ÁLGEBRA

Licenciatura en Sistemas de Información- UNNE

<TRABAJO PRÁCTICO N°4: NÚMEROS NATURALES>

COMBINATORIA

ACTIVIDAD 4

- Para confeccionar un examen, se dispone de 3 problemas de Geometría, 4 de Combinatoria y 2 de Algebra. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse los problemas si los que corresponden a un mismo tema deben aparecer en forma consecutiva?

Se dispone en principio de :
Problemas de Geometría: G
Problemas de Combinatoria: C
Problemas de Algebra: A

Se sabe que los mismos deben aparecer en forma consecutiva, es decir que pueden estar dispuestos de las siguientes maneras:

$$\left.\begin{array}{ll} G, C, A & G, A, C \\ C, G, A & C, A, G \\ A, G, C & A, C, G \end{array}\right\} \quad P_3 = 3! = 6$$

ACTIVIDAD 4

- Para confeccionar un examen, se dispone de 3 problemas de Geometría, 4 de Combinatoria y 2 de Algebra. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse los problemas si los que corresponden a un mismo tema deben aparecer en forma consecutiva?

    - Ahora bien, en cada uno de los casos anteriores:

Los 3 problemas de geometría pueden ordenarse de 6 maneras diferentes $\boldsymbol{P_3} = \mathbf{3!} = 6$

Los 4 problemas de combinatoria pueden ordenarse de 24 maneras diferentes $\boldsymbol{P_4} = \mathbf{4!} = \mathbf{24}$

Los dos problemas de Álgebra pueden ordenarse de dos maneras diferentes $\boldsymbol{P_2} = \mathbf{2!} = 2$

Por lo tanto los problemas pueden ordenarse de 1728 maneras diferentes pues:
$\boldsymbol{P_3 \,.\, (P_3 \,.\, P_4 \,.\, P_2)} = \mathbf{3!.\, 3!.\, 4!.\, 2! = 1.728}\ \boldsymbol{maneras\ distintas}.$

ACTIVIDAD 7

- Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos terminan en 32? ¿Cuántos son divisibles por 5?

En este caso, tenemos 5 dígitos, de los cuales, debemos tomar 3, para formar números de 3 cifras distintas.

$123 \neq 321$, por ejemplo.

Entonces, a pesar de tener los mismos dígitos, si cambia el orden de los mismos, cambia el número.

De esta manera entonces, podemos obtener los números de tres cifras distintas considerando un Arreglo simple de 5 elementos, tomados de a 3. Esto es:

$$A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

Así, son 60 los números de tres cifras distintas que pueden formarse.

ACTIVIDAD 7

- Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos terminan en 32? ¿Cuántos son divisibles por 5?

Por otro lado, tenemos que ver los que son pares. Es decir, de estos números de tres cifras, debemos seleccionar aquellos que terminen en 2 o en 4.

Veamos primero los que terminan en 2. Si fijamos este número, nos quedan 2 lugares para 4 de los otros dígitos:

_ _ 2 (en esos dos lugares pueden ir el 1, 3, 4 o 5)

Entonces, para hallarlos debemos considerar un **Arreglo simple de 4 elementos, tomados de a 2.**

$$A_2^4$$

ACTIVIDAD 7

- Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos terminan en 32? ¿Cuántos son divisibles por 5?

Lo mismo sucederá, si fijamos el 4: _ _ 4 (en esos dos lugares pueden ir el 1, 2, 3 o 5)

También se necesitará realizar un **Arreglo simple de 4 elementos, tomados de a 2.** A_2^4

Entonces, al sumar ambos obtendremos el total de números pares. Esto es:

$$A_2^4 + A_2^4 = 2.A_2^4 = 2.\frac{4!}{(4-2)!} = 2.\frac{4!}{2!} = 2.\frac{24}{2} = 24$$

En total, son 24 números pares.

ACTIVIDAD 7

Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos terminan en 32? ¿Cuántos son divisibles por 5?

- Para ver ahora cuántos terminan en 32, debemos fijar estas dos últimas cifras, de manera que nos queda un único lugar posible para el resto de los dígitos:

  _32 (en ese lugar pueden ir el 1, 4 o 5)

  Entonces, es un **Arreglo simple de 3 elementos, tomados de a 1**:

$$A_1^3 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

  Por lo tanto, son 3 números los que terminarán en 32.

ACTIVIDAD 7

Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse? ¿Cuántos son pares? ¿Cuántos terminan en 32? ¿Cuántos son divisibles por 5?

- Ahora, para que sean divisibles por 5, deben terminar con el dígito 5.

Esto es: _ _ 5 (en ese lugar pueden ir el 1, 2, 3 o 4)

De esta forma, nos quedan 2 lugares posibles, para 4 dígitos.

Esto es un Arreglo simple de 4 elementos, tomados de a 2.

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

Entonces, son 12 números los que son divisibles por 5.

ACTIVIDAD 8

Con 22 consonantes y 5 vocales:

a) ¿Cuántas palabras distintas de cinco letras (sin que se repitan letras) con o sin sentido se pueden formar?
b) ¿En cuántas de las palabras del ítem a) la letra central es una vocal?
c) ¿Cuántas de las palabras del ítem a) se forman con 3 consonantes y 2 vocales?

a) Debemos formar palabras distintas de 5 letras. No podemos repetir letras. No necesariamente las palabras que resulten deben tener sentido.

¿De cuántas letras disponemos para formar palabras? 27 letras (22 consonantes y 5 vocales)

¿Cuántas letras vamos a utilizar en cada palabra? 5 letras

¿Importa el orden en que aparecen las letras en una palabra? Sí importa el orden, ya que se obtienen palabras distintas

Son 27 elementos en total (letras, contando vocales y consonantes).

Debemos formar palabras de 5 letras distintas, en las que importa el orden en el que estén (y no importa si tienen sentido o no).

Se tratará de un Arreglo Simple de 27 elementos, tomados de a 5.

$$A_5^{27} = \frac{27!}{(27-5)!} = \frac{27!}{22!} = 9.687.600$$

b) ¿En cuántas de las palabras del ítem a) la letra central es una vocal?

$\_\,\_\,A\,\_\,\_ \qquad \_\,\_\,E\,\_\,\_ \qquad \_\,\_\,I\,\_\,\_ \qquad \_\,\_\,O\,\_\,\_ \qquad \_\,\_\,U\,\_\,\_$

_ _ A _ _   _ _ E _ _   _ _ I _ _   _ _ O _ _   _ _ U _ _

Por ejemplo, para el 1° caso en donde la letra central es la vocal A ¿cuántas palabras podré formar?

¿De cuántas letras dispongo ahora? ¿Cuántas letras estoy tomando?

En este caso dispongo de 26 letras (ya que la A ya no la puedo volver a ocupar).

La cantidad de letras que estoy tomando en este caso es 4 (debido a que un lugar ya lo tengo ocupado por la letra A)

Son 26 elementos en total (letras, contando 4 vocales y 22 consonantes). Se trata de un Arreglo Simple de 26 elementos, tomados de a 4.

$$A_4^{26} = \frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = 358.800$$

Ahora bien, como lo desarrollado es para la vocal A, lo mismo sucede para las otras 4 vocales restantes. Por lo tanto, la cantidad de palabras del ítem a) en donde la letra central es una vocal, resulta del siguiente cálculo:

$$5.\, A_4^{26} = 5 \text{ x } 358.800 = 1.794.000$$

Observación:
Esta diapositiva tiene modificaciones respecto a la que se presenta en el video de la Clase.

c) ¿Cuántas de las palabras del ítem a) se forman con 3 consonantes y 2 vocales?

Podemos plantear lo siguiente: C C C V V

Pensemos ahora en 2 grupos distintos -vocales y consonantes- y ver cuántos grupos puedo formar con ambos.

Observemos que en el grupo de las consonantes tengo 22 elementos y los tomo de a 3 y en el grupo de las vocales tengo 5 elementos y los tomo de a 2

Como estoy pensando en los grupos que puedo formar de esta manera (y no todavía en las palabras) podemos pensar en realizar 2 combinatorias ya que hasta el momento no nos importa el orden.

La cantidad de grupos que puedo formar con 3 consonantes y 2 vocales es el producto de ambas combinatorias, es decir: $C_3^{22}.C_2^5 = 1540 \text{ x } 10 = 15.400$

Cada uno de estos grupos tiene 5 elementos (letras), pero no estamos considerando como casos distintos si varían su orden.

Podemos pensar ¿cuántas palabras se pueden formar con cada uno de estos grupos? Esto se corresponde a pensar, para cada grupo, un Arreglo Simple de 5 elementos tomados de a 5. $A_5^5 = 120$

Luego multiplicando esta cantidad por cada grupo, se determina la cantidad posible de palabras con 3 consonantes y 2 vocales:

$$A_5^5.C_3^{22}.C_2^5 = 120 \text{ x } 15.400 = 1.848.000$$

ACTIVIDAD 11

Entre 12 hombres y 8 mujeres debe elegirse una delegación de 5 personas.

- ¿de cuántas maneras se puede formar la delegación?
- ¿de cuántas maneras se puede formar si dos personas determinadas deben estar siempre en la delegación?
- ¿De cuántas maneras se puede formar si en la delegación deben haber 3 hombres y dos mujeres?
- ¿De cuántas maneras se puede formar si en la delegación deben haber por lo menos 3 hombres y 1 mujer?
- ¿De cuántas maneras se puede formar si en la delegación no pueden estar juntas 2 personas que sabemos que están enemistadas?
- ¿De cuántas maneras se puede formar la delegación si un hombre y una mujer (esposos) deben estar los dos o ninguno en la delegación?

ENTRE 12 HOMBRES Y 8 MUJERES DEBE ELEGIRSE UNA DELEGACIÓN DE 5 PERSONAS. A. ¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR LA DELEGACIÓN?

- En este caso, ¿importa el orden? ¿Habrá elementos repetidos?

En principio, vemos que para armar las combinaciones diferentes **no se consideran todos los elementos del conjunto,** porque en general n es menor que m y no se repiten los elementos

Hasta acá es lo mismo que los arreglos, pero la diferencia es que **No importa el orden.** En este caso, no importa decir primero esta persona o la otra, la Delegación es la misma.

- Entonces cómo se podría pensar?

En la delegación habrá 5 personas, para el primer lugar puedo elegir una persona entre 20 (12 hombres y 8 mujeres), para el segundo lugar ya me quedan 19, para la tercera 18, para la cuarta 17 y para la quinta 16.

ENTRE 12 HOMBRES Y 8 MUJERES DEBE ELEGIRSE UNA DELEGACIÓN DE 5 PERSONAS. A. ¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR LA DELEGACIÓN?

Por lo tanto, en principio, la cantidad de delegaciones diferentes que se podrían armar es: 20x19x18x17x16. Pero dentro de este grupo se cuentan comisiones como:

- Laura- Carlos- Juan- Melisa-Diego
- Carlos- Diego-Laura- Juan-Melisa
- Juan- Melisa-Diego-Carlos-Juan

Es decir que la misma delegación se cuenta más de una vez.

Entonces para calcular las combinaciones posibles de 20 personas tomadas de a 5 sin importar el orden podría calcular los arreglos como hicimos antes y lo divido por 5! porque es una forma de eliminar las formas distintas de ordenar cada agrupamiento de a 5 porque entre esos 5 no importa el orden.

ENTRE 12 HOMBRES Y 8 MUJERES DEBE ELEGIRSE UNA DELEGACIÓN DE 5 PERSONAS. A. ¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR LA DELEGACIÓN?

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$$

- También podemos calcular las **combinaciones** mediante **factoriales**: (Se puede escribir la fórmula anterior, y multiplicar lo que se pueda.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

- Usando cualquiera de los métodos descriptos anteriormente se tiene:
- $\frac{20.19.18.17}{5.4.3.2} = \boldsymbol{15.504\ maneras\ diferentes\ de\ armar\ la\ delegación}$

B. ¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR SI DOS PERSONAS DETERMINADAS DEBEN ESTAR SIEMPRE EN LA DELEGACIÓN?

- En este caso hay dos personas que ya están ubicadas en la delegación, por lo tanto, de las 20 personas quedan 18 de las cuales hay que elegir 3 para completar la delegación

$$C_3^{18} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \textbf{816 delegaciones diferentes}$$

- Luego, si dos personas determinadas deben estar en la delegación, se puede formar la delegación de 816 maneras diferentes

C. ¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR SI EN LA DELEGACIÓN DEBEN HABER 3 HOMBRES Y DOS MUJERES?

- ¿de cuántas maneras se pueden elegir los 3 hombres entre los 12?

$$C_3^{12} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = 220$$

En particular supongamos que en la delegación están Juan Carlos Pedro

- ¿de cuántas maneras se pueden elegir las dos mujeres entre las 8?

$$C_2^{8} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$$

Es decir, que para saber de cuántas maneras se puede formar la delegación si deben haber 3 hombres y dos mujeres, debe ser:

$$C_3^{12} . C_2^{8} = \frac{12!}{3!9!} . \frac{8!}{2!6!} = 220.28 = 6.160 \text{ delegaciones diferentes}$$

D. ¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR SI EN LA DELEGACIÓN DEBEN HABER POR LO MENOS 3 HOMBRES Y 1 MUJER?

Si en la delegación debe haber, por lo menos 3 hombres y una mujer, ¿cuáles serían los casos posibles?

- 3 hombres y 2 mujeres: $C_3^{12}.C_2^8 = \frac{12!}{3!9!}.\frac{8!}{2!6!}$= 220.28= 6.160 maneras diferentes

O bien,

- 4 hombres y 1 mujer$C_4^{12}.C_1^8 = \frac{12!}{4!8!}$.8= 495.8= 3.960 maneras diferentes

Luego : $C_3^{12}.C_2^8 + C_4^{12}.C_1^8$ =6.160+3.960= 10.120 maneras diferentes

E.¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR SI EN LA DELEGACIÓN NO PUEDEN ESTAR JUNTAS 2 PERSONAS QUE SABEMOS QUE ESTÁN ENEMISTADAS?

¿Cuáles serían las situaciones posibles?

- Puede suceder que sólo esté una de esas personas,

¿cuántas personas quedan para elegir?

$2.\,C_4^{18}$=2x 3.060=6.120 maneras diferentes

- O bien, puede suceder que no esté ninguna de ellas C_5^{18}= 8.568 maneras diferentes
- Luego: $2.\,C_4^{18}$+C_5^{18}=6.120+8.568=14.688 maneras posibles

Otra posibilidad sería restarle al total de delegaciones posibles el total de delegaciones en las que aparecen las dos personas
Es decir: $C_5^{20} - C_3^{18}$ =15.504-816= 14.688

F. ¿DE CUÁNTAS MANERAS SE PUEDE FORMAR LA DELEGACIÓN SI UN HOMBRE Y UNA MUJER (ESPOSOS) DEBEN ESTAR LOS DOS O NINGUNO EN LA DELEGACIÓN?

- **Delegaciones en las que están los dos:**C_3^{18}=816 delegaciones
- **Delegaciones en las que no está ninguno de ellos:** C_5^{18}= 8.568 delegaciones
- Luego, $C_3^{18} + C_5^{18}$=816+8.568= 9.384 maneras diferentes de formar una delegación

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA COMBINACIÓN SIMPLE SON:

- **Los elementos No se pueden repetir**
- **El orden No importa**
- **Para armar cada combinación se consideran menos elementos de los disponibles.**