UNIDAD 8: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Se denomina ecuación lineal con n incógnitas, a toda expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Donde a es el coeficiente, x es la incógnita y b es el termino independiente.

Se llama solución de una ecuación lineal con n incógnitas a toda n-úpla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de números reales, tal que al reemplazar ordenadamente cada incógnita por cada valor verifica la igualdad.

Resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es determinar los valores de las incógnitas que verifican en forma simultánea las ecuaciones del sistema

Solución del sistema de ecuaciones lineales

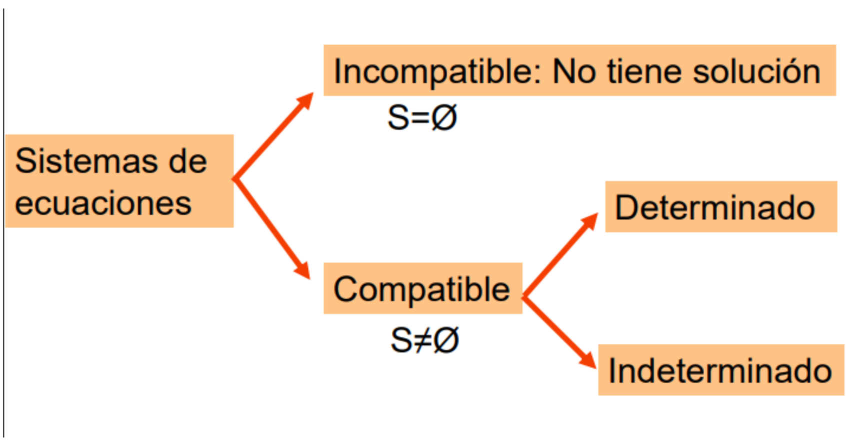
Es una n-úpla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, tal que al reemplazar ordenadamente las incógnitas por los α_i satisfacen **simultáneamente** todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

CLASIFICACION DE LOS SISTEMAS

según el número de ecuaciones y de incógnitas:

1) Sistemas cuadrados: (m = n).

2) Sistemas no cuadrados o rectangulares: (m ≠ n)

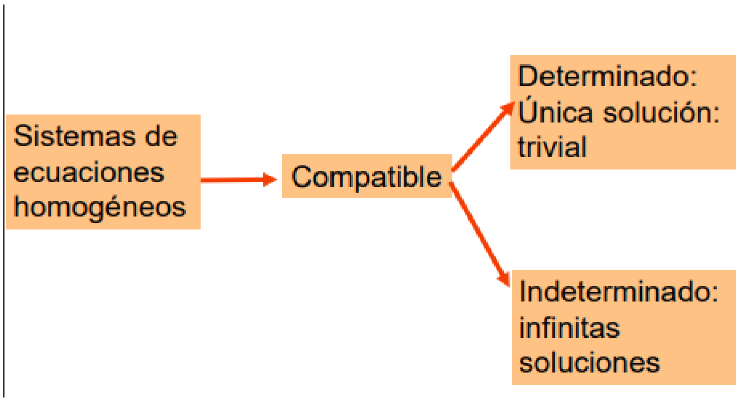


- Sistema incompatible: es aquel que carece de solución; no existe ninguna n-úpla de Rn que verifique en forma simultánea todas las ecuaciones del sistema.
- Sistema compatible: es aquel que tiene solución.

- Sistema compatible determinado: La solución es única, existe un único valor para cada incógnita.
- Sistema compatible indeterminado: El sistema tiene solución múltiple. Tiene infinitas soluciones.

- Sistemas de ecuaciones equivalentes: Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes, si tienen el mismo conjunto solución

Clasificación de Sistemas de Ecuaciones Lineales según el conjunto solución:



CONJUNTO SOLUCION

Es el conjunto **S** de todas las n-úplas $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ que satisfacen en forma **simultánea** todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE EQUIVALENCIA

Si a un sistema de ecuaciones expresado en forma matricial se aplican operaciones elementales de filas a ambos miembros de la igualdad, el sistema de ecuaciones obtenido y el original admiten el mismo conjunto solución.

TEOREMA DE ROUCHE FROBENIUS

Sea A . X = B un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

A . X = B es compatible $\Leftrightarrow$ r (A) = r (A’)

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si, la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes tienen igual rango.

Demostración:

$$A.X = B \text{ es compatible} \Leftrightarrow \exists \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} / A.\alpha = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [A_1\ A_2\ \dots A_n].\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow \alpha_1.A_1 + \alpha_2.A_2 + \dots + \alpha_n.A_n = B \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ B es combinación lineal de las n columnas de A

$\Leftrightarrow$ r (A) = r (A')

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA

1. Si r(A) ≠ r(A') el sistema de ecuaciones es incompatible y no admite soluciones.
2. Si r(A) = r(A') = r el sistema es compatible

- Si r = n , el sistema es compatible determinado y tiene una única solución
- Si r < n , el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

SISTEMAS CUADRADOS

Sea A.X=B un sistema de ecuaciones tal que A es cuadrada.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS CUADRADOS:

- Un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo.
- Un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas es indeterminado si y solo si el determinante de la matriz de los coeficientes es nulo.

TEOREMA Y REGLA DE CRAMER

SISTEMA CRAMERIANO: Es un sistema de ecuaciones cuadrado cuya matriz del sistema (matriz de los coeficientes) es inversible.

TEOEMA DE CRAMER: Todo Sistema Crameriano: A.X = B admite solución única, es decir, es compatible determinado, siendo esta la única solución del sistema:

$$X = A^{-1}.B$$

Demostración:

Sea $A.X = B$ un sistema crameriano.

Premultiplicamos ambos miembros por A^{-1}

$$A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B$$

- Propiedad Asociativa: $(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$
- Por definición de matriz inversa: $I.X = A^{-1}.B$
- La matriz Identidad es el elemento neutro para producto de matrices: $X = A^{-1}.B$

EJEMPLOS:

$$\begin{cases} 2x+5y=19 \\ x+3y=11 \end{cases}$$

1)La matriz de los coeficientes es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) Como el determinante de A es distinto de cero, decimos que A es inversible. $|A| = 1$

3) La expresión matricial del sistema será: $A.X = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

4) La única solución del sistema será: $X = A^{-1}.B$

REGLA DE CRAMER: Si un sistema es Crameriano cada incógnita se puede calcular como un cociente de determinantes.

- El Dividendo es el determinante de la matriz que se obtiene al reemplazar en la matriz del sistema, los coeficientes de la incógnita que se quiere determinar por los términos independientes.
- El Divisor es el determinante de la matriz de los coeficientes o matriz del sistema

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 1 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1} = 3$$

El sistema es compatible determinado y la única n-úpla solución es: $S = \{(2,3)\}$

SISTEMAS HOMOGENEOS Y NO HOMOGENEOS.

Sistemas homogéneos: son aquellos en los cuales todos los términos independientes son simultáneamente nulos

$\forall i : b_i = 0$

Sistemas no homogéneos: son aquellos en los cuales todos los términos independientes no son simultáneamente nulos. Es decir, existe al menos un término independiente no nulo.

$\exists i / b_i \neq 0$