RESOLUCIÓN DEL RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL ALGEBRA (LSI)	**05/05/2022 - TEMA 1**

1) Negar la siguiente proposición compuesta y obtener una expresión equivalente más simple:
$p \Rightarrow (\neg q \wedge p)$ **(10 puntos)**

$\neg[\boldsymbol{p} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p})] \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \wedge \neg(\neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \wedge [\neg(\neg \boldsymbol{q}) \vee \neg \boldsymbol{p}] \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \vee \neg \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{p}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{F} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

1. *Negación de una implicación*
2. *Ley de De Morgan para la conjunción*
3. *Involución*
4. *Propiedad distributiva de la conjunción respecto de la disyunción*
5. *Principio de contradicción*
6. *Identidad de la disyunción*

2) Dada la siguiente función proposicional, con dominio en Z^2, $P(x, y)$: $y = 2x + 1$

a. Obtener una proposición verdadera y otra falsa, utilizando cuantificadores. Luego, expresarlas en lenguaje coloquial.

Algunas opciones:

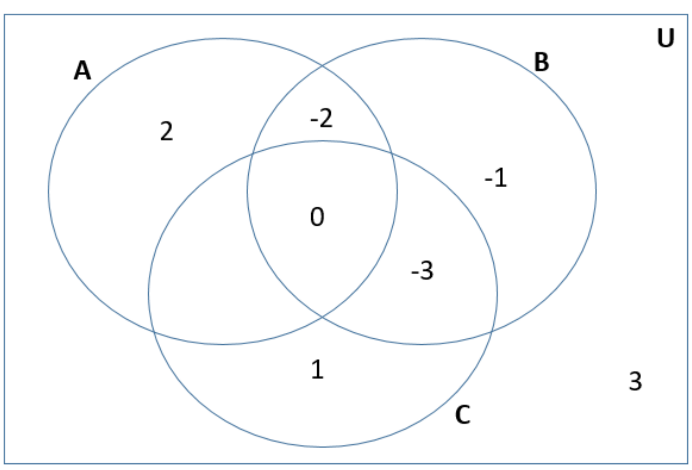
- $\forall x \in Z, \exists y \in Z / y = 2x + 1$ → V
- $\forall x \in Z, \forall y \in Z: y = 2x + 1$ → F
- $\exists x \in Z, \exists y \in Z / y = 2x + 1$ → V
- $\exists x \in Z / \forall y \in Z: y = 2x + 1$ → F

b. Hallar la negación de cada proposición obtenida en a), sin hacer uso del signo ¬. **(20 puntos)**

Dependerá de la proposición escrita en el ítem anterior.

3) Dados los conjuntos $U = \{x \in Z / -4 < x \leq 3\}$, $A = \{x : x \in U \wedge x \text{ es par}\}$, $B = \{x \in U : x \leq 0\}$ y $C = \{-3, 0, 1\}$

a. Realizar el diagrama correspondiente.



$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}\}$
$A = \{-2,0,2\}$
$B = \{-3, -2, -1, 0\}$
$C = \{-3,0,1\}$

b. Hallar: $i)\ (A \cup B)^C \cap C$

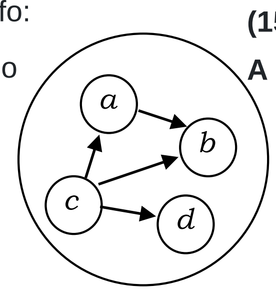
$A \cup B = \{-3, -2, -1,0,2\}$
$(A \cup B)^C = \{1,3\}$
$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{C}} \cap \boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{1}\}$

$ii)\ (B \Delta C) - A$ **(20 puntos)**

$(B \Delta C) = \{-2, -1,1\}$
$(\boldsymbol{B \Delta C}) - \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{-1, 1}\}$

4) Sea $A = \{a, b, c, d\}$, se define la relación R, dada por el siguiente dígrafo: **(15 puntos)**

Determinar si la siguiente proposición es verdadera o falsa, justificando tu respuesta: R^{-1} *es una relación de orden estricto.*



$R = \{(a, b); (c, a); (c, b); (c, d)\}$
Luego: $\boldsymbol{R^{-1}} = \{(\boldsymbol{b, a}); (\boldsymbol{a, c}); (\boldsymbol{b, c}); (\boldsymbol{d, c})\}$

Para que $\boldsymbol{R^{-1}}$ sea una relación de orden estricto debe verificar 3 propiedades:

- Arreflexiva:
  $a \in A \wedge (a, a) \notin R^{-1}$ → V
  $b \in A \wedge (b, b) \notin R^{-1}$ → V
  $c \in A \wedge (c, c) \notin R^{-1}$ → V
  $d \in A \wedge (d, d) \notin R^{-1}$ → V
- Asimétrica:
  $(b, a) \in R^{-1} \Rightarrow (a, b) \notin R^{-1}$ → V
  $(a, c) \in R^{-1} \Rightarrow (c, a) \notin R^{-1}$ → V
  $(b, c) \in R^{-1} \Rightarrow (c, b) \notin R^{-1}$ → V
  $(d, c) \in R^{-1} \Rightarrow (c, d) \notin R^{-1}$ → V
- Transitiva:

$(b, a) \in R^{-1} \wedge (a, c) \in R^{-1} \Rightarrow (b, c) \in R^{-1}$ → V

Por lo tanto, "R^{-1} es una relación de orden estricto" es una proposición VERDADERA.

5) a. Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $R = \{(x, y) \in \text{AxB}/y = 2x\}$
Definir R por extensión y analizar si es una función. De ser posible, clasificarla. **(10 puntos)**
$R = \{(1,2); (2,4); (3,6)\}$

Veamos si es una función:
- Existencia:
  $1 \in A, \exists\, 2 \in B/(1,2) \in R$ → V
  $2 \in A, \exists\, 4 \in B/(2,4) \in R$ → V
  $3 \in A, \exists\, 6 \in B/(3,6) \in R$ → V

R verifica la condición de existencia.

- Unicidad:

Como no hay pares ordenados que tengan la primera componente igual, podemos afirmar que R verifica la condición de unicidad.

Por lo tanto, R es una función.

- Inyectividad
  $1 \neq 2 \Rightarrow R(1) \neq R(2)$ → V
  $1 \neq 3 \Rightarrow R(1) \neq R(3)$ → V
  $2 \neq 3 \Rightarrow R(2) \neq R(3)$ → V

R es una función inyectiva.

- Sobreyectividad
  $1 \in B, \exists\, x \in A/(x, 1) \in R$ → F

R no es sobreyectiva.

Por lo tanto: ***R es una función inyectiva y no sobreyectiva.***

b. Dadas las siguientes funciones, $f: R \to R/f(x) = |2x|$ y $g: R \to R/g(x) = x - 1$.
Definir gof y determinar si es función. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**
$\boldsymbol{Img\ (f) = R_{\geq 0}}$ **y** $\boldsymbol{Dom\ (g) = R.}$ Luego: $\boldsymbol{Img\ (f) = R_{\geq 0} \subset Dom\ (g) = R.}$ Por lo tanto gof es una función.
$gof: R \to R/g \circ f(x) = g[f(x)] = g(|2x|) = |2x| - 1$

6) Demostrar por inducción la validez de la siguiente proposición:
$\forall\, n \in N: 2^{3n} - 1 = 7k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$ **(15 puntos)**

Sea $P(n) = 2^{3n} - 1 = 7k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$

1) $P(1) = 2^{3.1} - 1 = 8 - 1 = 7 = 7.1,\ siendo\ k = 1 \in \mathrm{N}$
Luego, P (1) es Verdadero.

2) $P(h) = 2^{3h} - 1 = 7k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$
$P(h+1) = 2^{3(h+1)} - 1 = 7k',\ para\ algún\ k' \in \mathrm{N}$

Demostración:
$2^{3(h+1)} - 1 = 2^{3h+3} - 1 = 2^{3h}.2^3 - 1 = 2^{3h}.(7+1) - 1 = 2^{3h}.7 + 2^{3h} - 1 = 2^{3h}.7 + 7k = 7.\left(2^{3h} + k\right) =$
$7.k'$, siendo $k' = (2^{3h} + k) \in N$

1) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma (en el exponente)*
2) *Producto de potencias de igual base*
3) *8=7+1*
4) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma*
5) *Por hipótesis inductiva (*$2^{3h} - 1 = 7k$)
6) *Factor común 7*
7) *Ley de cierre para la potencia y la suma en N*

Por lo tanto: $P(n)$ *es Verdadero. Luego:* $\forall\ n\ \in\ N: 2^{3n} - 1 = 7k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$

RESOLUCIÓN DEL RECUPERATORIO PRIMER PARCIAL ALGEBRA (LSI)	05/05/2022 - TEMA 2

1) Negar la siguiente proposición compuesta y obtener una expresión equivalente más simple:

$q \wedge (p \Rightarrow \neg q)$ **(10 puntos)**

$\neg[q \wedge (p \Rightarrow \neg q)] \Leftrightarrow \neg q \vee \neg(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow \neg q \vee [p \wedge \neg(\neg q)] \Leftrightarrow \neg q \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \Leftrightarrow$
$(\neg q \vee p) \wedge V \Leftrightarrow) \Leftrightarrow \neg q \vee p$

1. *Ley de De Morgan para la conjunción*
2. *Negación de una implicación*
3. *Involución*
4. *Propiedad distributiva de la disyunción respecto de la conjunción*
5. *Principio del tercer excluido*
6. *Identidad de la conjunción*

2) Dada la siguiente función proposicional, con dominio en Z^2, $P(x, y): y = x^2$

a. Obtener una proposición verdadera y otra falsa, utilizando cuantificadores. Luego, expresarlas en lenguaje coloquial.

Algunas opciones:

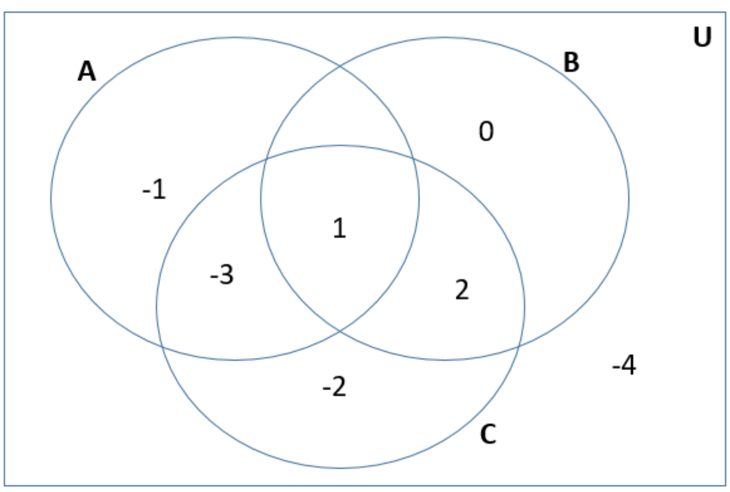
- $\forall x \in Z, \exists y \in Z / y = x^2$ → V
- $\forall x \in Z, \forall y \in Z: y = x^2$ → F
- $\exists x \in Z, \exists y \in Z / y = x^2$ → V
- $\exists x \in Z / \forall y \in Z: y = x^2$ → F

b. Hallar la negación de cada proposición obtenida en a), sin hacer uso del signo ¬. **(20 puntos)**

Dependerá de la proposición escrita en el ítem anterior.

3) Dados los conjuntos $U = \{x \in Z / -4 \leq x < 3\}$, $A = \{x: x \in U \wedge x \text{ es impar}\}$, $B = \{x \in U: x \geq 0\}$ y $C = \{-3, -2, 1, 2\}$

a. Realizar el diagrama correspondiente.



$\boldsymbol{U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}}$
$A = \{-3, -1, 1\}$
$B = \{0, 1, 2\}$
$C = \{-3, -2, 1, 2\}$

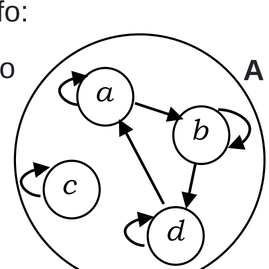
b. Hallar: $i)$ $(A \cup B)^C \cap C$ **(20 puntos)**

$A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$
$(A \cup B)^C = \{-4, -2\}$
$\boldsymbol{(A \cup B)^C \cap C = \{-2\}}$

$ii)$ $(B \Delta C) - A$
$(B \Delta C) = \{-3, -2, 0\}$
$\boldsymbol{(B \Delta C) - A = \{-2, 0\}}$

4) Sea $A = \{a, b, c, d\}$, se define la relación R, dada por el siguiente dígrafo:

Determinar si la siguiente proposición es verdadera o falsa, justificando tu respuesta: R^{-1} *es una relación de orden amplio.* **(15 puntos)**



$R = \{(a, a); (a, b); (b, b); (b, d); (c, c); (d, a); (d, d)\}$
Luego: $\boldsymbol{R^{-1} = \{(a, a); (b, a); (b, b); (d, b); (c, c); (a, d); (d, d)\}}$
Para que $\boldsymbol{R^{-1}}$ sea una relación de orden amplio debe verificar 3 propiedades:

- Reflexiva:
  $a \in A \wedge (a,a) \in R^{-1}$ → V
  $b \in A \wedge (b,b) \in R^{-1}$ → V
  $c \in A \wedge (c,c) \in R^{-1}$ → V
  $d \in A \wedge (d,d) \in R^{-1}$ → V
- Antisimétrica:
  $(a,a) \in R^{-1} \wedge (a,a) \in R^{-1} \Rightarrow a = a$ → V
  $(b,b) \in R^{-1} \wedge (b,b) \in R^{-1} \Rightarrow b = b$ → V
  $(c,c) \in R^{-1} \wedge (c,c) \in R^{-1} \Rightarrow c = c$ → V
  $(d,d) \in R^{-1} \wedge (d,d) \in R^{-1} \Rightarrow d = d$ → V
- Transitiva:

$(a,a) \in R^{-1} \wedge (a,d) \in R^{-1} \Rightarrow (a,d) \in R^{-1}$ → V
$(b,a) \in R^{-1} \wedge (a,a) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R^{-1}$ → V
$(b,a) \in R^{-1} \wedge (a,d) \in R^{-1} \Rightarrow (b,d) \in R^{-1}$ → **F**

Por lo tanto, "R^{-1} es una relación de orden amplio" es una proposición FALSA.

5) a. Sean $A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,3,4,5,6\}\ y\ R = \{(x,y) \in \mathrm{AxB}/y = x + 2\}$
Definir R por extensión y analizar si es una función. De ser posible, clasificarla. **(10 puntos)**
$R = \{(1,3);(2,4);(3,5)\}$

Veamos si es una función:
- Existencia:
  $1 \in A, \exists\ 3 \in B/(1,3) \in R$ → V
  $2 \in A, \exists\ 4 \in B/(2,4) \in R$ → V
  $3 \in A, \exists\ 5 \in B/(3,6) \in R$ → V

R verifica la condición de existencia.

- Unicidad:

Como no hay pares ordenados que tengan la primera componente igual, podemos afirmar que R verifica la condición de unicidad.

Por lo tanto, R es una función.

- Inyectividad
  $1 \neq 2 \Rightarrow R(1) \neq R(2)$ → V
  $1 \neq 3 \Rightarrow R(1) \neq R(3)$ → V
  $2 \neq 3 \Rightarrow R(2) \neq R(3)$ → V

R es una función inyectiva.

- Sobreyectividad
  $1 \in B, \exists\ x \in A/(x,1) \in R$ → F

R no es sobreyectiva.

R es una función inyectiva y no sobreyectiva.

b. Dadas las siguientes funciones, $f: R \to R/f(x) = |3x|$ y $g: R \to R/g(x) = x - 1$.
Definir gof y determinar si es función. Justificar la validez de tus afirmaciones. **(10 puntos)**
$\boldsymbol{Img\ (f) = R_{\geq 0}}$ **y** $\boldsymbol{Dom\ (g) = R.}$ Luego: $\boldsymbol{Img\ (f) = R_{\geq 0} \subset Dom\ (g) = R.}$ Por lo tanto gof es una función.
$gof: R \to R/g \circ f(x) = g[f(x)] = g(|3x|) = |3x| - 1$

6) Demostrar por inducción la validez de la siguiente proposición:
$\forall\ n\ \in\ N: 2^{4n} - 1 = 15k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$ **(15 puntos)**

Sea $P(n) = 2^{4n} - 1 = 15k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$

1) $P(1) = 2^{4.1} - 1 = 16 - 1 = 15 = 15.1,\ siendo\ k = 1 \in \mathrm{N}$

Luego, P (1) es Verdadero.

2) $P(h) = 2^{4h} - 1 = 15k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$

$P(h+1) = 2^{4(h+1)} - 1 = 15k',\ para\ algún\ k' \in \mathrm{N}$

Demostración:

$2^{4(h+1)} - 1 = 2^{4h+4} - 1 = 2^{4h}.2^4 - 1 = 2^{4h}.(15+1) - 1 = 2^{4h}.15 + 2^{4h} - 1 = 2^{4h}.15 + 15k = 15.\left(2^{4h} + k\right) = 15.k'$ siendo $k' = (2^{4h} + k) \in N$

1) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma (en el exponente)*
2) *Producto de potencias de igual base*
3) *16=15+1*
4) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma*
5) *Por hipótesis inductiva* $(2^{4h} - 1 = 15k)$
6) *Factor común 15*
7) *Ley de cierre para la potencia y la suma en N*

Por lo tanto: $P(n)$ *es Verdadero. Luego:* $\forall\ n\ \in\ N: 2^{4n} - 1 = 15k,\ para\ algún\ k \in \mathrm{N}$