UNIDAD 5: ANALISIS COMBINATORIO

La Función Factorial es una función con dominio en los enteros no negativos y con imagen en los números naturales

EJEMPLOS PARA TENER EN CUENTA

ARREGLOS:

Llamamos Arreglos simples de los m elementos de un conjunto tomados de a n, siendo n \leq m, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por n elementos distintos de los m dados.
- Dos grupos se considerarán distintos si y solo sí difieren en algún elemento o si teniendo los mismos elementos, difieren en el orden de los mismos

$$A_n^m = m.(m-1).(m-2)...(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

ARREGLOS CON REPETICION:

Llamamos arreglos de los m elementos distintos, que se pueden repetir hasta n veces, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- cada grupo está formado por n elementos, no necesariamente distintos de los m dados
- Dos grupos se considerarán distintos si difieren al menos en algún elemento, o si teniendo los mismos elementos, difieren en el orden de los mismos

$$A_{n,r}^m = \underbrace{m.m.m..m}_{n \text{ veces}} = m^n$$

PERMUTACIONES SIMPLES:

Llamamos Permutaciones simples de m elementos de un conjunto a todos y cada uno de los arreglos simples que se pueden formar utilizando la totalidad de esos m elementos.

$$A_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = m! = P_m$$

PERMUTACION CON REPETICION:

Llamamos permutaciones con repetición de m elementos entre los cuales hay α de una clase, β de otra clase,, γ de otra clase, siendo:

$$\alpha + \beta + \dots + \gamma = m$$

a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por los m elementos dados.
- Dos grupos se consideran diferentes si y sólo si difieren en el orden de sus elementos.

$$P_{\alpha,\beta,\ldots,\gamma}^{m} = \frac{m!}{\alpha! \beta! \ldots \gamma!}$$

COMBINACIONES SIMPLES:

Llamamos Combinaciones simples de los m elementos de un conjunto tomados de a n, siendo n ≤ m, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por n elementos distintos de los m dados
- Dos grupos se considerarán distintos si y solo sí difieren en alguno de sus elementos.

El número total de combinaciones simples de m elementos tomados de a n es:

$$C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

COMBINACIONES CON REPETICION:

Llamamos combinaciones de los m elementos distintos, que se pueden repetir hasta n veces, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por n elementos, no necesariamente distintos de los m dados.
- Dos grupos se considerarán distintos si y sólo si difieren al menos en algún elemento.

$$C_{n,r}^{m} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

NUMERO COMBINATORIO:

Dados dos enteros no negativos m y n, siendo $n \le m$, llamamos número combinatorio m sobre n y lo anotamos al numero que se obtiene asi:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS:

PROPIEDADES

- 1)Todo número combinatorio de denominador 0 es igual a 1: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!m!} = 1$
- 2)Todo número combinatorio de denominador 1 es igual al numerador:

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{m.(m-1)!}{(m-1)!} = m$$

3)Todo número combinatorio cuyo numerador es igual al denominador es igual a 1:

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = 1$$

PROPIEDADES

Dos números combinatorios se dicen complementarios si tienen el mismo numerador y la suma de sus denominadores es igual al numerador.

4) Dos números combinatorios complementarios son iguales.

$$\binom{m}{n}y\binom{m}{m-n}$$
 son complementarios

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{m-n}$$

FÓRMULA DE STIEFFEL:

La suma de dos números combinatorios en general no es un número combinatorio, pero si sus numeradores son iguales y sus denominadores son consecutivos vale la fórmula. POR EJEMPLO:

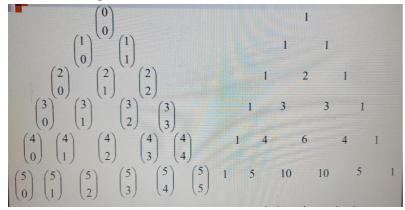
$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$$

$$\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = \binom{10}{4}$$

TRIANGULO DE PASCAL:

Es una disposición ordenada de todos los números combinatorios de la siguiente manera

- En el primer renglón están todos los números combinatorios de numerador 0; en el segundo renglón están todos los números combinatorios de numerador 1; en el tercer renglón los de numerador 2; etc.
- En cada renglón los denominadores crecen desde 0 hasta el numerador correspondiente a ese renglón.



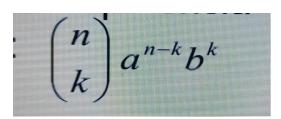
El triángulo así formado tiene dos características importantes:

- Todos los números combinatorios de los laterales del triángulo son iguales a 1
- Cada número combinatorio del interior es igual a la suma de los dos de arriba según la fórmula de Stieffe.

BINOMIO DE NEWTON:

El desarrollo ordenado de (a + b) elevado a la n:

- 1. Contiene (n + 1) términos no semejantes
- 2. Cada término es el producto de tres factores, un número combinatorio, una potencia de a y una potencia de b, esto es:



- 3. Los números combinatorios son todos de numerador n y los denominadores toman valores que van de 0 a n
- 4. En cada término, el exponente de a decrece de n a 0 y el exponente de b crece de 0 a n
- 5. La suma de los exponentes de a y de b es, en todos los términos igual a n
- 6. Los términos equidistantes de los extremos contienen números combinatorios complementarios y por lo tanto son iguales; los de los extremos son iguales a 1
- 7. Un término cualquiera de lugar k en el desarrollo, al que llamamos término k-ésimo es

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{(k-1)}$$

8. Si n es par, el desarrollo tiene un número impar de términos y por lo tanto existe un único término central que ocupa el lugar:

$$K = n/2 + 1$$

9. Si n es impar, el desarrollo tiene un número par de términos y por lo tanto existen dos términos centrales que ocupan los lugares:

$$K1 = (n + 1)/2$$

$$k2 = (n + 3)/2$$