Lógica y Matemática Computacional
Licenciatura en Sistemas de Información

Grafos

Ing. JULIO C. ACOSTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE

Grafos

Definición

Vértices, lados, grados, bucles, caminos.

Circuitos

Circuitos eulerianos

Circuitos hamiltonianos

Caminos de longitud mínima

Matrices de adyacencia y grafos

Digrafos

REPÚBLICA DEL PARAGUAY
Río Paraná
Complejo Hidroeléctrico Yacyretá - Apipé
PROVINCIA DEL CHACO
PROVINCIA DE MISIONES
PROVINCIA DE SANTA FE
PCIA. DE ENTRE RÍOS
REPÚBLICA FEDERATIVA DEL BRASIL
REPÚBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY
Río Uruguay
Makallé
Pt. Tirol
RESISTENCIA
Barranqueras
Charadai
CORRIENTES
Paso de La Patria
Itatí
San Cosme
San Luis del Palmar
Riachuelo
El Sombrero
Herlitzka
Cerrudo Cué
Berón de Astrada
Itá Ibaté
Lomas de Vallejos
Ntra. Sra. del Rosario de Caá Catí
Loreto
Palmar Grande
Manantiales
Empedrado
Manuel Derqui
Mburucuyá
San Lorenzo
Saladas
Santa Rosa
Tabay
San Miguel
Colonia Madariaga
RESERVA NATURAL PROVINCIAL IBERÁ
Esteros del Iberá
Concepción
Uriburu
San Antonio
Ituzaingó
Encarnación
POSADAS
San Ignacio
Santa Ana
Oberá
Leandro N. Alem
San Carlos
San Javier
Apóstoles
Concepción de la Sierra
Playadito
Cnia. Liebig
Gdor. Ing. Valentín Virasoro
Garruchos
Garabí
Caza Pava
Lag. Galarza
Lag. de Luna
Santo Tomé
Puente Internacional de la Integración
São Borja
Cuay Grande
Lag. Iberá
Cnia. Carlos Pellegrini
Lag. Medina
Lag. Trin
Lag. Fernández
Lag. Itatí
Cnia. 3 de Abril
Bella Vista
San Roque
Pedro R. Fernández
Est. Manuel F. Mantilla
Tacuaritas
Cruz de los Milagros
9 de Julio
Est. Pueblo de Julio
Naranjito
Yuquerí
Santa Lucía
Gdor. Juan E. Martínez
Chavarría
Lavalle
Yataity Calle
Isabel Victoria
Reconquista
Goya
Pt. Goya
Felipe Yofré
Mercedes
San Gabriel
Est. Torrent
Palmitas
Alvear
Itaquí
La Cruz
San Salvador
Guaviraví
Yapeyú
Tapebicuá
Perugorría
Mariano I. Loza
Est. Justino Solari
Vera
San Isidro
Pago Redondo
Tres Bocas
Baibiene
Ombucito
Paso de los Libres
Puente Internacional Pres. G. Vargas - Pres. A. P. Justo
Uruguaiana
San Antonio
Bonpland
Curuzú Cuatiá
Cap. Joaquín Madariaga
Cazadores Correntinos
Acuña
Esquina
Sauce
Emilio R. Coni
Libertad
Cabred
Pedro Díaz Colodrero
Cañaditas
Libertador
Costa Brava
Guayquiraró
Monte Caseros
Labougle
Bella Unión
San José de Feliciano
Juan Pujol
Mocoretá
Embalse Salto Grande
San Javier
La Paz
Oeste de Greenwich
ESCALA GRÁFICA
0
50
100 Km
argentinaXplora.com

Sea ***V*** un conjunto finito no vacío

$$E \subseteq V \times V$$

$$G(V, E)$$

V: conjunto de vértices o nodos

E: conjunto de aristas

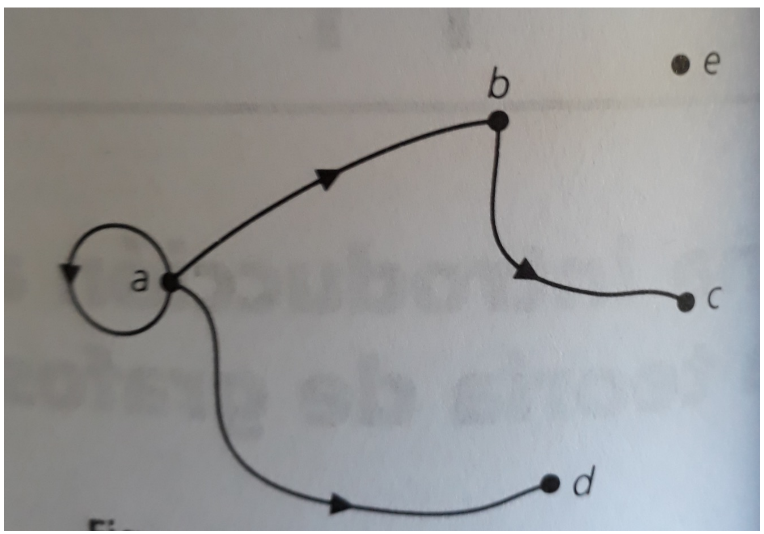


Figura 1

$V = \{ a, b, c, d, e \}$

$E = \{ (a,a), (a,b), (a,d), (b,c) \}$

GRAFO NO DIRIGIDO

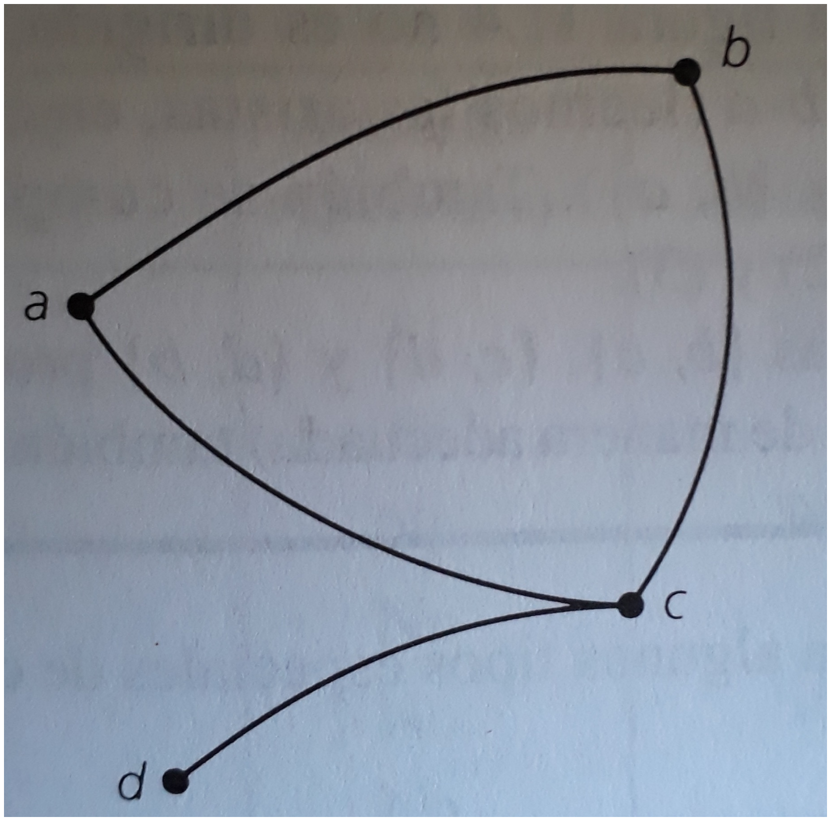


Figura 2

$V = \{ a, b, c, d \}$

$E = \{ (a,b), (b,a), (a,c), (c,a),$
$(b,c), (c,b), (c,d), (d,c) \}$

$E = \{ \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{c,d\} \}$

Camino

Sean x e y vértices (no necesariamente distintos) de un grafo no dirigido G=(V,E).

Un camino x - y en G es una sucesión alternada finita:

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \dots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$$

$$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}, e_n\}$$

Longitud del camino es el número de ***n*** aristas que hay en el camino

En un camino se pueden repetir aristas y vértices

Recorrido - Circuito

Si en el *camino* $x - y$ no se repite ninguna arista, el camino es un ***recorrido*** **o** ***trayectoria***

Un ***recorrido*** cerrado en el *camino* $x - x$ es un ***circuito***

Si ningún vértice en el *camino* $x - y$ se presenta mas de una vez, el camino es un ***camino simple***

Sea $G = (V, E)$; G es un **grafo conexo** si existe un ***camino simple*** entre cualquiera dos vértices distintos de G

En otro caso G es un grafo NO conexo

Grafo conexo

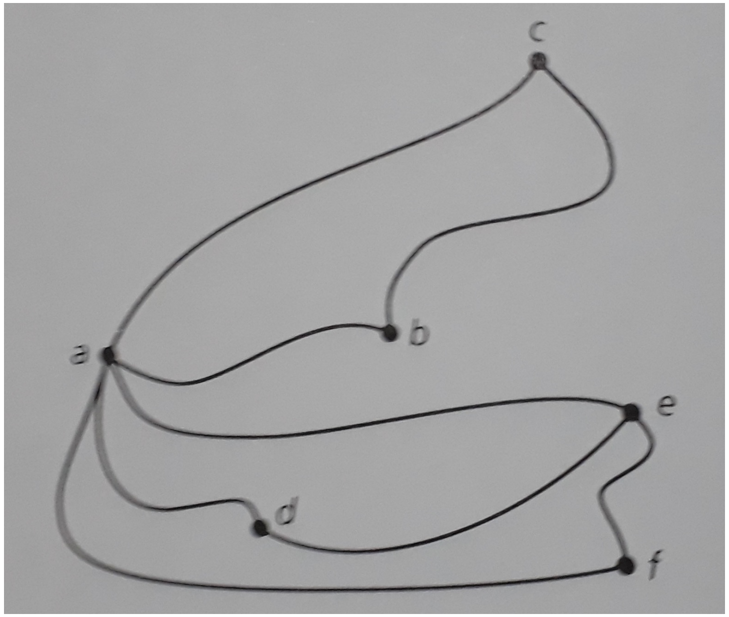


Figura 3

$\{a,b\} = e_1$ $\{a,f\} = e_5$
$\{a,c\} = e_2$ $\{b,c\} = e_6$
$\{a,d\} = e_3$ $\{d,e\} = e_7$
$\{a,e\} = e_4$ $\{e,f\} = e_8$

$$G = (V, E)$$

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

Grafo disconexo

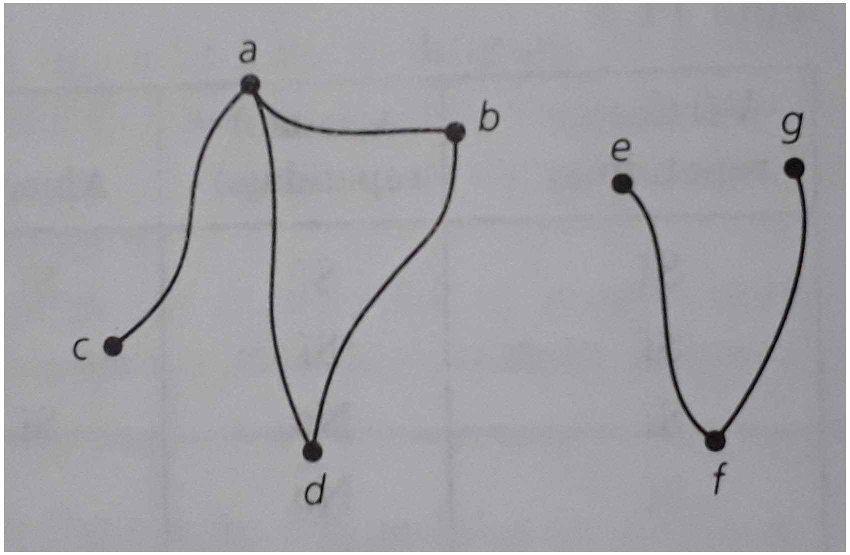


Figura 4

$$G = (V, E)$$

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$\{a, b\} = e_1 \quad \{b, d\} = e_4$

$\{a, c\} = e_2 \quad \{e, f\} = e_5$

$\{a, d\} = e_3 \quad \{f, g\} = e_6$

$$V_1 = \{a, b, c, d\}$$

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$V_2 = \{e, f, g\}$$

$$E_2 = \{e_5, e_6\}$$

$V_1 \neq \emptyset \quad V_2 \neq \emptyset$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_1 \cup V_2 = V$

$\exists\, x \in V_1 \wedge y \in V_2 / \nexists \{x, y\} \in E$

(b)

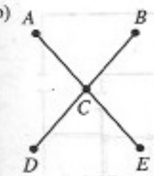


Figura 6.37

(a)

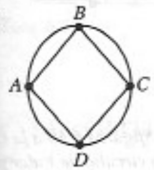


Figura 6.38

(b)

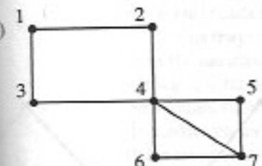


Figura 6.39

(a)

Figura 6.40

(b)

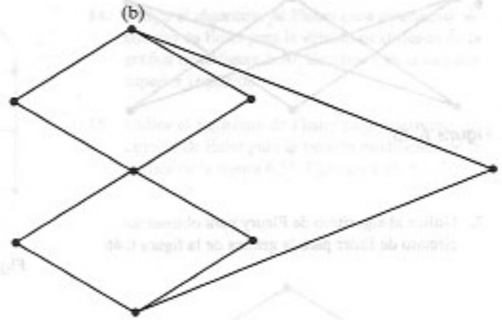


Figura 6.41

4. (a)

Figura 6.42

(b)

Figura 6.43

En los ejercicios 5 y 6, diga si es posible trazar la figura sin levantar el lápiz. Explique su razonamiento.

5.

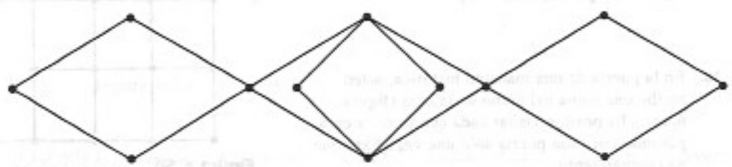
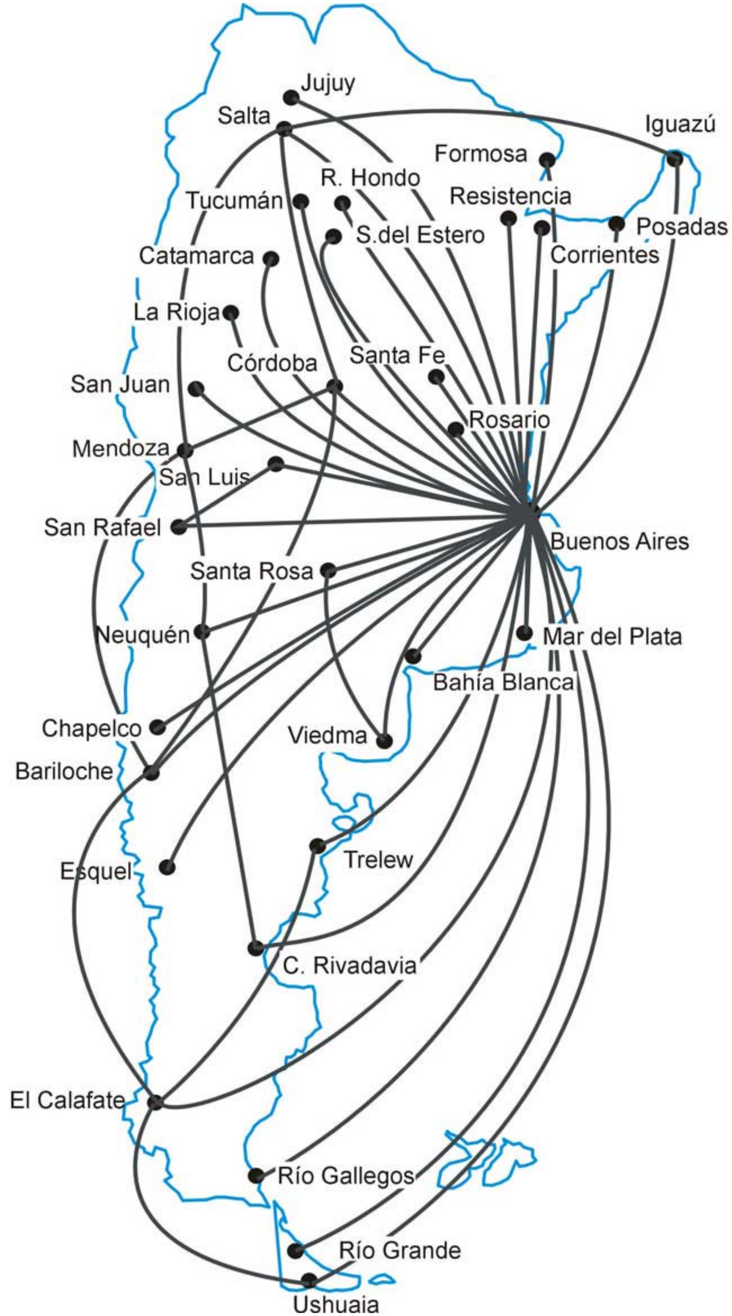
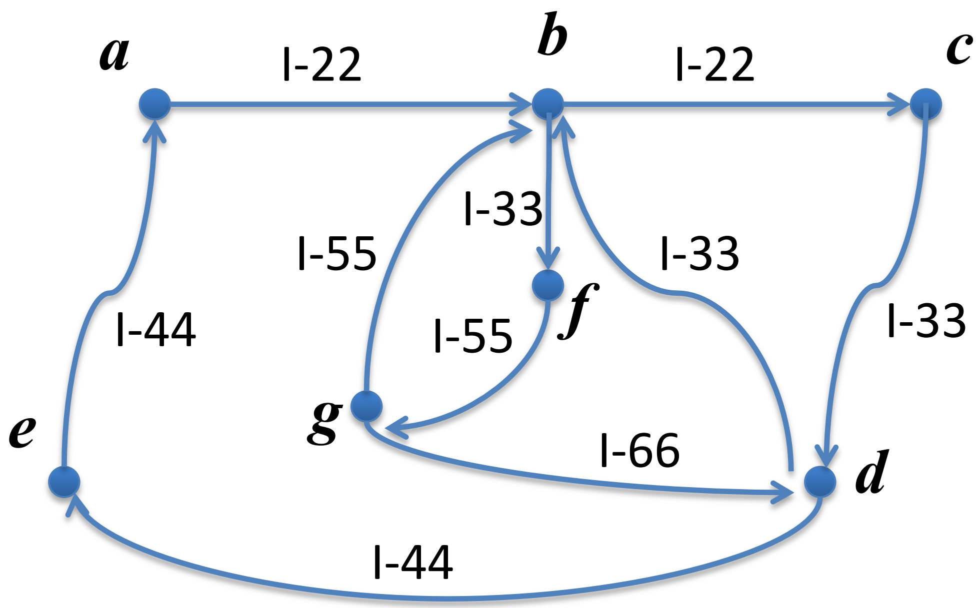


Figura 6.44

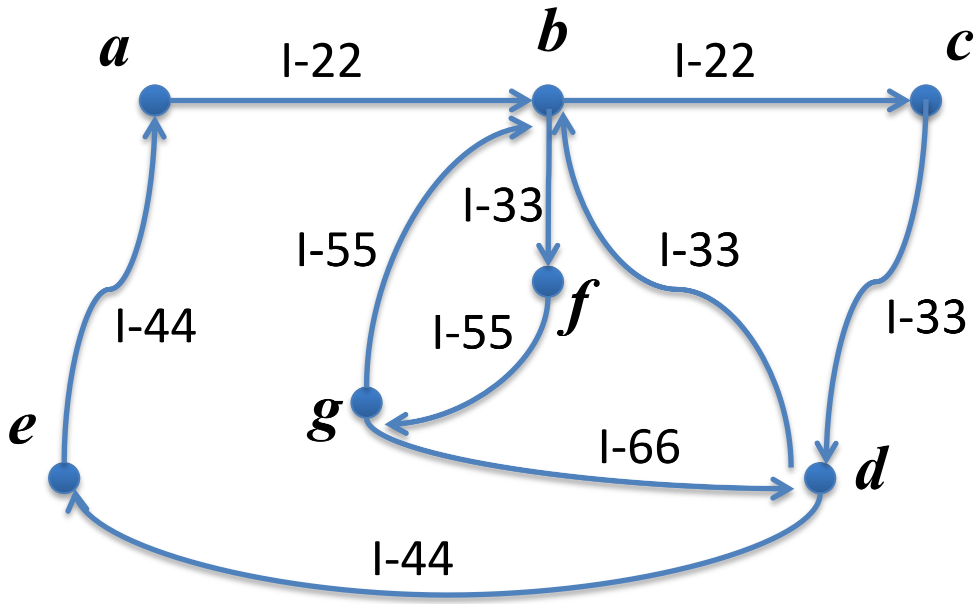

Jujuy
Salta
Iguazú
Formosa
R. Hondo
Tucumán
Resistencia
S.del Estero
Posadas
Corrientes
Catamarca
La Rioja
Córdoba
Santa Fe
San Juan
Rosario
Mendoza
San Luis
San Rafael
Buenos Aires
Santa Rosa
Neuquén
Mar del Plata
Bahía Blanca
Chapelco
Viedma
Bariloche
Trelew
Esquel
C. Rivadavia
El Calafate
Río Gallegos
Río Grande
Ushuaia

Ejemplo

Siete ciudades ***a, b, c, d, e, f*** y ***g*** están vinculadas por un sistema de conexiones: (1) I-22 va de ***a*** a ***c*** pasando por ***b***; (2) I-33 va de ***c*** a ***d*** luego pasa por ***b*** y continua a ***f***; (3) I-44 va de ***d*** por ***e*** hacia ***a***; (4) I-55 va de ***f*** a ***b*** pasando por ***g***; y (5) I-66 va de ***g*** a ***d***



a) Use los vértices para las ciudades y las aristas para las conexiones en un grafo dirigido



b) Enumere los caminos simples de g a a

$\{(g, d), (d, e), (e, a)\}$

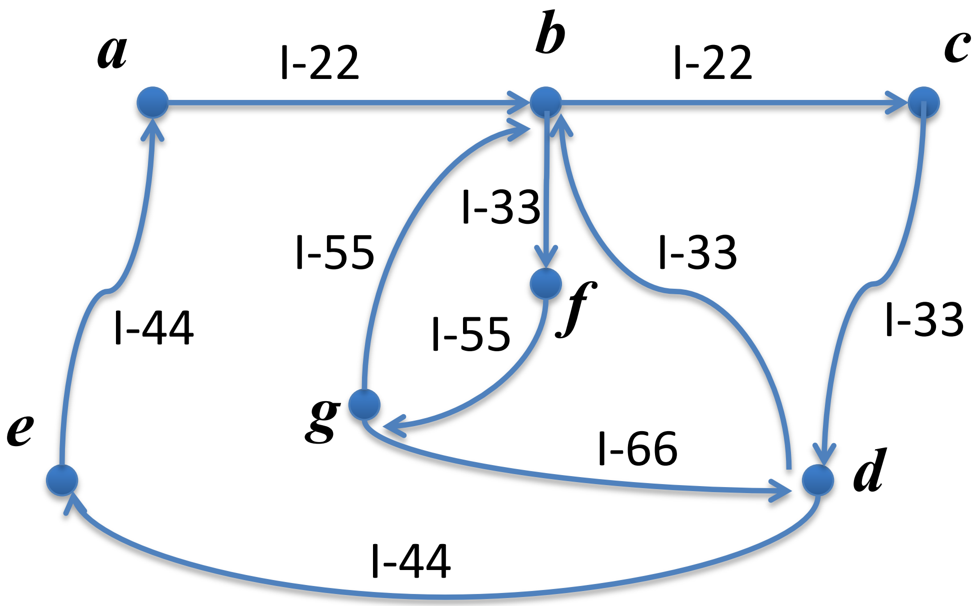
$\{(g, b), (b, c), (c, d), (d, e)\ (e, a)\}$

c) ¿Cuál es el menor número de segmentos que deben cerrarse para interrumpir el paso de b a d?

Dos: uno de cada uno de los siguientes caminos;

$\{(b, c), (c, d)\}$

$\{(b, f), (f, g), (g, d)\}$



d) ¿Es posible salir de la ciudad c y regresar a ella, visitando una sola vez las otras ciudades?

No

e) ¿Es posible salir de la ciudad c y visitar una sola vez las otras ciudades, sin regresar a c ?

Si $\{(c, d), (d, e)\ (e, a)\ (a, b), (b, f)\ (f, g)\}$

f) ¿Es posible salir de una ciudad y viajar por todas las autopistas una sola vez? (Se puede visitar alguna ciudad mas de una vez y no es necesario volver al inicio)

$\{(g, b), (b, f), (f, g), (g, d), (d, b), (b, c), (c, d)\ (d, e), (e, a), (a, b)\}$

Un grafo G = (*V*, *E*) es un multigrafo, si existen:

$$a, b \in V, \qquad a \neq b$$

Con dos o mas aristas (a, b) –para grafo dirigido-
$\{a, b\}$ –para grado no dirigido-

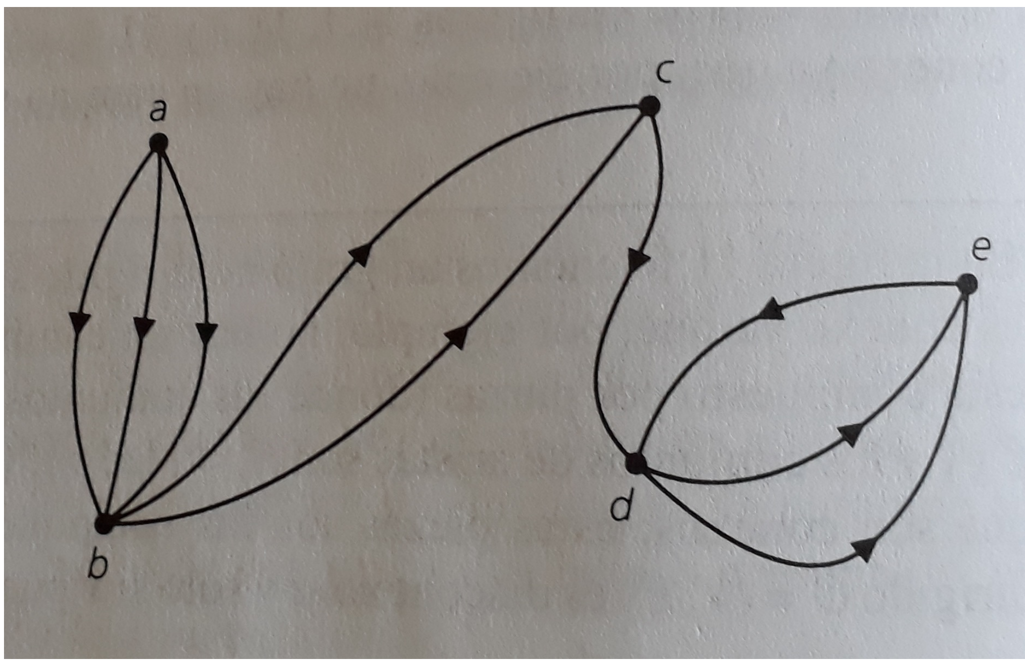


Figura 6

(a, b) tiene multiplicidad 3

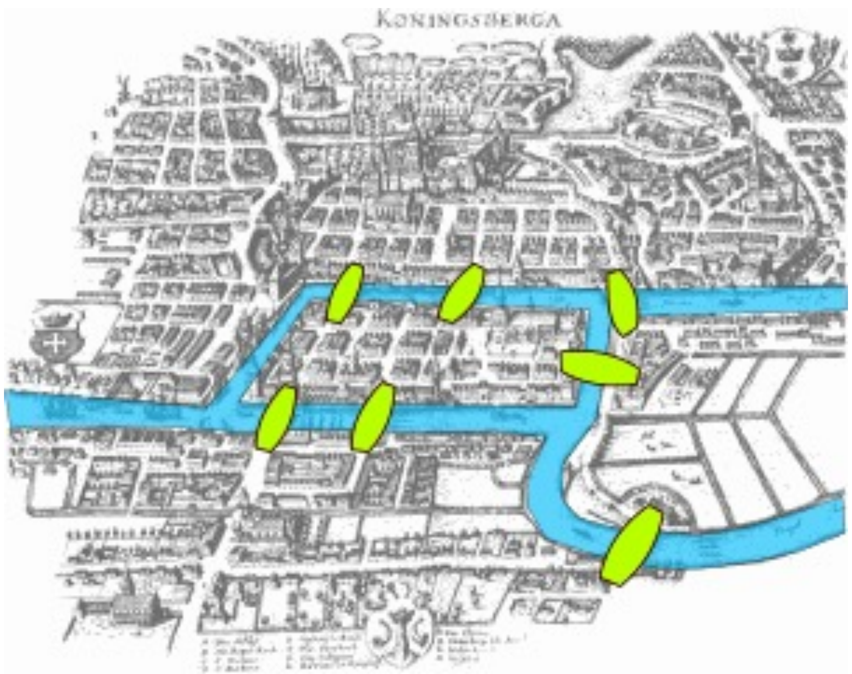
(b, c) tiene multiplicidad 2

(c, d) tiene multiplicidad 1

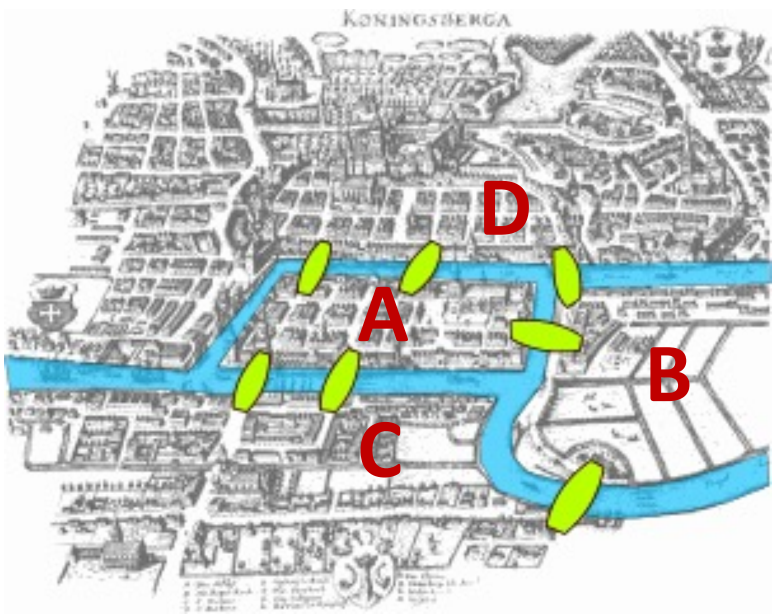
(d, e) tiene multiplicidad 2

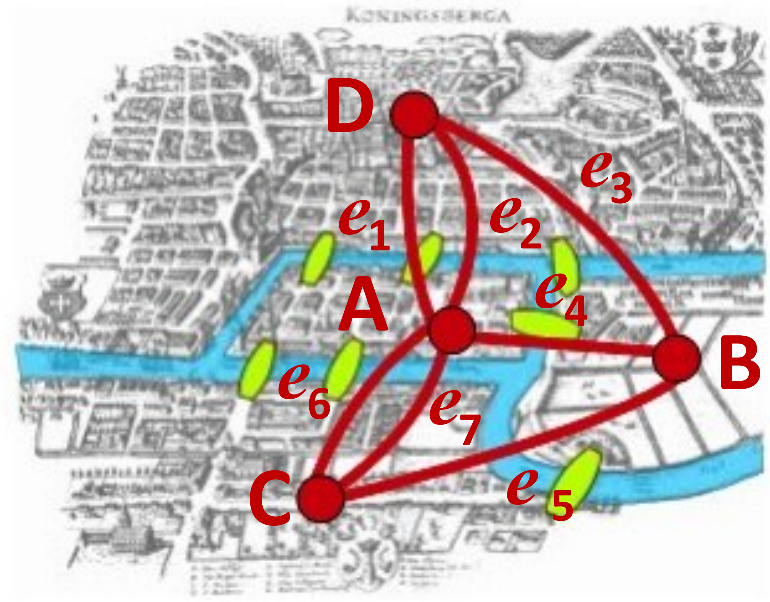
(e, d) tiene multiplicidad 1

PUENTES DE KÖNIGSBERG (hoy KALINGRADO)
EULER (1736)



PUENTES DE KÖNIGSBERG (hoy KALINGRADO)
EULER (1736)

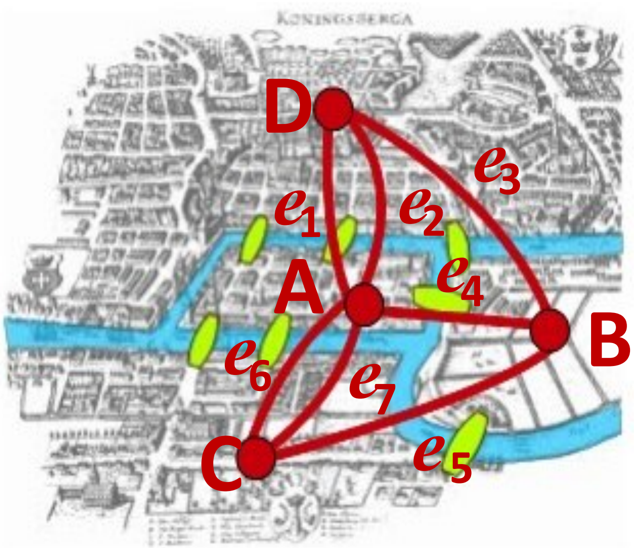




GRAFO: $G = (V, E)$

VERTICES: A, B, C, D

ARISTAS: $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$



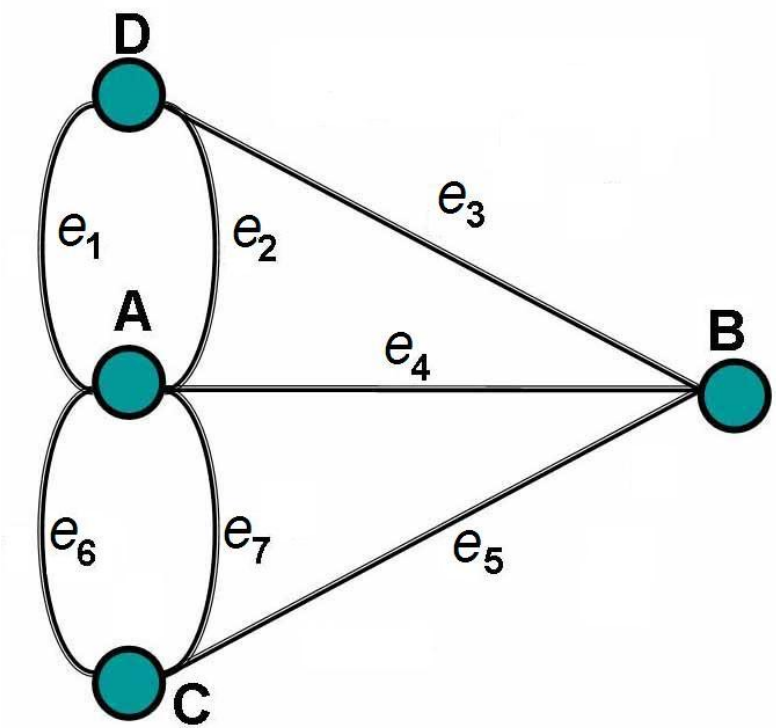
Si en un *camino* x - y no se repite ninguna arista, el camino es un ***recorrido*** **o** ***trayectoria***

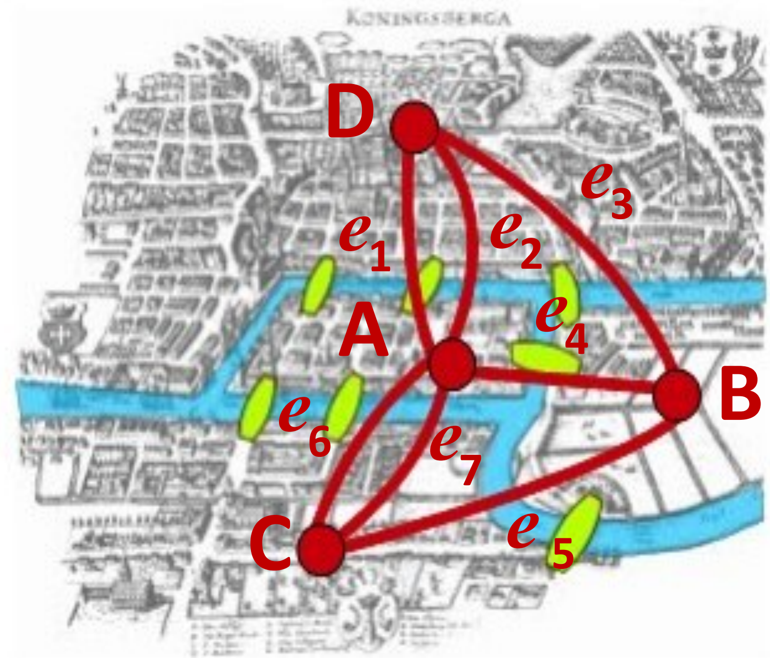
Si un un ***recorrido*** **o trayectoria abierto (de** a **a** b**)** pasa por todas las aristas (sin que se repitan), se llama ***recorrido euleriano***

Si existe en G un circuito que recorre cada arista solo una vez, se llama **circuito euleriano** **o** **circuito de euler**

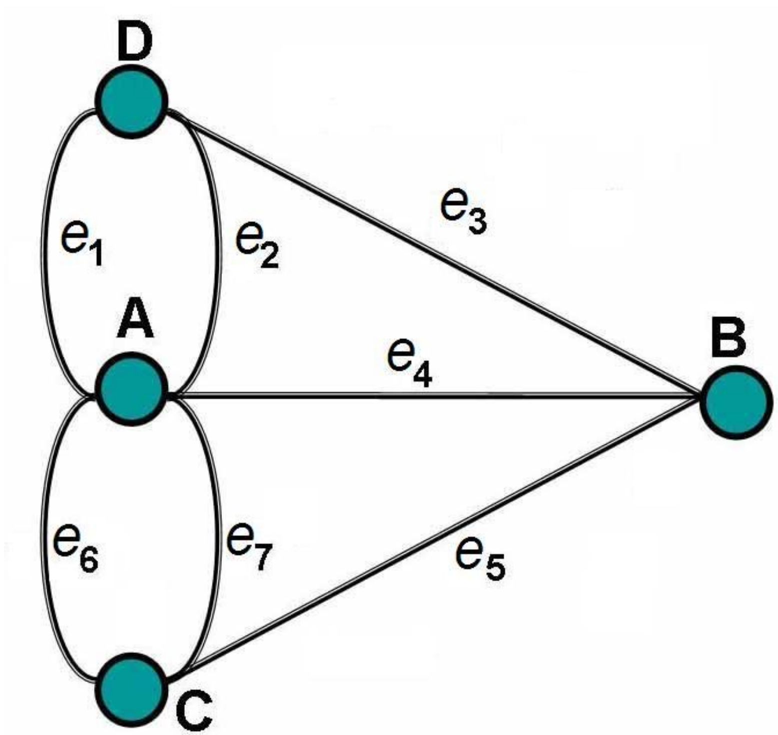
GRADO DE UN VERTICE es el número de aristas que concurren al mismo.

Si un vértice tiene solo un lazo, tiene grado 2





Considere si el problema de los puentes es un Circuito de Euler. Justifique



Si un vértice del grafo G tiene grado impar; **el Grafo no tiene Circuito de Euler**

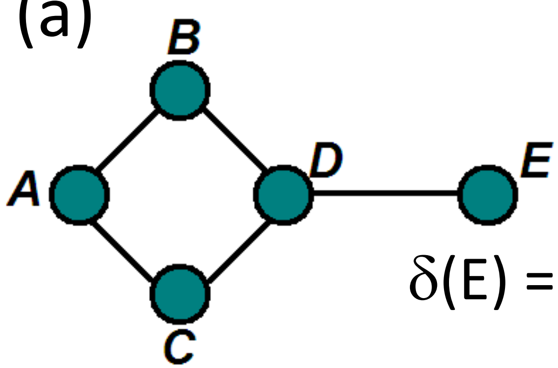
TEOREMAS DE LOS CIRCUITOS Y DE LAS TRAYECTORIAS DE EULER

Teorema 1 (de los circuitos)

(a) *Si un grafo G conexo y tiene un vértice de grado impar, entonces, no puede existir un Circuito de Euler en G*

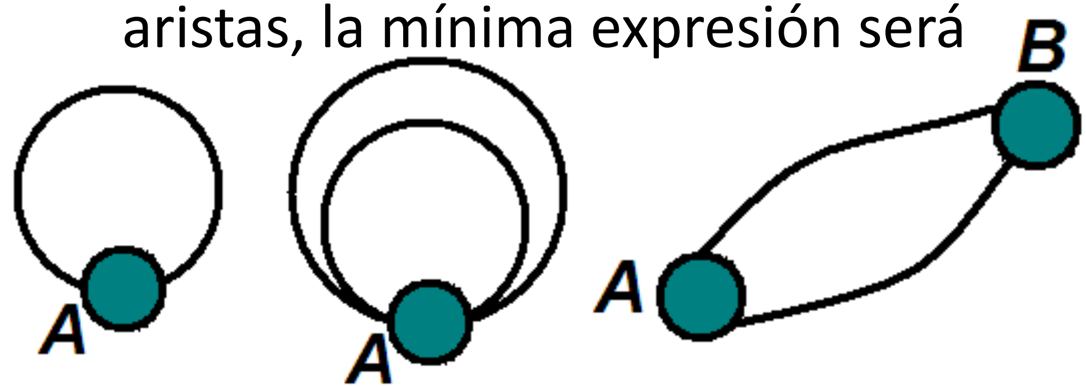
(b) *Si G es un grafo conexo y todos los vértices tienen grado par, entonces, existe un Circuito de Euler en G*

(a)



$\delta(E) = 1$

(b) Si G es conexo y tiene una o dos aristas, la mínima expresión será

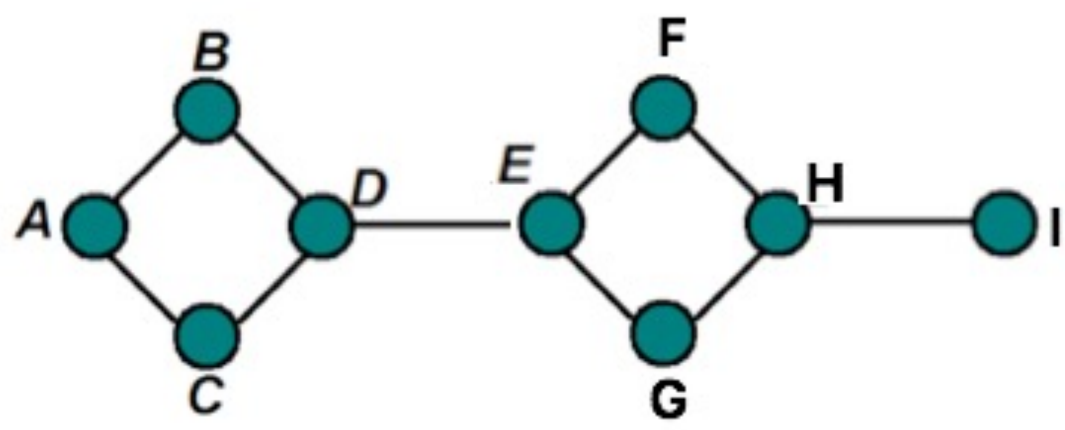


Por inducción, mientras los vértices que se agregan sean de grado par (y los existentes sigan siendo de grado par), seguirá existiendo Circuito de Euler

<u>Teorema 2</u> (de las trayectorias)

(a) *Si un grafo G tiene mas de dos vértices de grado impar, entonces no puede existir una trayectoria de Euler*

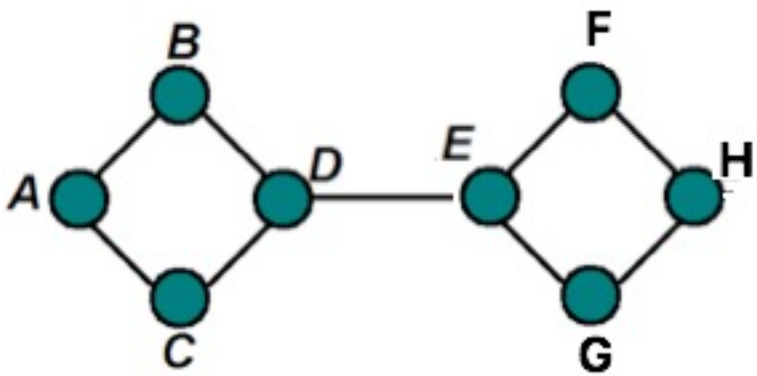
Sean V_1; V_2; $V_{3;}$ … vértices de grado impar. Cualquier trayectoria de Euler debe salir (o llegar) a cada uno de los vértices, sin poder regresar (o salir) de ellos ya que tienen grado impar.



Analice cualquier trayectoria

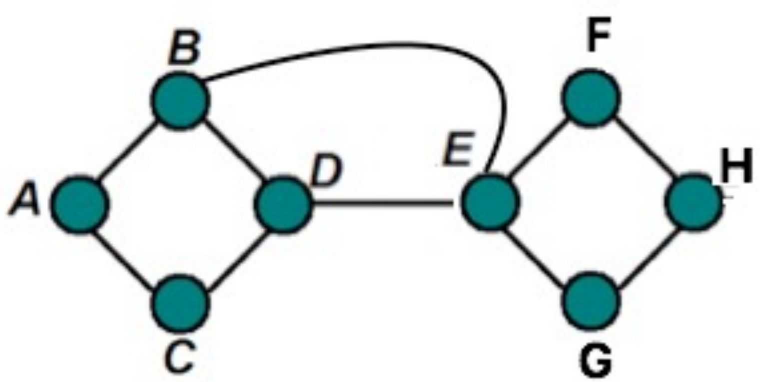
Uno de estos vértices V_1; V_2; $V_{3;}$ … de grado impar podría ser el comienzo de la trayectoria de Euler y otro el final; pero los demás vértices quedarán sin una trayectoria sin recorrer.

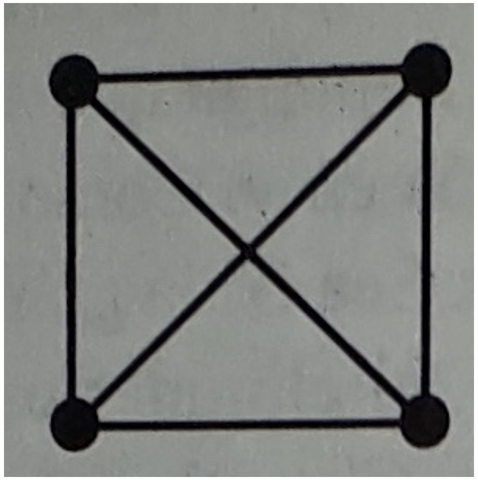
(b) *Si G es conexo y tiene dos vértices de grado impar, entonces existe una trayectoria de Euler en G, que debe empezar en uno de los vértices de grado impar y terminar en el otro.*

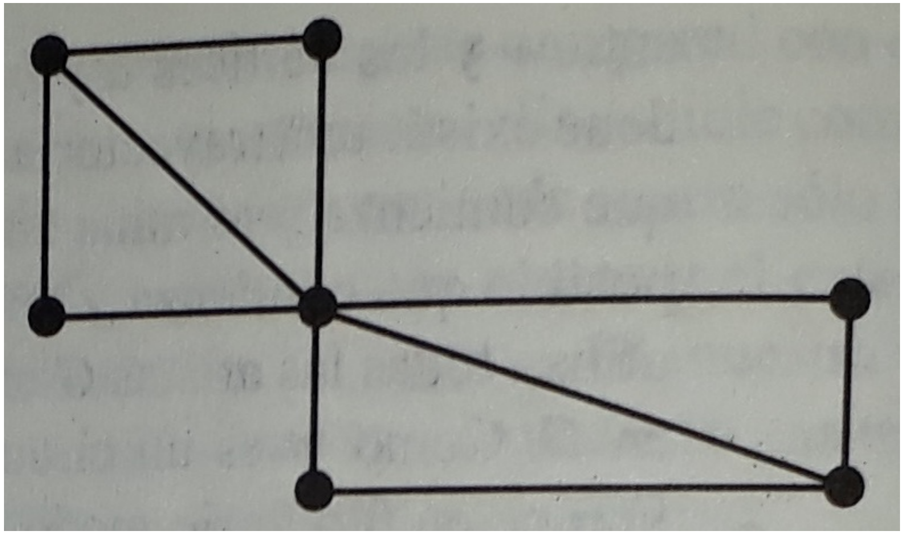


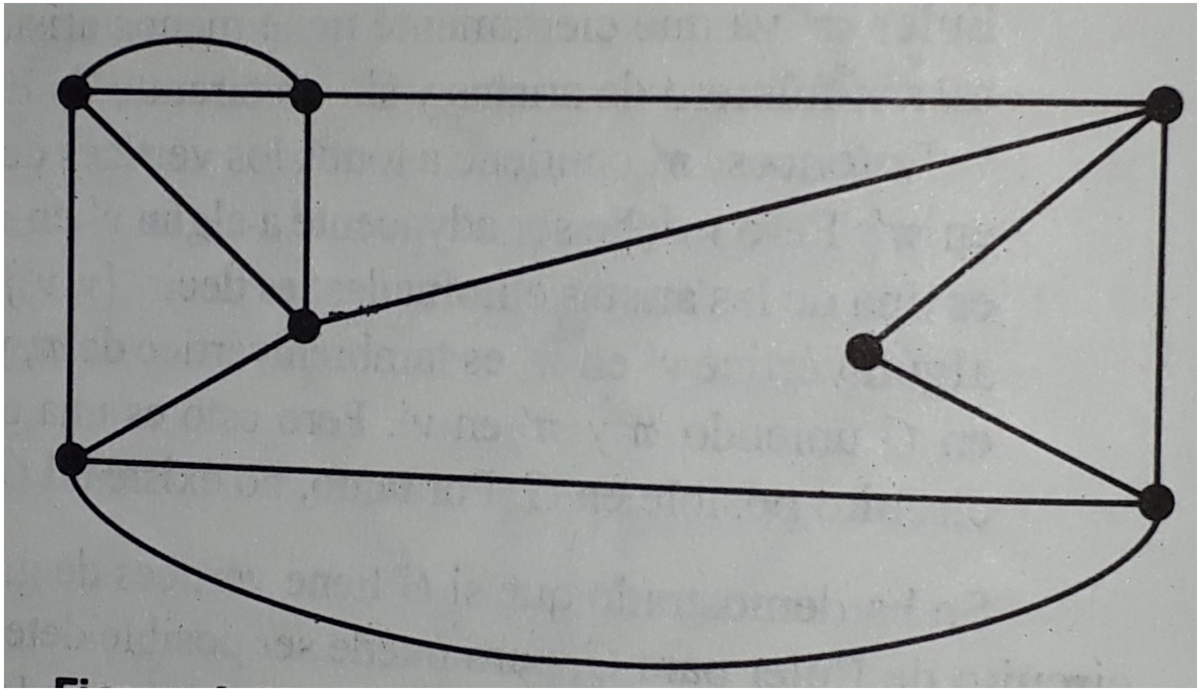
Analice la trayectoria

D, B, A, C, D, E, F, H, G, **E**



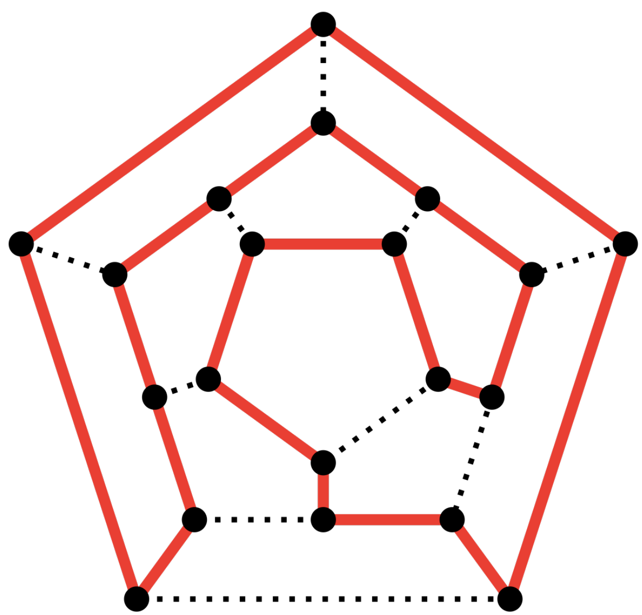


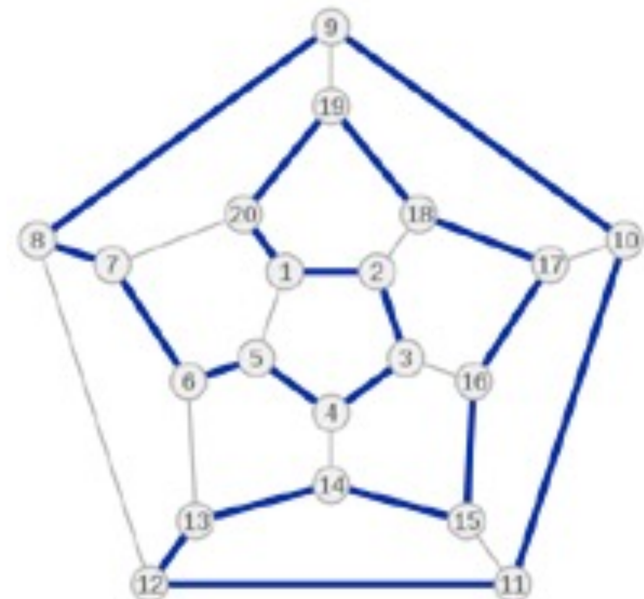




CICLOS HAMILTONIANOS

Trayectoria hamiltoniana es una trayectoria que visita cada vértice solo una vez, con excepción del vértice inicial que puede ser también el último.

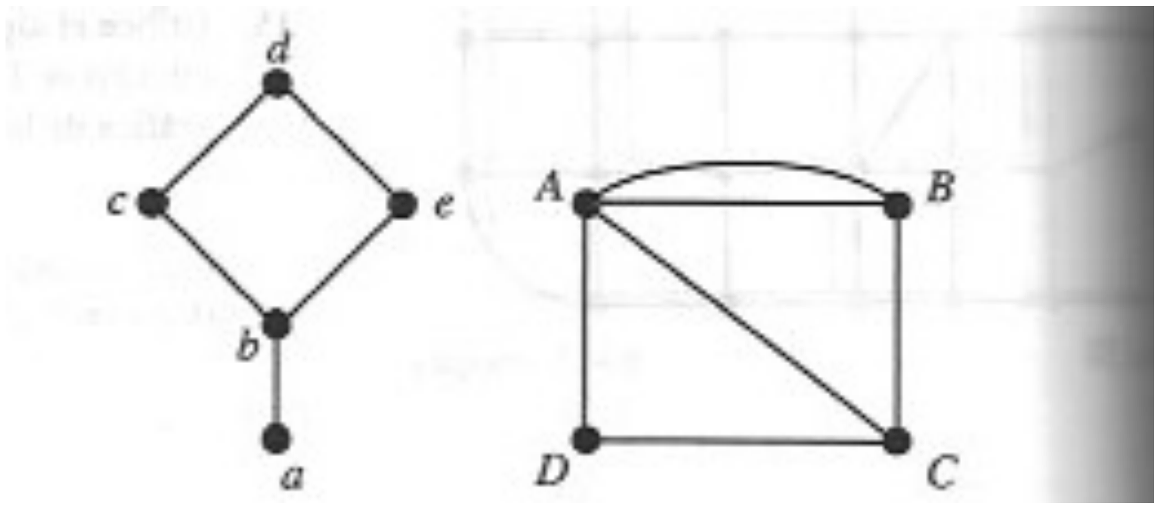




Circuito hamiltoniano es un circuito que visita cada vértice solo una vez, con excepción del vértice inicial que también el último.

¿es necesario recorrer todas las aristas en una trayectoria hamiltoniana?

Los grafos siguientes ¿son trayectorias de Hamilton?



A diferencia de las trayectorias y ciclos Eulerianos, NO se conocen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos

Algoritmo de Fleury – grafos eulerianos y semi euleriano

https://www.youtube.com/watch?v=BFnxCuTpmZw&list=PPSV

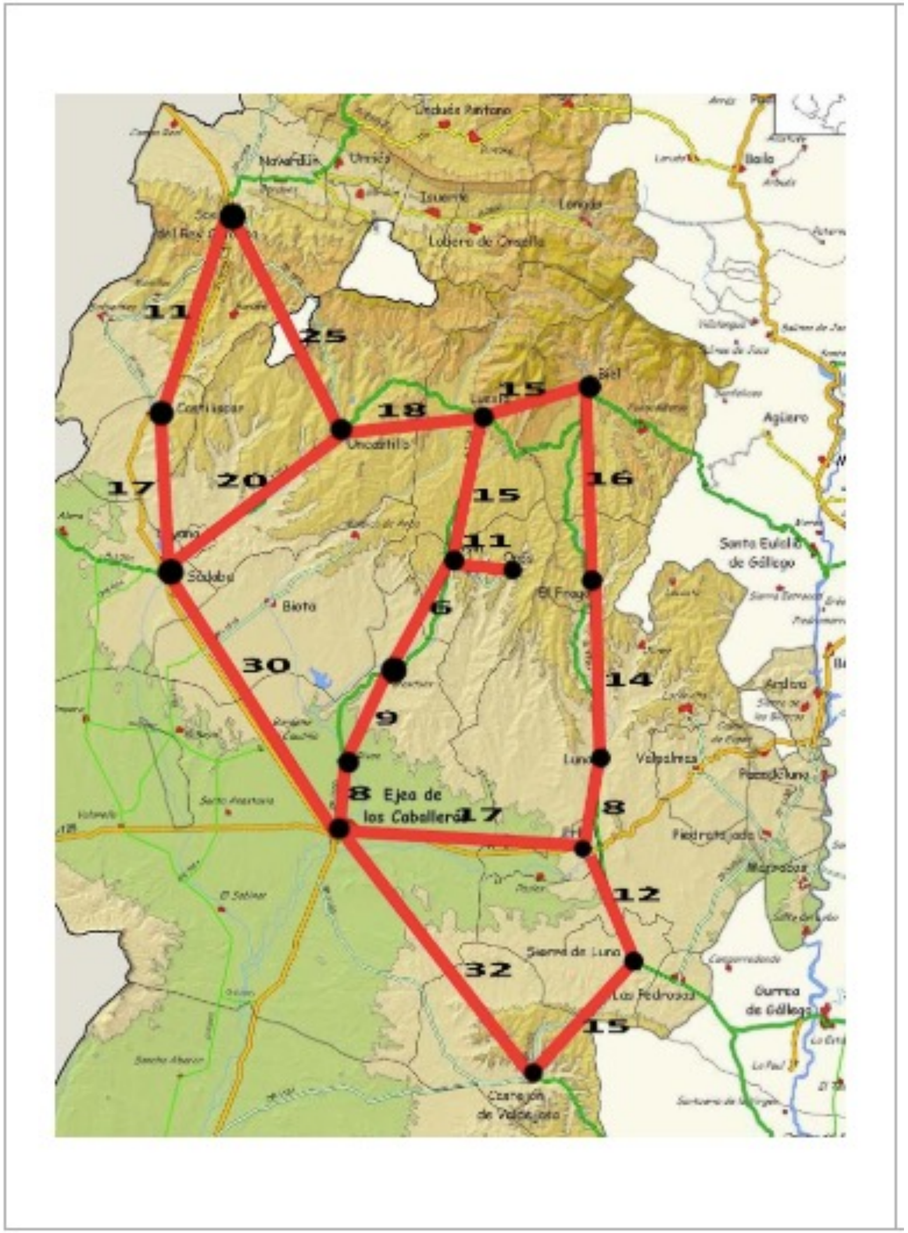
https://www.youtube.com/watch?v=57yhBHFCb7w&list=PPSV

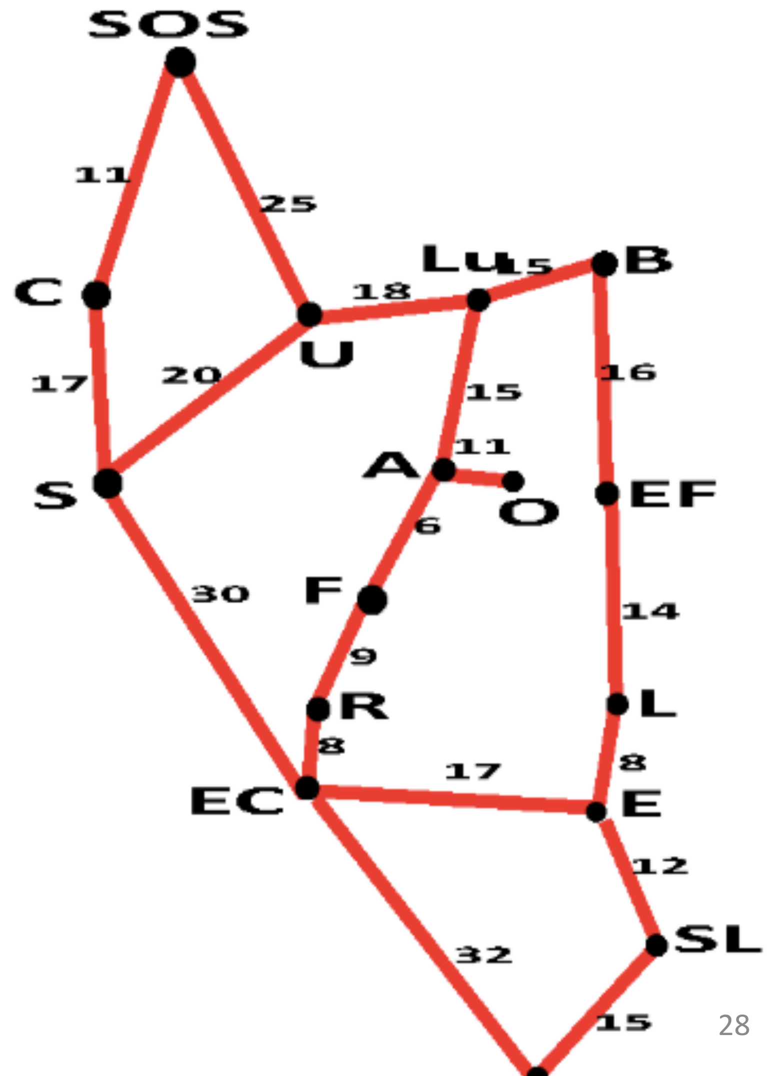
Grafos hamiltoniano y semi hamiltoniano

https://www.youtube.com/watch?v=I9bISdP8Zeg&list=PPSV

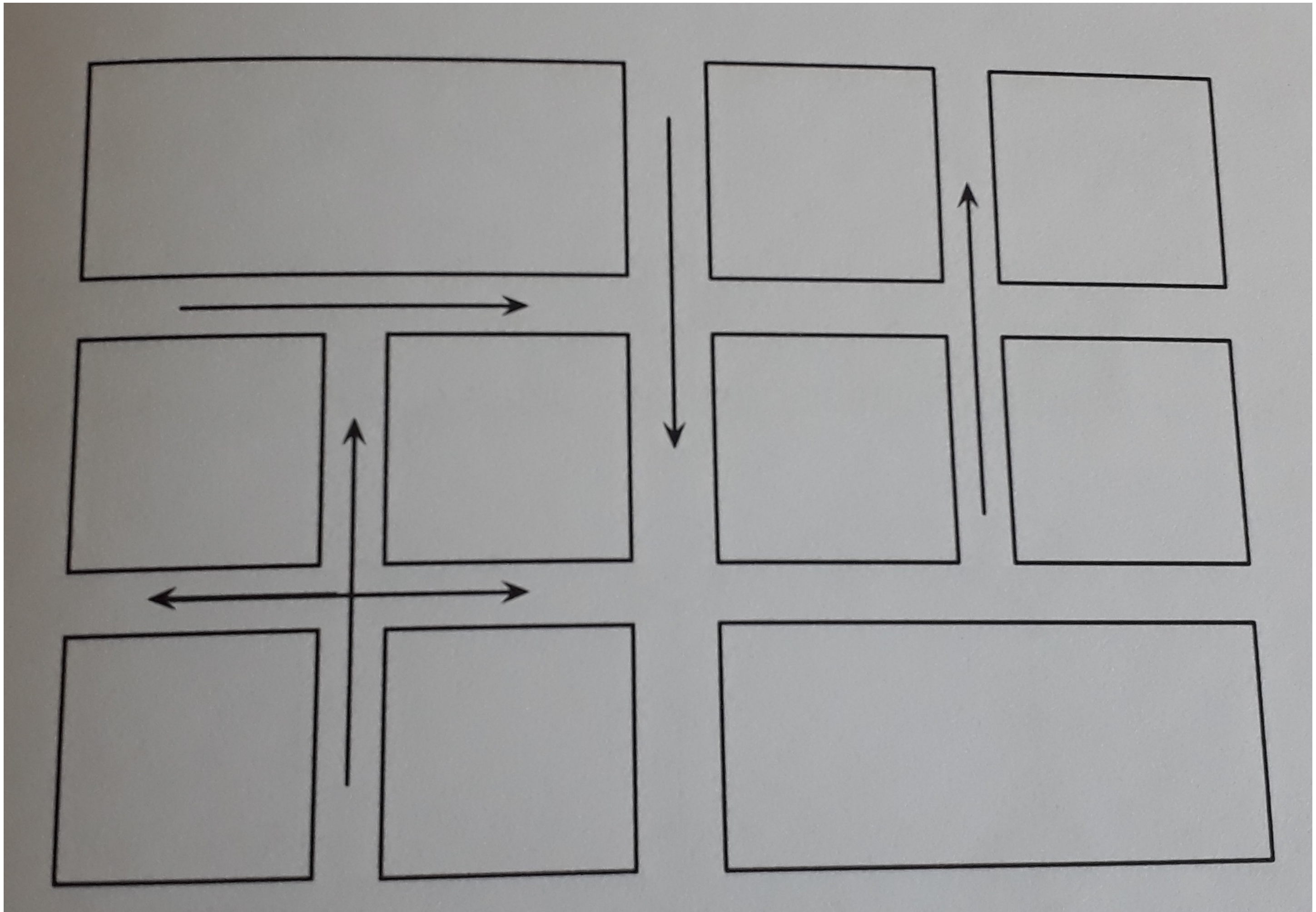
https://www.youtube.com/watch?v=uWqp8rqY4Fs&list=PPSV

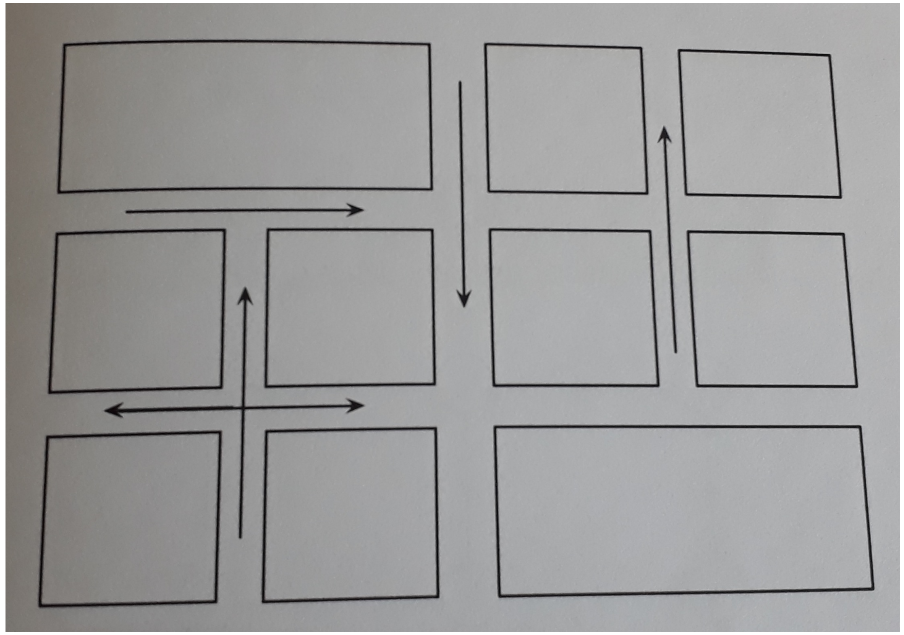
GRAFOS PONDERADOS

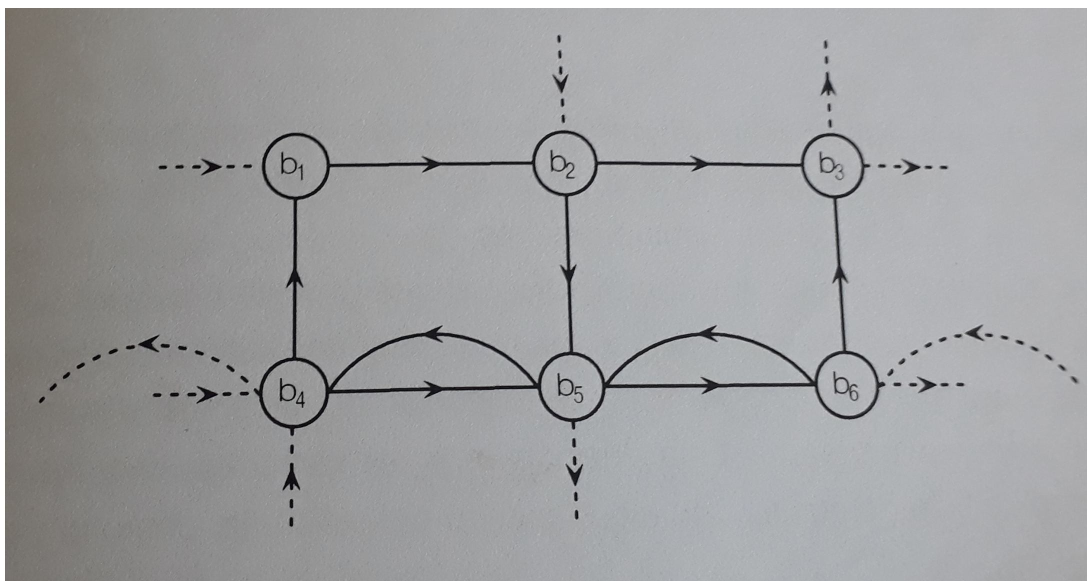




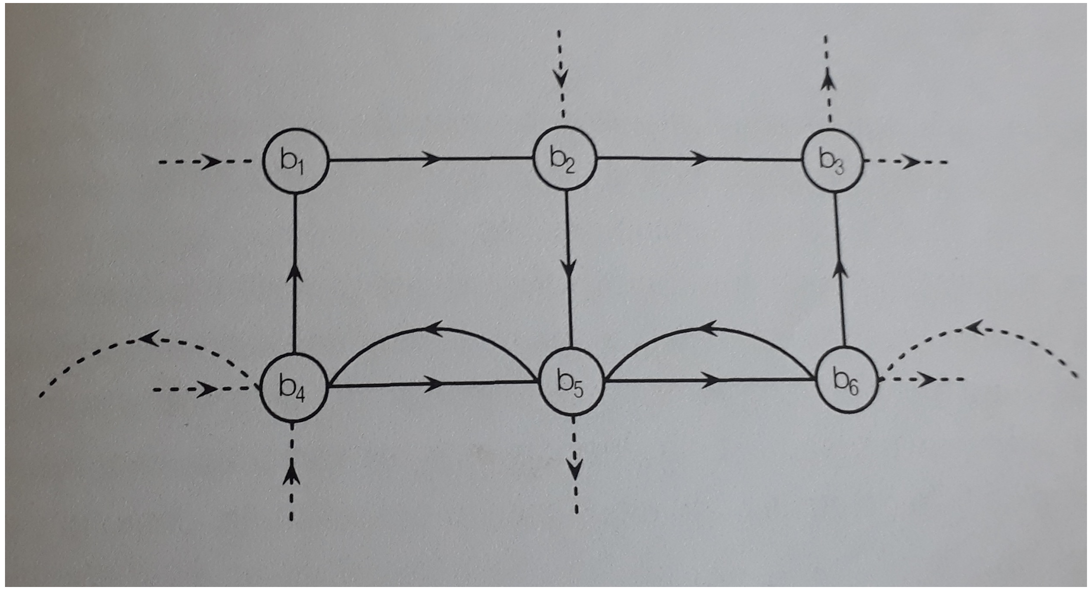
Una Aplicación



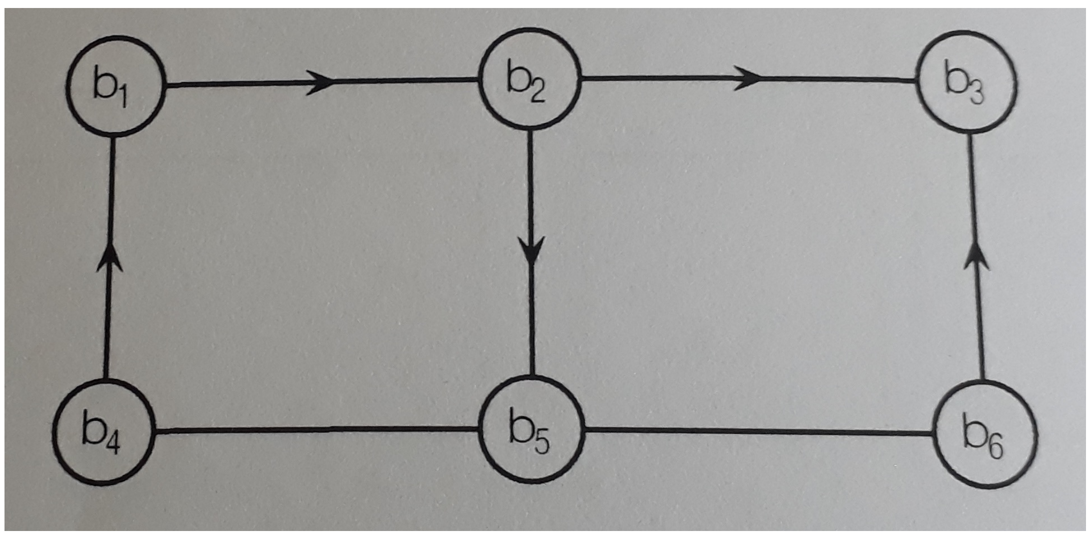




b_1
b_2
b_3
b_4
b_5
b_6



b_1
b_2
b_3
b_4
b_5
b_6



b_1
b_2
b_3
b_4
b_5
b_6

Camino de longitud mínima

Etiquetas - Peso

Placa de acero para agujerear con el tiempo que lleva recorrer los diferentes caminos.

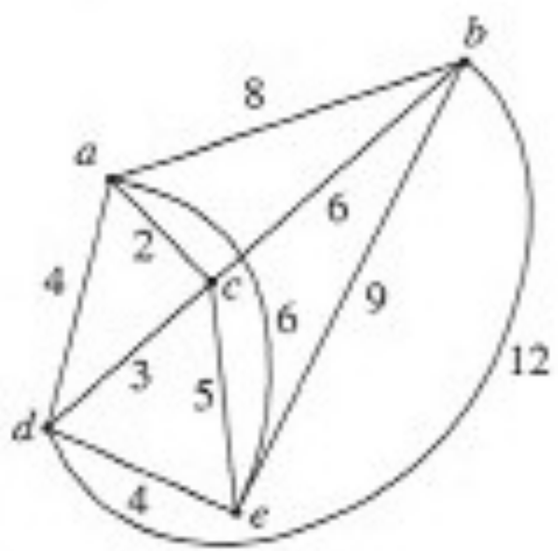
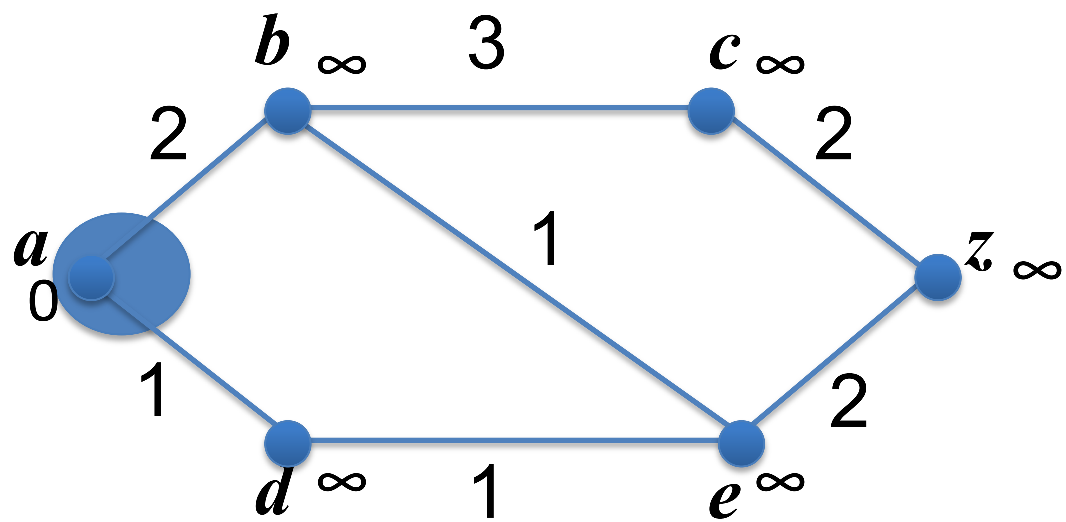


TABLA 6.1.1

Caminos en la gráfica de la figura 6.1.7 de *a* a *e* que pasan por cada vértice exactamente una vez, y sus longitudes

Camino	*Longitud*
a, b, c, d, e	21
a, b, d, c, e	28
a, c, b, d, e	24
a, c, d, b, e	26
a, d, b, c, e	27
a, d, c, b, e	22

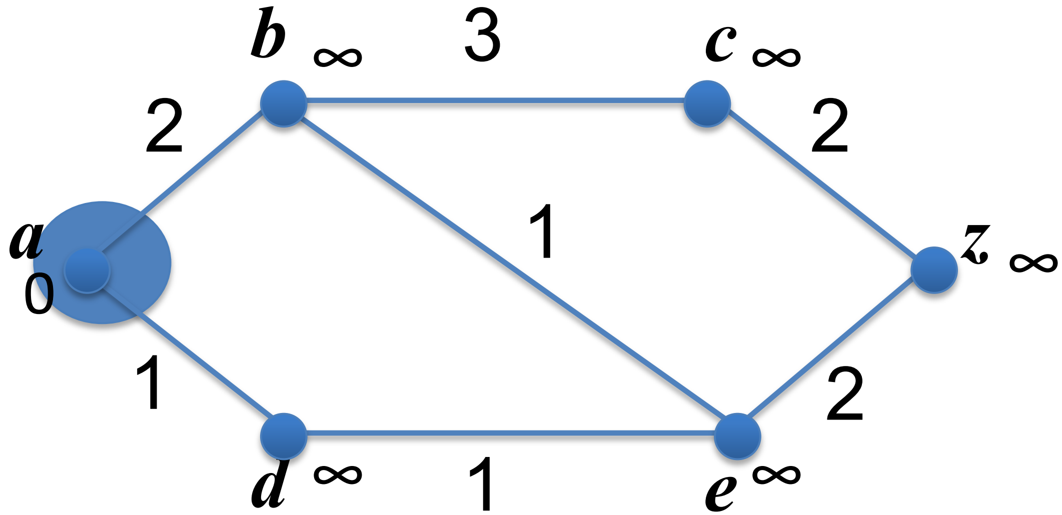
ALGORITMO DEL CAMINO MAS CORTO (DIJKSTRA)



Dijkstra asigna una etiqueta $L(x)$ a cada vértice x, que será la distancia del camino del vértice de inicio al vértice x

Vamos a buscar el camino mas corto desde el vértice a al vértice z

Consideramos $L(a) = 0$ y consideramos que todos los demás vértices x están a una distancia infinita de a en principio $L(x) = \infty$

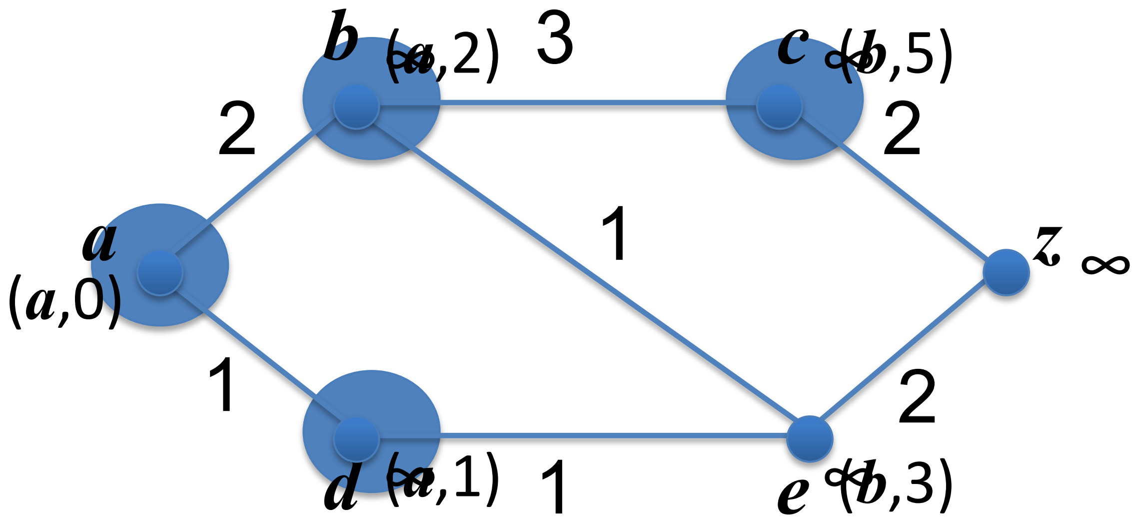


El algoritmo va a recorrer todos los vértices “acumulando” la distancias desde ***a*** hasta el vértice que se visita en la etiqueta ***L***(***x***)

Se inicia el recorrido por los vértices adyacentes a ***a*** en el inicio, siguiendo por los adyacentes de los ya visitados

Para etiquetar se usa la fórmula

$$L(x) = \text{mín}\ \{\ L(x), L(v) + \text{w}(v, x)\ \}$$

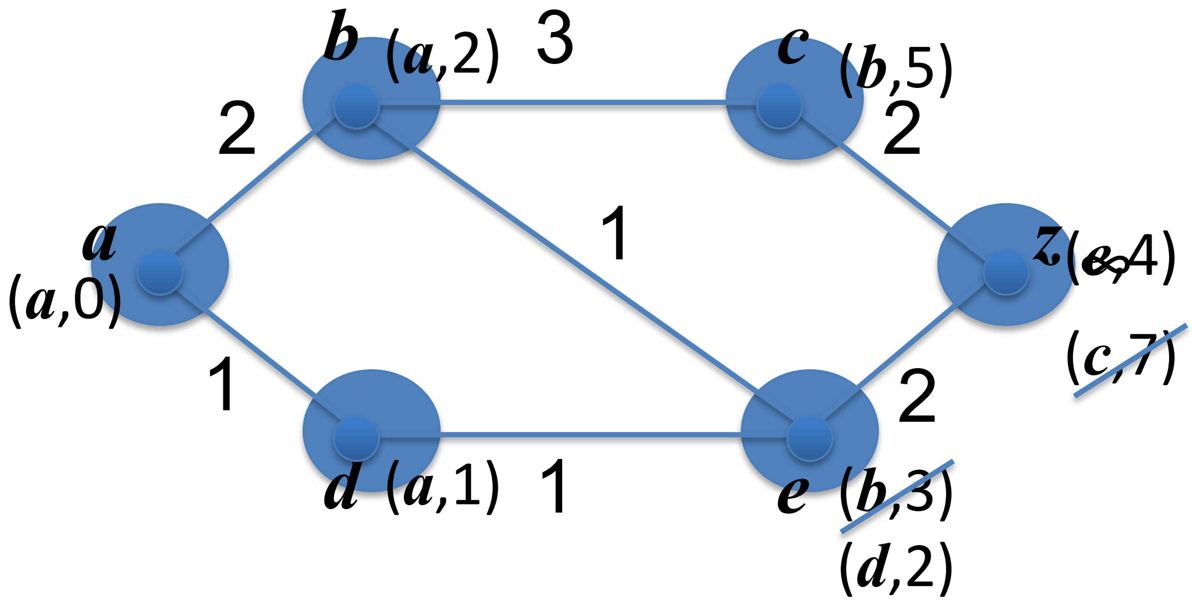


Desde a $\quad L(b) = \text{mín}\ \{\ L(b), L(a) + \text{w}(a, b)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, 0 + 2\ \} = 2$

$L(d) = \text{mín}\ \{\ L(d), L(a) + \text{w}(a, d)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, 0 + 1\ \} = 1$

Desde b $\quad L(c) = \text{mín}\ \{\ L(c), L(b) + \text{w}(b, c)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, 2 + 3\ \} = 5$

$L(e) = \text{mín}\ \{\ L(e), L(b) + \text{w}(b, e)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, 2 + 1\ \} = 3$



Desde b $\quad L(e) = \text{mín}\ \{ L(e), L(b) + \text{w}(b, e) \} = \text{mín}\ \{ \infty, 2 + 1 \} = 3$

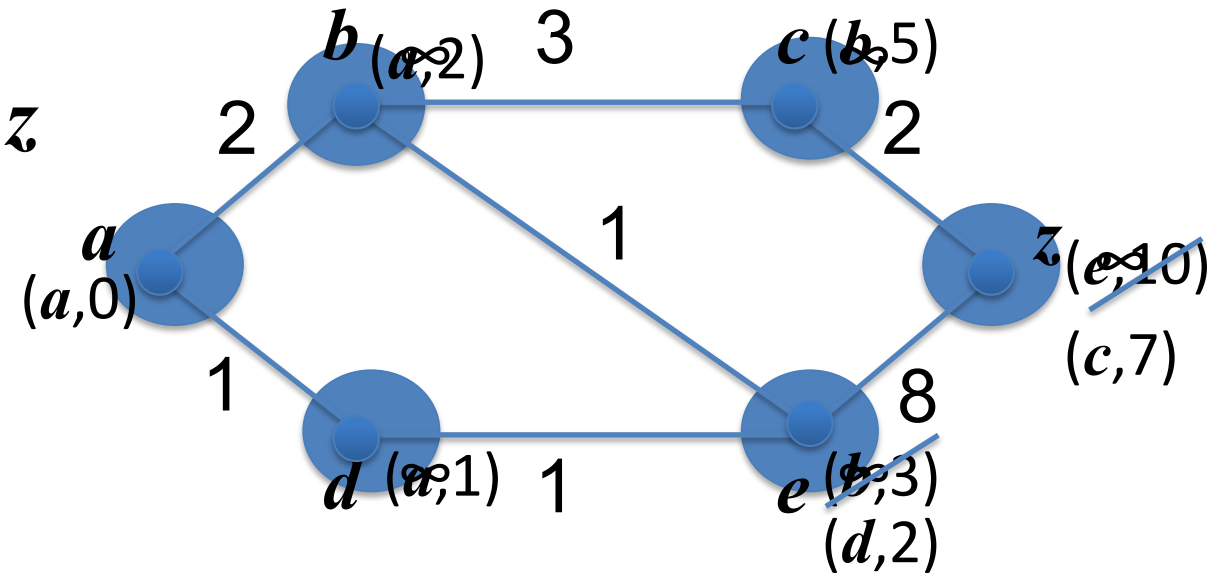
Desde d $\quad L(e) = \text{mín}\ \{ L(e), L(d) + \text{w}(d, e) \} = \text{mín}\ \{ 3, 1 + 1 \} = 2$

Desde e $\quad L(z) = \text{mín}\ \{ L(z), L(e) + \text{w}(e, z) \} = \text{mín}\ \{ \infty, 2 + 2 \} = 4$

Desde c $\quad L(z) = \text{mín}\ \{ L(z), L(c) + \text{w}(c, z) \} = \text{mín}\ \{ 4, 5 + 2 \} = 4$

a, d, e, z $\qquad$ Longuitud 4

a b c z



Desde *a* $L(b) = \text{mín}\,\{ L(b), L(a) + w(a, b) \} = \text{mín}\,\{ \infty, 0 + 2 \} = 2$

$L(d) = \text{mín}\,\{ L(d), L(a) + w(a, d) \} = \text{mín}\,\{ \infty, 0 + 1 \} = 1$

Desde *b* $L(c) = \text{mín}\,\{ L(c), L(b) + w(b, c) \} = \text{mín}\,\{ \infty, 2 + 3 \} = 5$

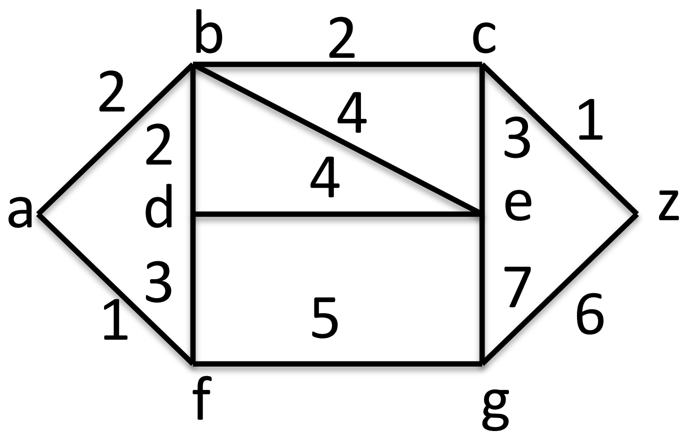
$L(e) = \text{mín}\,\{ L(e), L(b) + w(b, e) \} = \text{mín}\,\{ \infty, 2 + 1 \} = 3$

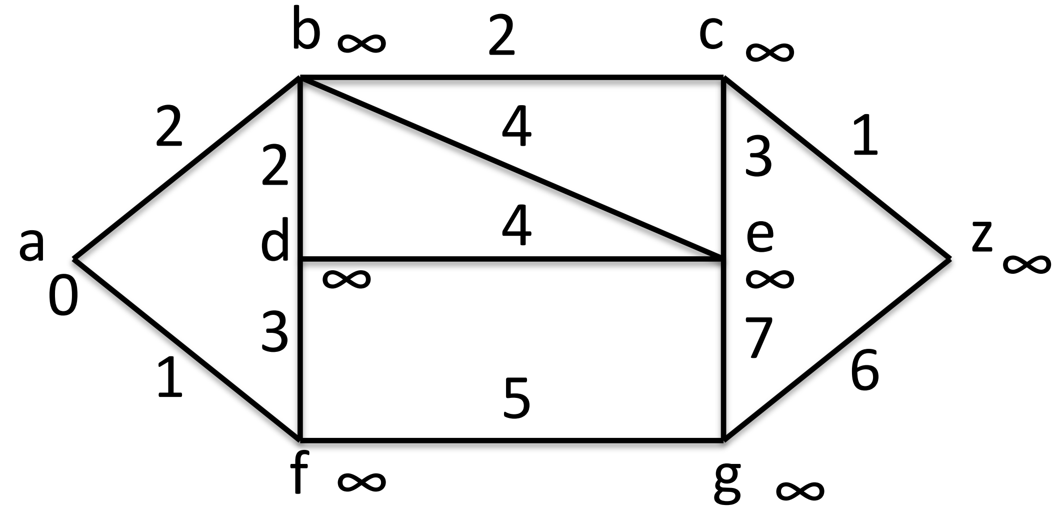
Desde *d* $L(e) = \text{mín}\,\{ L(e), L(d) + w(d, e) \} = \text{mín}\,\{ 3, 1 + 1 \} = 2$

Desde *e* $L(z) = \text{mín}\,\{ L(z), L(e) + w(e, z) \} = \text{mín}\,\{ \infty, 2 + 8 \} = 10$

Desde *c* $L(z) = \text{mín}\,\{ L(z), L(c) + w(c, z) \} = \text{mín}\,\{ 10, 5 + 2 \} = 7$

ALGORITMO DEL CAMINO MAS CORTO (DIJKSTRA)





Dijkstra asigna una etiqueta $L(x)$ a cada vértice x, que será la distancia del vértice de inicio del camino al vértice x

Vamos a buscar el camino mas corto desde el vértice a al vértice z

Consideramos $L(a) = 0$ y consideramos que todos los demás vértices x están a una distancia infinita de a en principio $L(x) = \infty$

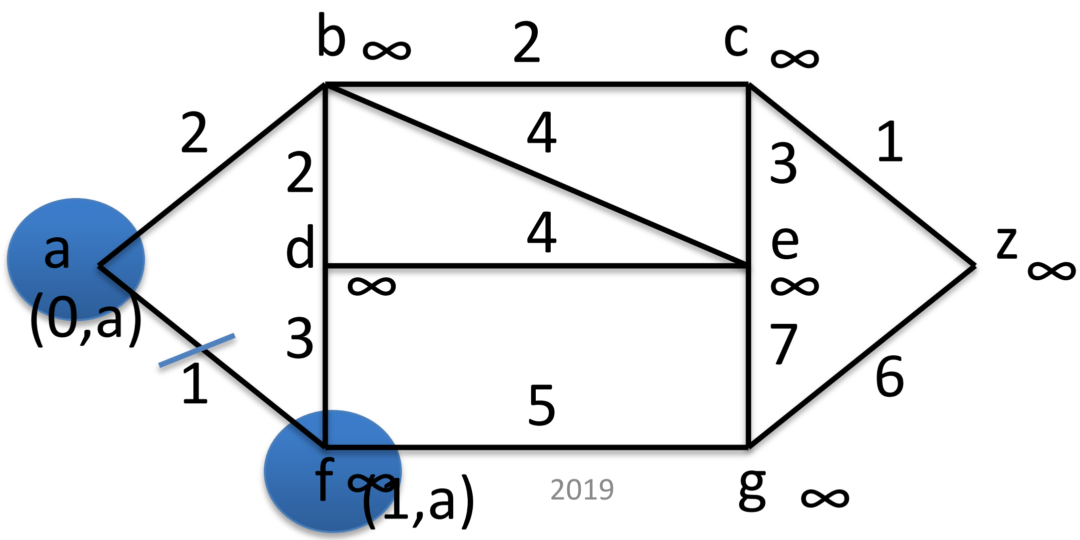
El algoritmo va a recorrer todos los vértices "acumulando" las distancias desde ***a*** hasta el vértice que se visita en la etiqueta ***L***(***x***)

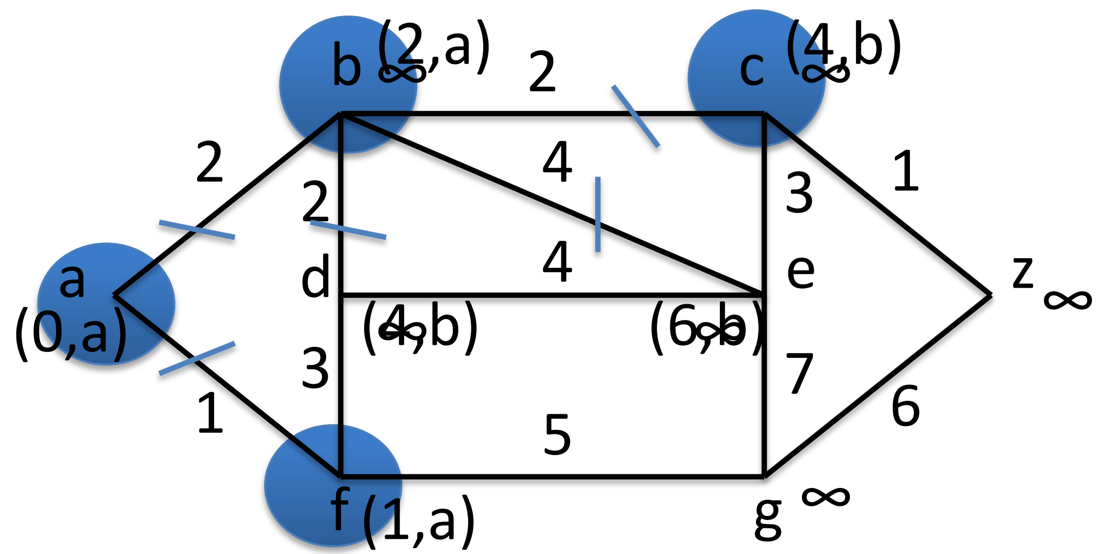
Se inicia el recorrido por los vértices adyacentes a ***a*** en el inicio, siguiendo por los adyacentes de los ya visitados

Para etiquetar se usa la fórmula

$$L(x) = \text{mín}\ \{\ L(x), L(v) + w(v, x)\ \}$$

Desde a $\quad L(f) = \text{mín}\ \{\ L(f), L(a) + w(a, f)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, \mathbf{0} + 1\ \} = 1$



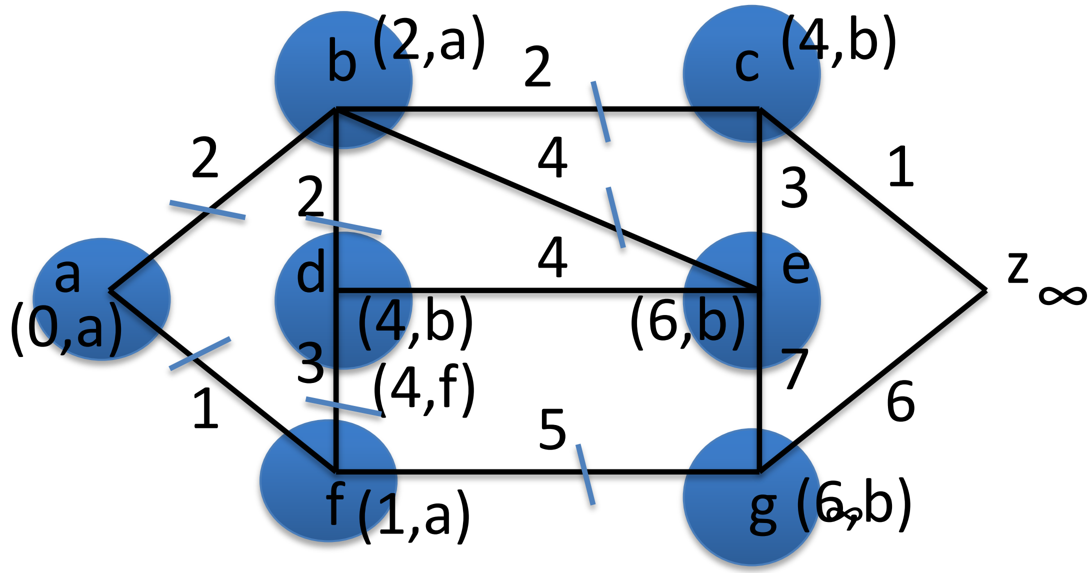


Desde *a* $L(b) = \text{mín}\,\{\, L(b), L(a) + \mathrm{w}(a, b) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, \mathbf{0} + 2 \,\} = 2$

Desde *b* $L(c) = \text{mín}\,\{\, L(c), L(b) + \mathrm{w}(b, c) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, 2 + 2 \,\} = 4$

$L(d) = \text{mín}\,\{\, L(d), L(b) + \mathrm{w}(b, d) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, 2 + 2 \,\} = 4$

$L(e) = \text{mín}\,\{\, L(e), L(b) + \mathrm{w}(b, e) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, 2 + 4 \,\} = 6$



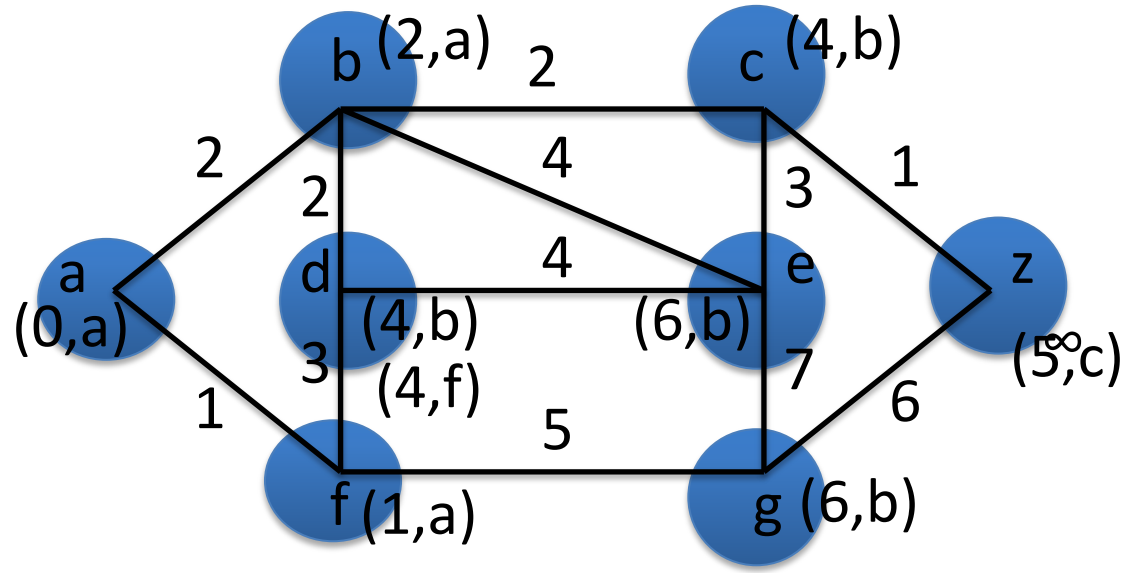
Desde f $L(d) = \text{mín}\,\{\, L(d), L(f) + \text{w}(f, d) \,\} = \text{mín}\,\{\, 4,\ 1 + 3 \,\} = 4$

$L(g) = \text{mín}\,\{\, L(g), L(f) + \text{w}(f, g) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty,\ 1 + 5 \,\} = 6$

Desde d $L(e) = \text{mín}\,\{\, L(e), L(d) + \text{w}(d, e) \,\} = \text{mín}\,\{\, 6,\ 4 + 4 \,\} = 6$

Desde c $L(e) = \text{mín}\,\{\, L(e), L(c) + \text{w}(c, e) \,\} = \text{mín}\,\{\, 6,\ 4 + 3 \,\} = 6$

Desde g $L(e) = \text{mín}\,\{\, L(e), L(g) + \text{w}(g, e) \,\} = \text{mín}\,\{\, 6,\ 6 + 7 \,\} = 13$



Desde c $L(z)$ = mín { $L(z)$, $L(c)$ + w(c, z) } = mín { ∞, 4 + 1 } = 5

Desde g $L(g)$ = mín { $L(z)$, $L(g)$ + w(g, z) } = mín { 5, 6 + 6 } = 5

La longitud del camino mas corto es 5

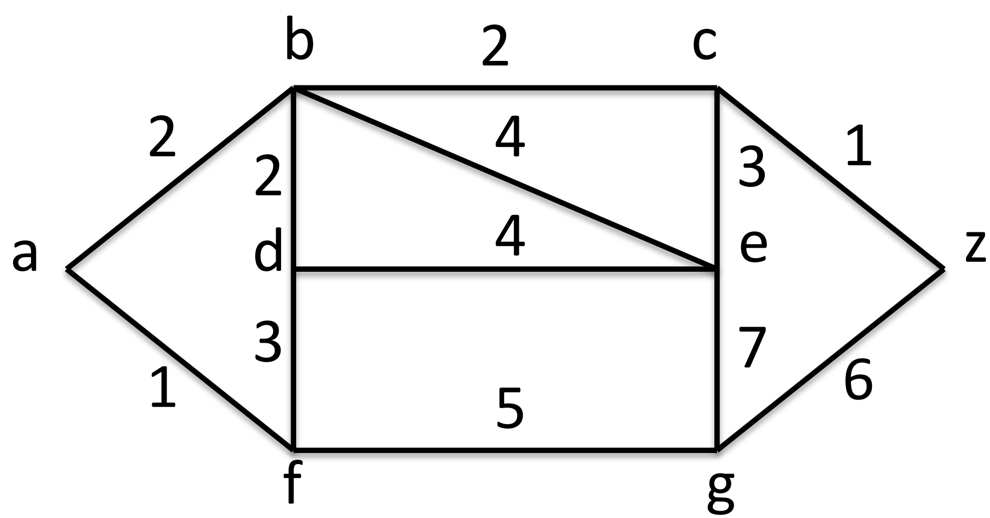
a, b, c, z

ALGORITMO DIJKSTRA

ENTRADA: Un grafo conexo, cuyas aristas tienen pesos (positivos) asignados

Los vértices del grafo desde a hasta z

SALIDA: $L(z)$ la longitud de la ruta mas corta desde a hasta z



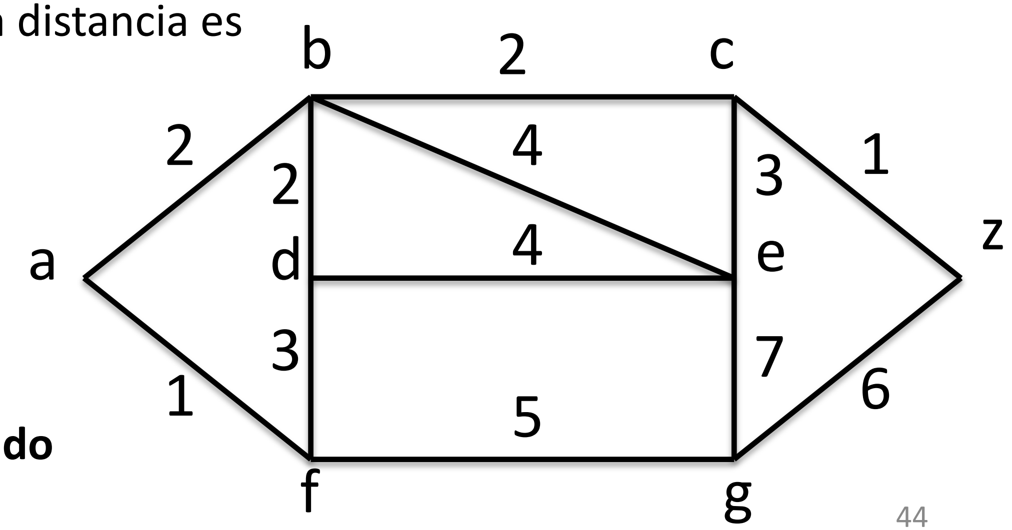
ALGORITMO DIJKSTRA

ENTRADA: Un grafo conexo, cuyas aristas tienen pesos (positivos) asignados

Los vértices del grafo desde *a* hasta *z*

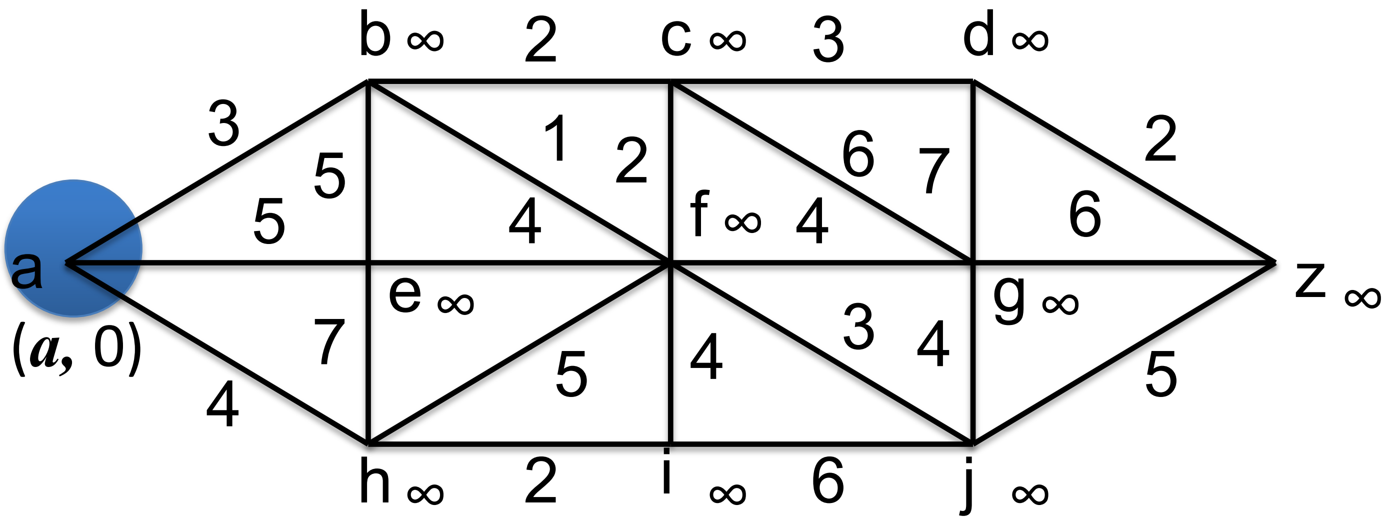
SALIDA: L(*z*) la longitud de la ruta mas corta desde *a* hasta *z*

1. **procedure** dijkstra (*w, a, z, L*)
2. L(*a*) : = 0
3. **for** todos los vértices $x \neq a$ **do**
4. L(*x*) = ∞
5. T := conjunto de todos los vértices
6. // T es el conjunto de vértices cuya distancia es mas corta a *a*
7. // no fue determinada
8. **while** $z \varepsilon T$ **do**
9. **begin**
10. elegir $v \varepsilon T$ con L(*v*) mínimo
11. $T := T - \{v\}$
12. **for** cada $x \varepsilon T$ adyacente a *v* **do**
13. L(*x*) := mín { L(*x*), L(*v*) + *w(v,x)* }
14. end
15. end dijkstra

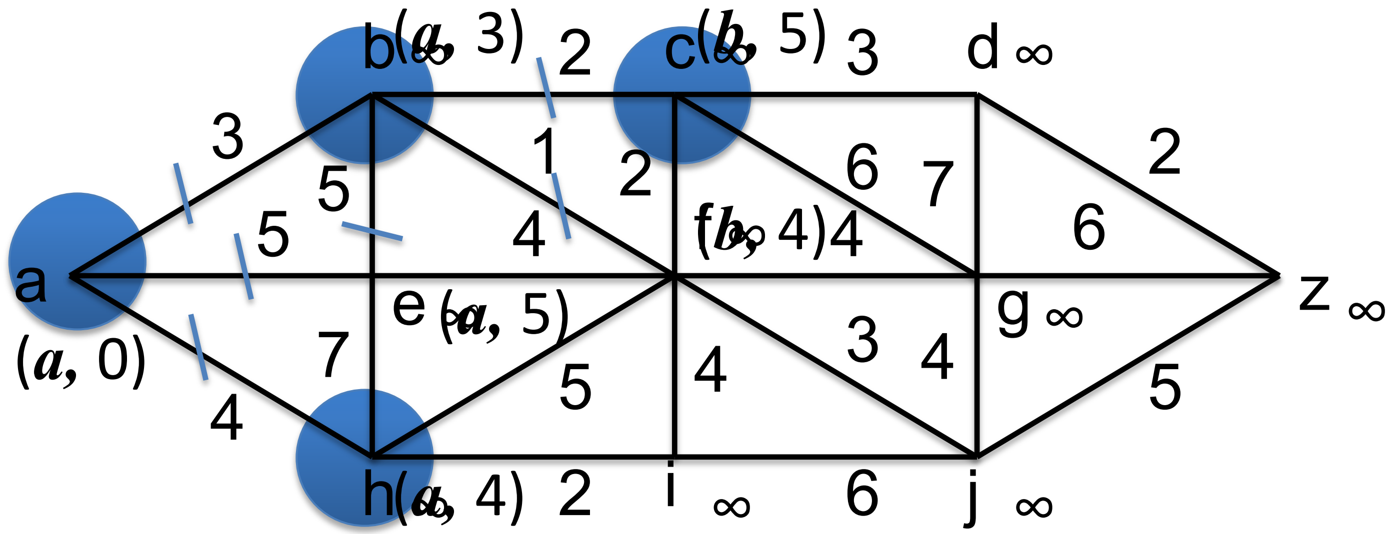


Determine la longitud mínima de los caminos

a – f;   a – g;   a – z ;   b – j ;   h - d



Determinamos la longitud mínima del camino a – z



Desde a $\quad L(b) = \text{mín}\ \{\ L(b), L(a) + \text{w}(a, b)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, \mathbf{0} + 3\ \} = 3$

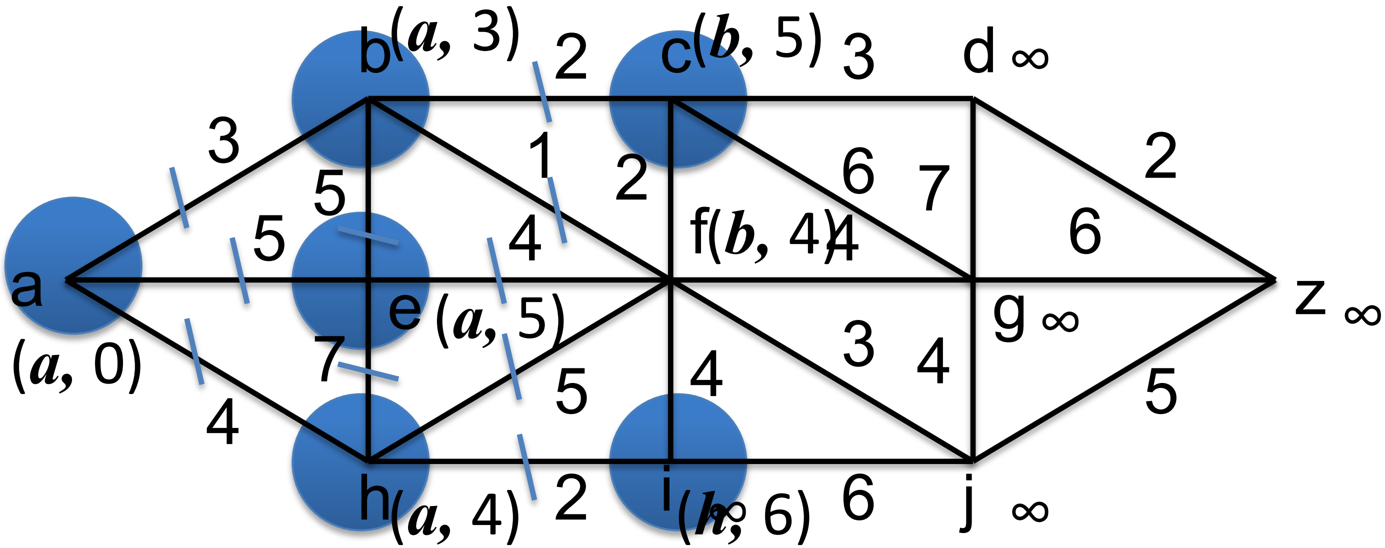
$L(e) = \text{mín}\ \{\ L(e), L(a) + \text{w}(a, e)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, \mathbf{0} + 5\ \} = 5$

$L(h) = \text{mín}\ \{\ L(h), L(a) + \text{w}(a, h)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, \mathbf{0} + 4\ \} = 4$

Desde b $\quad L(c) = \text{mín}\ \{\ L(c), L(b) + \text{w}(b, c)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, \mathbf{3} + 2\ \} = 5$

$L(f) = \text{mín}\ \{\ L(f), L(b) + \text{w}(b, f)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, \mathbf{3} + 1\ \} = 4$

$L(e) = \text{mín}\ \{\ L(e), L(b) + \text{w}(b, e)\ \} = \text{mín}\ \{\ 5, \mathbf{3} + 5\ \} = 5$

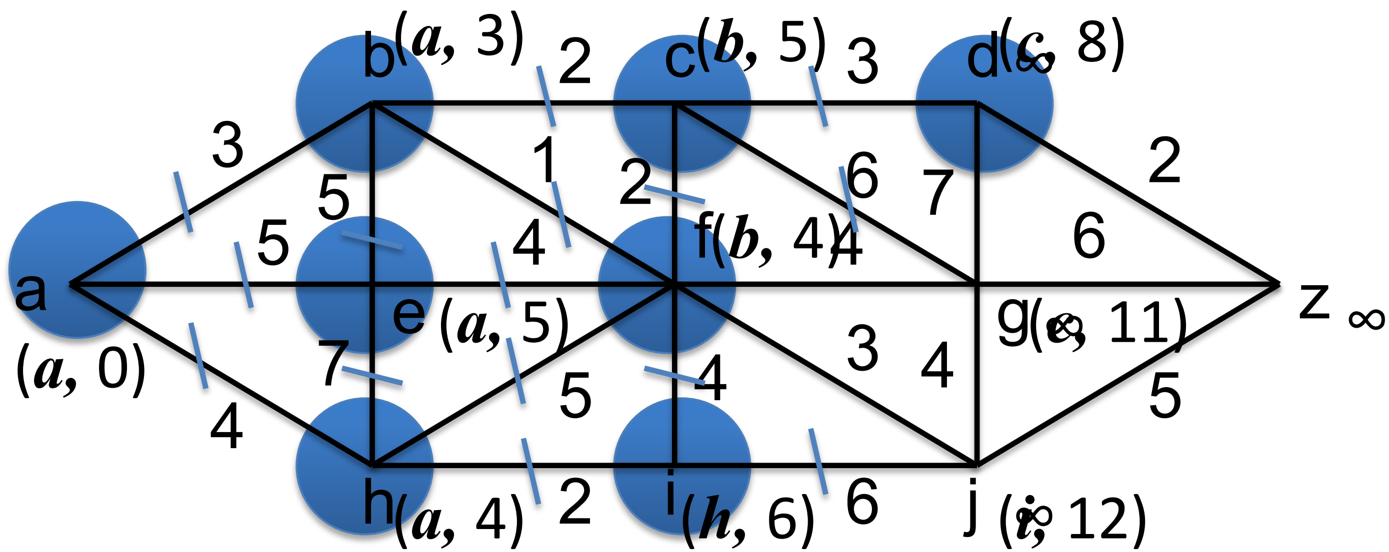


Desde $\boldsymbol{h}$ $\quad L(i) = \text{mín}\ \{\ L(i), L(h) + \mathrm{w}(h, i)\ \} = \text{mín}\ \{\ \infty, \mathbf{4} + 2\ \} = 6$

$L(f) = \text{mín}\ \{\ L(f), L(h) + \mathrm{w}(h, f)\ \} = \text{mín}\ \{\ 4, \mathbf{4} + 5\ \} = 4$

$L(e) = \text{mín}\ \{\ L(e), L(h) + \mathrm{w}(h, e)\ \} = \text{mín}\ \{\ 5, \mathbf{4} + 7\ \} = 5$

Desde $\boldsymbol{e}$ $\quad L(f) = \text{mín}\ \{\ L(f), L(e) + \mathrm{w}(e, f)\ \} = \text{mín}\ \{\ 4, \mathbf{5} + 4\ \} = 4$



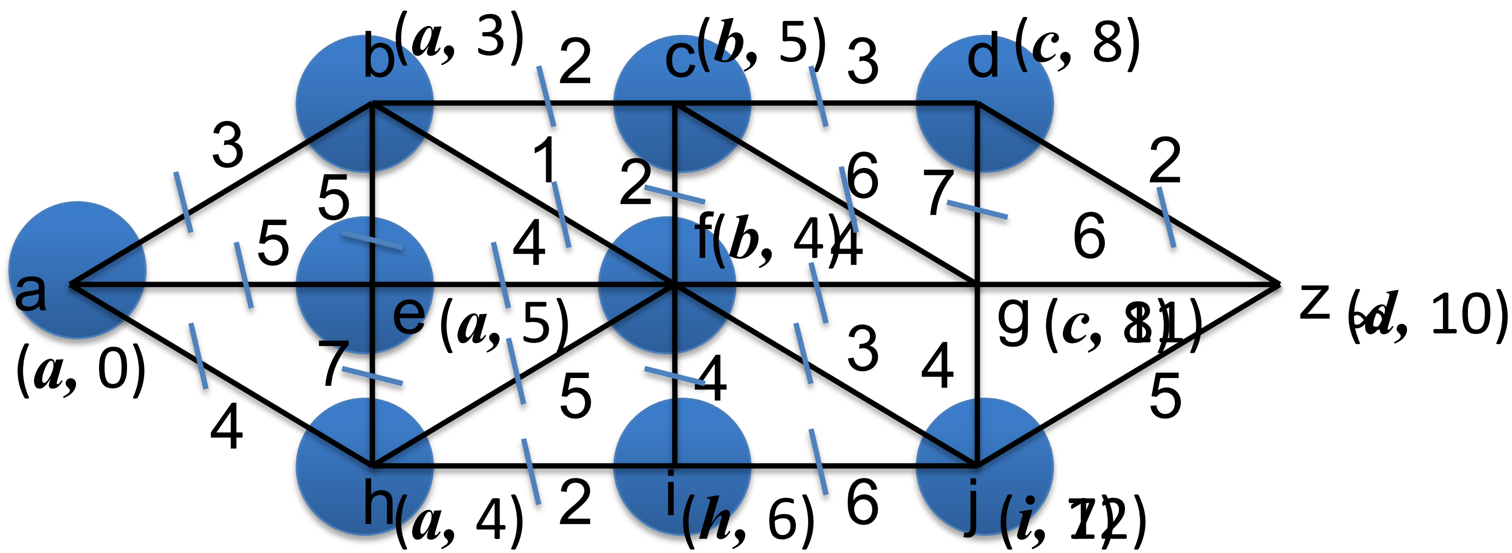
Desde c $\quad L(f) = \text{mín}\,\{\, L(f), L(c) + w(c, f) \,\} = \text{mín}\,\{\, 4, \mathbf{5} + 2 \,\} = 4$

$L(g) = \text{mín}\,\{\, L(g), L(c) + w(c, g) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, \mathbf{5} + 6 \,\} = 11$

$L(d) = \text{mín}\,\{\, L(d), L(c) + w(c, d) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, \mathbf{5} + 3 \,\} = 8$

Desde i $\quad L(f) = \text{mín}\,\{\, L(f), L(i) + w(i, f) \,\} = \text{mín}\,\{\, 4, \mathbf{6} + 4 \,\} = 4$

$L(j) = \text{mín}\,\{\, L(j), L(i) + w(i, j) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, \mathbf{6} + 6 \,\} = 12$

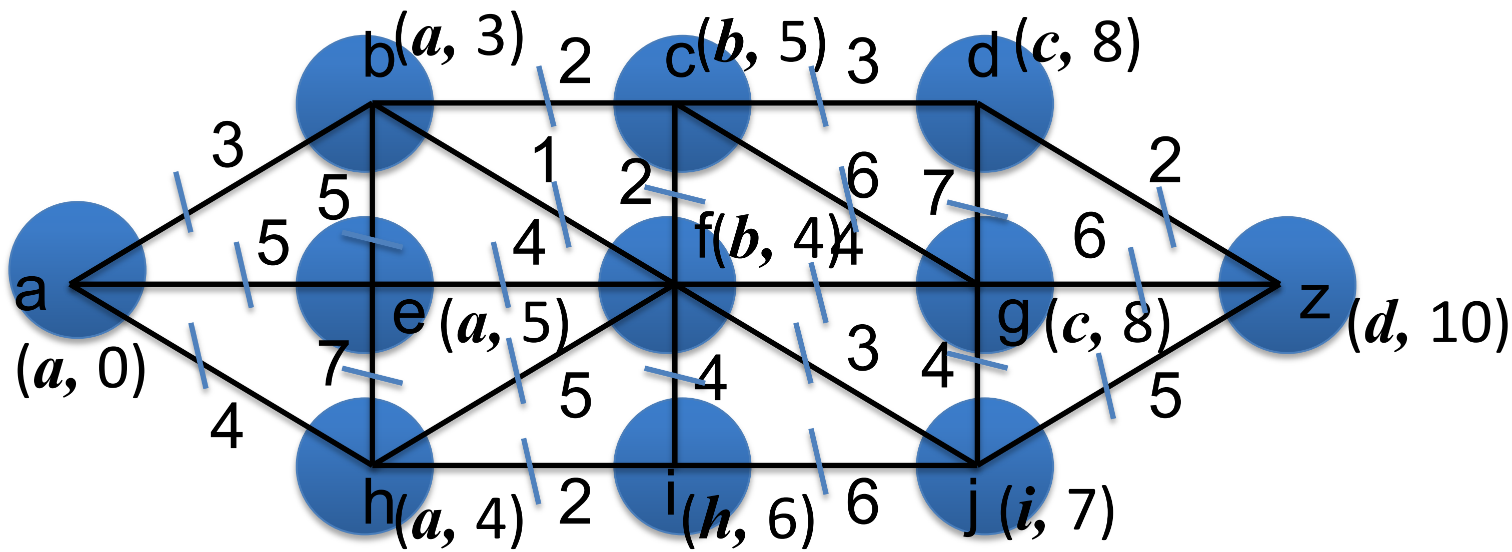


Desde f $\quad L(g) = \text{mín}\,\{\, L(g), L(f) + \text{w}(f, g) \,\} = \text{mín}\,\{\, 11, \mathbf{4} + 4 \,\} = 8$

$L(j) = \text{mín}\,\{\, L(j), L(j) + \text{w}(f, j) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, \mathbf{4} + 3 \,\} = 7$

Desde d $\quad L(g) = \text{mín}\,\{\, L(g), L(d) + \text{w}(d, g) \,\} = \text{mín}\,\{\, 8, \mathbf{8} + 7 \,\} = 8$

$L(z) = \text{mín}\,\{\, L(z), L(d) + \text{w}(d, z) \,\} = \text{mín}\,\{\, \infty, \mathbf{8} + 2 \,\} = 10$



Desde j $\quad L(g) = \text{mín}\,\{\, L(g), L(j) + \text{w}(j, g) \,\} = \text{mín}\,\{\, 8, 7 + 4 \,\} = 8$

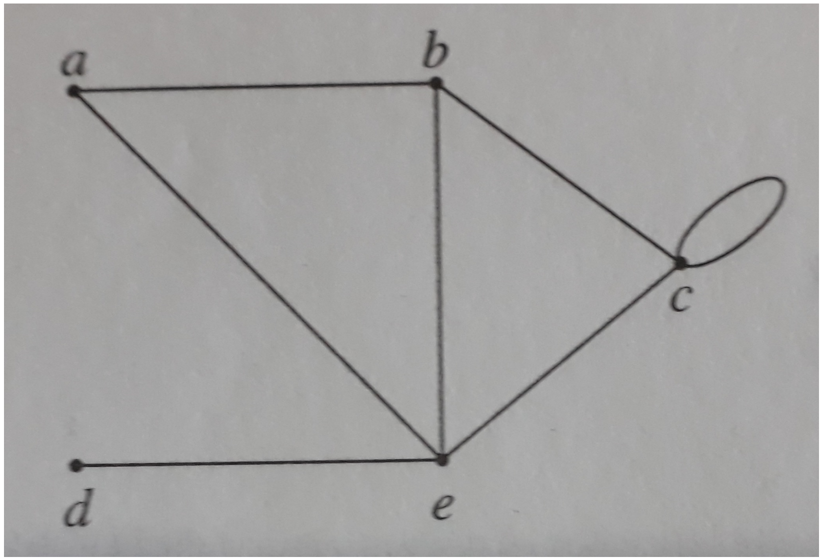
$L(z) = \text{mín}\,\{\, L(z), L(j) + \text{w}(j, z) \,\} = \text{mín}\,\{\, 10, 7 + 5 \,\} = 10$

Desde g $\quad L(z) = \text{mín}\,\{\, L(z), L(g) + \text{w}(g, z) \,\} = \text{mín}\,\{\, 10, \mathbf{8} + 6 \,\} = 10$

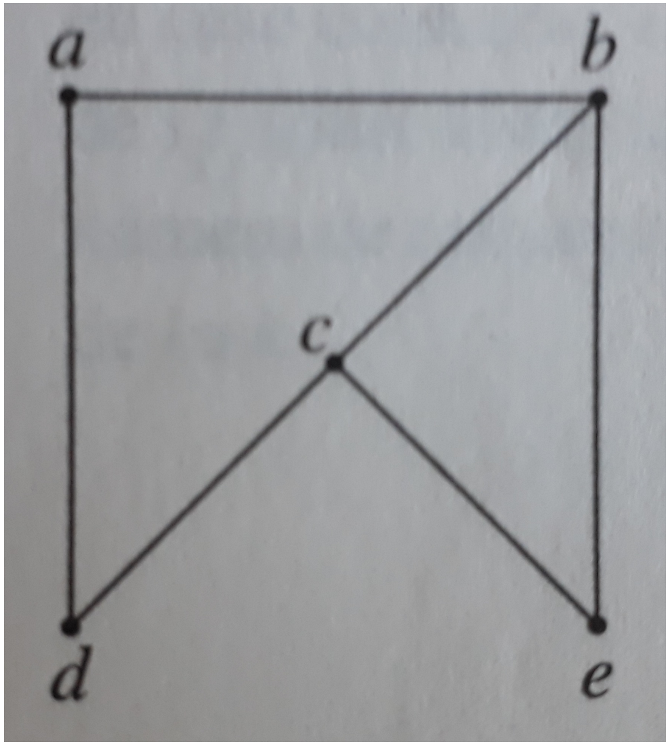
$$a \quad b \quad c \quad d \quad z$$

a – f = 4 a – g = 8 b – j = ? h – d = ?

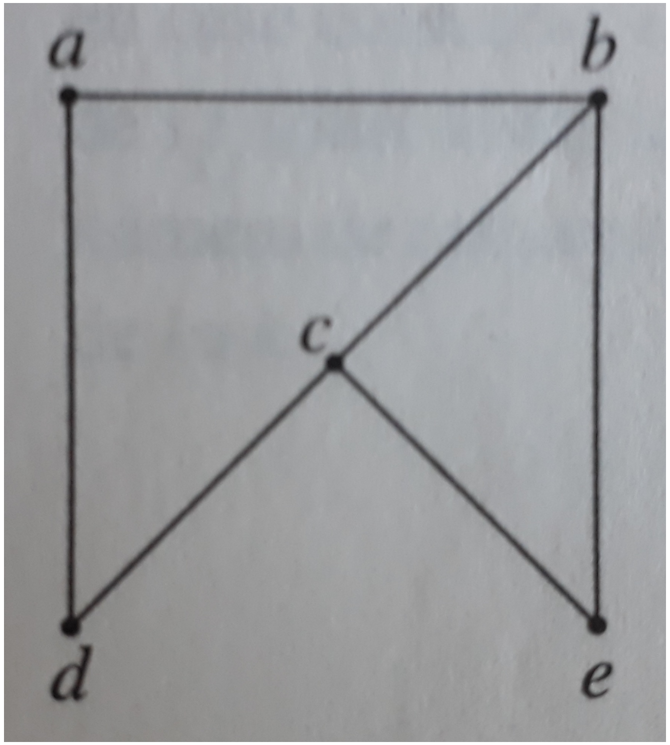
Matrices de adyacencia



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

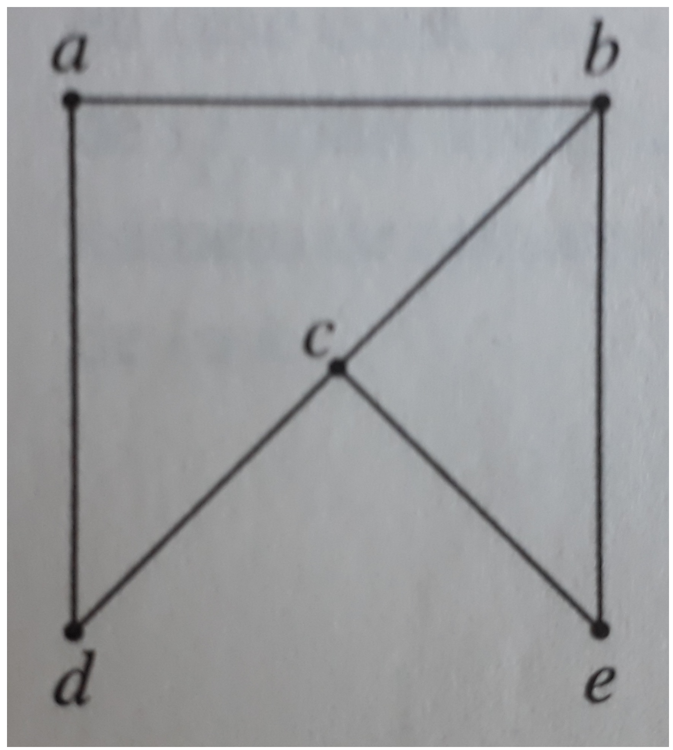


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

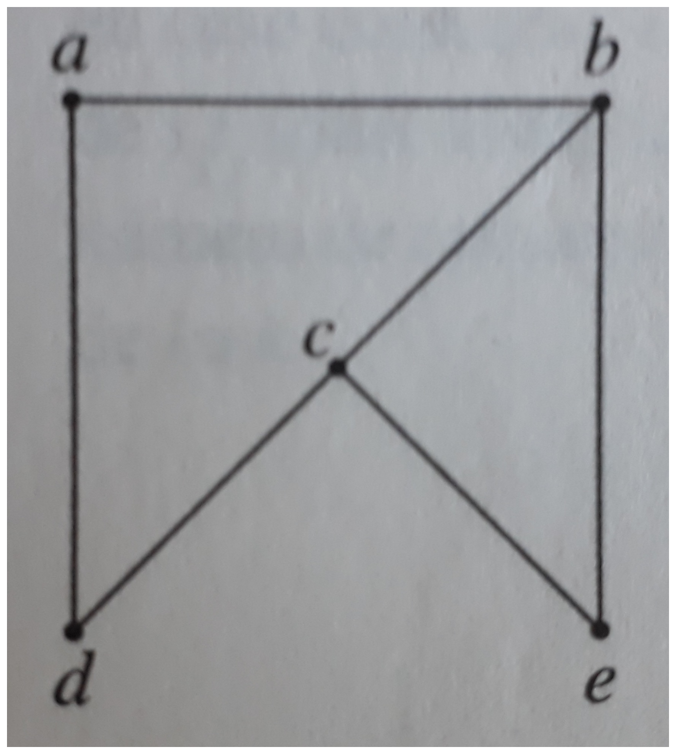
$$A, A^2,\ A^3, \ldots$$

Cantidad de caminos entre los vértices $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$
de longitud 1, 2, 3, …

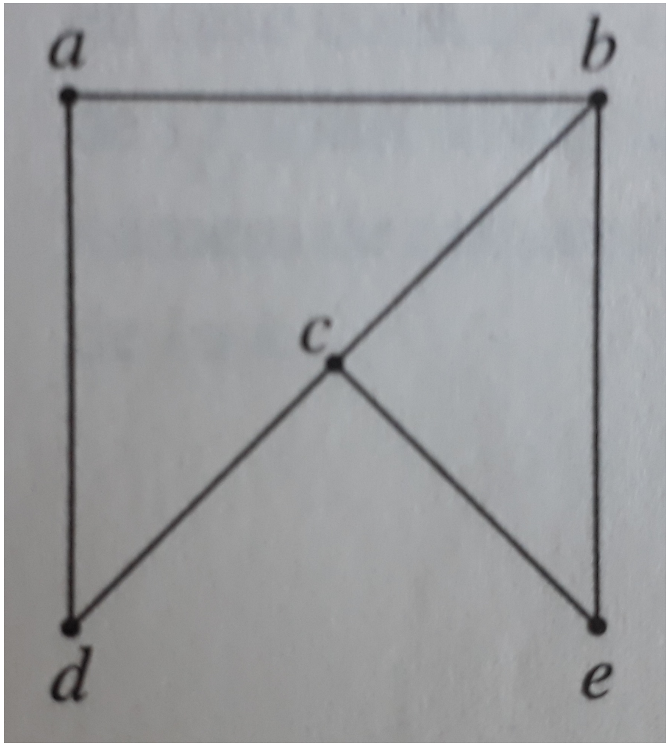
$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$



Grafos y Estructuras de datos y algoritmos

https://www.youtube.com/watch?v=23pdz9VtIBo&list=PPSV

FIN