Unidad 4: CONJUNTOS NUMERICOS

NUMEROS NATURALES: [Combinatoria (unne.edu.ar)]

Llamaremos conjunto de números naturales al subconjunto denotado por N que esta caracterizado por las siguientes propiedades:

- el conjunto de los números naturales es infinito
- tiene primer elemento. No tiene ultimo elemento
- todo numero natural tiene un sucesor o siguiente. Un numero natural y su sucesor se dicen consecutivos.
- tiene numero natural, excepto el uno, tiene un antecesor.
- entre dos números naturales existe un numero finito de números naturales.

PROPIEDADES DE N

<table>
<tr><th>SUMA</th><th>PRODUCTO</th></tr>
<tr><td colspan="2">propiedad conmutativa
$\forall a, b \in N: a + b = b + a$
$\forall a, b \in N: a . b = b . a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">propiedad asociativa
$\forall a, b, c \in N: (a + b) + c = a + (b + c)$
$\forall a, b, c \in N: (a . b) . c = a . (b . c)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ley de cierre
$\forall a, b \in N: a + b \in N$
$\forall a, b \in N: a . b \in N$</td></tr>
<tr><td></td><td>Existencia del elemento neutro
$\forall a \in N: a.1 = 1.a = a$</td></tr>
<tr><td></td><td>Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:
$\forall a, b, c \in N: (a + b).c = a .c + b .c$</td></tr>
</table>

PRINCIPIO DE INDUCCION:

Sea P(n) una función proposicional en N, tal que:

- P(1) es verdadera.
- Si P(h) es verdadera, P(h + 1) también lo es.

Entonces, ∀n ∈ N: P(n) es verdadera

SUMATORIA DEFINICION: es un operador matemático que representa de manera abreviada la suma de varios, o incluso infinitos, números llamados sumandos. Se denota Σ

PRODUCTORIA DEFINICION: es una notación matemática que representa una multiplicación de una cantidad arbitraria (finita o infinita). La notación se expresa con la letra griega pi mayúscula Π

VARIANTE DEL PRINCIPIO DE INDUCCION:

Sea H ⊂ N tal que

- 1 ∈ H.
- si n ∈ N tal que (1,n) ⊂ H entonces se cumple que n ∈ H
- entonces H = N.

NUMEROS ENTEROS: LINK AL POWER DE TEORIA

Llamamos conjunto de números enteros, Z, a la unión del conjunto de los números naturales, el cero y el conjunto de los opuestos de los números naturales.

PROPIEDADES DE LS ENTEROS:

1. El conjunto de los números enteros es infinito.
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Todo número entero tiene un sucesor. Un número entero y su sucesor se dicen consecutivos.
4. Todo número entero tiene un antecesor.
5. Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros.

SUMA	PRODUCTO
propiedad conmutativa ∀a, b ∈ Z: a + b = b + a ∀a, b ∈ Z: a . b = b . a	
propiedad asociativa ∀a, b, c ∈ Z: (a + b) + c = a + (b + c) ∀a, b, c ∈ Z: (a . b) . c = a . (b . c)	
ley de cierre ∀a, b ∈ Z: a + b ∈ Z ∀a, b ∈ Z: a . b ∈ Z	

Existencia del elemento neutro: $\forall a \in Z$: a + 0 = 0+a = a $\forall a \in Z$: a . 1 = 1 . a = a	
Existencia de opuesto para cada elemento: $\forall a \in Z, \exists (-a) \in Z /$ -a + a = a + (-a)= 0	Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma: $\forall a, b, c \in Z$: (a + b).c = a .c + b .c

NUMEROS PARES E IMPARES:

$x \in Z$ es par $\Leftrightarrow 2 \mid x$
$x \in Z$ es impar $\Leftrightarrow x \in Z$ no es par

NUMEROS PRIMOS Y TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMETICA:

Decimos que p es primo si, y sólo sí, p tiene exactamente 4 divisores: 1, -1, p, -p. Los números enteros que no son primos, se llaman compuestos.
Todo número natural, mayor que 1, se puede descomponer como el producto de un número finito de factores primos. Esta factorización es única, salvo por el orden de los factores
EJEMPLOS EN EL PDF.

ENTEROS COPRIMOS

Dados dos enteros no nulos a y b, diremos que a y b son coprimos ó primos entre sí, si su máximo común divisor es 1.

DIVISIBILIDAD: p162

Sea $a, b \in Z$ con $a \neq 0$. Diremos que a es divide a b (o que b es múltiplo de a) en Z si existe $c \in Z$ tal que b = a . c

CRITERIO DE DIVISIBILIDAD:

1. Un número es divisible por 2 si y sólo si termina en una cifra par.
2. Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible 3.
3. Un número es divisible por 4 si y sólo si el doble de las decenas más las unidades es divisible por 4.
4. Un número es divisible por 5 si y sólo si la cifra de las unidades es 0 ó 5.
5. Un número es divisible por 7, si y sólo si, al tomar el número que resulta de eliminar las unidades y restarle el doble de las unidades es divisible por 7.
6. Un número es divisible por 9, si y sólo si, la suma de sus dígitos es divisible por 9.
7. Un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan un lugar impar es divisible por 11.

ALGORITMO DE LA DIVISION : p170

Sea a, b ∈ Z con b >0. Entonces existen únicos q, r ∈ Z tales que

$a = b. q + r, \quad 0 \leq r < b.$

Los números q y r se denominan respectivamente el cociente y el resto de la división de a por b .

MAXIMO COMUN DIVISOR:

El máximo común divisor es el mayor numero por le cual se puede dividir dos o mas números. Esto, sin dejar residuo. En otras palabras, MCD es la cifra mas alta por la cual se puede dividir un conjunto de números, dando resultado un numero entero.

CALCULO ALGORTIMICO DEL MISMO (ALGORTIMO DE EUCLIDES): no es muy clara la teoría de eso.

MINIMO COMUN MULTIPLO:

El mínimo común múltiplo (mcm) es la cifra más pequeña que satisface la condición de ser múltiplo de todos los elementos de un conjunto de números. Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene n veces de forma exacta

DESARROLLO S'ADICOS

NUMEROS RACIONALES:

Llamaremos números racionales a todo numero real expresable de la forma M/N donde m, n ∈ Z y n ≠ 0. Denotamos con Q al conjunto de todos los números racionales.

PROPIEDADES DE Q:

1. El conjunto de los números racionales es infinito
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Entre dos números racionales existe siempre un número infinito de números racionales

---

NUMEROS REALES:

El conjunto de los números reales está formado por la unión del conjunto de los números Racionales y el conjunto de los números Irracionales. Los números Irracionales son aquellos que no son racionales, es decir aquellos que no pueden escribirse como un cociente de dos números enteros.

SUMA	PRODUCTO

<table>
<tr><td colspan="2">propiedad conmutativa
$\forall a, b \in Z: a + b = b + a$
$\forall a, b \in Z: a . b = b . a$</td></tr>
<tr><td colspan="2">propiedad asociativa
$\forall a, b, c \in Z: (a + b) + c = a + (b + c)$
$\forall a, b, c \in Z: (a . b) . c = a . (b . c)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ley de cierre
$\forall a, b \in Z: a + b \in Z$
$\forall a, b \in Z: a . b \in Z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Existencia del elemento neutro:
$\forall a \in Z: a + 0 = 0+a = a$
$\forall a \in Z: a . 1 = 1 . a = a$</td></tr>
<tr><td>Existencia de opuesto para cada elemento:
$\forall a \in Z, \exists (-a) \in Z / -a + a = a + (-a)= 0$</td><td>Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma:
$\forall a, b, c \in Z: (a + b).c = a .c + b .c$</td></tr>
<tr><td></td><td>Existencia de inverso para cada elemento no nulo:
$\forall x \in R, x \neq 0, \exists a \in R / x . a = 1$</td></tr>
</table>

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES: "Dado un número real, siempre es posible encontrar un número natural que lo supera." Es decir, R no es acotado superiormente
OTRA PROPIEDAD :"Entre dos números reales distintos existe otro número real"

VALOR ABSOLUTO:

el valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta su signo. el valor absoluto de 3 y de -3 es 3, no existen valores absolutos negativos.

NUMEROS COMPLEJOS:

Se llama número complejo a todo par ordenado de números reales. Es decir, un número complejo tiene la forma: (a,b) con $a,b \in R$
Al conjunto de números complejos se lo designa con la letra C.
Simbólicamente: $C = \{(a,b)/ a\in R \wedge b\in R\}$
La primera componente de cada par se llama componente o parte real del número complejo y la segunda, la componente imaginaria del mismo.
Dado un numero complejo $z = (a,b)$, se definen:

- componente real de Z: $Re(z) = a$

- componente imaginario de Z: *Im(z) = b*

DEFINICIONES:

Un complejo es real si y sólo si su parte imaginaria es cero. z = (a,0)

Un complejo es imaginario si y sólo si su parte real es cero. z = (0,b)

SUMA Y PRODUCTOS EN C:

z1 = (a,b)

z2 = (c,d)

z1 + z2 = (a+c , b+d)

z1 . z2 = (a . c - d . b , a . d + c . b)

AXIOMAS:

Complejos positivos	
SUMA	PRODUCTO
ley de cierre ∀ z1, z2 ∈ C: z1 + z2 ∈ C ∀ z1, z2 ∈ C: z1 . z2 ∈ C	
propiedad asociativa ∀ z1, z2, z3 ∈ C: (z1 + z2)+ z3 = z1 + (z2 + z3) ∀ z1, z2, z3 ∈ C: (z1 . z2). z3 = z1 . (z2 . z3)	
propiedad conmutativa ∀ z1, z2 ∈ C: z1 + z2 = z2 + z1 ∀ z1, z2 ∈ C: z1 . z2 = z2 . z1	
existencia de los elementos simétricos	
existencia del elemento neutro	

COMPLEJOS CONJUGADOS:

Dos números complejos son conjugados si y sólo si tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son números opuestos.

z = (a,b) ⇒ conjugado de z = (a, -b)

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

1) El conjugado del conjugado de cualquier número complejo es el mismo número complejo. $\forall z \in C : \overline{\overline{z}} = z$

2) El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados de dichos números.

$$\forall z_1, z_2 \in C : \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

3) El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados de dichos números.

$$\forall z_1, z_2 \in C : \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

4) El conjugado de una potencia es igual a la potencia del conjugado.

$$\forall z \in C : \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n, \quad n \in N$$

5) Un número complejo es igual a su conjugado si y sólo si es un complejo real.

$$\forall z \in C : z = \overline{z} \Leftrightarrow b = 0$$

$$z = (a,0) \Rightarrow \overline{z} = (a,0)$$

COMPLEJOS CONJUGADOS. PROPIEDADES

6) La suma de un número complejo y su conjugado es el doble de la parte real.

$$\forall z \in C : z + \overline{z} = 2a$$

$$z + \overline{z} = (a,b) + (a,-b) = (a + a, b - b) = (2a,0)$$

7) El producto de un número complejo y su conjugado es igual a la suma de los cuadrados de las dos componentes.

$$\forall z \in C : z.\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$z.\overline{z} = (a,b).(a,-b) = (a^2 + b^2, -ab + ba) = (a^2 + b^2, 0)$$

UNIDAD IMAGINARIA:

Se llama unidad imaginaria, al número complejo imaginario, que tiene la parte real nula y de segunda componente igual a 1.

REPRESENTACION DE LOS COMPLEJOS:
Los números complejos se representan en el plano a partir de un sistema de ejes cartesianos, de tal manera que a cada número complejo le corresponde un punto en el plano y además, a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

- La componente real se representa en el eje horizontal, que por eso se llama eje real **Re(z).**
- La componente imaginaria se representa en el eje vertical, y lo llamamos eje imaginario **Im (z)**

Los números complejos se pueden presentar de dos maneras, FORMA DE PAR ORDENADO (z = a,b) y FORMA BINOMICA (z = a + bi)

MODULO DE LOS COMPLEJOS:

Se define el módulo de un número complejo como el valor positivo de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes. Dado un número complejo z = a + bi

DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS:

Para dividir dos números complejos, siendo el divisor distinto de cero, se multiplica el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor

divisor.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = \frac{a+bi}{c+di}.\frac{c-di}{c-di}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}.\frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi).(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$
