UNIDAD 5: ANALISIS COMBINATORIO

La Función Factorial es una función con dominio en los enteros no negativos y con imagen en los números naturales

EJEMPLOS PARA TENER EN CUENTA

ARREGLOS:

Llamamos Arreglos simples de los m elementos de un conjunto tomados de a n, siendo $n \le m$, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por n elementos distintos de los m dados.
- Dos grupos se considerarán distintos si y solo sí difieren en algún elemento o si teniendo los mismos elementos, difieren en el orden de los mismos

$$A_n^m = m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

ARREGLOS CON REPETICION:

Llamamos arreglos de los m elementos distintos, que se pueden repetir hasta n veces, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- cada grupo está formado por n elementos, no necesariamente distintos de los m dados
- Dos grupos se considerarán distintos si difieren al menos en algún elemento, o si teniendo los mismos elementos, difieren en el orden de los mismos

$$A_{n,r}^m = \underbrace{m.m.m\ldots m}_{n\ veces} = m^n$$

PERMUTACIONES SIMPLES:

Llamamos Permutaciones simples de m elementos de un conjunto a todos y cada uno de los arreglos simples que se pueden formar utilizando la totalidad de esos m elementos.

$$A_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = m! = P_m$$

PERMUTACION CON REPETICION:

Llamamos permutaciones con repetición de m elementos entre los cuales hay α de una clase, β de otra clase, ..., γ de otra clase, siendo:

$\alpha + \beta + \ldots + \gamma = m$

a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por los m elementos dados.
- Dos grupos se consideran diferentes si y sólo si difieren en el orden de sus elementos.

$$P^{m}_{\alpha,\beta,\ldots,\gamma} = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\gamma!}$$

COMBINACIONES SIMPLES:

Llamamos Combinaciones simples de los m elementos de un conjunto tomados de a n, siendo n ≤ m, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por n elementos distintos de los m dados
- Dos grupos se considerarán distintos si y solo sí difieren en alguno de sus elementos.

El número total de combinaciones simples de m elementos tomados de a n es:

$$C^{m}_{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

COMBINACIONES CON REPETICION:

Llamamos combinaciones de los m elementos distintos, que se pueden repetir hasta n veces, a todos y cada uno de los grupos diferentes que se pueden formar de modo que:

- Cada grupo está formado por n elementos, no necesariamente distintos de los m dados.
- Dos grupos se considerarán distintos si y sólo si difieren al menos en algún elemento.

$$C^{m}_{n,r} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

NUMERO COMBINATORIO:

Dados dos enteros no negativos m y n, siendo n ≤ m, llamamos número combinatorio m sobre n y lo anotamos al numero que se obtiene asi:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS COMBINATORIOS:

PROPIEDADES

1) Todo número combinatorio de denominador 0 es igual a 1:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\,m!} = 1$$

2) Todo número combinatorio de denominador 1 es igual al numerador:

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{m.(m-1)!}{(m-1)!} = m$$

3) Todo número combinatorio cuyo numerador es igual al denominador es igual a 1:

$$\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = 1$$

PROPIEDADES

Dos números combinatorios se dicen complementarios si tienen el mismo numerador y la suma de sus denominadores es igual al numerador.

4) Dos números combinatorios complementarios son iguales.

$$\binom{m}{n} \text{ y } \binom{m}{m-n} \textit{ son complementarios}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{m-n}$$

FÓRMULA DE STIEFFEL:

La suma de dos números combinatorios en general no es un número combinatorio, pero si sus numeradores son iguales y sus denominadores son consecutivos vale la fórmula.
POR EJEMPLO:

$$\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}=\binom{m}{n}$$

$$\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=\binom{10}{4}$$

TRIANGULO DE PASCAL:

Es una disposición ordenada de todos los números combinatorios de la siguiente manera

- En el primer renglón están todos los números combinatorios de numerador 0; en el segundo renglón están todos los números combinatorios de numerador 1; en el tercer renglón los de numerador 2; etc.
- En cada renglón los denominadores crecen desde 0 hasta el numerador correspondiente a ese renglón.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0}\\
\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}\\
\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}\\
\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}\\
\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}\\
\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}$$

El triángulo así formado tiene dos características importantes:

- Todos los números combinatorios de los laterales del triángulo son iguales a 1
- Cada número combinatorio del interior es igual a la suma de los dos de arriba según la fórmula de Stieffe.

BINOMIO DE NEWTON:

El desarrollo ordenado de (a + b) elevado a la n:

1. Contiene (n + 1) términos no semejantes
2. Cada término es el producto de tres factores, un número combinatorio, una potencia de a y una potencia de b, esto es:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k}$$

3. Los números combinatorios son todos de numerador n y los denominadores toman valores que van de 0 a n
4. En cada término, el exponente de a decrece de n a 0 y el exponente de b crece de 0 a n
5. La suma de los exponentes de a y de b es, en todos los términos igual a n
6. Los términos equidistantes de los extremos contienen números combinatorios complementarios y por lo tanto son iguales; los de los extremos son iguales a 1
7. Un término cualquiera de lugar k en el desarrollo, al que llamamos término k-ésimo es

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{(k-1)}$$

8. Si n es par, el desarrollo tiene un número impar de términos y por lo tanto existe un único término central que ocupa el lugar:

K = n/2 +1

9. Si n es impar, el desarrollo tiene un número par de términos y por lo tanto existen dos términos centrales que ocupan los lugares:

K1 = (n + 1)/2

k2 = (n + 3)/2