UNIDAD IX:
APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS.

Longitud de un arco de curva. Diferencial de arco. Curvaturas de curvas planas.

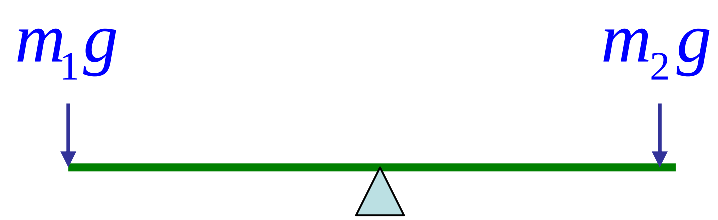
Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan cómo calcular la longitud de un arco de curva y la curvatura de curvas planas mediante la Integral Definida.

Centro de Masa

Torque es una función de la fuerza y la distancia (Torque es la tendencia de un sistema a rotar sobre un punto).

→

Si las fuerza son todas gravitatorias $\text{torque} = \sum mgx$



Si el torque es cero, entonces el sistema está balanceado.

Puesto que la ggravedad es la misma para todo el sistema, podemos sacar el factor g fuera de la ecuación.

$$M_O = \sum m_k x_k$$

Esto es llamado el Momento respecto al origen.

Si dividimos M_o por la masa total, encontramos el <u>centro de masa</u> (punto de balance).

$$M_O = \sum m_k x_k$$

$$\bar{x} = \frac{M_O}{M} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k}$$

$$\bar{x} = \frac{M_O}{M} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k}$$

Para una banda:

δ = density per unit length

(δ es **delta**.)

Momento con respecto al origen:

$$M_O = \int_a^b x \cdot \delta(x)\,dx$$

masa:

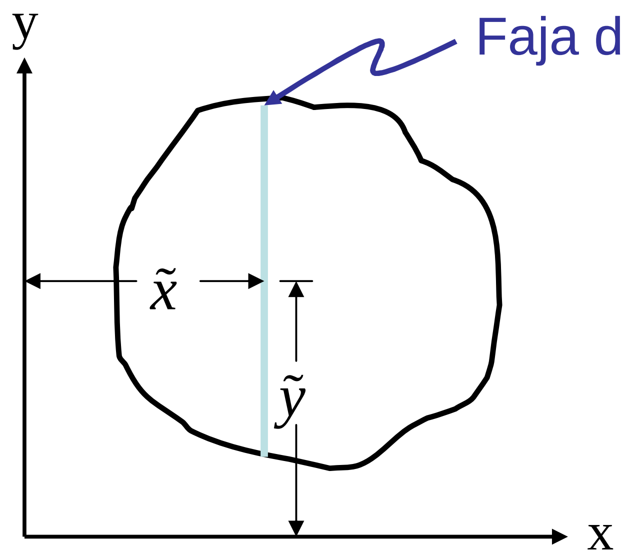
$$M = \int_a^b \delta(x)\,dx$$

centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{M_O}{M}$$

O sea, si la banda tiene densidad uniforme y espesor, el centro de masa est{a a la mitad.

En el caso de una figura, necesitamos dos distancias para localizar el centro de masa.



$\tilde{x} =$ Distancia del eje *y* al centro del intervalo

$\tilde{y} =$ Distancia del eje x al centro del intervalo

Momento eje x: $M_x = \int \tilde{y}\, dm$

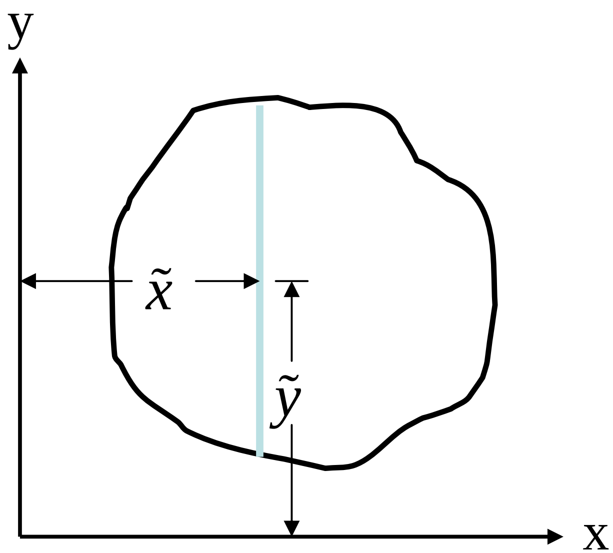
Momento eje y: $M_y = \int \tilde{x}\, dm$

Masa: $M = \int dm$

Center of mass:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

En el caso de una figura, necesitamos dos distancias para localizar el centro de masa.

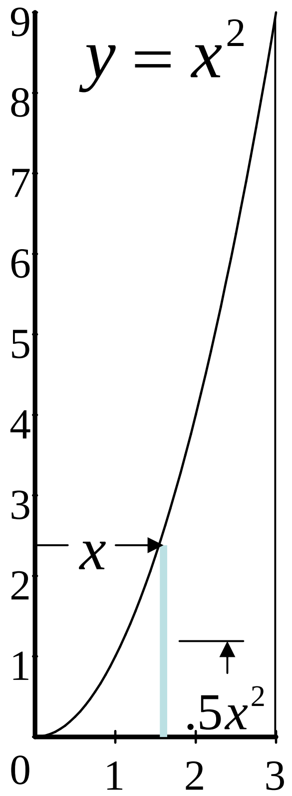


Para un plato de espesor uniforme y densidad, esta puede salir fuera de la ecuación cuando buscamos el centro de masa.

Vocabulario

centro de masa = centro de gravedad = centroide

Densidad constante δ = homogéneo = uniforme



$$M_x = \int_0^3 \frac{1}{2} x^2 \cdot x^2 dx$$

$$M_y = \int_0^3 x \cdot x^2 dx$$

$$M_x = \int_0^3 \frac{1}{2} x^4 dx$$

$$M_y = \int_0^3 x^3 dx$$

$$M_x = \frac{1}{10} x^5 \Big|_0^3$$

$$M_y = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^3$$

$$M_x = \frac{243}{10}$$

$$M_y = \frac{81}{4}$$

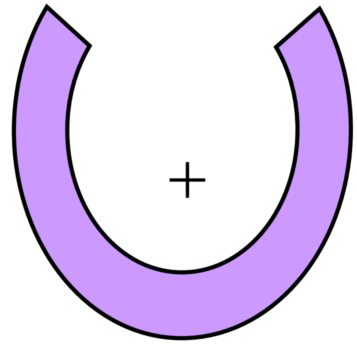
$$M = \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^3 = 9$$

coordenadas del centroide=(2.25, 2.7)

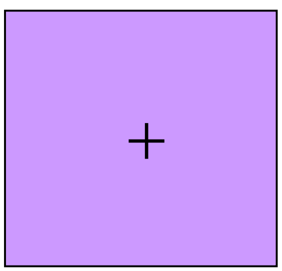
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{81}{4}}{9} = \frac{9}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{243}{10}}{9} = \frac{27}{10}$$

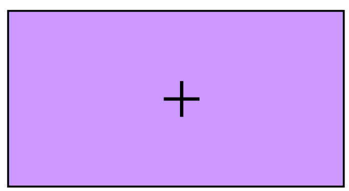
Nota. El centroide no siempre pertenece al objeto.



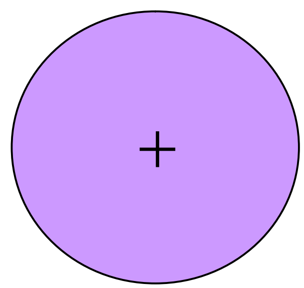
Si el centro de masa es obvio, no es necesario lo anterior:



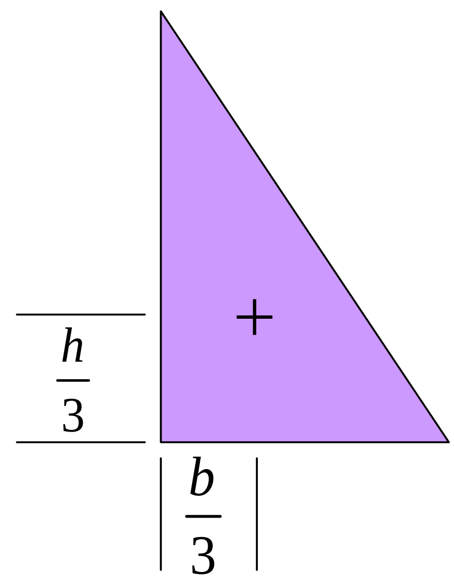
cuadrado



rectángulo



círculo



Triángulo Rect

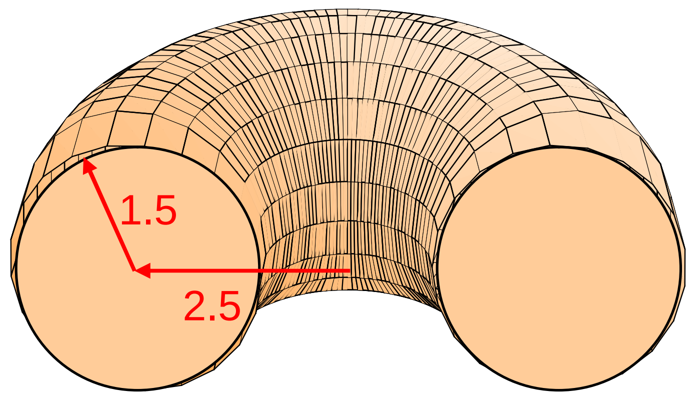
Theorema de Pappus.

Cuando una figura bidimensional rota sobre un eje:

Volumen = area · Distancia recorrida por el centroido.

Area superficie=
= perímetro · distancia recorrida por el centroide <u>del arco</u>.

Considere una rosquilla de 8 cm diámetro y de 3 cm de diámetro sección transversal:

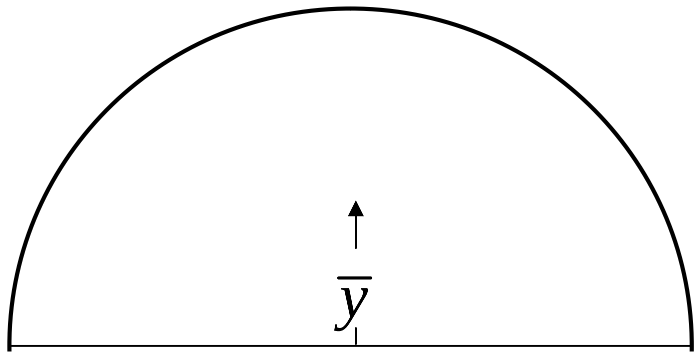


$$V = 2\pi r \cdot \text{ area}$$

$$V = 2\pi(2.5)\cdot\pi(1.5)^2$$

$$V = 11.25\pi^2 \qquad V \approx 111\text{cm}^3$$

Podemos encontrar el centroide de una superficie semi-circular usando el Teorema de Pappus.

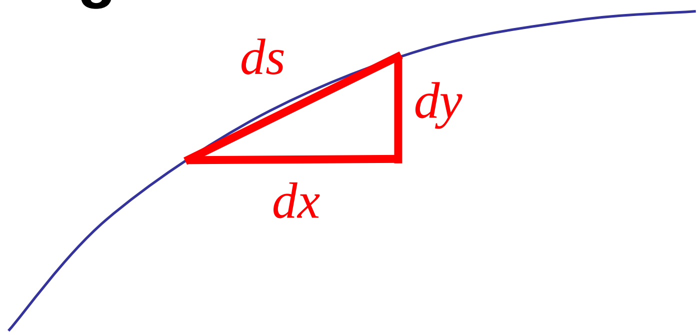


$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$2\pi \bar{y} \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

Longitud de una Curva



Si deseamos aproximar la longitud de una curva, sobre una pequeña distancia podemos medir una línea recta.

Por el Teo de Pitágoras:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$S = \int \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2}$$

$$L = \int \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}\, dx$$

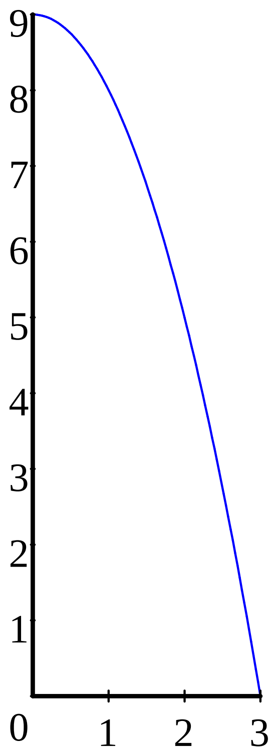
Longitud de una Curva

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Ejemplo 1.

$$y = -x^2 + 9$$

$$0 \le x \le 3$$



$$y = -x^2 + 9$$

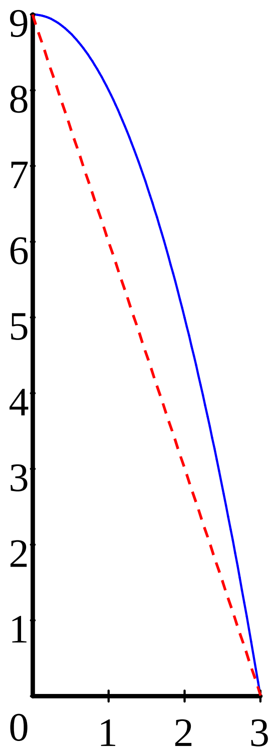
$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + (-2x)^2}\ dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2}\ dx$$

$$L = \frac{\ln\left(\sqrt{37} + 6\right)}{4} + \frac{3\sqrt{37}}{2} \approx 9.74708875861$$



La longitud de un segmento:

$$9^2 + 3^2 = C^2$$

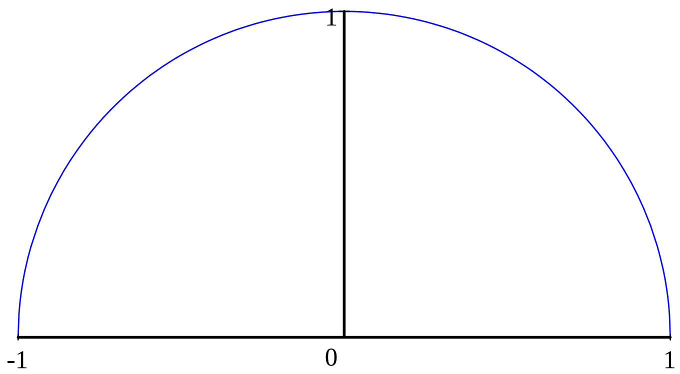
$$81 + 9 = C^2$$

$$90 = C^2$$

$$C \approx 9.49$$

$$L = \frac{\ln\left(\sqrt{37} + 6\right)}{4} + \frac{3\sqrt{37}}{2} \approx 9.74708875861$$

Ejemplo 2.



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

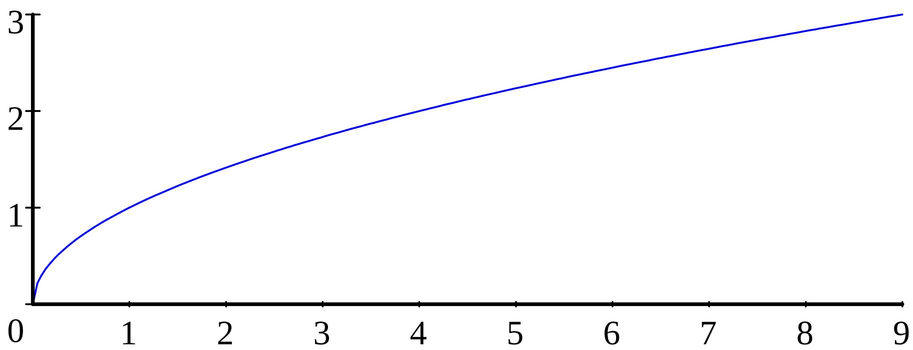
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

$$\approx 3.1415926536$$

$$\approx \pi$$

Si en la ecuación no se puede despejar y, o es más fácil trabajar con x, la longitud de la curva puede encontrarse de la misma forma.



$$x = y^2 \qquad 0 \le y \le 3$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Note que *x* e *y* son inversas.

$$\int (\sqrt{\ }(1 + d(x, y) \wedge 2), y, 0, 3) \quad \approx 9.74708875861$$