Función creciente

- Si $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es creciente en (a, b).

Demostración

Por hipótesis: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$

Por la propiedad de limite (*), existe un entorno reducido del punto x en el cual $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene el mismo signo que su limite, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = L > 0 \implies \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \implies \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

Como $0 < |x - x_0| < \delta$ tenemos que $\Delta x > 0$ o $\Delta x < 0$

Si $\Delta x > 0$, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \implies f(x + \Delta x) - f(x) > 0 \implies f(x + \Delta x) > f(x)$, siendo $x + \Delta x > x$

Si $\Delta x < 0$, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0 \implies f(x + \Delta x) - f(x) < 0 \implies f(x + \Delta x) < f(x)$, siendo $x + \Delta x < x$

$\therefore f(x)$ **es creciente en x**

(*) Propiedad de limite: Si $L > 0$ es el limite de una función $f(x)$, cuando x se aproxima a x_0 entonces existe un entorno de x en el cual la función toma valores positivos.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = L > 0 \implies \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > 0$$

Función decreciente

- Si $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es decreciente en (a, b).

Demostración de forma análoga a cuando $f(x)$ es creciente

Función constante

- Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es constante.

Demostración a cargo del alumno

Demostración Mínimo Relativo

Teorema:

Supongamos que x_0 es un punto del dominio tal que $f'(x_0) = 0$.

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces la función tiene en x_0 un mínimo relativo.

Demostración

Sea la función $f(x)$ tal que $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$.
Como $f''(x_0) > 0$, entonces $f'(x_0)$ es creciente en un entorno (conveniente) $E_{(x_0,\delta)}$.
-Si $\Delta \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, entonces $x_0 + \Delta x > x_0$, como la derivada es creciente en x_0 tenemos que $f'(x_0 + \Delta x) > f'(x_0)$, es decir $f'(x_0 + \Delta x) > f'(x_0) = 0$

Con lo cual $f'(x_0 + \Delta x) > 0$. Entonces para valores mayores a x_0 la primer derivada es mayor a cero, es positiva. Por lo cual la función $f(x)$ es creciente en los puntos $x \in E_{(x_0,\delta)}$ y $x > x_0$

-Si $\Delta \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}$, entonces $x_0 + \Delta x < x_0$, como la derivada es creciente en x_0 tenemos que $f'(x_0 + \Delta x) < f'(x_0)$, es decir $f'(x_0 + \Delta x) < f'(x_0) = 0$

Con lo cual $f'(x_0 + \Delta x) < 0$. Entonces para valores menores a x_0 la primer derivada es menor a cero, es negativa. Por lo cual la función $f(x)$ es decreciente en los puntos $x \in E_{(x_0,\delta)}$ y $x < x_0$

Por lo expresado anteriormente y considerando que la función es continua en x_0, entonces existe un mínimo relativo en x_0.

- Si $f''(x_0) < 0$, entonces la función tiene en x_0 un Máximo relativo.

Demostración de forma análoga

Demostración donde x_0 alcanza un valor Máximo o Mínimo en dicho intervalo, en este ejemplo la función tiene un Máximo

Teorema:

Sea la función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b) tal que en un cierto punto $x_0 \in (a, b)$ alcanza un valor un máximo o mínimo en dicho intervalo.

Si la derivada $f'(x_0)$ existe, entonces $f'(x_0) = 0$

Demostración

Sea la función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b) / $x_0 \in (a, b)$, x_0 es un extremo y $\exists f'(x_0)$, con lo cual f es continua en x_0.

Suponemos que en x_0 la función f tiene un máximo, entonces f es creciente $\forall x < x_0$ en un entorno $E_{(x_0,\delta)} \subset (a, b)$, con lo cual $f(x) < f(x_0)$.

Considerando $x = x_0 + \Delta x$, con $\Delta x < 0$, resulta $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$

Tomando el cociente incremental: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$

Tomando limite, es decir: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ (1)

Como la función f tiene un máximo en x_0, entonces f es decreciente $\forall x > x_0$ en un entorno $E_{(x_0,\delta)} \subset (a, b)$, con lo cual $f(x) < f(x_0)$.

Considerando $x = x_0 + \Delta x$, con $\Delta x > 0$, resulta $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$
Tomando el cociente incremental: $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$
Tomando limite, es decir: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ (2)

De (1) y (2) resulta $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ $\therefore f'(x_0) = 0$
Misma idea para el caso en el que $f(x)$ tenga un mínimo.

Demostración Concavidad Positiva

Sea una función $y = f(x)$ definida y derivable en un intervalo (a, b)

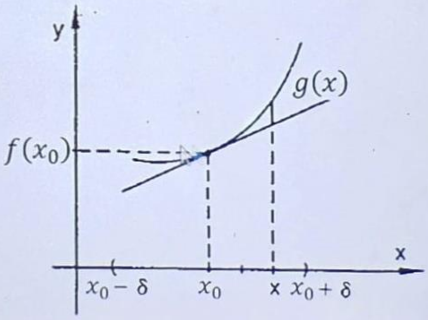
-Si la segunda derivada de la función f es positiva en todos los puntos del intervalo (a, b), es decir $f''(x) > 0$, la curva tiene concavidad positiva en dicho intervalo.

Demostración

El teorema quedara demostrado si establecemos que todos los puntos de la curva en el intervalo (a, b) están situados por sobre la curva tangente es decir, la ordenada de cualquier punto de la curva $y = f(x)$ es mayor que la ordenada y de la tangente para un mismo valor de x

Consideremos la función $g(x)$ que indica la diferencia entre la ordenada de la curva $f(x)$ y la ordenada de la tangente en un punto $x_0 \in (a, b)$.

Es decir: $g(x) = f(x) - T = f(x) - [f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)]$



$$g(x) = f(x) - T = f(x) - [f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)]$$

Determinamos su primer derivada: $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

Determinamos su segunda derivada: $g''(x) = f''(x)$

Con lo cual: $g''(x_0) = f''(x_0) > 0$ por lo cual $g'(x_0)$ es creciente en x_0

Entonces $\exists \delta > 0$ tal que para un entorno $E_{(x_0, \delta)}$ se verifica que:

Si $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ entonces $g'(x) < g'(x_0) = 0$ (1)

Si $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ entonces $g'(x) > g'(x_0) = 0$ (2)

Por 1 y 2, existe un mínimo relativo en x_0

Como existe un mínimo relativo en x_0, entonces existe un entorno de x_0 para lo cual se cumple que $g(x) > g(x_0) = 0$

$f(x) - f'(x_0).(x - x_0) - f(x_0) > 0$

$f(x) > f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$

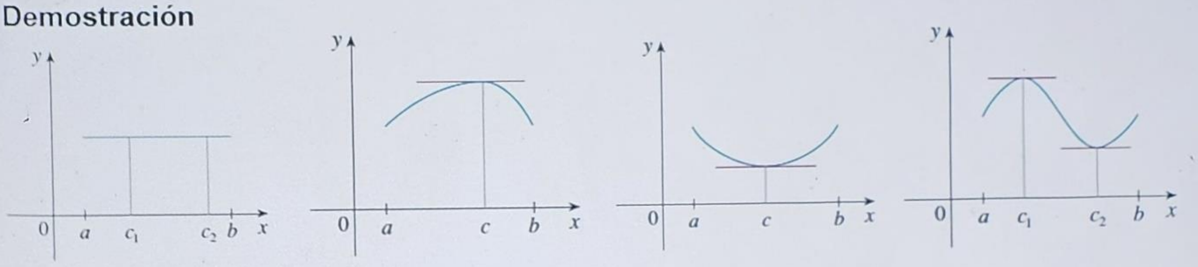
Por definición de concavidad, f tiene concavidad positiva en x_0

De forma análoga para cóncava negativa

Demostración Teorema de Rolle

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, tiene derivada finita en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$

Demostración



Puesto que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, por (*) debe tener un valor máximo "M" y mínimo "m" en dicho intervalo. Por lo cual:

-Si $M = m$, la función $f(x)$ es constante, es decir $f(x) = c$ (c=constante) para todos los valores de x. Con lo cual se cumple que $f'(x) = 0$

-Si $M \neq m$ entonces unos de ellos, por lo menos, es distinto de $f(a) = f(b)$. Por lo tanto alcanza en dicho intervalo un extremo absoluto en algun x_0 interior al intervalo, y $f'(x_0)$ es, al mismo tiempo un extremo absoluto y relativo. Por lo cual se cumple que $f'(x_0) = 0$

Observación: (*) Teorema: si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $\exists c, d \in [a, b]$ tal que:

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$$
$$f(d) \geq f(x), \forall x \in [a, b]$$

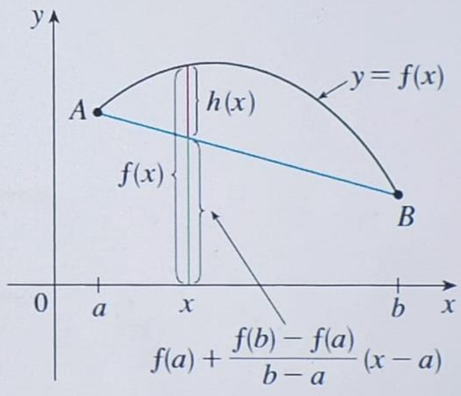
Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y tiene derivada finita en (a,b), entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} =$$

Demostración

Aplicamos el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya grafica es la recta secante *AB*.

Es decir: $h(x) = f(x) - y$



La ecuación de la recta AB puede escribirse como $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a) \Leftrightarrow \qquad y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$$

$$h(x) = f(x) - y = \quad f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$$

Verificamos que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle

-La función $h(x)$ es continua sobre $[a,b]$ porque es la suma de f y una función polinomial de primer grado, ambas continuas.

-La función $h(x)$ es derivable sobre (*a*, *b*) porque f y la función polinomial de primer grado son derivables. De hecho, podemos calcular $h(x)$

$$h'(x) = \quad f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

-Verificamos que $h(a) = h(b)$

$$h(a) = \quad f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(a-a) = 0$$

$$h(b) = \quad f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(b-a) = 0$$

$$\therefore = h(a) = h(b)$$

Dado que $h(x)$ satisface el teorema de Rolle, que señala que existe un numero $x_0 \in (a,b)$ tal que $h'(x_0) = 0$, entonces se tiene que:

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Es decir:

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Teorema de Cuachy

Teorema de Cauchy

Si f y g son dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$, derivables en (a,b) y $g'(x_0) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ entonces existe $x_0 \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Demostración

Definimos una función auxiliar $h(x)$ en la que podremos aplicar el teorema de Rolle:

Sea $h(x) = g(x).[f(b)-f(a)] - f(x).[g(b)-g(a)]$

Verificamos que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle

-La función $h(x)$ es continua sobre $[a,b]$ porque es la suma/resta de funciones continuas.

-Verificamos que $h(a) = h(b)$

$$h(a) = g(a).[f(b)-f(a)] - f(a).[g(b)-g(a)] \qquad = g(a).f(b) - f(a).g(b)$$

$$h(b) = g(b).[f(b)-f(a)] - f(b).[g(b)-g(a)] \qquad = g(a).f(b) - f(a).g(b)$$

$$\therefore = h(a) = h(b)$$

-La función $h(x)$ es derivable sobre (a,b) porque es la suma/resta de funciones derivables. Por lo cual podemos calcular $h'(x)$

$$h'(x) = g'(x).[f(b)-f(a)] - f'(x).[g(b)-g(a)]$$

Dado que $h(x)$ satisface el teorema de Rolle, que señala que existe un número $x_0 \in (a,b)$ tal que $h'(x_0) = 0$, entonces se tiene que:

$$h'(x_0) = g'(x_0).[f(b)-f(a)] - f'(x_0).[g(b)-g(a)] = 0$$

Es decir:

$$g'(x_0).[f(b)-f(a)] - f'(x_0).[g(b)-g(a)] = 0$$

$$g'(x_0).[f(b)-f(a)] = f'(x_0).[g(b)-g(a)]$$

$$\frac{[f(b)-f(a)]}{[g(b)-g(a)]} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\therefore \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Teorema de L 'Hopital

Teorema de L'Hospital, aplicaciones al cálculo de distintos limites indeterminados

Una consecuencia del teorema de Cauchy es el teorema que veremos a continuación

Teorema L' Hospital, caso $\frac{0}{0}$

Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un intervalo (a,b).
Supongamos $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, con $x \neq x_0$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Si existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además se cumple:

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además se cumple:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración

Sean f y g dos funciones continuas y derivables en el intervalo (a,b), con $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, salvo quizás para $x_0 \in (a,b)$ y $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Partimos de $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \quad ,\text{con } x \in (a,b) \qquad (1)$$

Las funciones f y g son funciones continas, en particular en $[x_0, x] \in (a,b)$ y derivable en (x_0, x). Esto ultimo es el caso en el que $x_0 < x$, de forma análoga se hace para $x_0 > x$, además $g'(x_1) \neq 0$ para todo $x_1 \in (x_0, x)$. Con lo expresado anteriormente, se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy.

Por el teorema de Cauchy $\exists \xi \in (x_0, x)$ tal que $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (2)$

Entonces de 1 y 2, y tomando limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Entonces de 1 y 2, y tomando limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Como $x_0 < \xi < x$, cuando $x \to x_0$, $\xi \to x_0$, por lo cual

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}_{\text{Por hipótesis existe limite}} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =: \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{2} = \frac{1}{2}$$