ÁLGEBRA

Licenciatura en Sistemas de Información- UNNE

<TRABAJO PRÁCTICO N°4: NÚMEROS NATURALES>

ACTIVIDADES 4,5,6 Y 8

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{10^{2n} - 1 = 11}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$

Primero, veamos que la proposición es válida para $n = 1$

$$10^{2.1} - 1 = 11k$$

$$10^{2} - 1 = 11k$$

$$100 - 1 = 11k$$

$$99 = 11.9 = 11k, \qquad k = 9 \in \mathbb{N}$$

Luego, *P (1)* es verdadero

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{10^{2n} - 1 = 11\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}} \in \mathbb{N}$$

Supongamos ahora que *P (h)* es verdadera y veamos que *P (h+1)* también lo es

$\boldsymbol{n = h}$

$$10^{2h} - 1 = 11k, k \in \mathbb{N}$$

Suponemos que *P (h)* es verdadera (HIPÓTESIS INDUCTIVA)

$\boldsymbol{n = h + 1}$

$$10^{2(h+1)} - 1 = 11k', k' \in \mathbb{N}$$

Debemos probar que *P (h+1)* es verdadera (TESIS INDUCTIVA)

Cálculo auxiliar:

Por Hipótesis inductiva, se tiene:

$10^{2h} - 1 = 11k, k \in \mathbb{N} \rightarrow$

$\rightarrow 10^{2h} = 11k + 1, k \in \mathbb{N}$ **(*)**

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{10^{2n} - 1 = 11k, k} \in \mathbb{N}$$

Demostración:

T.I: $10^{2(h+1)} - 1 = 11k', k' \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{10^{2(h+1)} - 1 =}$$

$= 10^{2h+2} - 1 =$ (Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma)

$= 10^{2h}.10^2 - 1 =$ (Producto de potencias de Igual base)

$= (11k + 1).100 - 1 =$(Hipótesis inductiva y cálculo auxiliar)

$= 11k.100 + 100 - 1 = 11k.100 + 99 =$ (Prop. distributiva del producto con respecto a la suma)

$= 11k.100 + 11.9 =$(99=11.9 , escrituras equivalentes)

$= 11.(k.100 + 9) =$ (Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma)

$= 11k', k' \in \mathbb{N}$ (Ley de cierre del conjunto de los números naturales)

Luego, $P\ (h+1)$ es verdadero

Por lo tanto: $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{10^{2n} - 1 = 11k, k} \in \mathbb{N}$

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{3^{2n} - 1 = 8k, k} \in \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{n = 1}$

Primero, veamos que la proposición es válida para $n = 1$

$$3^{2.1} - 1 = 8k$$

$$3^{2} - 1 = 8k$$

$$9 - 1 = 8k$$

$$8 = 8.1 = 8k, \qquad k = 1 \in \mathbb{N}$$

- Luego, *P (1)* es verdadero

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{3^{2n} - 1 = 8k, k} \in \mathbb{N}$$

Supongamos ahora que *P (h)* es verdadera y veamos que *P (h+1)* también lo es

- $\boldsymbol{n = h}$

$$3^{2h} - 1 = 8k, k \in \mathbb{N}$$

Suponemos que *P (h)* es verdadera (HIPÓTESIS INDUCTIVA)

- $\boldsymbol{n = h + 1}$

$$3^{2(h+1)} - 1 = 8k', k' \in \mathbb{N}$$

Debemos probar que *P (h+1)* es verdadera (TESIS INDUCTIVA)

Cálculo auxiliar:

Por Hipótesis inductiva, se tiene:

$$3^{2h} - 1 = 8k, k \in \mathbb{N} \rightarrow$$
$$\rightarrow 3^{2h} = 8k + 1, k \in \mathbb{N}$$

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{3}^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}} - \mathbf{1} = \mathbf{8}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$$

Demostración:

$3^{2(h+1)} - 1=$

$= 3^{2h+2} - 1 =$ (Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma)

$= 3^{2h}.3^2 - 1 =$ (Producto de potencias de Igual base)

$= (8k+1).9 - 1 =$ (Hipótesis inductiva y cálculo auxiliar (*))

$= 8k.9 + 9 - 1 = 8k.9 + 8 =$ (Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma)

$= 8k.9 + 8.1 =$ (8=8.1; escrituras equivalentes)

$= 8.(k.9+1) =$(Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma)

$= 8k', k' \in \mathbb{N}$ (Ley de cierre del conjunto de los números naturales)

Luego, *P (h+1)* es verdadero

Por lo tanto: $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{3}^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}} - \mathbf{1} = \mathbf{8}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$

PROPIEDADES:

- **Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}: a.(b + c) = a.b + a.c$$

- **Producto de potencias de Igual base**

$$x^m . x^n = x^{m+n}, cualquiera\ sea\ m, n \in \mathbb{N}\ y\ x \in \mathbb{R}$$

- **Ley de cierre del conjunto de los números naturales**

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: (a + b) \ \in \mathbb{N}$$

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{n^2 + n = 2k, k} \in \mathbb{N}$$

$\boldsymbol{n = 1}$ Primero, veamos que la proposición es válida para $n = 1$

$$1^2 + 1 = 2k$$

$$2 = 2.1 = 2k, con\ k = 1 \ \in \mathbb{N}$$

Luego, *P (1)* es verdadero

Supongamos ahora que *P (h)* es verdadera y veamos que *P (h+1)* también lo es

- $\boldsymbol{n = h}$

$h^2 + h = 2k, k \in \mathbb{N}$ Suponemos que *P (h)* es verdadera (HIPÓTESIS INDUCTIVA)

- $\boldsymbol{n = h + 1}$

$(h + 1)^2 + (h + 1) = 2k', k' \in \mathbb{N}$ Debemos probar que *P (h+1)* es verdadera (TESIS INDUCTIVA)

4. DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN LA VALIDEZ DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{n^2 + n = 2k, k} \in \mathbb{N}$$

<u>Demostración:</u>

$$(h+1)^2 + (h+1) =$$

$= \ (h^2 + 2h + 1) + (h+1) =$ (Cuadrado de un binomio)

$= (h^2 + h + h + 1) + (h+1) =$ *(2h=h+h)*

$= (h^2 + h) + (h+1) + (h+1) =$ (Propiedad asociativa de la suma)

- $= (h^2 + h) + 2(h+1) =$ $(\mathit{Equivalentes}\text{:}\ (h+1) + (h+1) = 2(h+1))$
- $= 2k + 2.(h+1) =$ (Hipótesis inductiva)
- $= 2(k + h + 1) =$ (Prop. distributiva del producto con respecto a la suma)
- $= 2k', k' \in \mathbb{N}$ (Ley de cierre del conjunto de los números naturales) Luego, *P (h+1)* es verdadero

Por lo tanto: $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{n^2 + n = 2k},\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$

PROPIEDADES:

- Propiedad asociativa de la suma

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a+b)+c = a+(b+c)$$

- Cuadrado de un binomio

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}\ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

ACTIVIDAD 4

- g) $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \cdot n < n^2 + 2$

1) Pruebo P(1)

$$Sea\ n = 1$$
$$2.1 = 2$$
$$1^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \longrightarrow \begin{array}{c} 2 < 3 \\ 2.1 < 1^2 + 2 \end{array}$$

P(1) es V.

C.A.

$$1 \leq h$$
$$2.1 \leq 2 \cdot h$$
$$2 \leq 2h$$
$$h^2 + 2 + 3 \leq h^2 + 2h + 3$$

$\downarrow$

Consistencia de la desigualdad

2) Supongo que P(h) es V, pruebo P(h+1)

Hipótesis inductiva:
$2 \cdot h < h^2 + 2$

$Quiero\ probar\ que\ (Tesis): 2 \cdot (h+1) < (h+1)^2 + 2$

Esto es: $2.(h+1) < \underbrace{h^2 + 2h + 1}_{\text{Cuadrado de un binomio}} + 2 = h^2 + 2\text{h} + 3$

Demostración

$$2(h+1) \underset{\text{P. Distributiva}}{=} 2h + 2 \underset{\text{H. I. y } 2 < 3}{<} h^2 + 2 + 3 \underset{\text{C.A.}}{\leq} h^2 + 2\text{h} + 3 = (\text{h}+1)^2 + 2$$

ACTIVIDAD 4

- g) $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \cdot n < n^2 + 2$

- Luego, como P(h+1) es V:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 \cdot n < n^2 + 2$$

- Propiedades utilizadas:
- Propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.
- $\forall\ a, b, c \in \mathbb{N}: a(b + c) = ab + ac$
- Cuadrado de un binomio.
- $\forall\ a, b\ \in\ \mathbb{N}: (a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$
- Consistencia de desigualdad con respecto a la suma.
- $\forall\ a, b, c\ \in\ \mathbb{N}: Si\ a < b\ entonces\ a + c < b + c$
- Consistencia de desigualdad con respecto al producto.
- $\forall\ a, b, c\ \in\ \mathbb{N}: Si\ a < b\ entonces\ a.c < b.c$

ACTIVIDAD 5

- Demostrar que la suma del cuádruple de los primeros números naturales es igual a 2n(n+1).

Primero veamos a qué nos estamos refiriendo cuándo decimos "la suma del cuádruple de los primeros números naturales":

$$4.1 + 4.2 + 4.3 + \cdots + 4n = \sum_{i=1}^{n} 4i$$

Probaremos entonces por inducción sobre n, esta propiedad.

ACTIVIDAD 5

- Demostrar que la suma del cuádruple de los primeros números naturales es igual a 2n(n+1).

1) Pruebo P(1)

$$Sea\ n = 1$$
$$4.1 = 2.1(1+1)$$
$$4 = 2.2$$
$$4 = 4$$

Luego, P(1) es V

2) Supongo que P(h) es V, pruebo P(h+1)

Hipótesis inductiva:

$$\sum_{i=1}^{h} 4i = 2h(h+1)$$

$$Quiero\ probar\ que\ (Tesis): \sum_{i=1}^{h+1} 4i = 2(h+1)[(h+1)+1) = 2(h+1)(h+2)$$

ACTIVIDAD 5

- Demostrar que la suma del cuádruple de los primeros números naturales es igual a 2n(n+1).

$$\sum_{i=1}^{h+1} 4i = \sum_{i=1}^{h} 4i + 4(h+1) = 2h(h+1) + 4(h+1) = 2h(h+1) + 2.2(h+1) = 2(h+1)(h+2)$$

Sumatoria:
4.1+4.2+…+4.h+4.(h+1)
Propiedad asociativa

H. I.

4=2.2

Factor común
(Propiedad
distributiva).

Luego, como P(h+1) es V: $\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} 4i = 2n(n+1)$

6. ¿LA SUMA DE TRES NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS ES SIEMPRE DIVISIBLE POR 3? JUSTIFICAR

Probemos con números y veamos si se puede establecer una conclusión…

$3 + 4 + 5 = 12 \ \wedge \ \ 3|12$ en efecto $3 \,.\, 4 = 12$ donde $4 \in \mathbb{Z}$

$24 + 25 + 26 = 75 \ \wedge 3|75$ en efecto $3 \,.\, 25 = 75$ donde $25 \in \mathbb{Z}$

$209 + 210 + 211 = 630 \ \wedge 3|630$ en efecto $3 \,.\, 210 = 630$ donde $210 \in \mathbb{Z}$

DIVISIBILIDAD

Sea a, b $\in$ Z y b $\neq$ 0.

Si el resto de dividir a por b es cero, se dice que: " a es múltiplo de b", o

" b es divisor de a" o que

" b divide a "a" ".

En símbolos:

$b|a \Leftrightarrow \exists\, q \in Z \,/\, a = q.b$

Lo realizado para distintas ternas de números naturales consecutivos, nos lleva a pensar que la pregunta planteada es en realidad una afirmación matemática cuyo valor de verdad es VERDADERO.

Siendo esta nuestra conjetura, vamos a intentar demostrarla por el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA, ya que los números sobre los cuales se hace la afirmación pertenecen al conjunto de los números naturales y tienen la particularidad de ser consecutivos.

Primeramente, vamos a expresar en lenguaje simbólico lo que queremos probar:

LA SUMA DE TRES NÚMEROS NATURALES CONSECUTIVOS ES SIEMPRE DIVISIBLE POR 3

¿Cómo podemos expresar la suma de tres números naturales consecutivos?

Llamando n a un número natural cualquiera, podemos escribir a sus consecutivos como: $n+1$ y $(n+1)+1=n+2$

Luego la su suma queda expresada de la siguiente manera: $n+(n+1)+(n+2)$

Ahora bien el resultado de esta suma debe ser divisible por 3. Utilizando la definición de Divisibilidad se tiene que:

$$n+(n+1)+(n+2)=3.k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

DIVISIBILIDAD

Sea a, b $\in$ Z y b $\neq$ 0.

Si el resto de dividir a por b es cero, se dice que: " a es múltiplo de b", o
" b es divisor de a" o que
" b divide a "a" ".

En símbolos:

b|a $\Leftrightarrow$ $\exists$ q$\in$Z / a = q.b

Ahora que tenemos formulado nuestro enunciado en forma simbólica, procedamos a demostrarlo por el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA.

Probemos que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; n + (n+1) + (n+2) = 3.k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto probamos que:

$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}: \; n + (n+1) + (n+2) = 3.k}$ **para algún** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$

$\boldsymbol{n = 1}$

Primero, veamos que la proposición es válida para $\boldsymbol{n = 1}$

$1 + (1+1) + (1+2) = \; 6 = 3.2$ con $2 \in \mathbb{Z}$ Luego, *P (1)* es verdadero

Supongamos ahora que *P (h)* es verdadera: $\boldsymbol{n = h}$

$\forall h \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{h + (h+1) + (h+2) = 3.k}$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ (HIPÓTESIS INDUCTIVA)

Debemos probar que *P (h+1)* es verdadera : $\boldsymbol{n = h + 1}$

$$(\boldsymbol{h+1}) + [(\boldsymbol{h+1}) + 1] + [(\boldsymbol{h+1}) + 2] = 3.k\acute{} \text{ para algún } k\acute{} \in \mathbb{Z} \text{ (TESIS INDUCTIVA)}$$

$(h+1) + [(h+1)+1] + [(h+1)+2] = (h+1) + [h+2] + [h+3] = \; \boldsymbol{h + (h+1) + (h+2)} + 3 = \; \boldsymbol{3.k} + 3$

$= 3k + 3 = 3\,.(k+1)$

como k y 1 son números enteros, por la ley de cierre de la suma en $\mathbb{Z}$ resulta otro número entero. Luego $(k+1) \in \mathbb{Z}$.

Llamando a $k\acute{} = (k+1)$ se tiene que $3k + 3 = 3k\acute{}$ con $k\acute{} \in \mathbb{Z}$

$$\therefore (h+1) + [(h+1)+1] + [(h+1)+2] = 3.k\acute{} \text{ para algún } k\acute{} \in \mathbb{Z}$$

Luego, *P (h+1)* es verdadero

8. En cada caso, determinar $m \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq m$:

a) $\frac{1}{n} < 0{,}027$

$$\frac{1}{n} < 0{,}027 \Rightarrow \quad 1 < n.0{,}027 \Rightarrow \quad \frac{1}{0{,}027} < n \Rightarrow \quad 37{,}037\ldots < n$$

Llegamos a que los valores de n que son mayores que $37{,}037\ldots$, verifican la desigualdad

Es decir que a partir de $n \geq 38$ la desigualdad se verifica.

Por lo tanto si tomamos $m = 38$, se tiene que $\forall n \geq 38$:

$$\frac{1}{n} < 0{,}027$$