# Comunicaciones de Datos

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura.
Universidad Nacional del Nordeste

## Serie de Trabajos Prácticos Nº 2

Códigos Detectores y Correctores de Errores

1. Calcular la Distancia *Hamming:*

   i. Si se transmite la palabra $c = 0101$ y se recibe la palabra $c' = 0011$.
   
   ii. Si se transmite la palabra $c = 100110$ y se recibe la palabra $c' = 110101$.

> Solución:
> i) $d(0101; 0011) = 2$
> ii) $d(100110; 110101) = 3$

2. Utilizando un código con un bit de paridad par se recibe la palabra $c' = 100$, ¿Cómo se decodifica?

> Solución:
> La cantidad de **unos** en la palabra recibida es **impar**, por lo tanto, la palabra recibida es una **palabra no válida**.

3. Considerando el $(9{,}5{,}3) - código\ de\ Hamming$:
   a. Calcule la eficiencia del código.
   b. Obtenga las ecuaciones para el cálculo de los bits de paridad y síndromes (Tabla 1).
   c. Codifique las palabras de datos:
      i. $u_1 = 10111$, ii. $u_2 = 10100$.
   d. Decodifique las palabras código:
      i. $v_1 = 001001100$,
      ii. $v_2 = 111110100$.
      iii. Si se detecta un error, corregir indicando la posición del bit alterado y obtener la palabra de datos originalmente transmitida.

**Tabla 1**

| | $b_5$ | $p_4$ | $b_4$ | $b_3$ | $b_2$ | $p_3$ | $b_1$ | $p_2$ | $p_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_4$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $s_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

> Solución:
> Se tiene un $(9{,}5{,}3) - código\ de\ Hamming$:
> $n$ = 9 bits
> $k$ = 5 bits
> $(n - k)$ = 3 bits
> $d(C) = 3$

a. la eficiencia del código es $\frac{k}{n} = \frac{5}{9}$

b. Las ecuaciones para el cálculo de los bits de paridad (1) y síndromes (2) se pueden obtener a partir de la Tabla 1:

$$(1)\quad \begin{cases} p_4 = b_5 \\ p_3 = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \\ p_2 = b_1 \oplus b_3 \oplus b_4 \\ p_1 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4 \oplus b_5 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} s_4 = b_5 \oplus p_4 \\ s_3 = b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus p_3 \\ s_2 = b_1 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus p_2 \\ s_1 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_4 \oplus b_5 \oplus p_1 \end{cases}$$

c. Codificación:

i. $u_1 = 10111$

Los bits de la palabra de datos son:

| $b_5$ | $b_4$ | $b_3$ | $b_2$ | $b_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Calculamos los bits de paridad utilizando las ecuaciones (1):

$$\begin{cases} p_4 = 1 \\ p_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ p_2 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ p_1 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \end{cases}$$

$u'_1 = 110110101$

| $\oplus$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

$b_5\, b_4\, b_3\, b_2\, b_1$

$p_4\, p_3\, p_2\, p_1$

$=> \ b_5\, p_4\, b_4\, b_3\, b_2\, p_3\, b_1\, p_2\, p_1$

ii. $u_2 = 10100$.

$$\begin{cases} p_4 = 1 \\ p_3 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ p_2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ p_1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \end{cases}$$

| | $b_5$ | $p_4$ | $b_4$ | $b_3$ | $b_2$ | $p_3$ | $b_1$ | $p_2$ | $p_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_4$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $s_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$u'_2 = 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1$

d. Decodificación

i. $v_1 = 001001100,$

$0p100p1pp,$

$$\begin{cases} s_4 = 0 \oplus 0 = 0 \\ s_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \\ s_2 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ s_1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \end{cases}$$

$v'_1 = 01001$

ii. $v_2 = 111110100.$

$1p111p1pp,$

$$\begin{cases} s_4 = 1 \oplus 1 = 0 \\ s_3 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ s_2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ s_1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \end{cases}$$

= > en el bit b3 permutamos el 0 por el 1 y corregimos el error

$=> v_2 = 110110100 \rightarrow$ *bit permutado*

$v'_2 = 11011$

4. Sea el $(6,3,3) - código$ con matriz generatriz $G$ y de control de paridad $H$.

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} ; H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

a. Codifique las palabras de datos:
   i. $d_1 = 011,$
   ii. $d_2 = 101,$
   iii. $d_3 = 111.$
b. Construya la tabla estándar considerando todos los patrones correspondientes a un bit y dos bits erróneos.
c. Decodifique las palabras:
   i. $c_1 = 110010,$
   ii. $c_2 = 100011,$
   iii. $c_3 = 101111.$
d. ¿Qué ocurre con la palabra recibida $c_3$? Escriba sus conclusiones.

Solución:

a. La codificación se realiza mediante la ecuación:

$$\boldsymbol{c = d \cdot G}$$

i. $d_1 = 011$

$$011 * \begin{vmatrix} 1\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1\,0 \end{vmatrix} = \mathbf{011011}$$

i) ej. $(0 \text{ x } 1) + (1 \text{ x } 0) + (1 \text{ x } 0) =$

$= 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

$0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$

$0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

$0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$

$0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

$0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$

ii)

$$\begin{array}{c} 1\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,1\,0 \\ \hline 1\,0\,1\,1\,0\,1 \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{c} 1\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1\,0 \\ \hline 1\,1\,1\,0\,0\,0 \end{array}$$

b) Tabla estándar reducida:

La matriz de control de paridad es:

$$H = \begin{vmatrix} 0\,1\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0\,1 \end{vmatrix}$$

Y su traspuesta :

$$H^T = \begin{vmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{vmatrix}$$

En la tabla estándar, las palabras líderes indican con 1 la posición del error, los síndromes se calculan $h(e) = e \cdot H^T$:

| líderes ($e$) | *síndromes* $h(e) = e \cdot H^T$ |
|---|---|
| 000000 | 000 |
| 000001 | 001 |
| 000010 | 010 |
| 000100 | 100 |
| 001000 | 110 |
| 010000 | 101 |
| 100000 | 011 |

$$\underbrace{|\,000001\,|}_{e} * \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{H^T} = \underbrace{|\,001\,|}_{h(e)}$$

Con 2 bits erróneos:

| líderes ($e$) | *síndromes* $h(e) = e \cdot H^T$ |
|---|---|
| 000011 | 011 |
| 000101 | 101 |
| 001001 | 101 |
| 010001 | 100 |
| 100001 | 010 |
| 000110 | 110 |
| 001010 | 100 |
| 100010 | 001 |
| 001100 | 010 |
| 010100 | 001 |
| 100100 | 011 |
| 011000 | 011 |
| 101000 | 101 |
| 110000 | 110 |

$$\underbrace{|\,000011\,|}_{e} * \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{H^T} = \underbrace{|\,011\,|}_{h(e)}$$

c. Decodifique las palabras:

i. $c_1 = 110010$,

Calculamos el síndrome de la palabra recibida: $h(r) = r \cdot H^T$

$$h(c_1) = c_1 \cdot H^T \quad \underset{e}{|110010|} * \underset{H^T}{\begin{vmatrix} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{vmatrix}} = \underset{h(e)}{|100|} \quad \notin C$$

Por tabla el líder de este síndrome es $e$ = 000100 que sumado a la palabra recibida permite corregir el error:

$$c_1 = 110010 \oplus 000100 = 110110$$

La palabra de datos es $c'_1 = 110$

ii. $c_2 = 100011,$

$$h(c_2) = c_2 \cdot H^T \quad \underset{e}{|100011|} * \underset{H^T}{\begin{vmatrix} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{vmatrix}} = \underset{h(e)}{|000|} \quad \in C$$

iii. $c_3 = 101111.$

$$h(c_3) = c_3 \cdot H^T \quad \underset{e}{|101111|} * \underset{H^T}{\begin{vmatrix} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{vmatrix}} = \underset{h(e)}{|010|} \quad \notin C$$

5. Dadas las matrices $I$ y $P$:

$$I = \begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}; P = \begin{vmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&1\\ 1&1&1 \end{vmatrix}$$

a. Hallar la matriz que caracteriza al $(7,4,3) - código$.
b. Codificar las palabras de datos:
   i. $d_1 = 1011,$
   ii. $d_2 = 1101,$
   iii. $d_3 = 1110,$
   iv. $d_4 = 0011.$

Solución:

a. La matriz que caracteriza al (7,4,3 ) código es la matriz $G = I \mid P$ :

$$G = \left| \begin{array}{cccc:ccc} 1&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1 \end{array} \right| \qquad H = \left| \begin{array}{c:c} 1101 & 100 \\ 1011 & 010 \\ 0111 & 001 \end{array} \right|$$

b. Codificar las palabras de datos:

i. $d_1 = 1011$,

$$|\,1\ 0\ 1\ 1\,| \ . \left| \begin{array}{c} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \right| = |\,1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\,|$$

La palabra código es $d_1$ = 1 0 1 1 0 1 0

ii. $d_2 = 1101$,

$$|\,1\ 1\ 0\ 1\,| \ . \left| \begin{array}{c} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \right| = |\,1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\,|$$

La palabra código es $d_2$ = 1 1 0 1 1 0 0

iii. $d_3 = 1110$,

$$|\,1\ 1\ 1\ 0\,| \ . \left| \begin{array}{c} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \right| = |\,1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\,|$$

La palabra código es $d_3$ = 1 1 1 0 0 0 1

iv. $d_4 = 0011$,

$$|\,0\ 0\ 1\ 1\,| \ . \left| \begin{array}{c} 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \right| = |\,0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\,|$$

La palabra código es $d_4$ = 0 0 1 1 1 0 0

$$\begin{array}{c:c} 1\,0\,0\,0 & 1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 & 0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1 & 1\,1\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,1 & 0\,1\,0 \\ & 1\,1\,0 \\ & 1\,0\,1 \\ & 0\,0\,0 \\ & 1\,1\,1 \\ \cline{2-2} & 1\,0\,0 \\ & \\ & 1\,1\,0 \\ & 1\,0\,1 \\ & 0\,1\,1 \\ & 0\,0\,1 \\ \cline{2-2} & 0\,0\,1 \\ & \\ & 0\,0\,0 \\ & 0\,0\,0 \\ & 0\,1\,1 \\ & 1\,1\,1 \\ \cline{2-2} & 1\,0\,0 \end{array}$$

$$|\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,| \;.\; \begin{vmatrix} 1\,1\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{vmatrix} = |\,0\,0\,0\,|$$

$$\begin{array}{c} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ \hline 0\,0\,0 \end{array}$$

6. Sea el $(7{,}4{,}3) - código$ con matriz de control de paridad $H$:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Decodificar las palabras:

a. $c_1 = 1010010$,

b. $c_2 = 1001100$.

Solución:

$$H^T = \begin{vmatrix} 1\,1\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{vmatrix}$$

| $e$ | $h(e)$ |
|---|---|
| 0 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 |
| 0 0 0 0 0 0 1 | 0 0 1 |
| 0 0 0 0 0 1 0 | 0 1 0 |
| 0 0 0 0 1 0 0 | 1 0 0 |
| 0 0 0 1 0 0 0 | 1 1 1 |
| 0 0 1 0 0 0 0 | 0 1 1 |
| 0 1 0 0 0 0 0 | 1 0 1 |
| 1 0 0 0 0 0 0 | 1 1 0 |

a. $c_1 = 1010010$,

$$c_1 = |\, 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \,| \cdot \begin{vmatrix} 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{vmatrix} = |\, 1\ 1\ 1 \,|\,; \quad c_1 \notin C$$

Por tabla $e = |\, 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \,|$, corregimos la palabra recibida $c_1 = |\, 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \,| \oplus |\, 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \,| = |\, 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \,|$

La palabra válida es: $c_1 = |\, 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0 \,|$

b. $c_2 = 1001100$.

$$c_2 = |\, 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \,| \cdot \begin{vmatrix} 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{vmatrix} = |\, 1\ 0\ 1 \,|\,; \quad c_2 \notin C$$

Por tabla $e = |\, 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \,|$, corregimos la palabra recibida $c_2 = |\, 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \,| \oplus |\, 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \,| = |\, 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \,|$

La palabra válida es: $c_2 = |\, 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \,|$

7. Dado el polinomio generador $(x) = x^4 + x + 1$; determinar la secuencia de comprobación de la trama ($FCS$) y la trama ($T$) para transmitir el mensaje $M = 1011010001$.

Solución:

$G = x^4 + x + 1$

Los coeficientes son: 1 0 0 1 1 $\qquad M = 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$

```
                 1 0 1 0 1 0 1 1 1
1 0 0 1 1 | 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0
            1 0 0 1 1 1
            0 0 1 0 1 1 0
                1 0 0 1 1
                0 0 1 0 1 0 0
                    1 0 0 1 1
                    0 0 1 1 1 1 0
                        1 0 0 1 1
                        0 1 1 0 1 0
                          1 0 0 1 1
                          0 1 0 0 1 0
                            1 0 0 1 1
                            0 0 0 0 1 0
```

```
    1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0
⊕                       0 0 0 0 1 0
T= 1 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0
```

8. Dada la palabra de datos $M = 10100001101$ y el patrón $P = 10111$, determinar en el transmisor la secuencia de comprobación de trama y la trama a transmitir. Asumiendo que la trama se recibió sin error, realice la comprobación en el receptor.

Solución:

Los coeficientes son: 1 0 1 1 1 $M$ = 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1

```
                 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0
1 0 1 1 1 | 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
            1 0 1 1 1
            0 0 0 1 1 0 0 1
                  1 0 1 1 1
                  0 1 1 1 0 1
                    1 0 1 1 1
                    0 1 0 1 0 0
                      1 0 1 1 1
                      0 0 0 1 1 1 0 0
                            1 0 1 1 1
                            0 1 0 1 1 0
                              1 0 1 1 1
                              0 0 0 0 1 0
```

```
   1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0
⊕                      0 0 0 0 1 0
T= 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0
```

```
                 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0
1 0 1 1 1 | 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0
            1 0 1 1 1
            0 0 0 1 1 0 0 1
                  1 0 1 1 1
                  0 1 1 1 0 1
                    1 0 1 1 1
                    0 1 0 1 0 0
                      1 0 1 1 1
                      0 0 0 1 1 1 0 0
                            1 0 1 1 1
                            0 1 0 1 1 1
                              1 0 1 1 1
                              0 0 0 0 0 0
```

## Bibliografía recomendada


[1] D. L. La Red Martínez. Presentaciones de Clases Teóricas. Comunicaciones de Datos, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura. Universidad Nacional del Nordeste.

[2] A. S. Tanenbaum. *Redes de Computadoras*, 4ta. Edición, PEARSON Educación, México, 2003.

[3] W. Stallings. *Comunicaciones y Redes de Computadoras*, 6ta. Edición. Prentice Hall, Madrid, 2000.