CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL-LSI

TEMA 2

Tema 2: Derivada de una función de una variable.

Derivada de una función. Interpretación geométrica. Reglas de derivación. Diferenciales. Interpretación geométrica. Relación con el incremento. Cálculos aproximados. Errores. Derivadas y diferenciales de orden superior.

Derivada de una función

Consideremos lo siguiente:
Sea $f(x)$ una función continua y definida en un intervalo abierto (a,b), y sean x_0 y $x_0 + \Delta x$ pertenecientes al intervalo (a,b), siendo Δx un incremento:

Siendo $x_0, x_0 + \Delta x \in (a,b) \subset Dm_f$, tenemos que:

en x_0 es $f(x_0)$

en $x_0 + \Delta x$ es $f(x_0 + \Delta x)$

El incremento correspondiente de la función es:

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ que se designa Δy o sea:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Ejemplo:

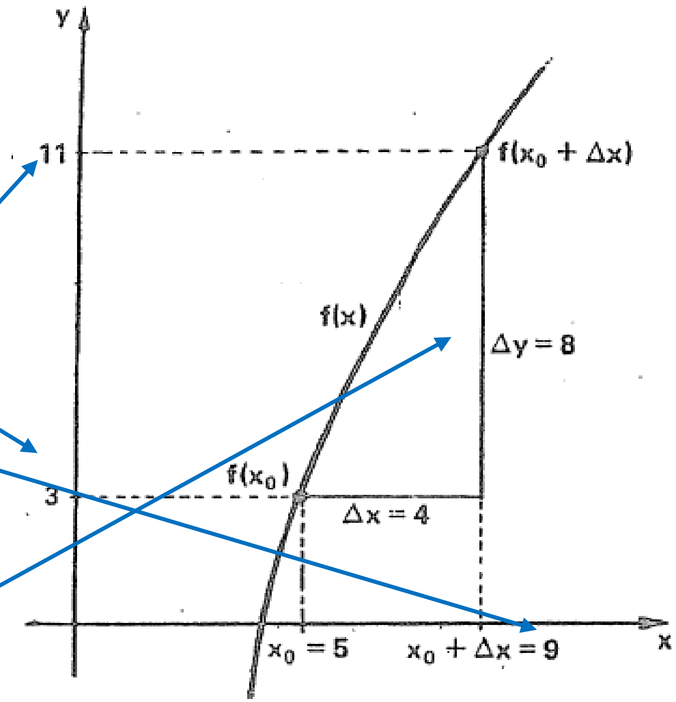
Para el caso particular de $x_0 = 5$, $\Delta x = 4$
y la gráfica de una función, tenemos:

$x_0 = 5 \qquad f(x_0) = f(5) = 3$

$\Delta x = 4 \qquad x_0 + \Delta x = 9$

$x_0 + \Delta x = 9 \quad f(x_0 + \Delta x) = f(9) = 11$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 11 - 3 = 8$



Es decir, al incremento $\Delta x = 4$ de la variable independiente, le corresponde un incremento de la función $\Delta y = 8$, o sea que la función varía un promedio de 2 unidades, por cada unidad que varía x; este número 2 es lo que se llama la variación media de la función con respecto a la variación de x en el intervalo [4 ; 9]. Esta variación media, está dada por el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{11 - 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

y para cada función, en general, depende del punto x_0 y del incremento Δx. Así, en el ejemplo anterior, para el mismo punto $x_0 = 5$, si se considera otro incremento $\Delta x = 2$, se tiene:

$$x_0 = 5 \qquad f(x_0) = f(5) = 3$$

$$\Delta x = 2 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(7) = 8$$

$$x_0 + \Delta x = 7 \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 8 - 3 = 5$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

es decir que en el intervalo $[5 \,;\, 7]$ la variación media de la función es 2,5.

Cociente incremental

El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ se llama cociente incremental y representa, como pudo observarse en el ejemplo anterior, la variación media de crecimiento o decrecimiento de una función en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$

Para tener una idea mas aproximada de la rapidez de la variación de la función se consideran Δx cada vez mas próximos a cero, y la variación instantánea de la función en el punto es el limite del cociente incremental, cuando Δx tiende a 0. Este limite se llama <u>derivada de la función en el punto</u>.

Derivada de una función en un punto

Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto (a, b), sean x_0 y $x_0 + \Delta x$ pertenecientes al intervalo, siendo Δx un incremento . Decimos que $f(x)$ es derivable en x_0 si existe el limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

En el caso de que ese límite exista se lo indica con $f'(x_0)$ y se lo llama derivada de f en x_0 . Es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Interpretación geométrica

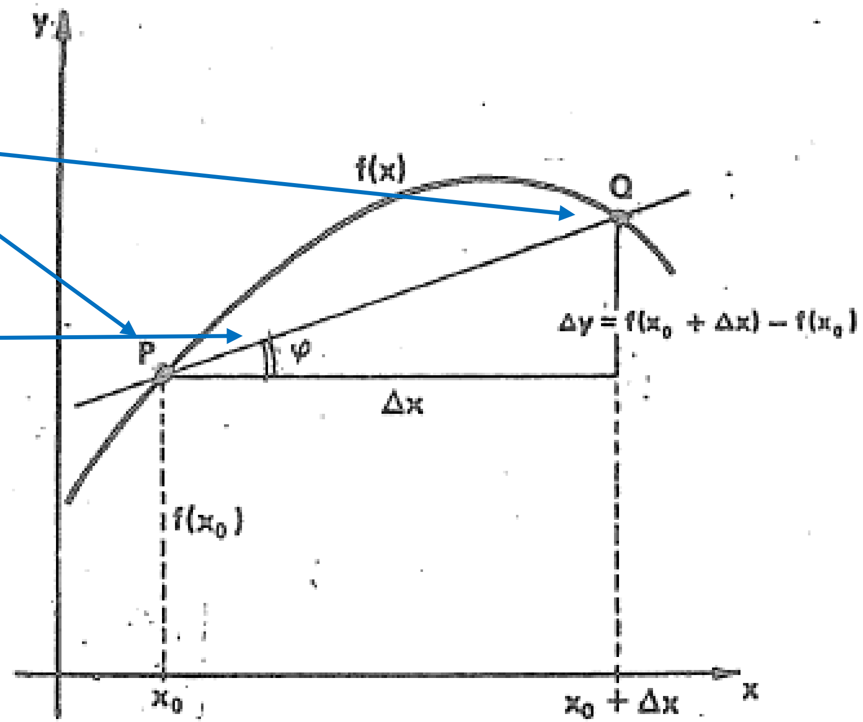
Sea $f(x)$ una función continua que admite derivada en x_0 ; a x_0 le corresponde el punto P de la curva.

Se considera Δx; a $x_0 + \Delta x$ le corresponde el punto Q.

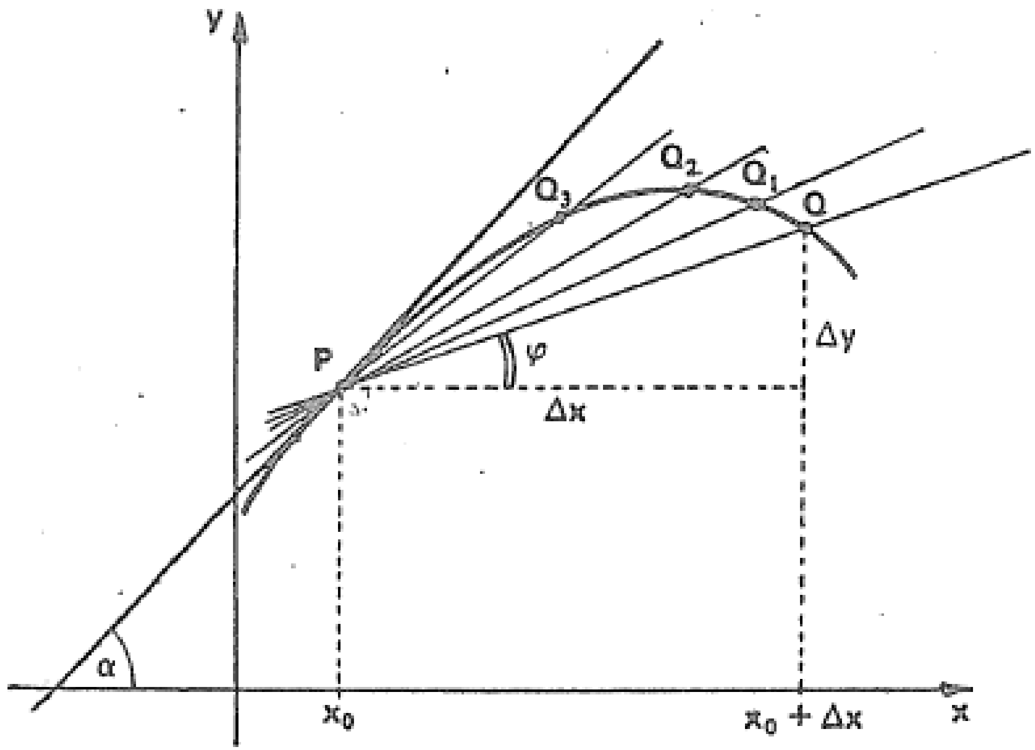
Se traza la recta PQ secante a la curva. El cociente incremental es la tangente del ángulo φ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\ \varphi$$

o sea, que el cociente incremental es la pendiente de la recta secante PQ.



Cuando Δx se hace más pequeño, el punto Q se aproxima a P, pasa por las distintas posiciones Q_1 ; Q_2 ; Q_3 . Se tiene así, un haz de rectas, una sucesión de secantes que todas pasan por el punto P. Cuando $\Delta x \longrightarrow 0$ la posición límite de estas rectas secantes es la de la tangente a la curva en P, que se destaca en trazo más grueso en la figura y que determina el ángulo α con el semieje positivo x.



Por lo tanto el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \longrightarrow 0$ o sea la derivada en x_0 es un número que mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P.

Trabajo Práctico N° 2 - La Derivada y sus Aplicaciones

1. Sabiendo que la función $f(x) = x^2 + 2x$ es continua.

    a) Construir su gráfica.

    b) Calcular el incremento Δy de la función f cuando $x_0 = 1$ y $\Delta x = 0{,}5$.

    c) Calcular el cociente incremental correspondiente para $x_0 = 1$ y $x_0 + \Delta x = 1{,}5$.

    d) Calcular $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. ¿Qué se obtiene?

    e) Calcular la derivada de la función f en $x_0 = 1$.

Función derivada

Dada la función $f(x)$, la función derivada de ella es $f'(x)$, tal que para cada punto x_0 del dominio de la función queda determinado un único valor de $f'(x_0)$.
Se define como el limite del cociente incremental para un elemento x cualquiera del dominio, cuando $\Delta x \to 0$. Siendo :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La función derivada es una función que a cada elemento del dominio de $f(x)$ le asigna la derivada de $f(x)$ en ese elemento, en el caso que exista.

Propiedades

- Sean u y v dos funciones derivables en x y $u = f(x)$ y $v = g(x)$, si $y = u + v$ entonces $y' = u' + v'$

- Sean u y v dos funciones derivables en x y $u = f(x)$ y $v = g(x)$.
  Si $y = u.v$ entonces $y' = u'.v + u.v'$

- Sean u y v dos funciones derivables en x y $u = f(x)$ y $v = g(x)$, con $g(x) \neq 0$
  Si $y = \frac{u}{v}$ entonces $y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Propiedad

Sea una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto y sea $x = a$ un punto de dicho intervalo.

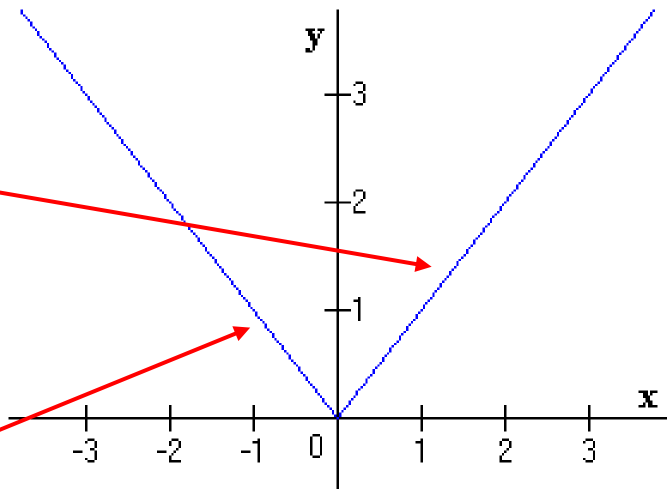
El reciproco de la propiedad es falsa, es decir, hay funciones que son continuas pero que no son derivables

Ejemplo

La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua pero no es derivable en el origen: no coinciden los límites laterales en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



Derivada de expresiones algebraicas

Sea $y = f(x)$

- Si $y = c$, siendo c una constante, entonces $y' = 0$
- Si $y = x$, entonces $y' = 1$
- Si $y = f(x)$ es una función de la forma $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces $y' = n.x^{n-1}$

- Sea $y = f(x)$ una función de la forma $y = \sqrt[2]{x}$ entonces $y' = \frac{1}{2.\sqrt[2]{x}}$

Derivada de funciones exponencial y logarítmica

- Sea $y = f(x)$ una función de la forma $y = \ln x$ entonces $y' = \frac{1}{x}$
- Sea $y = f(x)$ una función de la forma $y = e^x$ entonces $y' = e^x$

Derivada de una función compuesta (regla de la cadena)

Sean $y = f(x)$ y $z = g(y)$ funciones derivables de las variables independientes xe y, respectivamente.

$$z' = g'(y).f'(x)$$

- Si $y = \ln u$ entonces $y' = \frac{1}{u}.u' = \frac{u'}{u}$
- Si $y = u^n$ entonces $y' = n.u^{n-1}.u'$
- Si $y = \sqrt[2]{u}$ entonces $y' = \frac{u'}{2.\sqrt[2]{u}}$
- Si $y = e^u$ entonces $y' = u'.e^u$

Definición de Diferencial

Sea una función $y = f(x)$ derivable en el intervalo (a, b) . El producto de la derivada de la función, $f'(x)$, por el incremento Δx se llama diferencial de la función.

Se la designa por $df(x)$, o de la forma habitual dy, es decir:

$$dy = f'(x).\Delta x \text{ o bien } dy = y'.\Delta x \text{ o}$$

Diferencial de la variable independiente

Sea la función identidad $y = f(x) = x$, con lo cual $y' = f'(x) = 1$

Consideremos $dy = f'(x).\Delta x$ (*). Como $y = x$ resulta $\mathrm{d}y = dx$, entonces resulta $dx = f'(x).\Delta x$.

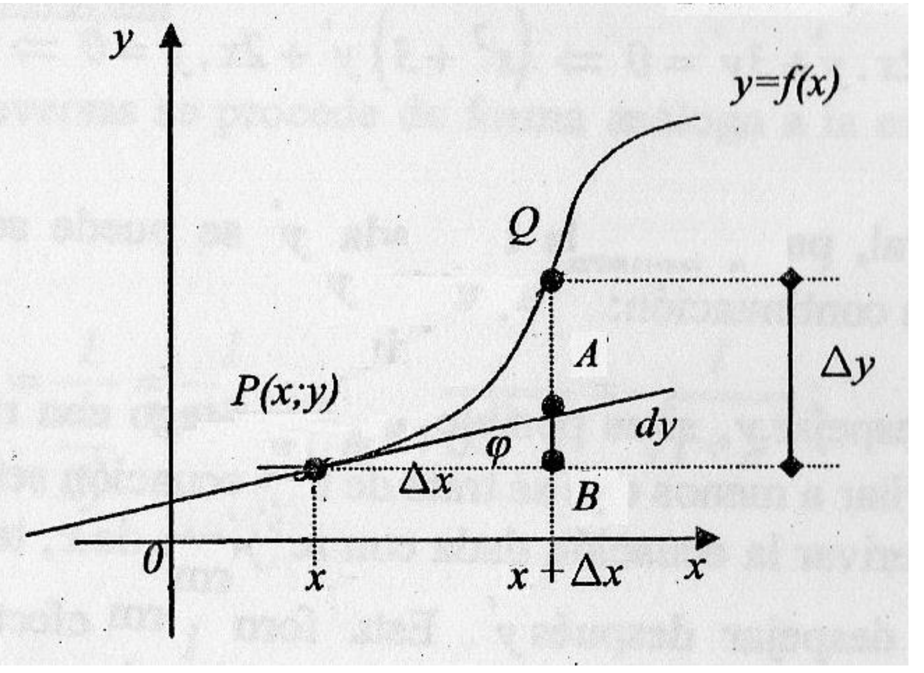
Sabemos que $f'(x) = 1$, entonces $dx = 1.\Delta x$, es decir $dx = \Delta x$

La igualdad $dx = \Delta x$ podría ser considerada como definición de la diferencial de una variable independiente.

Luego, la expresión (*) puede escribirse como: $\boldsymbol{dy = f'(x).dx}$

De dicha igualdad se desprende que $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Interpretación geométrica de la Diferencial



Sea: $dy = f'(x).dx$

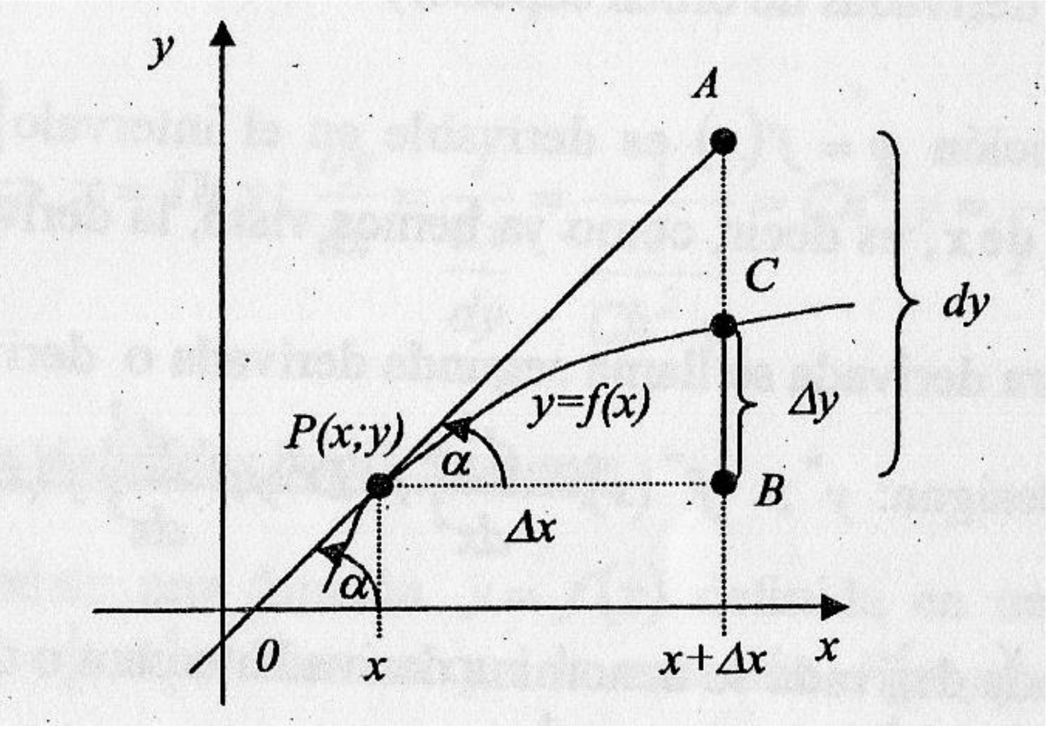
$$y' = tg\,\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}\;;\; dx = \Delta x = \overline{PB} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{\overline{AB}}{\cancel{\overline{PB}}}.\cancel{\overline{PB}} = \overline{AB}$$

En este caso: $dy < \Delta y$;

Geométricamente la diferencial de una función: $y = f(x)$ es el incremento que sufre la recta tangente a la curva en el punto x cuando se pasa de x a $x + \Delta x$.

La longitud $\overline{AB}$ corresponde al diferencial de $f(x)$ en x, respecto del incremento Δx.

Interpretación geométrica de la Diferencial



Sea: $dy = f'(x).dx$

$y' = tg\,\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \Rightarrow$ $dy = y'.dx = \dfrac{\overline{AB}}{\cancel{\overline{PB}}}.\cancel{\overline{PB}} = \overline{AB}$; En este caso: $dy > \Delta y$

Geométricamente la diferencial de una función: $y = f(x)$ es el incremento que sufre la recta tangente a la curva en el punto x cuando se pasa de x a $x + \Delta x$.

La longitud $\overline{AB}$ corresponde al diferencial de $f(x)$ en x, respecto del incremento Δx.

Relación de la diferencial de una función con el incremento Δy

Sea una función $y = f(x)$ derivable en el intervalo (a, b) .
La derivada de la función se define como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

En la cual podemos observar que cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a un numero determinado $f'(x)$ y por lo tanto, esta razón incremental se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña, es decir en un infinitésimo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon_{(x)} \text{ , donde } \varepsilon_{(x)} \to 0, \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

Multiplicando la igualdad anterior por Δx , tenemos que:

$$\boldsymbol{\Delta y = f'(x) . \Delta x + \varepsilon_{(x)} . \Delta x}$$

Dado que en el caso general $f'(x) \neq 0$, entonces cuando x es constante y $\Delta x \to 0$, el producto $f'(x). \Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña llamada de primer orden respecto a Δx, es decir un infinitésimo de primer orden.

$$\boldsymbol{\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon_{(x)}.\Delta x}$$

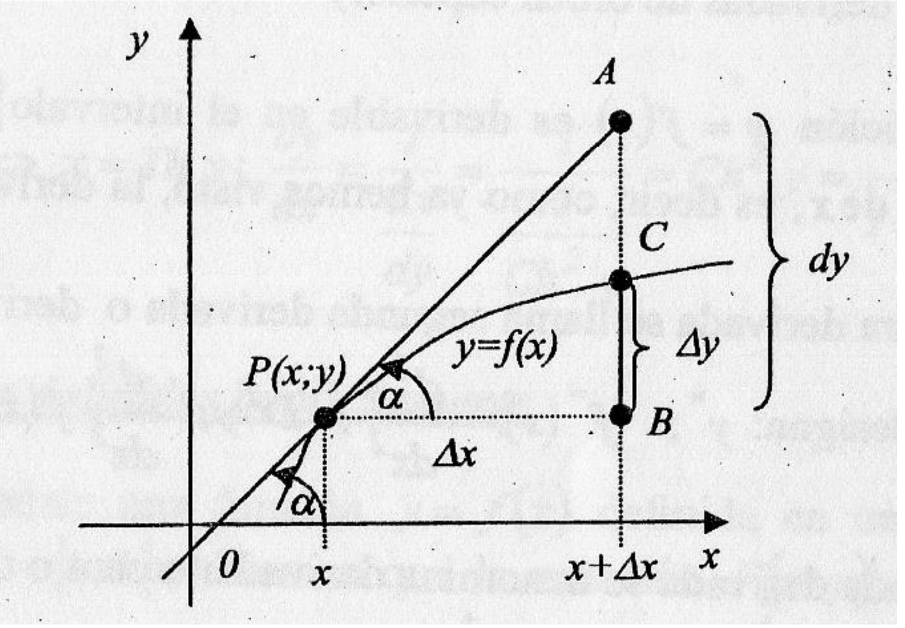
Asimismo, el producto $\varepsilon_{(x)}.\Delta x$ es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior, es decir un infinitésimo de orden superior a Δx, ya que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon_{(x)}.\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_{(x)} = 0$$

Así pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumando, de los cuales el primero recibe el nombre (cuando $f'(x) \neq 0$) de parte principal del incremento, que es lineal con relación a Δx y el segundo termino de termino complementario. El producto $f'(x).\Delta x$ se denomina <u>diferencial</u> de la función y la designaremos con dy o $df(x)$.

Si $\Delta x \to 0$ y además $f'(x) = y' \neq 0$, los infinitésimo dy y Δy son equivalentes, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y'\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{1}{y'} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{y'} = y'.\frac{1}{y'} = 1$$



Cálculo aproximado

Por otra parte, la longitud $\overline{BC}$ comprende al incremento: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

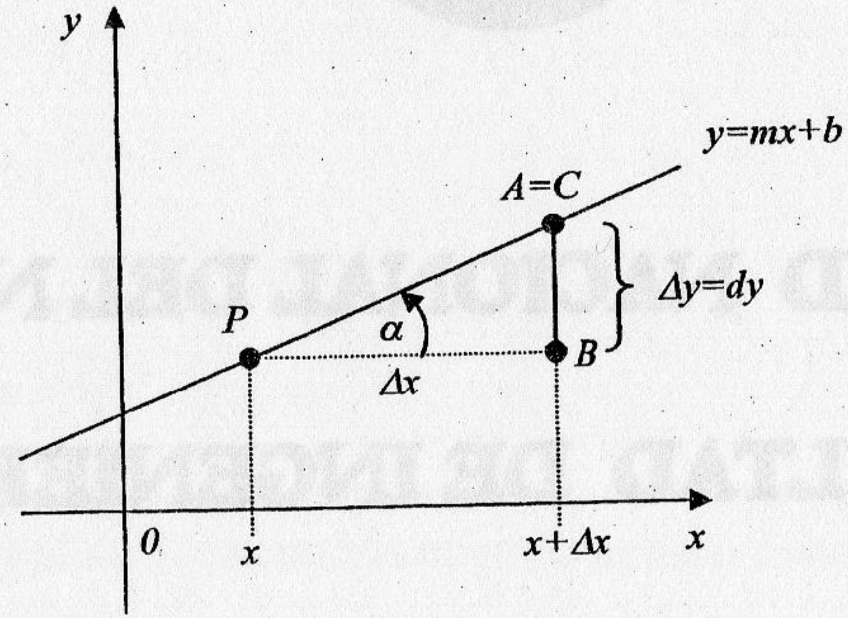
En un entorno de x, cuando menor es el número $\Delta x\ (\Delta x \to 0)$, más se aproximan las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. *O sea, la resta* $\underset{\Delta x \to 0}{\overline{AB} - \overline{BC}} \to 0$. Por lo tanto, sí reemplazamos $\overline{BC}$ por $\overline{AB}$ estamos reemplazando en el gráfico de $f(x)$, entre x y Δx por la recta tangente a la curva en el punto: $[x;f(x)]\ (P(x;y))$ por lo tanto podemos aproximar el valor de $f(x+\Delta x)$ conociendo el valor de $f(x)$ y el diferencial de f respecto de Δx :

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x\ ;\ \text{ó}\ \ f(x+\Delta x) \cong f(x) + d\ f(x)$$

Errores

El error que se comete al reemplazar $f(x+\Delta x)$ por $f(x)+d\,f(x)$, puede hacerse menor que cualquiera: $\varepsilon > 0$, prefijado, sí se toma Δx convenientemente pequeño.

Luego: $f(x+\Delta x)-f(x)\cong f'(x)\,\Delta x \quad \therefore \quad \Delta y \cong dy$



Diferenciales de orden superior

Supongamos la función $y = f(x)$, donde x es la variable independiente. La diferencial de esta función: $dy = f'(x)dx$, es una función de x. Pero de x depende solamente el primer factor: $f'(x)$, puesto que el segundo: dx es un incremento de la variable x, que no depende del valor de esta.

En consecuencia, podemos denominar "a la diferencial de la diferencial de una función con el nombre de diferencial segunda o diferencial de segundo orden", y se designa: $d^2y = d(dy)$.

De la expresión de la diferencial segunda: $d^2y = \left[f'(x).dx\right]' dx$, como dx es independiente de x, al derivar, dx sale fuera del signo de derivación. Luego: $d^2y = f''(x).(dx)^2$. En la potencia del diferencial se suele omitir el paréntesis: $(dx)^2 = dx^2$, entendiéndose que se trata del cuadrado de la expresión dx; $(dx)^3 = dx^3$; y así sucesivamente.

Se llama diferencial tercera o diferencial de tercer orden de una función, a la diferencial de la diferencial segunda de esta función: $d^3y = d\left(d^2y\right) = \left[f''(x).dx^2\right]'.dx = f'''(x).dx^3$.

En general se llama diferencial n-sima o diferencial de n-simo orden a la diferencial primera de la diferencial de orden (n-1): $d^ny = d\left(d^{(n-1)}y\right) = \left[f^{(n-1)}(x).dx^{n-1}\right]'.dx = f^{(n)}(x).dx^n$