UNIDAD: 2 RELACIONES DE RECURRENCIA

SUCESION: Una sucesion es una función que va de naturales en reales. Si va de naturales en enteros se llama sucesion entera.

$S: a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Los elementos a_1, a_2, a_3 son terminos de la sucesion.

× RELACIONES DE RECURRENCIA:
Hay series donde es posible conocer una expresion para el termino n-esimo, pero este no es una funcion explicita de n.

SUCESION DE FIBONACCI: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

CLASIFICACION:

LINEAL O NO LINEAL:
Una relación de recurrencia es lineal cuando cada termino aparece elevado a la primera potencia. Caso contrario es no lineal.

EJ:

$\begin{cases} a_1 = 5, \ n \geq 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3 \end{cases} \rightarrow$ LINEAL

$\begin{cases} a_1 = 4; \ n \geq 1 \\ a_n = a_{n-1}^2 + 1 \end{cases} \rightarrow$ NO LINEAL

COEFICIENTES CONSTANTES O VARIABLES:
Una ecuacion de recurrencia tiene coeficientes constantes cuando los coeficientes que acompañan cada termino en la expresion son constantes. Caso contrario, cuando al menos uno de los coeficientes es una funcion de n, se considera que la relación de recurrencia tiene coeficientes variables.

HOMOGENEA Ó NO HOMOGENEA:

Una relación de recurrencia es homogenea cuando la sucesión identicamente nula la satisface $a_n = 0$ para todo n satisface la relación. Caso contrario es no homogenea.

EJ:

$a_{n+1} = 5a_n, \; n \geq 0$	$a_{n+1} = 5a_n + n^2, \; n \geq 0$
* LINEAL	* NO LINEAL
* COEFICIENTES CONSTANTES	* COEFICIENTES VARIABLES
* PRIMER ORDEN	* PRIMER ORDEN
* HOMOGENEA	* NO HOMOGENEA

DE ORDEN K: indica cuantos terminos anteriores hay que conocer para obtener uno en particular.

$a_{n+1} - a_n^2 - 2n\, a_{n-1} + 5a_{n-2} = 0$

* NO LINEAL
* COEFICIENTES VARIABLES
* TERCER ORDEN
* HOMOGENEA

RELACION DE RECURRENCIA:

Ecuación donde para obtener el valor actual se depende de uno o más valores predecesores inmediatos a el.

UNIDAD 3: ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA:

Una ley de composición interna, definida en un conjunto no vacío A, consiste en una operación que asigna a cada par ordenado de elementos de A un único elemento de A. Esto significa que a cada objeto de $A \times A$ le corresponde un único elemento de A.

PROPIEDADES:

1) ASOCIATIVIDAD

$* : A^2 \to A$ es asociativa $\leftrightarrow (a*b)*c = a*(b*c), \forall a,b,c \in A$

2) CONMUTATIVA

$* : A^2 \to A$ es conmutativa $\leftrightarrow a*b = b*a, \forall a,b \in A$

3) EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO

cabe preguntarse si existe en el conjunto A un elemento e, que compuesto a izquierda y a derecha con cualquier otro no lo altere. Si este elemento existe se lo llama neutro o identidad respecto de la ley * de acuerdo con la siguiente definición:

$e \in A$ es neutro respecto $* \leftrightarrow \exists e \in A / \forall a \in A : a*e = e*a = a$

4) EXISTENCIA DE INVERSO O SIMETRICO

Sea * una ley interna de A, con elemento neutro e. Dado $a \in A$ interesa investigar si existe $a' \in A$, tal que compuesto a izquierda y a derecha con a de por resultado e. El elemento neutro del conjunto es relativo para todos. El inverso, si existe, es relativo a cada elemento.

$a' \in A$ es inverso de $a \in A$ respecto $* \Leftrightarrow \forall a \in A / a * a' = a' * a = e$

ESTRUCTURA ALGEBRAICA.

Una estructura algebraica es un objeto matemático consistente en un conjunto no vacío y una relación o ley de composición interna

Según sean las propiedades que deban satisfacer dichas leyes de composición, se tienen distintos tipos de estructuras algebraicas.

MONOIDE

El par $(A, +)$ donde A es no vacío, y + es una función, es un monoide si y solo si, + es una ley de composición interna en A.

SEMIGRUPO

El par $(A, +)$ donde A es no vacío, y + es una función, es un semigrupo, si y solo si, + es ley de composición interna y asociativa en A.

SEMIGRUPO CON UNIDAD

Si existe elemento neutro, se dice que el semigrupo tiene unidad.

GRUPO

Sea un conjunto no vacío G, y una función *; El par (G,*) es un grupo si y solo si * es una ley de composición interna en G, asociativa, con elemento neutro y tal que todo elemento G admite inverso de *.

GRUPO ABELIANO

Es un grupo que además es conmutativo

LEI EN A
+ ASOCIATIVO EN A
HAY ELEMENTO NEUTRO EN A PARA +
HAY ELEMENTO INVERSO EN A PARA +
+ ES CONMUTATIVA EN A

SEMIGRUPO

SEMIGRUPO CON UNIDAD

GRUPO

GRUPO ABELIANO

SUBGRUPO

El subconjunto no vacío H, del grupo G, es un subgrupo de (G,*), si y solo si, (H,*) es grupo.

Sea un conjunto G no vacío y H un subconjunto de G, con H no vacío, el grupo (H,*) es subgrupo de (G,*) si:

1) H contiene elemento neutro de G, $e \in H$.
2) * es cerrada en H, $\forall a,b \in H: a*b \in H$.
3) H contiene inverso, $\forall a \in H, \exists a' \in H / a*a' = a'*a = e$

ANILLO

Sea un conjunto no vacío A, y dos funciones + y *
La terna (A,+,*) es un anillo si y solo si:

1) (A,+) es grupo abeliano
2) (A,*) es semigrupo
3) El producto es distributivo a izquierda y derecha respecto la suma.

ANILLO CON UNIDAD:

si el anillo posee elemento neutro o identidad respecto del producto $*$, que denotamos con I, entonces se llamara anillo con identidad o unidad.

CUERPO:

Un anillo con unidad cuyos elementos no nulos son inversibles, es decir es un anillo de division, y que además es conmutativo, es un cuerpo.

UNIDAD 4: ALGEBRA DE BOOLE

DEFINICION:

Sea S un conjunto no vacío que contiene dos elementos especiales 0 (el cero o elemento neutro) y el 1 (o elemento unidad), sobre el cual definimos las operaciones binarias cerradas $+, *$ y una operación monaria $'$, entonces $\{S, +, *, ', 0, 1\}$ es algebra booleana si se cumplen los siguientes condiciones para todo $x, y, z \in B$

a) Leyes asociativas

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$
$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

b) Leyes conmutativas

$$x+y = y+x$$
$$x*y = y*x$$

c) Leyes distributivas

$$x*(y+z) = (x*y)+(x*z)$$
$$x+(y*z) = (x+y)*(x+z)$$

d) Leyes de identidad

$$x+0 = x$$
$$x*1 = x$$

e) Leyes de complementos

$$x+x' = 1$$
$$x*x' = 0$$

si B es un algebra booleana se escribe:

$$B = \{S, +, *, ', 0, 1\}$$

PRINCIPIO DE DUALIDAD:

El dual de una afirmación que incluye expresiones booleanas se obtiene sustituyendo todos los elementos por su opuesto. $+ \leftrightarrow *$

EJ: El dual de $(x+y)' = x'y'$ es $(x*y)' = x'+y'$

*Si dos expresiones booleanas son iguales sus duales también lo son.

FUNCION BOOLEANA:

Es una función matemática que toma uno o más valores de verdad como entrada y produce un único valor de verdad como salida.

DIAGRAMA DE KARNAUGH:

Un mapa de Karnaugh es un diagrama utilizado para la simplificación de funciones algebraicas en forma canónica. A partir de la tabla de Karnaugh se puede obtener una expresión simplificada.

*en un camino se pueden repetir aristas y vértices

ALGORITMO DE KRUSKAL: Integra al árbol generador mínimo las aristas de menor costo, procurando no formar ciclos.

UNIDAD 5: GRAFOS

DEFINICIÓN:

Un grafo G consiste en un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas tal que cada arista $e \in E$ se asocia con un par no ordenado de vértices.

VERTICES: Se indican por medio de un pequeño círculo y se les asigna un número o letra.

ARISTAS: Son las líneas que unen un vértice con otro y se les asigna una letra o número.

LADOS PARALELOS: Son aquellas aristas que tienen relación con un mismo par de vértices.

BUCLE: Es aquella arista que sale de un vértice y regresa al mismo vértice.

GRADO DE UN VERTICE: Es el número de lados que entran o salen de un vértice.

CAMINO:

Sean x, y vértices de un grafo no dirigido $G=(V,E)$. Un camino x-y en G es una sucesión alternada finita (Sin lazos).

*En un camino se pueden repetir aristas y vértices.

LONGITUD DEL CAMINO: La longitud del camino se describe como n, y el numero de aristas que hay en el camino.

CIRCUITOS:

Considerando un camino X-Y en un grafo no dirigido

RECORRIDO o TRAYECTORIA: si no se repite ninguna arista en el camino X-Y.

CIRCUITO: si dado un recorrido X-X es cerrado

CAMINO SIMPLE: cuando ningun vertice del camino se presenta más de una vez.

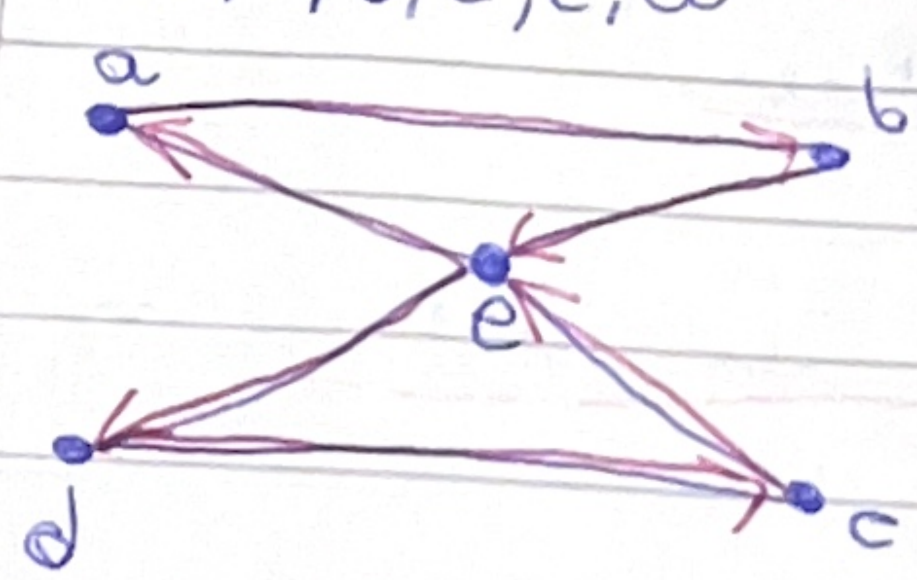
CICLO: si dado un camino X-X, este es cerrado.

CIRCUITO DE EULER: ciclo que recorre todos los vertices pasando por todas las aristas solo una vez.

CIRCUITO DE HAMILTON: circuito que visita cada vertice solo una vez, con excepcion del vertice inicial que tambien es el ultimo.

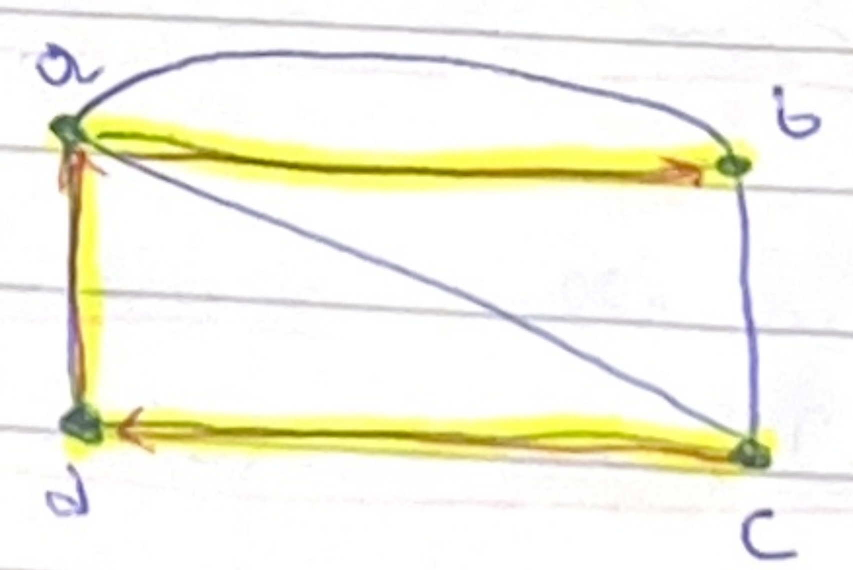
CIRCUITO EULERIANO

a, b, e, d, c, e, a



CIRCUITO HAMILNONIANO

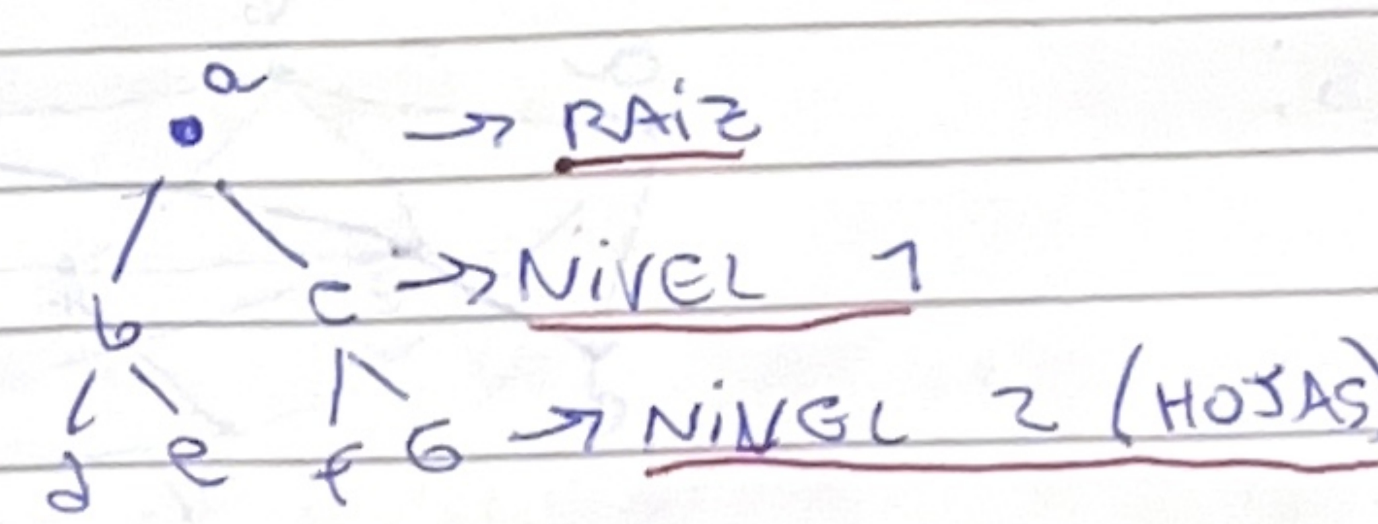
a, b, c, d, a



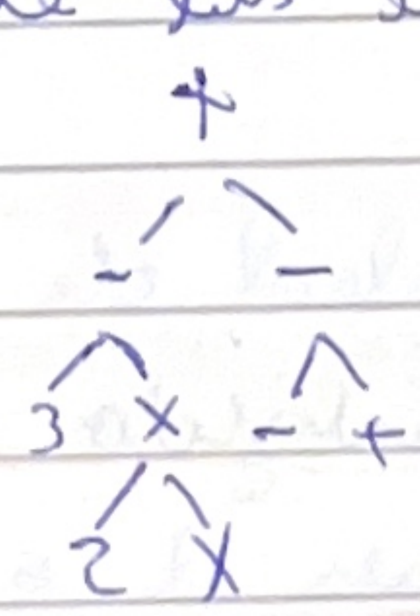
UNIDAD 6: ARBOLES

DEFINICION:
Un arbol es un grafo conexo que no tiene ciclos, lazos ni lados paralelos.

ARBOL CON RAIZ:
Todo nodo excepto la raiz esta vinculado a otro de mayor nivel que se llama padre, tambien cualquier nodo puede tener uno o más elementos relacionados en un nivel más bajo llamados hijos.
A los elementos que estan en la punta de la rama se llaman hojas.



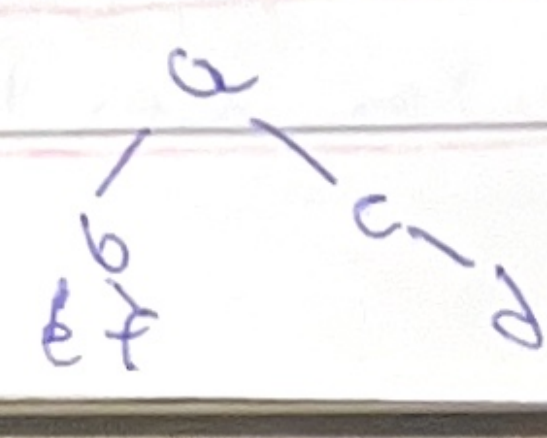
ARBOL ETIQUETADO:
Es util etiquetar los vertices o aristas de un digrafo para indicar su uso para un proposito.
Los conjuntos de vertices de los arboles no son importantes, sino que la utilidad del arbol se enfatiza mediante las etiquetas de los vertices.



$(3-(2*x))+(x-2)-(3+x)$

ARBOL BINARIO:
Arbol donde cada nodo tiene como maximo dos hijos, el nodo puede tener dos ramas, una o ninguna.

EJ:



ARBOL DE EXPANSION/GENERADOR:

Se obtiene a partir de la eliminación de aristas redundantes en un grafo conexo y sin ciclos, manteniendo todos sus vértices unidos.

Para obtener un arbol generador se pueden usar 2 metodos:

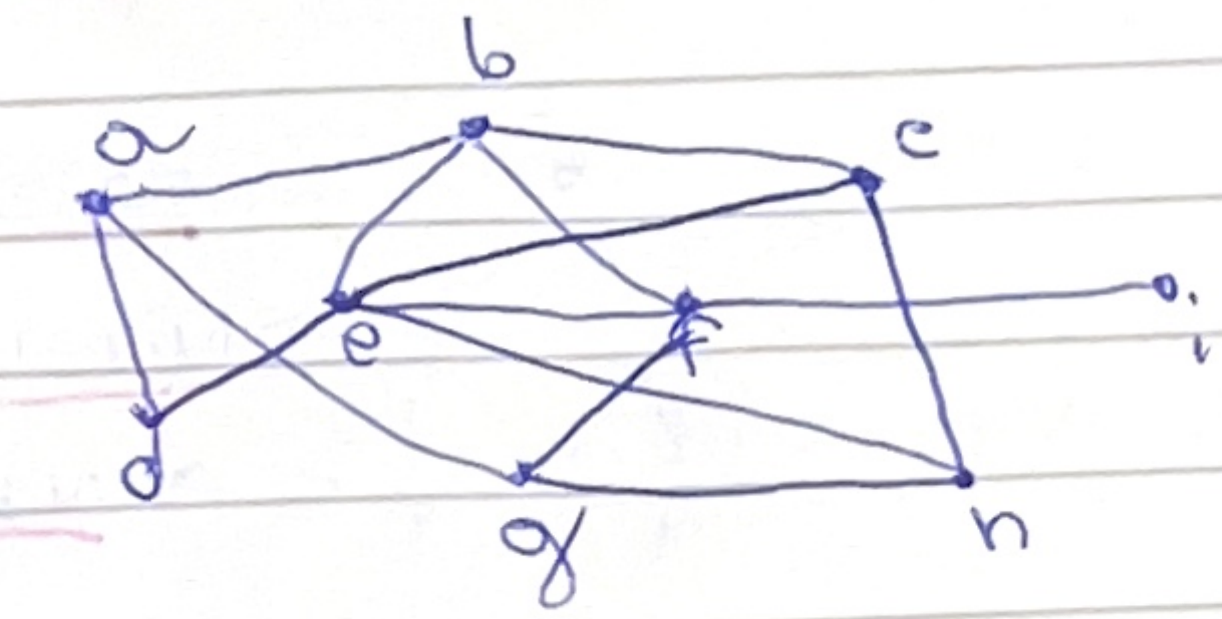
* Busqueda en profundidad:

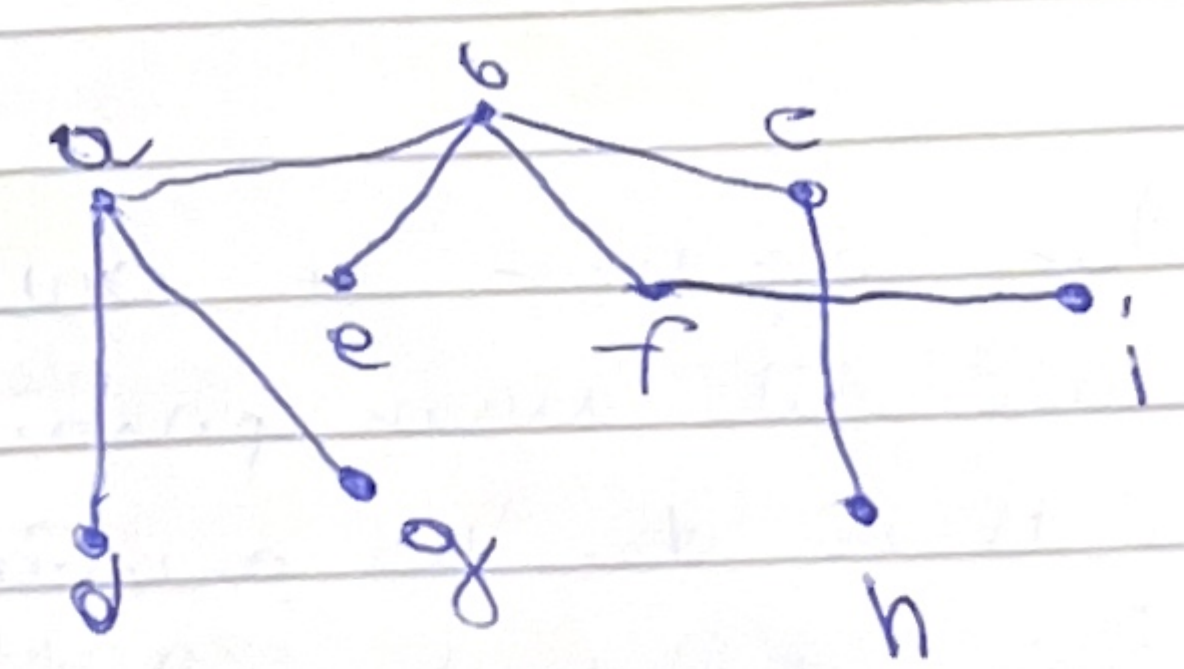
Se examinan todos los nodos primero a la izquierda hasta llegar al último nivel y luego derecha.

* Busqueda a lo ancho:

Se comienza buscando por nivel de izquierda a derecha.

EJ;





ARBOL DE EXPANSION MINIMA:

Dado un grafo ponderado, un arbol de expansion mínima es un arbol de expansion no dirigido para el cual el peso total de las aristas en el arbol sea el menor posible.

ALGORITMO DE PRIM: Se toma una arista de menor costo posible y se construye el arbol con aristas adyacentes con la misma propiedad

UNIDAD 7: LENGUAJES FORMALES Y MAQUINA DE ESTADO FINITO

DEFINICION DE LENGUAJES FORMALES:

Sea A un conjunto finito. Un lenguaje (formal) L sobre A es un subconjunto de A^*, el conjunto de todas las cadenas sobre A.

* Un lenguaje posee vocabulario y gramatica
* Vocabularios son los "bloques o signos" a partir de los cuales se construyen las cadenas del lenguaje.

ALFABETO:

Es un conjunto de simbolos finito distinto del vacío. Se lo representa por medio de Σ (SIGMA)

* Cadenas de simbolos o palabras: son las formadas con los simbolos del alfabeto, tiene un numero finito de simbolos.

GRAMATICAS:

La gramatica se define como el conjunto de reglas que permiten formar las palabras del lenguaje. Estas reglas se valen de producciones donde se involucran:

* SIMBOLOS TERMINALES: son los simbolos que forman las cadenas del lenguaje
* SIMBOLOS NO TERMINALES: son los simbolos auxiliares para la formación de las cadenas del lenguaje.

Una gramatica G consiste en:

a) un conjunto finito N de simbolos no terminales.
b) un conjunto finito T de simbolos terminales
c) un subconjunto P, llamado conjunto de producciones
d) un simbolo de inicio $\sigma \in N$.

se escribe $G = (N, T, P, \sigma)$

Una producción $(A,B) \in P$ suele escribirse $A \rightarrow B$

En la producción $A \rightarrow B$, $A \in (N \cup T)^* - T^*$ y $B \in (N \cup T)^*$; entonces, A debe incluir al menos un símbolo no terminal, mientras que B puede consistir en cualquier combinación de símbolos terminales y no terminales.

TIPOS DE GRAMATICAS: JERARQUIA DE CHOMSKY

Es una jerarquía de distintos tipos de gramaticas formales que generan lenguajes formales.
Sea G una gramatica y se λ la cadena nula.

GRAMATICA TIPO 0:

No se establecen restricciones sobre las producciones de G, son producciones de cualquier tipo.

$$BBaA \rightarrow aB \qquad BaaB \rightarrow bc \qquad CB \rightarrow a$$

GRAMATICA TIPO 1 (SENSIBLE AL CONTEXTO):

Son producciones que tienen a la izquierda símbolos terminales y no terminales y a la derecha símbolos terminales y no terminales, con la restricción de ser producciones del tipo $A \rightarrow B$ donde $\text{long}(A) \leq \text{long}(B)$.

$$aA \xrightarrow{\leq} aBBb \qquad AB \xrightarrow{\leq} Bbc \qquad CaB \xrightarrow{\leq} BacB$$

* La longitud de las cadenas no decrecen

GRAMATICA TIPO 2 (LIBRES DE CONTEXTO):

Son producciones que tienen a la izquierda solo un símbolo no terminal y a la derecha símbolos terminales y no terminales.

$$A \rightarrow aBBb \qquad B \rightarrow Bbc \qquad C \rightarrow BacB \qquad B \rightarrow BA$$

A → TERMINAL   a → NO TERMINAL

GRAMATICA TIPO 3 (REGULARES):

Son producciones que tienen a la izquierda solo un símbolo no terminal y a la derecha símbolos terminales, o a lo sumo un no terminal que se ubica a la derecha de la cadena.

$A \to a$ $B \to bc$ $C \to Ba$ $B \to Ab$

Los tipos de gramática en la jerarquía de Chomsky son abarcativos, es decir:

TIPO 3 ⊂ TIPO 2 ⊂ TIPO 1 ⊂ TIPO 0

FORMA DE BACKUS-NAUR (BNF):

Una manera alternativa para establecer la producción de una gramatica es la forma de Backus Naur. En la forma BNF, los símbolos no terminales suelen comenzar con "<" y terminar con ">". La producción $S \to T$ se escribe $S ::= T$, la "|" se lee como "o".

$\boxed{A \to BC \mid a}$ → PRODUCCIÓN LIBRE

$\boxed{\langle A\rangle ::= \langle B\rangle\langle C\rangle \mid a}$ → FORMA DE BACKUS-NAUR

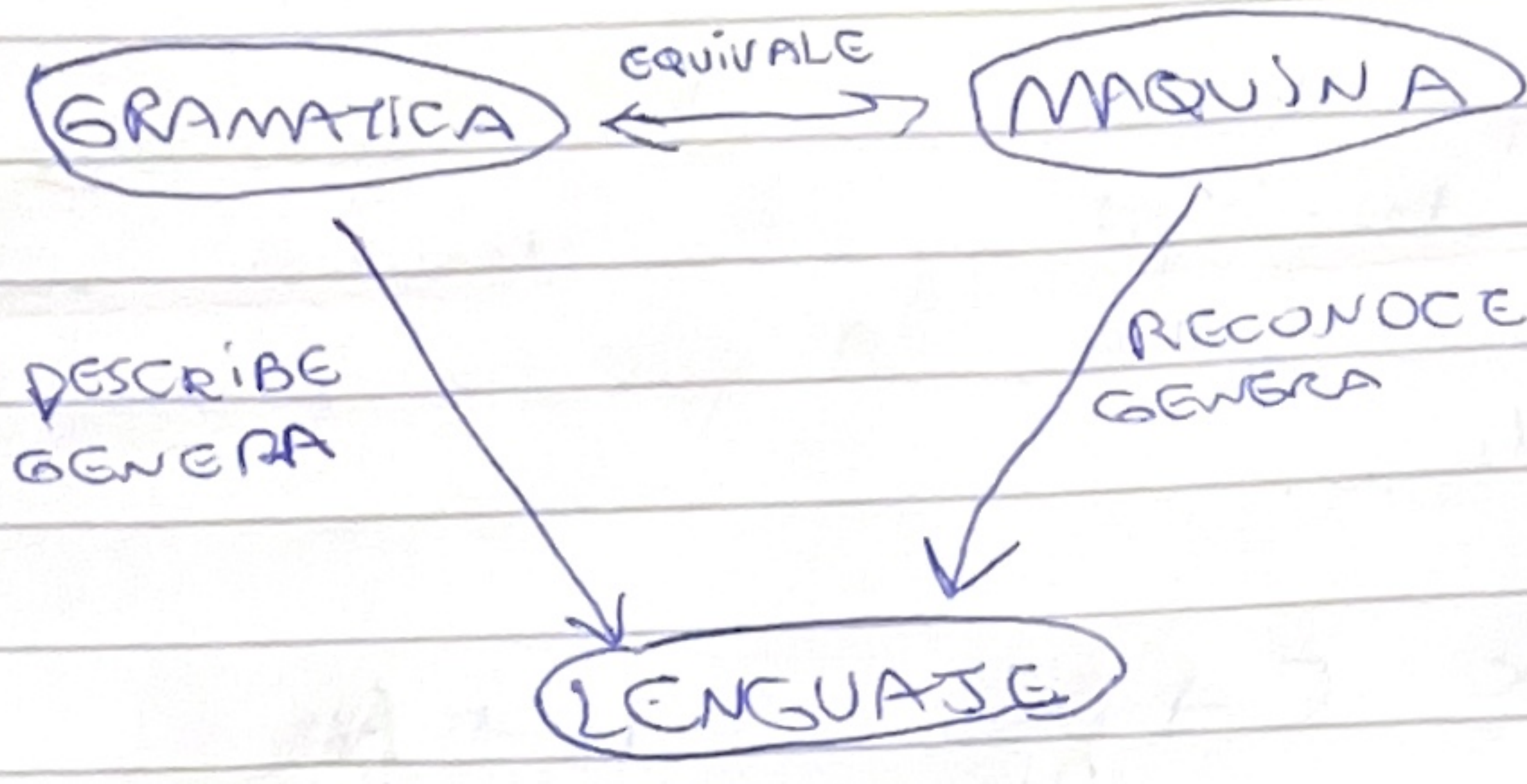
MEF

Una maquina de estado finito es una maquina capaz de entregar señales de salida en función de las señales de entrada y de "lo que sucedío antes".

Una maquina de estado finito consiste en:

a) Conjunto finito $\boxed{I}$, señales de $\boxed{\text{entrada}}$
b) conjunto finitos $\boxed{O}$, señales de $\boxed{\text{salida}}$
c) Conjunto finito $\boxed{S}$, conjunto de $\boxed{\text{estados}}$
d) $\boxed{S_0 \text{ estado inicial}}$
e) $\boxed{f}$ función de $\boxed{\text{Transición de estados}}$
f) $\boxed{G}$ función de $\boxed{\text{salida}}$

REPRESENTACION DE GRAMATICAS REGULARES EN AUTOMATAS:



GRAMATICAS REGULARES (TIPO 3) → L_3 → MEF-AEF

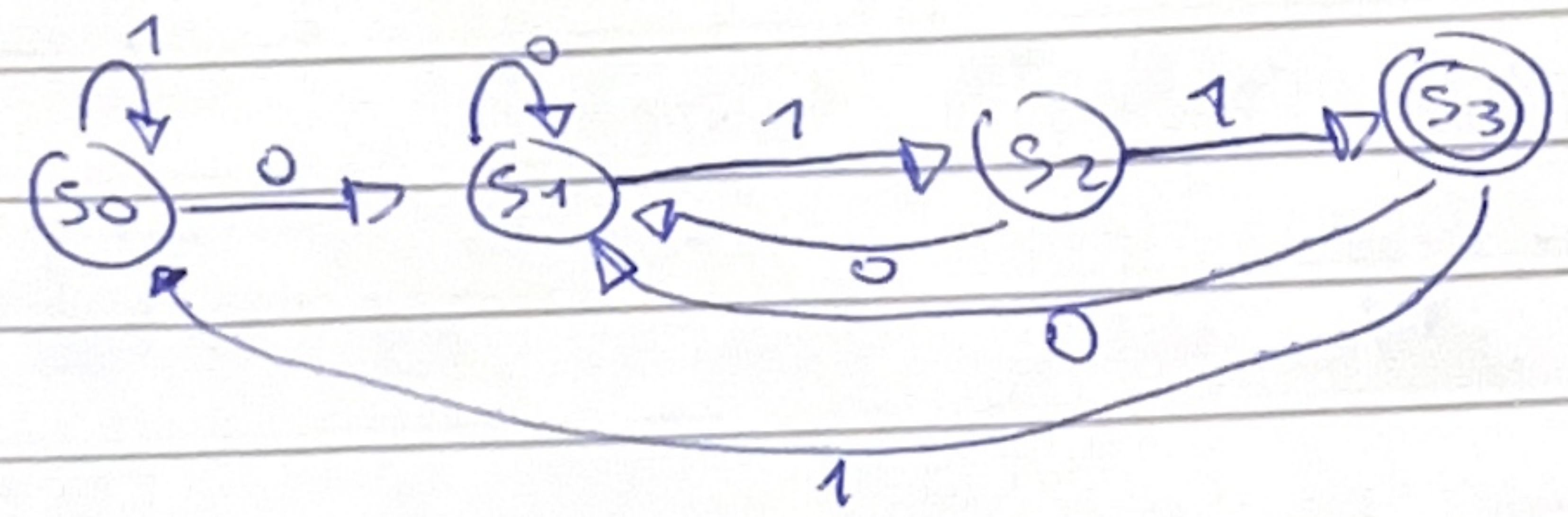
GRAMATICAS SENSIBLE AL CONTEXTO (TIPO 2) → L_2 → AUTOMATA DE PILA

GRAMATICAS LIBRES DE CONTEXTO (TIPO 1) → L_1 → AUTOMATAS A PILA

GRAMATICAS NO RESTRIGIDAS (TIPO 0) → L_0 → MAQUINAS DE TURING

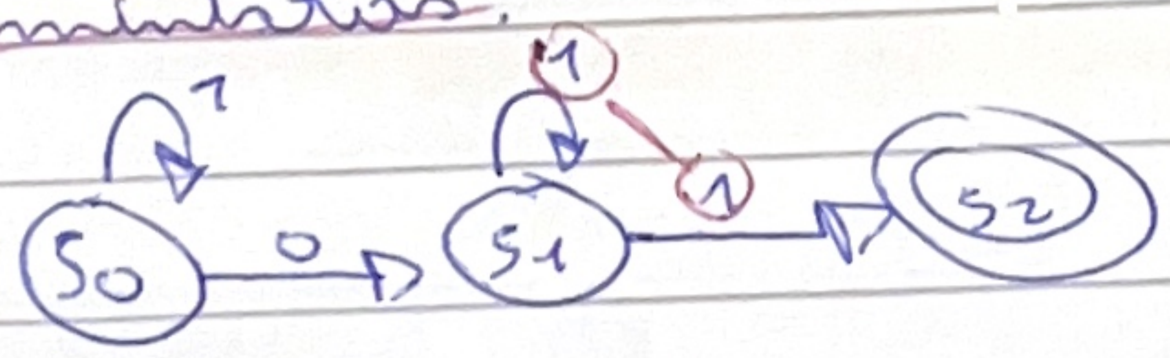
AUTOMATA DE ESTADO FINITO DETERMINISTA (AEFD):

Los automatas finitos cuyas funcias de transición asignan a cada par de estado y entrada un único estado siguiente, son conocidos como deterministas.



AUTOMATA DE ESTADO FINITO NO DETERMINISTA (AEFND):

Los automatas finitos que puedan asignar varios posibles estados siguientes a cada pareja de entrada y estado son conocidos como no deterministas.



ESTADO	ENTRADA		SALIDA
	0	1	
S_0	S_1	S_0	0
S_1	–	$\boxed{S_1, S_2}$	0
S_2	–	–	1