Unidad 1: Funciones. Límites y Continuidad en funciones de una variable

Propiedades básicas de los números reales

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, las cuatro propiedaes básicas de la suma son:

S_1: Propiedad Conmutativa $a + b = b + a$.

S_2: Propiedad Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$.

S_3: Propiedad de existencia del elemento neutro] Existe un número real llamado cero 0, tal que para todo número real se verifiva $a + 0 = 0$.

S_4: Propiedad de existencia del inverso aditivo] Dado un número real a, existe un número real que llamamos *inverso aditivo de* a, e indicamos $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

Las propiedades básicas del producto son también 4 y se corresponden con las de la suma. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

P_1: Propiedad Conmutativa $a \cdot b = b \cdot a$.

P_2: Propiedad Asociativa $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

P_3: Propiedad de existencia del elemento neutro] Existe un número real distinto de cero llamado uno 1, tal que para todo número real se verifiva $a \cdot 1 = a$.

P_4: Propiedad de existencia del inverso multiplicativo] Dado un número real a distinto de cero, existe un número real que llamamos *inverso multiplicativo de* a, e indicamos a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Ahora, una propiedad que vincula la suma y el producto.

D: Propiedad Distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Las siguientes propiedades se refieren a la relación de orden que existe entre los números reales. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

O_1: Propiedad de Tricotomía. Vale una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

O_2: Propiedad Transitiva. Si

$$a < b \wedge b < c$$

entonces

$$a < c$$

O_3: Propiedad de Monotonía de la Suma. Si

$$a < b$$

entonces, cualquiera sea el número real c, se verifica

$$a + c < b + c$$

O_4: Propiedad de Monotonía del Producto. Si

$$a < b$$

entonces, cualquiera sea el número real $c > 0$, se verifica

$$c \cdot a < c \cdot b$$

Ahora, utilizando las propiedades previas, vamos a deducir algunas propiedades elementales de los números reales. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

1. Propiedad Cancelativa de la Suma y Producto: Si

$$a + c = b + c$$

entonces,

$$a = b$$

Si

$$a \cdot b = a \cdot c \quad \wedge a \neq 0$$

entonces,

$$b = c$$

2. Unicidad del Cero: Si
$$a + b = a$$
entonces debe ser,
$$b = 0$$

3. Cualquiera sea el número real a, se verifica
$$a \cdot 0 = 0$$

Módulo o Valor Absoluto de un número Real

Consultar:

- Cálculo Diferencial e Integral - Ricardo Noriega - página 56.
- Introducción al Análisis Matemático. Cálculo 1. Hebe Rabuffetti. Página 16.

Dado un número real a, llamaremos *módulo o valor absoluto de a* al mismo a si a es positivo o cero, y $-a$ si a es negativo, es decir:

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Lo que estamos diciendo es que, el módulo de un número real es siempre mayoy o igaul a cero.

En términos de raíces cuadradas, el módulo de un número real tiene la siguiente caracterización:

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad \forall a \in \mathbb{R} \qquad a \geq 0$$

Propiedades

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
2. Si $b \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$.
4. Si $b > 0$ entonces
$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

Desigualdad muy utilizada

Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$.

- Intervalo Cerrado $[a, b]$, es el conjunto de números reales formado por a, b y todos los comprendidos entre ambos.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$$

La longitud del intervalo $[a, b]$ es el número no negativo $b - a$.

- Intervalo Abierto (a, b), es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$$

La longitud del intervalo (a, b), también es el número real no negativo $b - a$.

- Intervalo Semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha $(a, b]$, es el conjunto de números reales formado por b y los números comprendidos entre a y b.

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$$

Análogamente se define el intervalo $[a, b)$.

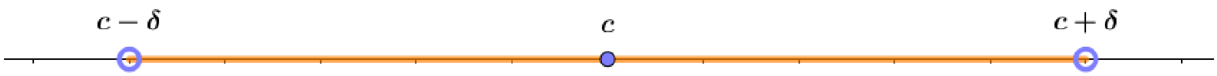
Generalizando, tenemos:

- $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$
- $(b, +\infty] = \{x \in \mathbb{R}/x > b\}$
- $(-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq c\}$
- $(-\infty, d) = \{x \in \mathbb{R}/x < d\}$
- $(-\infty, -\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Entorno

Si c es un punto cualquiera de la recta real y δ un número real positivo. Entorno de centro c y radio δ es el intervalo abierto $(c-\delta; c+\delta)$ y lo denotamos por $E_{(c,\delta)}$.

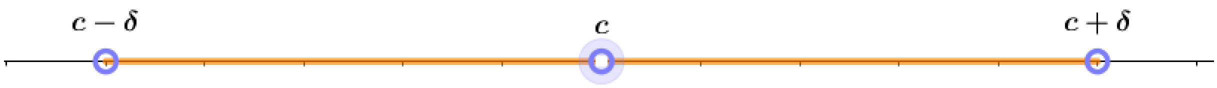
$$E_{(c,\delta)} = \{x \in \mathbb{R}/c - \delta < x < c + \delta\} = \{x \in \mathbb{R}/ |x - c| < \delta\}$$



Entorno Reducido

Si c es un punto cualquiera de la recta real y δ un número real positivo. Entorno reducido de centro c y radio δ es el intervalo abierto $(c - \delta; c + \delta)$ del cual se extrae el punto c y lo denotamos por $E'_{(c,\delta)}$.

$$E'_{(c,\delta)} = \{x \in \mathbb{R}/c - \delta < x < c + \delta \wedge x \neq c\} = \{x \in \mathbb{R}/0 < |x - c| < \delta\}$$



Conjuntos Acotados

Cota Superior

num real

subconj

k es una cota superior de un conjunto C de números reales si y sólo si k es un número real que no es superado por ningún elemento del conjunto. Es decir,

$$k \text{ es cota superior del conjunto } C \Leftrightarrow \forall x \in C : x \leq k$$

Un conjunto está acotado superiormente, si y sólo si tiene cota superior. Por ejemplo, $\mathbb{R}^-$ está acotado superiormente, ya que cualquier real no negativo es una cota superior de dicho conjunto. Observemos que si un conjunto tiene una cota superior, tiene infinitas cotas superiores. En el ejemplo anterior, el cero es una cota superior, ya que si $x \in \mathbb{R}^-$, resulta $x < 0$. Obviamente, cualquier número real positivo a, es también una cota superior para el conjunto $\mathbb{R}^-$, pues si $x < 0 \wedge 0 < a$, entonces $x < a$.

El conjunto de los números reales no está acotado superiormente ya que, para cualquier número real k, siempre es posible encontrar otro número real x tal que $x > k$.

Supremo

s es Supremo de un conjunto C de números reales si y sólo si

1. s es cota superior de C, y

2. si k es cualquier cota superior de C, entonces $s \leq k$.

Máximo

Un subconjunto de números reales tiene *máximo*, si tiene supremo y éste pertenece al subconjunto.

Cota Inferior

i es una cota inferior de un conjunto C de números reales si y sólo si i es un número real que no supera a ningún elemento del conjunto. Es decir,

$$i \text{ es cota inferior del conjunto } C \Leftrightarrow \forall x \in C : i \leq x$$

Infimo

j es el Ínfimo de un conjunto C de números reales si y sólo si

1. j es cota inferior de C, y

2. si l es cualquier cota inferior de C, entonces $l < j$.

Mínimo

Un subconjunto de números reales tiene *mínimo*, si tiene ínfimo y éste pertenece al subconjunto.

Decimos Que un conjunto está acotado sí y sólo sí está acotado superior e inferiormente.

Ejemplo

Para la siguiente desigualdad

$$|x-3| < 5$$

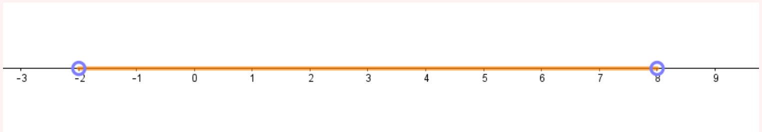
1. Determinar los valores que puede tomar la variable.
2. Representar gráficamente.
3. De ser posible, determinar la amplitud del intervalo, sus cotas y extremos.
4. Si es un entorno, justicar y expresarlo como tal.

Solución.

1.

$$\begin{aligned} |x-3| &< 5 \\ -5 < x-3 &< 5 \\ 3-5 < x &< 5+3 \\ -2 < x &< 8 \end{aligned}$$

2. Gráfico



3.
   - Amplitud del Intervalo $= 8-(-2) = 10$
   - Cotas superiores: $[8, +\infty)$
   - Cotas inferiores: $(-\infty, -2]$
   - Supremo: $s = 8$
   - Infimo: $i = -2$
   - Máximo: No tiene ya que el Supremo no pertenece al conjunto $(-2, 8)$.
   - Mínimo: No tiene ya que el Infimo no pertenece al conjunto $(-2, 8)$.

4. Dicho conjunto, es un entorno ya que es un intervalo abierto.

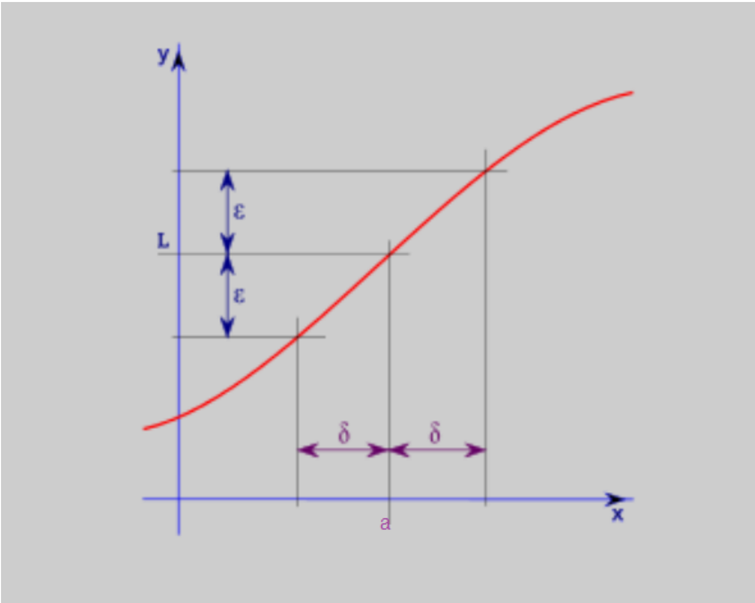
$$E_{(3,5)}$$

Límite de una función

Consultar

- Cálculo Infinitesimal. Michael Spivak. Capítulo 5.
- Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1). Hebe Rabuffetti. Capítulo 4.

Nos interesa ver en qué condiciones los valores de una función escalar se aproximan a un número real determinado, cuando los puntos del dominio se acercan a un punto a, que puede o no pertenecer a dicho dominio.



Definición 1

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Límites laterales

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Considerando en cada caso semientornos a la derecha o a la izquierda del punto a.

Teorema 2 *Si una función admite al mismo número real L como límite por la derecha y por la izquierda de un punto a, entonces dicha funcuión tienen límite finito en el punto a, es decir,*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Ejemplo

Suponga que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$.

i) ¿Qué puede decir acerca del $\lim_{x\to 1} f(x)$?

Podemos decir que no existe dicho límite, ya que los límites laterales no coinciden.

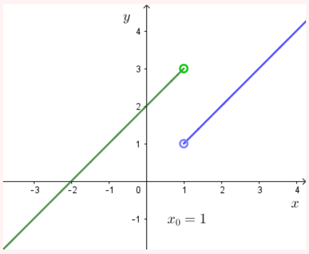
ii) ¿Qué puede decir acerca del $f(1)$?

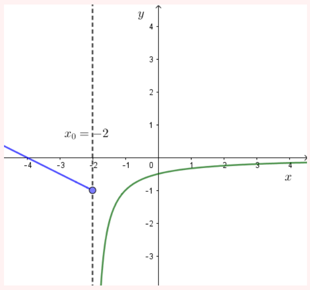
Nada podemos decir acerca de $f(1)$, ya que en el concepto de límite, nos interesa saber que sucede alrededor del punto (en este caso) $x = 1$.

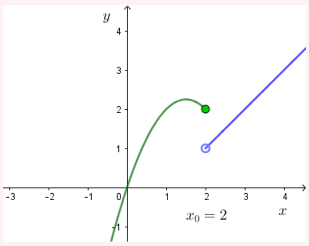
Teorema 3 (Unicidad del Límite) *Si una función tiene límite finito, dicho límite es único.*

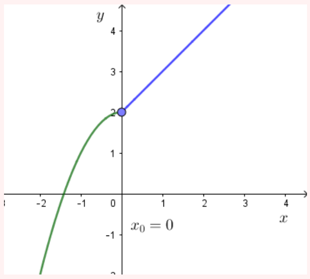
Ejemplo

En los siguientes puntos utilice la gráfica de la función f para determinar $\operatorname{lím}_{x\to x_0^-} f(x)$, $\operatorname{lím}_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\operatorname{lím}_{x\to x_0} f(x)$ en el valor indicado de x_0, si el límite existe.

i) 

iii) 

ii) 

iv) 

i) No existe el límite, ya que sus laterales no coinciden, es decir, $\operatorname{lím}_{x\to\ 1^+} f(x) = 1$ y $\operatorname{lím}_{x\to\ 1^-} f(x) = 3$.

ii) No existe el límite, ya que su límite lateral derecho no es finito, y su izquierdo es -1.

iii) No existe el límite, ya que sus laterales no coinciden, es decir, $\operatorname{lím}_{x\to\ 2^+} f(x) = 1$ y $\operatorname{lím}_{x\to\ 2^-} f(x) = 2$.

iv) Existe el $\operatorname{lím}_{x\to\ 0} f(x) = 2$, ya que sus límites laterales coinciden y son iguales a 2.

Álgebra de Límites

Suma de Límites

Si las funciones f y g, definidas en un mismo conjunto D, tienen límite finito en el punto de acumulación a, entonces la función $f+g$ tiene como límite en dicho punto la suma de los límites, es decir;

$$si \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} g(x) = L' \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = L \pm L'$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 3} (\mathbf{x} + 2) = (\mathbf{3} + 2) = 5 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 3} 4\mathbf{x}^2 = 4 \cdot \mathbf{3}^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 3} \left[(x + 2) + 3x^2\right] = 5 + 36 = 41$$

Infinitésimo

f es infinitésimo en el punto a si y sólo si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.
Por ejemplo

- $f(x) = x$ es infinitésimo en 0.
- $g(x) = x - a$ es infinitésimo en a.
- $h(x) = senx$ es infinitésimo en 0.

Teorema 4 *El producto de un infinitésimo en el punto a, por un número real, o por una función acotada en un entorno del punto a, es un infinitésimo en dicho punto.*

Producto de Límites

Si las funciones f y g, definidas en un mismo conjunto D, tienen límite finito en el punto de acumulación a, entonces la función $f \cdot g$ tiene como límite en dicho punto el producto de los límites, es decir;

$$si \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} g(x) = L' \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L \cdot L'$$

Observación 5

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$$

Observación 6 *Además, si $n \geq 2$ y $\forall x : f(x) \geq 0$, es*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Cociente de Límites

Si las funciones f y g, definidas en un mismo conjunto D, tienen límite finito en el punto de acumulación a, y el límite de g no es nulo, entonces el límite de $\dfrac{f}{g}$ es el cociente de ambos límites.

$$si \quad \lim_{x\to a} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} g(x) = L' \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{L}{L'}$$ $L' \neq 0$

Observación 7 *Para la función Potencial.*

$$\lim_{x\to a} [k]^{f(x)} = k^{\lim_{x\to a} f(x)}, \quad k > 0,$$

y para la función Exponencial,

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \lim_{x\to a} f(x) > 0.$$

Ejercicios

Calcular los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x-2}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^3-4x}$
3. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+3x+2}$
4. $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^3+2x-3}{x^2-4x+3}\right)^{\frac{1}{x}+2}$
5. $\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^2+2x-3}{x+1}\right)^{2x}$
6. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x^2-x-2}$
7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-16x+20}{x^2-3x+2}$
8. $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Casos de indeterminación del límite

1. Cociente de dos infinitésimos.
2. Cociente de dos infinitos.
3. Producto de un infinitésimo por un infinito.
4. suma de dos infinitos de distinto signo.

5. $[f(x)]^{g(x)}$ si $f(x) \to 1$ y $g(x) \to \infty$.

6. $[f(x)]^{g(x)}$ si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$.

7. $[f(x)]^{g(x)}$ si $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to 0$.

Para calcular límites donde se presentan casos de indeterminación, conviene recurrir a artificios de tipo algebraico.

Ejemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2}$$

Aquí estamos en presencia de un cociente de infinitésimos, y por tal motivo, no podemos aplicar elTeorema (...). Resulta conveniente, trabajar la función de forma algebraicamente, es decir,

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+1)}{(x+2)} = 1$$

Ejemplo

Calcular;

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 2x + 6}{3x^2 - x + 3}$$

Para calcular el límite (cociente de dos infinitos) podemos dividir numerador y denominador por x^2, es decir;

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{5}{3}.$$

Ejemplo

Para calcular un límite del tipo (5) se recurre al número e.

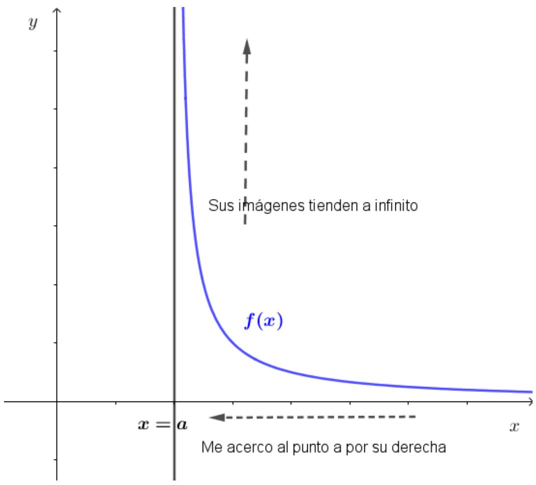
$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{5}{x-2}\right)^{3x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{5}}\right)^{3x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{5}}\right)^{\frac{x-2}{5}}\right]^{\frac{5\cdot 3x}{x-2}}\\
&= e^{15}.
\end{aligned}$$

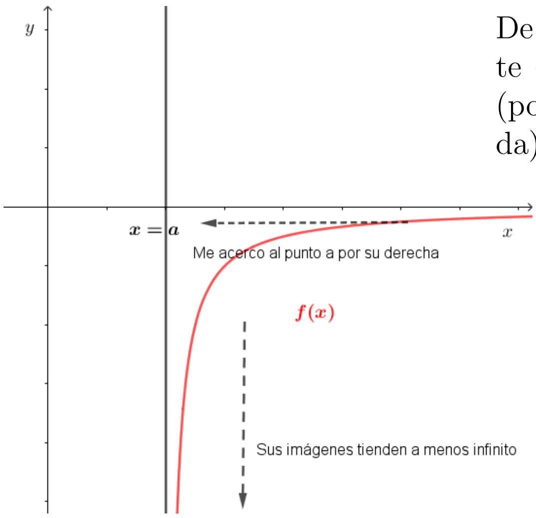
Tipo de Límites

1. *Límites infinitos en un punto finito:* En la situación de la gráfica, se dice que el límite cuando x se acerca por la derecha al punto a es $+\infty$, pues a medida que x se acerca a a, la función tiende a infinito:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

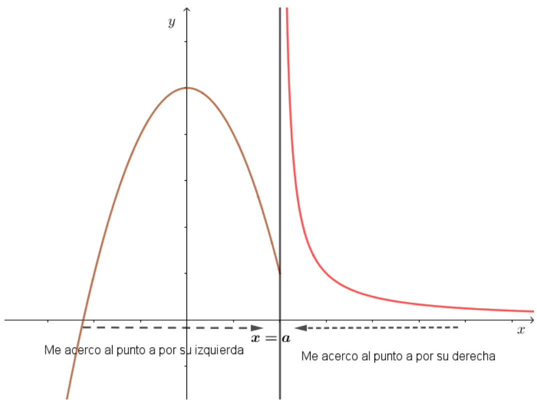


(de igual forma se puede definir cuando nos acercamos por la izquierda. Intenta hacer el dibujo).



De igual modo se define el límite $-\infty$ cuando nos acercamos a a (por la derecha o por la izquierda).(Dibuja el que falta)

Puede ocurrir que uno de los límites laterales sea finito y otro infinito, o cualquier combinación entre ellos, por ejemplo:



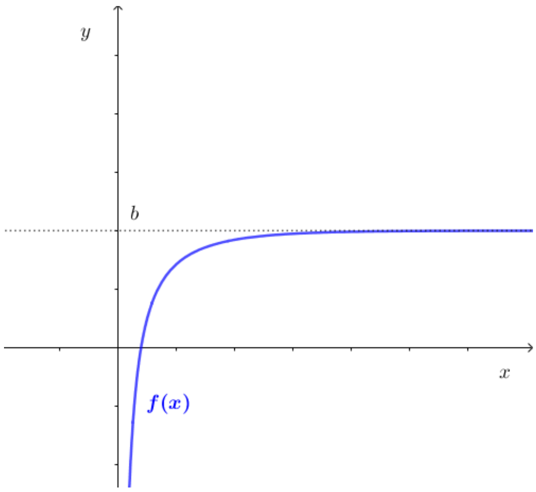
En la última figura se cumple que:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

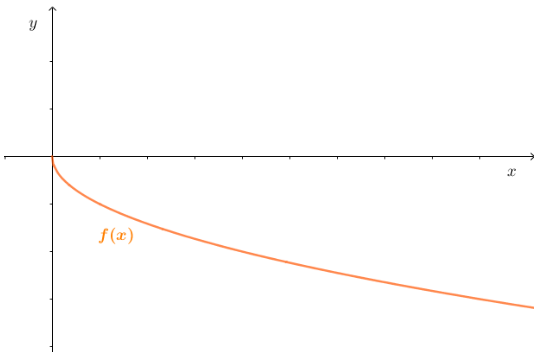
y

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

2. *Límites finitos en el infinito.* Decimos que una función tiene límitge b cuando x tiende a $+\infty$ cuando la función tiende a b cuando x va al infinito, es decr:
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$



3. *Límites infinitos en el infinito:* Si x tiende a $+\infty$ la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$. Por ejemplo, gráficamente podemos ver en el siguinte caso.



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

(Proponga gráficamente, otros casos).

Funciones Continuas

Consultar

- Cálculo Infinitesimal. Michael Spivak. Capítulo 6.
- Introducción al Análisis Matemático (Cálculo 1). Hebe Rabuffetti. Capítulo 5.

Definición 8 *la función f es continua en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

La definición nos dice que,

1. $$\exists f(a),$$

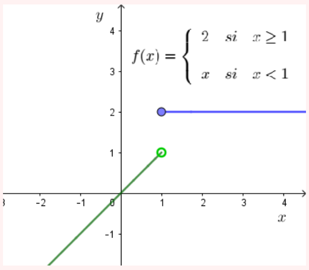
2. $$\exists \lim_{x \to a} f(x),$$

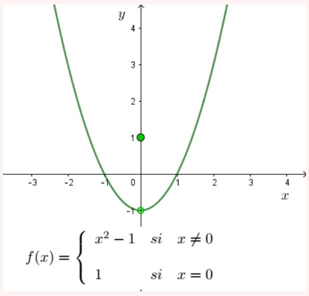
   y

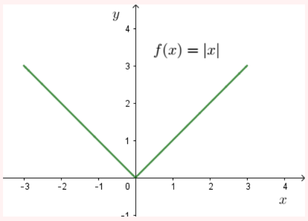
3. $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ejemplo

Si existe, en cada caso, determine el valor de x en que cada función es discontinua. En el caso que la función sea discontinua, diga que condición de continuidad no se cumple.

i) 

ii) 

iii) 

i) f no es continua en $x = 1$, ya que no coinciden los límiteslaterales en dicho punto, es decir, $2 = \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

ii) f no es continua en $x = 0$, ya que aunque se cumplan las primeras dos condiciones, es decir, existe $f(0) = 1$ y existe $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$, no se cumple la condición tres, concretamente, $f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$.

iii) f es continua en $x = 0$, ya que se cumplen las tres condiciones, es decir, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Como la continuidad se basa en el concepto de límite, podemos dar la definición también de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / \, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Teorema 9 *Si f y g son continuas en a, entonces*

1. *$f + g$ es continua en a,*

2. $f \cdot g$ *es continua en* a,

3. *Además, si* $g(x) \neq 0$, *entonces* $\frac{1}{g}$ *es continua en* a.