UNIDAD X:
SERIES NUMÉRICAS.

Series Telescópicas. Criterios de convergencia: criterios de comparación, criterio de D'Alembert, y criterio de la raíz (Cauchy). Criterio de Raabe.

Objetivos Instructivos. Con esta clase pretendemos que los alumnos conozcan los criterios más convenientes para determinar la convergencia de una serie.

Decimales infinitos

$$0.0808\overline{08} = \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \ldots$$

$a = \dfrac{8}{10^2}$ a y $r = \dfrac{1}{10^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{10^2}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}$$

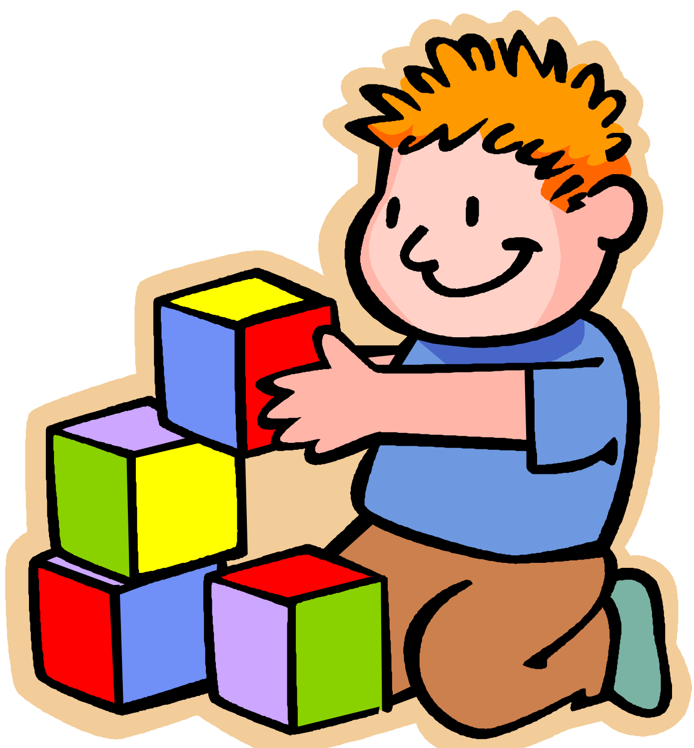
$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{8}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{8}{99}$$

El decimal repetido es equivalente a 8/99.

¿Algún problema físico puede llevar a series geométricas?

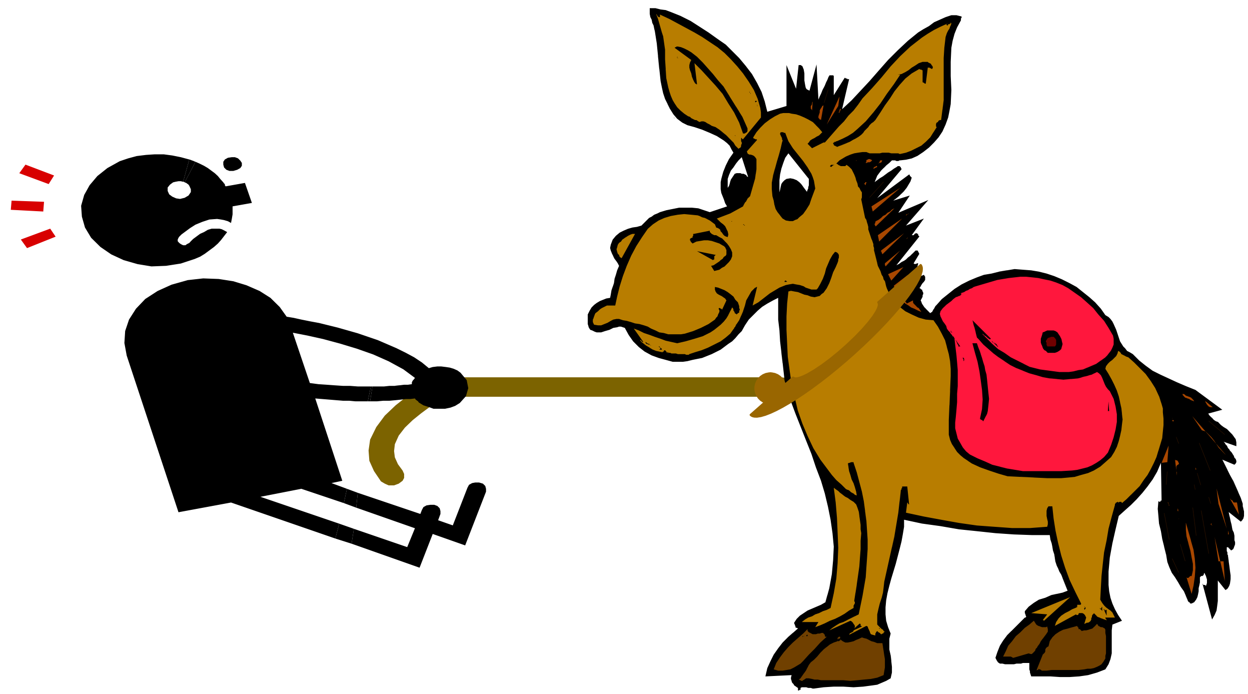
¿Qué más sabemos?

$$\sum a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = S \quad \text{(Si S existe)}$$

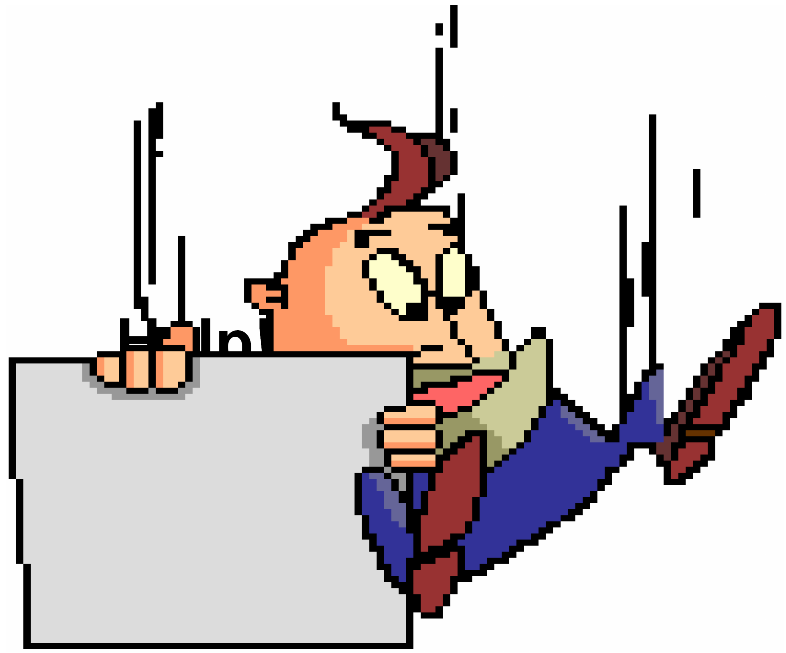


Si $a_n \not\to 0$

¿Qué podemos decir sobre esta serie?



La serie diverge¡¡¡¡¡



¿Y si $a_n \to 0$?

Parece que la serie converge, ¿no?

Por esto es que necesitamos otros criterios de #$@%^&*($#@* para decidir la convergencia…

Por tanto, en lugar de estar de vacaciones…..

Es necesario trabajar¡¡¡¡¡

Consideremos la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

$$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

y

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Si la sucesión de sumas parciales converge, la serie converge.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots \frac{n}{n+1} \ldots$$ Converge a 1, luego **converge**.

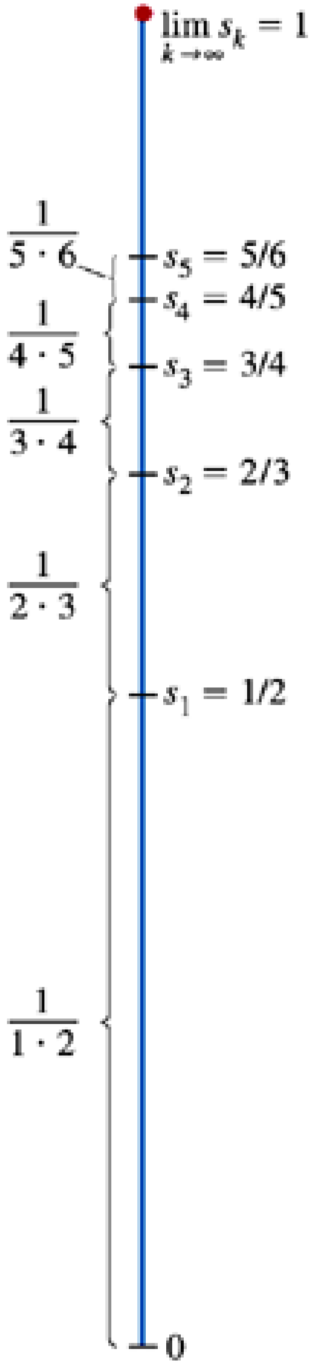
Podemos usar fracciones simples para reescribirla.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Límite



$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Series Telescópicas

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\ldots+\frac{1}{n}$$

¿Qué son las series telescópicas
(o “colapzantes”)?

Cuando desarrollamos una serie, y todos los términos intermedios se cancelan y solo quedan el primero y el últimolI, entonces la series se llama “telescópica” o “colapzante”

$$\sum \frac{1}{(an+b)(cn+d)} \qquad \sum \left(\frac{A}{an+b} \pm \frac{B}{cn+d} \right)$$

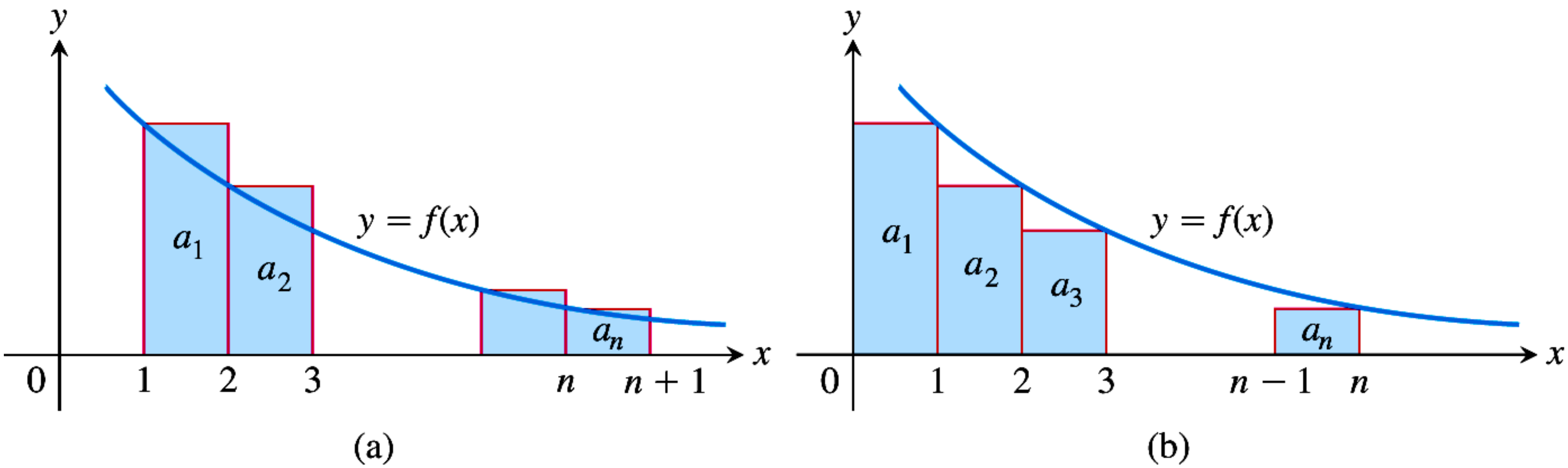
Criterio de la Integral

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos. Suponga que $a_n = f(n)$, donde f es una función continua positiva y decreciente para todo $x \geq N$. Entonces la serie y la correspondiente integral tienen **el mismo carácter.**

$$f(n) \qquad\qquad f(x)$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \qquad\qquad \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

Las áreas de los rectángulos corresponden a los términos de la sucesión



El área exacta está entre ambas sumas.

Si el área bajo la curva es finita, entonces es el área de los rectángulos.

Si es infinito, lo mismo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \qquad a_n = f(n) = \frac{n}{n^2+1} \qquad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\int_1^{b} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(\ln(b^2+1) - \ln 2\right) = \infty$$

La integral impropia diverge.

La serie diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \qquad a_n = f(n) = \frac{1}{n^2+1} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan x\right]_1^b$$

$$\lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

La integral impropia converge

Así, la serie converge

El Criterio de la Integral dice que si

$$\int_c^{\infty} f(x)dx = K$$

Donde K es un número real positivo, entonces la serie también converge.

…pero NO al mismo número!

(se puede usar esta integral para aproximar el error para S_n si n es suficientemente grande)

Si la integral diverge, lo hace la serie.

Use el Criterio de la Integral solo si al cambiar n por x, se obtiene una función fácilmentee integrable o fácil de decidir si converge o no.

Series armónicas y “series de las p”

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}$$ Es llamada la serie de las p

Una serie de este tipo converge si p>1 y diverge si p<1 o p=1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{n} + \ldots$$

Es llamada la Serie Armónica y diverge.

$$\frac{1}{a_k} = \frac{\left(\frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_{k+1}}\right)}{2}$$

Mucha gente estará sorprendida por esto!

$$\sum \frac{1}{n}$$

Veamos esto

$$\left|a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+(n-1)}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n-1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}$$

Criterio de Comparación

Suponga que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ son series de términos positivos. Entonces:

Si $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ converge y $a_n \leq b_n$ para toda n, entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ también converge.

Si $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge y $a_n \leq b_n$ para toda n, entonces también diverge $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

O sea…

Corolario

Suponga que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ son series con términos positivos y

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

a) Si $c \neq 0$,ambas series tiene el mismo carácter.

b) Si $c=0$, de la convergencia de $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ se deduce la convergencia de $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ y de la divergencia de esta última, se deduce la divergencia de $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$.

Criterio del Cociente o de D'Alembert

Sea la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ con $a_n>0$.

a) Si existe un número $q<1$ y un N tales que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,\ n \geq N$$

Entonces la serie converge.

b) Si para algún N se cumple

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,\ n \geq N$$

Entonces la serie dada diverge.

Corolario

Sea la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ con $a_n>0$ y supongamos que existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Entonces, si $l<1$ la serie converge y si $l>1$ la serie diverge.

Observación. Si $l=1$, no puede decidirse nada acerca del carácter de la serie.-

Criterio de la Raíz o de Cauchy

Sea la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ con $a_n \geq 0$.

a) Si existe un número $0<q<1$ y un N tales que

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,\ n \geq N$$

Entonces la serie converge.

b) Si para algún N se cumple

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1,\ n \geq N$$

Entonces la serie dada diverge.

Corolario

Sea la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ con $a_n>0$ y supongamos que existe

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Entonces, si $l<1$ la serie converge y si $l>1$ la serie diverge.

Observación. Si $l=1$, no puede decidirse nada acerca del carácter de la serie.-

- Tipos de serie $\begin{cases} Geométrica \\ Telescópica \\ Serie\ de\ las\ s \\ Generalización\ a_n = \dfrac{p_n}{q_n} \end{cases}$

- Clasificación $\begin{cases} Convergentes\ y\ divergentes \\ de\ tér\min os\ \ positivos\ o\ no \end{cases}$

- Suma de una serie $S = \sum^{\infty} a_n \begin{cases} geométrica\ S = \dfrac{a_1}{1-q} \\ telescópica\ S = b_1 - l \\ S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \end{cases}$

- Criterios de convergencia $\begin{cases} Geométrica\ |q| < 1 \\ Telescópica,\ a_n = b_n - b_{n+1},\ \{b_n\}\ convergente \\ \dfrac{1}{n^s},\ \dfrac{p_n}{q_n} \\ comparación,\ cociente\ y\ raíz \end{cases}$