Examen Final de Álgebra (LSI)

Ejercicio	1	2	3	4	5
Puntaje	20	20	20	20	20

1) a) Función proposicional. Definición. Explicar de qué manera puede obtenerse una proposición a partir de ella.
   b) Dada la siguiente función proposicional con dominio en R^2 : $P(x,y): y - x^2 + 1 = 0$
   i) Obtener si es posible, una proposición verdadera y otra falsa, utilizando cuantificadores. Luego, expresarlas en lenguaje coloquial.
   ii) Hallar la negación de cada proposición obtenida en a), sin hacer uso del signo $\neg$.

2) a) Números complejos. Definición. Opuesto, conjugado e inverso de un número complejo. Módulo y argumento de un número complejo. Definición.
   b) Dado el número complejo: $z = (-2,3)$
   Expresarlo en forma binómica y trigonométrica.
   c) Probar que: $\forall z = (a,b) \in C : (a,b).(a,-b) = (a^2 + b^2, 0)$

3) a) Combinaciones lineales. Definición. Dependencia e independencia lineal. Definición. Propiedades.
   Escribir una matriz A $\in$ R^{3x2} tal que la primera fila sea combinación lineal de la segunda y la tercera.

   b) Rango de una matriz. Definición. Matriz escalonada. Definición.
   Escribir una matriz B $\in$ R^{3x3} tal que r (B) = 2 y B no tiene ninguna fila nula.

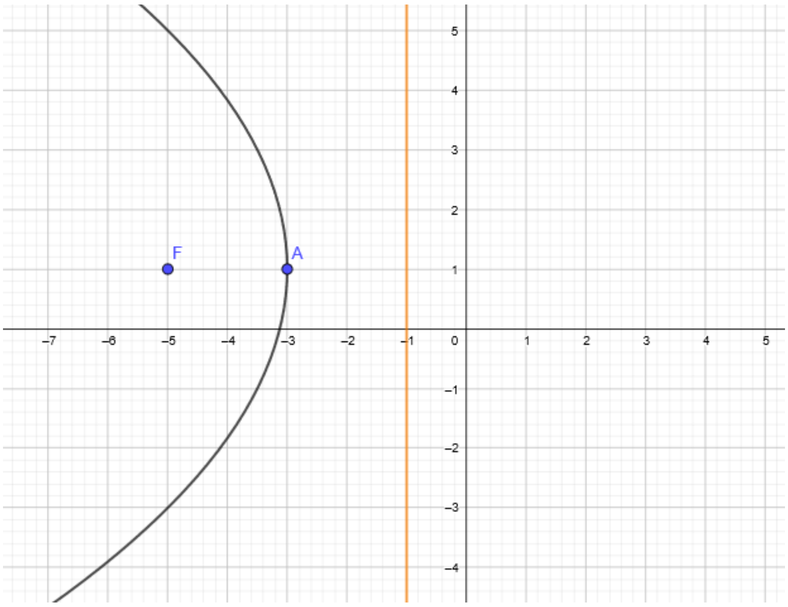
4) a) Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Definición. Clasificación según el conjunto solución. Sistema de ecuaciones lineales homogéneos. Clasificación.
   b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, si es compatible indeterminado hallar al menos dos soluciones.

$$\begin{cases} 2x - z = -3y - w \\ x - 2y = -3z + 3w \\ 8y - 5z + 5w = -3x \end{cases}$$

5) Dada la siguiente ecuación de una cónica: $y^2 - 2y + 8x + 25 = 0$
   a) Hallar la ecuación canónica de la misma.
   b) Representar gráficamente identificando sus elementos.
   c) Definirla.

Solución: $y^2 - 2y + 8x + 25 = 0$

$$y^2 - 2y + 1 + 8x + 24 = 0$$
$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 24$$
$$(y-1)^2 = -8(x+3)$$
$$(y-1)^2 = -4.2.(x+3)$$


F
A
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4

Examen final Álgebra (LSI)

Dic/2022

Resolución parte práctica

1)

b) Dada la siguiente función proposicional con dominio en $\mathbb{R}^2$: $P(x,y): y - x^2 + 1 = 0$

i) Obtener si es posible, una proposición verdadera y otra falsa, utilizando cuantificadores. Luego, expresarlas en lenguaje coloquial.

ii) Hallar la negación de cada proposición obtenida en a), sin hacer uso del signo $\neg$.

i) $y - x^2 + 1 = 0 \iff y = x^2 - 1$

Luego: * $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y = x^2 - 1 \rightarrow$ Proposición verdadera

"Para cada número real, existe otro número real que es igual a su cuadrado disminuido en 1"

Negación: $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}: y \neq x^2 - 1$

* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: y = x^2 - 1 \rightarrow$ Proposición falsa

"Todo número real se puede expresar como el cuadrado de cualquier número real menos 1"

Negación: $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} | \; y \neq x^2 - 1$

2)

b) Dado el número complejo: $z = (-2,3)$

Expresarlo en forma binómica y trigonométrica.

$\rightarrow$ Forma binómica: $\boxed{-2 + 3i}$

$\rightarrow$ Forma trigonométrica: $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{-2} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{-2}\right) \cong 56°$

Como z está en el 2^{do} cuadrante, $\arg(z) \cong 180° - 56° \cong 124°$

Luego: $\boxed{z = \sqrt{13}.(\cos 124° + i.\operatorname{sen} 124°)}$

c) Probar que: $\forall z = (a,b) \in C: (a,b).(a,-b) = (a^2 + b^2, 0)$

Sea $z = (a,b) \in C$. Luego: $(a,b).(a,-b) \underset{\text{Prod. en C}}{=} (a.a - b.(-b) ; a.(-b) + b.a) = (a^2 + b^2 ; -ab + a.b) = (a^2 + b^2 ; 0)$

Prod. en C

$-b.(-b) = b.b = b^2$

$a.(-b) = -a.b$

$b.a = a.b$

$-ab$ y ab son opuestos $\rightarrow$ su suma da 0.

3)

a) Escribir una matriz $A \in \mathbb{R}^{3x2}$ tal que la primera fila sea combinación lineal de la segunda y la tercera.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3x2}$

En esta matriz se verifica:

$F_1 = 2.F_2 + F_3$ (pues $\underset{a_{11}}{3} = 2.\underset{a_{21}}{1} + \underset{a_{31}}{1}$ y $\underset{a_{12}}{2} = 2.\underset{a_{22}}{0} + \underset{a_{32}}{2}$)

b) Escribir una matriz $B \in \mathbb{R}^{3x3}$ tal que r (B) = 2 y B no tiene ninguna fila nula.

Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ $r(B) = 2$ (probar) y no tiene ninguna fila nula.

4)

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, si es compatible indeterminado hallar al menos dos soluciones.

$$\begin{cases} 2x - z = -3y - w \\ x - 2y = -3z + 3w \\ 8y - 5z + 5w = -3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - z = -3y - w \\ x - 2y = -3z + 3w \\ 8y - 5z + 5w = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z + w = 0 \\ x - 2y + 3z - 3w = 0 \\ 3x + 8y - 5z + 5w = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 8 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{1}{2}F_1 + F_2 \to F_2 \\ -\frac{3}{2}F_1 + F_3 \to F_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{array}\right] \underset{F_2 + F_3 \to F_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore$ $r(A) = 2 = r(A') < n = 3$

S.C.I

Sistema de ecuaciones equivalente: $\begin{cases} 2x + 3y - z + w = 0 \\ -\frac{7}{2}y + \frac{7}{2}z - \frac{7}{2}w = 0 \end{cases}$

- $-\frac{7}{2}y + \frac{7}{2}z - \frac{7}{2}w = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}y = \frac{7}{2}w - \frac{7}{2}z \Leftrightarrow y = \dfrac{\frac{7}{2}w - \frac{7}{2}z}{-\frac{7}{2}} = -w + z = z - w$

  $\therefore$ $\boxed{y = z - w}$

- $2x + 3y - z + w = 0 \Leftrightarrow 2x + 3.(z - w) - z + w = 0 \Leftrightarrow 2x + 3z - 3w - z + w = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 2x + 2z - 2w = 0 \Leftrightarrow 2x = 2w - 2z \Leftrightarrow x = \frac{2w - 2z}{2} = w - z$

  $\therefore$ $\boxed{x = w - z}$

Luego: $S = \{(w - z; z - w; z; w)\}$

- Sean $z = 1$, $w = 1 \Rightarrow S_1 = \{(0, 0, 1, 1)\}$
- Sean $z = 0$, $w = 1 \Rightarrow S_2 = \{(1, -1, 0, 1)\}$