CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL-LSI

TEMA 3

Tema 3: Aplicaciones de la derivada de funciones de una variable.

Estudio de funciones: Crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y absolutos, puntos críticos. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio. Teorema de Cauchy. Teorema de L’hopital.

Recta tangente

Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo (a, b).

Si se quiere hallar la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(x_0, f(x_0)\right) = (x_0, y_0)$, basta considerar la ecuación de la recta que pasa por dicho punto y tiene pendiente $f'(x_0)$.

Ecuación de la recta que pasa por un punto: $y - y_0 = m.(x - x_0)$

<u>Ecuación de la recta tangente T:</u> $\boldsymbol{T: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)}$

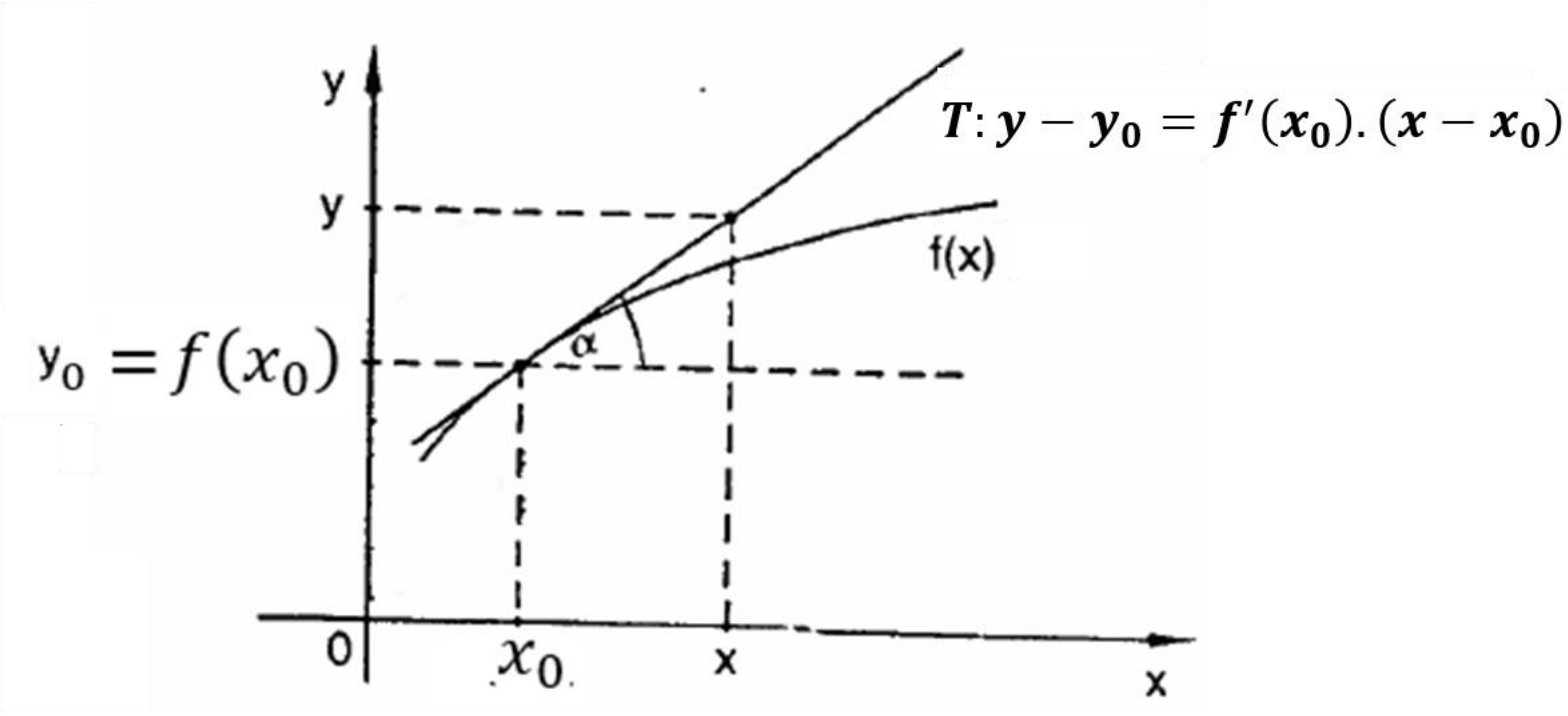
Es decir: $\boldsymbol{y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)}$

$$\boldsymbol{y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0}$$

$$\boldsymbol{y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)}$$

Recta tangente
Interpretación geométrica

Ecuación de la recta tangente: $T: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$



Recta normal

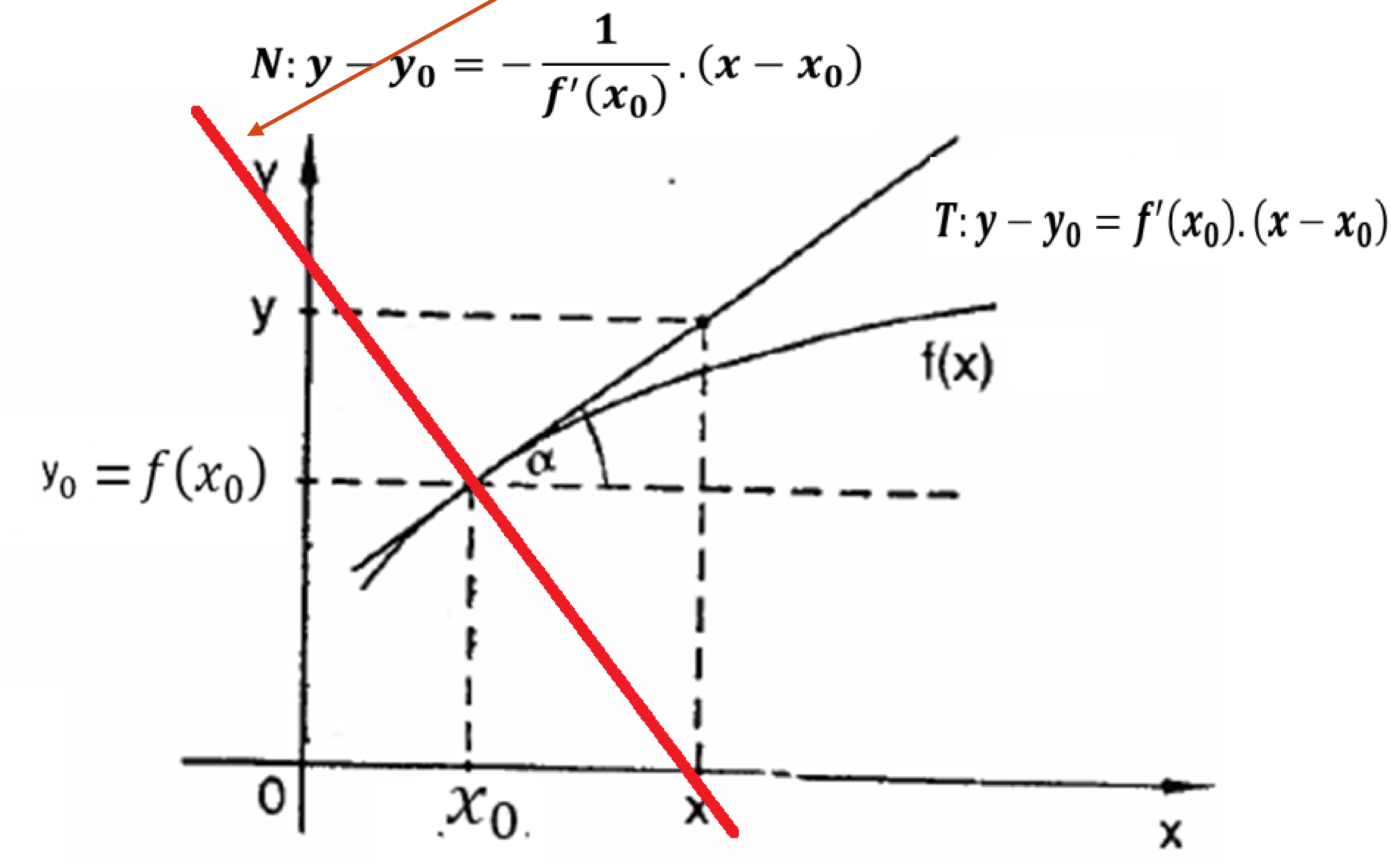
Sea $f(x)$ una función derivable en un intervalo (a, b).
La recta normal de una función derivable en un punto $\left(x_0, f(x_0)\right) = (x_0, y_0)$, es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Es decir, la recta normal es la recta que pasa por el punto $= (x_0, y_0)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{f'(x_0)}$ si $f'(x_0) \neq 0$.
Es decir:

$$\boldsymbol{N: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}.(x - x_0)}$$

Recta Normal
Interpretación geométrica

<u>Ecuación de la recta normal:</u> $N: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}.(x - x_0)$



Ejemplo:

- Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x$ en el punto $x = 1$.

Sabemos que la ecuación de la recta tangente siempre es de la siguiente forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Lo primero que debemos hacer es calcular la pendiente de la recta. Así pues, la pendiente de la recta tangente, m, será el valor de la derivada de la curva en el punto de tangencia x=1, es decir $m = f'(1)$. Así que derivamos la función y luego calculamos $f'(1)$:

$$f(x) = x^2 + x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$m = f'(1) = 3$$

Una vez conocemos el valor de m, tenemos que hallar un punto (x_0, y_0) de la recta tangente para completar la ecuación de la recta tangente.

La **ecuación de la recta tangente y la curva siempre tienen un punto en común**, que en este caso es $x = 1$. Por tanto, como la curva $f(x)$ pasa por este punto, podemos hallar la otra componente del punto calculando $f(1)$:

$$f(x) = x^2 + x$$

Así que el punto de tangencia es: $P(1,2)$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

Por este punto pasan tanto la curva como la recta tangente, de modo que también lo podemos utilizar para hallar la ecuación de la recta tangente.

Ahora simplemente tenemos que sustituir los valores encontrados de la pendiente y el punto de la recta tangente en su ecuación:

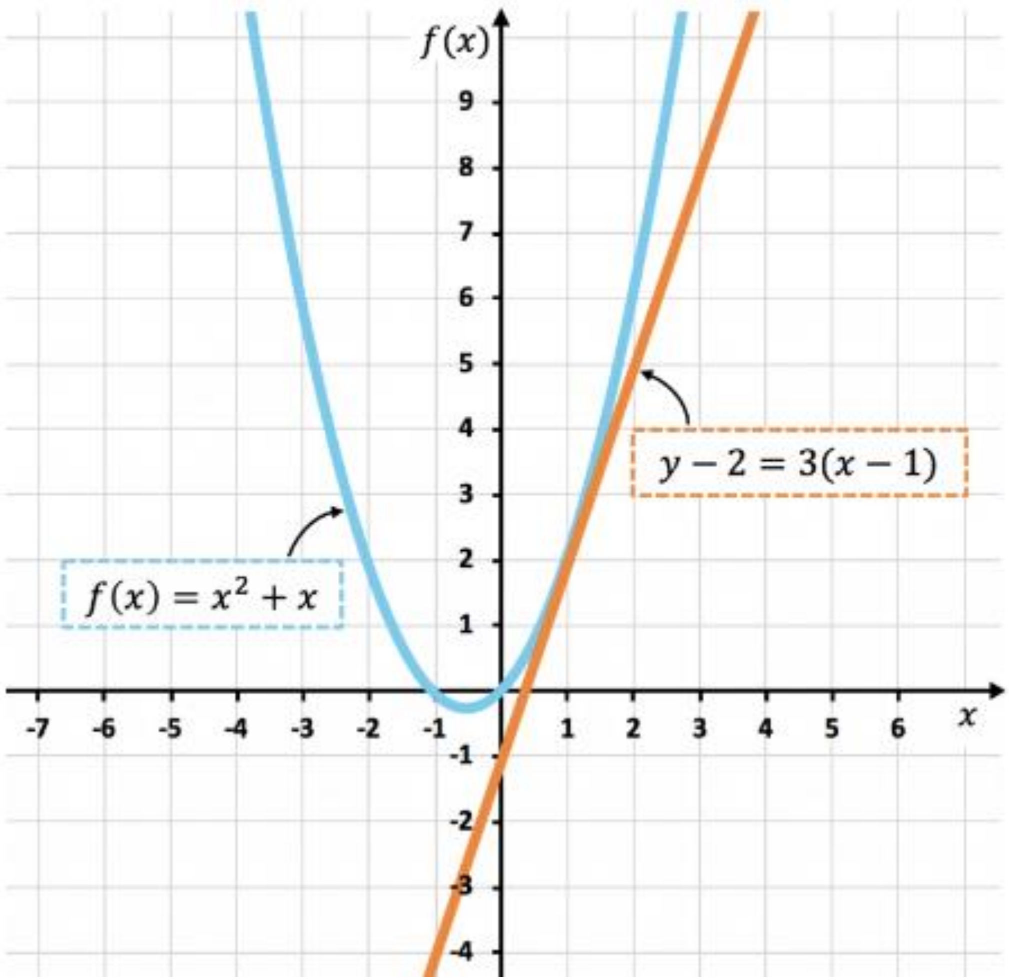
$$\left.\begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ \\ m = 3 \qquad P(1,2) \end{array}\right\} \longrightarrow y - 2 = 3(x - 1)$$

En definitiva, la ecuación de la recta tangente es: $\boldsymbol{y - 2 = 3(x - 1)}$

También se puede expresar la ecuación de la recta tangente con la ecuación explícita de la recta:

$$\boldsymbol{y = 3x - 1}$$

A continuación puedes ver representadas la curva $f(x) = x^2 + x$ y su recta tangente en $x = 1$, $y - 2 = 3(x - 1)$:



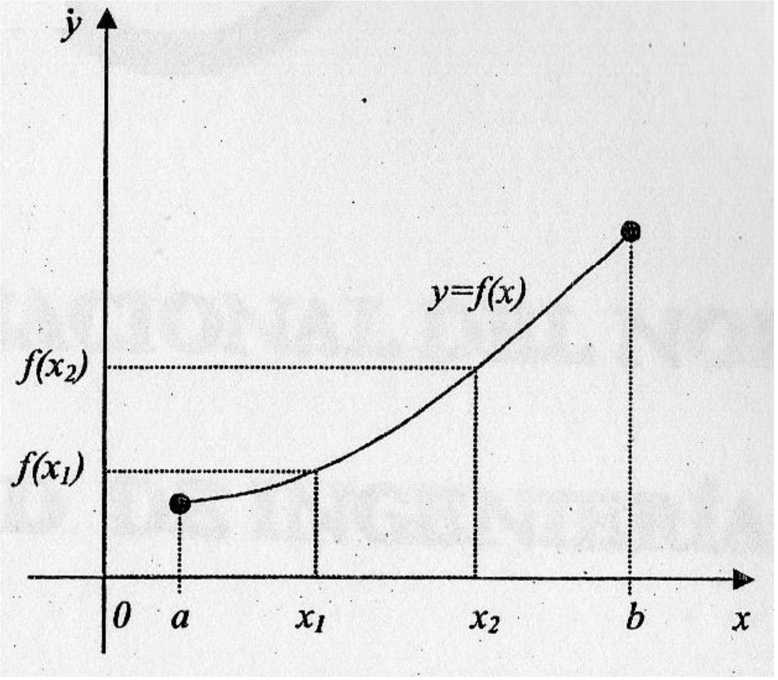
Como puedes ver, la curva $f(x) = x^2 + x$ y la recta tangente $y - 2 = 3(x - 1)$ solamente tienen en común el punto $(1, 2)$, tal y como habíamos calculado.

Funciones crecientes y decrecientes

Funciones crecientes

Sea una función $y = f(x)$, con $Dmf \subseteq \mathbb{R}$

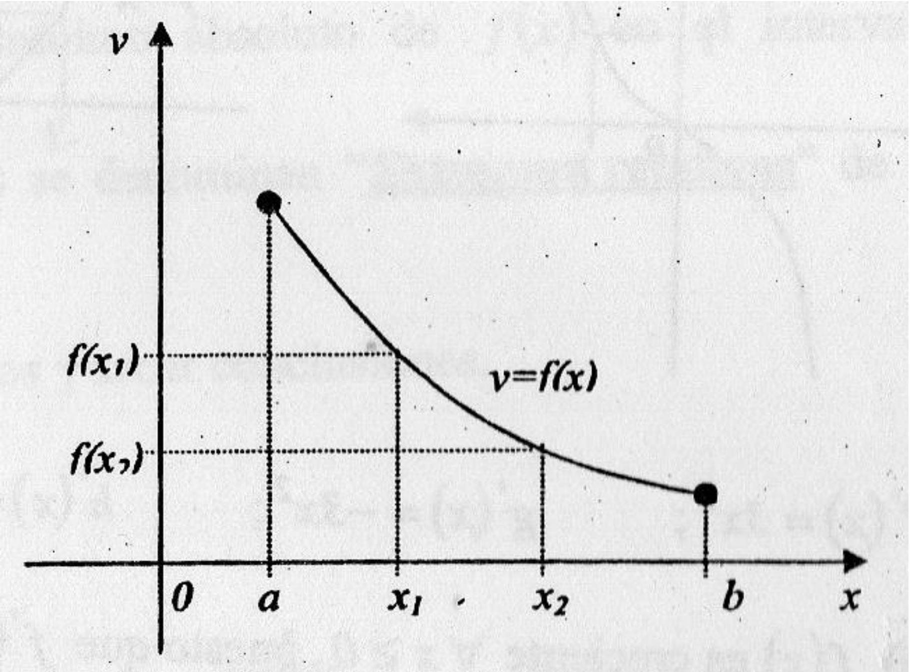
La función $f(x)$ es creciente en el intervalo (a,b) si: $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1, < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



creciente

Funciones decrecientes

La función $f(x)$ es <u>decreciente</u> en el intervalo (a, b) si: $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1, < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



decreciente

Funciones crecientes, decrecientes y constantes
Signo de la derivada

Sea una función $y = f(x)$ y derivable en un intervalo (a, b) con $(a, b) \subset Dmf \subseteq \mathbb{R}$.

- Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es creciente en (a, b).

- Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es decreciente en (a, b).

- Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es constante.

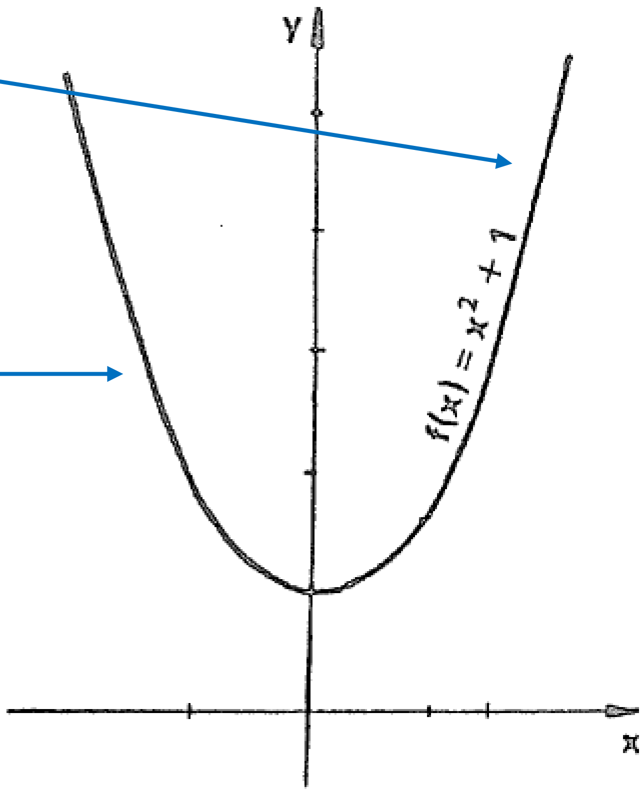
Ejemplo:

$f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

$2x > 0 \ \forall x > 0 \iff$ la función es creciente para x positivo

$2x < 0 \ \forall x < 0 \iff$ la función es decreciente para x negativo

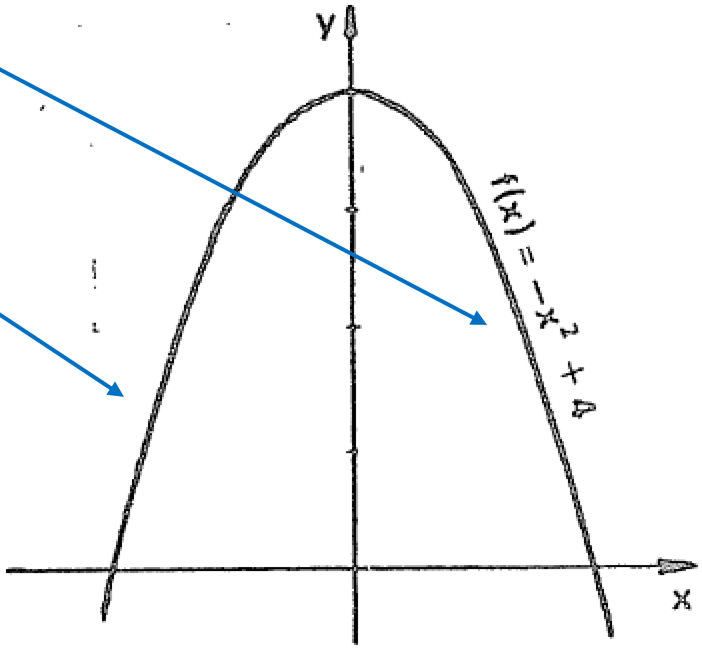


Ejemplo:

$$f(x) = -x^2 + 4$$
$$f'(x) = -2x$$

$-2x < 0 \ \forall x > 0 \iff$ la función es decreciente para x positivo

$-2x > 0 \ \forall x < 0 \iff$ la funcion es creciente para x negativo



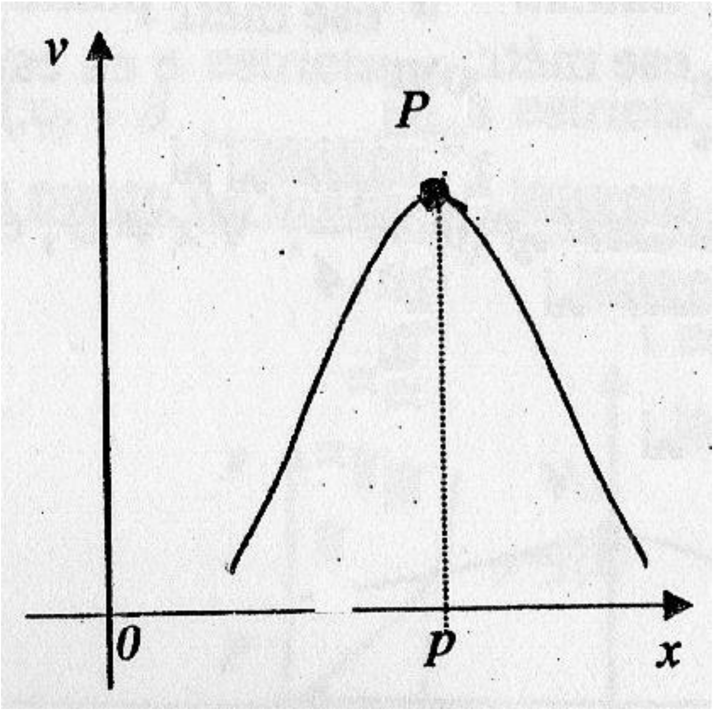
Máximos y mínimos relativos y absolutos

Sea una función $y = f(x)$, con $Dmf = A$, $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$

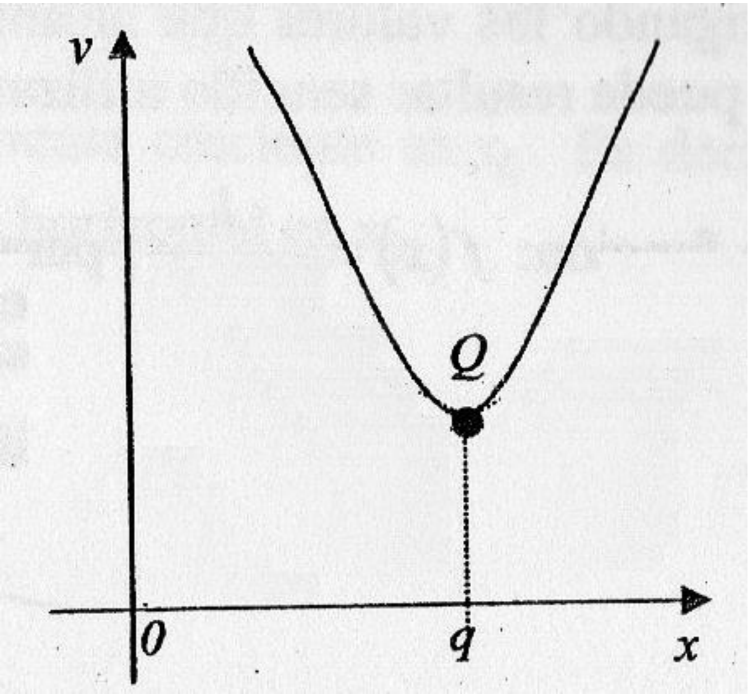
Máximo y mínimo absoluto

La función $f(x)$ tiene en x_0 un **máximo absoluto** si $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in A$

La función $f(x)$ tiene en x_0 un **mínimo absoluto** si $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in A$



máximo absoluto



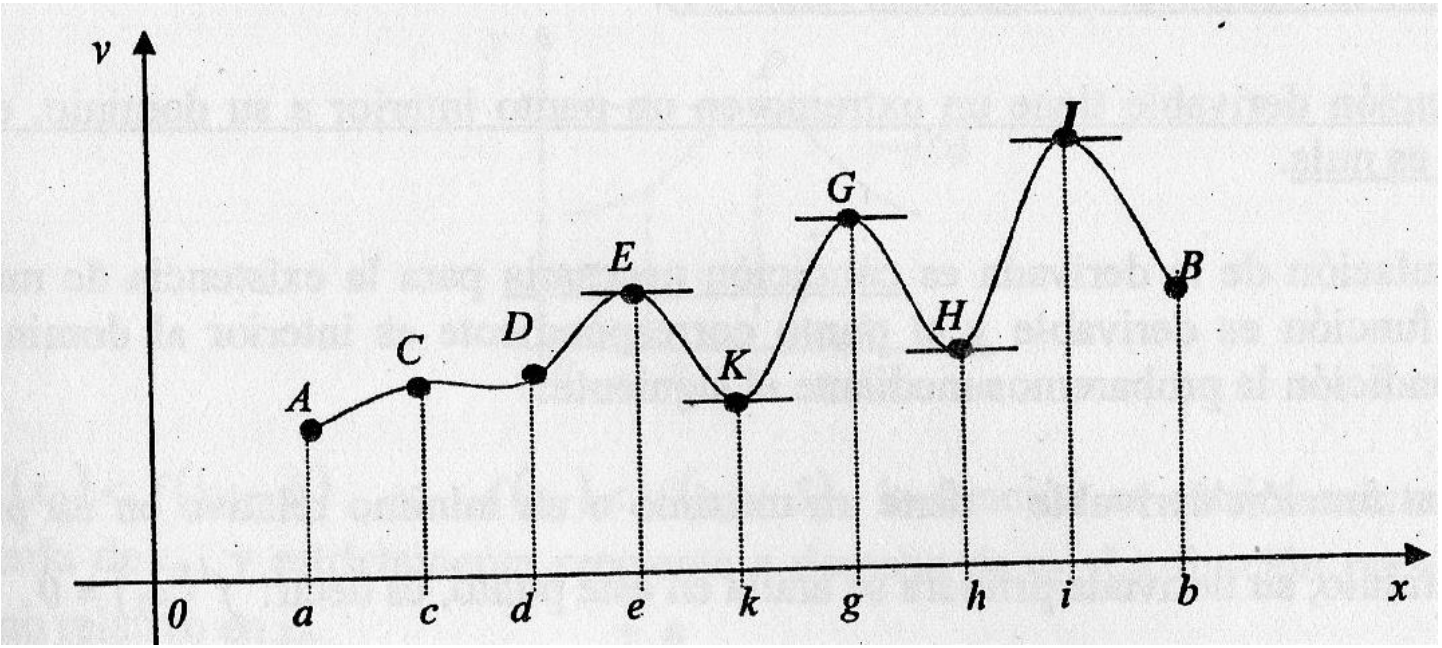
mínimo absoluto

Máximo y mínimo relativos o locales

Sea una función $y = f(x)$, con $Dmf = A$, $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$

La función $f(x)$ tiene en x_0 un **máximo relativo** si para un número real $\delta > 0/$,
$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

La función $f(x)$ tiene en x_0 un **mínimo relativo** si para un número real $\delta > 0/$,
$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



Los valores máximos o mínimos se llaman <u>valores extremos de la función</u>

Extremos de una función.

Teorema:
Sea la función $f(x)$ definida en un intervalo (a,b) tal que en un cierto punto $x_0 \in (a,b)$ alcanza un valor un máximo o mínimo en dicho intervalo.

Si la derivada $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$

Teorema:
Supongamos que x_0 es un punto del dominio tal que $f'(x_0) = 0$.

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces la función tiene en x_0 un mínimo relativo

- Si $f''(x_0) < 0$, entonces la función tiene en x_0 un Máximo relativo.

Punto Critico de una función

Si $f(x)$ es una función continua definida sobre un intervalo (abierto o cerrado), el punto x_0 es un punto crítico de $f(x)$ en dicho intervalo, si se cumple una de las siguientes condiciones:

(1) x_0 es interior al intervalo y $f'(x)$ existe y es nula en x_0. $\left(f'(x_0) = 0\right)$.
(2) x_0 es interior al intervalo y $f(x)$ no es derivable en x_0. (No existe derivada finita).
(3) x_0 es uno de los extremos del intervalo.

Procedimientos para determinar los máximos y los mínimos locales o relativos de una función derivable

De acuerdo con las consideraciones hechas, dada la función derivable $f(x)$,

se procede así:

1°) Se obtiene $f'(x)$

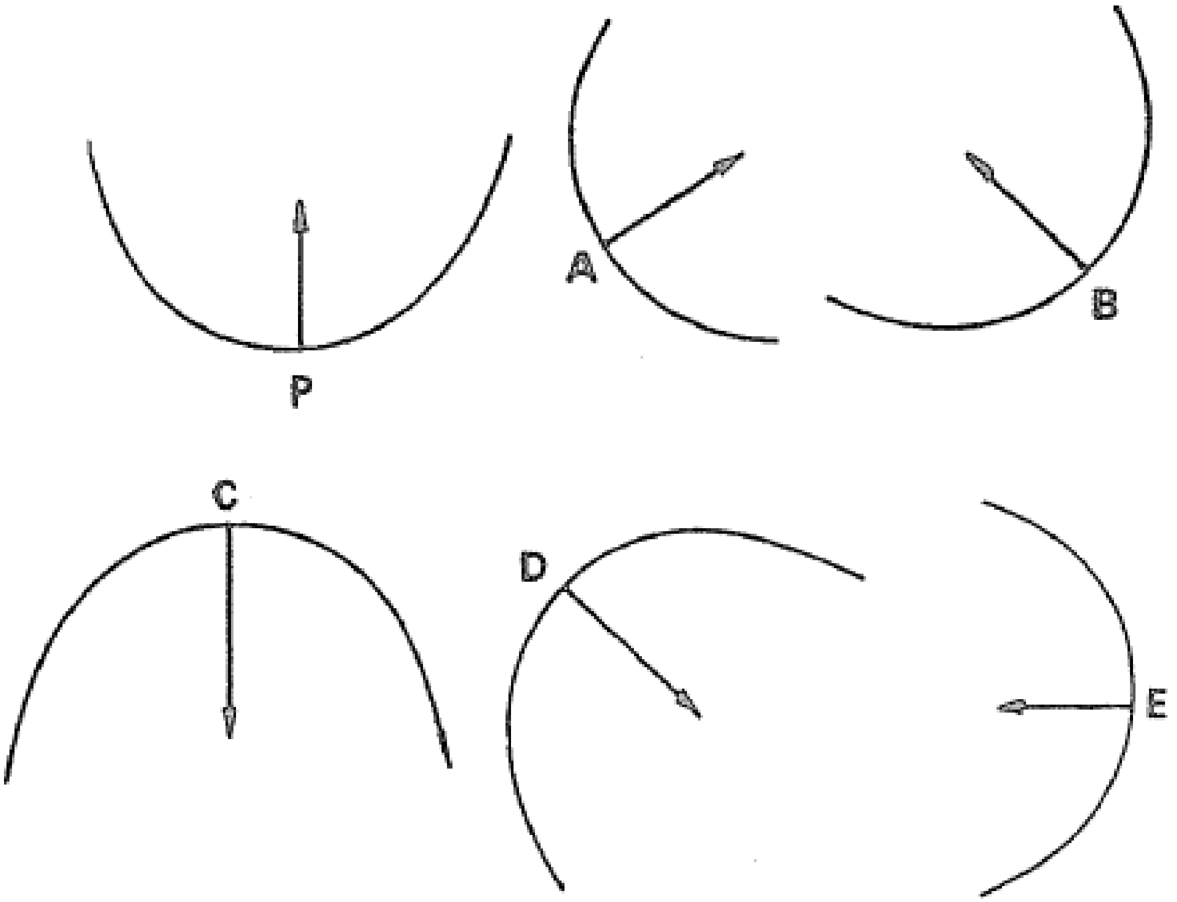
2°) Se iguala a cero, es decir $f'(x) = 0$ y se determinan los valores de x que satisfacen a esta ecuación.

3°) Se obtiene $f''(x)$ y se calcula su valor para cada uno de los valores de x que anulan a $f'(x)$. Si en ellos $f''(x) \neq 0$ hay máximo o mínimo local. Si en alguno de ellos $f''(x) = 0$ se determina el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha, si cambia el signo hay máximo o mínimo, si no cambia de signo no hay ni máximo ni mínimo. Otra forma es calcular el valor de la función en ese punto a la derecha y a la izquierda.

4°) Si $f'(x)$ no está definida en algún punto, se procede como en el caso anterior, se calcula el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha del punto. O sino se calcula el valor de la función a la izquierda y a la derecha y así se determina si hay o no máximo o mínimo.

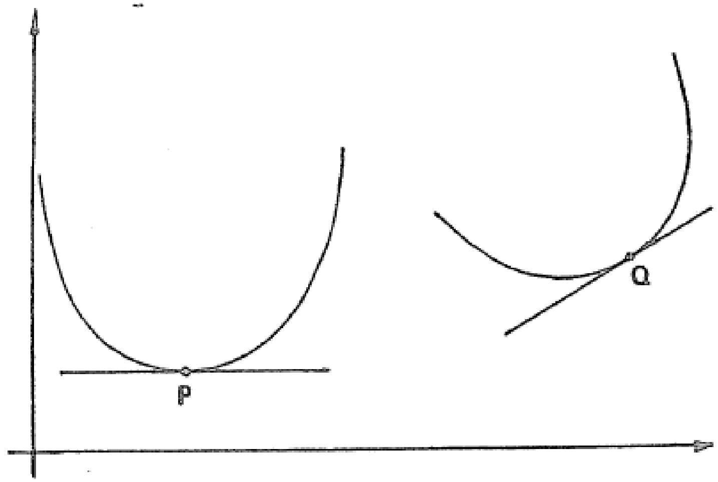
Concavidad y convexidad

Al hablar de concavidad de acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra, es necesario decir en que dirección y sentido. Así, en el punto que se destaca en cada una de las siguientes figuras, la curva es cóncava en la dirección y sentido que indica la flecha.

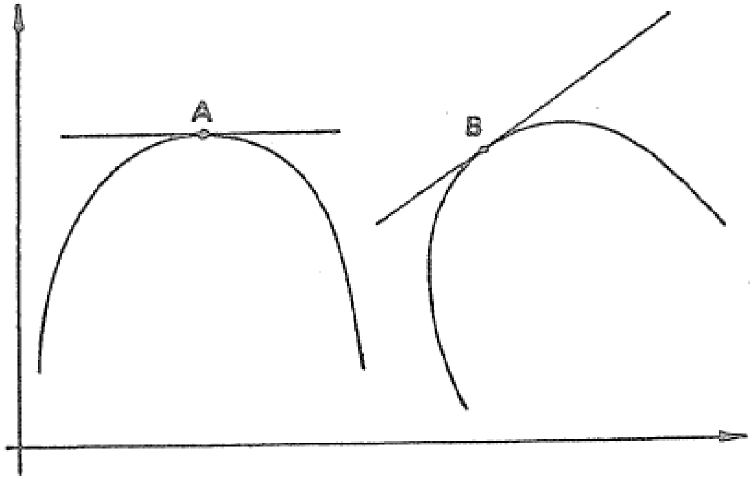


Consideraremos la dirección y sentido del semieje positivo y, considerándolo vertical para valores positivos

-En los puntos P de la tangente horizontal y Q de la tangente oblicua, la curva es cóncava en la dirección y sentido del semieje positivo y, es decir <u>cóncava positiva</u> o hacia arriba.

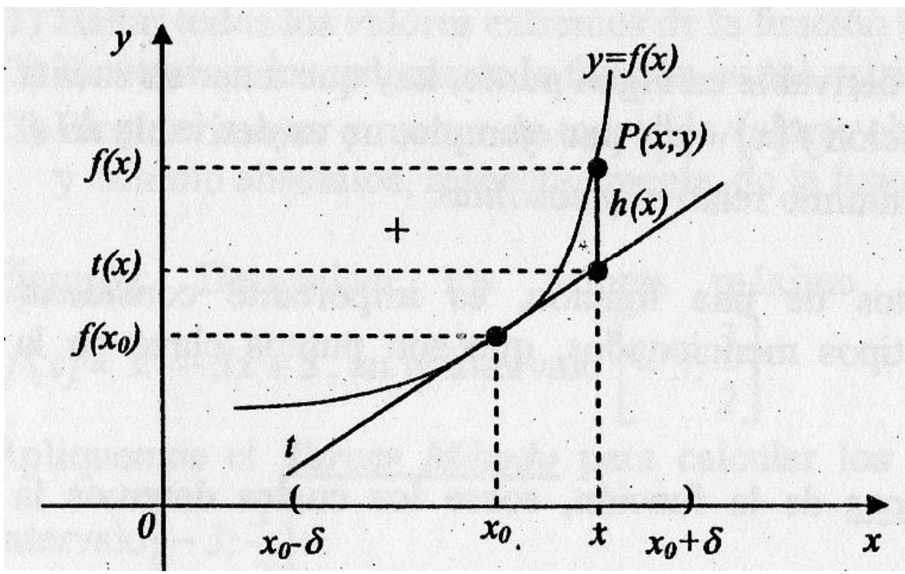


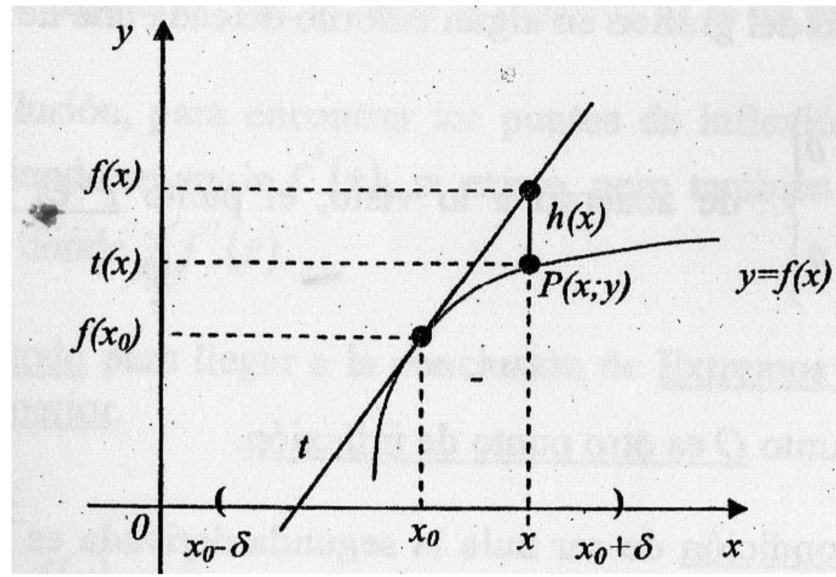
-En los puntos A de la tangente horizontal y B de la tangente oblicua, se dice que la curva es convexa en la dirección y sentido del semieje positivo y, es decir <u>cóncava negativa</u> o hacia abajo



Sea una función $y = f(x)$ definida y derivable en un intervalo (a, b), sea $x_0 \in (a, b)$.

Definición: se dice que la curva es *<u>cóncava positiva</u>* o hacia arriba en el intervalo (a, b), si todos los puntos de la misma están por arriba de cualquier recta tangente a la curva en dicho intervalo.
Recíprocamente la curva es *<u>cóncava negativa</u>* o hacia abajo si todos los puntos de la misma están por debajo de la recta tangente a la misma en el intervalo.





cóncava positiva

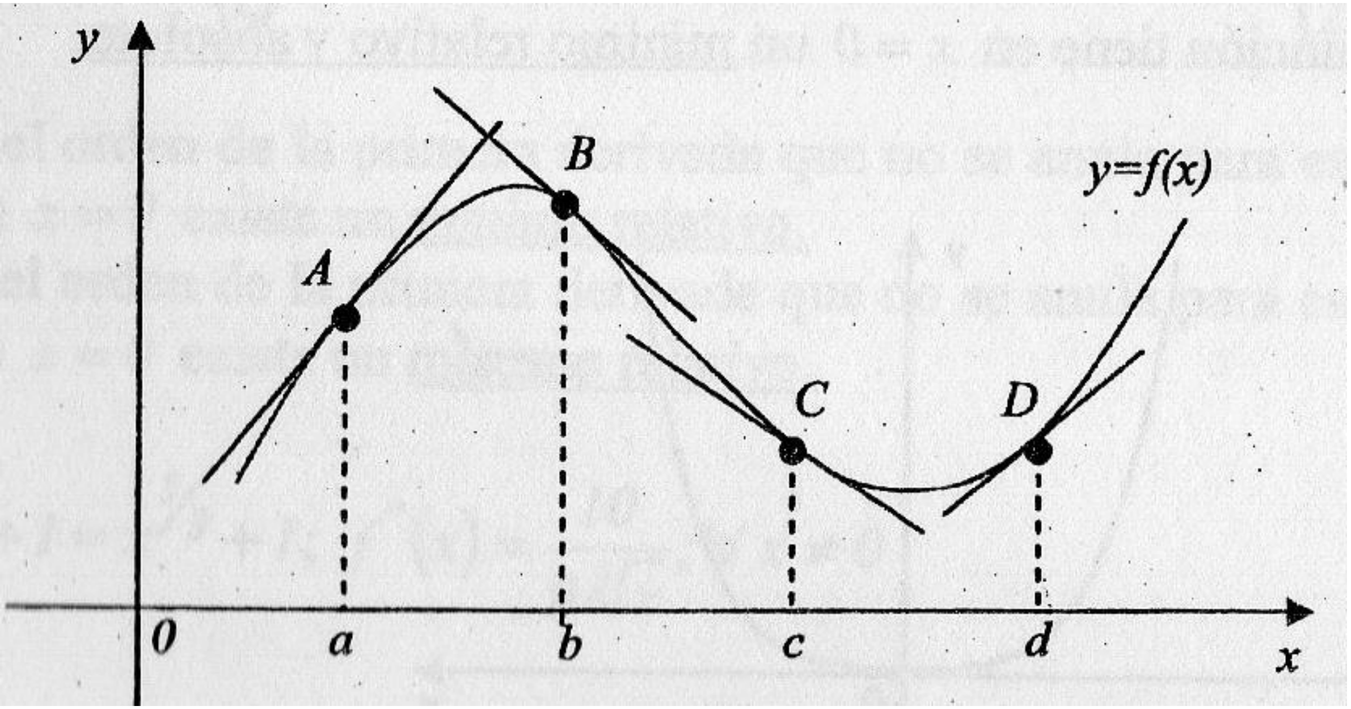
cóncava negativa

La concavidad y el signo de la derivada segunda

Sea una función $y = f(x)$ definida y derivable en un intervalo (a, b)

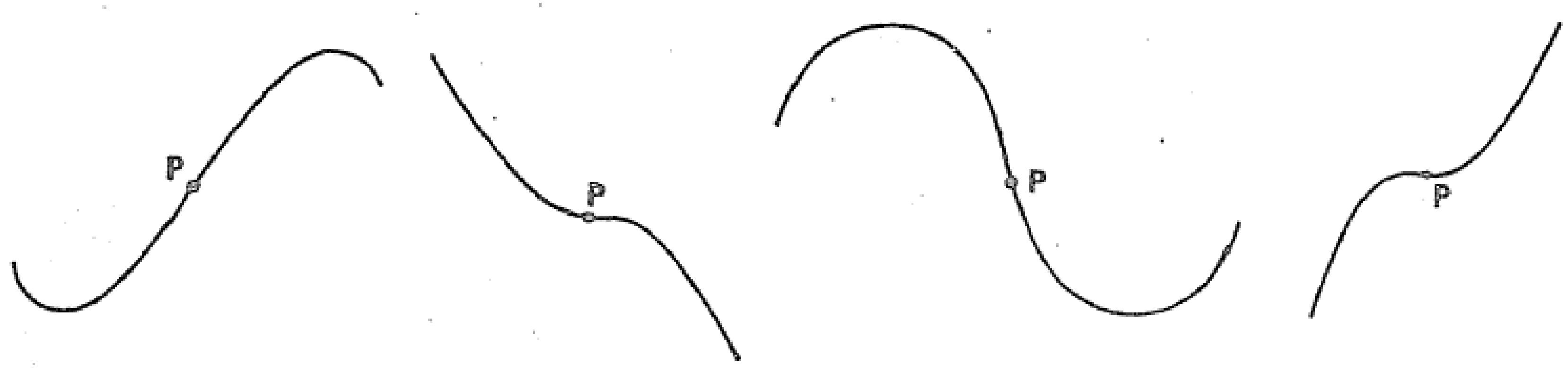
-Si la segunda derivada de la función f es positiva en todos los puntos del intervalo (a, b), es decir $f''(x) > 0$, la curva tiene concavidad positiva en dicho intervalo.

-Si la segunda derivada de la función f es negativa en todos los puntos del intervalo (a, b), es decir $f''(x) < 0$ la curva tiene concavidad negativa en dicho intervalo.



Punto de inflexión

-Dados los siguientes gráficos:



Se observa que en el punto P señalado en cada uno, la curva no es cóncava ni convexa. En algunos casos como en el primero y en el segundo a la izquierda del punto es cóncava positiva y a la derecha es cóncava negativa. En cambio en el tercero y cuarto a la izquierda del punto es cóncava negativa y a la derecha cóncava positiva.

Definición: se llama punto de inflexión a aquel en que la curva cambia el sentido de la concavidad.

Condiciones para la existencia de punto de inflexión

Sea una función $y = f(x)$ definida y derivable en un intervalo (a, b), sea $x_0 \in (a, b)$.
Si se cumple que $f''(x_0) = 0$ y además $f'''(x_0) \neq 0$ entonces f tiene un punto de inflexión en x_0

En símbolos:

$f''(x_0) = 0 \ \wedge \ f'''(x_0) \neq 0 \Longrightarrow$ el punto de la curva que corresponde a x_0 es de inflexión.

-Ahora bien, si la tercera derivada es 0 en el punto en que se anula la segunda o bien se trata de un punto en que la segunda derivada no esta definida, hay que estudiar el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto, si dicho signo cambia existe inflexión,.

De lo dicho se deduce que, para determinar los puntos de inflexión se procede así:

1°) Procedimiento: si existe segunda derivada, se determina en qué puntos se anula y en ellos se calcula la tercera derivada, que debe ser distinta de cero.

2°) Si la segunda derivada se anula y la tercera derivada también, hay que determinar el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto; si el signo es distinto hay inflexión.

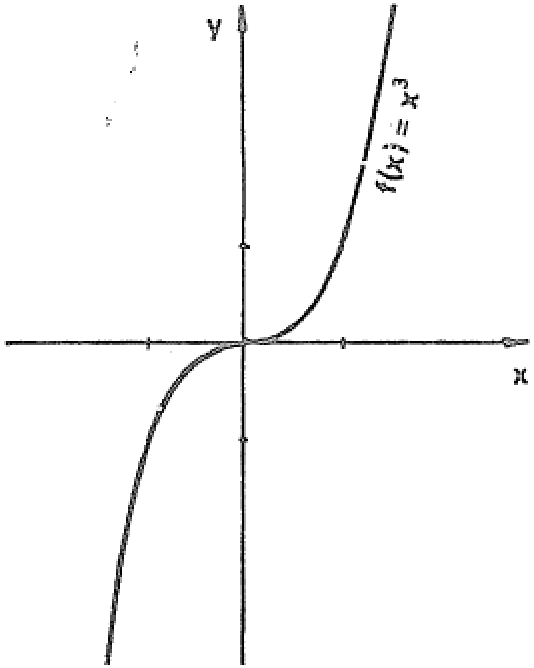
3°) Si es un punto en que la segunda derivada no está definida, se determina el signo de la misma a la izquierda y a la derecha del punto; si son distintos hay inflexión.

Ejemplo

$f(x) = x^3$ Se obtiene la segunda derivada

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$ está definida para todo x.



Se calcula en qué puntos se anula

$f''(x) = 0 \Longrightarrow 6x = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$

Se obtiene la tercera derivada

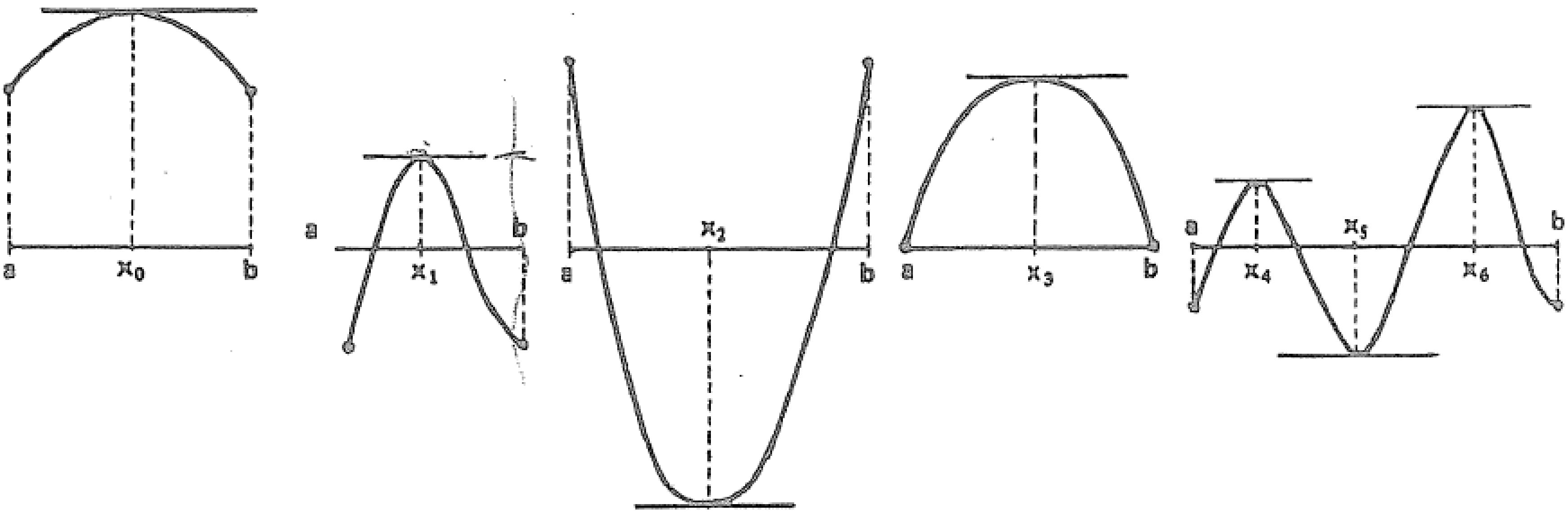
$f'''(x) = 6 \neq 0$ para todo x.

En el origen hay una inflexión.
Además, es de tangente horizontal, pues $f'(0) = 0$

No existe otra inflexión, pues como se ha dicho la derivada segunda está definida en todos los puntos y en el único que se anula es en el origen. Además como $f''(x) = 6x$ es negativa para todo x negativo la curva es convexa en todos los puntos a la izquierda del origen; como la derivada segunda es positiva para todo x positivo, la curva es cóncava en todos los puntos que corresponden a la derecha del origen.

Teorema de Rolle

Las siguientes gráficas corresponden a funciones derivables que tienen valores iguales en los extremos $[a, b]$

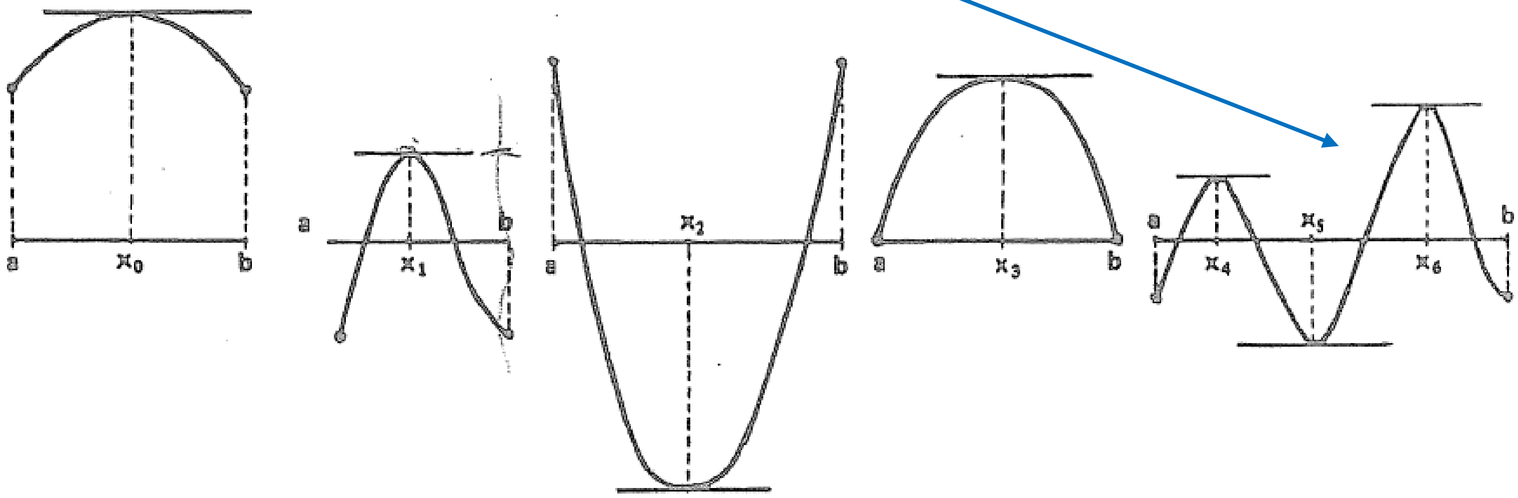


Se observa en todas ellas que hay por lo menos un punto interior del intervalo en que la tangente es paralela al eje x; en la primera figura se verifica en el punto correspondiente a x_0, en la segunda para x_1, en la tercera para x_2, en la cuarta para x_3, en la quinta para x_4 ; x_5 ; x_6. Entonces, en esos puntos la pendiente de la tangente es 0 y como dicha pendiente está dada por la derivada de la función, resulta que en cada uno de esos puntos la derivada es 0. La observación hecha en estas figuras, es general y se enuncia el:

Teorema de Rolle

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, tiene derivada finita en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$

Observación: el teorema dice que existe por lo menos un punto en que se anula la derivada, pero puede haber más de uno, como indica la quinta figura del ejemplo.

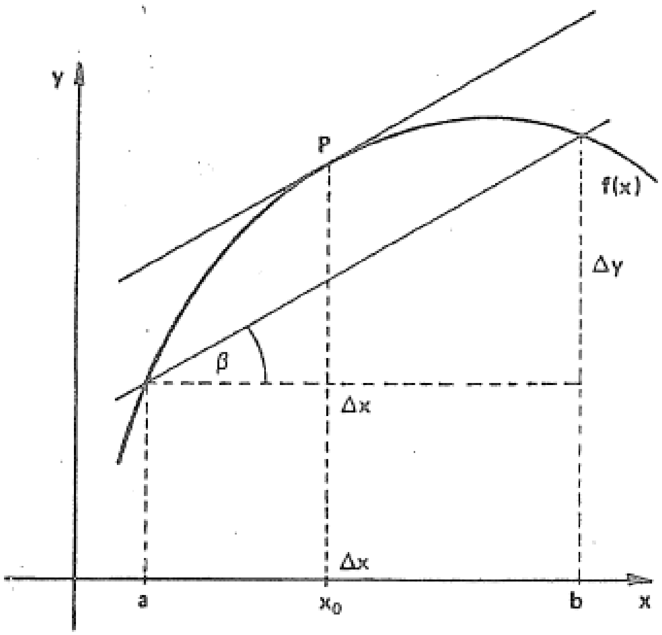


Teorema del Valor Medio.

Al teorema del valor medio también se lo llama Teorema de Lagrange, de los incrementos finitos o Teorema del valor medio del calculo diferencial.

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y tiene derivada finita en (a, b), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Interpretación Geométrica

En la igualdad:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

el primer miembro representa la pendiente de la tangente en P.

El segundo miembro la $tg\ \beta$, o sea la pendiente de la recta a que pertenece la cuerda.

Como estas dos pendientes, de acuerdo con la relación anterior son iguales, resulta que las rectas son paralelas, es decir: existe por lo menos un punto del arco en el que la tangente es paralela a la cuerda.

Teorema de Cauchy

Si f y g son dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, derivables en (a, b) y $g'(x_0) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Observación: A este teorema se lo conoce con diversos nombres, como ser: teorema de la razón de los incrementos de dos funciones, teorema del valor medio de Cauchy o teorema generalizado del valor medio de Cauchy.

Teorema de L´Hospital, aplicaciones al cálculo de distintos limites indeterminados

Una consecuencia del teorema de Cauchy es el teorema que veremos a continuación

Teorema L' Hospital, caso $\frac{0}{0}$

Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un intervalo (a, b).
Supongamos $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, con $x \neq x_0$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Si existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Generalización del Teorema de L´Hospital

El teorema demostrado admite varias generalizaciones que permiten su aplicación a distintos casos de limites indeterminado, como ser:

Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un intervalo (a, b). Supongamos $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Si existe $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existe $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además se cumple:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema L’ Hospital, caso $\frac{\infty}{\infty}$

Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un intervalo en intervalo (a, b), salvo en $x_0 \in (a, b)$ y supongamos $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \in (a, b)$, con $x \neq x_0$.

Si existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Otras formas indeterminadas

Por medio de *arreglos algebraicos*, es posible aplicar la regla de L'Hopital a otras formas indeterminadas:

Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Si para $x = x_0$, la función $f(x) \cdot h(x)$ toma la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, la función se escribe en la forma:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{0}{0}$$

o bien:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Forma indeterminada $\infty - \infty$

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$ entonces se dice que $f(x) - g(x)$ tiene la forma $\infty - \infty$. Para calcular $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x))$ se transforma la expresión $f(x) - g(x)$ en una fracción de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que se pueda aplicar la regla de L'Hopital.

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x}$$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-x\sin x + 2\cos x} = 0$$

Formas indeterminadas 0^0, 1^∞, ∞^0

Si una función de la forma $f(x)^{h(x)}$ toma una de las siguientes formas indeterminadas, cuando $x \to x_0$:

$$0^0, \qquad 1^\infty, \qquad \infty^0$$

entonces, para calcular $\lim_{x\to x_0} f(x)^{h(x)}$, se procede como sigue:

- Sea $y = f(x)^{h(x)}$
- Se aplica logaritmo natural a ambos lados: $\ln y = \ln f(x)^{h(x)}$

  obteniendo: $\ln y = h(x)\ln f(x)$

  donde $h(x)\ln f(x)$ tiene la forma indeterminada: $0 \cdot \infty$ o bien $\infty \cdot 0$.

- Determinando $\lim_{x\to x_0} \ln y = \lim_{x\to x_0} \ln f(x)^{h(x)}$ usando un método ya tratado, se obtiene $L = \lim_{x\to x_0} \ln y$.
- Luego:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{h(x)} = \lim_{x\to x_0} y = \lim_{x\to x_0} e^{\ln y} = e^{\left(\lim_{x\to x_0} \ln y\right)} = e^L$$