ÁLGEBRA

Licenciatura en Sistemas de Información

TRABAJO PRÁCTICO N° 3:

Relaciones y Funciones

(Ejercicios 1, 2 y 3)

<u>Par ordenado</u>: es todo par de elementos, dados en un cierto orden.

(a, b) → par ordenado, donde el primer elemento es ***a*** y el segundo elemento es ***b***.

(b, a) → par ordenado, donde el primer elemento es ***b*** y el segundo elemento es ***a***.

<u>Producto cartesiano:</u> Dados dos conjuntos A y B, se define el producto cartesiano de *AxB*, al conjunto formado por todos los pares ordenados de manera que el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

$$AxB = \{(a, b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

$A = \{0, 1, 2\}$ $B = \{2, 3, 4\}$ $AxB = \{(0, 2); (0, 3); (0, 4); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$

Si *A* tiene ***n*** elementos y *B* tiene ***m*** elementos, el producto cartesiano *AxB* tiene ***n.m*** elementos.

<u>Relación entre dos conjuntos A y B:</u> Se define la relación R de A en B, al subconjunto del producto cartesiano AxB.

$$R: A \to B \Leftrightarrow R \subset AxB$$

$A = \{0, 1, 2\}$ $\quad$ $B = \{2, 3, 4\}$ $\quad$ $AxB = \{(0, 2); (0, 3); (0, 4); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$

Definimos la relación $R \subset AxB$ de la siguiente manera: $\quad \boldsymbol{(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y = 4}$

¿ $(0,2) \in R$? No, pues $0 + 2 \neq 4$

¿ $(0,3) \in R$? No, pues $0 + 3 \neq 4$

¿ $(0,4) \in R$? Sí, pues $0 + 4 = 4$

¿ $(1,2) \in R$? No, pues $1 + 2 \neq 4$

…….

Analizando todos los pares ordenados del producto cartesiano AxB concluimos que:

$$\boxed{\boldsymbol{R = \{(0, 4); (1, 3); (2, 2)\}}}$$

Representación gráfica

$$R = \{(0,4);(1,3);(2,2)\}$$

Diagrama de Venn

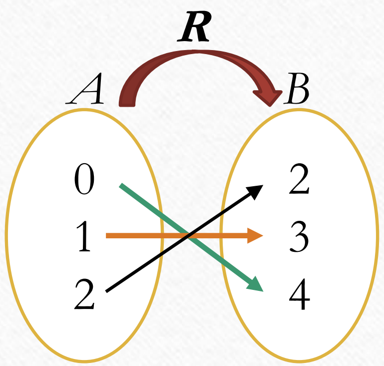
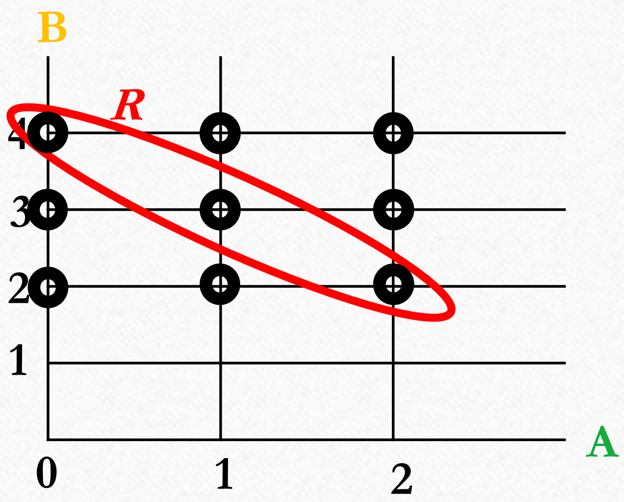


Gráfico cartesiano



Matriz de adyacencia

R	2	3	4
0	0	0	1
1	0	1	0
2	1	0	0

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1: Sean $A = \{x \in N/1 \leq x \leq 5\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$. Se define $R \subset AxB$ mediante: $\boldsymbol{(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 5}$

a) Definir *R* por extensión.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad$ $B = \{3, 4, 5\}$

$$AxB = \{(1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,3); (3,4); (3,5), (4,3); (4,4); (4,5); (5,3); (5,4); (5,5)\}$$

¿ $(1,3) \in R$? Sí, pues $1 + 3 \leq 5$

¿ $(1,4) \in R$? Sí, pues $1 + 4 \leq 5$

¿ $(1,5) \in R$? No, pues $1 + 5 \nleq 5$

¿ $(2,3) \in R$? Sí, pues $2 + 3 \leq 5$

¿ $(2,4) \in R$? No, pues $2 + 4 \nleq 5$

……..

Analizando todos los pares ordenados del producto cartesiano *AxB* concluimos que:

$$\boxed{\boldsymbol{R = \{(1,3); (1,4); (2,3)\}}}$$

c) Determinar R^{-1}

Relación inversa de *R*: es el subconjunto de *BxA* definido como $R^{-1} = \{(b,a)/(a,b) \in R\}$

$\boxed{\boldsymbol{R = \{(1,3);(1,4);(2,3)\}}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{R^{-1} = \{(3,1);(4,1);(3,2)\}}}$

Ejercicio 2: Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{1, 4, 6, 16\}; C = \{2, 3, 8, 10\}$ y las relaciones:

$R \subset AxB$ definido por: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2$

$S \subset BxC$ definido por: $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{S} \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = {}^{y}/_{2}$

a) Determinar R y S por extensión.

Comenzamos por la relación *R*:

$$AxB = \{(1, 1); (1, 4); (1, 6); (1, 16); (2, 1); (2, 4); (2, 6); (2, 16); (3, 1); (3, 4); (3, 6); (3, 16); (4, 1); (4, 4); (4, 6); (4, 16); (5, 1); (5, 4); (5, 6); (5, 16)\}$$

¿ $(1,1) \in R$? Sí, pues $1 = 1^2$

¿ $(1,4) \in R$? No, pues $4 \neq 1^2$

¿ $(1,6) \in R$? No, pues $6 \neq 1^2$

¿ $(1,16) \in R$? No, pues $16 \neq 1^2$

¿ $(2,1) \in R$? No, pues $1 \neq 2^2$

¿ $(2,4) \in R$? Sí, pues $4 = 2^2$

Analizando todos los pares ordenados del producto cartesiano *AxB* concluimos que:

$$\boxed{\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}); (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{4}); (\boldsymbol{4}, \boldsymbol{16})\}}$$

$\boldsymbol{S \subset BxC}$ **definido por:** $\boldsymbol{(y,z) \in S \Leftrightarrow z = {}^{y}/_{2}}$

Para determinar los elementos de la relación S, considerar los pares ordenados del producto cartesiano BxC, que verifican que su segunda componente es igual la mitad de la primera.

$$B = \{1, 4, 6, 16\}; \quad C = \{2, 3, 8, 10\}$$

$$BxC = \{(1,2); (1,3); (1,8); (1,10); (4,2); (4,3); (4,8); (4,10); (6,2); (6,3); (6,8); (6,10); (16,2); (16,3); (16,8); (16,10)\}$$

(Queda a cargo del alumno determinar los pares ordenados de la relación S).

3) Sea el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, y las relaciones definidas en él:

$R_1 = \{(x, y) \in A^2 / x \mid y\}$ $\quad$ $R_2 = \{(x, y) \in A^2 / x = y\}$

a) Construir el dígrafo correspondiente y la matriz de adyacencia de cada una de las relaciones dadas.

b) Analizar cada una de las relaciones dadas, determinando qué propiedades cumplen y cuáles no, y, de ser posible, clasificarlas justificando todas las respuestas.

c) Construir los dígrafos de todas las relaciones de equivalencia que pueden definirse en A.

Que una relación esté definida en un conjunto A, significa que sus elementos, que son pares ordenados, pertenecen a A^2 (AxA).

Entonces:

$A^2 = \{1,2,3,4\}x\{1,2,3,4\} =$

$= \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)\}$

$R_1 = \{(x, y) \in A^2 / x|y\}$ "x divide a y“

$$R_1 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\}$$

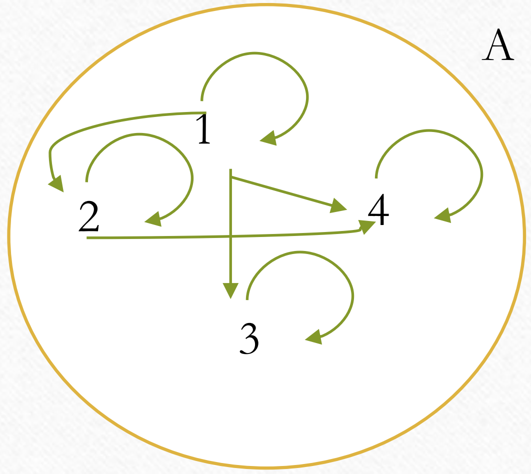
$$R_1 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\}$$

R_1	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

MATRIZ DE ADYACENCIA

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DÍGRAFO



$R_1 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\}$

1) **Reflexividad:** R es reflexiva en A, si y sólo si,

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

$1 \ \in A \ \wedge (1,1) \in R_1 \ \ VERDADERO$

$2 \ \in A \ \wedge (2,2) \in R_1 \ \ VERDADERO$

$3 \ \in A \ \wedge (3,3) \in R_1 \ \ VERDADERO$

$4 \ \in A \ \wedge (4,4) \in R_1 \ \ VERDADERO$

Luego, R_1 $es\ reflexiva$.

2) **No reflexividad:** R es no reflexiva en A, si y sólo si,

$$\exists a \in A/(a,a) \notin R$$

No verifica pues es reflexiva, es decir, $\forall\ a \in A: (a,a) \in R_1$

3) **Arreflexividad:** R es arreflexiva en A, si y sólo si,

$$A \Leftrightarrow \forall a \in A:(a,a) \notin R$$

No verifica pues $\exists 1 \in A/(1,1) \in R_1$

$$R_1 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\}$$

4) **Simetría:** R es simétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

No verifica pues $(1,2) \in R_1 \Rightarrow (2,1) \in R_1 \; es \; FALSO.$

5) **Asimetría:** R es asimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$$

No verifica pues $(1,1) \in R_1 \Rightarrow (1,1) \notin R_1 \; es \; FALSO.$

$$R_1 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\}$$

6) **Antisimetría:** R es antisimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

$(1,1) \in R_1 \wedge (1,1) \in R_1 \Rightarrow 1 = 1\ es\ VERDADERO.$
$(2,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1 \Rightarrow 2 = 2\ es\ VERDADERO.$
$(3,3) \in R_1 \wedge (3,3) \in R_1 \Rightarrow 3 = 3\ es\ VERDADERO.$
$(4,4) \in R_1 \wedge (4,4) \in R_1 \Rightarrow 4 = 4\ es\ VERDADERO.$
$(1,2) \in R_1 \wedge (2,1) \in R_1 \Rightarrow 1 = 2\ es\ VERDADERO.$
$(1,3) \in R_1 \wedge (3,1) \in R_1 \Rightarrow 1 = 3\ es\ VERDADERO.$
$(1,4) \in R_1 \wedge (4,1) \in R_1 \Rightarrow 1 = 4\ es\ VERDADERO.$
$(2,4) \in R_1 \wedge (4,2) \in R_1 \Rightarrow 4 = 2\ es\ VERDADERO.$

$$R_1 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\}$$

Luego, R_1 es Antisimétrica.

7) **Transitividad:** R es transitiva en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

$(1,1) \in R_1 \wedge (1,1) \in R_1 \Rightarrow (1,1) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(1,1) \in R_1 \wedge (1,2) \in R_1 \Rightarrow (1,2) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(1,1) \in R_1 \wedge (1,3) \in R_1 \Rightarrow (1,3) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(1,1) \in R_1 \wedge (1,4) \in R_1 \Rightarrow (1,4) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(1,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1 \Rightarrow (1,2) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(1,2) \in R_1 \wedge (2,4) \in R_1 \Rightarrow (1,4) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(1,3) \in R_1 \wedge (3,3) \in R_1 \Rightarrow (1,3) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(1,4) \in R_1 \wedge (4,4) \in R_1 \Rightarrow (1,4) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(2,2) \in R_1 \wedge (2,2) \in R_1 \Rightarrow (2,2) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(2,2) \in R_1 \wedge (2,4) \in R_1 \Rightarrow (2,4) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(2,4) \in R_1 \wedge (4,4) \in R_1 \Rightarrow (2,4) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(3,3) \in R_1 \wedge (3,3) \in R_1 \Rightarrow (3,3) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$(4,4) \in R_1 \wedge (4,4) \in R_1 \Rightarrow 4,4,) \in R_1\ es\ VERDADERO.$

$$R_1 = \{(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,2); (2,4); (3,3); (4,4)\}$$

8) **No transitiva**: R es ni transitiva en A, si y sólo si,

$$\exists a, b, c \in A / (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (a, c) \notin R$$

No verifica pues es transitiva, es decir, $\forall\ a, b, c \in A: (a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \Rightarrow (a, c) \in R_1$

9) **Atransitividad:** R es atransitiva en A, si y sólo si, $\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$

$No\ verifica\ pues,\qquad (1,2) \in R_1 \wedge (2,4) \in R_1 \Rightarrow (1,4) \notin R_1\ es\ FALSO$

CLASIFICACION DE RELACIONES

Relación de equivalencia: La relación $R \subset A^2$ es de equivalencia en A, si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Relación de Orden:

La relación $R \subset A^2$ es de **orden amplio** en A si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva

La relación $R \subset A^2$ es de **orden estricto** en A si y sólo si es arreflexiva, asimétrica y transitiva

R_1 *es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

Luego, R_1 *es una relación de orden amplio.*

$$A^2 = \begin{Bmatrix} (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); \\ (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4) \end{Bmatrix}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A^2 / x = y\}$$

$$R_2 = \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4)\}$$

$R_2 = \{(1,1);\ (2,2);\ (3,3); (4,4)\}$

1) **Reflexividad:** R es reflexiva en A, si y sólo si,

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

$1 \ \in A \ \wedge (1,1) \in R_2 \ \ VERDADERO$
$2 \ \in A \ \wedge (2,2) \in R_2 \ \ VERDADERO$
$3 \ \in A \ \wedge (3,3) \in R_2 \ \ VERDADERO$
$4 \ \in A \ \wedge (4,4) \in R_2 \ \ VERDADERO$

Luego, $R_2\ es\ reflexiva$.

2) **No reflexividad:** R es no reflexiva en A, si y sólo si,

$$\exists a \in A / (a,a) \notin R$$

No verifica pues es reflexiva, es decir, $\forall\ a \in A: (a,a) \in R_2$

3) **Arreflexividad:** R es arreflexiva en A, si y sólo si,

$$A \Leftrightarrow \forall a \in A : (a,a) \notin R$$

No verifica pues $\exists 1 \in A/(1,1) \in R_2$

$$R_2 = \{(1,1);\ (2,2);\ (3,3); (4,4)\}$$

4) **Simetría:** R es simétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

$(1,1) \in R_2 \Rightarrow (1,1) \in R_2\ es\ VERDADERO.$
$(2,2) \in R_2 \Rightarrow (2,2) \in R_2\ es\ VERDADERO.$
$(3,3) \in R_2 \Rightarrow (3,3) \in R_2\ es\ VERDADERO.$
$(4,4) \in R_2 \Rightarrow (4,4) \in R_2\ es\ VERDADERO.$

$Luego, R_2$ es simétrica.

5) **Asimetría:** R es asimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$$

No verifica pues $(1,1) \in R_2 \Rightarrow (1,1) \notin R_2\ es\ FALSO.$

6) **Antisimetría:** R es antisimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

$(1,1) \in R_2 \wedge (1,1) \in R_2 \Rightarrow 1 = 1 \; es \; VERDADERO.$

$(2,2) \in R_2 \wedge (2,2) \in R_2 \Rightarrow 2 = 2 \; es \; VERDADERO.$

$(3,3) \in R_2 \wedge (3,3) \in R_2 \Rightarrow 3 = 3 \; es \; VERDADERO.$

$(4,4) \in R_2 \wedge (4,4) \in R_2 \Rightarrow 4 = 4 \; es \; VERDADERO.$

Luego, R_2 es Antisimétrica.

7) **Transitividad:** R es transitiva en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

$(1,1) \in R_2 \wedge (1,1) \in R_2 \Rightarrow (1,1) \in R_2\ es\ VERDADERO.$
$(2,2) \in R_2 \wedge (2,2) \in R_2 \Rightarrow (2,2) \in R_2\ es\ VERDADERO.$
$(3,3) \in R_2 \wedge (3,3) \in R_2 \Rightarrow (3,3) \in R_2\ es\ VERDADERO.$
$(4,4) \in R_2 \wedge (4,4) \in R_2 \Rightarrow (4,4,) \in R_2\ es\ VERDADERO.$

Luego, R_2 es transitiva.

8) **No transitiva**: R es ni transitiva en A, si y sólo si,
$\exists a, b, c \in A / (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (a, c) \notin R$

No verifica pues es transitiva, es decir, $\forall\, a, b, c \in A$: $(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_2$

9) **Atransitividad:** R es atransitiva en A, si y sólo si, $\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$

$No\ verifica\ pues,\quad (2,2) \in R_2 \wedge (2,2) \in R_2 \Rightarrow (2,2) \notin R_2\ es\ FALSO$

CLASIFICACION DE RELACIONES

Relación de equivalencia: La relación $R \subset A^2$ es de equivalencia en A, si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Relación de Orden:

La relación $R \subset A^2$ es de **orden amplio** en A si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva

La relación $R \subset A^2$ es de **orden estricto** en A si y sólo si es arreflexiva, asimétrica y transitiva

$$R_2 \text{ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.}$$

$$\text{Luego, } R_2 \text{ es una relación de orden amplio y relación de equivalencia.}$$