Matematica II

Unidad 1

Funciones

Decimos que una variable y es funcion de otra variable X e indicamos asi $y = f(x)$, cuando a cada valor de la variable X perteneciente a cierto dominio corresponde un valor determinado a la variable y.

Llamamos dominio, intervalo de validez o campo de existencia de una funcion, a los valores de X para cuales la función esta definida o tiene sentido.

Ejemplo $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad Dm = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$

Cotas

Sea un conjunto ordenado A y sea $X \subset A$

COTA INFERIOR: $c \in A$ es cota inferior de $X \subset A \iff \forall x: x \in X \Rightarrow c \leq x$

COTA SUPERIOR: Un numero cualquiera K es cota superior si ese numero es mayor que cualquier numero perteneciente al conjunto X.

$K \in A$ es cota superior de $X \subset A \iff \forall x: x \in X \Rightarrow x \leq K$

Infimo: $I \in A$ es infimo de $X \subset A$ si I es la mayor de las cotas inferiores o cota inferior máxima de x

Supremo: $S \in A$ es supremo de $X \subset A$ si S es el menor de las cotas superiores o cota superior minima de X

Elemento minimo: $n = I$ es elemento minimo de $X \subset A$ si I es infimo de X y pertenece al conjunto

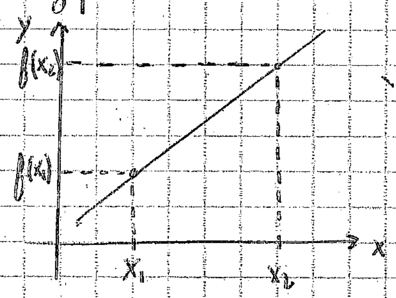
Elemento maximo: $m = S$ es elemento maximo de $X \subset A$ si S es supremo de X y pertenece al conjunto.

COMPOSICION DE FUNCIONES

Composicion de las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$ esta funcion $g \circ f: A \to C$ definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ para todo $x \in A$

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES

① Creciente: decimos que una función es creciente: $f(x_1) < f(x_2)$ dado dos puntos de la curva el de la derecha está más arriba que el de la izquierda la curva crece de izquierda a derecha.

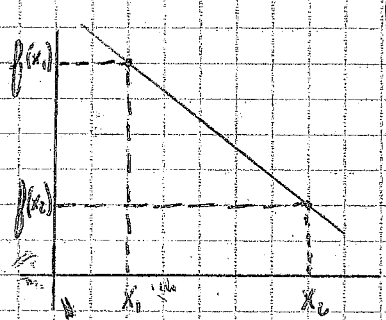


$X_2 > X_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

$f(x)$ es creciente $\Leftrightarrow X_2 > X_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

$f(x)$ es NO CRECIENTE $X_1 < X_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Decreciente: decimos que una funcion es decreciente: $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ considerando dos puntos del grafico; el de la izquierda esta mas arriba del punto de la derecha. La grafica desciende de izquierda a derecha.



$X_1 < X_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f(x)$ es decreciente $\Leftrightarrow X_2 > X_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$f(x)$ es NO DECRECIENTE $\Leftrightarrow X_1 < X_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Funcion estrictamente monotona: cuando una funcion es creciente o decreciente

Funcion monotona: si una funcion es No creciente o NO decreciente

② Funciones Pares e Impares:

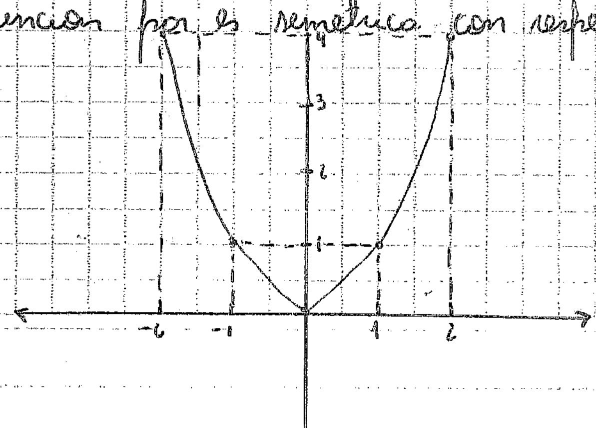
Una funcion es PAR si para valores opuestos de la variable independiente la funcion $f(x)$ toma el mismo valor. En la funcion par se verifica que: $f(x) = f(-x)$

$$\forall x: f(x) \text{ es par} \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$$

La grafica de una funcion par es simetrica con respecto al eje y

Ejemplo $y = x^2$

X	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4



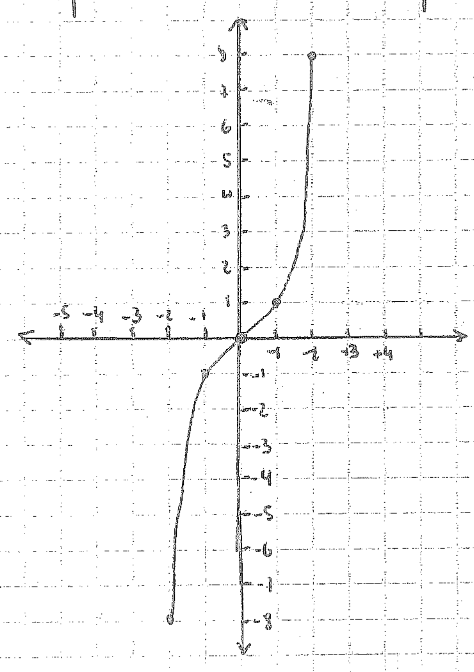
Una funcion es IMPAR si para valores opuestos de la variable independiente la funcion f(x) toma valores opuestos, en la funcion impar se verifica $f(x) = -f(-x)$ para cualquier valor de x

$$\forall x: f(x) \text{ es impar} \Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$$

La grafica de la funcion impar es simetrica respecto al origen para todos los valores del dominio

Ejemplo $y = x^3$

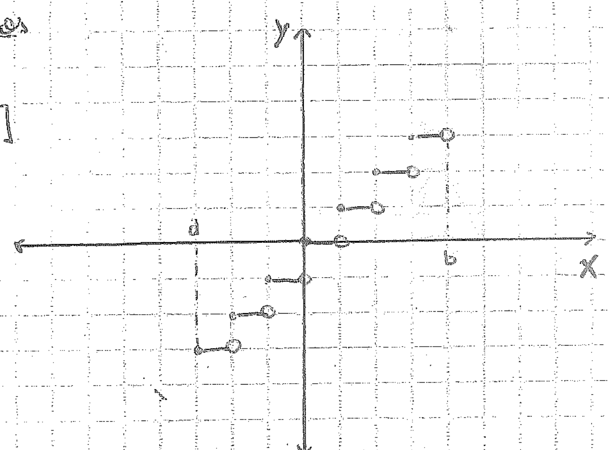
x	y
0	0
1	1
-1	-1
2	8
-2	-8



(3) Funcion Escalonada

Una funcion se dice escalonada cuando su dominio es un intervalo cerrado [a,b] y existe una particion en subintervalos donde la funcion se mantiene constante en cada uno de los subintervalos

Ejemplo $y = [x]$ en el intervalo $[a, b]$



Consideremos el intervalo cerrado [a,b] y hagamos una particion del mismo en n subintervalos por medio de n-1 puntos de subdivision.

$$a < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-2} < x_{n-1} < b$$

Hacemos corresponder a a el subindice 0 para x_i y a b el subindice n para x_i

$a = x_0 \wedge b = x_n$ simbolicamente $P = [x_0; x_1; x_2; x_3 \ldots; x_{n-2}; x_{n-1}; x_n]$

Una funcion u cuyo dominio es el intervalo $[a;b]$ es una funcion escalonada si existe una particion P del mismo tal que u es constante en cada subintervalo abierto P. Existe un numero real para cada u_i con $i = 1, 2, 3 \ldots n$ tal que

$$u(x) = u_i \quad \text{si} \quad x_{i-1} < x < x_i$$

④ Funciones Implicita

Una relacion entre las variables X e Y dada por una ecuacion en la cual y no esta despejada define a y como funcion implicita de X

Ejemplo $y + 8 - x = 2x^2$

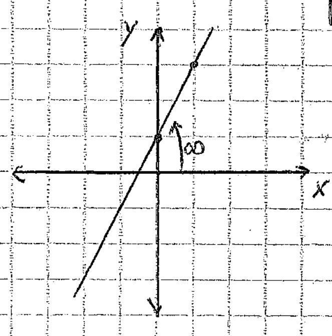
⑤ Funciones Algebraicas

Son aquellas que se escriben mediante expresiones algebraicas las variables x e y aparecen ligadas por: Sumas, restas, productos, cocientes, potencias de exponentes enteros

a) Funcion Lineal: tiene la forma $y = mx + b$ donde m y b son numeros fijos en cada caso, su unica grafica es la linea recta.

m = es la pendiente de la recta, si se modifica m entonces se modifica la inclinacion de la recta

b = es el punto donde la funcion corta al eje y



$y = 2x + 1$

$tg\,\alpha = m$

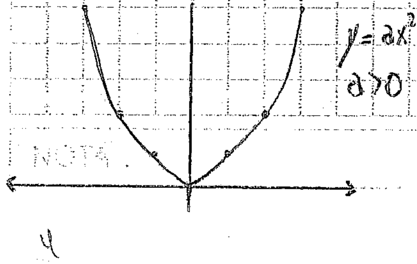
b) Funcion cuadratica tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$ con a, b, c numeros fijos en cada caso

si $b = c = 0 \Rightarrow y = ax^2$ en cuyo caso no importa como sea X porque

si $a > 0 \Rightarrow y > 0$

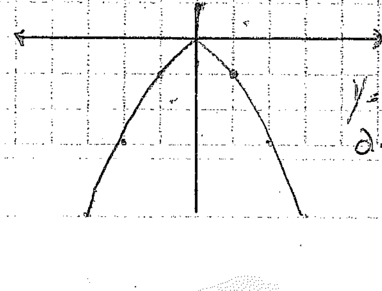
si $a < 0 \Rightarrow y < 0$

El unico valor que hace 0 a la funcion $y = ax^2$ es $x = 0$



$y = ax^2$

$a > 0$



$y = ax^2$

$a < 0$

4

c) Funcion Racional Entera o funciones polinomicas, son expresiones de la forma

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$

Donde.

$n \in \mathbb{N}$, los a_i son numeros fijos en cada caso

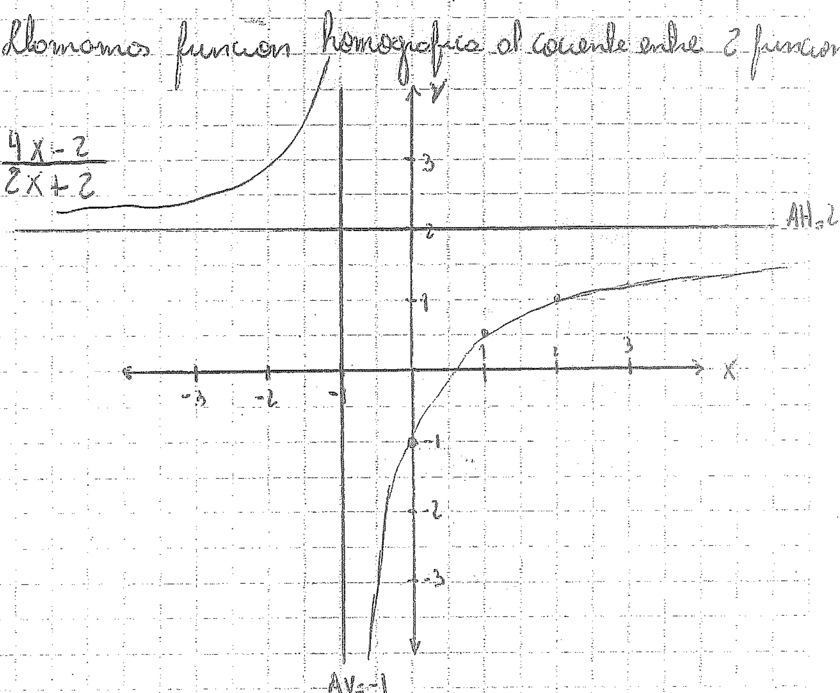
Grado de la funcion = al maximo exponente de n con $n \in \mathbb{N}$

La funcion lineal y cuadratica son casos especiales de las funciones polinomicas

Ejemplo = $y = x^3 + x^2 - 6x$

d) Funcion Homografica Llamamos funcion homografica al cociente entre 2 funciones lineales.

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ej $\frac{4x-2}{2x+2}$



$AH = \frac{a}{c} = \frac{4}{2} = 2$

$AV = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{2} = -1$

CONDICIONES

1) $c \neq 0$; porque si $c = 0$ la funcion se reduce a una lineal $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$

2) $bc - ad \neq 0$
   $ad - bc \neq 0$

1er paso divido $ax + b$ por $cx + d$

$$\begin{array}{l|l} ax+b & cx+d \\ \cancel{-ax} - \frac{ad}{c} & \frac{a}{c} \\ \hline b - \frac{ad}{c} & \end{array}$$

$b - \frac{ad}{c} = \frac{cb - ad}{c}$ pongo c en factor comun

$\begin{array}{l|l} A & B \\ R & C \end{array}$ $A = B.C + R$

$\underbrace{ax+b}_{A} = \underbrace{(cx+d)}_{B} * \underbrace{\frac{a}{c}}_{C} + \underbrace{\frac{cb-ad}{c}}_{R}$ divido ambos miembros por $cx + d$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\cancel{(cx+d)}}{\cancel{cx+d}} \cdot \frac{a}{c} + \overbrace{\frac{cb-ad}{c(cx+d)}}^{0} = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + 0$$

$\therefore$ $bc - ad \neq 0$ porque si $bc - ad = 0$ la funcion homografica se reduce a una constante $\frac{a}{c}$

"la diferencia entre el producto cruzado debe ser distinto de cero porque si fuera igual a 0, la funcion se reduce a una constante $\frac{a}{c}$"

Asintota vertical $X = -\frac{d}{c}$ (Recta perpendicular al eje X a la cual la grafica de la funcion no la corta en ningun punto)

Asintota Horisontal $y = \frac{a}{c}$ (recta perpendicular al eje Y a la cual la grafica de la funcion no la corta en ningun punto

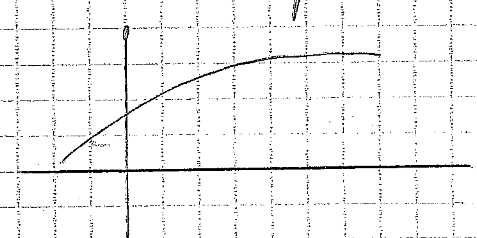
d) Funcion Racional Fraccionaria Es un cociente de dos polinomios de grado n y m respectivamente de manera que:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$$

todos los valores de x que anulan al numerador, pero no al denominador son ceros (los valores de X que hacen $y = 0$) de la funcion. Los valores de X que solo anulan al denominador en el grafico determinan asintotas verticales.

e) Funcion Irracional Cuando ademas de las 4 operaciones aparecen las raices, se tiene una funcion irracional de forma

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$



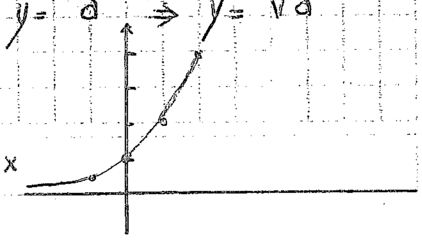
⑥ Funciones Trascendentes: funciones cuyo analisis trascienden el campo del algebra

a) Funcion exponencial es de la forma $y = a^x$ donde $a > 0 \wedge a \neq 1$ esta funcion esta definida para cualquier valor real de X

si X es un numero fraccionario la expresion sera $y = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y = \sqrt[n]{a^m}$

si $X < 0$; $X = -p$ tendremos $y = a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

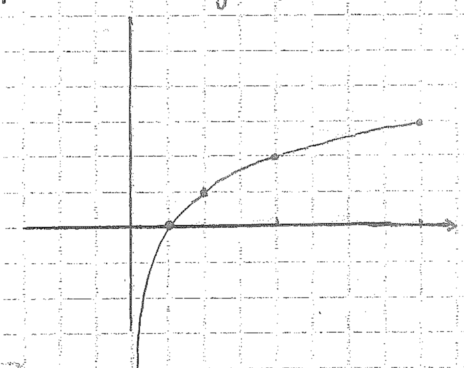
Ejemplo $y = 2^x$



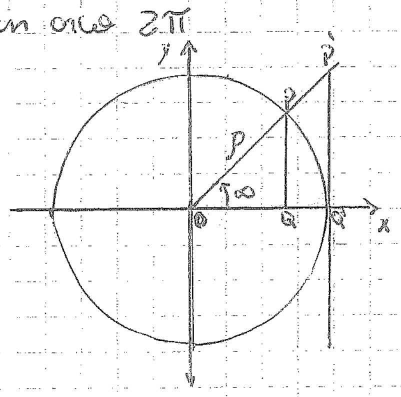
b) Funcion Logaritmica el logaritmo en base a de un numero X es el exponente y al que hay que elevar a para que resulte igual a X simbolicamente

$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$

Ejemplo $\log_2 x$



c) Funciones Trigonometricas Establecen relaciones entre el arco o angulo de α que barre el radio de una circunferencia y dicho radio ρ. Para una circunferencia de radio ρ = 1, decimos que 1 giro completo del radio describe un angulo α = 360° o un arco 2π



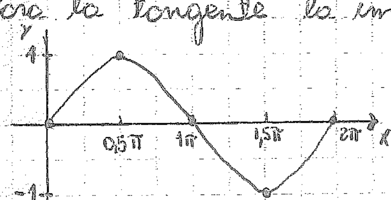
$\text{sen}\ \alpha = \frac{PQ}{OP}$ $\quad$ $\text{cosec}\ \alpha = \frac{OP}{PQ}$

$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP}$ $\quad$ $\sec \alpha = \frac{OP}{OQ}$

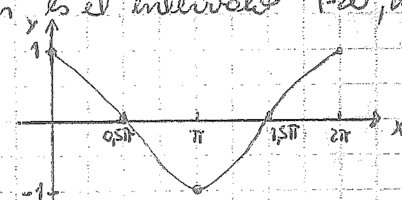
$\text{tang}\ \alpha = \frac{PQ}{OQ}$ $\quad$ $\text{cotang}\ \alpha = \frac{OQ}{PQ}$

En el caso del seno y el coseno la imagen es el intervalo [-1, 1]

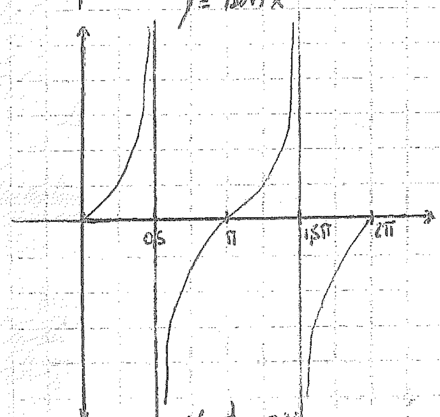
Para la tangente la imagen es el intervalo (-∞; ∞)



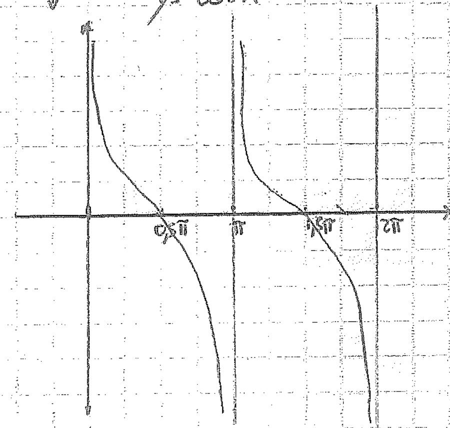
y = sen x



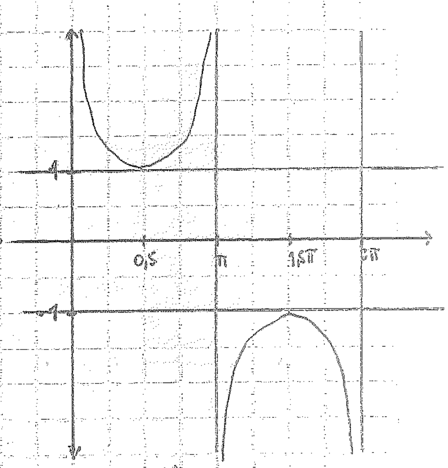
y = cos x



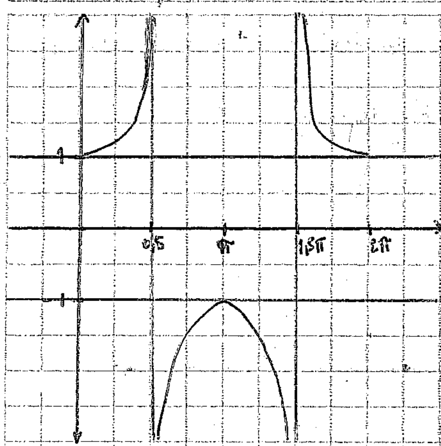
y = tang x



y = cotang x



y = cosec x

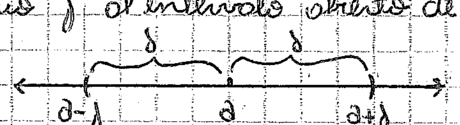


$y = \sec x$

- Funciones
  - Trascendentes
    - Exponencial
    - Logarítmica
    - trigonométrica
  - Estrictamente monótona
    - Creciente
    - Decreciente
  - Monótona
    - No creciente
    - No decreciente
  - Paridad
    - Par
    - Impar
  - Escalonada
  - Implícita
  - Algebraicas
    - Lineal
    - Cuadrática
    - racional entera
    - Homográfica
    - Racional fraccionaria
    - Irracional

Entorno de un punto

Es un intervalo donde se encierra un punto en su interior si a es un punto cualquiera de la recta $\mathbb{R}$ y δ un número positivo, se llama entorno de centro a y radio δ al intervalo abierto de: $(a-\delta\,;\,a+\delta)$



- Semientorno de la Izq formado por todos los x que van desde $a-\delta$ hasta a
- Semientorno derecho desde a hasta $a+\delta$

$a-\delta \wedge a+\delta \in E(a;\delta) = (a-\delta;\, a+\delta) = |x-a| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow -\delta < x-a < \delta$

$a-\delta < x < a+\delta$

$E(a;\delta) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a-\delta < x < a+\delta\}$

Ejemplo $E(2,\ 1{,}5) = (0{,}5;\ 3{,}5)$

Entorno Reducido

Es un intervalo que contiene a todos los puntos excluyendo el centro. Si a es un punto cualquiera de la recta $\mathbb{R}$ y δ un numero positivo; se llama entorno reducido de centro a y radio δ al conjunto de puntos del intervalo $(a-\delta)$ y $(a+\delta)$ del cual se excluye el centro. No se puede calcular su amplitud

Amplitud del entorno $= 2\delta$ del semientorno $= \delta$

$E'(a;\delta) = 0 < |x-a| < \delta$ $\qquad E'(a;\delta) = \{x \in R / a-\delta < x < a+\delta \wedge x \neq a\}$

$* \ |x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta$
$a-\delta < x < a+\delta$

$* \ |x-a| > 0$

$$\left.\begin{matrix}(x-a) > 0 \Rightarrow x > a \\ (x-a) < 0 \Rightarrow x < a\end{matrix}\right\} x \neq a$$

Limite

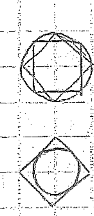
Concepto

Consideremos la circunferencia de radio r y longitud $C = 2\pi r$ designemos con P' y P'' los perimetros de los poligonos de n lados, inscriptos y circunscriptos a la circunferencia. Es evidente que con r igual a una constante, estos perimetros son funciones de n

Cuando hacemos crecer n indefinidamente; $n \to \infty$ tanto P' como P'' podemos hacer el valor absoluto de la diferencia entre P y C tan pequeño como queramos con solo tomar un n suficientemente grande.

Decimos que C es el limite hacia cual tiende $P(n)$ cuando $n \to \infty$

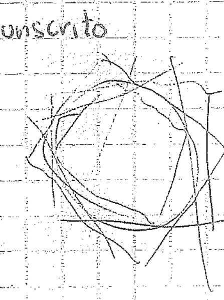
$\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = C \qquad o \qquad P(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$



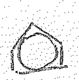
Inscrito

Circunscrito

P_n



 poligono Inscritos = Un poligono esta inscrito e una circunferencia si todos sus vertices estan contenidos en ella

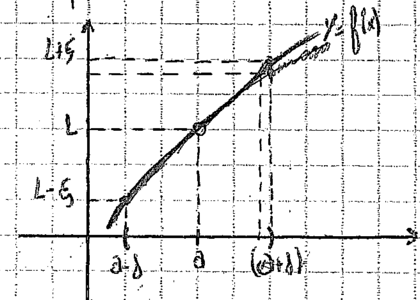
 Poligono circunscrito = si todos sus lados (del poligono) son tangente a la circunferencia

* decimos que el $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si los valores que toma $f(x)$ se aproximan a L tanto como uno quiera cuando se asigna a x valores próximos a a

Definición (Explicación de gráfica)

Consideremos la función $y = f(x)$ y un punto de abcisa a siendo L el límite. Ahora consideremos un número ε arbitrariamente pequeño y positivo, tenemos a partir de L dos números $L-\varepsilon \wedge L+\varepsilon$

por estos números trazar paralelas al eje x hasta cortar la función; por estos puntos ya determinados trazar paralelas al eje y, quedando determinados las abcisas de los puntos que se encuentran a una distancia δ de a



De $|x-a| < \delta$

$|x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta = a-\delta < x < a+\delta$ $\quad x \in E'_{(a,\delta)}$

De $0 < |x-a| \Rightarrow$ $\begin{matrix} x-a>0 \\ x-a<0 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x>a \\ x<a \end{matrix}\right\} x \neq a$

$x-a$ no puede valer 0 entonces $x \neq a$

de $|f(x)-L| < \varepsilon$

$|f(x)-L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon$

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0,\ \delta = f(\varepsilon) \,/\, \underbrace{0<|x-a|<\delta}_{E'(a,\delta)} \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

Definición Rigurosa de límite

Decimos que el límite de una función $f(x)$ para $x \to a$ es L, si para todo ε mayor que 0; existe un δ mayor que 0, si el valor absoluto de la diferencia entre la función y el límite es menor que ε; siempre que los $x \to a$ pertenezcan a un entorno reducido de centro a y radio δ $\qquad \lim_{x\to a} f(x) = L$

$$\forall \varepsilon>0;\ \exists \delta>0 \,/\, 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

* Entorno reducido

- $|x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta$
  $a-\delta < x < a+\delta \qquad x \in (a-\delta\,;\, a+\delta) \qquad \therefore x \in E'(a,\delta)$

- $|x-a| > 0 \qquad \left.\begin{matrix} x>a \\ x<a \end{matrix}\right\} \therefore x \neq a$

- $|f(x)-L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon$
  $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \qquad \therefore f(x) \in (\varepsilon-L\,;\, \varepsilon+L)$

NOTA:

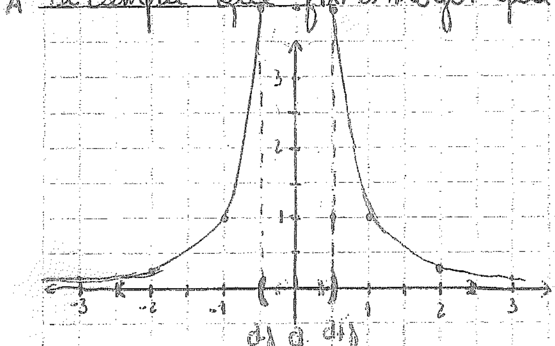
Limite Finito e Infinito

Se dice que la funcion f(x) tiende limite infinito cuando $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Si para cualquier numero positivo A (tan grande como se quiera) podemos encontrar un numero δ tal que, para todos los x dentro del entorno reducido de a de radio δ

se cumple que f(x) es mayor que A



$$y = \frac{1}{x^2}$$

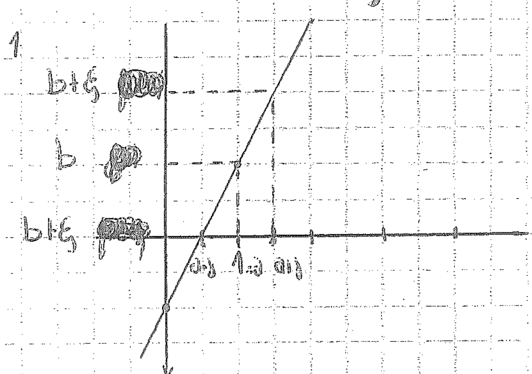
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

X	Y
1	1
2	1/4
3	1/9
-1	1
-2	1/4
-3	1/9

Limite finito

para cualquier numero positivo ξ, por pequeño que sea, podemos encontrar un δ tal que para todos los x dentro del entorno reducido de radio δ y centro a se cumple que f(x) esta dentro del entorno b de radio ξ

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \lim_{x \to 1} 2x - 1 = 1$$



INFINITESIMO

decimos que una funcion es infinitesimo en el punto X_0 cuando al tender X a X_0; la funcion tiende a 0

si $\lim_{x \to X_0} f(x) = 0$ es infinitesimo en X_0

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \lim_{x \to \pi/2} \cos x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \operatorname{tang} x = 0$$

OPERACIONES CON INFINITESIMOS

Consideremos que los infinitesimos son funcion de la misma variable independiente X y en un mismo punto a

$f(x) \wedge g(x) \to$ son infinitesimo en $X = a$

→ da por resultado otro infinitesimo

① La suma de dos infinitesimos → $f(x) \wedge g(x)$ es infinitesimo

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

"El limite de una suma, es igual, a la suma de los limites"

② El producto de dos infinitesimos, es otro infinitesimo pero en este caso el resultado es un infinitesimo que tiende a 0 con mayor velocidad que $f(x) \wedge g(x)$ por lo tanto se llama infinitesimo de orden superior.

"Sean $f(x) \wedge g(x)$ infinitesimos en $X = a \to f(x) \cdot g(x)$ es otro infinitesimo de orden superior"

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x) = 0$$

$\therefore f(x) \cdot g(x)$ es un infinitesimo de orden superior

$f(x) = 2X \quad \wedge \quad g(x) = 3X \qquad f(x) \cdot g(x) = 6X^2$

③ El producto de una constante C por un infinitesimo es otro infinitesimo

Sea $K \to$ constante $\wedge$ $f(x)$ es infinitesimo en $X = a$ $\therefore K \cdot f(x)$ es infinitesimo en $X = a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} [K \cdot f(x)] = K \cdot \lim_{x \to a} f(x) = K \cdot 0 = 0$$

④ El cociente de infinitesimo

Sea $f(x)$ ^ $g(x)$ infinitesimo en $x=a$

$f(x):g(x)$ →
- otro infinitesimo que tiende a 0 ($f(x)$ es superior a $g(x)$)
- dar igual a 1 (son equivalentes)
- da igual a una constante (son del mismo orden)
- da ∞ ($f(x)$ es de orden inferior)

⊛ Si $f(x)$ ^ $g(x)$ son dos infinitesimo en $x=a$ y $f(x):g(x) \to 0$ se dice que $f(x)$ es un infinitesimo de orden superior respecto $g(x)$

$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 0 \Rightarrow$ se dice que "$f(x)$" tiende mas rapido a cero que $g(x)$

Ej: $f(x) = 2x^2$ ^ $g(x) = 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

⊛ Si $f(x):g(x)$ tiende a un valor constante K; se dice que los infinitesimos son del mismo orden

$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = k$$

Ejemplo $f(x) = 2x^2$ ^ $g(x) = x^2$ $\qquad \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2$

⊛ $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 1$

se dice que los infinitesimos son equivalentes

$\underset{x\to 0}{f(x) = 2x}$ ^ $\underset{x\to 0}{g(x) = 2x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1$

⊛ Si el cociente entre $f(x):g(x)$ puede hacerse tan grande como se quisiera, se dice que $f(x)$ es un infinitesimo de orden inferior respecto $g(x)$

$f(x) = 2x$ ^ $g(x) = x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} = \infty$

Ordenes infinitesimales →
- Superior 0
- del mismo orden (si es igual a una constante) o equivalente (si es igual a 1)
- Inferior ∞

Una funcion difiere de su limite en un infinitesimo

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow f(x) = L + \varepsilon$$

*Nociones sobre el teorema p/el calculo de limites

① El limite de una suma de varias funciones es igual a la suma de los limites

si $f(x)\to \mathbb{L}$; $g(x)\to \mathbb{L}'$ $\wedge$ $h(x)\to \mathbb{L}''$ cuando $x\to a$

se tiene: $[f(x) - g(x) + h(x)] \to \mathbb{L} - \mathbb{L}' + \mathbb{L}''$ cuando $x\to a$

Resulta

$$f(x)-g(x)+h(x) = (\mathbb{L}-\mathbb{L}'+\mathbb{L}'') + (\varepsilon-\varepsilon'+\varepsilon'')$$

② El limite del producto de varias funciones es igual al producto de los limites

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x) = \mathbb{L} . \mathbb{L}'$$

$$f(x).g(x) = (L_1+\varepsilon_1)(L_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x).g(x) = L_1L_2 + L_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1L_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$$

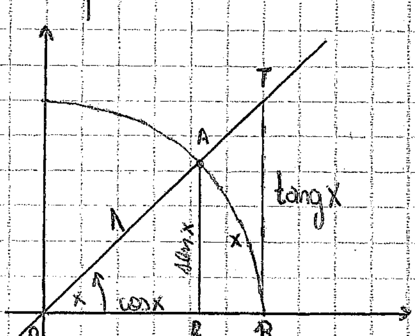
$$f(x).g(x) = C + I + I + I$$

$$f(x).g(x) = C + I \quad \lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = L_1 . L_2$$

③ El limite del cociente de 2 funciones $f(x):g(x)$; cuando $f(x)\to \mathbb{L}_1$ y $g(x)\to\mathbb{L}_2$ es igual a el cociente $L_1:L_2$ de sus limites siempre que el denominador sea distinto de 0

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{con } L_2 \neq 0$$

Limite Importante



$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Si en una circunferencia de radio 1 se considera un angulo central de x radianes la medida de arco AB que queda determinado sobre la circunferencia es x.

* En B se traza la tangente TB, y entre las superficies de los triangulos AOR $\wedge$ TOB y el sector AOB valen las relaciones

$$\Delta AOR < \text{sector } AOB < \Delta TOB$$

las áreas correspondiente se pueden expresar en función de X

$\boxed{sup\ \Delta = \frac{b \times h}{2}}$ $\boxed{tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}}$

$$\Delta AOR < \text{sector } AOB < \Delta TOB$$

$$\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot tg\, x}{2}$$

$$\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Ahora dividimos la desigualdad por $\frac{1}{2}$ sen x

$$\frac{\frac{\cos x\, \cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\operatorname{sen} x}} < \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} x} < \frac{\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{2\cos x}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\operatorname{sen} x}}$$

$$\underset{1}{\cos x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \underset{1}{\frac{1}{\cos x}}$$

si hacemos tender $x \to 0$ $\cos x \to 1$ debe ser entonces

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$ y tambien $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

EL NUMERO e

La sucesion $a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ permite definir al N° e

Demostracion.

1) Que la sucesion an es monotona creciente
2) Que esta sucesion es acotada

$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e \to$ N° irracional $\cong 2{,}71\ldots$

Aplicamos la formula de binomio de newton;

$$\binom{m}{0} \cdot 1^m \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^0 + \binom{m}{1} 1^{m-1} \left(\frac{1}{m}\right)^1 + \binom{m}{2} 1^{m-2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \ldots + \binom{m}{m} 1^0 \left(\frac{1}{m}\right)^m =$$

$$\underbrace{1 + \cancel{m} \cdot \frac{1}{\cancel{m}}}_{2} + \underbrace{\frac{m(m-1)}{2!} \frac{1}{m^2} + \ldots + \frac{m(m-1) \ldots [m-(m-1)]}{m!} \cdot \frac{1}{m^m}}_{\text{No Supera a 1}}$$

Vemos que por cada especificacion de $n \to \infty$ los terminos en el limite sumandolos dan aproximadamente 0,71...

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71\ldots \cong e$$

* Esta acotado $2 < \ldots < 3$
* Creciente → pero nunca supera a 3

* Continuidad de una función

Sea $f(x)$; $a \in$ dominio de la funcion

Decimos que $f(x)$ es continua en $x = a \iff$

① Que exista el limite para $x \to a$; es decir;

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L$$

② Que la funcion este definida en ese punto es decir:

$$f(a) = L'$$

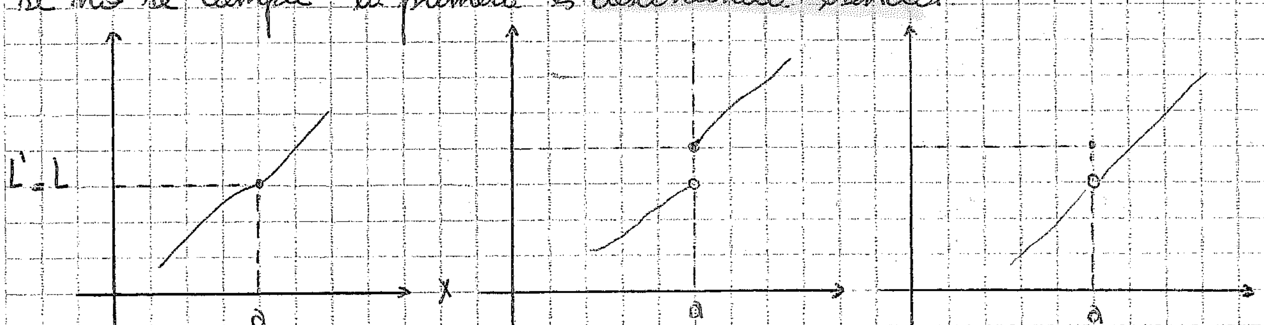
③ El valor que toma la funcion en el punto tiene que ser igual al limite de la funcion en el punto

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

si se cumplen estos 3; $f(x)$ es continua.

si se cumple la primera pero no la 2 y 3 se dice que es discontinua evitable

si no se cumple la primera es discontinua esencial



Continua

Discontinua esencial

Discontinua evitable

¿Como se salva la Discontinuidad evitable? Redefiniendo la funcion.

Limites Laterales

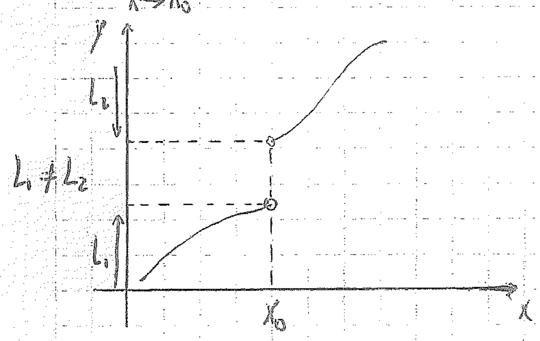
Hay dos tipos de limites lateral; por izquierda y derecha

① Si los limites laterales son $\neq$ decimos que la funcion no tiene limite en dicho punto.

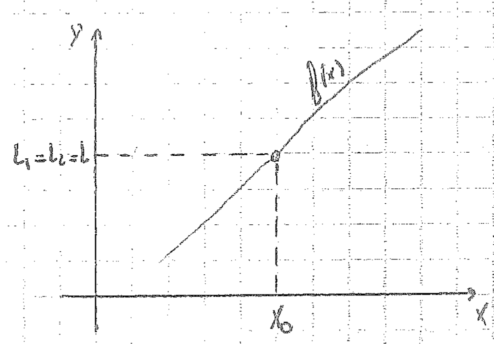
$$\left.\begin{array}{ll} \text{Izq} & \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L_1 \\ \text{Der} & \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L_2 \end{array}\right\} \; L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

② Si los limites laterales coinciden, decimos que la funcion tiene limite en dicho punto y el limite es L

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L_1 \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L_2 \end{array}\right\} \; L_1 = L_2 = L \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$



$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$



$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

* Operaciones con funciones continua

① La suma y el producto de un numero finito de funciones continuas son continuas

$f(x) \wedge g(x)$ son continuas en $x = a$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$

Cuando $x \to a$

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$$

② Un polinomio es una funcion continua.

Siendo X una funcion continua; tambien lo son X^2; X^3; X^4... X^n y tambien la combinacion lineal de los mismos $a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$

③ El cociente de dos funciones continuas en el punto $X = a$ es una funcion continua; siempre y cuando el denominador no se anule en $X = a$

Funciones cuyo denominador tiende a 0

La condicion necesaria para que una fraccion cuyo denominador tiende a 0, tenga limite, es que el numerador tiende a 0.

Es decir que si la fraccion tiene limite cuando el denominador tiende a 0; forzosamente el numerador tambien va tender a 0

Hipotesis

Sea $f(x) \wedge g(x)$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$

tesis

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Demostracion

$f(x) : g(x) = h(x)$

$f(x) = h(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

$\lim_{x \to a} f(x) = L \cdot 0$

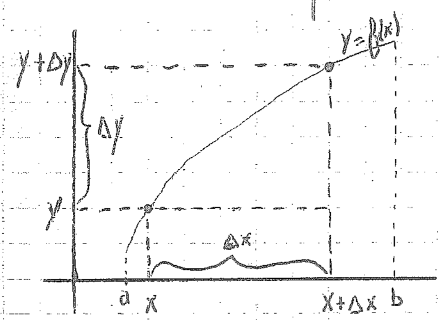
$\lim_{x \to a} f(x) = 0$

NOTA:

Tema 2

Derivada

Derivada de una función



consideremos $y = f(x)$ definida en $[a;b] \wedge x \in [a;b]$

① Damos a x un incremento Δx como consecuencia "y" tambien se incrementa en un Δy

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

② Calculamos el incremento Δy

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$ "La funcion incrementada menos la funcion sin incremento"

③ Hallamos ahora el cociente incremental dividiendo ambos miembros por Δx

$$\underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}_{\text{cociente incremental}} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

④ Aplicamos $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ al cociente incremental

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

"Si este limite existe, este es por definicion la derivada de la funcion en el punto considerado" La derivada de una funcion es el limite hacia el cual tiende el cociente incremental cuando $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

* Regla derivacion

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

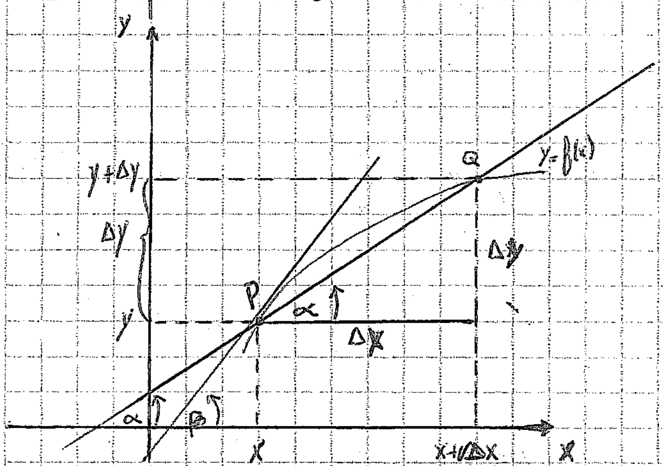
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

PAGINA:
FECHA: / /

Interpretación Geometrica



Cuando incrementamos X en un Δx, esto provoca el desplazamiento a la derecha formandose X+Δx. Tambien vemos que al incrementar X en un Δx la funcion se ve incrementada en un Δy; y el punto P se traslada al punto Q

① $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$

② $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

Ahora hago pasar por P ∧ Q una recta; pero como P y Q pertenecen a la recta recibe el nombre de Recta Secante. Formandose aqui el triangulo rectangulo.

Vemos como esta recta secante corta al eje x formandose un angulo α; pero como es segmento Δx es paralelo al eje x y esta recta secante pasa por ambos paralelos se forma α tambien en el triangulo rectangulo que queda establecido

③ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Vemos aqui Δy es el cateto opuesto del triangulo rectangulo y Δx es el cateto adyacente y sabemos que CO/CA es por definicion la tang $\hat{\alpha}$ entonces se la tangente del angulo α

$$\text{tang } \hat{\alpha} = \frac{CO}{CA} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sabemos tambien que eso es igual a la pendiente de la recta, el cociente incremental me da la pendiente de la recta secante que pasa por P ∧ Q

④ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

NOTA:

Cuando hacemos tender $\Delta X \to 0$ ocurre las siguientes situaciones:

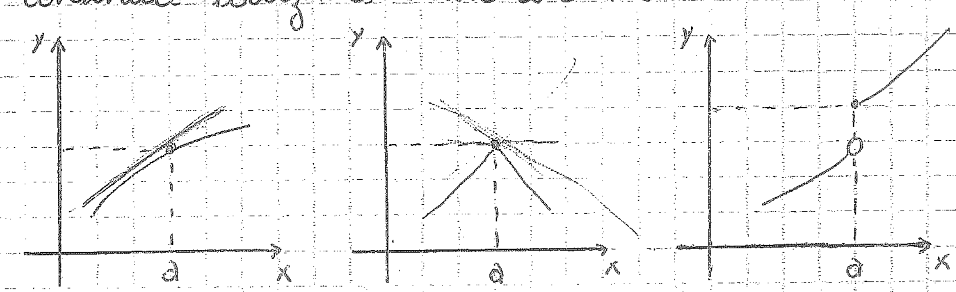
* Q se traslada a través de la curva hacia P
* La recta secante va tomando distintas posiciones
* Por ende el ángulo α va tomando distintas amplitudes, y en el límite ocurre:
    * $Q = P$
    * La recta secante se transforma en recta tangente (pues corta la curva solo en P)
    * el ángulo $\alpha \to \beta$

Decimos que: "desde el punto de vista de la interpretación geométrica, la derivada de una función en un punto es la tangente trigonométrica del ángulo, que la tangente geométrica a la curva forma con el semi eje positivo de los X."

Continuidad de la función derivable

Toda función derivable es continua, pero no toda función continua es derivable.

Si una función es derivable significa que la gráfica admite recta tangente UNICA a la curva en cada punto. El hecho de ser derivable es condición suficiente para que sea continua, en cambio si una función es continua tal vez sea derivable o no.



derivable continua

No derivable Continua

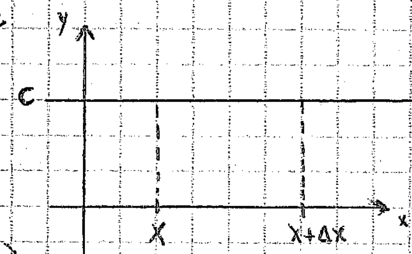
No derivable discontinua

Admite + de una tang trigonometrica

Derivada de las funciones Algebraicas

① Derivada de una constante

$y = f(x) = C$



● $y = f(x)$

① $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

② $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = C - C$

$\Delta y = 0$

③ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x}$

④ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0$

$y' = 0$

"La derivada de una constante es 0"

② Derivada de la variable independiente

● $y = X$

① $y + \Delta y = X + \Delta X$

② $\Delta y = \cancel{X} + \Delta X - \cancel{X}$

$\Delta y = \Delta X$

③ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta X}{\Delta X}$

④ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1$

$y' = 1$

"La derivada de la variable independiente es 1"

③ Derivada de una potencia de la variable Independiente

Binomio de Newton $\qquad \binom{m}{m} = C^{m}_{m} = \dfrac{m!}{m!\,(m-m)!}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

$$y = a(x)^m$$

① $y + \Delta y = a(x+\Delta x)^m$

$$y + \Delta y = a\left[x^m + m x^{m-1}\Delta x + \frac{m!}{2!\,(m-2)!} x^{m-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^m\right]$$

$$y + \Delta y = a x^m + a m x^{m-1}\Delta x + a\frac{m!}{2!\,(m-2)!} x^{m-2}\Delta x^2 + \dots + a\Delta x^m$$

② $\Delta y = \cancel{a x^m} + a m x^{m-1}\Delta x + a\dfrac{m!}{2!\,(m-2)!} x^{m-2}\Delta x^2 + \dots + a\Delta x^m - \cancel{a x^m}$

③ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a m x^{m-1}\dfrac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} + a\dfrac{m!}{2!\,(m-2)!} x^{m-2}\dfrac{\Delta x^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}} + \dots + a\dfrac{\Delta x^{m-1}}{\cancel{\Delta x}}$

④ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} a m x^{m-1} + \underbrace{a\dfrac{m!}{2!\,(m-2)!} x^{m-2}\underbrace{\Delta x}_{0}}_{0} + \dots + \underbrace{a\underbrace{\Delta x^{m-1}}_{0}}_{0}$

$$y' = a m x^{m-1}$$

④ Derivada de la suma de funciones

$u = u(x) \qquad v = v(x) \qquad w = w(x)$

$$x \to \Delta x \begin{cases} u \to \Delta u \\ v \to \Delta v \\ w \to \Delta w \end{cases} \Rightarrow \Delta y$$

$$y = u + v - w$$

① $y + \Delta y = (u+\Delta u) + (v+\Delta v) - (w+\Delta w)$

② $\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w - (u + v - w)$

$\Delta y = \cancel{u} + \Delta u + \cancel{v} + \Delta v - \cancel{w} - \Delta w - \cancel{u} - \cancel{v} + \cancel{w}$

$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$

③ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} - \dfrac{\Delta w}{\Delta x}$

④ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} - \dfrac{\Delta w}{\Delta x}$

$$y' = u' + v' - w'$$

La derivada de una suma algebraica de funciones de la misma variable x, es la suma algebraica de las derivadas de c/u de las funciones.

⑤ Derivada de un producto de funciones

$y = u \cdot v \qquad u = u(x) \qquad v = v(x) \qquad x \to \Delta x$ ($u \to \Delta u$, $v \to \Delta v$) $\to y \to \Delta y$

Si $\Delta x \to 0$ entonces $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$

① $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$

$y + \Delta y = uv + u\Delta v + \Delta u v + \Delta u \Delta v$

② $\Delta y = \cancel{uv} + u\Delta v + \Delta u v + \Delta u \Delta v - \cancel{uv}$

③ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} v + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v$

④ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} v + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v$

$y' = uv' + u'v$

La derivada de un producto de dos funciones, es igual al 1er factor por la derivada del segundo factor, mas, el 2do factor por la derivada del 1er factor.

⑥ Derivada de un cociente

$y = \dfrac{u}{v} \qquad u = u(x) \qquad v = v(x) \qquad \Delta x \to 0$ entonces $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$

① $y + \Delta y = \dfrac{(u + \Delta u)}{(v + \Delta v)}$

② $\Delta y = \dfrac{(u + \Delta u)}{(v + \Delta v)} - \dfrac{u}{v}$

$\Delta y = \dfrac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$

$\Delta y = \dfrac{\cancel{vu} + v\Delta u - \cancel{uv} - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$

$\Delta y = \dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$

③ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}}{\dfrac{\Delta x}{1}}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x(v^2 + v\Delta v)}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\Delta u}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{(v^2 + v\Delta v)} - \dfrac{u\Delta v}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{(v^2 + v\Delta v)}$

④ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{v\Delta u}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{(v^2 + v\Delta v)} - \dfrac{u\Delta v}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{(v^2 + v\Delta v)}$

$y' = vu' \cdot \dfrac{1}{v^2} - uv' \dfrac{1}{v^2}$

$y' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

NOTA:

Derivad de la funcion Inversa

Si una función $y = f(x)$ tiene una inversa $x = g(y)$ y existen ademas las derivadas $y' = f'(x)$ $\wedge$ $x' = g'(y)$ $\wedge$ siendo $f'(x) \neq 0$ se verifica que:

Si $y = f(x) \wedge x = g(y) \wedge \exists\ y' = f'(x) \wedge x' = g'(y)$

$$y' = \frac{1}{x'}$$

Demostracion

$$y = f(x) \qquad\qquad x = g(y)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad\qquad x + \Delta x = g(y + \Delta y)$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \qquad\qquad \Delta x = g(y+\Delta y) - g(y)$$

Notamos que por ser $f(x)$ derivable $\Rightarrow$ es continua

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$$

con $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x / \Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x/\Delta y}$$

$$y' = \frac{1}{x'}$$

Derivada de la funcion Trascendente

① Funcion Logaritmica

Propiedades

* $\log(a/b) = \log a - \log b$
* $\log a^n = n \log a$

$$y = \log_a u \qquad\qquad u = u(x)$$

$$y + \Delta y = \log_a (u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \log_a (u + \Delta u) - \log_a u$$

$$\Delta y = \log_a \left(\frac{u + \Delta u}{u}\right)$$

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{u}{\Delta u}}\right) \frac{\Delta u}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u}$$

$$\Delta y = \frac{1}{u} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{u}{\Delta u}}\right)^{u/\Delta u} \Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{u} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{u}{\Delta u}}\right)^{u/\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{u} \log_a \left(1 + 1/\tfrac{u}{\Delta u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{1}{u} \log_a e \; u'$$

Caso particular

$y = \ln u$

$y = \log_e u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} \overbrace{\log_e e}^{1} u'$

$y' = \frac{u'}{u}$

② **Función Exponencial**

$y = a^u \qquad u = u(x)$

$\ln y = \ln a^u$

$\ln y = u \cdot \ln a$

$(\ln y)' = (u \cdot \ln a)' \qquad$ constante

$\frac{y'}{y} = \ln a \; u'$

$y' = \ln a \; u' \; a^u$

Caso particular

* $y = e^u \qquad u = u(x)$

$y' = \underbrace{\ln e}_{1} u' e^u \Rightarrow y' = u' e^u$

* $y = e^x$

$y' = \underbrace{\ln e}_{1} \underbrace{x'}_{1} e^x \Rightarrow y' = e^x$

* $y = a^x$

$y' = \ln a \underbrace{x'}_{1} a^x \Rightarrow y' = \ln a \; a^x$

* $y = u^v \qquad u = u(x) \qquad v = v(x)$

$\ln y = \ln u^v$

$\ln y = v \ln u$

$(\ln y)' = (v \ln u)'$

$\frac{y'}{y} = v \cdot \frac{u'}{u} + v' \ln u$

$y' = \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right) u^v$

NOTA:

③ Funciones trigonometricas

$* \ \operatorname{Sen} a - \operatorname{Sen} b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \operatorname{Sen} \frac{a-b}{2}$

*SENO

$y = \operatorname{sen} u \qquad u = u(x)$

① $y + \Delta y = \operatorname{sen}(u + \Delta u)$

② $\Delta y = \operatorname{sen}(u+\Delta u) - \operatorname{sen} u$ — Aplica prop

$\Delta y = 2 \cos \frac{(u+\Delta u)+u}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{(u+\Delta u)-u}{2}$

$\Delta y = 2\cos\left(\frac{2u}{2} + \frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta u}{2}$

$\Delta y = \cancel{2} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta u}{2} \cdot \frac{\Delta u}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\Delta u}$ — divido y Multiplico 2 a Δu

$\Delta y = \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta u/2}{\Delta u/2} \cdot \Delta u$ — se va el 2 y es sen queda en 1

③ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \Delta u/2}{\Delta u/2} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(u + \overbrace{\frac{\Delta u}{2}}^{0}\right) \cdot \overbrace{\frac{\operatorname{sen} \Delta u/2}{\Delta u/2}}^{1} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ — Aplico lim

$y' = \cos u \ u'$

*COSENO

$* \ \operatorname{Cos} A - \operatorname{Cos} B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$

$y = \cos u \qquad u = u(x)$

$y + \Delta y = \cos(u + \Delta u)$

$\Delta y = \cos(u+\Delta u) - \cos u$

$\Delta y = -2 \operatorname{sen} \frac{(u+\Delta u)+u}{2} \operatorname{sen} \frac{(u+\Delta u)-u}{2}$ — Aplico pro

$\Delta y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{2u}{\cancel{2}} + \frac{\Delta u}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\Delta u}{2}$

$\Delta y = -\cancel{2} \operatorname{sen}\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \frac{\operatorname{sen} \Delta u/2}{\Delta u/2} \frac{\Delta u}{\cancel{2}}$ — divido y Multiplico 2 y Δu

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\operatorname{sen}\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \frac{\operatorname{sen} \Delta u/2}{\Delta u/2} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ — se va el dos sen 1

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\operatorname{sen}\left(u + \overbrace{\frac{\Delta u}{2}}^{0}\right) \overbrace{\frac{\operatorname{sen} \Delta u/2}{\Delta u/2}}^{1} \frac{\Delta u}{\Delta x}$

$y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$

NOTA:

*Tangente

$y = \tan u \qquad u = u(x)$

$y = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$

$y' = \frac{(\operatorname{sen} u)'(\cos u) - (\operatorname{sen} u)(\cos u)'}{\cos^2 u}$

$y' = \frac{(\cos u \cdot u')(\cos u) - (\operatorname{sen} u)(-\operatorname{sen} u \, u')}{\cos^2 u}$

$y' = \frac{\cos^2 u \; u' + \operatorname{sen}^2 u \; u'}{\cos^2 u}$

① $y' = \frac{\overbrace{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}^{1}}{\cos^2 u} \, u' \qquad$ O $\qquad y' = \left(\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}\right) u'$

$y' = \frac{1}{\cos^2 u} \, u' \qquad \sec^2 u \cdot u' \qquad y' = \left(1 + \tan^2 u\right) u'$

Derivada de la función compuesta (de una función de función)

Sea

$y = f[u] \qquad u = g(x)$

* si $\Delta x \to 0$ entonces $\Delta u \to 0$ y $\Delta y \to 0$ por la continuidad de las funciones

$y = f(u)$

$y + \Delta y = f(u + \Delta u)$

$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$

$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}$

$u = g(x)$

$u + \Delta u = g(x + \Delta x)$

$\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$

$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\cancel{\Delta u}} \cdot \frac{\cancel{\Delta u}}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

La derivada de una función compuesta, es igual, al producto de las derivadas de las funciones. Regla de la cadena

NOTA: $y = f(u) \qquad u = g(t) \qquad t = h(x)$

$y' = f'(u) \cdot g'(t) \cdot h'(x) \Rightarrow y' = f'[g(t)] \cdot g[h(x)] \cdot h(x)$

Derivadas Sucesivas

Sea $y=f(x)$ una funcion deferenciable de x y llamemos a su derivada la primera derivada de la función. Si la 1^{ra} derivada es deferenciable su derivada se llama 2^{da} derivada de la funcion original y se denota

$$y'' \text{ ó } f''(x) \text{ ó } \frac{d^2y}{d^2x}$$

a su vez, la derivada de la 2^{da} se llama 3^{ro} derivada y se denota

$$y''' \text{ ó } f'''(x) \text{ ó } \frac{d^3y}{d^3y}$$

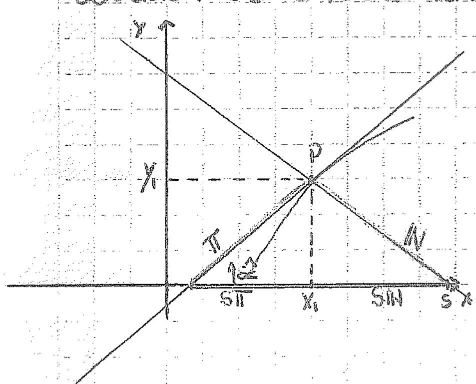
asi sucesivamente obtendremos las derivadas sucesivas aplicando la misma regla

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x) \ldots\ f^{n}(x)$$

La derivada de orden enesimo la obtendremos derivando la de orden $(n-1)$

$$f^{n}(x) = \left(f^{n-1}(x)\right)'$$

Ecuacion de la recta tangente y Normal



T = Segmento tangente (porcion de la recta tag comprendida entre P y el punto donde la recta tg corta)

N = Segmento Normal (. . . . . recta normal . . . . . recta normal corta el eje x)

ST = Segmento subtangente (Proyeccion de T sobre el eje x)

SN = Segmento subnormal (Proyeccion de N sobre el eje x)

Consideremos la funcion $y=f(x)$ en un sistema de ejes cartesianos y sobre la curva un punto P de abcisa $(X_1; Y_1)$

⊛ por P trazo la tangente geometrica a la curva que forma con el eje X un $\hat{\alpha}$

<u>Ecuacion de la recta tangente que pasa por un punto</u>

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow$ Ecuacion de la recta que pasa por el punto $P = (X_1; Y_1)$ y tiene la pendiente m

$tag\,\hat{\alpha} = f'(x) = m$

Ecuacion de la recta tangente $\Rightarrow y - y_1 = f'(x)(x - x_1)$

Reciproca

✱ ahora trazo una perpendicular a la recta tangente y la llamo Recta Normal y llamo S al punto de intersección de la recta normal N con el eje x y como la condición para que dos rectas sean perpendiculares es que su pendiente sean recíproca y de signo contrario

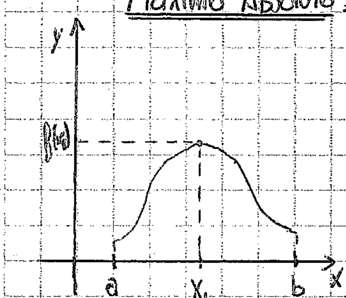
$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_1) \quad \text{Ecuación de la recta normal}$$

Maximos y Minimos relativos (Extremos de una funcion)

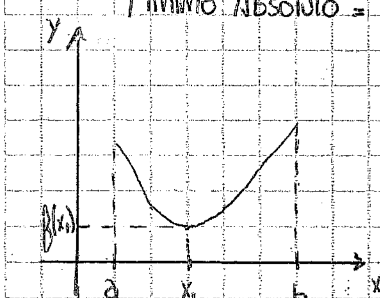
Se llaman extremos de una funcion a los puntos maximos y minimos de una funcion, que pueden ser ABSOLUTO o Relativo

✱ Extremos Absolutos

Maximo Absoluto = decimos que la funcion $y = f(x)$ tiene un punto de maximo en $x_1 \in [a;b]$ si $f(x_1) \geq f(x);\ \forall x \in [a,b]$



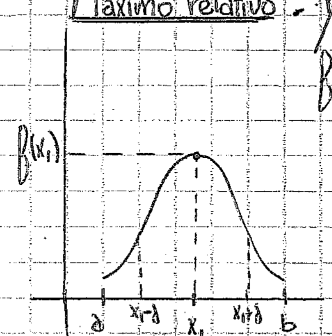
Minimo Absoluto = decimos que la funcion $y = f(x)$ tiene un punto minimo en $x_1 \in [a;b]$ si $f(x_1) \leq f(x);\ \forall x \in [a,b]$



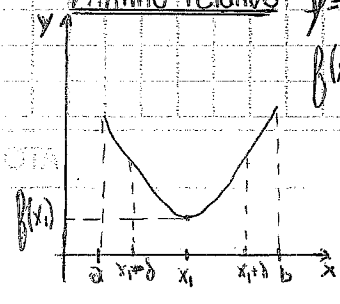
✱ Extremos Relativos

Son Relativos porque se analizan en un entorno reducido al punto

Maximo relativo = $y = f(x)$ tiene maximo relativo en $x_1 \in [a,b] \Leftrightarrow \exists\ E'(x_1;\delta) \subset [a,b] /$
$f(x_1) > f(x);\ \forall x \in E'(x_1,\delta)$



Minimo relativo $y = f(x)$ tiene minimo relativo en $x_1 \in [a,b] \Leftrightarrow \exists\ E'(x_1;\delta) \subset [a,b] /$
$f(x_1) < f(x)\ \forall x \in E'(x_1;\delta)$



NOTA

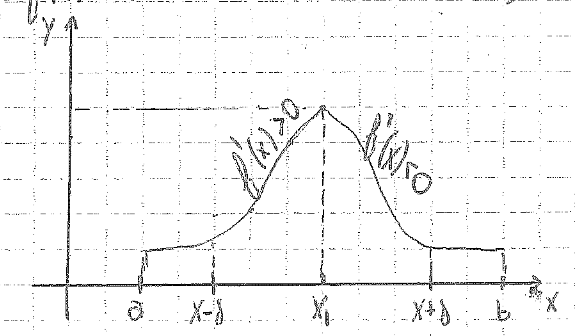
* Condición necesaria pero no suficiente para la existencia de extremo relativo

Consideremos una curva $y = f(x)$ y en ella un punto X_1 donde hay un máximo y un entorno reducido de centro X_1 y radio δ

$\forall x \in (X_1 - \delta ; X_1)$ $f(x)$ es creciente $\therefore f'(x) > 0$

$\forall x \in (X_1 ; X_1 + \delta)$ $f(x)$ es decreciente $\therefore f'(x) < 0$

$\Big\} \exists X_1$ Máximo Relativo

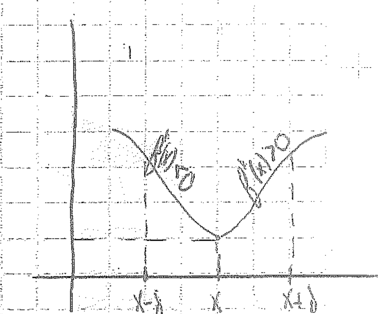


ahora consideremos una curva $y = f(x)$ y en ella un punto X_1; donde hay mínimo $E'(X_1 ; \delta)$

$\forall x \in (X_1 - \delta ; X_1)$ $f(x)$ es decreciente $\therefore f'(x) < 0$

$\forall x \in (X_1 ; X_1 + \delta)$ $f(x)$ es creciente $\therefore f'(x) > 0$

$\Big\} \exists X_1$ Mínimo relativo



$\Downarrow$

$\therefore f'(x) = 0$

Se llama punto crítico a aquellos puntos donde la primer derivada se anula. En estos puntos tal vez exista un max o min.

* por lo tanto; la condición necesaria para que exista un Max o Min es que $f'(x) = 0$

La recíproca no vale por lo tanto la condición es necesaria no suficiente

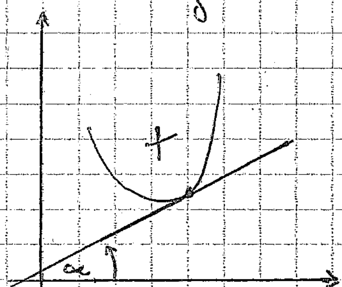
* Sea $f(x)$ continua y por lo menos dos veces derivable y la $f'(x) = 0$ $\wedge$ $f''(x) \neq 0$ entonces en $X = X_1$ hay valores extremos

① si $f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ en $X = X_1$ hay máximo relativo

② si $f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ en $X = X_1$ hay mínimo relativo

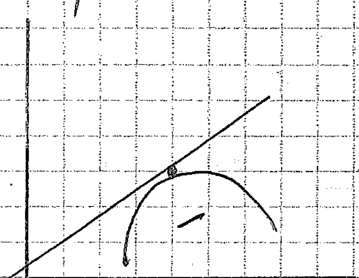
Concavidad y convexidad

Concava positiva: $y=f(x)$ tiene concavidad positiva en un punto X_1 de su dominio si existe por lo menos un entorno X_1 tal que la curva se encuentra por encima de la recta tang.



si $f''(x_1)>0 \Rightarrow f(x)$ es concava positiva en el punto X_1

Concavidad Negativa o convexidad: $y=f(x)$ es concava negativa en un punto X_1 de su dominio, si la curva se ubica por debajo de la recta tangente



si $f''(x_1)<0$ es concava negativa en el punto X_1

Puntos de Inflexion

Son los puntos en los cuales la curva cambia la concavidad, en un punto de inflexion la curva no es concava ni convexa.

* **Condicion Necesaria** – Si $f(x)$ tiene en $X=X_1$ punto de inflexion $\Rightarrow f''(x_1)=0$ (la reciproca no vale)

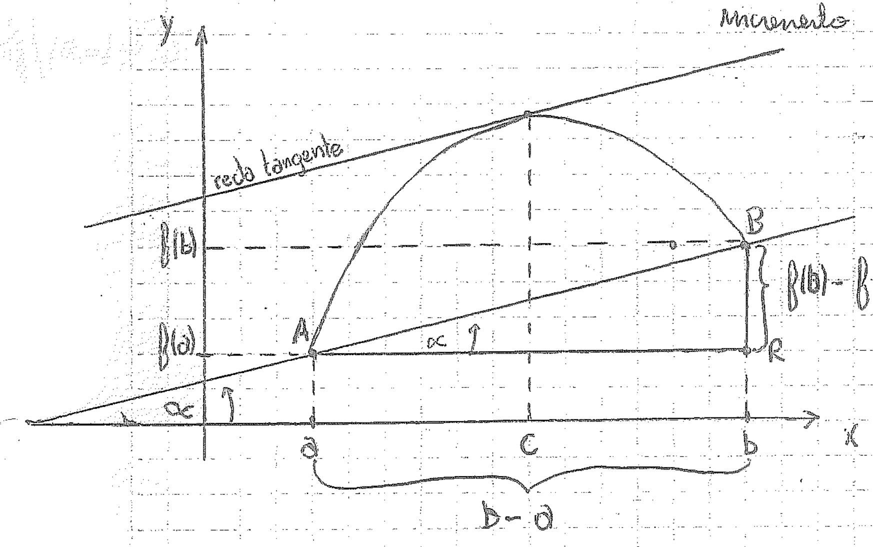
* **Condicion suficiente** – Si $f''(x)=0 \wedge f'''(x_1)\neq 0 \Rightarrow$ en X_1 $\exists$ punto de inflexion

Tema 3

Teorema de Lagrange

Sea $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en un intervalo abierto (a,b), entonces existe al menos un punto interior c en donde se cumple:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \vee \quad \underbrace{f(b)-f(a)}_{\text{incremento}} = f'(c)\underbrace{(b-a)}_{\text{incremento } X}$$



Demostracion

Por los puntos $a \wedge b$ trazo una secante a la curva que forma con el eje X un $\hat{\alpha}$

Ahora vamos a considerar el triangulo rectangulo $\overset{\triangle}{ARB}$ y en el:

$$\tan \hat{\alpha} = \frac{f(b)-f(a)}{(b)-(a)}$$

y la pendiente de la tangente es igual a $f'(c)$, ya que la recta secante y la recta tangente son paralelas, sus pendientes son iguales

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \text{y de aqui el teorema}$$

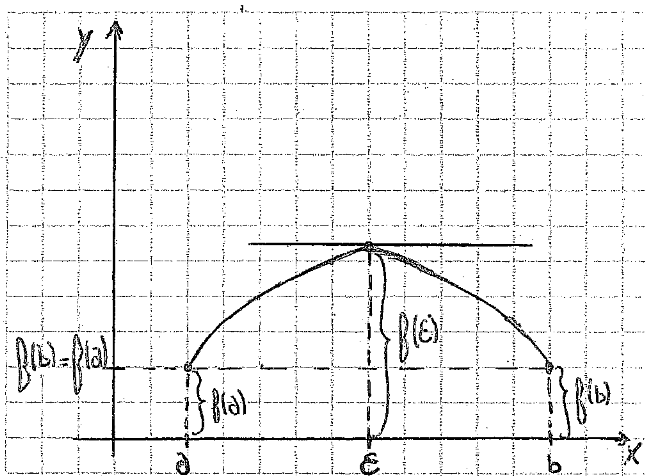
$$f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Teorema de rolle

Dada una función $y = f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

"Si la funcion toma valores iguales en los extremos del intervalo, existe por lo menos un punto interior $\mathcal{E}$ en el intervalo (a,b) donde la derivada es nula"

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f(x) \text{ es continua en } [a,b] \wedge \text{ derivable } (a,b) \\ \wedge\ \exists\, \mathcal{E} \setminus a < \mathcal{E} < b = \exists\, \mathcal{E} \setminus \mathcal{E} \in (a,b) \\ \wedge\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\mathcal{E}) = 0$$



$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in [a,b] / f'(\varepsilon)=0$$

partimos del teorema de lagrange $f(b)-f(a)=f'(\varepsilon)\cdot(b-a)$

Si $f(a)=f(b) \Rightarrow f(b)-f(a)=0$

$$0=f'(\varepsilon)\cdot(b-a)$$
$$0=f'(\varepsilon)$$

Si el producto de dos factores es 0, uno de los factores es 0 como $b \wedge a$ son $\neq$ $(b-a)$ es distinto de cero $\wedge$ $f'(\varepsilon)=0$

CONSECUENCIAS

① Si una funcion continua y derivable en un intervalo cerrado $[a,b]$ tiene derivada nula en todos los puntos del intervalo entonces la funcion es constante

$f(x)$ continua y derivable en el intervalo $[a,b]$
$f'(x)=0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x)$ es constante

$f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c)$ al extremo superior lo llamamos x
$f(x)-f(a)=(x-a)\cdot f'(c)$

por hipotesis sabemos que la 1er derivada vale cero para cualquier punto del intervalo

$$f(x)-f(a)=0$$
$$f(x)=f(a)$$

② Si dos funciones $f(x) \wedge g(x)$ continuas y derivables en el intervalo $[a,b]$ tienen igual derivada en todos los puntos del intervalo, dichas funciones difieren en una constante

$f(x) \wedge g(x)$ son continuas y derivables en $[a,b]$
$f'(x)=g'(x) \quad \forall x \in [a,b]$
$f(x)-g(x)=\text{constante} \Rightarrow [\overbrace{f(x)-g(x)}^{\text{constante}}]'=0$

Teorema de CAUCHY

Dada dos funciones $f(x) \wedge g(x)$ continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b)

"El cociente de los incrementos de la funcion es igual al cociente de sus derivadas en un punto interior del intervalo"

$f(x) \wedge g(x)$ continua en $[a,b]$ $\wedge$ derivable en (a,b)

$\exists\, \mathcal{E} \mid a < \mathcal{E} < b \quad o \quad \mathcal{E} \in (a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\mathcal{E})}{g'(\mathcal{E})}$$

$Q(x) = f(x) + K\,g(x)$

Se hace una convinacion lineal, el valor K se lo elige de tal manera que esa funcion $Q(x)$ tome valores iguales en los extremos del intervalo

$Q(a) = f(a) + K\,g(a)$

$Q(b) = f(b) + K\,g(b)$

$$\Longrightarrow \quad Q(a) = Q(b)$$

$$f(a) + K g(a) = f(b) + K g(b)$$

$$K g(a) - K g(b) = f(b) - f(a)$$

$$K[g(a) - g(b)] = f(b) - f(a)$$

$$K = \frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(b)}$$ multiplico por -1 para encolumnar

$$K = \frac{-[f(b)-f(a)]}{-[g(a)-g(b)]}$$

$$\boxed{K = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$ Reemplazo K en $Q(x)$

$$Q(x) = f(x) + K\,g(x)$$

$$Q(x) = f(x) + \left[-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] g(x)$$

$Q(x)$ es una funcion que toma valores iguales en los extremos del intervalo, entonces, por el Teorema de rolle existe un punto interior donde la derivada es nula

$$Q'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x)$$

$$\underbrace{Q'(\mathcal{E}) = f'(\mathcal{E}) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\mathcal{E})}_{0}$$

$$f'(\mathcal{E}) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\mathcal{E}) = 0$$

$$f'(\mathcal{E}) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\mathcal{E})$$

$$\frac{f'(\mathcal{E})}{g'(\mathcal{E})} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Limites indeterminados. Regla de L'Hopital

"Una aplicacion del Teorema de cauchy es la resolucion de limite indeterminado mediante la Regla de L'Hopital, $(0/0\ ;\ \infty/\infty\ ;\ 0\cdot\infty\ ;\ \infty-\infty\ ;\ 0^{\infty}\ ;\ 1^{\infty}\ ;\ \infty^{0})$

Partimos del teorema de cauchy

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$ reemplazo b por x

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}\qquad a<\varepsilon<x$$

pero como $f(a)=0 \wedge g(a)=0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$

Aplico limite a ambos miembros en $x\to a$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

pero como ε es un punto interior del intervalo $\varepsilon\to a \wedge$ reemplazo $x\to a$ por $\varepsilon\to a$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\varepsilon\to a}\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$ Regla L'Hopital

INDETERMINACION

* $\dfrac{0}{0}$ $\quad \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=0 \wedge \lim_{x\to a} g(x)=0$

Ejemplo

$f(x)=x^2-1 \qquad g(x)=x-1 \qquad f'(x)=2x \qquad g'(x)=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x}{1}=2$$

* $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\infty}{\infty} \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x)=\infty$

Aplico L'Hopital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\frac{\cancel{0\,g(x)}-1\,g'(x)}{g^2(x)}}{\frac{\cancel{0\,f(x)}-1\,f'(x)}{f^2(x)}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{-g'(x)\cdot f^2(x)}{-f'(x)\cdot g^2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f^2(x)}{g^2(x)}}_{L^2}$$

NOTA:

$$\overbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}}^{L} = \overbrace{\lim_{x\to a} \frac{f^2(x)}{g^2(x)}}^{L^2} \cdot \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$L = L^2 \cdot \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\frac{L}{L^2} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\frac{1}{L} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* $0 . \infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) . g(x) = 0 . \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$ Aplico L'Hopital

* $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \infty - \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

En este caso se puede tratar de transformar a uno de los tipos $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1+x}\right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to -1} \left[\frac{2}{(x+1)(x+1)} - \frac{1}{(1+x)}\right] = \lim_{x\to -1} \frac{2-(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x\to -1} \frac{2-1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{1}{(1-x)} = \frac{1}{2}$$

* formas 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0

$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$

$y = f(x)^{g(x)}$ $\quad \lim_{x \to a} e^{\ln f(x)^{g(x)}}$ $\rightarrow$ halogo con $\underbrace{\lim_{x \to a} \ln f(x)^{g(x)}}_{\text{Resultado}}$

$e^{\text{resultado}}$

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x \to 0} e^{\ln(\operatorname{sen} x)^x} = e^{\lim_{x\to 0} \ln(\operatorname{sen} x)^x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \ln(\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x \to 0} x \ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$ Aplico L'Hopital

Aplico L'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{[\ln(\operatorname{sen} x)]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \left[\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-1}{x^2}}\right] = \frac{\cos x \cdot x^2}{-\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x \cdot x^2)'}{(-\operatorname{sen} x)'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cos x}{-\cos x} = \frac{0.0 + 0.}{-1} = 0$$

$y = \ln(\operatorname{sen} x)$

$y' = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$y = 1/x$

$y' = \frac{0.x - 1.1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

$y = \cos x \cdot x^2$

$y' = -\operatorname{sen} x \cdot x^2 + \cos x \, 2x = -x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cos x$

$y = -\operatorname{sen} x$

$y' = -\cos x$

<u>Formula de Mc-Laurin y Tailor</u>

Los polinomios son funciones que pueden ser facilmente analizados y de una gran variedad de formas y que pueden reemplazar con gran aproximacion a las funciones.

El error que cometemos al reemplazar una funcion por un polinomio, es tambien facilmente calculable. La aproximacion de la funcion es tanto mejor cuando mayor es el grado del polinomio.

NOTA:

"La formulas Mc-Laurin y Taylor nos permiten expresar una funcion mediante un polinomio y un termino complementario"

Formula de Taylor

① Dado el polinomio de grado n

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

② Y queremos expresarlo en funcion de las potencias $x-a$ es decir, debemos calcular los coeficientes $b_0, b_1, b_2 \cdots b_n$ del polinomio.

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

③ Hallamos las derivadas sucesivas (para determina los coeficientes)

$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2b_2 + 3.2b_3(x-a) + \cdots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}$$

$$P'''(x) = 3.2b_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$P^n(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots b_n \Longrightarrow n!\,b_n$$

④ Si en la expresion de la funcion y de estas derivadas hacemos $x = a$ tendremos

$$P(a) = b_0$$

$$P'(a) = b_1$$

$$P''(a) = 2b_2$$

$$P'''(a) = 3.2b_3 \Longrightarrow P'''(a) = 3!\,b_3$$

$$\vdots$$

$$P^n(a) = n!\,b_n \quad \text{(constante)}$$

⑤ despejando los coeficientes resulta

$$b_0 = P(a) \qquad b_3 = \frac{P'''(a)}{3!}$$

$$b_1 = P'(a) \qquad \vdots$$

$$b_2 = \frac{P''(a)}{2} \qquad b_n = \frac{P^n(a)}{n!}$$

⑥ Reemplazando estos valores de los coeficientes en la expresion del polinomio tendremos la formula de Taylor

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(X-a)^3 + \cdots + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

* Como vemos en el caso de un polinomio de grado n; la derivada de orden n es una constante, por lo tanto la derivada de n+1 sera nula.

Para el caso de una funcion que pueda ser indefinidamente derivada la formula de Taylor sera

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + TC$$

TC es el termino complementario y como vemos es una funcion de X

<u>Formula de Mc-Laurin</u>

Es un caso especial de Taylor, cuando $a = 0$

$$F(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + TC$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \, x^n$$

$$?\,(x-a)^n$$

Tema 4

Definicion y expresion Analitica de la diferencial

*Definicion

Sea $y = f(x)$ continua y derivable en el punto $x \in [a,b]$

La diferencial de la funcion es igual al producto de la derivada de la misma por el incremento de la variable independiente.

$y = f(x) \qquad df(x) = dy = f'(x) \cdot \Delta x$

*Expresion analitica de la diferencial

Consideremos la funcion identidad "$y = x$"

② $dy = x' \cdot \Delta x$ $\qquad y = x$

$dy = \Delta x$ $\qquad$ ① $dy = dx$ $\qquad$ entonces ③ $dx = \Delta x$

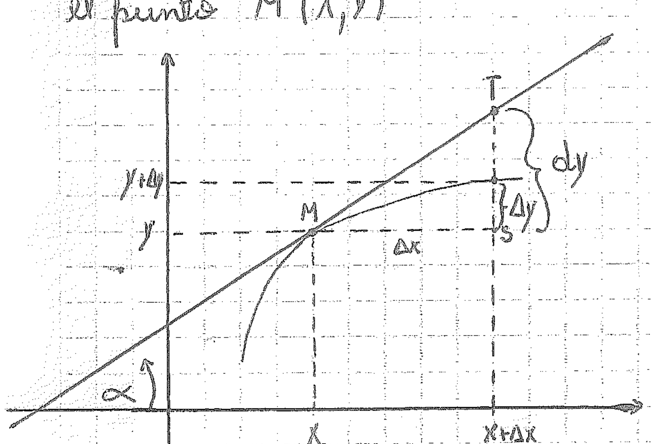
$y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x) \cdot dx \quad = \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$

Si diferencio ambos miembros ① $dy = dx$, y por definicion ② $dy = x' \cdot \Delta x$, de donde ③ $dy = \Delta x$; es decir que la diferencial de la variable independiente es igual al incremento de la misma

$dy = f'(x)\,dx \quad$ y de aqui $\quad \frac{dy}{dx} = f'(x)$

Interpretación geometrica de la diferencial

Llamamos α al angulo que forma la tang geometrica a la curva en el punto $M(X,Y)$



$\Delta y < dy$

Consideramos el triangulo $\overset{\Delta}{MTS}$

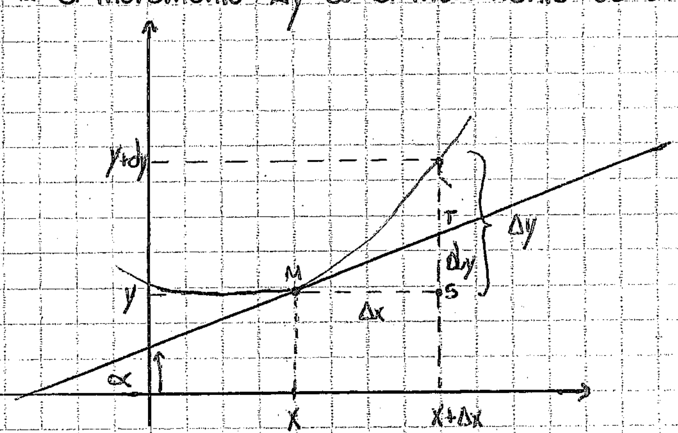
$\tan \hat{\alpha} = \frac{TS}{MS}$

$MS \cdot \tan \hat{\alpha} = TS$

$\Delta X \cdot f'(x) = dy$

damos x un incremento Δx. Sabemos que Δy es el incremento de la ordenada que le corresponde a la funcion cuando incrementamos X en ΔX.

* la diferencial de una función es el incremento de la ordenada de la recta tangente
* el incremento Δy es el incremento de la ordenada de la curva.



$\Delta y > dy$

$dy \cong \Delta y$

Relacion con el incremento

¿Cual es la deferencia, que vemos puede ser + o -; entre el incremento de la función y la deferencial?

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ por definicion de derivada

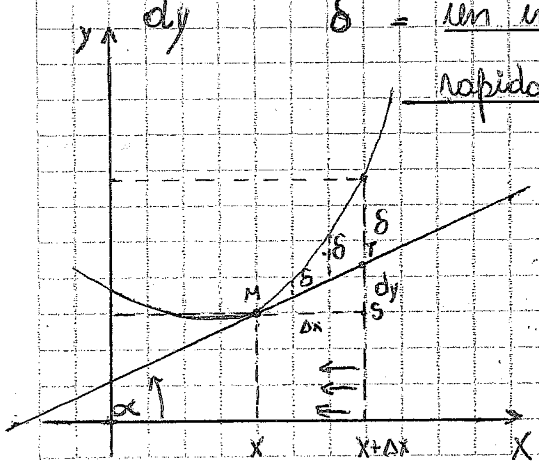
Tambien vimos que una funcion difiere de su limite en un infinitesimo $\Delta x \to 0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \mathcal{E}(\Delta x)$ donde $\mathcal{E}(\Delta x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$

$\Delta y = [f'(x) + \mathcal{E}(\Delta x)]\Delta x$

$\Delta y = \underbrace{\overset{\text{inf 1° orden}}{f'(x)\Delta x}}_{dy} + \underbrace{\overset{\text{inf 2° orden}}{\mathcal{E}(\Delta x)\Delta x}}_{\delta}$

δ = un infinitesimo de 2do orden es decir δ tiende mas rapidamente a cero con Δx tendiendo a cero



δ = es el error que se comete al tomar la diferencial como aproximación del incremento pero ese error es un infinitesimo con Δx tendiendo a cero.

Sabemos que $\Delta y \wedge dy$ son infinitesimos, porque tienden a cero cuando $\Delta x \to 0$

partimos de la definicion $dy = y' \cdot \Delta x$

$$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{y' \cdot \Delta x}{\Delta y}$$

$$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{y'}{\Delta y / \Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y'}{\Delta y/\Delta x = y'}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta y} = \frac{y'}{y'} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta y} = 1 \quad \therefore \; dy \wedge \Delta y \text{ son inf. equivalentes}$$

$\underline{\Delta y \cong dy \quad \text{con } \Delta x \to 0}$

<u>Aproximacion de funciones mediante diferenciales</u>

$$\Delta y \cong dy$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x) \cdot \Delta x$$

Ejemplo

$f(x) = 2x^2 - 1 \qquad x = 1 \;\wedge\; \Delta x = 0{,}001$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$	$dy = f'(x) \cdot \Delta x$
$\Delta y = [2(1+0{,}001)^2 - 1] - [2 \cdot 1^2 - 1]$	$dy = 4x \cdot 0{,}001$
$\Delta y = 1{,}004002 - 1$	$dy = 4 \cdot 1 \cdot 0{,}001$
$\Delta y = 0{,}004002$	$dy = 0{,}004$

<u>Errores</u> Cuando la funcion no es lineal la dy no es igual Δy pero puede tomarse al dy como buena aproximacion del encuento Δx es tan pequeño para cero $\Delta x \to 0$

Error Absoluto = | Valor real − Valor de Medicion |

$$\mathcal{E}_A = |\Delta y - dy|$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error Absoluto}}{\text{Valor real}} =$$

$$\mathcal{E}_r = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta y} - \frac{dy}{\Delta y} = 1 - \frac{dy}{\Delta y}$$

provemos que el error relativo tiende a 0 con $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_r = \lim_{\Delta x \to 0} 1 - \frac{dy}{\Delta y}$$

1 porque son inf equivalentes.

$$\lim_{\Delta x \to 0} 1 - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{\Delta y} = 1 - 1 = 0$$

$\therefore \varepsilon_r \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$

Reglas de diferenciacion

A cada formula de derivacion corresponde una de diferenciacion; con solo multiplicar la derivada por la diferencial de la variable independiente.

Funcion	Derivada	Diferencial
$y = c$	$y' = 0$	$dy = 0 . dx = 0$
$y = x$	$y' = 1$	$dy = 1 . dx = dx$
$y = (u+v)$	$y' = u' + v'$	$dy = (u'+v')dx = du + dv$
$y = (u.v)$	$y' = uv' + u'v$	$dy = (uv' + u'v) dx = u dv + du\, v$
$y = (u/v)$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$dy = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right) dx = \frac{du\, v - u d}{v^2}$

Diferenciales sucesivas

$y = f(x) \qquad dy = f'(x)\,dx$

definimos como SEGUNDA DIFERENCIAL de una funcion al producto de su segunda derivada por el cuadrado del incremento de la variable independiente

$$d^2y = f''(x)\,dx^2$$

de igual forma hacemos con la tercer diferencial

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3$$

$$\vdots$$

$$d^ny = f^n(x)\,dx^n$$

NOTA:

La Funcion Primitiva (o integral indefinida)

$F(x)$ es primitiva de $f(x)$ en $D \iff \forall x \in D \therefore F'(x) = f(x)$.

para designar una primitiva cualquiera de la funcion $f(x)$ suele utilizarse el simbolo $\int f(x)$ que se lee "Primitiva de $f(x)$ o antiderivada de $f(x)$ o integral indefinida de $f(x)$"

podemos decir que

$$\underbrace{\int}_{\text{Signo integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{integrando}} dx = \overbrace{F(x)}^{\text{Primitiva}} + \underbrace{C}_{\text{Constante de Integracion}} \;/\; [F(x)+C]' = f(x)$$

Gemplo

Si $f(x) = 2X \Rightarrow \int f(x)dx = X^2 + C$ ya que $[X^2+C]' = 2X$

$\int 2x\,dx = x^2 + C$

Teorema fundamental del calculo integral

* Si dos funciones tienen igual derivada entonces dichas funciones difieren en una constante.

Sean $f(x) \wedge g(x)$ dos funciones

$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f'(x) - g'(x) = 0$ C es una constante

$f(x) - g(x) = C$

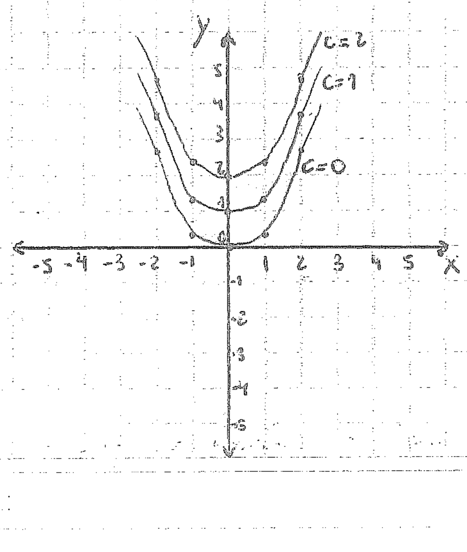
$[f(x) - g(x)]' = 0 \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C \iff (F(x)+C)' = f(x)$

$f'(x) - g'(x) = 0$

Gemplo

$\int x^2 dx = \frac{X^3}{3} + C$ ya que $\left[\frac{X^3}{3} + C\right]' = \frac{\cancel{3}X^2}{\cancel{3}} = X^2$

Si desearamos una curva de la flia tendriamos que determinar el valor de C de antemano.



$\int x^2 dx = \frac{X^3}{3} + C$

* Vemos tambien que las curvas de la familia difieren en una C constante.

Integrales inmediatas

"Son aquellos cuyo calculo es inmediato"

Ejemplo

$\int dx = X + C$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$

$\int \operatorname{sen}x\,dx = \cos x\,dx$

Consecuencias Inmediatas de la definicion de integral

① Si derivamos la integral obtendriamos el integrando

$\int f(x)dx = F(x)+c$ $\qquad [\int f(x)dx]' = f(x)$

$[\int f(x)dx]' = [F(x)+c]'$

$f(x) = f(x)$

Ejemplo

$[\int x^2 dx]' = [x^3/3 + C]' = [3x^2/3] = x^2.$

①' El signo de la derivada precede al integral lo destruye

$[\int f(x)dx]' = f(x)dx$

$[\int x^2 dx]' = [x^3/3 + C]' = x^2 dx$

② Si la integral precede a la derivada, la destruye pero al resultado le sumamos la constante de integracion

$\int f'(x)\,dx = f(x)+C$

Ejemplo

$\int (x^2)' dx = \int 2x\,dx = \frac{2x^2}{2} + C = x^2 + C$

Propiedades de las integrales indefinidas

① La integral de la suma de un numero fijo de funciones es igual a la suma de las integrales de dichas funciones.

$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

para comprobar vamos a derivar ambos miembros

$\{\int [f_1(x) + f_2(x)]dx\}' = [\int f_1(x)dx]' + [\int f_2(x)dx]'$

$f_1(x) + f_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$

NOTA:

② La integral del producto de una constante por una funcion es igual a la constante por la integral de la funcion

$$\int K f(x)\,dx = K\int f(x)\,dx$$

$$\left[\int K f(x)\,dx\right]' = K\left[\int f(x)\,dx\right]'$$

$$K f(x) = K f(x)$$

Integracion de monomios de seno y coseno

Metodo general de integracion

Cuando una integral no resulta inmediata se puede recurrir a los siguientes metodos:

Integracion por des composicion

Si la integracion no esta en la tabla pero a traves de distintos procesos algebraicos se puede transformar en una integral inmediata o bien aplicando propiedades

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)\,dx$$

Ejemplo

$$\int (x^2 + \operatorname{sen} x)\,dx = \int x^2 dx + \int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\frac{x^3}{3} + \cos x + C$$

Integracion por sustitucion

Consiste en hacer una sustitucion o cambio de variable en una integral dada, para transformarla en una inmediata.

$$\int f(x)\,dx = \text{No inmediato} \Longrightarrow \quad x = g(u)$$

$$dx = g'(u).\,du$$

Inmediato

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(u)].\,g'(u)\,du$$

Ejemplo

$$\int (\operatorname{sen} x).\cos x.\,dx =$$

$\operatorname{sen} x = u$
$(\operatorname{sen} x)' d\cancel{x} = du$
$\cos x.\,d\cancel{x} = du$

$$\int u.\,du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$$

Integral por partes

Se aplica esta metodo cuando la integral es de un producto y no se puede resolver por sustitucion.

(cuando tenemos $\ln x$ lo tomamos como u)

Formula $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

$$\int \overbrace{x^4}^{dv} \overbrace{\ln x}^{u}\, dx$$

$$\int x^4 \ln x\, dx = \ln x\, \frac{x^5}{5} - \int \frac{x^{\cancel{5}\,4}}{5}\,\frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

$$= \ln x\, \frac{x^5}{5} - \int \frac{x^4}{5}\, dx$$

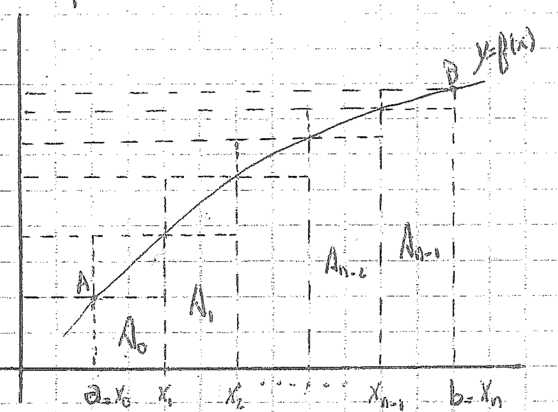
$$\ln x\, \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{25} + C$$

$u = \ln x$
$du = (\ln x)'\, dx$
$du = \frac{1}{x}\, dx$
$dv = x^4$
$v = \int x^4\, dx$
$v = \frac{x^5}{5}$

Tema 5

Definicion e interpretación geometrica dela integral definida

La integrales definidas se utilizan para calcular el area bajo la curva, a diferencia de la integral indefinida esta da como resultado un N° y no una funcion primitiva.



Consideramos la funcion $y=f(x)$ continua en $[a,b]$.
Hagamos en el intervalo $[a,b]$ una particion
La superficie parcial quedara dividida en rectangulos

$A_n = A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1}$

$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i$

El area de un rectangulo es igual base x altura

$A_0 = \Delta x_0 \cdot f(x_0)$

$A_1 = \Delta x_1 \cdot f(x_1) \implies A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot f(x_i)$

$\vdots$

$A_{n-1} = \Delta x_{n-1} \cdot f(x_{n-1})$

"al aumentar el numero de puntos de division el error que se va cometiendo va a ser cada vez menor y por lo tanto el area exacta va ser igual al limite del area aproximada cuando el numero de puntos de division tiende a infinito"

$A = \lim_{n\to\infty} A_n$ cuando $n \to \infty$ $\Delta x \to 0$ (a medida que los los puntos de division aumentan el incremento de x se aproxima a cero)

Definicion

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \, f(x_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

decimos que la integral definida es el limite de una sucesion de sumas, cuando el numero de sumandos tiende a infinito.

Propiedades de la integral

① "La integral del producto de una constante por una funcion, es igual, a la constante por la integral de la funcion"

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

② La integral definida de la suma de un numero fijo de funciones integrables, es igual, a la suma de las integrales

$$\int_a^b [f(x)+g(x)-h(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)dx$$

③ Propiedad aditiva del intervalo

Si consideramos $y=f(x)$ en $[a,b]$ y un punto interior c del intervalo $[a,b]$

$a<c<b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

④ Si los extremos de integracion son iguales, entonces el area es nula.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

⑤ "Si se permutan los extremos de integracion, la integral cambia de signo"

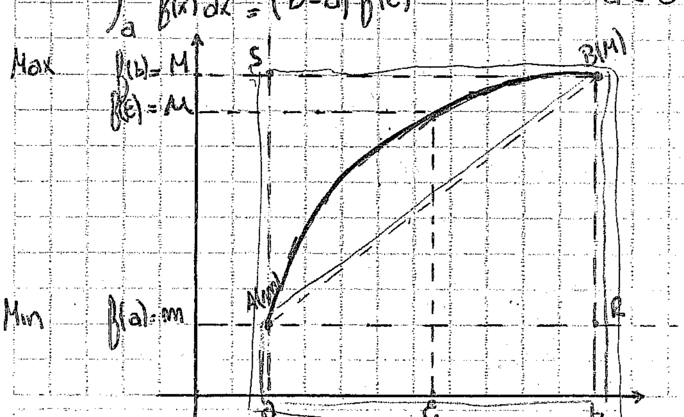
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Teorema del valor medio del calculo integral

Dada una funcion continua en $[a,b]$.

La integral definida de la funcion, es igual al producto del valor que toma la funcion en un punto interior del intervalo por la amplitud del intervalo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\varepsilon) \qquad a<\varepsilon<b$$



Sup aARb < Sup aABb < Sup aSBb

Ⓗ $y = f(x)$ es continua en $[a,b]$; $\exists\ \varepsilon / a < \varepsilon < b$

Ⓣ $\int_a^b f(x)dx = \overbrace{(b-a)}^{\text{base}} \cdot \underbrace{f(\varepsilon)}_{\text{altura}}$

Consideremos el rectangulo "aARb" ahora el rectangulo "aSBb" y el trapezoide "aABb"

Sus areas seran en relación Sup = base x altura

Sup aARb < Sup aABb < Sup aSBb

$(b-a)m < S < (b-a)M$

$(b-a)m < \int_a^b f(x)dx < (b-a)M$

divididos las desigualdades por $(b-a)$

$$\frac{\cancel{(b-a)}m}{\cancel{(b-a)}} < \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx < \frac{\cancel{(b-a)}M}{\cancel{(b-a)}}$$

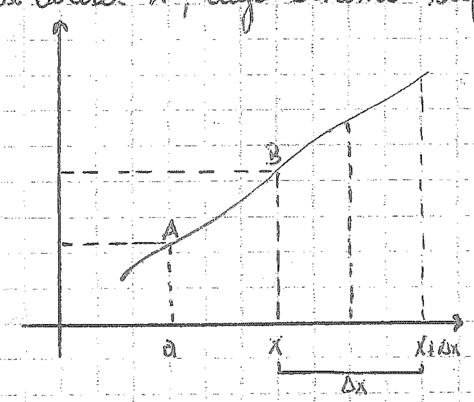
$$m < \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx < M$$

$$m < \mu < M \qquad \mu = f(\varepsilon) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$(b-a)f(\varepsilon) = \int_a^b f(x)dx$$

Derivada de la integral definida

Consideremos una funcion $y = f(x)$ y en ella un punto A de abcisa "a" a un punto B de abcisa X; cuyo extremo superior es variable.



$A(x) = \int_a^x f(x)dx$

al sustituirse el extremo superior de la variable por X se llama Funcion Integral

Tesis

$A'(x) = f(x)$

Demostracion

Aplicamos la regla general de derivacion

① Incrementamos X en un Δx

$A(x) + \Delta A(x) = A(x+\Delta x)$

② Hallo $\Delta A x$

$\Delta A x = A(x+\Delta x) - A(x)$

$\Delta A x = \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx$

$\Delta A x = \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = \Delta x \cdot f(\varepsilon)$

③ Ahora divido por Δx

$\frac{\Delta A x}{\Delta x} = \frac{\Delta x\, f(\varepsilon)}{\Delta x} = f(\varepsilon)$

④ Aplico $\lim \Delta x \to 0$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\varepsilon)$ pero si $\Delta x \to 0$, $\varepsilon \to x \Rightarrow f(\varepsilon) \to f(x)$

$x < \varepsilon < x + \Delta x$

$A'(x) = f(x)$

Calculo de la integral definida mediante la primitiva

Es una propiedad de las funciones continuas que permite calcular facilmente el valor de la integral definida a partir de cualquiera de las primitivas de la funcion

Dada una funcion $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$ y sea $f(x)$ cualquier funcion pr. de f es decir $F'(x)=f(x)$ $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$

Sea $A(x)=\int_a^x \underset{\text{integrando}}{f(x)}\,dx = \overset{\text{primitiva}}{F(x)}+C$

Demostracion

$A'(x) = \overset{\text{integrando}}{f(x)}$ * La derivada del area es igual al integrando.

$A'(x) = \overset{\text{Primitiva}}{F'(x)}$ * por ende el Area es tambien una primitiva de $f(x)$

$A(x)-F(x)=C$ * por el teorema fundamental del calculo integral

* $A(x)=F(x)+C$ Que dice que dos primitivas de una misma funcion difieren en una constante.

$\boxed{A(a)=\int_a^a f(x)\,dx = 0}$ * si los extremos de integracion son iguales, entonces el area es nula.

$\underbrace{A(a)}_{\text{area con extremos }=}-F(a)=C$

$0-F(a)=C$

$-F(a)=C$

$A(x)=F(x)+C$

$0=F(x)+C$

$-F(x)=C$

$\Rightarrow A(x)=F(x)+C$

$A(x)=F(x)-F(a) \Rightarrow \int_a^x f(x)\,dx = F(x)-F(a)$

$A(b)=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-(a) = [F(x)]_a^b$

Regla de Barrow

Dice que una integral definida se calcula como la diferencia entre el valor que toma la primitiva en el extremo superior, menos, el valor de la primitiva en el extremo inferior de la integracion

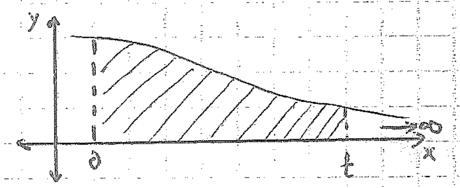
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

NOTAS:

Integrales generalizada o impropios

① El extremo superior no esta definido, la funcion es asintota respecto al semieje+ de los X.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx =$$



$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^t$$ fijamos un parametro t

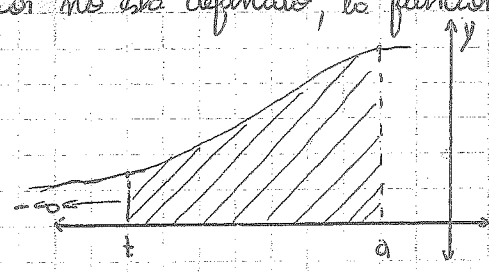
$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[F(t) - F(a)\Big]$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} F(t) - \overbrace{\lim_{t\to\infty} F(a)}^{\text{constante}}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(a)$$

② El extremo inferior no esta definido, la funcion es asintota respecto al semieje − de los X

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx =$$



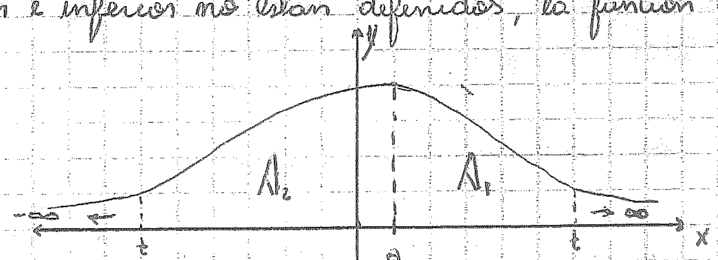
$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\Big[F(x)\Big]_t^b$$

$$= \lim_{t\to-\infty} F(b) - \lim_{t\to-\infty} F(t)$$

$$= F(b) - \lim_{t\to-\infty} F(t)$$

③ El extremo superior e inferior no estan definidos, la funcion es asintota respecto a todo el eje X

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$



$$A_1 + A_2 = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big[F(x)\Big]_a^t + \lim_{t\to-\infty}\Big[F(x)\Big]_t^a$$

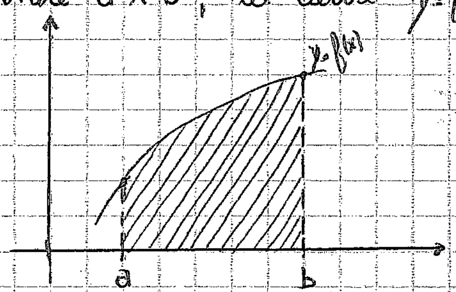
$$= \lim_{t\to\infty}\Big[F(t) - F(a)\Big] + \lim_{t\to-\infty}\Big[F(a) - F(t)\Big] = \lim_{t\to\infty} F(t) - \cancel{F(a)} + \cancel{F(a)} - \lim_{t\to-\infty} F(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) - \lim_{t\to-\infty} F(t)$$

Calculo de áreas

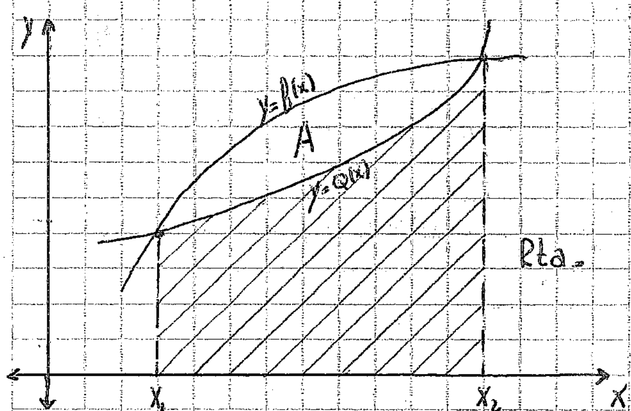
$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Entre $a \wedge b$, la curva $y = f(x)$ y el eje de X



- **Area entre dos curvas**

Si las ecuaciones de las curvas son: $y = f(x) \wedge y = Q(x)$



determinamos los puntos de intersección de las curvas

Rta. $f(x) - Q(x) = 0$

Supongamos que las raíces son $X_1 \wedge X_2$ el área entre las curvas está dada por la diferencia entre las áreas bajo cada uno de las curvas

$$A = \int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx - \int_{X_1}^{X_2} Q(x)\,dx = \int_{X_1}^{X_2} \left[f(x) - Q(x) \right] dx$$

Cambios de Variables en la integral definida

$\int_a^b f(x)\,dx$ en la que $f(x)$ es continua en $[a,b]$;

Queremos efectuar un cambio de variable $X = Q(t)$ si:

① $Q(\alpha) = a \wedge Q(\beta) = b$ (buscamos los extremos)

② $Q(t) \wedge Q'(t)$ son continuas $[\alpha, \beta]$

③ $f[Q(t)]$ está definida $\wedge$ es continua en $[\alpha, \beta]$ Tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[Q(t)]\,Q'(t)\,dt$$

NOTA:

Efectivamente, si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ podemos decir

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int f[Q(t)]\,Q'(t)\,dt = F[Q(t)] + C$$

* $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$$\int_\alpha^\beta f[Q(t)]\,Q'(t)\,dt = F[Q(\beta)] - F[Q(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[Q(t)]\,Q'(t)\,dt$$

Volumen de un sólido de revolución

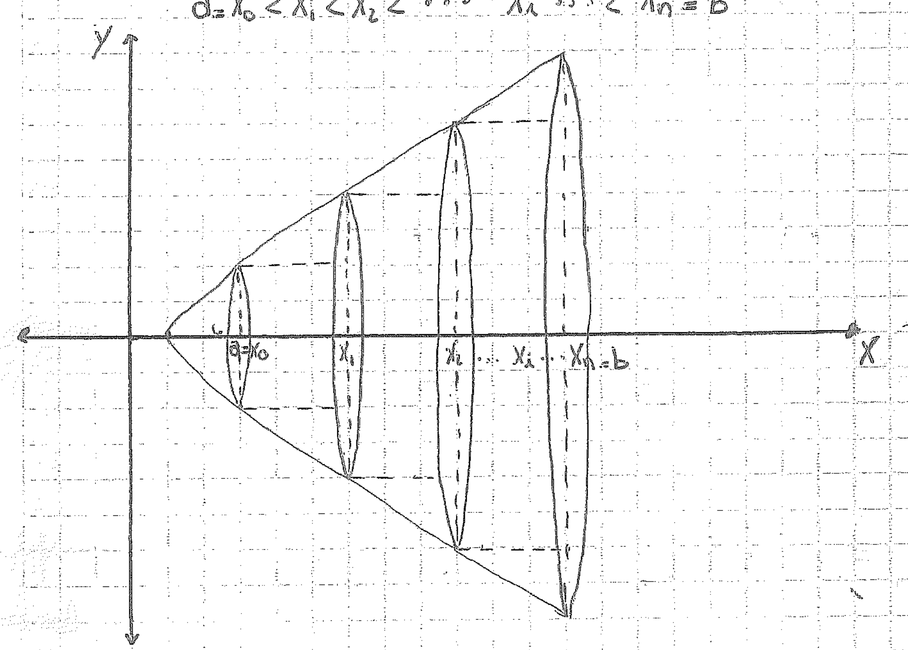
Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva, intersección del plano con la superficie del cuerpo. $y = f(x)$ continua y derivable en $[a,b]$

Al girar esta función alrededor del eje X genera un cuerpo de revolución, y deseamos averiguar el volumen encerrado de dicho sólido de revolución.

1 Hacemos una partición del intervalo $[a,b]$ en n subintervalos =

$P = \{ a = x_0, x_1, x_2 \cdots x_i \cdots x_n = b \}$ donde

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_i \cdots < x_n = b$



* por los puntos de la partición levantamos las ordenadas correspondientes y por el extremo inferior hagamos // al eje X

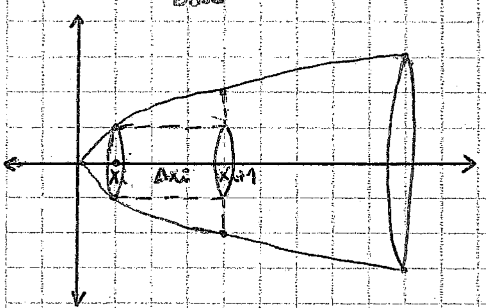
al girar esta curva alrededor del eje x, las ordenadas también giran formándose un cilindro en c/u de los subintervalos

$$V = \pi b^2 a$$

$$\pi b^2 \cdot h$$

El volumen de este pequeño cilindro será $V = \pi . b^2 a$;

$$V = \pi \underbrace{f^2(x_i)}_{base} . \overbrace{\Delta x_i}^{altura}$$



Consideramos para cada intervalo $(x_i ; x_{i+1})$ un pequeño cilindro de Altura $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ base $f(x_i)$

Obtendremos un valor aproximado del volumen, si sumamos los volúmenes de n-cilindros

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i) \Delta x_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

La aproximación será mayor cuando más fina sea partición, y el valor exacto del volumen, será el límite de dicha suma cuando hacemos tender a infinito el número de sumandos

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = \lim_{n \to \infty} \pi \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i) \Delta x_i = \pi \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

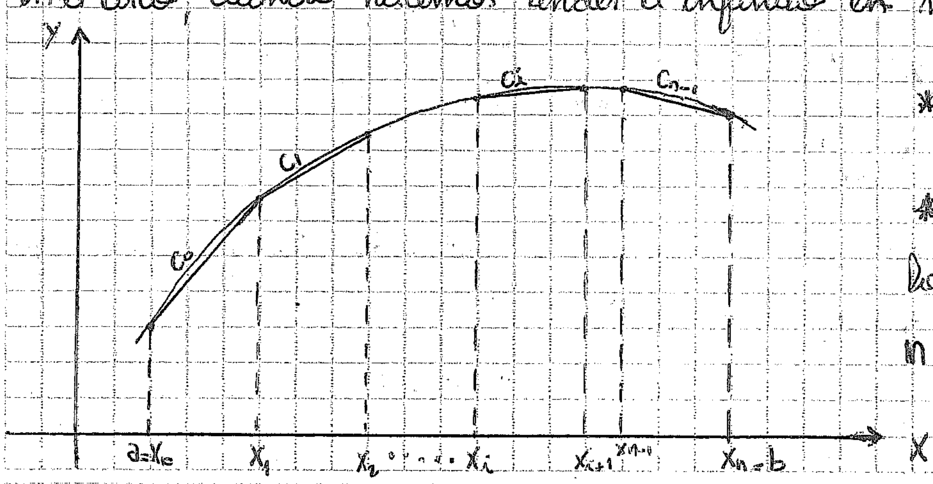
y esto por definición es una integral definida

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

→ Volumen de un sólido de revolución

Longitud de un arco de curva

Es el límite hacia cual tiende los perímetros de las poligonales inscriptas en el arco, cuando hacemos tender a infinito el número de lados de los mismos



* Consideremos $y = f(x)$ definida en [ ]

* Llamamos $C_0, C_1, C_2 \ldots C_{n-1}$ a la longitud de las poligonal inscripta de n lados

P_n es el perimetro de la poligonal ∧ S es la long del arco de curva

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \; ; \quad S = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i$$

① Consideramos el arco AB de la curva $y = f(x)$

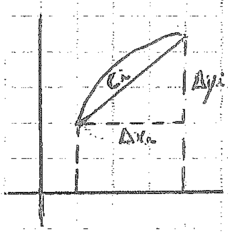
② hacemos la particion del intervalo $[a,b]$ y dibujamos las ordenadas por los puntos de la particion

③ al tener estos puntos queda determinado los vertices de una poligonal inscripta

※ La long del arco esta determinada por el perimetro de la poligonal

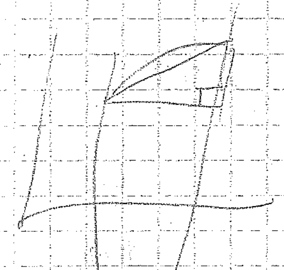
$$P_n = C_0 + C_1 + C_2 \cdots + C_{n-1}$$

④ por teorema de pitagoras



$$H = \sqrt{B^2 + A^2}$$

$$H^2 = B^2 + A^2$$



$$H^2 = Co^2 + Ca^2$$

$$\frac{C_i^2}{\Delta x_i^2} = \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2} + \frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_i^2}$$

$$\frac{C_i^2}{\Delta x_i^2} = 1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}$$

$$C_i^2 = \Delta x_i^2 \cdot \left(1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}\right)$$

$$C_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$\frac{C_i^2}{\Delta x_i^2} = \frac{\Delta x^2}{\Delta x_i^2} + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}$$

$$C_i^2 = \left(1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}\right) \cdot \Delta x_i^2$$

$$C_i = \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \sqrt{\Delta x_i^2} \longrightarrow \text{long Aprox del arco} = P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}$$

⑤ Aumentando el punto de division, la poligonal se acerca mas a la curva

$n \to \infty$ entonces $\Delta x_i \to 0$

La long exacta la obtendremos con el limite de la long aproximada con el numero de puntos de division tendiendo a infinito

$$S = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}$$

$$f'(x)^2 = \frac{CO}{CA}$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Diferencial del arco

$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ nos da la long de un arco de curva

para poder calcular la diferencial del arco hacemos:

$$S(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \qquad a<t<X$$

* $b = X$

* t asignamos a la derivada de integracion

① calculamos la derivada

$$S'(x) = \left[\int_a^x \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx\right]'$$

$$S'(x) = \sqrt{1+f'(x)^2}$$

diferencial del arco $= dS$

$$dS = S'(x) \cdot dx$$

Multiplicamos la derivada dela long del arco de curva por la diferencial de la V.I

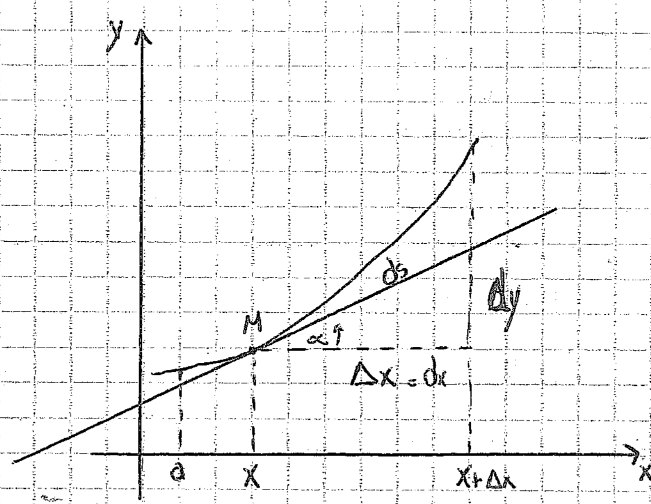
$$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

$$ds = \sqrt{(1+f'(x)^2)\,dx^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + \underbrace{f'(x)^2\,dx^2}_{dy^2}}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$



Tema 6

El plano y el espacio euclidiaño

Un espacio es euclidiano y de dimension n (se simboliza E^n)

① Es a fin de dimension n

Espacio a fin de n dimension

Es el espacio entre cuyos puntos y los conjuntos n numeros reales cuales quiera $X_1, X_2, X_3 \cdots X_n$ llamados coordenados del punto se puede establecer una correspondencia biunivica.

② La distancia entre dos puntos cualquiera del mismo esta definida por:

$$d^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2$$

Llamamos $d(A;B)$ a la distancia entre los puntos $A \wedge B$ del E^2 se verifica que

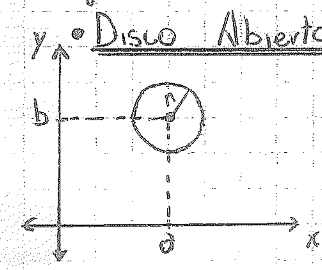
* $d(A;B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
* $d(A;B) = d(B;A)$
* $d(A;C) + d(C;B) \geq d(A;B)$

Espacio de n dimenciones

Un espacio es de n dimensiones, cuando para determinar cada uno de los puntos hacen falta los valores de n parametros, llamados COORDENADAS DEL PUNTO y que se representan por $X_1, X_2, X_3 \cdots X_n$

Topologia del plano

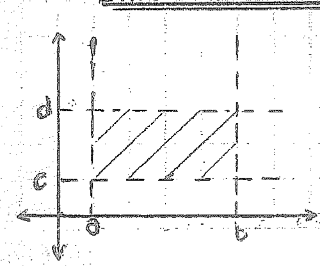
- Conjunto puntuales en E^2
  - Disco Abierto de centro $A(a,b) \wedge$ radio r



Es el conjunto de puntos del E^2 tal que

$\{ P(X,Y) / (X-a)^2 + (Y-b)^2 < r^2 \}$ o sea la $d(P;A) < r$

  - Intervalo rectangular abierto



Es el conjunto de puntos $P(X,Y) \in$ al E^2 tal que

$\{ P(x,y) / a < x < b \wedge c < y < d \}$

• Entorno circular = (disco Abierto)

Entorno circular del punto $A(a,b)$ $\wedge$ radio r es el disco abierto de radio r y centro $A(a,b)$ es decir, es el conjunto de puntos del $\mathcal{E}^2$

$\{P(x,y) / (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$ o sea la distancia $d(P;A)<r$

Simbolizamos $N(A;r)$

• Entorno circular reducido

Entorno circular reducido del punto $A(a,b)$ $\wedge$ radio r es el disco abierto de radio r y centro $A(a,b)$ excluyendo el centro, es decir, el punto $A(a,b)$

$\{P(x,y) / 0<(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$ osea $0<d(P;A)<r$

Simbolizamos $N'(A;r)$

• Entorno rectangular

Entorno rectangular del punto $A(a,b)$ y semiamplitud "d" es el conjuntos de puntos $P(x,y)$ del $\mathcal{E}^2$ tal que

$|x-a|<d$

$|y-b|<d$

• Entorno rectangular reducido

Es el entorno rectangular del punto $A(a,b)$ y semiamplitud "d" excluyendo el punto $A(a,b)$ es decir

$\forall P(x,y) \in \mathcal{E}^2$ tal que

$0<|x-a|<d$

$0<|y-b|<d$

CLASIFICACION DE PUNTO

• Punto aislado

Un punto de un conjunto se llama aislado cuando hay algún entorno suyo que no contiene otros puntos del conjunto que el mismo

Ejemplo

Si llamamos Z al conjunto de los enteros, al conjunto definido

$S=\{P(x;y) / x\in Z \wedge y\in Z\}$

- Punto de Acumulacion

Un punto pertenezca o no al conjunto S; se llama punto de acumulacion de S, cuando en todo entorno reducido suyo hay puntos del conjunto S

$S = \{P(x,y) / x^2+y^2 < 1\} \wedge x^2+y^2=1$

Todos los puntos de S son de acumulacion y los de la circunferencia tambien ya que si bien no pertenecen a S en todo el entorno suyo hay puntos que $\in$ S

- Punto interior

Un punto perteneciente a un conjunto S se llama punto interior de S cuando hay por lo menos un entorno suyo, cuyos puntos pertenecen a S

Interior de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos interiores del conjunto

- Punto exterior

Un punto no perteneciente a un conjunto S se llama "punto exterior de S" cuando hay por lo menos un entorno suyo cuyos puntos ninguno pertenecen a S

Exterior de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos exteriores del conjunto

- Punto Frontera

Un punto pertenezca o no a S, se llama frontera de S si no es externo ni interno a S, es decir, en todo entorno suyo hay puntos que $\in$ a S $\wedge$ puntos que no $\notin$ a S

$S = \{P(x,y) / x^2+y^2 < 1\}$

los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=1$ son puntos frontera de S.

Fontera de un Conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos fronteros del conjunto.

Contorno de un Conjunto

"Es el ~~conjunto~~ conjunto de los puntos no exterior que son puntos de acumulacion de puntos exterior."

$S = \{P(x,y) / x^2+y^2 < 1 \wedge y \neq 0\}$

la frontera es la circunferencia $x^2+y^2=1$ con $y=0$ mientras que el contorno es $x^2+y^2=1$

Funciones de dos y n variables independiente

Funciones de dos variables independiente

Se dice que Z es una funcion de las variables X e Y. Cuando a cada par ordenado de valores (X,Y) le corresponde uno y solo un valor determinado de Z

$$Z = f(X,Y)$$

Dominio de la funcion

Es el conjunto de pares de valores que puede tomar la variable X e Y para el cual la funcion $Z = f(X,Y)$ esta definido.

La representacion se hace a traves de porciones del plano X,Y

Rango de la Funcion

Es el conjunto de los valores de Z que son imagenes de los pares ordenados (X,Y) perteneciente al dominio de la funcion.

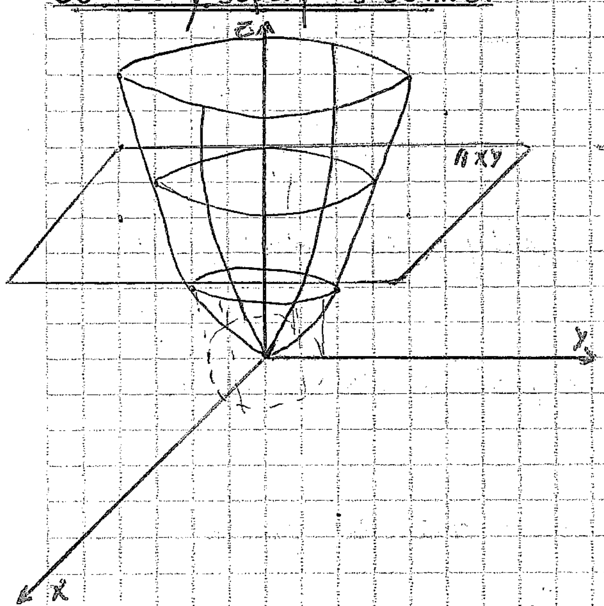
Se representa en la recta real

Funcion de Varias Variables independientes

Se dice que la variable Y es funcion de la variables $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ Cuando a cada n-upla ordenada $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ de los valores de los n variables independiente le corresponde una sola valor de Y

$$Y = f(X_1, X_2, X_3 \ldots X_n)$$

Curvas y Superficies de nivel



Curvas de Nivel

Sea $Z = f(X,Y)$ una superficie

Si se intersecta con un plano paralelo al X,Y se obtienen curvas que se pueden proyectar sobre el plano X,Y. Estas curvas se llaman curvas de nivel

Las curvas de nivel son las proyecciones sobre el plano X,Y de las intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano XY

* para diferentes valores de Z se obtienen distintas curvas planas que forman una familia de curvas de nivel

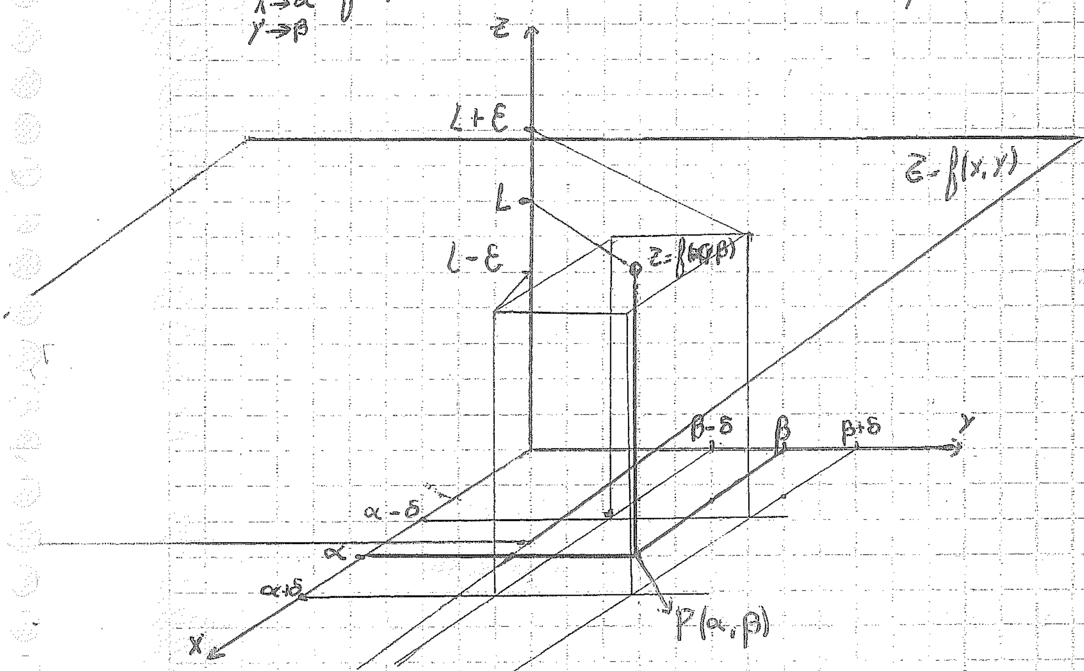
Superficie de nivel

Dada una funcion $u = f(x,y,z)$ se definen como superficies de nivel de la funcion, a la superficie de ecuacion $f(x,y,z) = C$ en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, para cuyos puntos la funcion toma el mismo valor $u = C$

Limite de funciones de dos variables independientes

Dada una funcion de dos variables independientes $z = f(x,y)$ con dominio de definicion S y rango T, esta funcion tiene limite L en el punto $P(\alpha,\beta)$ si para cada numero positivo ε arbitrario y tan pequeño como se quiera se puede hallar otro numero positivo δ o sea $\delta = \delta(\varepsilon)$ que verifique que todos los puntos del entorno rectangular reducido del punto $P(\alpha,\beta)$ tienen valores de la funcion cuya diferencia con el valor limite L en valor absoluto sea menor que el valor ε elegido arbitrariamente

$$\lim_{\substack{x\to\alpha \\ y\to\beta}} f(x,y) = L \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists\, \delta>0,\ \delta=\delta(\varepsilon) \,/\, \underbrace{\begin{matrix} 0<|x-\alpha|<\delta \\ 0<|y-\beta|<\delta \end{matrix}}_{\forall (x,y)\in N'(P,\delta)} \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$$



Este limite se define como doble o simultaneo dado que se tiende al punto $P(\alpha,\beta)$ segun entornos reducidos rectangulares.

Limite iterados

En este caso se hace tender a su limite primero a una variable, dejando fija la otra y luego a esta en la funcion asi obtenida

$$\lim_{y\to\beta}\lim_{x\to\alpha} f(x,y) = \lim_{y\to\beta}\left[\lim_{x\to\alpha} f(x,y)\right] = \lim_{y\to\beta} L(y) = L_1$$

$$\lim_{x\to\alpha}\lim_{y\to\beta} f(x,y) = \lim_{x\to\alpha}\left[\lim_{y\to\beta} f(x,y)\right] = \lim_{x\to\alpha} L(x) = L_2$$

Relacion entre los Mismos

Si $L_1 \neq L_2$ no existe el limite doble

Si $L_1 = L_2$ puede como no existir el limite doble y si existe son todos iguales osea $L_1 = L_2 = L$

Infinitesimo

Una funcion $z = f(x,y)$ es infinitesimo para $(x,y) \Rightarrow (a,b)$ si:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = 0$$

Comparacion de infinitesimos

Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos infinitesimos en $(x,y)\to(a,b)$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \begin{cases} K = \text{son infinitesimos del mismo orden} \\ 0 = f(x,y) \text{ es de orden superior} \\ 1 = \text{son equivalentes} \\ \infty = f(x,y) \text{ es de orden inferior a } g(x,y) \\ \cancel{\nexists = \text{no son comparables}} \end{cases}$$

Continuidad de funciones de dos variables

Una funcion $f(x,y)$ es continua en un punto $(a,b) \Longleftrightarrow \begin{cases} ① \ \exists\, f(a,b) \\ ② \ \exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \\ ③ \ f(a,b) = L \end{cases}$

$f(x,y)$ es continua en un punto $(a,b) \Leftrightarrow f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Continuida de funciones de n variables independientes

Sea $y = f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f(\vec{x})$ una funcion con dominio $S \in \mathbb{R}^n$ y rango $T \in \mathbb{R}^1$ $\vec{a} = (a_1, a_2 \cdots a_n)$ y $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ un punto generico de $S \Rightarrow y = f(\vec{x})$ es continua si

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} = f(\vec{a})$$

Tema 7

Derivada de una función de dos Variables independientes

Derivada parcial de z con respecto a x

Consideremos la funcion $z = f(x,y)$, vamos a incrementar la variable x e y permanece constante. Aplicamos regla de derivacion

$$z + \Delta z_x = f(x+\Delta x, y)$$

$$\Delta z_x = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

$$\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = z'_x = \frac{dz}{dx}$$

Derivada parcial de z con respecto a y

ahora incrementamos y, x permanece constante

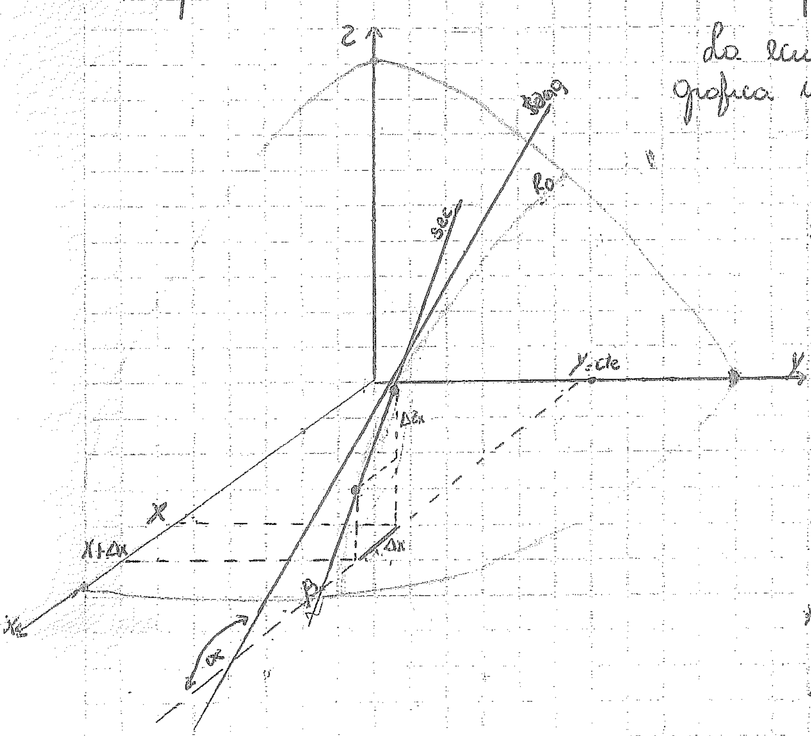
$$z + \Delta z_y = f(x, y+\Delta y)$$

$$\Delta z_y = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$\frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = z'_y = \frac{dz}{dy}$$

Interpretacion Geometrica de las derivadas parciales



La ecuacion $z = f(x,y)$ tiene como representacion grafica una superficie en el espacio x, y, z

Derivada parcial con respecto a x

* Incrementamos x en Δx manteniendo $y = cte.$ de lo que resulta la ecuacion de de la curva R_o

$$z + \Delta z_x = f(x+\Delta x, y)$$

* hallo $\Delta z_x = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$

* hago pasar por los puntos (x,y) y $(x+\Delta x, y)$ una recta a la que llamaremos Secante

* Cuando hacemos el cociente incremental $\frac{\Delta z_x}{\Delta x}$ estamos calculando la tangente del angulo que forma la recta secante con el plano x, y formandose el angulo β

* Aplico $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = z'_x$

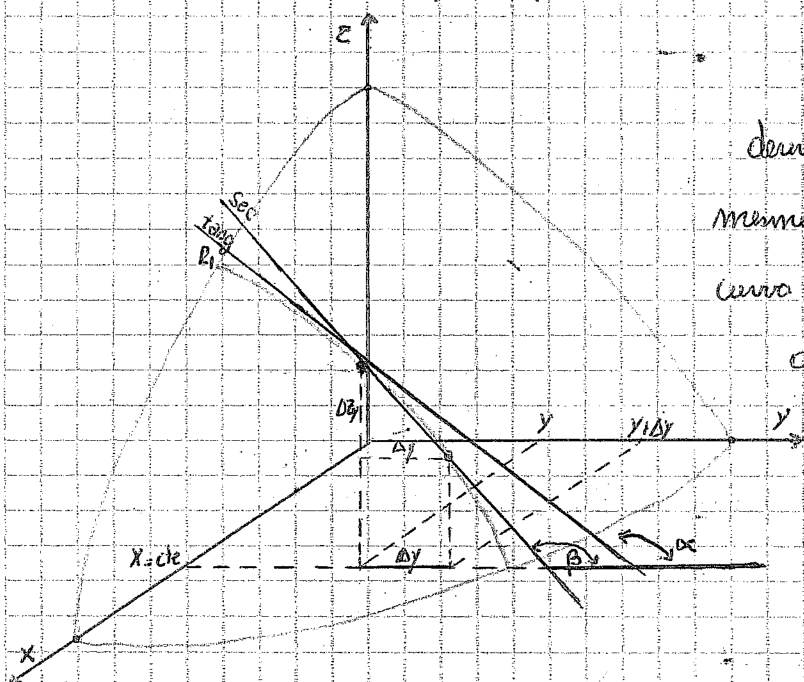
si $\Delta x \to 0$ entonces

$(x+\Delta x, y) \longrightarrow (x,y)$

$\hat{\beta} \to \hat{\alpha}$

Recta secante $\longrightarrow$ Recta tangente

derivada parcial con respecto y



La interpretacion geometrica de la derivada parcial con respecto a y, es lo mismo que en el caso anterior donde la curva que se obtiene P_1 es la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con $X = cte$

La derivada parcial es la pendiente de la recta tangente geometrica que pasa por (X, Y)

Derivadas parciales de funciones de N-variables

Sea $y = f(X_1, X_2, \cdots X_n)$ una funcion de $R^n \to R^1$ y sea ΔX_i el incremento de la variable X_i

$$y + \Delta y = f(X_1, X_2, X_i + \Delta X_i \cdots X_n)$$

$$\Delta y = f(X_1, X_2, X_i + \Delta X_i \cdots X_n) - f(X_1, X_2, X_i \cdots X_n)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta X_i} = \frac{f(X_1, X_2, X_i + \Delta X_i \cdots X_n) - f(X_1, X_2, X_i \cdots X_n)}{\Delta X_i}$$

$$\lim_{\Delta X_i \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta X_i} = \lim_{\Delta X_i \to 0} \frac{f(X_1, X_2, X_i + \Delta X_i \cdots X_n) - f(X_1, X_2, X_i \cdots X_n)}{\Delta X_i}$$

$$\frac{dy}{\Delta X_i} = \frac{d f(\bar{x})}{d X_i}$$

$$y'_{x_i} = \lim_{\Delta X_i \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta X_i}$$

Habra n derivadas parciales primeras, correspondiente a los n valores que puede tomar i

Definicion

Una funcion es derivable cuando existen las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables independientes

Relacion entre la derivada y la continuidad

Si la funcion $y = f(\vec{x})$ es derivable en un recinto S y ademas las $f'_{x_i}(\vec{x})$ derivadas parciales son acotadas en S, entonces, $y = f(\vec{x})$ es continua en S

Una funcion $f(\vec{x})$ es acotada cuando se puede hallar un numero M no nulo y finito, tal que el valor absoluto de la funcion permanezca en el recinto y siempre sea menor que M

$$|f(\vec{x})| < M \; ; \; \forall (\vec{x}) \in S$$

Este teorema nos dice que no es suficiente con que una funcion $f(\vec{x})$ sea derivable en un recinto para garantizar su continuidad, sino que es necesario que las derivadas parciales sean acotadas en dicho recinto.

Derivadas parciales de orden superior

Consideremos la funcion $z = f(x, y)$

derivada primeras

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Si estas funciones admiten a su vez derivadas, estas se llaman derivadas segundas y la derivada de la segunda sera tercera y asi sucesivamente

Teorema de SCHWARTZ

Sea $z = f(x, y)$ continua y existen f'_x y f'_y y ademas se existen f''_{xy} entonces tambien existe f''_{yx} y son iguales. Derivada cruzadas

Derivada parciales sucesivas

$$f'_x \to \begin{cases} f''_{xy} \to \begin{cases} f'''_{xyy} \\ f'''_{xyx} \end{cases} \\ f''_{xx} \to \begin{cases} f'''_{xxy} \\ f'''_{xxx} \end{cases} \end{cases}$$

$$f'_y \to \begin{cases} f''_{yy} \to \begin{cases} f'''_{yyy} \\ f'''_{yyx} \end{cases} \\ f''_{yx} \to \begin{cases} f'''_{yxy} \\ f'''_{yxx} \end{cases} \end{cases}$$

Diferenciabilidad de funciones de dos variables independientes

$y = f(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \mathcal{E}(\Delta x) \Rightarrow \Delta y = f'(x).\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x)\,\Delta x$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\,\Delta x + \mathcal{E}(\Delta x)\,\Delta x \qquad \mathcal{E}(\Delta x) \to 0$$

Cuando $\Delta x \to 0$

$z = f(x,y)$

$$\Delta z_x = \frac{dz}{dx}\,\Delta x + \mathcal{E}_1\,\Delta x$$

$$\Delta z_y = \frac{dz}{dy}\,\Delta y + \mathcal{E}_2\,\Delta y \Longrightarrow \Delta z = \Delta z_x + \Delta z_y$$

$$\Delta z = \underbrace{\frac{dz}{dx}\,\Delta x + \frac{dz}{dy}\,\Delta y}_{\text{parte principal = diferencial total}} + \mathcal{E}_1\Delta x + \mathcal{E}_2\Delta y \qquad \text{incremento total}$$

Diferencial de una función de n variables independientes

Si $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$dw = \frac{dw}{dx_1}dx_1 + \frac{dw}{dx_2}\,dx_2 + \dots + \frac{dw}{dx_n}\,dx_n$$

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{df(\vec{x})}{dx_i}\,.\,dx_i$$

Relación entre la diferenciabilidad, derivabilidad y la continuidad

* Si una función $z\ f(x,y)$ es diferenciable en un punto (x,y) entonces es continua y derivable en ese punto.
pero no basta que una función sea continua y derivable en un punto para garantizar su diferenciabilidad.

* Si una función $z = f(x,y)$ es continua y derivable y tiene sus derivadas parciales continuas en un entorno del punto (x,y), entonces, es diferenciable en dicho punto.

NOTA:

Plano tangente

tenemos una funcion $z = f(x,y)$, donde f tiene derivadas parciales continuas y sea el punto $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$ un punto en la superficie S.

diferenciabilidad de funciones de dos variables independiente

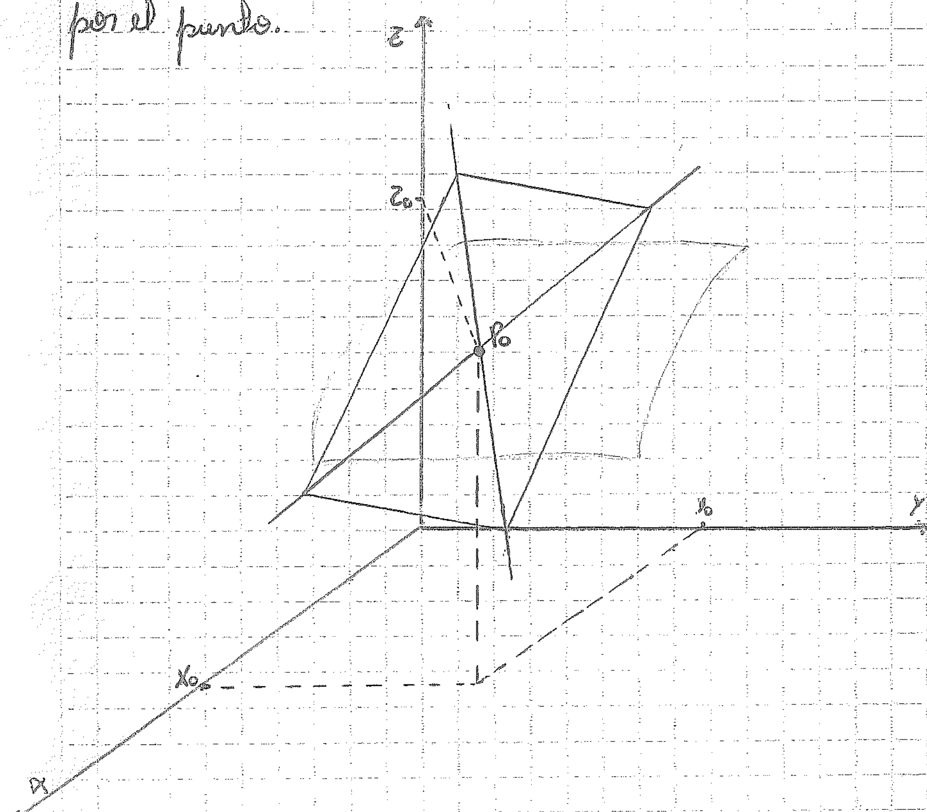
$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y + \varepsilon \qquad \varepsilon = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

Suponiendo que ε es despreciable y expresado cada incremento como la diferencia entre un valor de funcion y uno inicial

$$Z - Z_0 = \frac{dz}{dx}(X - X_0) + \frac{dz}{dy}(Y - Y_0)$$

$$Z - Z_0 = f'x\,(X - X_0) + f'y\,(Y - Y_0)$$

Entonces el plano tangente a la superficie S en el punto P_0 esta definido como el plano que contiene a todas las rectas tangentes a las curvas que pasan por el punto.



Tema 8

* Funciones compuestas de dos variables y de n variables independientes

Función compuesta de una variable

Consideramos una función $Z = f(x,y)$ donde X e Y a su vez son funciones de otra variable t sea: $X = g(t)$ e $Y = h(t)$ donde $t \in R$

para cada valor que se le asigna a t obtendremos un valor para X y otro para Y y para la función f un valor Z

$$Z = (X,Y), \quad X = g(t) \text{ e } Y = h(t) \Rightarrow Z = f[g(t), h(t)]$$

Z es una función de t a través de X e Y

Función compuesta de dos variables

Consideremos una función $Z = f(x,y)$ donde X e Y a su vez son funciones de dos variables u,v sea $X = g(u,v)$ e $Y = h(u,v)$

para cada valor que se le asigna a u,v obtendremos un valor X y otro para Y y para la función f un valor Z

$$Z = f(X,Y), \quad X = g(u,v) \text{ e } Y = h(u,v) \Rightarrow Z = f[g(u,v), h(u,v)]$$

Z es una función de u,v a través de X e Y

Función compuesta de n variables independientes

podemos considerar también una función de variables que a su vez son funciones de otras variables independientes

Sea $Z = f(X_1, X_2, X_3 \cdots X_n)$ don $X_1, X_2, \cdots X_n$ son funciones de n variables

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X_1(Y_1, Y_2 \cdots Y_n) \\ X_2 = X_2(Y_1, Y_2 \cdots Y_n) \\ \vdots \\ X_n = X_n(Y_1, Y_2 \cdots Y_n) \end{array}\right\} \longrightarrow Z = f[X_1(Y_1, Y_2 \cdots Y_n), X_2(Y_1, Y_2 \cdots Y_n) \cdots X_n(Y_1, Y_2 \cdots Y_n)]$$

* Derivada de funciones compuesta

de una variable

Dado que $Z = f(x,y)$ es diferenciable su incremento total ($X = g(t)$, $Y = h(t)$) se lo puede expresar com:

$$\Delta Z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \qquad \text{con } \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \to 0 \text{ si } \Delta x \wedge \Delta y \to 0$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dx}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{dz}{dy}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dz}{dx}\frac{\Delta x}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$Z'_t = Z'_x X'_t + Z'_y Y'_t \quad \text{derivada total}$$

de dos Variables

Dado que $z = f(x,y)$ siendo $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$ es diferenciable su incremento total es

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dx}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \qquad \text{con } \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \to 0 \text{ si } \Delta x \wedge \Delta y \to 0$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{dz}{dx}\frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{dz}{dx}\frac{\Delta y}{\Delta u} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta u} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{dz}{dx}\frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{dz}{dx}\frac{\Delta y}{\Delta u} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta u} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u$$

Analogamente

$$z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v$$

* Diferenciabilidad de funciones compuesta

Si $y = f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ es diferenciable en las x_i con $i = 1, 2, \cdots n$ como funcion de n variables y las funciones $x_i = (u,v)$ son a su vez diferenciables en u, v entonces la funcion $y = f[x_1(u,v), x_2(u,v) \cdots x_n(u,v)]$ es diferenciable en u, v

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{dy}{dx_i}\left(\frac{dx_i}{du}\Delta u + \frac{dx_i}{dv}\Delta v\right)$$

* Derivada de orden Superior de funciones compuesta

Sea $z = f(x,y)$ diferenciable de $x = g(t)$ e $y = h(t)$ llamaremos a su primer derivada

$$z'_t = z'_x x'_t + z'_y x'_t$$

Si la primer derivada es diferenciable su derivada se llama segunda derivada

$$z''_t = z''_x x''_t + z''_y y''_t$$

asi obtendremos la derivadas sucesivas aplicando la misma regla sucesivamente

* Funciones implicitas, Derivada de funciones implicitas

Se llama funcion implicita a la siguiente funcion

$$z = f(x,y) = 0$$

la cual puede definir a y como funcion de x es decir $y = f(x)$ esto no siempre es posible para calcular la derivada, partimos formula diferencial total

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy \qquad \text{como } z = 0 \qquad \frac{dz}{dx} = 0$$

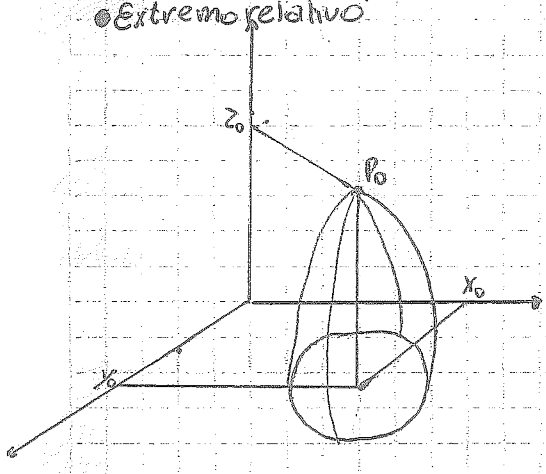
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx}\cancel{\frac{dx}{dx}} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y' = -\frac{z'_x}{z'_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx} \Big/ \frac{dz}{dy}$$

Tema 9

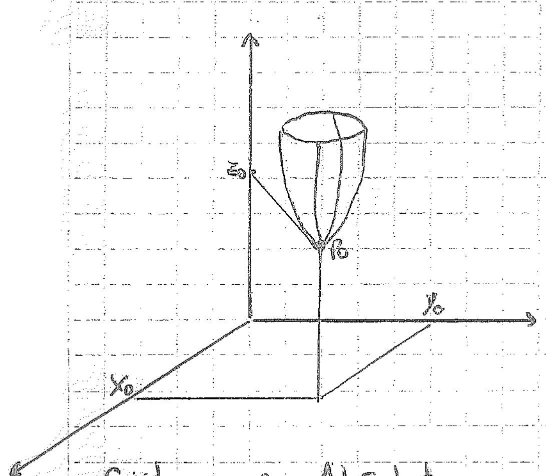
Extremos libres de funciones de dos variables independientes

• Extremo relativo



Una funcion $Z = f(x,y)$ tiene un maximo relativo en un punto $P_0(x_0, y_0)$ si $\forall\ x, y$ de un entorno circular reducido de P_0 se verifica que

$$f(x,y) < f(x_0, y_0)$$



Una funcion $Z = f(x,y)$ tiene minimo relativo en un punto $P_0(x_0, y_0)$ si $\forall\ x, y$ de un entorno circular reducido de P_0 se se verifica que

$$f(x,y) > f(x_0, y_0)$$

• Extremos Absoluto

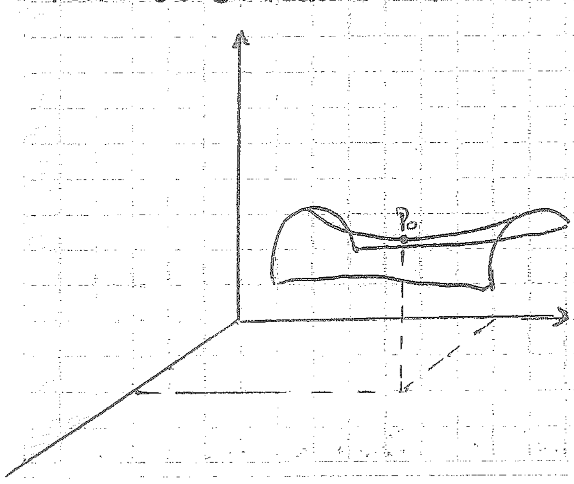
Una funcion $Z = f(x,y)$ tiene un maximo absoluto en un punto $P_0(x_0, y_0)$ si $\forall\ x, y \in D$ se verifica que

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$$

Una funcion $Z = f(x,y)$ tiene un minimo absoluto en un punto $P_0(x_0, y_0)$ si $\forall\ x, y \in D$ se verifica que

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$$

• Punto de encilladura (estacionarios)



$P_0(x_0, y_0)$ es un punto de encilladura de la funcion $f(x,y)$ si para todo entorno reducido de punto $P_0(x_0, y_0)$ existen valores de la funcion que son mayores a $f(x_0, y_0)$ y existen tambien otros que son menores que $f(x_0, y_0)$

Condicion Necesaria

Para que $z = f(x,y)$ alcance Extremo relativo de $P_0(x_0, y_0)$ debe verificarse
$z'_x = 0 \wedge z'_y = 0$, es decir los derivados parciales primeros deben anularse.

Condicion Suficiente

La condicion suficiente para que $f(x,y)$ alcance un extremo relativo en un $P_0(x_0, y_0)$ del dominio es que el Hessiano sea mayor que cero

$$H = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - z''_{yx} \, z''_{xy} \quad \boxed{H > 0}$$

si $H > 0 \wedge z''_{xx} > 0$ hay un MINIMO

si $H > 0 \wedge z''_{xx} < 0$ hay un MAXIMO

si $H < 0$ Punto de encilladura

si $H = 0$ Caso dudoso

Extremos libres de funciones de n Variables

Una funcion $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(\vec{x})$ ~~definida en~~ alcanza un Maximo relativo $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ si

$\forall \vec{x} \in$ Entorno reducido de $\vec{a}$ se verifica que

$$f(\vec{x}) < f(\vec{a})$$

Una funcion $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(\vec{x})$ alcanza un Minimo relativo en $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si

$\forall \vec{x} \in$ entorno reducido de $\vec{a}$ se verifica que

$$f(\vec{x}) > f(\vec{a})$$

Extremos ligados

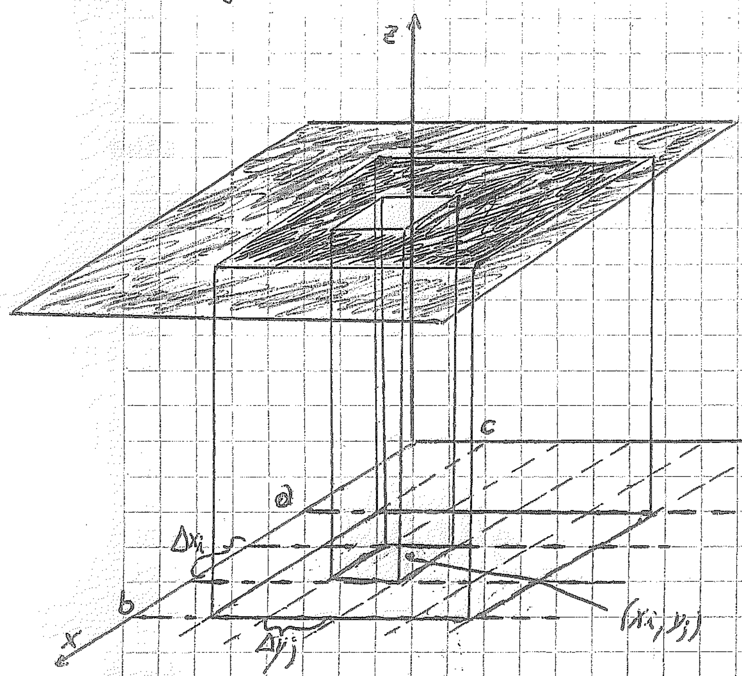
Sea $z = f(x,y)$ una funcion diferenciable de 2 variables estando ligados estos por una ecuacion diferenciable $g(x,y) = 0$

$$\begin{cases} f'_x \, g'_y - f'_y \, g'_x = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

son los puntos criticos o extremos en los cuales puede existir extremos local

Tema 10

* Integrales dobles



① Divido $[a,b]$ en n subintervalos, a la amplitud la voy a llamar Δx_i

② Divido $[c,d]$ en m subintervalos a la amplitud la voy a llamar Δx_j

③ La base del solido cuyo volumen vamos a calcular queda definida en $n \times m$ rectangulos, donde el area de cada uno de los rectangulos es $A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$

④ Voy a considerar un punto interior (x_i, y_j) a cada rectangulo y se calcula el valor que toma la funcion en cada punto $f(x_i, y_j)$

Volumen prisma $= A_{ij}\, f(x_i, y_j)$

Sea $Z = f(x,y)$ una funcion definida y acotada en la region $\mathbb{R}$ donde $a \le x \le b$ y $c \le y \le d$ buscamos el volumen del solido limitado por la superficie continua de la Ecuacion $Z = f(x,y)$ y el plano (x,y) definido por los x que varian entre a y b y los y que varian entre c y d.

⑤ El valor aproximado del volumen del solido sera la suma $m \times n$ prismas

$$\text{Volumen Aproximado del Solido} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{A_{ij}}_{\text{base}}\, \overbrace{f(x_i, y_j)}^{\text{altura}}$$

Al aumentar el numero de puntos de division el error que se va cometiendo va a ser cada vez menor y por lo tanto

$$\text{Volumen de un Solido} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \lim_{\substack{m\to\infty \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\, f(x_i, y_j)$$

$$\text{Volumen de un Solido} = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$$

Propiedades de la integral doble ($\mathbb{F}$ = region cerrado C = Constante

① Si se hace uno porcion de la region cerrada $\mathbb{F}$ en la region F_1 y F_2 es decir $F_1 \cap F_2 = 0$ y $F_1 \cup F_2 = \mathbb{F}$ y si $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{F}$

$$\iint_{\mathbb{F}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{F_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{F_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

② $$\iint_{\mathbb{F}} C\, f(x,y)\,dx\,dy = C \iint_{\mathbb{F}} f(x,y)\,dx\,dy$$

③ $$\iint_{\mathbb{F}} \left[f(x,y) + g(x,y)\right] dx\,dy = \iint_{\mathbb{F}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{\mathbb{F}} g(x,y)\,dx\,dy$$

④ Si f y g son integrables sobre $\mathbb{F}$ y $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{F}$ entonces

$$\iint_{F} f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{F} g(x,y)\,dx\,dy$$

Calculo de integrales dobles

* Calculo de area

Cuando la funcion $f(x,y) = 1$ el area del dominio de integracion numericamente coincide con el volumen del solido.

Sabemos que:

$$\text{Volumen de un Solido} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} \lim_{\substack{m \to \infty \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overbrace{\Delta x_i \, \Delta y_j}^{\text{base}} \cdot \underbrace{f(x_i, y_j)}_{\text{Altura}}$$

por lo tanto si $f(x,y) = 1$ $\forall$ x e y $\in$ el Recinto de integracion el Volumen de un solido sera igual a la base. Tambien sabemos que la base de un solido esta definida por el area de los $n \times m$ rectangulos.

Integrales iteradas

Llamamos integrales iterados a las siguientes expresiones

① $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy \rightarrow$ integramos respecto de x, considerando y constante

② $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \rightarrow$ integramos respecto de y, considerando x constante

Si existe la integral doble y las integrales iterados se dice:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = ① = ②$$

<u>Integral triple</u>

Sea una funcion $f(X,Y,Z)$ de 3 variables definidas y acotadas en un conjunto $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ osea en $V=\{(X,Y,Z)/\ a\leq x\leq b \wedge c\leq y\leq d \wedge e\leq z\leq h\}$ si la integral triple inferior coincide con la integral triple superior, la funcion es integrable y resulta

$$\underline{\iiint_V} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \overline{\iiint_V} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

El calculo de una integral triple puede efectuarse mediante tres integrales simples sucesivas

$$\iiint_V f(X,Y,Z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\,dz$$

81

Tema II

Sucesiones y series numericas

Se llama sucesion a la disposicion ordenada de los infinitos numeros de un conjunto $a_1, a_2, a_3 \dots a_n, a_{n+1}$ siendo a_i un lugar cualquiera

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \end{array}\right\} \text{Suma parciales}$$

Se llama serie numerica al limite de la suma parcial cuando el numero de terminos tiende a ∞

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\text{Si el } \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} K \in \mathbb{R} \longrightarrow \text{Serie es convergente} \\ \infty \Rightarrow \text{serie es divergente} \\ \nexists \Rightarrow \text{serie es oscilante} \end{cases}$$

Criterios de convergencia

① Criterio de D'Alambert: dado una serie de terminos positivos

$u_1 + u_2 + \dots u_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = L \quad \text{si } L = \begin{cases} L < 1 & \text{serie convergente} \\ L > 1 & \text{serie divergente} \\ L = 1 & \text{serie oscilante} \end{cases}$$

② Criterio de Cauchy: sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ una serie de terminos positivos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[K]{U_n} = L \quad \text{si se verifica que} \begin{cases} L < 1 \Rightarrow \text{Serie Convergente} \\ L > 1 \Rightarrow \text{serie divergente} \\ L = 1 \ \text{No tiene} \end{cases}$$

③ Criterios de Rabbe: sea $\sum_{n=1}^{a} u_n$ una serie de terminos positivo.

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right] = L \quad \text{si } L = \begin{cases} L < 1 & \text{serie divergente} \\ L > 1 & \text{serie convergente} \\ L = 1 & \text{no clasifica} \end{cases}$$

Serie de terminos positivos es una serie de sumandos S_n donde todos sus terminos son positivos

Propiedades de las Series

* La suma de una serie convergente es única
* Si ΣS_n converge a S, entonces $\Sigma K S_n$, siendo K una constante, converge a KS si ΣS_n diverge, también diverge $\Sigma K S_n$ si $K \neq 0$
* Si ΣS_n converge entonces $\lim_{n \to +\infty} S_n = 0$
* Si $\lim_{n \to +\infty} \neq 0$, entonces diverge

Series de potencias

Una serie infinita de la forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i X^i = C_0 + C_1 X^1 + C_2 X^2 + \dots + C_n X^n$$

donde la C son constantes se llama una serie de potencias en X para cualquier valor de X

Serie de términos alternados

Cuando en una serie los términos son positivos y negativos alternadamente

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \dots$$

NOTA: 83

Tema 12

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuacion que vincula un numero finito de variables con las derivadas de una de ellas respecto de las otras

Ejemplo $y' - 2xy = 2y$ $\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$ $y'' + 3x - 2xy' = 3y$

Orden y grado de una ecuacion diferencial

* El ORDEN de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que se encuentra en la ecuación diferencial.

* El Grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que esta elevada la derivada de mayor orden.

$$y'' + y'^2 = 2xy \quad \begin{cases} 2^\circ \text{ orden} \\ 1^\circ \text{ grado} \end{cases}$$

$$2xy'^2 + 2y''^3 = 2y \quad \begin{cases} 2^\circ \text{ orden} \\ 3^\circ \text{ grado} \end{cases}$$

Soluciones de las ecuaciones diferenciales

En una ecuacion diferencial la solucion no es un valor determinado, sino una funcion $y = F(x)$, donde $F(x) = f(x) + C$ de manera que $F(x)$ finalmente resulta una familia o haz de curvas, habra una $F(x)$ diferente para cada valor de la constante C

Solucion general

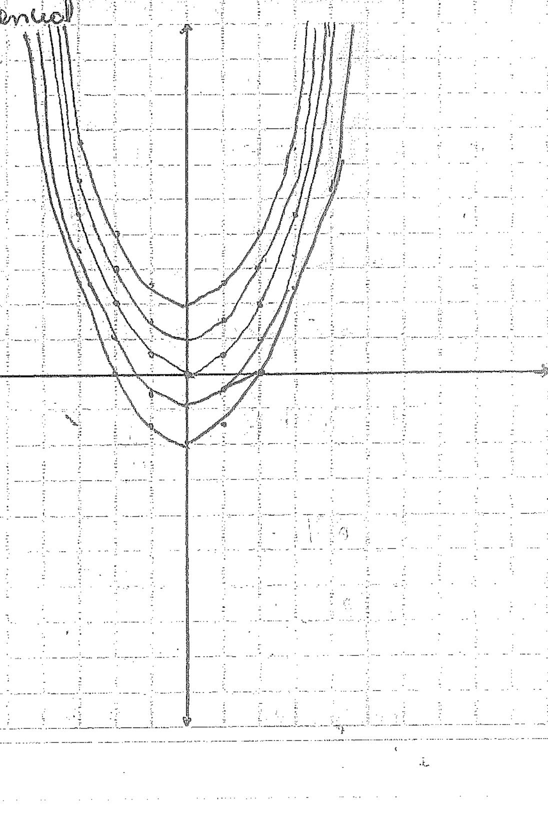
Dada una ecuacion diferencial cualquiera, la solucion general son todas las funciones que satisfacen la ecuacion diferencial

Ejemplo $y' = x \rightarrow \frac{dy}{dx} = x$

$$dy = x\,dx$$

$$\int dy = \int x\,dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$



Solucion particular

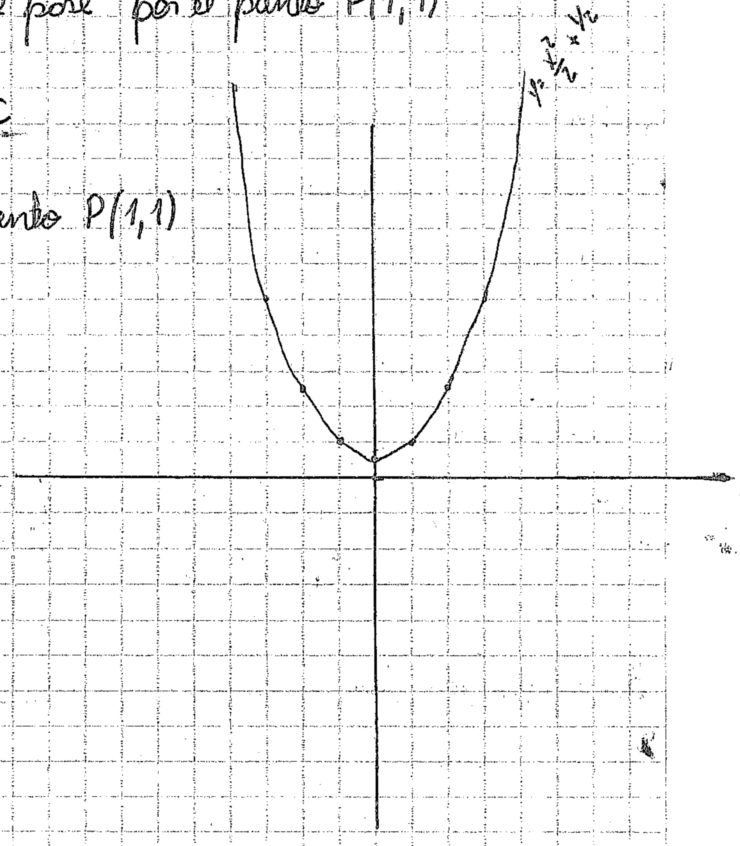
Solución particular es la funcion general mas determinada condicion.

Ejemplo

buscamos una solución particular que pase por el punto P(1,1)

Si la solucion general es:

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$



se pasa por el punto P(1,1)

$$1 = \frac{1^2}{2} + C$$

$$1 = \frac{1}{2} + C$$

$$1 - \frac{1}{2} = C$$

$$\frac{1}{2} = C$$

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Son aquellas donde los terminos de la ecuacion diferencial pueden disponerse de manera que tome la forma

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

donde f(x) es una funcion unicamente de X y g(y) es una funcion únicamente de y.

Suelen aparecer expresados de la siguiente manera:

$$f(x) + g(y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad M + N\,y' = 0$$

donde M es una funcion de X e y y N tambien es una función de X e y

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$M(x,y) = M_1(x) \cdot M_2(y)$$
$$N(x,y) = N_1(x) \cdot N_2(y)$$
$$\Longrightarrow M_1(x) \cdot M_2(y) + N_1(x) \cdot N_2(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Esto se resuelve por un procedimiento al cual llamamos separacion de variables.

NOTA:

$$M_1(x) \cdot M_2(y) + N_1(x)\, N_2(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

esto dividimos por $M_2(y) \cdot N_1(x)$

$$\frac{M_1(x) \cdot \cancel{M_2(y)}}{N_1(x) \cdot \cancel{M_2(y)}} + \frac{\cancel{N_1(x)}\, N_2(y)}{\cancel{N_1(x)}\, M_2(y)} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} + \frac{N_2(y)}{M_2(y)} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$f(x) = \frac{M_1(x)}{N_1(x)}$$

$$g(y) = \frac{N(y)}{M(y)}$$

$$f(x) + g(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$g(y) \frac{dy}{dx} = -f(x)$$

$$g(y)\, dy = -f(x)\, dx$$

$$\int g(y)\, dy = \int -f(x)\, dx$$

$$G(y) + C_1 = -F(x) + C_2$$

$$G(y) = -F(x) + C_2 \mp C_1$$

$$G(y) = -F(x) + C$$

Asi en adelante al resolver ecuaciones diferenciales, consideraremos solamente la constante de integracion en X

Ejemplo

$$x^2 + y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y^2 \frac{dy}{dx} = -x^2 \longrightarrow y^2\, dy = -x^2 dx$$

$$\int y^2\, dy = \int -x^2\, dx \longrightarrow \frac{y^3}{3} = -\frac{x^3}{3} + C$$

$$y^3 = -\frac{3x^3}{3} + 3C$$

$$y^3 = -x^3 + C$$

$$y = \sqrt{-x^3 + C}$$

$\log_e = \ln$

Ecuacion diferencia Homogenea

Una funcion $Z = f(x,y)$ es homogénea de grado n si y solo si ~~~~ al multiplicar ambas variables por t, la funcion queda multiplicada por t^n

$Z = f(x,y)$ es homogenea $\Leftrightarrow$ $f(tx,ty) = t^n f(x,y) = t^n Z$

Los casos mas simples son los polinomios homogeneos

$f(x,y,z) = x^3 + x^2y + y^2z$ es homogéneo de grado 3; Porque

$t^3 f(x,y,z) = f(tx,ty,tz)$

$t^3(x^3+x^2y+y^2z) = (tx)^3 + (tx)^2 ty + (ty)^2 tz$

$t^3(x^3+x^2y+y^2z) = t^3x^3 + t^2x^2ty + t^2y^2tz$

$t^3(x^3+x^2y+y^2z) = t^3x^3 + t^3x^2y + t^3y^2z$

$t^3(x^3+x^2y+y^2z) = t^3(x^3+x^2y+y^2z)$

(*) Toda funcion del cociente $\frac{y}{x}$ es homogena de grado cero en x e y

$f\left[\frac{y}{x}\right] = f\left[\frac{ty}{tx}\right] = t^0 \cdot f\left[\frac{y}{x}\right]$

Definicion

Una ecuación diferencial de primer orden y de primer grado se llama homogenea en x e y si se puede llevar a la forma $\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{y}{x}\right]$ con $f(x,y)$ en el segundo miembro

Es decir que son aquellas funciones homogeneas de grado cero.

Demostracion

$$\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{y}{x}\right] \quad (1)$$

hacemos $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux$ — derivo ambos terminos

u es una funcion de x e y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \quad (2)$$

igualo (1) y (2)

$$\frac{du}{dx}x + u = f\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$\frac{du}{dx}x + u = f[u]$$

$$\frac{du}{dx}x = f[u] - u$$ (ecuacion diferencial de variables separables)

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$\log_a b = c$
$b = a^c$

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

$H(u) = \ln(x) + C$ hacemos $C = -\ln C$

$H(u) = \ln(x) - \ln C$

$H(u) = \ln\left(\frac{x}{C}\right)$

$\frac{x}{C} = e^{H(u)}$

$x = e^{H(u)} C \Rightarrow$ $x = e^{H\left(\frac{y}{x}\right)} C$

Esta expresion que "no nos dice mucho" porque en definitiva $H\left(\frac{y}{x}\right)$ va a depender fundamentalmente de cada f sin embargo es importante porque nos esta mostrando que si se puede calcular $\frac{du}{f(u)-u}$

Ecuaciones diferenciales lineales

Son ecuaciones diferenciales de la forma $y' + P(x)y = Q(x)$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas.

Si $Q(x) = 0$ para cualquier x se obtiene

$$y' + P(x)y = 0$$

Que es una ecuacion diferencial de variables separables. Esta ecuacion se llama ecuacion diferencial incompleta, y se la resuelve separando variables

resolvemos $y' + P(x)y = Q(x)$ $\wedge$ $y = u\,v$ $y' = u'v + uv'$

reemplazamos $u'v + uv' + P(x)\,uv = Q(x)$

Sacamos factor comun u $u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x)$ decimos que $v' + P(x)v = 0$

$u'v = Q(x)$ ya que $[v' + P(x)v] = 0$

$u' e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

$\frac{du}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

$du = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}} dx$

$\int du = \int Q(x)\, e^{+\int P(x)dx} dx$

$u = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + C$

$y = u.v$

$y = \left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + C\right] . e^{-\int P(x)dx}$

$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$

$\frac{dv}{dx} = -P(x)v$

$\frac{dv}{v} = -P(x)dx$

$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx$

$\ln v = -\int P(x)dx$

$v = e^{-\int P(x)dx}$

Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuacion diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ es Exacta si Existe una funcion $u(x,y)$ talque

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

entonces $du = 0$ por lo que $u(x,y) = C$

la solucion general se obtiene $\int du(x,y) = C \Rightarrow u(x,y) = C$

Condición de simetria

Si $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

$\frac{\partial u}{\partial x}\cancel{dx} = P(x,y)\cancel{dx}$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial y}\cancel{dy} = Q(x,y)\cancel{dy}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$ $\qquad$ Calculando las derivadas cruzadas $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = P'_y(x,y)$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = Q'_x(x,y)$

condicion de simetria

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$$

para que una ecuacion ~~diff~~ sea exacta debe cumplir con esta condicion

NOTA: