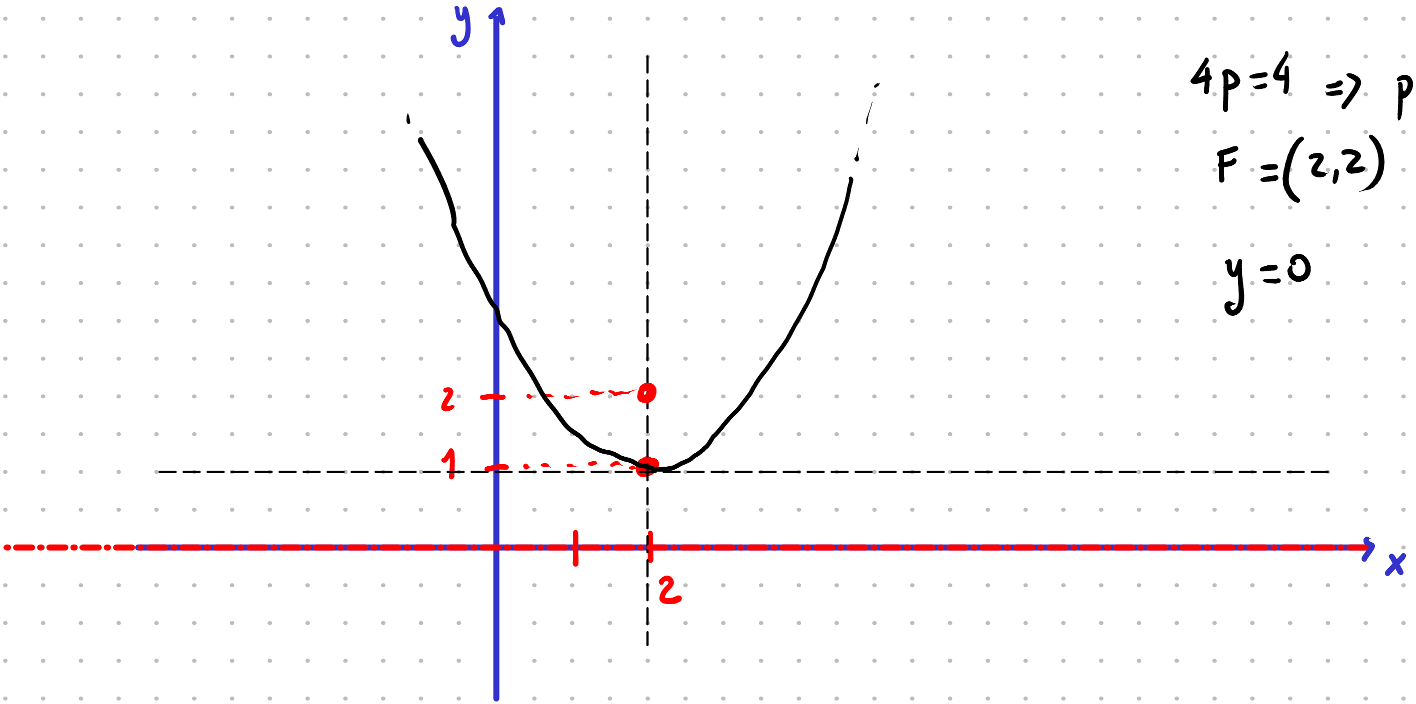
ec. parábola

$x = -4$ ← ec. direct.

Ej: Dada la ecuación

$$(x-2)^2 = \overset{4p}{4}(y-1)$$

Hallar el foco, la ecuación de la directriz y el gráfico




$4p = 4 \Rightarrow p = 1$

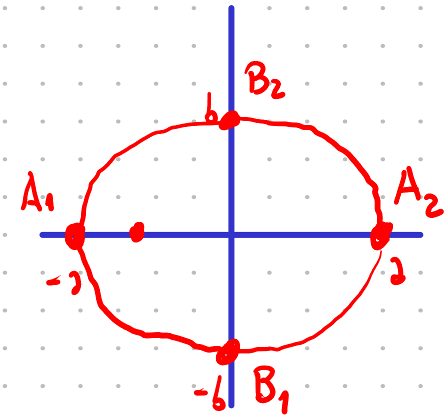
$F = (2,2)$

$y = 0$

# ELIPSE

Se llama elipse a los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos (focos) tiene suma constante

La ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad a,b>0$

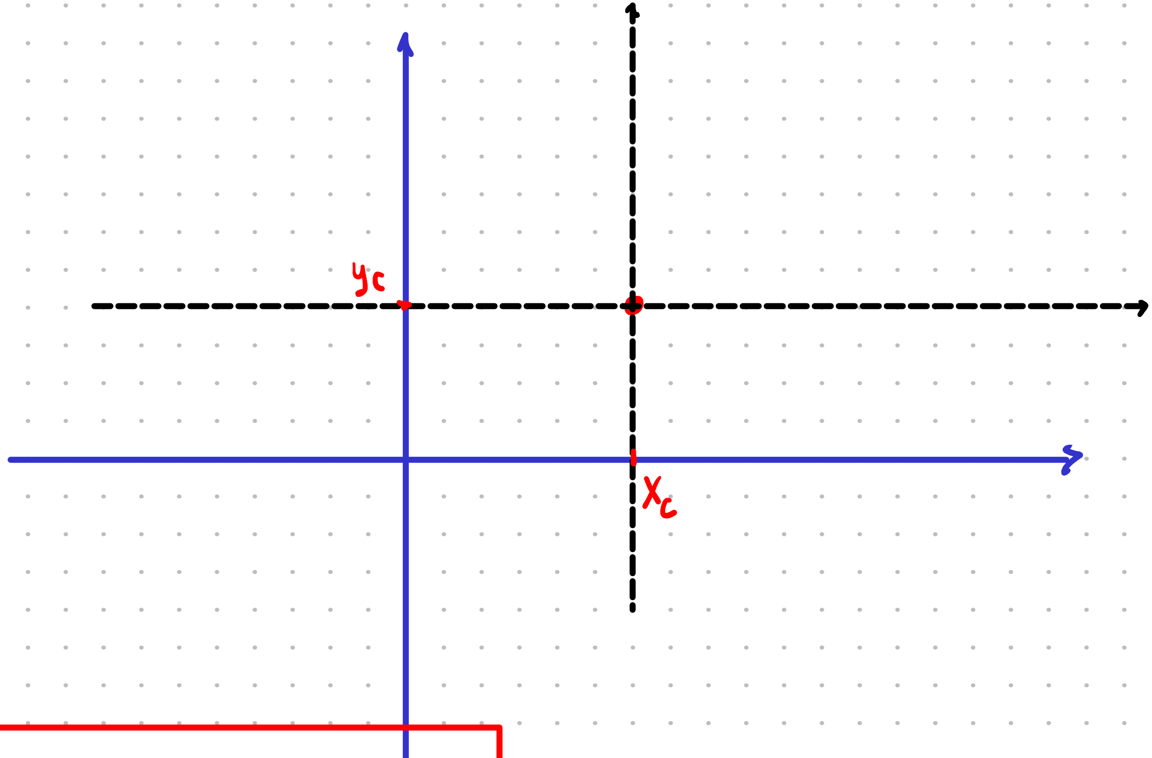



$\underline{x=0}$ $\quad \frac{y^2}{b^2}=1 \iff y^2=b^2 \iff y=\pm b$

$\underline{y=0}$ $\quad \frac{x^2}{a^2}=1 \iff x^2=a^2 \iff x=\pm a$

$A_1=(-a,0) \quad A_2=(a,0) \quad B_2=(0,b) \quad B_1=(0,-b)$

# Ecuación canónica de la elipse desplazada




$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1}$$

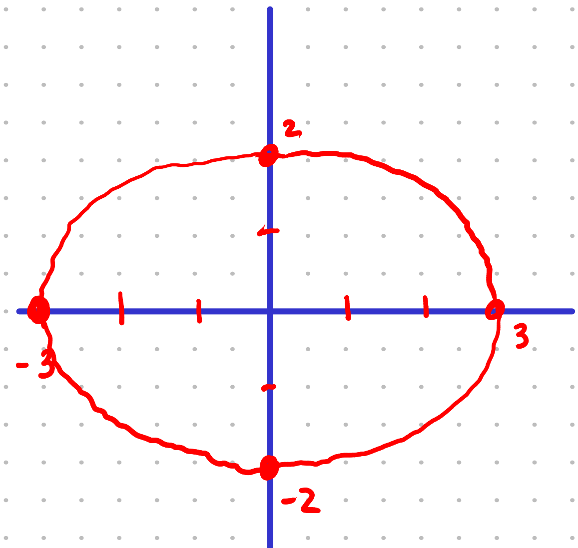
Ej: Dibujar $4x^2 + 9y^2 - 16 = 20$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\tfrac{1}{9}\ \left(\frac{4}{36}\right) \cdot x^2 + \left(\frac{9}{36}\right) y^2 = 1 \quad \tfrac{1}{4}$$

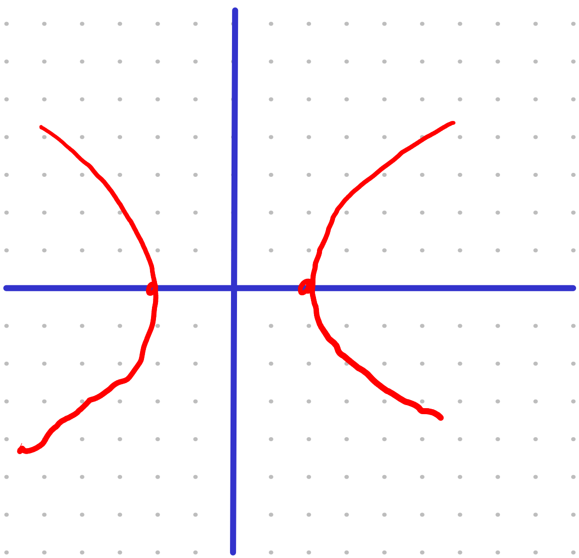
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

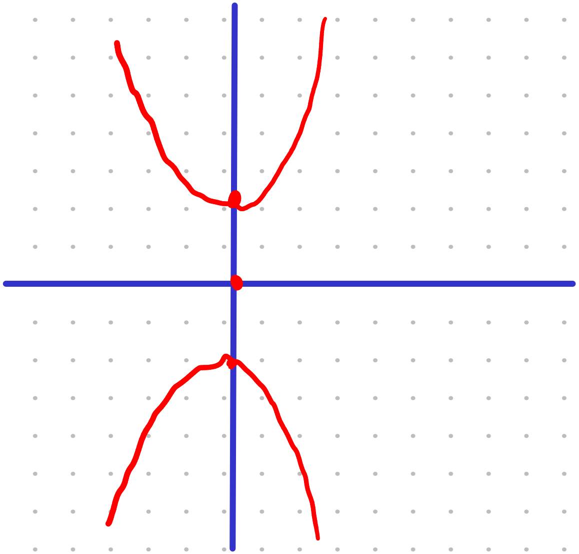
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$



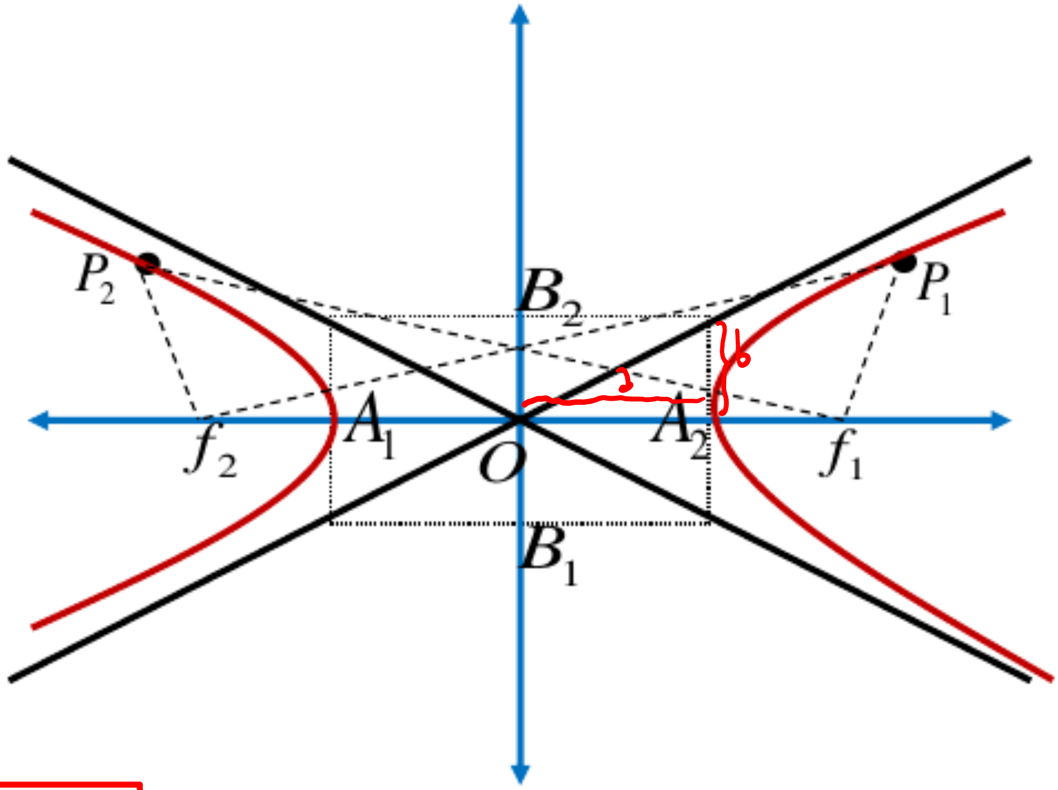
# HIPÉRBOLA

Se llama hipérbola al conjunto de puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos llamados focos tienen una diferencia constante





Ecuación canónica de la hipérbola



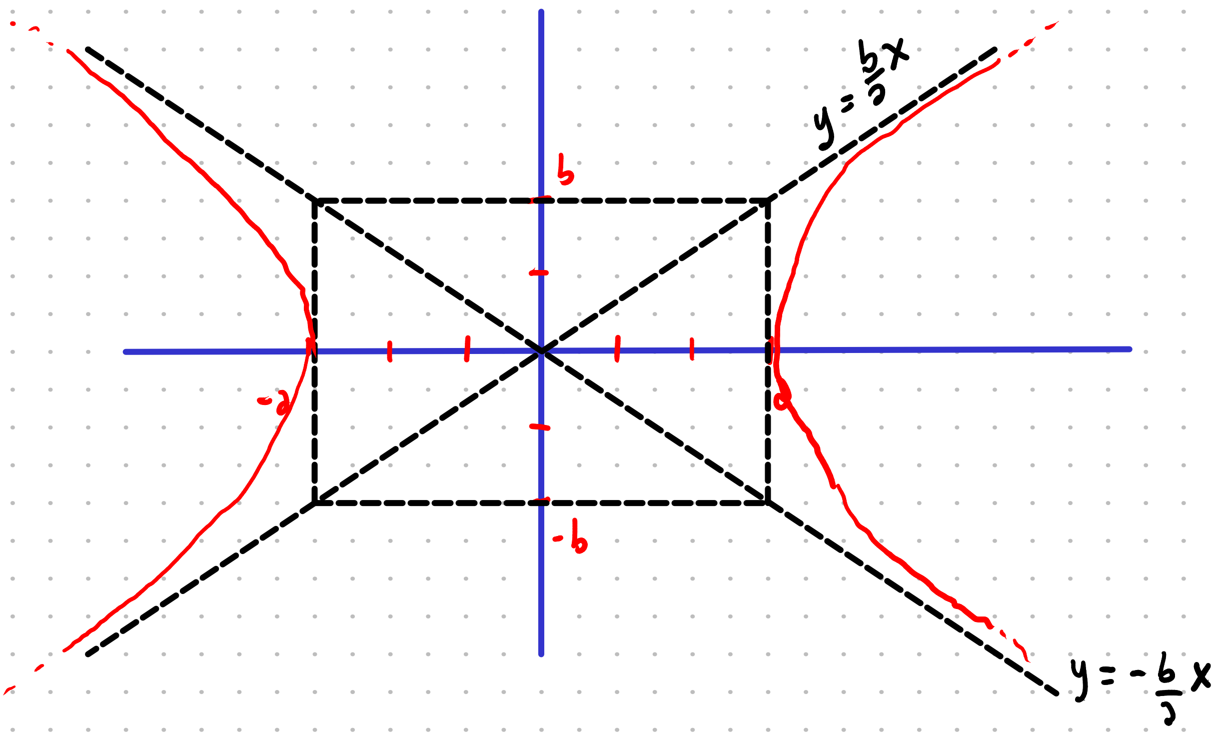

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$b > 0$

$a > 0$

si $x=0$ $\quad -\dfrac{y^2}{b^2}=1 \iff -y^2=b^2$ no hay ningún que cumpla

si $y=0$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2}=1 \iff x^2=a^2 \iff x=\pm a$

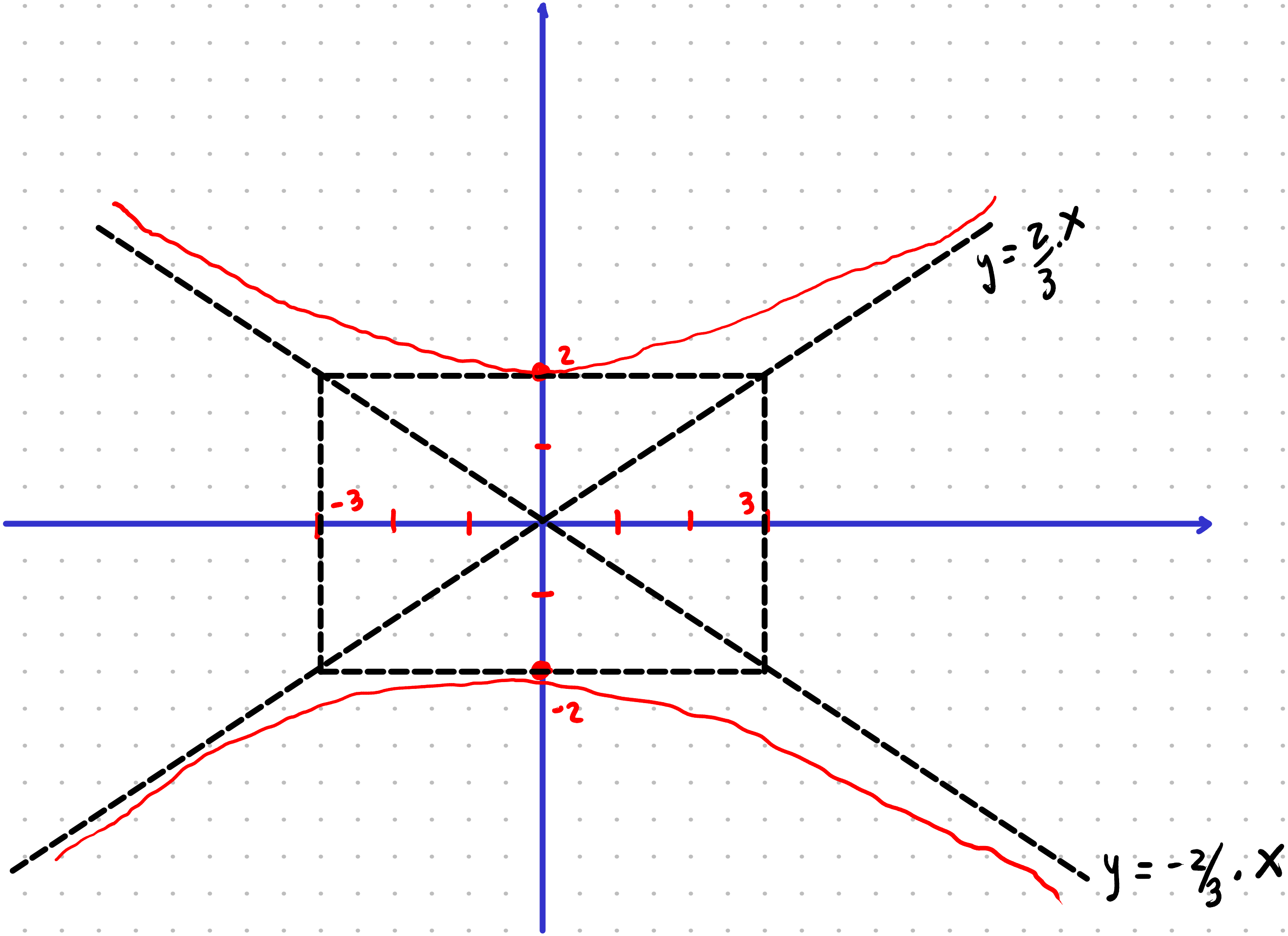


Graficar $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ $a = 3$

$b = 2$

si $y=0$ $-\frac{x^2}{9} = 1 \iff -x^2 = 9$ no tiene solución en $\mathbb{R}$

si $x=0$ $\frac{y^2}{4} = 1 \iff y^2 = 4 \iff y = \pm 2$



2
-3
3
-2
$y = \frac{2}{3} \cdot x$
$y = -\frac{2}{3} \cdot x$

# Ecuación desplazada de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{(y-y_c)^2}{b^2} - \frac{(x-x_c)^2}{a^2} = 1$$