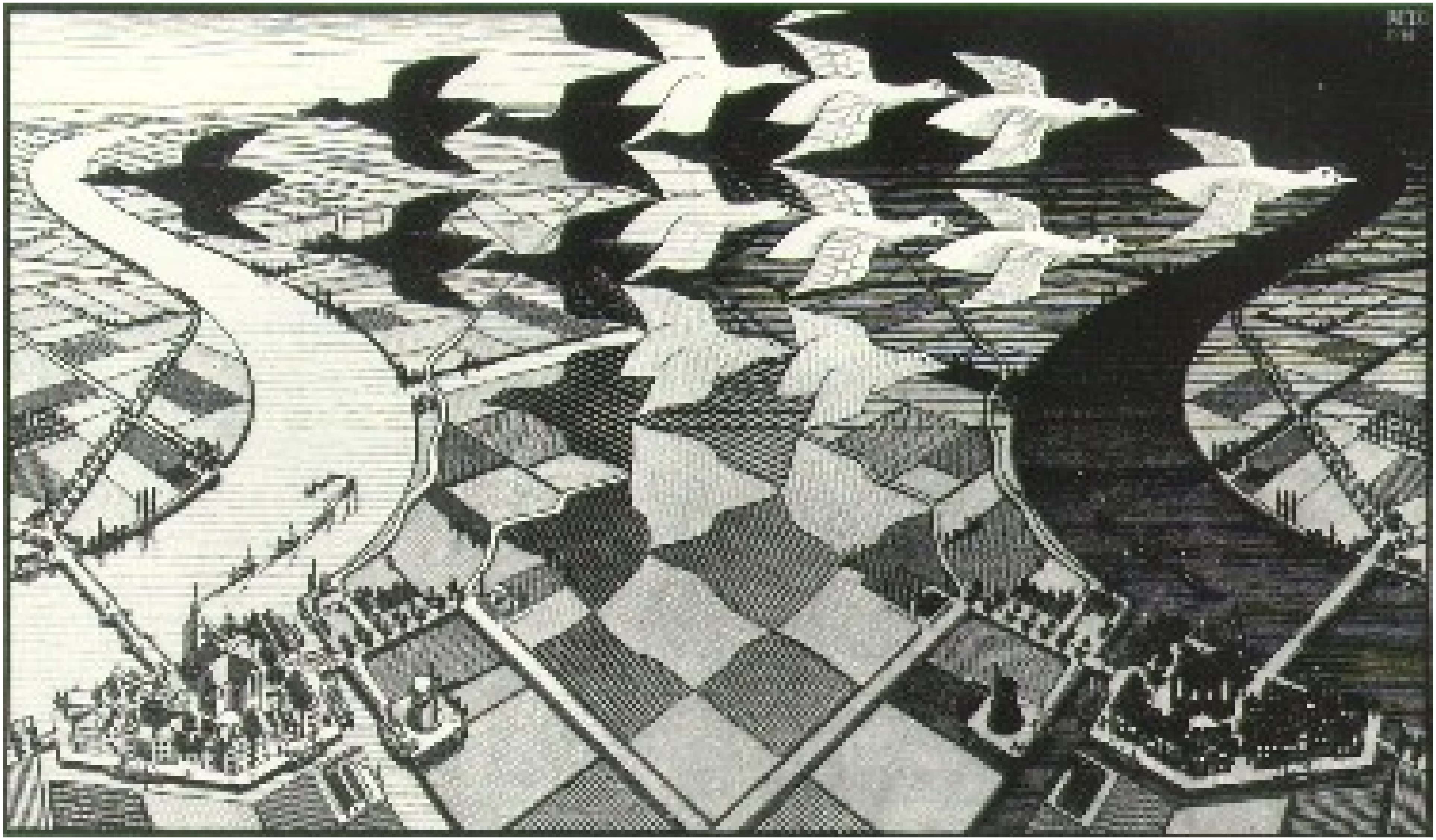
UNIDAD X:
SERIES NUMÉRICAS.

Series numéricas. Convergencia. Series geométricas. Series de términos no negativos.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan los conceptos generales de series numéricas.


CORRIENTES
UN REAL M. C.



SUCESIONES

Una sucesión se puede ver como conjunto ordenado de términos, que cumplen una ley determinada

Formalmente, es una aplicación que representaremos por $\{x_n\}$

$$N \to \Re$$
$$n \to x_n$$

Números naturales

Números reales

SUCESIONES

Ejemplos.

$$\{x_n\} \equiv \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

$$\{x_n\} \equiv \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$$

$$\rightarrow 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \cdots, \frac{1}{n^2}, \cdots$$

SUMATORIAS

Supóngase dada una cantidad finita de números

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

y consideramos la suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$$

En ocasiones es conveniente más hacer breve esta expresión. Esto se logra mediante el símbolo de suma

$$\sum$$

SUMATORIAS

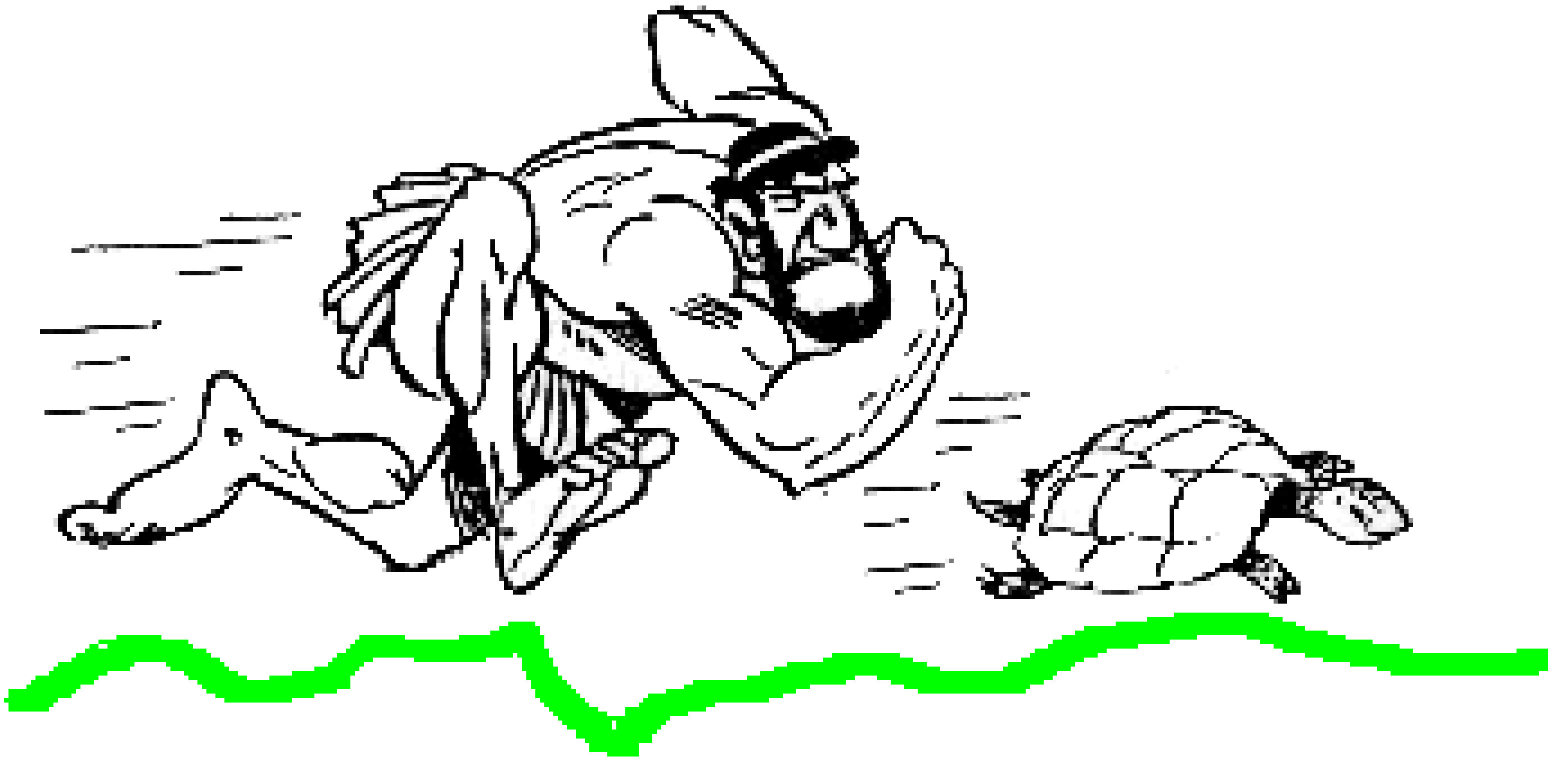
Este símbolo se usa …

Límite superior

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

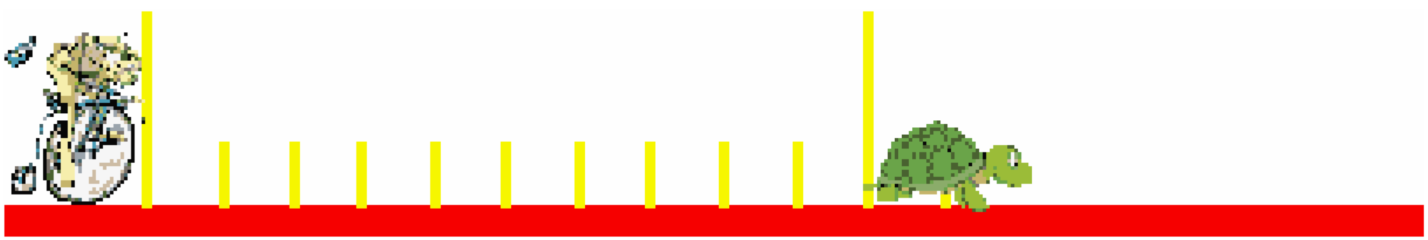
Límite inferior

El elemento a_k se llama *término general de la suma*



Veamos el movimiento reemplazando a Aquiles por una Liebre en Bici:

DEMO



$S=a-a+a-a+a-a+a-a+a-a+a-\ldots$

$$\boxed{S=(a-a)+(a-a)+(a-a)+(a-a)+(a-a)+\ldots}$$

$$S=0+0+0+0+0+0+\ldots=0$$

$$\boxed{S=a-(a-a)+(a-a)+(a-a)+(a-a)+(a-a)+\ldots}$$

$$S=a-0+0+0+0+0+0+\ldots=a$$

$$\boxed{S=a-(a-a+a-a+a-a+a-a+a-a+\ldots)}$$

$S=a-S$, de donde $S=a/2$

Series Aritméticas

Una series es similar a una sucesión, excepto que en lugar de una lista de números, éstos se van sumando con los precedentes, es decir, una serie es una **suma**.

$\rightarrow 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$

Si $r_n = \dfrac{1}{n^2}$ es una sucesión, entonces

$$\sum_{n=1}^{4} r_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$$

es una suma (serie) finita y

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

es una serie infinita.

Una **serie aritmética** es una suma de los términos de una sucesión aritmética.

Existen *dos formas* de encontrar la suma de una serie aritmética:

1. Sumándolos todos (¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡¡)

$$\sum_{n=1}^{4} n = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

2. Haciendo igual que Gauss…

¿Qué hizo Gauss?

$$
\begin{array}{rl}
S_{100} &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 98 + 99 + 100 \\
S_{100} &= 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\
+ \\
\hline
\end{array}
$$

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101$$

$$2S_{100} = 100(101)$$

$$2S_{100} = 10{,}100$$

$$S_{100} = 5{,}050$$

Podemos generalizar esto:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d)$$

+

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \quad \text{ó} \quad S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)$$

Series Geométricas

Diremos que una sucesión geométrica es una “sucesión” en la cual la razón entre dos términos sucesivos es constante.

Por ejemplo, la sucesión

$$g=1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

Posee razón (radio) constante 2. $\frac{8}{4} = \frac{64}{32}$ $r=2$

Una serie geométrica, es la suma de los términos de una sucesión geométrica, i.e.:

$$S=1+2+4+8+16=31$$

Al igual que una aritmética, puede ser finita o infinita.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g_i = g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_n$$

Para encontrar una fórmula general de la suma de una serie geométrica, usaremos una técnica similar (pero no idéntica) que la usada en series aritméticas…Comencemos con los primeros cuatro términos, siendo g_1=1 y r=2.

$$S_4 = 1 + 2 + 4 + 8$$

$$2S_4 = 2 + 4 + 8 + 16$$

Ahora, restamos ambas ecuaciones:

$$S_4 - 2S_4 = 1 + (2 - 2) + (4 - 4) + (8 - 8) - 16$$

$$-S_4 = 1 - 16$$

$$S_4 = 16 - 1$$

De aquí que, para la suma n-ésima de una sucesión geométrica se tendrá:

$$
\begin{array}{rl}
 & S_n = g_1 + g_1 \cdot r + g_1 \cdot r^2 + \ldots + g_1 r^{n-1} \\
- & rS_n = g_1 \cdot r + g_1 \cdot r^2 + \ldots + g_1 r^{n-1} + g_1 r^n \\
\hline
\end{array}
$$

$$S_n - rS_n = g_1 - g_1 \cdot r^n$$

$$S_n(1-r) = g_1(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{g_1(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{g_1(r^n-1)}{(r-1)}$$

Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + \cdots$$

Posee la suma $$S = \sum_{i=0}^{\infty} a_1 r^i = \frac{a_1}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, entonces la serie geométrica no tiene suma

Si $|r| = 1$, ¿qué pasa? TAMPOCO tiene suma¡¡¡¡¡

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots a_n$$

$$\underset{n \to \infty}{Lim} \quad S_n = S$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Propiedades Generales

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + \ldots a_{k+n} + \ldots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

De aquí tenemos dos cosas:

1) Puedo suprimir un número finito de términos.

2) El resto de una serie.

Propiedades Generales

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo sí, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + r_n}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo sí, para todo $\varepsilon>0$, existe un número natural N, tal que, si n>N entonces se cumple

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

Propiedades Generales

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_j , \quad b_j = \sum a_n}$$

SERIES

Existen muchas series conocidas que se usan en Física y Tecnología. Aquí hay más ejemplos

$$sen(\alpha) = \alpha^1 - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots$$

α está en RADIANES

$$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots$$

Número e de Euler

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} \cdots$$

$$e^1 = 2.71...$$