Propiedades de las Integrales Definidas (son 6)

**Propiedad 1:** La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función. Es decir:

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$$

**Demostración**

Consideramos $P = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$ partición de $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{n} k.f(\xi_i).\Delta x_i = \quad k.\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} k.f(\xi_i).\Delta x_i\right] = \lim_{n\to\infty}\left[k.\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i\right] \Rightarrow$$

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore \int_a^b \boldsymbol{k.f(x)dx = k.}\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$$

**Propiedad 2:** Sea $f(x)$ una función y $a \in Dm_f$, entonces se cumple:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

**Demostración**

Consideramos $P = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$ partición de $[a, b]$

Si consideramos que $a = b$ resulta que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i = \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).0 = \quad 0.\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i\right] = \quad \lim_{n\to\infty} 0.\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right] = \quad 0.\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\therefore \int_a^a \boldsymbol{f(x)dx = 0}$$

**ropiedad 3:** La integral indefinida de la suma algebraica de dos, o más, funciones s igual a la suma algebraica de sus integrales. Es decir:

$$\int_a^b [f(x) + g\ (x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

**Demostración**

$$\int_a^b [f(x) + g\ (x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i) + g(\xi_i)\big).\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i).\Delta x_i\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i).\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

**ropiedad 4:** Si en el intervalo $[a, b]$, donde se cumple que $a < b$, las funciones $f(x)$ y $(x)$ cumplen que $g(x) \leq f(x)$ entonces:

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

**Demostración**

Consideramos

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)].\Delta x_i$$

La diferencia $f(\xi_i) - g(\xi_i) \geq 0$ y $\Delta x_i \geq 0$.

Por consiguiente, cada sumando de la suma es no negativo, igual que no es negativa toda la suma ni su límite, es decir:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$$

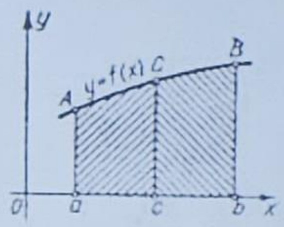
Es decir:

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

$$\therefore \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \geq \int_a^b \boldsymbol{g(x)dx}$$

**Propiedad 5:** Dados tres números arbitrarios $a, b$ y $c$ se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$




**Demostración**

Supongamos que $a \leq c \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i\right] \qquad \text{Con } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Consideramos una partición $P = [a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b]$, tal que cumple: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, y c puede o no pertenecer a la partición, si no pertenece consideramos $P' = P \cup \{c\}$. Por lo cual, sea $P' = [a = x_0, x_1, x_2, \dots c \dots, x_{n-1}, x_n = b]$ y llamo $c = x_k$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i).\Delta x_i + \sum_{i=k}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i$$ Y aplicando la definición de limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i).\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\therefore \boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

**Propiedad 6:** Si $m$ y $M$ son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, en el que se cumple que $a \leq b$, entonces:

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$$

**Demostración**

Por hipótesis $\quad m \leq f(x) \leq M$

Por propiedad anterior $\quad \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$

Pero: $\quad \int_a^b m dx = m.(b-a) \qquad \int_a^b M dx = M.(b-a)$

Entonces:

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$$

$$\therefore \boldsymbol{m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)}$$

Teorema del Valor Medio para el cálculo de integrales

## Teorema del Valor Medio del cálculo integral

Sea $y = f(x)$ es una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y además $M_i = Máx\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ $m_i = mín\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Si además la función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces existe $\xi \in [a, b]$ que verifica:

$$\int_a^b f(x)dx \leq (b-a). f(\xi)$$

Sea $y = f(x)$ es una función integrable en un intervalo $[a, b]$ y además $M_i = Máx\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ $m_i = mín\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M$$

**Demostración**

Supongamos que $a < b$. Si $m$ y $M$ son los valores mínimo y máximo, respectivamente de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, por propiedad 6, tenemos que

$$m.(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$$

$$m.\cancel{(b-a)}.\frac{1}{\cancel{(b-a)}} \leq \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M.\cancel{(b-a)}.\frac{1}{\cancel{(b-a)}} \Leftrightarrow$$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\therefore \boldsymbol{m \leq \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M}$$