Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Cálculo Diferencial e Integral - L.S.I.

Guías de Trabajos Prácticos

Docentes

- Dr. Paulo M. Guzmán
- Prof. Teresa Mariño
- Prof. Gabriela Ferrarini
- Prof. César Garau
- Dr. Fabián Espinoza

2022

Índice general

0.1. Trabajo Práctico N° 1 - Funciones. Límites. Continuidad

1. En cada caso:

   a) $|2x-5|<1$

   b) $\left|-\frac{1}{2}x+1\right| \geq 3$

   c) $\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|<1$

   d) $D=\left\{x\in\mathbb{R}/3x^2-3x-6\leq 0\right\}$

   i) Determinar el subconjunto de números reales, que verifiquen cada una de las siguientes desigualdades y representar en la recta real.

   ii) Hallar, en caso de ser posible, la amplitud del intervalo, cotas, extremos, elementos máximo y mínimo.

   iii) Analizar si dicho intervalo es o no un entorno. En caso afirmativo, expresarlo como tal.

2. Dadas las siguientes funciones:

$$f_1:\ D_1\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_1(x)=-\frac{3}{2}x+2 \quad si \quad x>0$$

$$f_2:\ D_2\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_2(x)=x^2-2x-3$$

$$f_3:\ D_3\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_3(x)=-x^3+1 \quad si \quad -2<x\leq 2$$

$$f_4:\ D_4\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_4(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f_5:\ D_5\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_5(x)=\frac{2x-3}{3x+2}$$

$$f_6:\ D_6\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_6(x)=\sqrt{x-2}, \quad \forall x\geq 2$$

$$f_7:\ D_7\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}/f_7(x)=\begin{cases} -x+2 & si \quad x<0 \\ -2x^2+4x & si \quad 0<x\leq 2 \\ 2x-4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

   a) Representar gráficamente.

   b) Determinar el dominio, imagen e intersección con los ejes coordenados.

3. Calcular los límites de las siguientes funciones, salvando las indeterminaciones en los casos que sea necesario.

   a)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x+\sqrt[3]{x+6}-1}{3x-5}=$$

   b)
$$\lim_{x\to 2}\left[sen\frac{\pi}{x}+tg^2\frac{\pi}{2x}\right]^2=$$

   c)
$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^5+3x^4+5x+26}{4x^3+8x^2+6x+12}=$$

   d)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-16x}{x^2+4x}=$$

e)
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=$$

f)
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen6x}{2x}=$$

g)
$$\lim_{x\to 1}\frac{tg(x^2-1)}{x-1}=$$

h)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+10}{2x^3+3x^2-5x}=$$

i)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x^3+10)^{\frac{1}{3}}}=$$

j)
$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{20}{x^2-4}-\frac{5}{x-2}\right]=$$

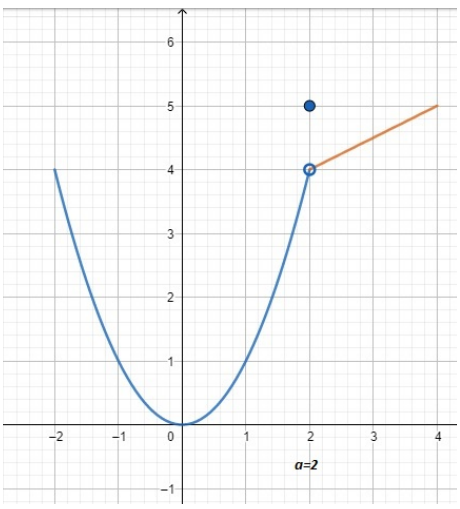
k)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^{2x+8}=$$

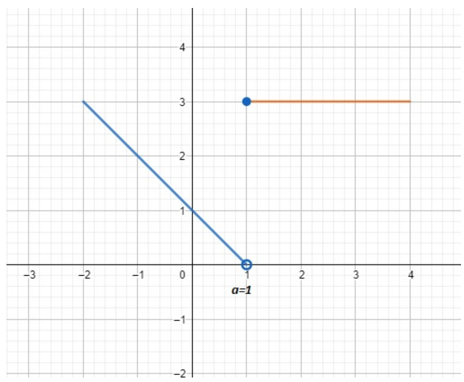
4. En los gráficos propuestos determinar:

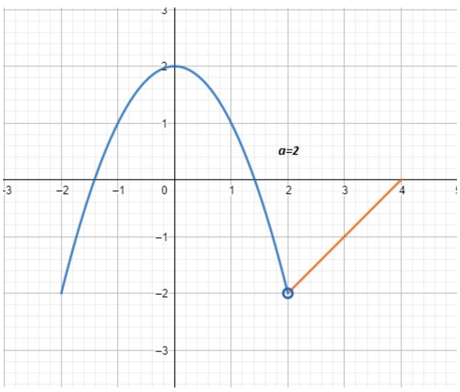
   a) El valor de la función en el punto $x=a$.

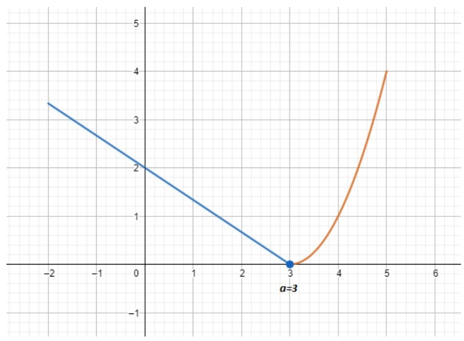
   b) El $\lim_{x\to a} f(x)$, si existe.

   c) La continuidad de cada función en los puntos correspondientes. En caso de ser discontinua, justificar y clasificar.









5. Analizar la continuidad de la siguiente función en $x = 0 \quad y \quad x = 2$. Clasificar en caso de ser discontinua y graficar.

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ \\ x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 2 - x & si \quad x > 2 \end{cases}$$

6. Determinar los valores de c y d para que la siguiente función sea continua en $x = -1$ y $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 4x & si \quad x \leq -1 \\ \\ cx + d & si \quad -1 < x < 2 \\ \\ -5x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

0.1.1. Ejercicios Complementarios

1. En cada caso:

   a) $|x + 2| \leq 2$

   b) $|-x + 2| > 3$

   c) $x^2 \geq 5$

   d) $D = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 - x - 6 \geq 0\right\}$

   i) Determinar el subconjunto de números reales, que verifiquen cada una de las siguientes desigualdades y representar en la recta real.

   ii) Hallar, en caso de ser posible, la amplitud del intervalo, cotas, extremos, elementos máximo y mínimo.

   iii) Analizar si dicho intervalo es o no un entorno. En caso afirmativo, expresarlo como tal.

2. Dadas las siguientes funciones:

$$f_1 : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f_1(x) = -\frac{2}{3}x - 1$$

$$f_2 : D_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f_2(x) = -2x^2 + 8x + 1 \quad si \quad 0 \leq x < 3$$

$$f_3 : D_3 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f_3(x) = x^3 - 2$$

$$f_4 : D_4 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f_4(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$$

$$f_5 : D_5 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f_5(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 3 \\ \\ 2x^2 + 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

$$f_6 : D_6 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f_7(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \leq 1 \\ 2 & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 - 3x & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente.

b) Determinar el dominio, imagen e intersección con los ejes coodenados.

3. Verificar los siguientes límites.

a)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3 + x - 1} = 8$$

b)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \frac{1}{2}$$

4. Calcular los límites de las siguientes funciones, salvando las indeterminaciones en los casos que sea necesario.

a)
$$\lim_{x \to 1} 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 =$$

b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 - 8x}{4x} =$$

c)
$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} =$$

d)
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} =$$

e)
$$\lim_{x \to 3} \frac{sen^2(x^2 - 9)}{x - 3} =$$

f)
$$\lim_{x \to 0} \frac{tg^2 5x}{7x^2} =$$

g)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + 3x - 2}{2x^3 + 3x - 2} =$$

h)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 3}{\sqrt{16x^2 + 3}} =$$

i)
$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x} \right) =$$

j)
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{3x} =$$

k)
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{4x+1} =$$

5. Analizar la continuidad de las siguientes funciones, graficando previamente. Clasificar las discontinuidades en los casos en que se presenten.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x < -1 \\ x^2 & si \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 2x+1 & si \quad x > 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x < -1 \\ x & si \quad -1 < x < 1 \\ 1-x & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

0.2. Trabajo Práctico $N°$ 2 - La Derivada y sus Aplicaciones

1. Sabiendo que la función $f(x) = x^2 + 2x$ es continua.

   a) Construir su gráfica.

   b) Calcular el incremento Δy de la función f cuando $x_0 = 1$ y $\Delta x = 0{,}5$.

   c) Calcular el cociente incremental correspondiente para $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 1{,}5$.

   d) Calcular $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. ¿Qué se obtiene?

   e) Calcular la derivada de la función f en $x_0 = 1$.

2. Determinar las derivadas de cada una de las siguientes funciones, en los puntos indicados, utilizando la definición:

   a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $x_1 = -1$

   b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$

   c) $h(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$

3. Utilizando las fórmulas de derivación, calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$$a(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5x + 1$$
$$b(x) = (x^2 - x)^4$$
$$c(x) = 7x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-2} + ex + 1$$
$$d(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$e(x) = 7e^x - 2^x$$
$$f(x) = \sqrt{4x^3 - 3x^2 + 4x + 1}$$
$$g(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 1}$$
$$h(x) = 3^{2x+1}$$
$$i(x) = senx$$
$$j(x) = cos^4 x$$
$$k(x) = (lnx + 1)\sqrt[3]{x^2 - x}$$
$$l(x) = cotgx$$
$$m(x) = xsenx + \sqrt[3]{x^2}$$
$$n(x) = 3sen(5x^2 + 1)$$
$$o(x) = sen^2 x^3$$
$$p(x) = sen(cosx)$$
$$q(x) = tg^2 x$$
$$r(x) = x^2 + e^{senx}$$
$$s(x) = 2^{tgx}$$
$$t(x) = ln^2(x^2 + 2)$$
$$u(x) = arcsen\sqrt{x}$$
$$v(x) = arccos(1 + x^2)$$

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones, aplicando la derivación logarítmica.

$$f(x) = x^x$$
$$g(x) = (senx)^{(senx)}$$
$$h(x) = x^{\sqrt{x}}$$
$$i(x) = (lnx)^x$$

5. a) Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 0$.

   b) Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de ecuación $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, que son paralelas a la recta de ecuación $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

   c) Determinar la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2$, en el punto de abscisa $x = 1$.

6. Dadas las siguientes funciones.

i) $y = x^4 - 2x^2$

ii) $y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$

iii) $y = sen2x$ en $[0, 2\pi]$

iv) $x^3\dot{(}x+2)^2$

Determinar:

   a) Máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

   b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

   c) Intervalos de concavidad positiva y negativa.

   d) Construir un gráfico y representar todo lo obtenido en los puntos anteriores.

7. a) Determinar a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tenga un mínimo en el punto $(3, -1)$.

   b) Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo local en el punto $(-1, 3)$ y un punto de inflexión en $(0, 1)$.

8. Hallar dos números cuya suma sea 20 sabiendo que el producto es máximo.

9. Verificar los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-senx}{x^3} = \frac{1}{6}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+lnx}{xlnx} = 0$

d) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{lnx} - \frac{1}{x-1}) = \frac{1}{2}$

e) $\lim_{x\to 0}(sec \cdot cosecx - cosecx) = 0$

f) $\lim_{x\to 0}(lnx \cdot tgx) = 0$

g) $\lim_{x\to 0} x^x = 0$

h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(cosx^{cosx}) = 1$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x^4} = 0$

j) $\lim_{x\to\infty}[(x - senx)lnx] = 0$

10. Calcular el polinomio de Taylor o Mc-Laurin según corresponda en los siguientes casos:

    a) $f(x) = cosx$, $n = 7$, $c = \frac{\pi}{2}$.

    b) $g(x) = e^{-x}$, $n = 4$, $c = 0$.

11. Hallar el diferencial de:

    a) $y = x^3 - 2x$

    b) $y = ln(x + 1)$

12. (Eficiencia laboral) Un estudio sobre la eficiencia de los trabajadores del turno matutino de una fábrica indica que el número N de artículos ensamblados por un trabajador promedio está dada por la relación : $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15$ siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio del turno (8 a 13 horas). Se pide hallar:

    a) ¿A qué hora de la mañana la tasa de producción del trabajador (eficiencia) es máxima?

    b) ¿A qué hora es la mínima?

    c) Graficar la curva de producción $N(t)$ para $0 \leq t \leq 5$.

0.2.1. Ejercicios Complementarios

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$,

    a) Hallar el cociente incremental (razón o tasa de cambio promedio) de la función.

    b) Calcular la tasa de cambio promedio en $x = 3 \quad y \quad \Delta x = 0,3$ e interpretar elresultado.

    c) Hallar e interpretar la derivada o razón de cambio instantánea de la función aplicando la definición.

    d) Calcular el valo de la derivada en $x = 3$. Intepretar el resultado.

    e) Calcular el valor del ángulo que determina la recta tangente a la curva con el semieje positivo de las abscisas.

    f) Representar la función y destacar en el gráfico los incrementos en el punto $x = 3$.

2. Derivar las siguientes funciones.

    a) $y = 4x^5 - \dfrac{1}{2}x^4 + 5x - 3$

    b) $(1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$

    c) $y = \dfrac{2}{5}x^{\frac{7}{2}} + \dfrac{11}{\sqrt[3]{x}}$

    d) $y = \frac{6+2x}{4x^2-3x}$

    e) $\sqrt[5]{7 - 8x^2}$

    f) $(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

    g) $y = ln^3(x^2 + 1)$

    h) $e^{\frac{1}{x}} ln(x + 2)$

3. Calcular las derivadas sucesivas de las siguientes funciones hasta el orden indicado.

   a) $y = 3x^4 - 2x^3 - 1 \quad hasta \quad n = 5,$

   b) $sen(17x) \quad hasta \quad n = 3.$

4. Considerando la función del ejercicios 1).

   a) Calcular su diferencial.

   b) Comparar Δy y dy en $x = 3$ y $\Delta x = 0,4.$

   c) Representar en la gráfica, el dy.

0.3. Trabajo Práctico N° 3 - Integrales Indefinidas

1. Calcular las siguientes integrales inmediatas:

   a) $\int x^4 dx$

   b) $\int \frac{1}{x^3} dx$

   c) $\int 5x^6 dx$

   d) $\int \frac{4}{x^4} dx$

   e) $\int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$

   f) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}} dx$

   g) $\int \frac{1}{x} dx$

   h) $\int \frac{3}{4} senx dx$

   i) $\int 2sec^2 x dx$

2. Integrar por descomposición:

   a) $\int (3 - 2x^2 + \frac{2}{x^4}) dx$

   b) $\int (\frac{1}{x} + 2e^x - \frac{3}{x^2}) dx$

   c) $\int (\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}) dx$

   d) $\int (\frac{3\sqrt{x} + 7}{\sqrt[3]{x}}) dx$

3. Para cada caso, determinar la ecuación de la curva que pasa por el punto de coordenadas que se indica, si la pendiente de la recta tangente a la misma en dicho punto está dada por:

   a) $f'(x) = x^3 + 4 \quad en \quad (0, 1)$

   b) $f'(x) = 2senx + e^x \quad en \quad (0, 0)$

   c) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \quad en \quad (1, \frac{3}{4})$

4. Resolver las siguientes integrales por el método de sustitución:

   a) $\int e^{-3x} dx$

   b) $\int sen^3 x cosx dx$

   c) $\int cos(5x) dx$

   d) $\int \frac{dx}{5x - 3}$

   e) $\int \frac{2e^x}{6e^x + 7} dx$

   f) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx$

   g) $\int \frac{senx}{cos^3 x} dx$

   h) $\int tg(4x) dx$

   i) $\int \frac{ln^4 x}{x} dx$

5. Resolver las siguientes integrales por partes:

   a) $\int xe^{3x} dx$

   b) $\int xcosx dx$

   c) $\int x^2 lnx dx$

   d) $\int x^2 senx dx$

6. Integrar las siguientes funciones trigonométricas:

   a) $\int sen^3 x dx$

   b) $\int cos^2 x dx$

   c) $\int sen^2 x dx$

0.3.1. Ejercicios Complementarios

Resolvera las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1+3x+7x^2-2x^3}{x^2}dx$

b) $\int \frac{(2t+1)^2}{3t}dt$

c) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

d) $\int x\sqrt{3x^2+4}dx$

e) $\int te^{t^2}dt$

f) $\int x^3e^{x^4}dx$

g) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}}dx$

h) $\int \left(\sqrt{2}y+1\right)^2dy$

i) $\int \frac{3t^2+1}{t(t^2+1)}dt$

j) $\int \frac{lnx}{x}dx$

k) $\int \frac{\sqrt{lnx}}{x}dx$

l) $\int \left(x^2+5\right)lnxdx$

m) $\int xe^{-x}dx$

n) $\int \frac{x}{e^{2x}}dx$

o) $\int (2x+1)\,e^{3x}dx$

p) $\int x^2e^{3x}dx$

q) $\int (2x+3)\,(3x-2)dx$

r) $\int e^{2x}cosxdx$

s) $\int sen^4xdx$

t) $\int cos^4xdx$

u) $\int tg^3xdx$

v) $\int \frac{dx}{x^2-16}$

w) $\int sen^25xdx$

0.4. Trabajo Práctico $N°$ 4 - La Integral Definida. Aplicaciones

1. Las rectas $y = 2x$, $y = -\dfrac{3}{2}x + 7$ e $y = \dfrac{1}{4}x$, determinan un triángulo

    a) Representar gráficamente y hallar los vértices del triángulo.

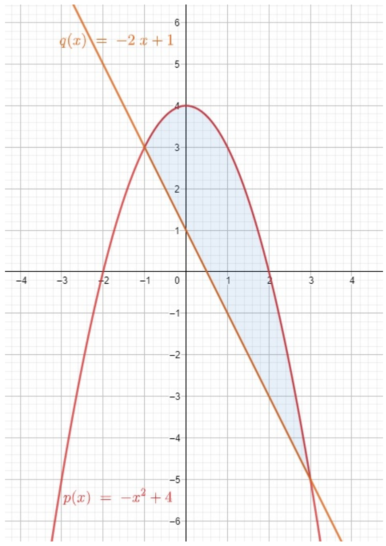
    b) Hallar el área del triángulo.

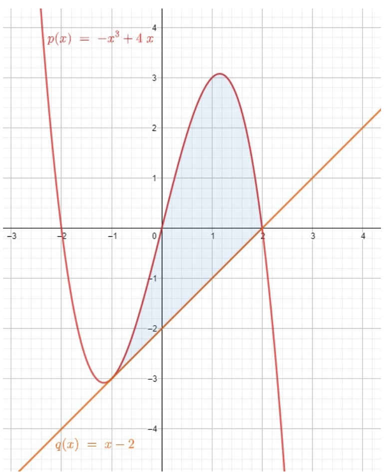
2. Calcular el área limitada por cada una de las siguientes curvas y el eje de las abscisas

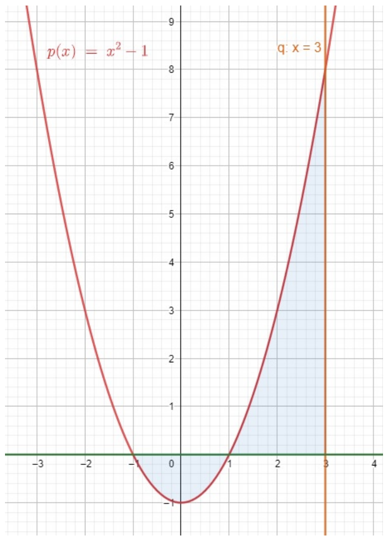
    a) $y = x^2 - 4$

    b) $y = -x^2 + 1$

3. Calcular el área sombreada en cada caso.







4. Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones f y g en cada caso.

   a) $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$

   b) $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 3 - \frac{5}{4}x$

   c) $f(x) = x^2 - x$ y $g(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-3, -6)$

   d) $[f(x)]^2 = 4x$ y $g(x)$ definida como $4x - 3y = 4$

5. Un *compilador* es un software que convirte un código de alto nivel ($C++$ por ejemplo) a uno de más bajo nivel (Assembler). Cierto compilador realiza dicha transformación a una velocidad dada por la expresión $V(t) = 10t\sqrt[3]{2 - t^2}$, donde $V(t)$ es la velocidad de conversión dada en líneas por segundo y t es el tiempo. Calcular la cantidad de líneas transformadas al cabo de un segundo para dicho compilador si en $t = 0$ tenemos 0 líneas transformadas.

6. Hallar la longitud del arco de curva de $y = \sqrt{x^3}$.

   a) En el intervalo $[0, 5]$.

   b) Del punto $(1, 1)$ al punto $(4, 8)$.

7. a) Determinar el volumen del cuerpo engendrado por la curva que se indica en cada caso, cuando giran alrededor del eje coordenado considerado.

      i) $f(x) = x^2 + 3$, entre $x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = 2$, con respecto al eje x.

      ii) $f(x) = 4x^2$, entre $x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = 3$, con respecto al eje y.

   b) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las parábolas $y = x^2 \quad e \quad y^2 = 8x$, alrededor del eje x.

8. De ser posible, hallar las siguientes integrales impropias.

   a) $\int_0^\infty e^{-x}dx$

   b) $\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}dx$

0.4.1. Ejercicios Complementarios

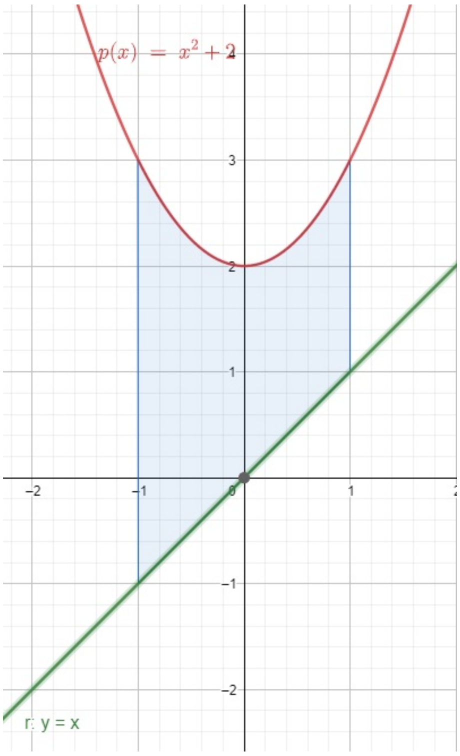
1. Calcular el área limitada por las curvas:

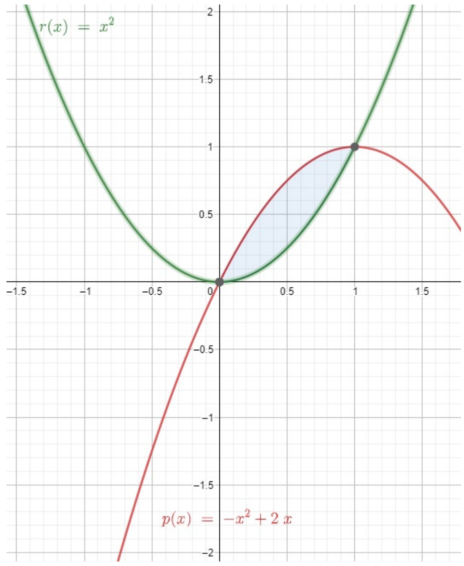
   a) $y = 4 - x^2$ y el eje x.

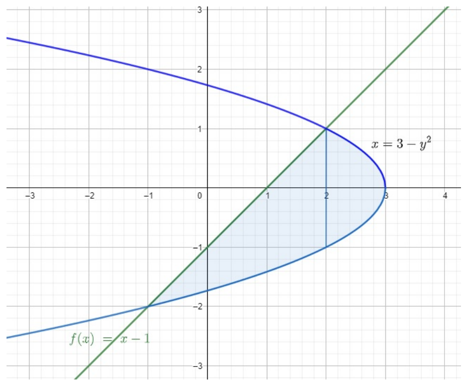
   b) $y = x^2$ e $y = x + 2$.

   c) $y = x^3$ e $y = x$.

2. Calcular, en cada caso, el área sombreada







Aplicaciones en Informática

- En el desarrollo de un software: El cálculo integral no solamente nos permite ver las características de las señales. Sino también nos permite expandirlas trigonométricamente mediante Fourier.
- En la creación y control de un hardware: acá podemos mencionar el análisis de circuitos, en el que podemos ver el caso de la energía disipada a partir de la potencia que tenga el circuito.
- En el manejo de datos o señales: para las señales es posible determinar el valor medio de una señal genérica en cierto intervalo de tiempo, así como su valor eficaz e inclusive determinar otra señal sinusoidal de la misma frecuencia, gracias a las integrales definidas.

0.5. Trabajo Práctico N° 5 - Funciones de Varias Variables

1. Determinar el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ de las siguientes funciones $z = f(x, y)$ y representar gráficamente.

   a) $z = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y}$

   b) $1 + \sqrt{-(x-y)^2}$

   c) $z + ln(x+y)$

   d) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$

   e) $\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$

2. Representar gráficamente en el espacio trimensional.

   a) $x - y = 0$

   b) $y + z = 1$

   c) $2x + 3y + z = 1$

3. Representar gráficamente en le espcaio tridimensional las superficies dadas por las siguientes ecuaciones.

   a) $x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{9}$

   b) $y^2 + z^2 = 4x$

   c) $x^2 - 3y^2 - 2z^2 = 1$

   d) $2x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$

   e) $x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 1$

   f) $z = x^2 - y^2$

4. Determinar dos curvas de nivel de cada una de las siguientes funciones.

   a) $z = x^2 + y^2$

   b) $z = \sqrt{x \cdot y}$

5. Determinar dos superficies de nivel de cada una de las siguientes funciones.

   a) $U = x^2 + y^2 - z^2$

   b) $U = x + y + z$

6. Verificar, utilizando las propiedades de los límites.

   a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^4 + 2xy^2 - 1\right) = 8$

   b) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{2xy}{3x+y} = \frac{4}{3}$

7. Dadas las siguientes funciones, calcular el límite doble y los iterados si existen en los puntos que se indican en cada caso.

   a) $f(x,y) = \dfrac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2} \quad en \quad (0,0)$

   b) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^3 - 6 \quad en \quad (-1,1)$

   c) $f(x,y) = \dfrac{2x-6y+14}{7x-5y-29} \quad en \quad (2,-3)$

   d) $f(x,y) = \dfrac{xy-1}{x^3-y^2} \quad en \quad (1,1)$

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indica. Si es discontinua, clasicar el tipo de discontinuidad.

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy & si \quad (x,y) \neq (1,2) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (1,2) \end{cases} \qquad en \quad (1,2)$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad en \quad (0,0)$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 2 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad en \quad (0,0)$$

0.5.1. Ejercicios Complementarios

1. Determinar e identificar las curvas denivel correspondientes a las siguientes funciones, representar al menos dos curvas en cada caso.

   a) $z = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - 1$

   b) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2y}}$

   c) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25}$

   d) $z = \dfrac{y}{x^2+3}$

   e) $z = 3x + 2y - 1$

2. Determinar las superficies de nivel en las siguientes funciones.

   a) $U = \dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} - 5$

   b) $U = 3x + 2y - z + 1$

   c) $U = x^2 + y^2 - z^2$

   d) $U = \dfrac{y}{x^2+3}$

   e) $U = e^{x^2-y^2+z^2}$

3. Estudiar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

   a)

$$f(x,y) = \begin{cases} 6 & si \quad (x,y) = (1,2) \\ \\ 3x^2y^2 + 2x + y - 1 & si \quad (x,y) \neq (1,2) \bigwedge (x,y) \neq (0,2) \\ \\ 1 & si \quad (x,y) = (0,2) \end{cases} \qquad en \quad (1,2) \quad y \quad (0,2)$$

b)

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 3xyz - 2xy + xz^2 - 2 & si \quad (x,y,z) \neq (1,0,2) \\ & \\ 3 & si \quad (x,y,z) = (1,0,2) \end{cases} \qquad en \quad (1,0,2)$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x} & si \quad (x,y) \neq (1,2) \\ & \\ 0 & si \quad (x,y) = (1,2) \end{cases} \qquad en \quad (1,2)$$

0.6. Trabajo Práctico $N°$ 6 - Derivadas Parciales

1. Calcular aplicando la definición, las derivadas parciales de:

   a) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} \quad en \quad (1,2)$

   b) $f(x,y) = 2x^3y - 3xy + 5 \quad en \quad (1,1)$

2. Determinar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \sqrt{5x-y^2}$

   b) $f(x,y) = x \cdot e^{xy}$

   c) $f(x,y) = cos^2[sen(x+y^2-2]$

   d) $f(x,y) = cos(x^2+y^2+z^2) + ln(\sqrt{xy})$

   e) $f(x,y) = z^2sen^3(x^3+y^2)$

3. Determinar las derivadas parciales que se indican:

   a) $f_{xy}(x,y) \quad si \quad f(x,y) = x \cdot cosy + y \cdot cosx$

   b) $f_{yz}(x,y,z) \quad si \quad f(x,y,z) = e^{xyz}$

   c) $f_{yx}(1,1) \quad si \quad f(x,y) = x^2arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

4. a) Calcular $df(1,1)$ si $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$.

   b) Hallar una aproximación lineal de la función $f(x,y) = ln(x-3y$ en $(7,2)$ y $f(6,9;2,06)$.

   c) La altura de un cono es $h = 30 \quad cm$, el radio de su base $r = 10cm$. ¿Cómo varía, aproximadamente, el volumen de dicho cono si h aumenta en $3mm$ y r disminuye $1mm$? (Volumen del cono: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$).

5. Utilizando la *regla de la cadena*, determinar:

   a) $\dfrac{dU}{dt}$, siendo $U = f(x,y) = x^3 - 2xy$, donde $x = \dfrac{3}{t}$, $\quad y = t^2 - 1$.

   b) $\dfrac{dZ}{dt}$, siendo $Z = f(x,y) = e^{3x+2y}$, donde $x = cost$, $\quad y = t^2$.

   c) $\dfrac{dZ}{dt}$, siendo $Z = f(x,y) = e^x seny$, donde $x = st^2$, $\quad y = s^2t$.

6. Determinar y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

7. Determinar, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $xyz = cos(x+y+z)$.

8. Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones.

   a) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

   b) $z = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1$

   c) $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

   d) $z = x^3 + y^3 + \frac{48}{x} + \frac{48}{y}$

   e) $z = x^3 + y^2 - 3x$

   f) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y + 2$

   g) $z = 5 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$

   h) $z = 3x^2 + xy$

i) $z = \frac{4x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - 6x^2 + y^2 + 9x + y - 2$

9. Un agricultor planta soja y maíz. Se sabe que el beneficio de la producción está dado por

$$B(x) = 1600x + 2400y - 2x^2 - 4y^2 - 4x$$

donde x y y son las cantidades de hectáreas plantadas de soja y maíz respectivamente. Hallar cuántas hectáreas conviene plantar con cada cultivo para maximizar el beneficio.

0.6.1. Ejercicios Complementarios

1. Aproximar $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$ usando diferenciales.

2. Emplear diferenciales para estimar 1 cantidad de estano que se usará en una lata cerrada con diámetro de $8cm$ y una altura de $12cm$; además, la lata debe tener un espesor de $0,04cm$.

3. Utilizando la *regla de la cadena*, determinar las derivadas que se indican:

a) $\dfrac{dw}{dt}$ siendo $w = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = cos2t \quad y \quad z = e^{-3t}.$

b) $\dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$ siendo $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad x = st, \quad y = s \cdot cost \quad y \quad z = s \cdot sent.$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ siendo $z = y^2 tgx, \quad x = t^2 uv, \quad y = u + tv^2$ cuando $t = 2, \quad u = 1 \quad y \quad v = 0.$

0.7. Trabajo Práctico N° 7 - Integrales Paramétricas y Múltiples

1. Resolver las siguientes integrales paramétricas:

a) $\int_{1}^{2} \frac{y}{x} dx =$

b) $\int_{-1}^{2} (2x^2y^{-2} + 2y) dy =$

c) $\int_{0}^{x} (2x - y) dy =$

d) $\int_{1}^{2y} 2xy dy =$

e) $\int_{y}^{\frac{\pi}{2}} senx \cdot cosy dx =$

2. Calcular las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{2} (x + y) dx dy =$

b) $\int_{-1}^{1} \int_{-2}^{2} (x^2 - y^2) dy dx =$

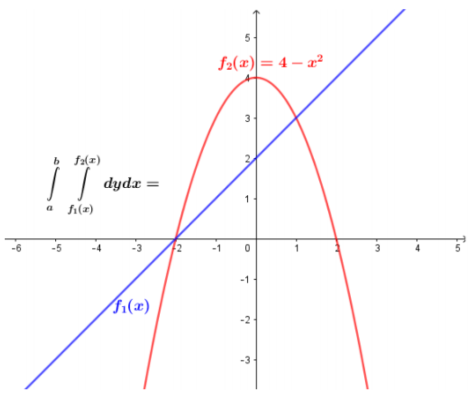
c) $\int_{0}^{2} \int_{0}^{1} xy dx dy =$

d) $\int_{1}^{2} \int_{0}^{4} (x^2 - 2y^2 + 1) dx dy =$

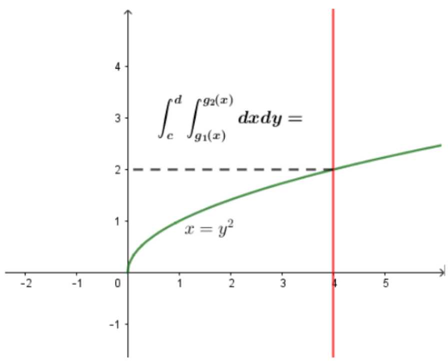
e) $\int_{0}^{3} \int_{0}^{2} \int_{0}^{1} (x + y + z) dx dy dz =$

f) $\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} x^2y^2z^2 dz dy dx =$

3. Calcular el área que corresponde a cada una de las siguientes integrales. Dibujar las gráficas de las funciones en los casos en que corresponda.



a)



b)

c) A un Licenciado en Sistemas se le encarga construir, en un depósito de una empresa, una central de procesamiento de datos. Para ello necesita saber el área disponible para así poder ubicar las distintas computadoras. El arquitecto le informa que la región que puede utilizar esta limitada por las curvas

$$f_1(x) = 1 - x \quad y \quad f_2(x) = 3 - x^2$$

medida en metros. ¿Cuál será el área que puede utilizar el Licenciado?

d) $\int_{1}^{2} \int_{2x}^{3x+1} dydx =$

e) $\int_{-2}^{1} \int_{x+2}^{4-x^2} dydx =$

0.8. Trabajo Práctico N° 8 - Ecuaciones Diferenciales

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$

   b) $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$

   c) $4xdy - ydx = x^2dy$

   d) $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y^2}{1+x}$

   e) $\frac{ds}{dx} = e^{3x+2s}$

   f) $e^x y \frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

   g) $y' = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

   h) $\frac{dS}{dr} = kS$

   i) $\frac{dP}{dt} = P(1-P)$

   j) $\frac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a la condición inicial que se indica.

   a) $senx(e^{-y}+1)dx = (1+cosx)dy, \quad y(0) = 0$

   b) $(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0, \quad y(1) = 0$

   c) $y' + ty = y, \quad y(1) = 3$

   d) $x' = 7(x^2+1), \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

3. Resolver las siguientes ecuaciones, utilizando una sustitución adecuada.

   a) $(x-y)dx + xdy = 0$

   b) $(x+y)dx + xdy = 0$

   c) $(y^2+yx)dx + x^2dy = 0$

   d) $y' = \frac{y-x}{y+x}$

   e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

4. Determinar si la ecuación dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

   a) $(2x+4)dx + (3y-1)dy = 0$

   b) $(seny - ysenx)dx + (cosx + xcosy)dy = 0$

   c) $(x^3+y^3)dx + 3xy^2dy = 0$

   d) $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

5. Determinar el valor de k de modo que la ecuación dada, sea exacta.

   a) $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$

   b) $(2x - ysenxy + ky^4)dx - (20xy^3 + xsenxy)dy = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, sujetas a las condiciones iniciales correspondientes.

   a) $y' + 5y = 20, \quad y(0) = 2$

b) $\frac{dy}{dx} = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}), \quad y(0) = 2$

c) $L\frac{di}{dt} + Ri = E, \quad L, R \quad y \quad E \quad son \quad constantes, \quad i(0) = i_0$

d) $\frac{dQ}{dx} = 5x^4 Q, \quad Q(0) = -7$

7. (Crecimiento de una Población) Supongamos que $P(t)$ es el número de individuos en una población (en general)con tasa de crecimiento y mortalidad constantes β y δ (en nacimientos o muertes porindividuo por unidad de tiempo). Entocnes, durante un intervalo corto de tiempo Δt, ocurren aproximadamente $\beta P(t)\Delta t$ nacimientos y $\delta P(t)\Delta t$ muertes, de tal manera que el cambio en $P(t)$ está dado aproximadamente por

$$\Delta P \simeq (\beta - \delta)P(t)\Delta t$$

, y por lo tanto

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = kP$$

, donde $k = \beta - \delta$.

De acuerdo con los datos proporcionados en www.censud.gov, la población mundial total a mediados de 1999 alcanzó la cifra de 6000 millones de personas, en ese entonces con una tasa de incremento de alrededor de 212000 personas por día. Considerando que el crecimiento natural de la población continúa a esta tasa, se desea responder las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual k?

b) ¿Cuál será la población mundial a la mitad del siglo XXI?

c) ¿Cuánto tomará a la población mundial incrementarse 10 veces? Considere que algunos demógrafos piensan que 60000 millones de personas es el máximo nivel para que el planetapueda continuar suministrando los alimentos de forma adecuada.

0.9. Trabajo Práctico N° 9 - Sucesiones y Series

1. Considerar las siguientes secuencias de números:

   a) Triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, ...

   b) Cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, ...

   c) Primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

   d) De Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

   ¿Se podría programar una función que calcule el n-ésimo término, asumiendo que siempre se cumple la ley de formación de estos primeros elementos? En caso afirmativo, explicítela.

2. Dos ciclistas se preparan para una competencia. Pablo comienza recorriendo 1,000 metros y todos los días agrega 1,000 metros más, en tanto que Emilio empieza con 200 metros y cada día duplica la distancia alcanzada el día anterior, ¿cuántos metros recorre cada uno el décimo día?

3. Hallar, si fuera posible, una cota para las siguientes sucesiones, ¿son sucesiones acotadas?, ¿son convergentes? ($n \in \mathbb{N}$).

   a) $(a_n) = n$

   b) $(b_n) = \dfrac{1}{n}$

   c) $(c_n) = (-1)^n$

4. Determinar en cada caso si la sucesión es *convergente, divergente* u *oscilante*:

   a) $(a_n) = 2n$

   b) $(b_n) = \dfrac{1}{2n}$

   c) $(c_n) = 2n(-1)^n$

   d) $(d_n) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

   e) $(e_n) = \sqrt{n^2+1}$

   f) $f_1 = f_2 = 1, \quad f_n + 2 = f_n + f_{n+1}$

5. a) Sume los 10 primeros números naturales.

   b) ¿Es cierto que $\sum\limits_{n=1}^{12} i = 78$?.

   c) Determinar una estrategia para sumar los n primeros números naturales, cualquiera sea n.

   d) Buscar una estrategia para sumar los cuadrados de los n primeros números naturales.

6. Analizar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$$

7. Al cortar un triángulo equilátero de área 1, por los puntos medios de los lados, se obtiene un triángulo equilátero de área $\frac{1}{4}$. Al hacer lo mismo infinitas veces con los sucesivos triángulos, ¿se podría hallar la suma de todas las áreas obtenidas? Si fuera posible, ¿cuánto vale dicha suma?.

8. Aquiles que está en A, corre para alcanzar a una tortuga, que está en B. Cuando Aquiles llega a B la tortuga ya ha avanzado hasta C. Cuando Aquiles llega a C, la tortuga ha avanzado de nuevo; y así sucesivamente. Es decir, siempre que Aquiles llega a donde estaba la tortuga, ésta ya ha avanzado algo, ¿alcanza Aquiles a la tortuga?, ¿dónde?

9. Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes series. Fundamentar.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+cos(n^3)}{2^n+n}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(lnn)^n}$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$