Demostración Unicidad del Límite con dos Variables

Teorema: (Unicidad del Límite) Si una función tiene limite, es único.

Demostración

Sea $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2, y \ \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Supongo que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ (1) y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_2$ (2)

Sin perdida de generalidad puedo suponer que $L_1 > L_2$, por lo cual $L_1 - L_2 > 0$

Llamemos $\varepsilon = \dfrac{L_1 - L_2}{4} > 0$

Por 1 $\exists \delta_1 > 0 / |x - x_0| < \delta_1 \wedge |x - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L_1| < \varepsilon$

Por 2 $\exists \delta_2 > 0 / |x - x_0| < \delta_2 \wedge |x - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x,y) - L_2| < \varepsilon$

$$0 < L_1 - L_2 = |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x,y) + f(x,y) - L_2| \leq$$

$$\leq |L_1 - f(x,y)| + |f(x,y) - L_2| = |f(x,y) - L_1| + |f(x,y) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2.\varepsilon$$

Entonces $0 < L_1 - L_2 < 2.\varepsilon = 2.\dfrac{L_1 - L_2}{4} = \dfrac{L_1 - L_2}{2}$ Absurdo

$\therefore L_1 = L_2$

$\therefore$ el limite es único

Demostración Suma de Límites de dos variables

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ Y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$

(1) (2)

Debemos probar que

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0/0 < |x - x_0| < \delta \wedge 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |(f(x,y) + g(x,y)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$

Demostración

Considero $0 < \varepsilon$

Por 1 $\exists\delta_1 > 0/0 < |x - x_0| < \delta_1 \wedge 0 < |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L_1| < \varepsilon/2$ (3)

Por 2 $\exists\delta_2 > 0/0 < |x - x_0| < \delta_2 \wedge 0 < |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x,y) - L_2| < \varepsilon/2$ (4)

Tomo $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ Sea $(x_0, y_0)/0 < |x - x_0| < \delta \wedge 0 < |y - y_0| < \delta$

$|(f(x,y) + g(x,y)) - (L_1 + L_2)| = |(f(x,y) - L_1) + (+g(x,y) - L_2)| \leq$

$\leq |f(x,y) - L_1| + |g(x,y) + L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(3) (4)

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$