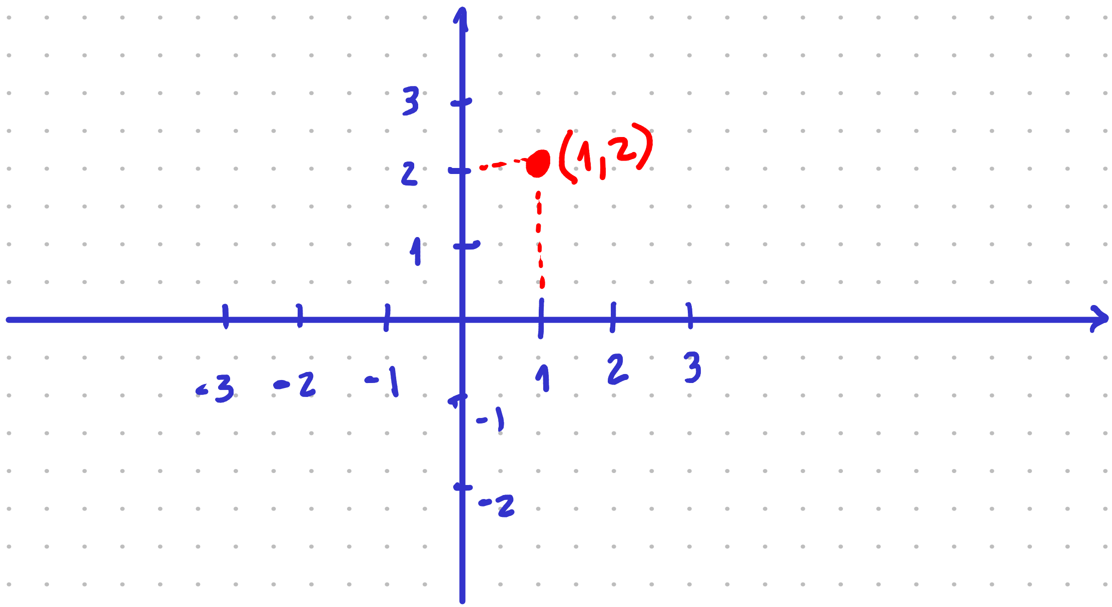
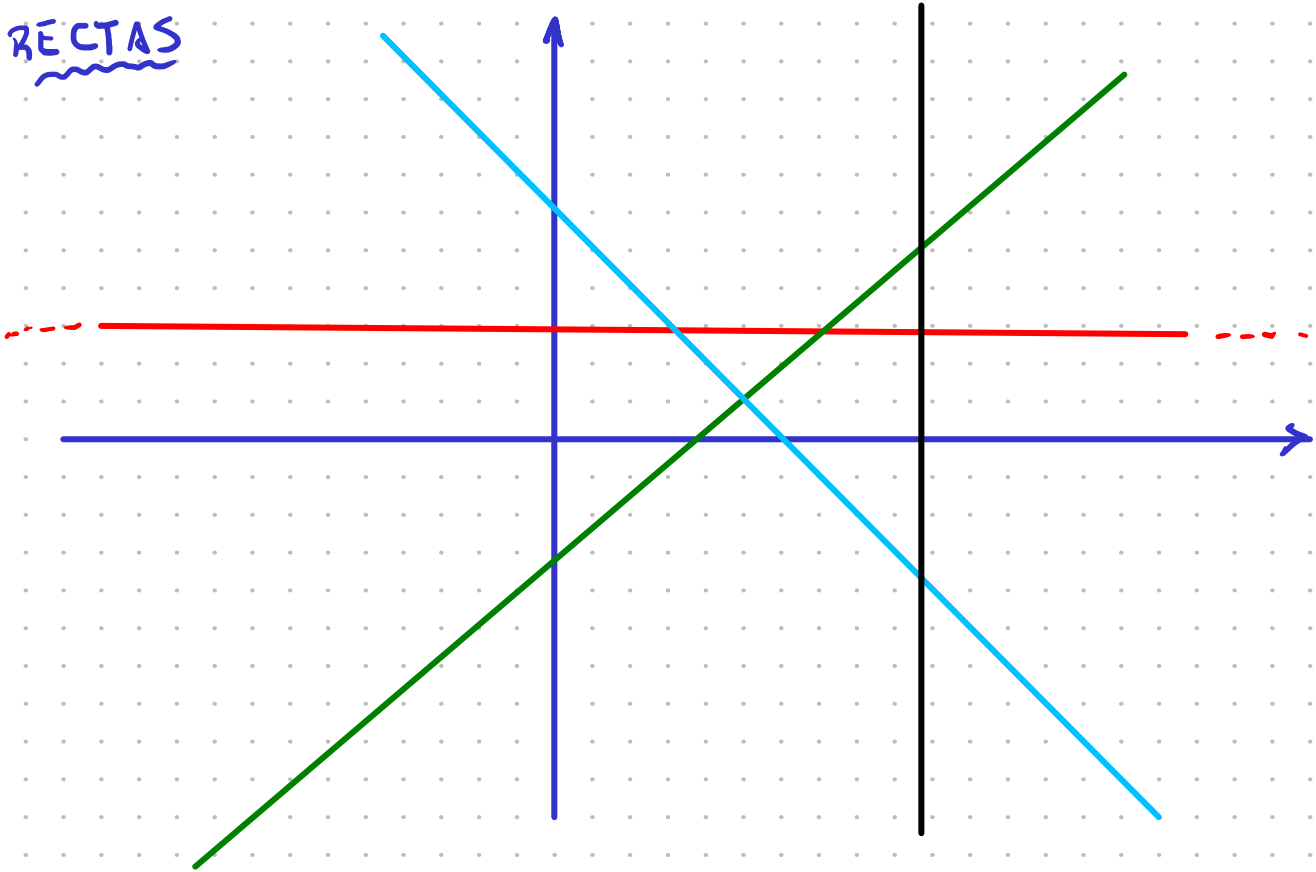
27/06/2023

NOCIONES DE GEOMETRIA ANALITICA

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS



RECTAS



La ecuación general de la recta es

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

donde A, B y C son constantes (A y B no deben ser simultáneamente nulos)

si $B \neq 0$: $\quad Ax + C = -By$

$$y = \underbrace{-\frac{A}{B}}_{a} x \underbrace{- \frac{C}{B}}_{b}$$

$$\therefore \boxed{y = a \cdot x + b}$$

ecuación explícita de la recta

$\underset{\sim\sim\sim}{\text{si}}\ A \neq 0$ $\qquad Ax = -By - C$

$$x = \underbrace{-\frac{B}{A}}_{c}\, y \underbrace{- \frac{C}{A}}_{d}$$

$$\boxed{x = cy + d}$$

Asumamos de nuevo que $B \neq 0$.

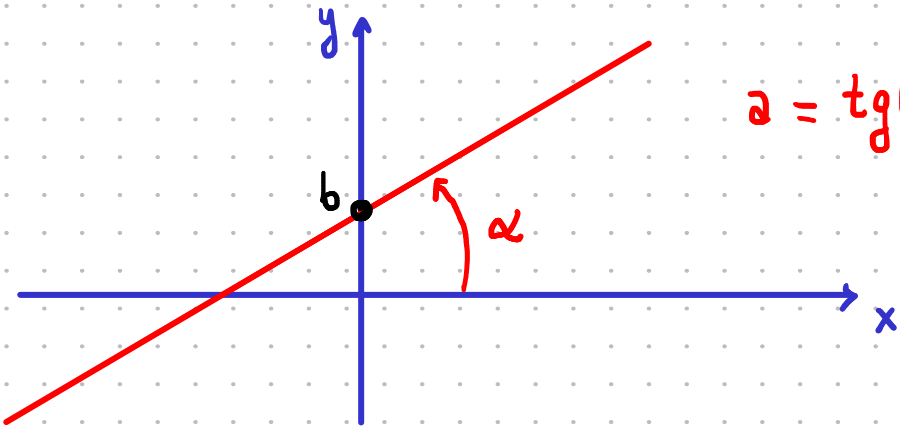
¿Qué pasaría si $C = 0$? $\qquad Ax + By = 0$

$$y = \underbrace{-\frac{A}{B}}_{a} \cdot x$$

$$\therefore \quad y = a x$$

En la ecuación explícita: $y = a \cdot x + b$

a se llama pendiente de la recta



$a = tg(\alpha)$

b se llama ordenada al origen

La ecuación general es $Ax + By + C = 0$

$$Ax + By = -C$$

si $C \neq 0$ entonces $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$

$$\frac{x}{\underbrace{\left(-\frac{C}{A}\right)}_{p}} + \frac{y}{\underbrace{\left(-\frac{C}{B}\right)}_{q}} = 1$$

La ecuación segmentaria es $\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$

Dada $-2x + y - 4 = 0$

$A = -2$

$B = 1$

$C = -4$

(2) Hallar la ecuación explícita y la segmentaria

Explícita: $y = 2x + 4$

$a = 2$

$b = 4$

Segmentaria:

$$-2x + y = 4$$

$$-\frac{2x}{4} + \frac{y}{4} = 1$$

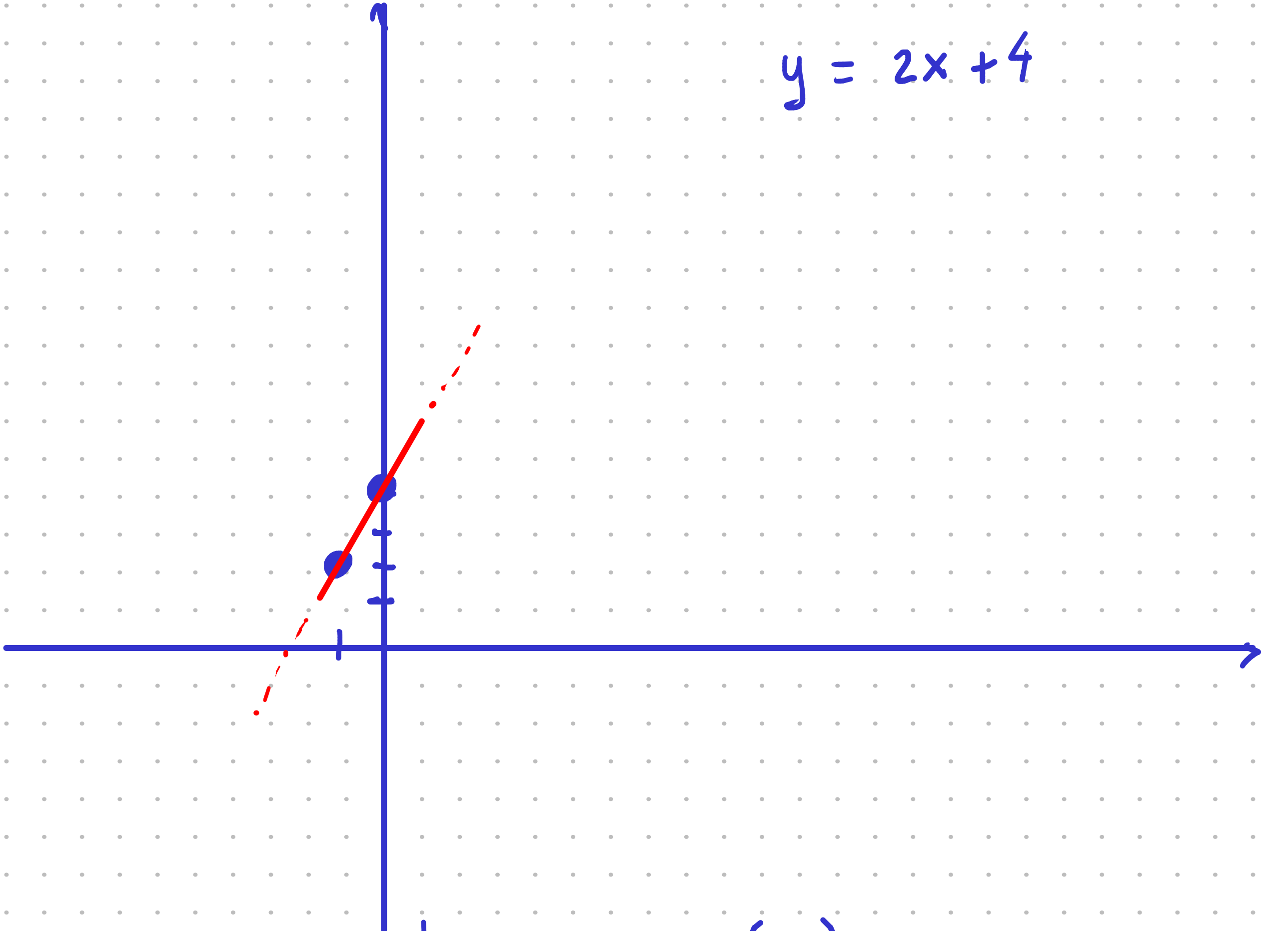
$$-\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$$

$$\frac{x}{(-2)}+\frac{y}{4}=1$$

$p=-2$

$q=4$

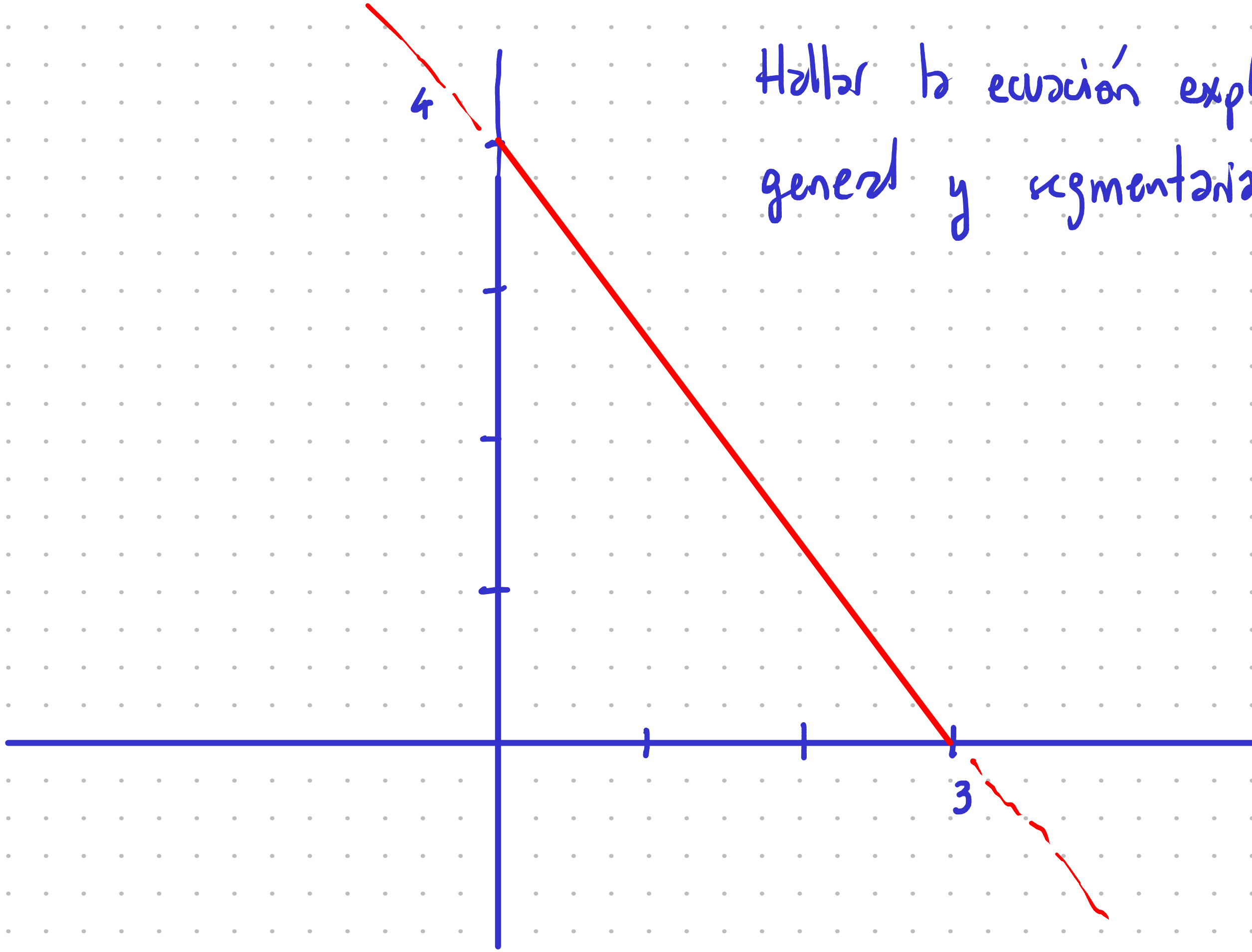
$y = 2x + 4$



si $x = 0 \Rightarrow y = 4$. La recta pasa por $(0,4)$

si $x = -1 \Rightarrow y = 2$

Hallar la ecuación explícita, general y segmentaria



$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

Explícita:

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

General

$$\boxed{0 = -y - \frac{4}{3}x + 4}$$

$A = -4/3$

$B = -1$

$C = 4$

Segmentaria:

$$\frac{4}{3}x + y = 4$$

$$\boxed{\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1}$$

$p = 3$

$q = 4$

si $x=3$

$$\cancel{1} + \frac{y}{4} = \cancel{1}$$

$$\frac{y}{4} = 0 \Rightarrow y=0 \quad \therefore (3,0) \text{ está en la recta}$$

si $y=4$:

$$\frac{x}{3} + \cancel{1} = \cancel{1}$$

$$\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow x=0 \quad \therefore (0,4) \text{ está en la recta}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA DETERMINADA POR LA PENDIENTE Y UN PUNTO

a: pendiente

la recta pasa por un punto (x_1, y_1)

$$\rightarrow \quad y = a.x + \underbrace{b}_{\text{desconocido}}$$

Como la recta pasa por (x_1, y_1) se tiene que

$$\rightarrow \quad y_1 = a.x_1 + b \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = y_1 - ax_1}$$

$$\therefore \quad y = a \cdot x + y_1 - ax_1$$

Otra manera: restando las dos ecuaciones

$$y - y_1 = ax + \cancel{b} - ax_1 - \cancel{b}$$

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)}$$

Ej: Sea $a = 1/2$ y $P = (2,3)$. Hallar la ecuación de la recta con pendiente a y que pase por el P

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

Como la recta pasa por $P = (2,3)$ tenemos que

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$$

$$3 = 1 + b$$

$$b = 2$$

Rta: $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 2}$

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Nos dan dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y un $P_2 = (x_2, y_2)$ por donde pasa una recta. Hallar la ecuación de la recta:

La ecuación de la recta es: $y = \underbrace{a}_{?} . x + \underbrace{b}_{?}$

$$\begin{cases} y_1 = a . x_1 + b \\ y_2 = a . x_2 + b \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 = ax_2 + \cancel{b} - ax_1 - \cancel{b}$$

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\therefore \boxed{a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \leftarrow$$

Con el a resuelto, podemos despejar b:

$$\boxed{b = y_1 - a \cdot x_1}$$

Otra manera

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot (x - x_1)}$$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por

$P_1 = (-1,3)$ y $P_2 = (3,5)$

$$y = ax + b$$

$$3 = a.(-1) + b$$

$$-\quad 5 = a.3 + b$$

$$5-3 = 3a + a$$

$$2 = 4a$$

$$\boxed{a = 1/2}$$

$$b = 5 - 3.a$$

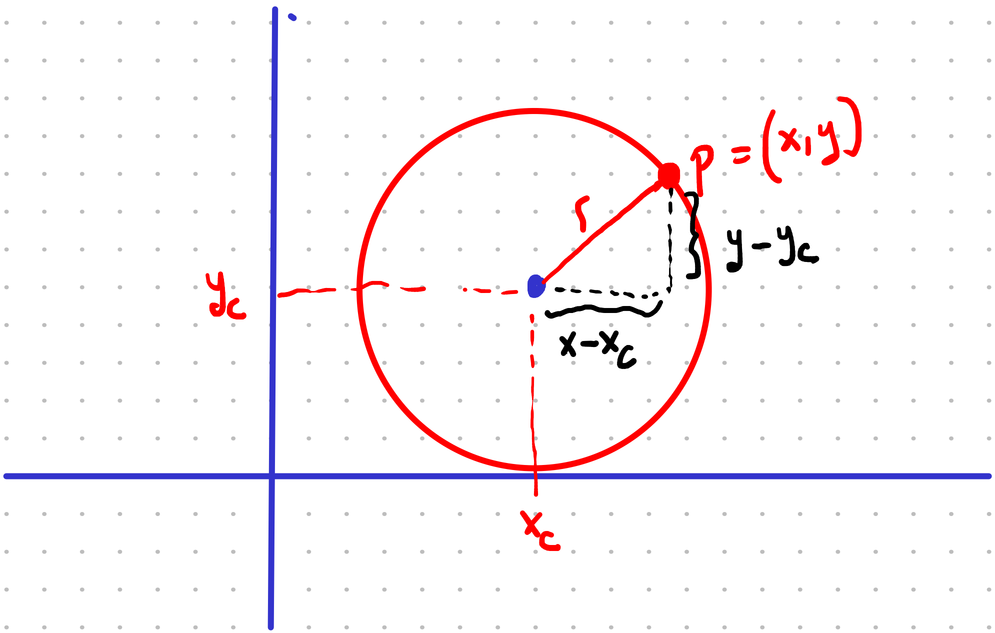
$$= 5 - 3.\frac{1}{2} = \frac{10-3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\boxed{b = \frac{7}{2}}$$

$$\therefore \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$$

CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro



$$\boxed{r^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$$

Ecuación canónica de la circunferencia

si $x_c = y_c = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2 x x_c + x_c^2 + y^2 - 2 y y_c + y_c^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + \underbrace{(-2x_c)}_{D}x + \underbrace{(-2y_c)}_{E}y + \underbrace{x_c^2 + y_c^2 - r^2}_{F} = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Ecuación general de la circunferencia

Ej: Hallar la ecuación de la circunferencia con centro $P = (-2,1)$ y radio 3

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Ej: Del dibujo deducimos que $(x_c, y_c) = (-2, 3)$ y el radio $r = 3$.

$$\boxed{9 = (x+2)^2 + (y-3)^2}$$

Ec. canónica

Hallemos la ecuación

$$\cancel{9} = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + \cancel{9}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

$D = 4$

$E = -6$

$F = 4$