CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL-LSI

TEMA 6

Mgtr. César Garau

Tema 6: Funciones de varias variables.

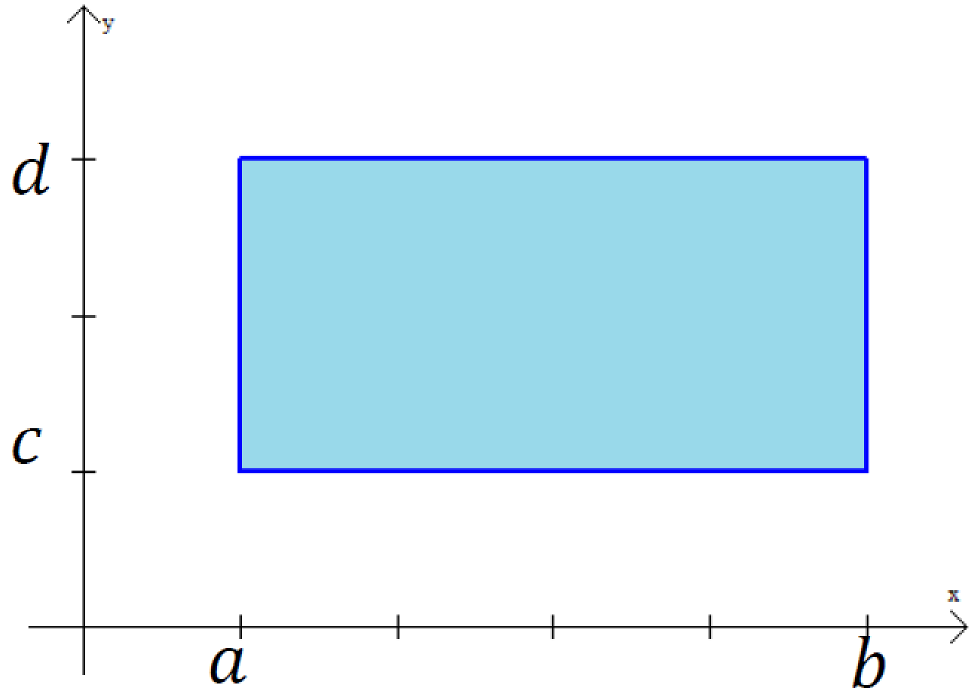
Funciones de dos y de n variables independientes. Curvas y superficie de nivel. Límites de funciones de dos variables independientes. Límite doble y límites iterados. Relación entre los límites. Continuidad de funciones de dos variables independientes.

Intervalos y entornos

Intervalo: $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \, , c \leq y \leq d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

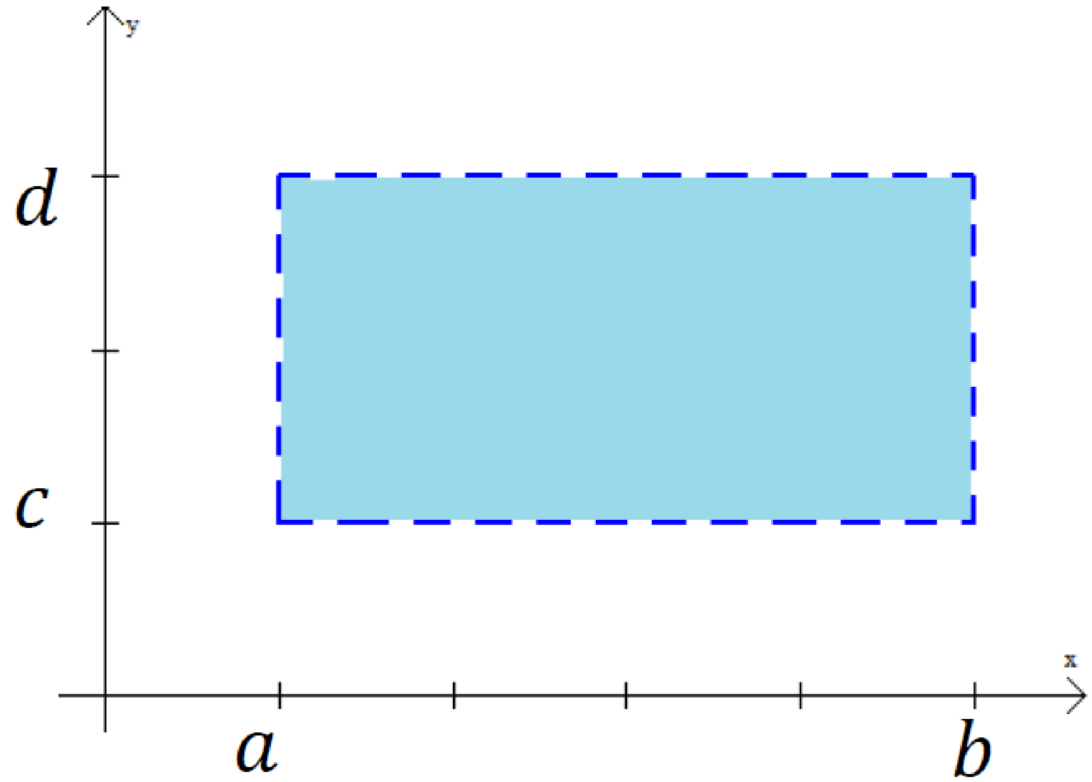
Intervalo Cerrado

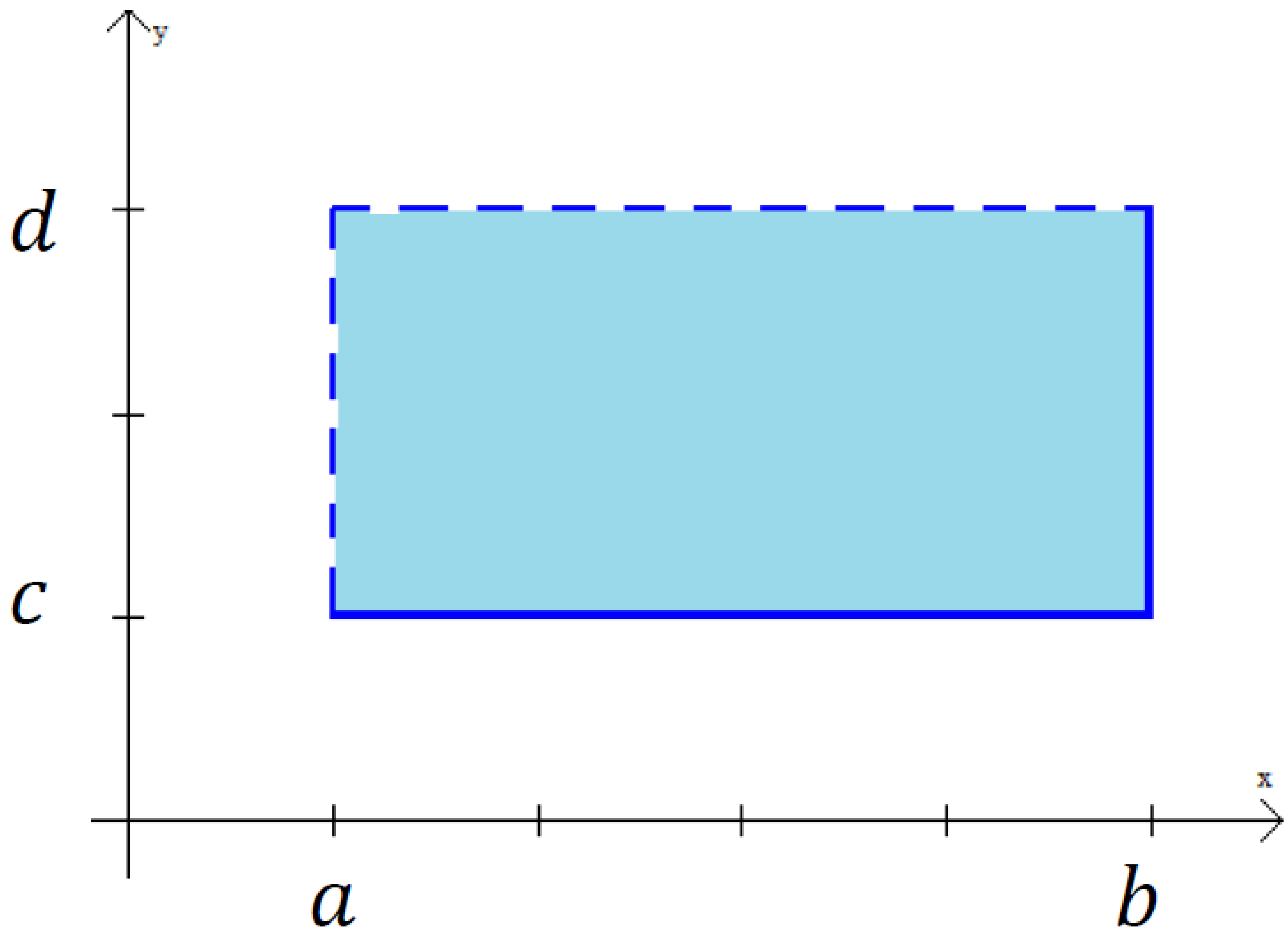
I$= [a, b] \times [c, d]$



Intervalo Abierto

I= $(a, b) \times (c, d)$





y
d
c
x
a
b

Funciones de dos y de n variables independientes

Sea $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$, con $D \subset \mathbb{R}^2$.

Si a cada par ordenado $(x, y) \in D$ le corresponde un único numero real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una función de $x e\ y$.

En forma simbólica una función de dos variables se representa:

$$f: D \to \mathbb{R} / f(x, y) = z$$

Llamaremos variables independientes a $x\ e\ y$, y variable dependiente a z .

El dominio de la función f es el conjunto:
$Dm\ f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, con $D \subset Dm\ f$.

El conjunto imagen de la función f es el conjunto:

$$Im\ f = \{z = f(x, y): (x, y) \in Dm\ f\} \subset \mathbb{R}$$

Funciones de dos y de n variables independientes

También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables.

Una función de n variables es una relación que asigna un número

$z = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ a una n-upla de $(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ de números reales.

Denotamos con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las n-upla.

Por ejemplo, si una compañía utiliza n ingredientes distintos al elaborar un cable de fibra óptica, c_i es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente, y si se usan x_i unidades del i-ésimo ingrediente, entonces el costo total C de los ingredientes es una función de n variables $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$

$$C = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n$$

La función f es una función de valores reales cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Algunas veces se usa una notación vectorial para escribir dichas funciones de una manera más compacta: si $x = \langle x_1, x_2, x_3 \dots x_n \rangle$con frecuencia se escribe $f(x)$ en lugar de $f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$.

Mediante esta notación se vuelve a escribir la función definida en el ejemplo de los ingredientes como $f(x) = cx$, donde $c = \langle c_1, c_2, c_3 \dots c_n \rangle$ y cx denota el producto punto de los vectores c y x en V_n.

En vista de la correspondencia uno a uno entre los puntos $(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y sus vectores de posición $x = \langle x_1, x_2, x_3 \dots x_n \rangle$ en V_n, hay tres formas de ver una función f definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como una función de n variables reales $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$
2. Como una función de una sola variable en un punto $(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$
3. Como una función de una variable vectorial única $x = \langle x_1, x_2, x_3 \dots x_n \rangle$

Los tres puntos de vista son útiles dado un contexto en particular.

Gráfica de una función de dos variables

Como en el caso de las funciones de una sola variable, se puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando su gráfica. La **gráfica** de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f. Esta gráfica puede interpretarse geométricamente como una *superficie en el espacio*

En la figura 13.2 hay que observar que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D, el dominio de f. A cada punto (x, y) en D corresponde un punto (x, y, z) de la superficie y, viceversa, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) en D.

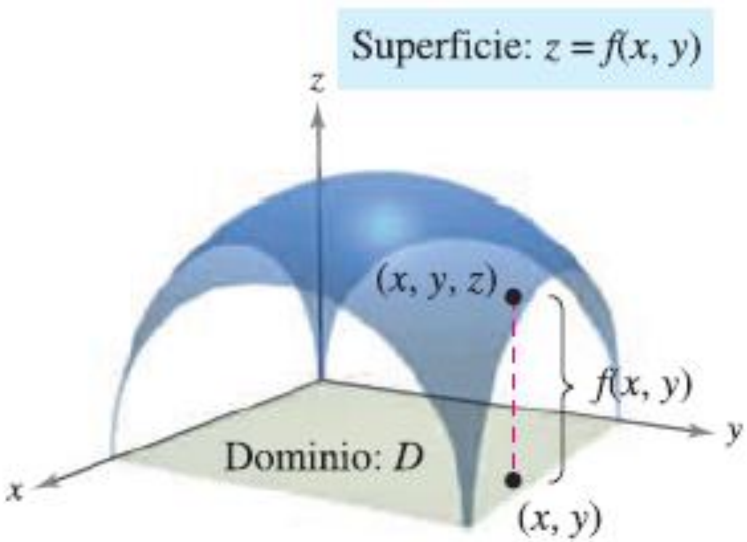


Figura 13.2

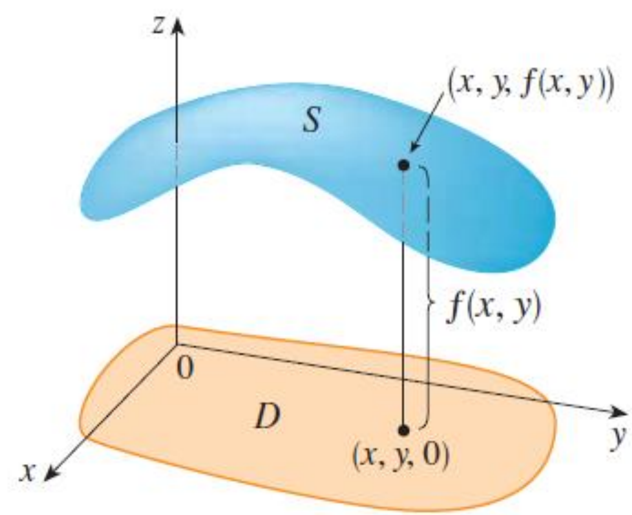
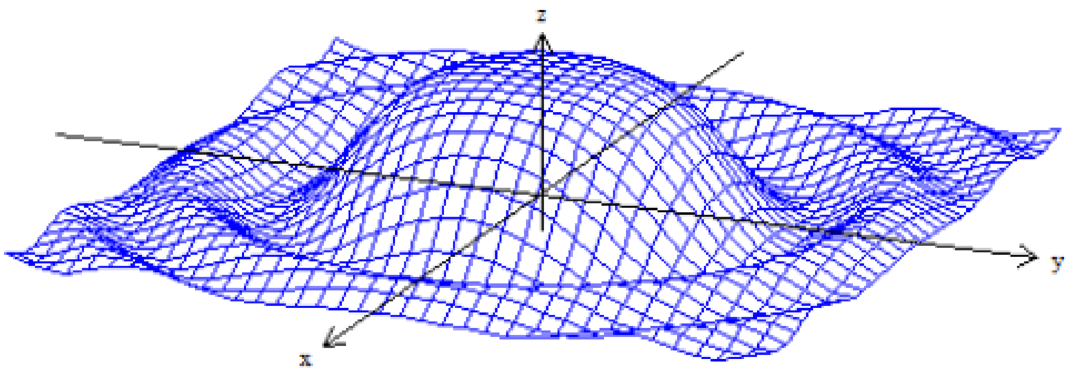


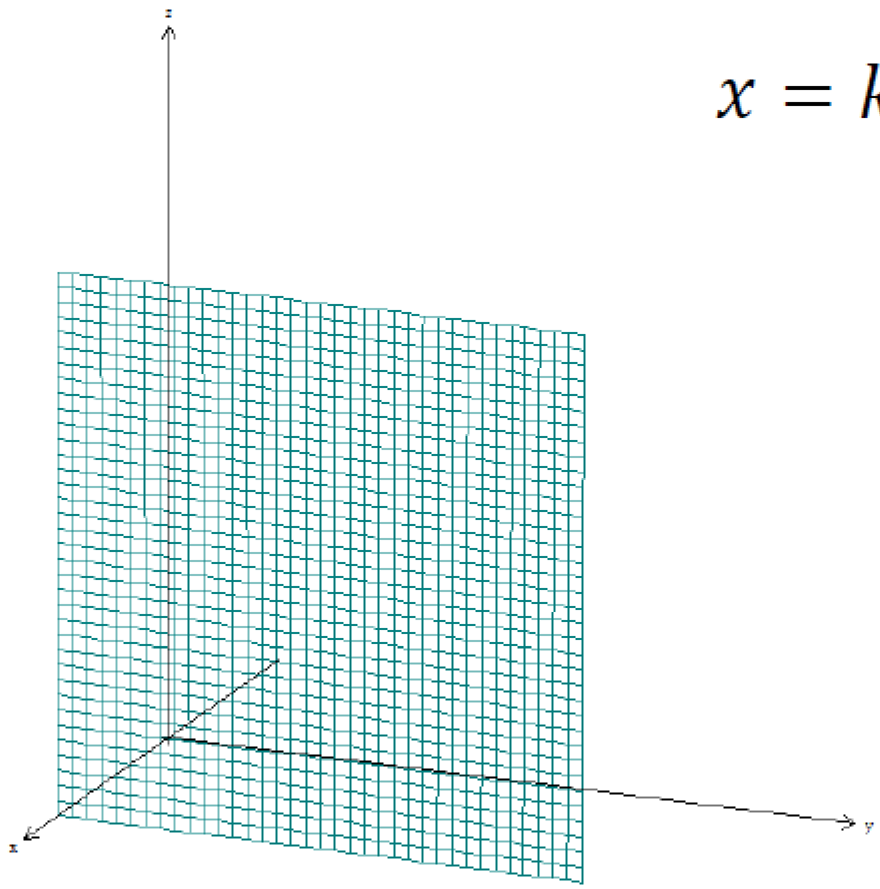
FIGURA 5

Gráficas: planos y superficies

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$$



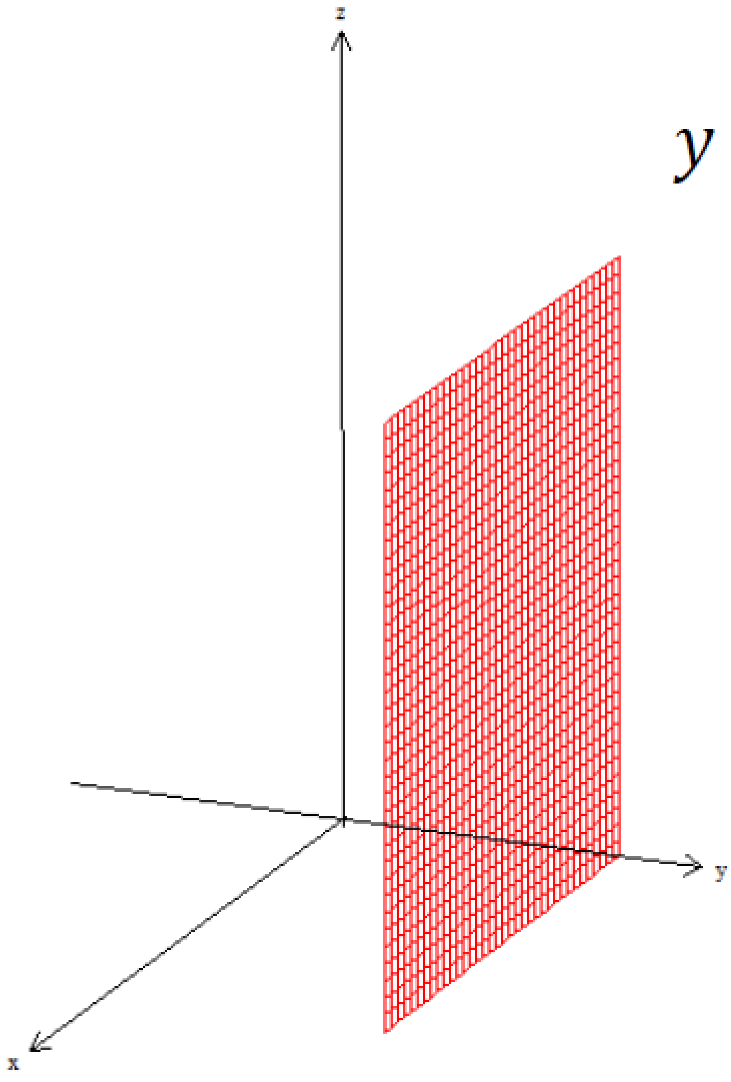
Gráficas: planos y superficies



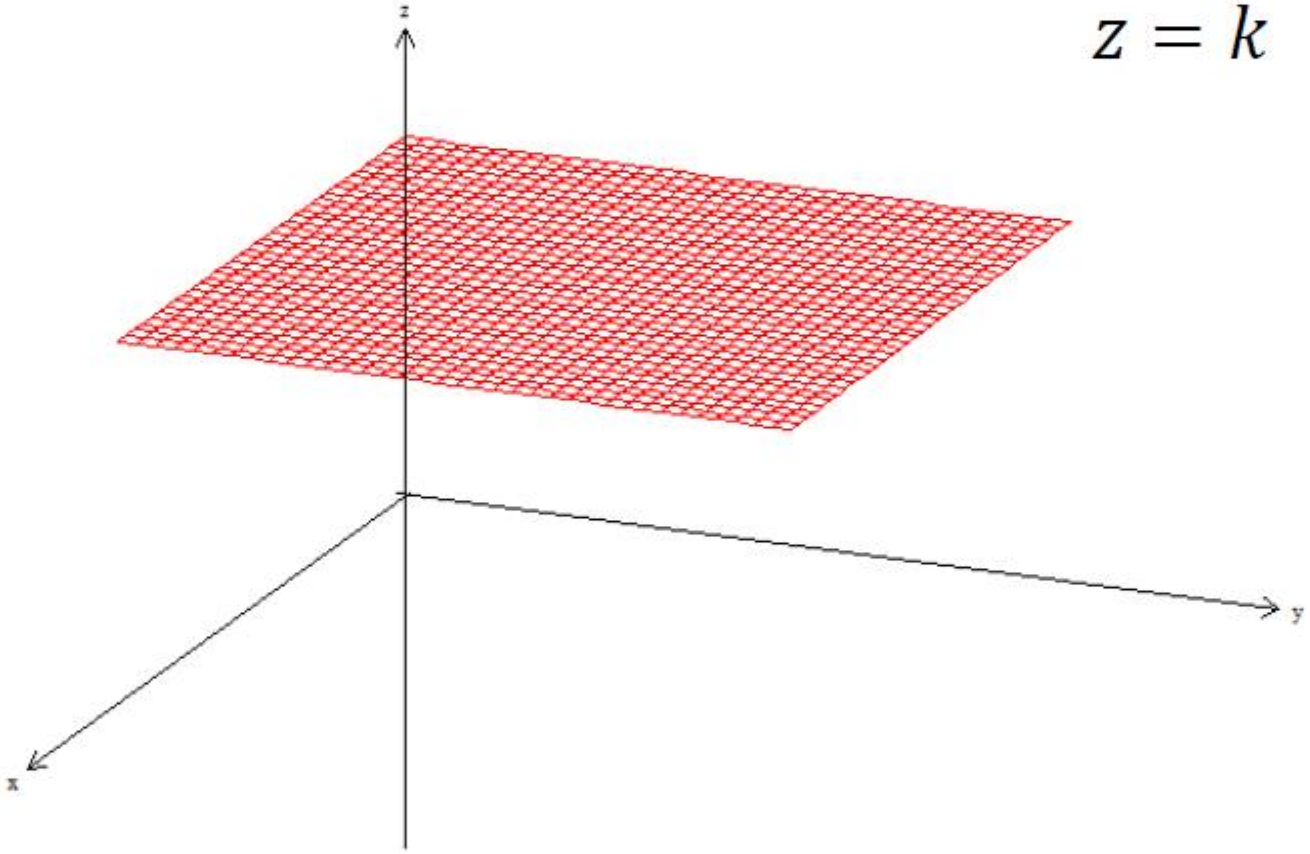
$$x = k$$

Gráficas: planos y superficies

$$y = k$$



Gráficas: planos y superficies



$$z = k$$

EJEMPLO 4 Determine el dominio y el rango de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN El dominio de g es

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que es el disco con centro (0, 0) y radio 3 (véase figura 4). El rango de g es

$$\left\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\right\}$$

Puesto que z es una raíz cuadrada positiva, $z \geqslant 0$. Asimismo, como $9 - x^2 - y^2 \leqslant 9$, tenemos

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

y el rango es

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$

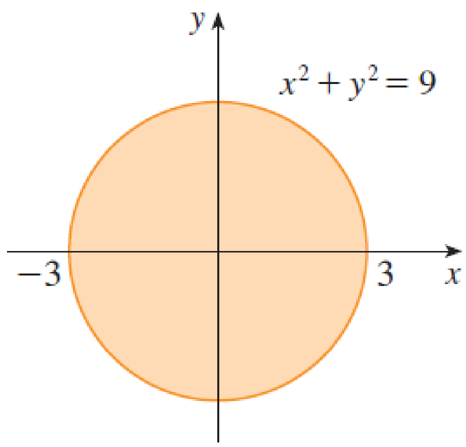


FIGURA 4
Dominio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Ejemplo 1.- Sea $f(x,y)=\sqrt{y+4x^2-4}$. **a)** Calcular el dominio de f. **b)** Represéntelo gráficamente. **c)** Calcule $f(2,0)$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2},2)$ y $f(1,-1)$.

Solución:

a) La función está bien definida y es un número real cuando el radicando es mayor o igual a cero, esto es:

$$y+4x^2-4\geq 0$$

Así que el dominio es el conjunto de todas las parejas (x,y) tales que $y+4x^2\geq 4$.

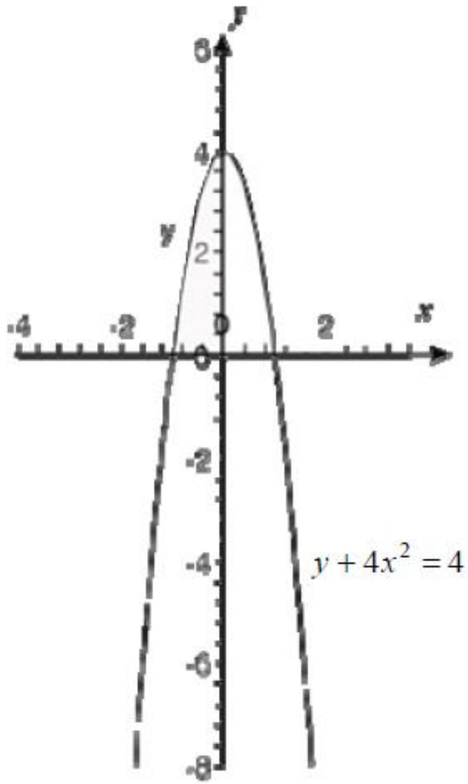
Más formalmente escribimos:

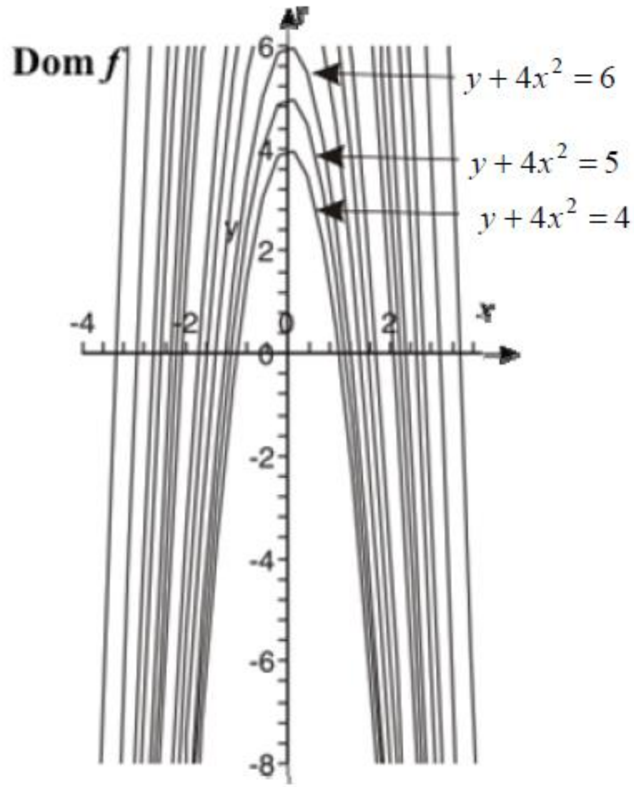
$$\text{Dom } f=\{(x,y)/\,y+4x^2\geq 4\}$$

b) Este conjunto se puede representar en el plano. Es una región del plano limitada por la curva $y+4x^2-4=0$. Primero se traza la curva $y+4x^2-4=0$. Reescribiéndola como $y=4-4x^2$, la identificamos como una parábola abriendo hacia abajo y con vértice en (0,4). Para determinar la región completamente podemos proceder de dos maneras.

Es claro que nuestra región es el conjunto de puntos (x,y) que satisface la desigualdad $y+4x^2 \geq 4$. Este conjunto lo podemos ver como la unión de todas las curvas $y+4x^2 = d$ con $d \geq 4$.

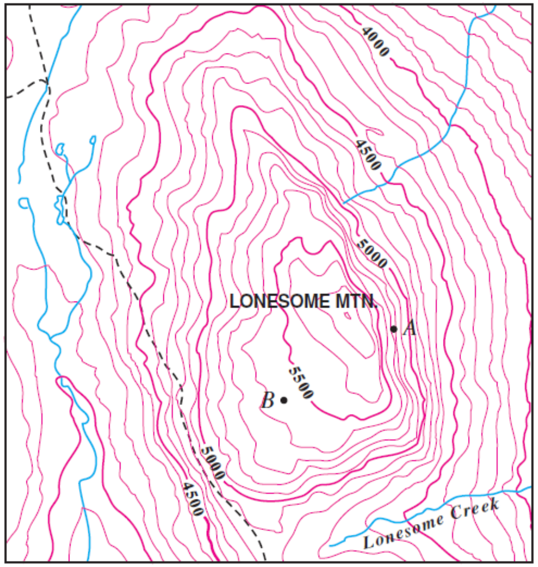
Entre ellas están $y+4x^2=4$; $y+4x^2=5$, $y+4x^2=6$, $y+4x^2=7$ y todas las intermedias y que están por encima de éstas. Haciendo el gráfico de todas estas curvas podemos visualizar el dominio de la función, vea la figura a la derecha.





Curvas y superficie de nivel

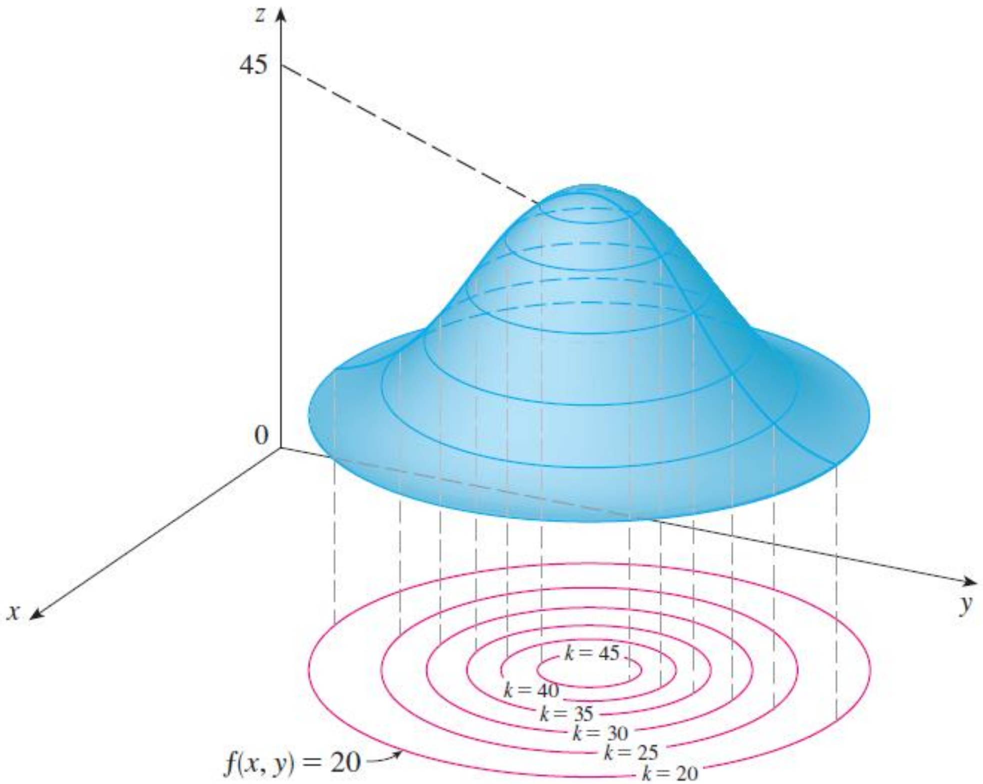
Un método prestado de los cartógrafos para poder representar una función de dos variables, es un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de elevación igual se unen para formar líneas de contorno o curvas de nivel..



Definición: Las curvas de nivel de una función f de dos variables son las curvas de ecuaciones $f(x, y) = k$, donde k es una constante.

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k. En otras palabras, señala dónde tiene una altura k la gráfica de f.

Podemos ver en la figura la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x,y) = k$ son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano $x.y$. Entonces, si dibujamos las curvas de nivel de una función y las representamos como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces podemos formar mentalmente una imagen de la gráfica. La superficie tiene pendiente abrupta donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí. Es algo más plana donde las curvas de separan.



EJEMPLO 3 Dibujo de un mapa de contorno

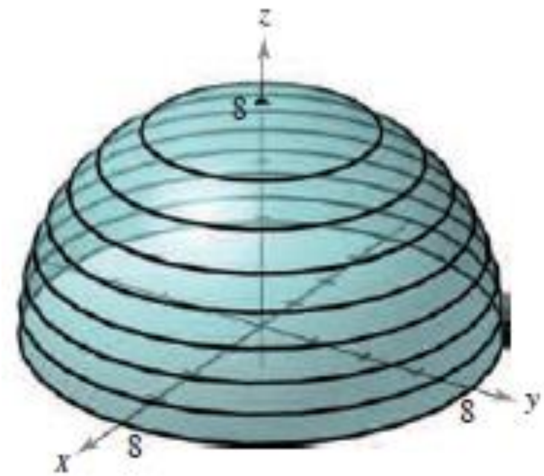
El hemisferio dado por $f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$ se muestra en la figura 13.9. Dibujar un mapa de contorno de esta superficie utilizando curvas de nivel que correspondan a $c = 0, 1, 2, \ldots, 8$.

Superficie:
$f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$

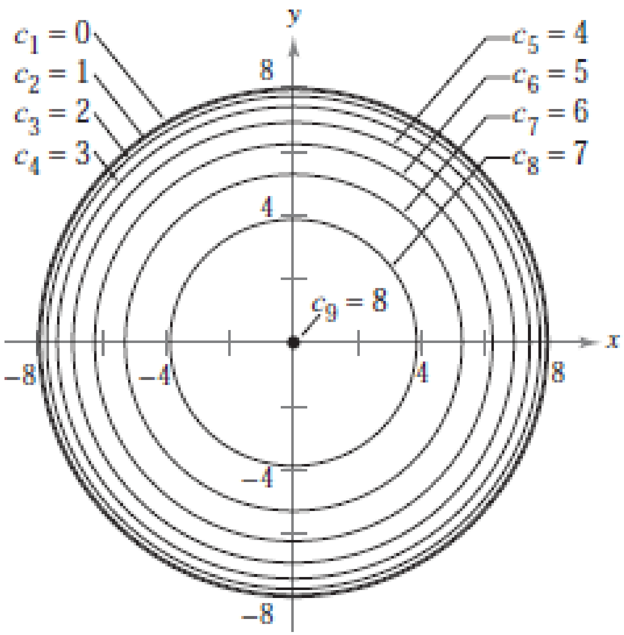
Solución Para cada c, la ecuación dada por $f(x, y) = c$ es un círculo (o un punto) en el plano xy. Por ejemplo, para $c_1 = 0$, la curva de nivel es

$$x^2 + y^2 = 64 \qquad \text{Círculo de radio 8.}$$

la cual es un círculo de radio 8. La figura 13.10 muestra las nueve curvas de nivel del hemisferio.



Hemisferio
Figura 13.9

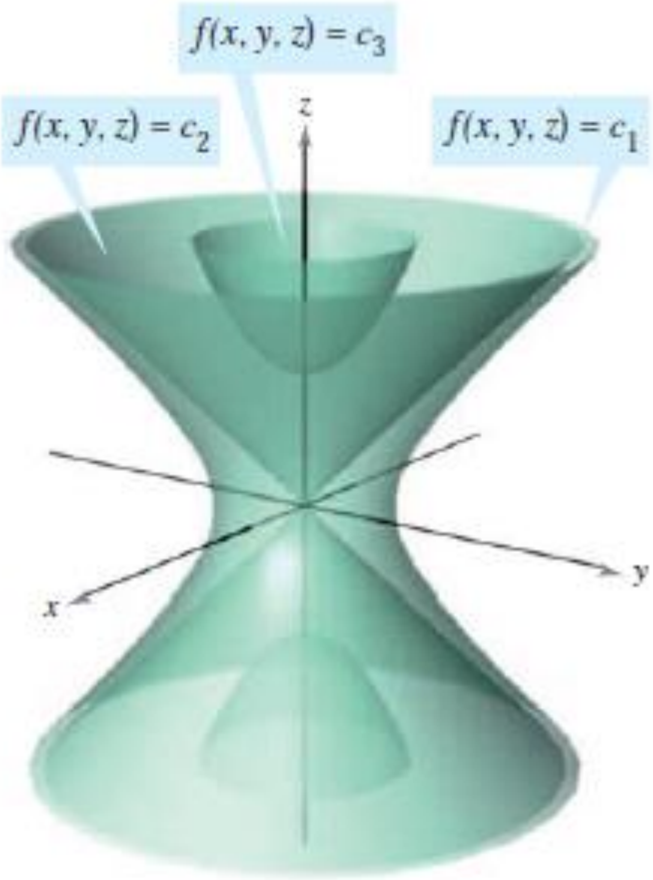


Mapa de contorno
Figura 13.10

Superficie de nivel

El concepto de curva de nivel puede extender una dimensión para definir una superficie de nivel. Si f es una función de tres variables y c es una constante, la gráfica de la ecuación $f(x, y, z) = c$ es una superficie de nivel de la función f.

Ejemplo:



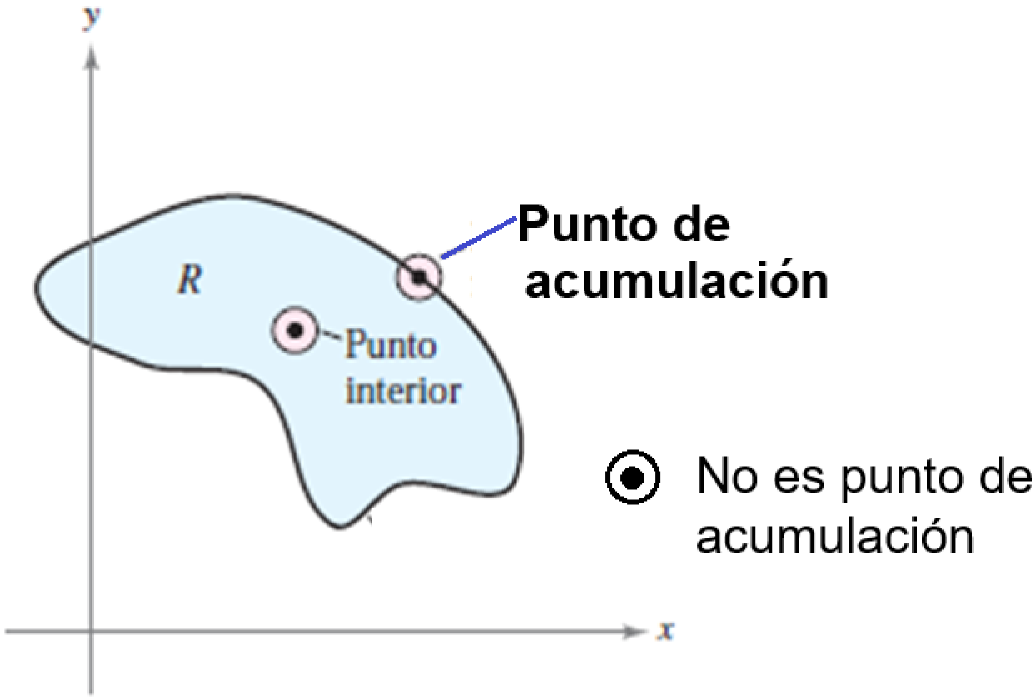
Superficies de nivel de f

Límites de funciones de dos variables independientes.

Punto de acumulación:

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ y $(x, y) \in A$.

Se dice que el punto (x, y) es un punto de acumulación de A si para cualquier entorno reducido de (x, y) existe un punto que pertenece a A.



Limite de funciones

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = z$, una función de dos variables

Limite doble

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ y sea (x_0, y_0) un punto de acumulación de A.
Se dice que f tiene limite L en el punto (x_0, y_0) si y solo si

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} / \mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta} \wedge \mathbf{0} < |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}| < \boldsymbol{\delta} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{L} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} / \mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\delta} \wedge \mathbf{0} < |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}| < \boldsymbol{\delta} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Propiedades de los limites

1) Si una función tiene limite, es único.

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ Y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y).\,g(x,y)] = L_1.\,L_2$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = [L_1]^n$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{L_1}{L_2}, \qquad L_2 \neq 0$

Ejemplos:

6. Verificar, utilizando las propiedades de los límites.

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^4 + 2xy^2 - 1\right) = 8$

b) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{2xy}{3x+y} = \frac{4}{3}$

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^4 + 2xy^2 - 1\right) = 8$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^4 + 2xy^2 - 1) = 1^4 + 2.1.2^2 - 1 = 1 + 8 - 1 = 8$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^4 + 2xy^2 - 1) = 8$$

b) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{2xy}{3x+y} = \frac{4}{3}$

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \left(\frac{2xy}{3x+y}\right) = \frac{2.2.3}{3.2+3} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(2,3)} \left(\frac{2xy}{3x+y}\right) = \frac{4}{3}$$

Limites iterados

Dada una función de dos variables, es posible determinar sus limites iterados, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\left[\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right]}_{g(x)}$$

$$\lim_{y \to y_0} \underbrace{\left[\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right]}_{h(y)}$$

Ejemplos

Dada la función $z = f(x, y) = (x \,.\, y) / (x + y)$ hallar los tres limites en el punto P de coordenadas (1,2)

Limite doble

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \frac{x.y}{x+y} = \frac{1.2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Limites iterados

$$\lim_{y \to 2} \lim_{x \to 1} \frac{x.y}{x+y} = \lim_{y \to 2} \frac{1.y}{1+y} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 1} \lim_{y \to 2} \frac{x.y}{x+y} = \lim_{x \to 1} \frac{x.2}{x+2} = \frac{2}{3}$$

En este ejemplo los tres limites son iguales.

z = f (x, y) = (x + y) / (x-y)   en el punto P (0,0)

Limite doble

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = \frac{0+0}{0-0} = \frac{0}{0} \quad \nexists$$

(El limite doble no existe)

Limites iterados

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y\to 0} \frac{0+y}{0-y} = \lim_{y\to 0}\left[\frac{y}{-y}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x}\right] = 1$$

En este ejemplo vemos que no existe el limite doble y existen los iterados y son diferentes.

RELACION ENTRE LOS LIMITES DOBLE E ITERADOS

Veremos a continuación el teorema que relaciona la existencia del límite doble con los iterados.

Teorema

Sea $f(x,y)$ una función definida sobre un conjunto A. que contiene los puntos de ciento entorno rectangular i $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta,)\text{x}(y_0 - \delta, y_0 + \delta,)$del punto (x_0, y_0) excepto tal vez en los puntos de las rectad $x = x_0$ e $y = y_0$

Si existe el limite de la función f en el punto (x_0, y_0) y para cualquier $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta,)$ existe el limite

$$\underset{x \to x_0}{lim} f(x,y) = h(y)$$

Entonces el limite iterado $\lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right]$ existe y

$$\lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right] = \underset{(x,y) \to (x_0,y_0)}{lim} f(x,y)$$

Demostración

Debo probar que: $\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to y_0}[h(y)] = \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lim} f(x,y) = L$

Sea $\varepsilon > 0$

Por hipótesis $\exists \underset{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\to(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})}{lim} f(x,y) = L$ y $\exists \underset{x\to x_0}{lim} f(x,y) = h(y),\ \forall y \,/\, 0 < |y - y_0| < \delta$

Por lo que debe verificar la definición de limite, es decir $|f(x,y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \,/$
$0 < |x - x_0| < \delta$

Por hipótesis $0 < |y - y_0| < \delta \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$|h(y) - L| = |h(y) - f(x,y) + f(x,y) - L| \leq |h(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - L| =$$

$$= |f(x,y) - h(y)| + |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{y\to y_0}[h(y)] = L$$

Observaciones:

Si en un punto existe el limite doble y alguno de los limites iterados, ambos deben coincidir

Si los limites sucesivos/iterados existen y no son iguales, no existe el limite doble.

Si los limites sucesivos/iterados existen y son iguales, esto no asegura la existencia del limite doble.

a) $f(x,y) = \dfrac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2} \quad en \quad (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3.x^2+2.y^2}{x^2+y^2} = \frac{3.0^2+2.0^2}{0^2+0^2} \to \text{Indeterminado}$$

Cálculo de limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+2.0^2}{x^2+0^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}}\right) = \lim_{x\to 0} 3 = 3$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{3.0^2+2y^2}{0^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2y^{\cancel{2}}}{y^{\cancel{2}}}\right) = \lim_{y\to 0} 2 = 2$$

Como: $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right)$

$$\therefore \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right)$$

Determinar el limite de la función en el punto (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Para ello comprobamos si coinciden los límites iterados. Ahora bien:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0.$$

Como los límites iterados no coinciden, podemos afirmar que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$,

EJEMPLO 2 Cálculo de un límite

Calcular $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$.

Solución Usando las propiedades de los límites de productos y de sumas, se obtiene

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} 5x^2y = 5(1^2)(2)$$
$$= 10$$

y

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2 + y^2) = (1^2 + 2^2)$$
$$= 5.$$

Como el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (y el denominador no es 0), se tiene

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{10}{5}$$
$$= 2.$$

Continuidad de funciones de dos variables independientes.

La funcion $z = f(x,y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) de un entorno abierto D, si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = (x_0, y_0)$$

Note que la definición requiere implícitamente tres cosas.
Para que la función f sea continua en (x_0, y_0), se han de verificar las tres condiciones siguientes:

1. $\exists f(x_0, y_0)$(esto es, (x_0, y_0) pertenece al dominio de f)
2. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = (x_0, y_0)$

Observaciones: una función no es continua en un punto (x_0, y_0), si no se cumple al menos una de las tres condiciones enunciadas en la definición.

La función f es continua en la región D si es continua en todo punto de D.
Considerando la misma idea, se considera la continuidad de funciones de n variables.

Clasificaremos la discontinuidad en:

- Evitable si el limite doble en el punto existe

- No Evitable o esencial si el limite doble en el punto no existe a)

$$f(x,y)=\begin{cases} 3xy & si \quad (x,y)\neq(1,2) \\ & \\ 0 & si \quad (x,y)=(1,2) \end{cases} \qquad en \quad (1,2)$$

$P(1,\ 2)$

1) $\exists f(1,2)=0$

Por como esta definida la función

2) $\exists \lim_{(x,y)\to(1,2)}(3xy)=6$

3) $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3xy)\neq f(1,2)$

Cálculos auxiliares

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3xy)=3.1.2=6$$

$\therefore f(x,y)$ No es continua en $P(1,\ 2)$

ejemplo

$$f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

no es continua en (0, 0). Sin embargo, como el límite en este punto existe, se puede eliminar la discontinuidad definiendo el valor de f en (0, 0) igual a su límite. Tales discontinuidades se llaman **removibles** o **evitables**.

Ejemplo 2.4. *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

La función $f(x,y)$ no está definida en $(0,0)$.

Determinamos los limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0.$$

Como los límites iterados no coinciden, podemos afirmar que no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$,

Propiedades

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0).

1. Múltiplo escalar: kf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

Función compuesta

Si función f es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $f(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(gof)(x, y) = g[f(x, y)]$ es continua en (x_0, y_0).
Es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g[f(x,y)] = g[f(x_0, y_0)]$$