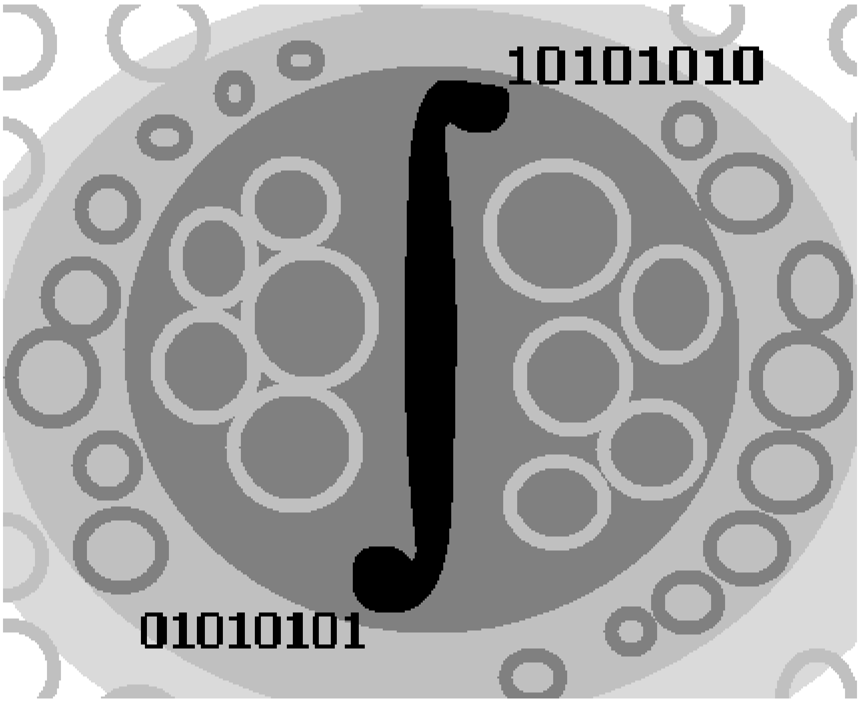
-



Cálculo Diferencial e Integral

Introducción

El **Cálculo Diferencial e Integral** o el **Cálculo Infinitesimal** es el estudio de los límites, las derivadas, integrales y series infinitas. Es el estudio de cantidades infinitamente pequeñas mediante las derivadas e integrales.
El Cálculo tiene amplias aplicaciones en la ciencia y la ingeniería, y se usa para resolver problemas para los cuales el Álgebra por si sola es insuficiente. Este estudio se construye con base en el Álgebra, la Trigonometría y la Geometría Analítica, e incluye dos campos principales, el **Cálculo Diferencial** y el **Cálculo Integral** que están relacionados con el Teorema Fundamental del Cálculo. En matemática más avanzada, el cálculo es usualmente llamado análisis y está definido como el estudio de las funciones.
Algunas de las muchas aplicaciones del Cálculo a la computación, tiene más que ver con la arquitectura y la organización de la computadora, por ejemplo en la transmisión y el procesamiento digital de señales de los dispositivos de Entrada/Salida por ejemplo, una lectora/grabadora de DVD, que necesita leer con una lente la información digital del Disco, por medio de un láser óptico, el cual va transmitiendo según un modelo matemático, La tranformada de Laplace, que tiene que ver con el Cálculo Avanzado.

En esta materia y en las posteriores se tratan las Matemáticas Discretas, que son el estudio de la matemática finita, por el hecho de que las computadoras trabajan con números finitos, debido a sus circuitos y memoria limitada.

Suele ser bastante complicado entender la materia, por eso dejo algunos consejos:

- Hay que **LEER** la teoría o los libros antes de ingresar a cada clase.
- **ESCRIBIR,** tomar apuntes en clase, esto ayuda a recordar mejor los conceptos y de paso se produce textos de mejor calidad y con menores errores ortográficos.
- Cuando esté explicando el profesor, **PREGUNTAR,** sacarse las dudas, porque una pequeña duda puede ser el desencadenante de una duda más grande.
- **PRACTICAR,** todos los problemas de las clases prácticas sin mirar los resultados, mirar después para verificar y por último inventar algunos problemitas o buscarlos por Internet.
- **LLEVAR los estudios al ritmo de la materia**, porque después se **le junta a uno los contenidos** y eso es bastante pesado a la hora de estudiar.

También se va a hacer una convención de símbolos para separar conceptos:

- Las definiciones, van en un recuadro.
- Las explicaciones y como se leen los símbolos formalmente o de otro autor van entre ‘’ (comillas simples).
- Las explicaciones informales y no técnicas van entre “” (comillas dobles).
- Las aclaraciones particulares o ejemplos van entre () (paréntesis).

No se olviden que las clases son para ustedes, los profesores van a ayudarlos hasta que puedan entender los ejercicios o conceptos, esfuércense y estudien mucho… éxitos.

INDICE

1. FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE_____Página 04

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE_____Página 38

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE_____Página 47

4. INTEGRALES DEFINIDAS_____Página 56

5. INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES_____Página 65

6. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES_____Página 77

7. DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES_____Página 86

8. INTEGRALES MÚLTIPLES_____Página 92

9. ECUACIONES DIFERENCIALES_____Página 99

10. SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS_____Página 105

1. FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD EN FUNCIONES DE UNA VARIABLE

El conjunto de los números reales

Conjunto: Llamaremos conjunto a cualquier colección de objetos que llamaremos elementos. De manera que una vez conocidos todos los elementos de un conjunto, podemos determinar en cualquier situación si un elemento cualquiera dado pertenece o no al conjunto.
Advierta que un conjunto puede estar conformado por un solo elemento, en ese caso estamos frente a un conjunto unitario.
De lo antes expuesto se podría pensar que un conjunto siempre tiene algún elemento, pero en rigor no es así, ya que también se define el conjunto vacío, como un conjunto que carece de elementos.
Los conjuntos no vacíos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto es finito si sus elementos pueden ordenarse de manera que exista un primer elemento – al que no le precede otro – y un último elemento – al que no le sigue ningún otro. Un conjunto es infinito, si no es finito, es decir si no posee primer y/o último elemento.

Números

Informalmente llamamos números a un conjunto de símbolos que nos permiten expresar cantidades.

Números Naturales

Son los conformados por la sucesión 1, 2, 3, 4 ... Este conjunto es infinito, puesto que es sabido que , dado un número natural cualquiera n, siempre existe el siguiente de ese número, que es otro número natural al que expresamos como n+1.
El conjunto de los números naturales suele representarse con la letra *N*.
Entre los elementos del conjunto de los números naturales se pueden realizar sumas, productos y potencias de expresiones naturales sin ninguna restricción, sus resultados serán siempre naturales; pero para la resta y el cociente existen restricciones a saber:

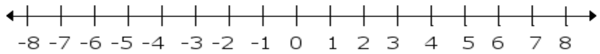
a) La resta a – b no es posible si a < b.
b) El cociente a : b no es posible si a no es múltiplo de b.

Números Enteros

Son los signos que se introducen para salvar el problema de la resta entre números naturales a – b cuando a < b. Aparecen los números negativos -1, -2, -3, ...; en este conjunto también se incluye el 0. Se los opera de la siguiente manera: dada la diferencia a – b, si a > b, se efectúa la diferencia sin inconvenientes, pero si a < b; al b se le resta el a y al resultado se le coloca el signo negativo.

Ejemplos: 8 – 3 = 5 3 – 7 = -4 5 – 2 = 3 4 – 9 = – 5

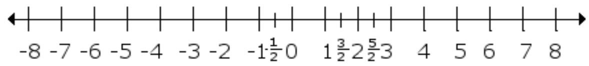
Se los suele representar mediante puntos equidistantes sobre una recta que va de – ∞ (menos infinito) a + ∞ (más infinito)



El conjunto de los números enteros se representa con la letra *Z*.

Números Racionales

Son los signos que se introducen para salvar el problema del cociente a : b cuando a no es múltiplo de b. En estos casos el cociente a : b si a y b no admiten divisores en común, queda expresado en la fracción $\frac{a}{b}$. Si a y b admiten divisores en común, se efectuarán las simplificaciones necesarias y la expresión quedará dada por una fracción irreducible de la forma $\frac{m}{n}$ porque finalmente $\frac{a}{b} = \frac{pm}{pn} = \frac{m}{n}$
También a los números racionales se los suele representar mediante puntos sobre una recta que va desde – ∞ (menos infinito) a + ∞ (más infinito) ; donde se define una unidad y las fracciones están siempre referidas a esa unidad .



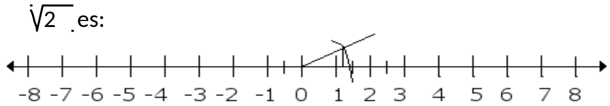
El conjunto de los números racionales se representa con la letra *Q*.

Números Irracionales

Son los números que no pueden expresarse como una razón. Por ejemplo: $\sqrt{2}$.
Demostración: si $\sqrt{2}$ fuera racional, podríamos escribir: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ donde: Si a es un número par, b debe ser impar (siempre podemos suponer que la fracción es irreducible).
Si elevamos al cuadrado ambos miembros $(\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 2b^2 = a^2$; de esto surge que a^2 es siempre un número par (porque es igual a b^2 no importa cual sea, multiplicado por 2, que es siempre par); luego a debe ser par:
Si a es par, y así acabamos de probarlo:

1) b debe ser un número impar, para que $\frac{a}{b}$ sea una fracción irreducible.
2) se puede escribir que a = 2k, entonces resulta que $2b^2 = (2k)^2$. Si $2b^2 = (2k)^2 \rightarrow 2b^2 = 4k^2$ de donde $b^2 = 2k^2$; luego b^2 es también un número par, cualquiera sea k. Esto es imposible, porque la condición para que la fracción sea impropia es que uno de los números que componen la fracción sea par y el otro impar.

Ejemplo de la representación gráfica de $\sqrt{2}$ es:



Así como $\sqrt{2}$ es irracional; también lo son: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$ entre muchos otros.
Los números irracionales ocupan puntos sobre la recta que va de $-\infty$ (menos infinito) a $+\infty$ (más infinito).
El conjunto de los números irracionales se representa con la letra I.

Números Reales

Definición:
El conjunto de todos los números hasta aquí descriptos se llama *conjunto de los números reales*. Todos sus elementos están contenidos en la recta de los números reales, que va de $-\infty$ (menos infinito) a $+\infty$ (más infinito).
A los conjuntos numéricos vistos se los puede presentar en el siguiente cuadro:

Naturales (N)
0 (cero) } **Enteros (Z)** }
negativos
fraccionarios } **Racionales (Q)** } **Reales (R)**
Irracionales(I)

dejando a salvo que solo los que tienen un paréntesis con la denominación correspondiente constituyen conjuntos numéricos.

Además, observe que:
a) todos los conjuntos numéricos están incluidos en el conjunto de los reales,.
b) la relación de inclusión se establece: $N \subset Z \subset Q \subset R$
c) entre los Irracionales (I) y los Racionales (Q), hay una partición de Reales (R);
ya que:

i) ambos conjuntos Q y I, poseen elementos (son distintos de cero).
ii) no poseen elementos en común $Q \cap I = \emptyset$
iii) la unión de ambos conjuntos es el conjunto de los Reales $Q \cup I = R$.

Valor absoluto de un número real

Valor Absoluto

Definición:
El *valor absoluto* o *módulo* de un número real a, que se escribe $|a|$ es el mismo número real considerado con signo positivo.

Por ejemplo $|3| = 3$ $|-3| = 3$ $|6 - 14| = |-8| = 8$

Propiedades:

1) $\forall x: x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$
2) $\forall x: |x| = |-x|$
3) $\forall a, \forall b: |a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$
4) $\forall a, \forall b: |a + b| \leq |a| + |b|$
5) $\forall a, \forall b: |a - b| \geq |a| - |b|$
6) $\forall a > 0, \forall x : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
7) $\forall a > 0, \forall x : |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$

Desigualdades

Definición:
Una *desigualdad* es una relación que se da entre dos valores cuando estos son distintos (en caso de ser iguales, lo que se tiene es una igualdad).

Si los valores en cuestión son elementos de un conjunto ordenado , como los enteros o los reales , entonces pueden ser comparados.

- La notación $a < b$ significa a es *menor que* b;
- La notación $a > b$ significa a es *mayor que* b;

estas relaciones se conocen como *desigualdades estrictas*, puesto que a no puede ser igual a b; también puede leerse como "estrictamente menor que" o "estrictamente mayor que".

- La notación $a \leq b$ significa a es menor o igual que b;
- La notación $a \geq b$ significa a es mayor o igual que b;

estos tipos de desigualdades reciben el nombre de desigualdades amplias (o *no estrictas*).

- La notación $a \ll b$ significa a es mucho menor que b;
- La notación $a \gg b$ significa a es mucho mayor que b;

estas relaciones indican por lo general una diferencia de varios órdenes de magnitud.

- La notación $a \neq b$ significa que a no es igual a b. Tal expresión no indica si uno es mayor que el otro, o siquiera si son comparables.

Conjuntos acotados

Definición:
Sean A, un subconjunto de los números reales y M un número real positivo. Se dice que A es un conjunto acotado si existe un M tal que $\forall x \in A$ se verifica que $|x|$ es menor o igual que M.

A es un conjunto acotado $\Leftrightarrow \exists\ M \in R^{+} / \forall x \in A : |x| \leq M$

Cotas

Sea un conjunto ordenado A y sea un $X \subset A$.
Cota Inferior: $c \in A$ es cota inferior de $X \subset A \Leftrightarrow \forall x : x \in X \Rightarrow c \leq x$;
Cota Superior: $k \in A$ es cota superior de $X \subset A \Leftrightarrow \forall x : x \in X \Rightarrow x \leq k$;

Ejemplo.
Sean el conjunto $A = \{x / x \in R\}$ y el conjunto $X = \{x / -1 < x < 3\}$
Son cotas inferiores de X todos los elementos c del conjunto $\{x / x \in A \wedge x \leq -1\}$
Son cotas inferiores de X todos los elementos k del conjunto $\{x / x \in A \wedge x \geq 3\}$

Ínfimo: $i \in A$ es ínfimo de $X \subset A$ si i es la mayor de las cotas inferiores o cota inferior máxima de X.
Supremo: $s \in A$ es supremo de $X \subset A$ si s es la menor de las cotas superiores o cota superior mínima de X.

Ejemplo:
Toman como ejemplo el conjunto acotado, $A = \{x / x \in R\}$ y el conjunto $X = \{x / -1 < x < 3\}$ serían ínfimo $i = -1$ y supremo $s = 3$.

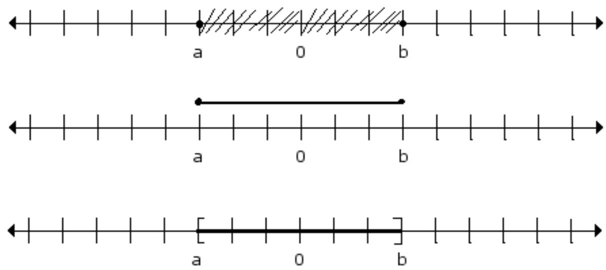
Elemento mínimo: $n = i$ es elemento mínimo de $X \subset A$ si i es ínfimo de $X \wedge i \in$ ▯.

Elemento máximo: m = s es elemento máximo de $X \subset A$ si s es ínfimo de X $\wedge$ $s \in X$.

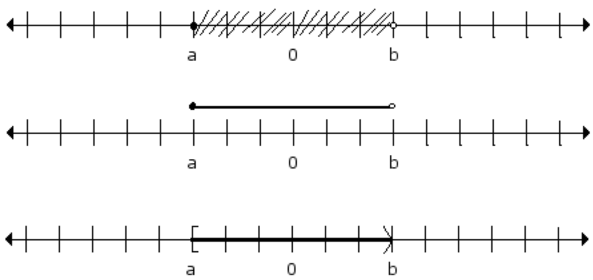
Intervalos

Definición:
Un intervalo es un conjunto comprendido entre dos valores. Específicamente, un intervalo real es un subconjunto conexo de la recta real R, es decir, una porción de recta entre dos valores dados.

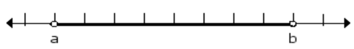
Entonces, dado un intervalo de números reales que van desde a hasta b, incluyendo a los números a y b; denotamos dicho subconjunto como intervalo cerrado desde a hasta b. Simbólicamente escribimos [a, b] y en la recta de los números reales se representa de cualquiera de estas formas:

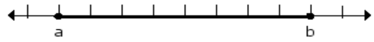
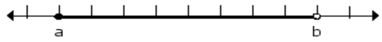
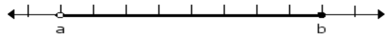
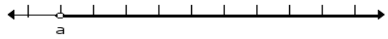
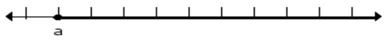
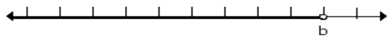
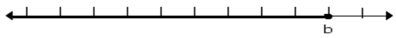


Podemos escribir entonces que cualquier punto comprendido entre a y b, pertenece al intervalo cerrado [a, b]. Simbólicamente $\{x \,/\, a \leq x \leq b\}$.
El intervalo $|x| \leq c$ es el conjunto que verifican las desigualdades $-c \leq x \leq c$.
Pensemos en un intervalo que empieza en a pero llega solamente hasta un punto muy próximo a b, tan próximo como "sea posible". Por ejemplo, si a = 1 y b = 3, podríamos escribir el intervalo antes mencionado según la desigualdad: $1 \leq x \leq 2{,}99$ pero es claro que esto no es exacto, porque dijimos que el intervalo va hasta un valor tan próximo a 2 como "sea posible" y en efecto, es claro que sería más exacto escribir $1 \leq x \leq 2{,}999$ y más exacto aún $1 \leq x \leq 2{,}9999$; y más aún $1 \leq x \leq 2{,}99999$. Esto parece llevarnos a una situación "sin final", se resuelve con la idea de intervalo abierto, de manera que al escribir [1, 3) estamos considerando el intervalo que comienza en 1 (incluyendo al 1) y que llega a 3 (pero no lo incluye). En te caso tenemos un intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha (intervalo semiabierto). En la recta real se representa de cualquiera de las formas siguientes:



Se listan algunos tipos de intervalos, suponiendo siempre que a < b

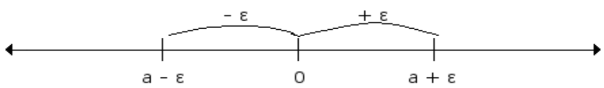
(a, b) $\{x \mid a < x < b\}$ 	abierto

$[a, b]$ $\{x \mid a \le x \le b\}$		cerrado
$[a, b)$ $\{x \mid a \le x < b\}$		semi abierto
$(a, b]$ $\{x \mid a < x \le b\}$		semi abierto
(a, ∞) $\{x \mid x > a\}$		abierto
$[a, \infty)$ $\{x \mid x \ge a\}$		cerrado
$(-\infty, b)$ $\{x \mid x < b\}$		abierto
$(-\infty, b]$ $\{x \mid x \le b\}$		cerrado

Entornos

Definición:
Un entorno de un punto a se denomina semiamplitud $\varepsilon > 0$ que es el conjunto de puntos x determinados por $|x - a| \le \varepsilon$, o sea que verifican las desigualdades $a - \varepsilon \le x \le a + \varepsilon$.

Esto se escribe E (a, ε) y gráficamente se puede representar como sigue.



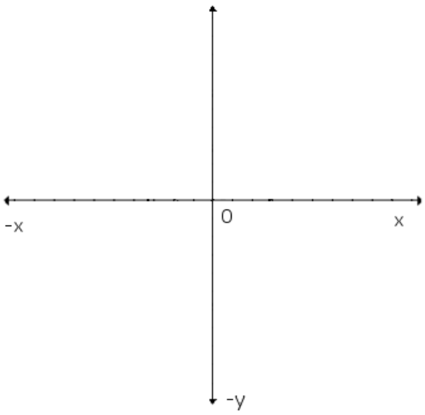
Funciones de una variable real

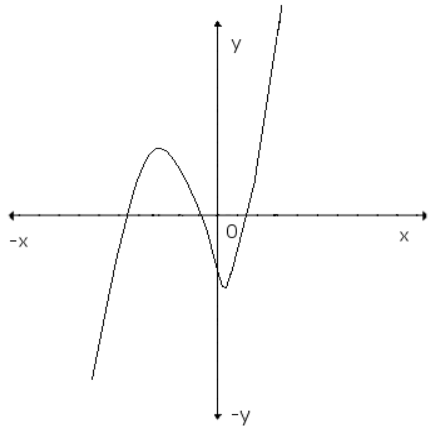
Definición:
Una función es una relación que vincula una variable x que pertenece a un conjunto llamado dominio, con una variable y que pertenece a un conjunto llamado imagen. La notación es y = f(x) y se lee 'y es igual a f de x'.

$$f : X \to R,\ X \subset R,\ X \neq \varnothing$$

$$f : X \to R \,/\, y = f(x)$$

Puede verse desde la definición misma que existe una dependencia de y en función de x. Llamaremos así a x variable independiente y variable dependiente a y.
Una forma de representar gráficamente las funciones entre conjuntos de números reales es mediante coordenadas cartesianas. Esto consiste en un par de rectas normales entre sí, que llamamos ejes coordenados. Donde se intersectan ambos ejes, ubicamos el cero de los ejes. En el eje x de las abscisas a la derecha ubicamos los valores positivos de la variables x y a la izquierda los valores negativos de la variable x. En el eje y de las ordenadas hacia arriba ubicamos los valores positivos de la variable y, y hacia abajo los valores negativos de la variable y.





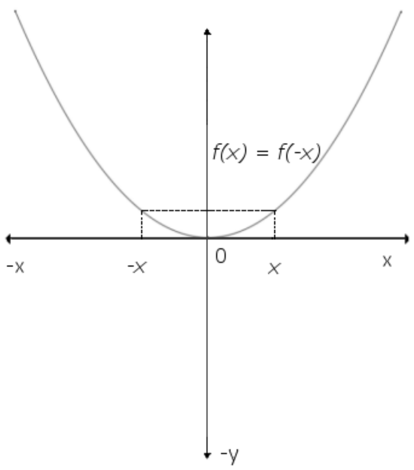
El eje horizontal se llama eje de las abscisas (x), en él se representan los valores del dominio de la función. El eje vertical se llama eje de las ordenadas (y), en él se representan los valores de la imagen de la función.
De manera que a cada punto del eje de las abscisas (x), donde esté definida la función, le corresponde un valor determinado en el eje de las ordenadas (y); el punto del plano (x, y) = (x, f(x)) donde se intersectan las perpendiculares a cada uno de los ejes que pasan por el punto dado, representa un punto de la representación gráfica de la función.
Una función cualquiera y = f(x) definida en un intervalo [a, b] se representa mediante un conjunto de puntos del plano, como por ejemplo la segunda gráfica anterior.

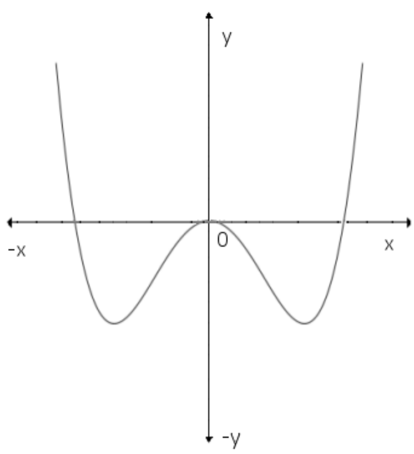
Funciones Pares e Impares

Una función es par si para valores opuestos de la variable independiente, la función f(x) toma el mismo valor; en la función par se verifica entonces que f(x) = f(-x) para cualquier valor de x.
Ejemplo.
$Y = x^2$ porque se verifica que $x^2 = (-x)^2$;
por ejemplo, si x = 2; $f(x) = f(2) = 2^2 = 4$, ahora bien, cuando x = -2; $f(x) = f(-2) = (-2)^2 = 4$ con lo que se verifica f(x) = f(-x).

La gráfica de una función par es siempre simétrica respecto del eje de las ordenadas (y).
La parábola no siempre es función par, es necesario que tenga su vértice en el eje y. Asimismo, la parábola que tiene su vértice en el eje y no es la única función par, también es (entre otras) función par, por ejemplo: $y = x^4 - \frac{x^2}{25}$

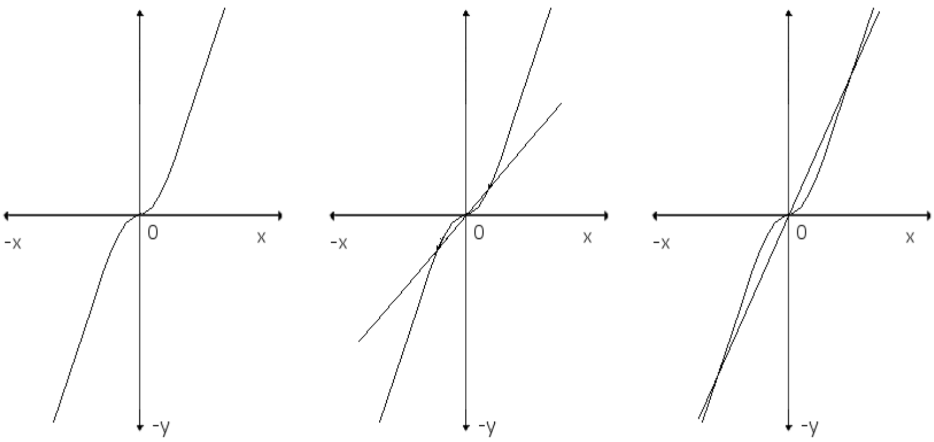
si como ejemplo, es x = 5, $y = y = \frac{5^4}{25} - 5^2 = 0$; si x = 5, $y- = y = (-5)^4 - \frac{(-5)^2}{25} = 0$;





Una función es impar si para valores opuestos de la variable independiente, la función f(x) toma también valores opuestos; en la función impar se verifica entonces que f(x) = -f(-x) para cualquier valor de x.
La gráfica de la función impar es simétrica respecto al origen para todos los valores del dominio.

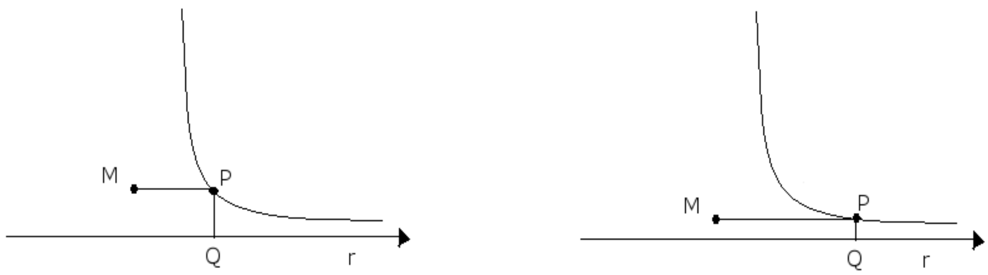
Ejemplo.
y = x2 es impar porque se verifica que $x^3 = -(-x)^3$. Como ejemplo;
si x = 1 f(1) = 1^3 = 1 si x = -1 f(-1) = $(-1)^3$ = -1 verifica que f(1) = -f(-1)
si x = 2 f(2) = 2^3 = 8 si x = -2 f(-2) = $(-2)^3$ = -8 verifica que f(2) = -f(-2)



Hay funciones que no son pares ni impares; por ejemplo: y = $x^3 - 3x + 4$
Pero en esos casos siempre vale el siguiente teorema:
Toda función es igual a la suma de una función par y de una función impar. Se puede escribir entonces
$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$
En el ejemplo y = x2 – 3x + 4 que no es impar, f(x) puede descomponerse en: (x2 + 4) (función par) y (-3x) función impar.

Asíntotas de las curvas planas

Una recta r es asíntota de una recta cuando la distancia de un punto móvil (P) de la curva a la recta r "tiende" a cero, al "tender" a infinito la distancia del punto móvil P a un punto fijo (M) del plano.

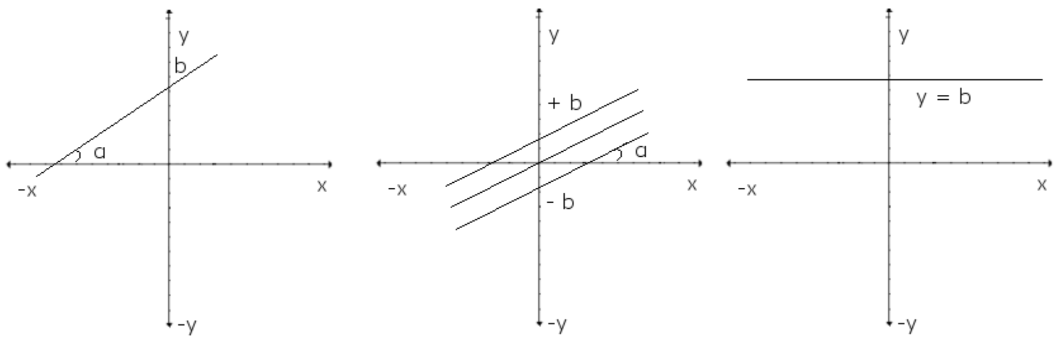


Clasificación de las funciones

Funciones Algebraicas

Definición:
Las funciones algebraicas son aquellas que se escriben mediante expresiones algebraicas ; las variables x e y aparecen ligadas por sumas, restas, productos, cocientes, potencias de expresiones enteras.

Función Lineal: La función lineal tiene la forma y = mx + b donde m y b son números fijos en cada caso, y su única gráfica es la línea recta. En la expresión y = mx + b; m es la pendiente de la "recta" y es igual a la tangente del ángulo α que forma la recta con el eje abscisas (x); b es la ordenada al origen, el punto donde la función corta al eje y.
"m" y "b" se llaman parámetros de la recta, y variando los valores de esos parámetros se obtienen distintas rectas.
En el siguiente gráfico y en la primera parte se ve como la recta corta al eje y, en la segunda parte hay tres rectas que tienen el mismo valor de m y en la tercera parte m vale 0.

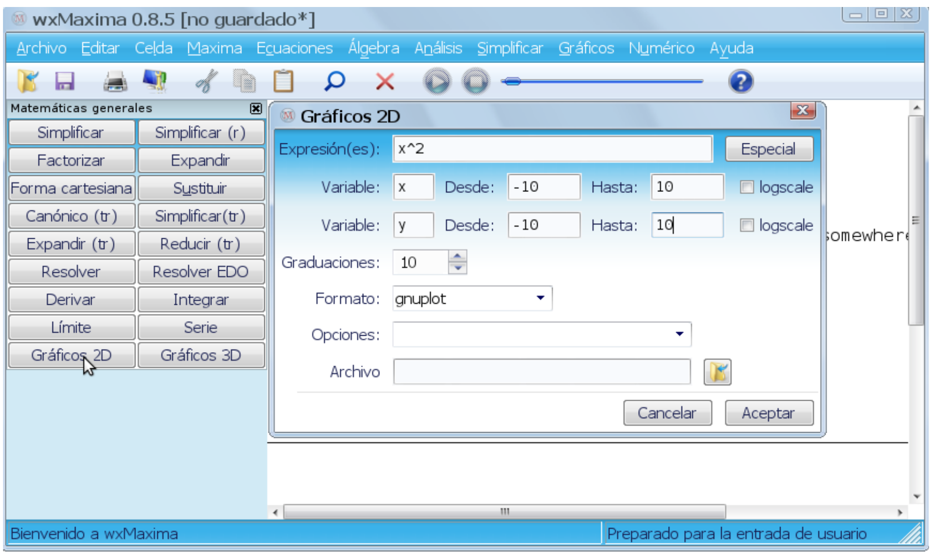


Función Cuadrática

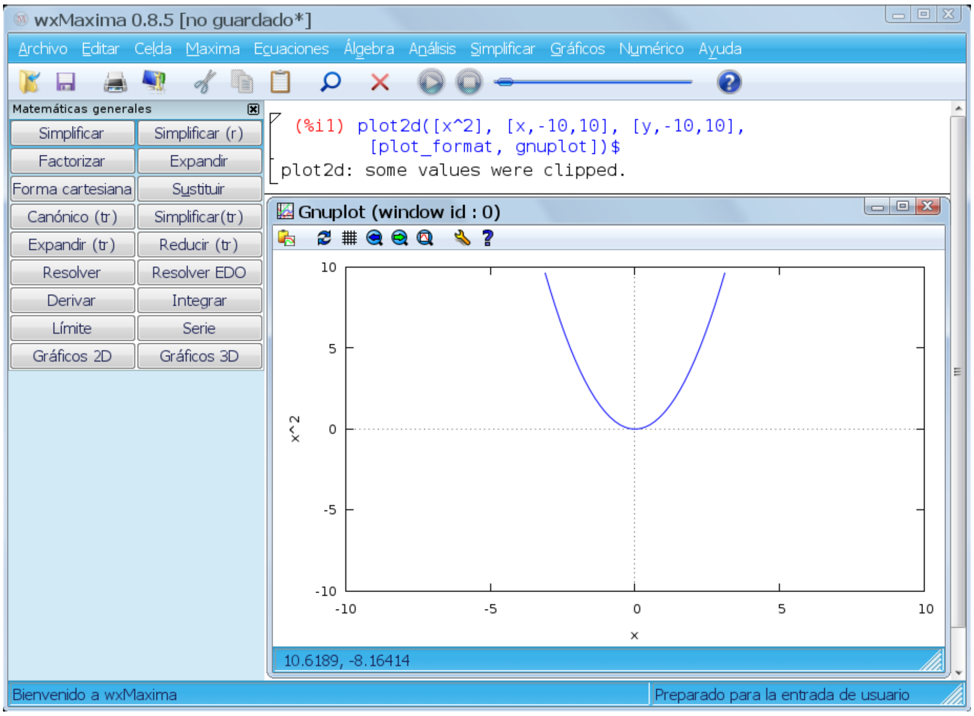
La función cuadrática tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números fijos en cada caso.
Si b = c = 0, la función queda $y = ax^2$; en cuyo caso no importa como sea x ya que si a > 0 resulta siempre y > 0 y caso contrario resulta, si a < 0 resulta siempre y < 0, si x ≠ 0. Por otra parte, advierta que el único valor que hace cero la función $y = ax^2$, es x = 0.

Utilización del Software Máxima.

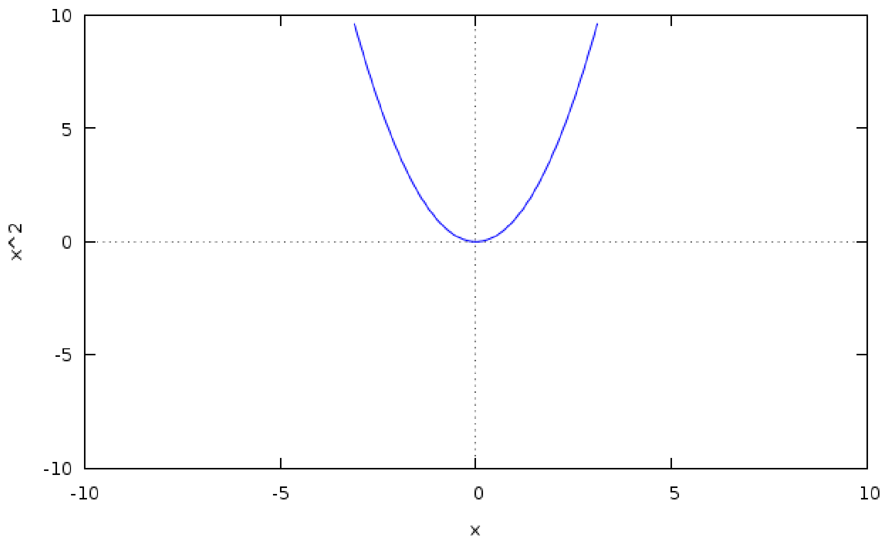
Vea que se pueden representar las funciones fácilmente con el software libre "wxMaxima", en modo gráfico debe ir a la barra de opciones, y clickear en *Máxima > Paneles > Matemáticas generales*, tildando dicha opción. Luego, debe presionar el botón que dice *Gráficos 2D* y fijarse que el formato esté en gnuplot, que es el modo en que se representará los gráficos, de esta forma:



Si está todo como lo descrito en la captura de pantalla, en especial procure borrar el carácter % que aparece en la caja de texto Expresión(es) y escribir lo siguiente x^2 que será lo mismo que escribir en matemáticas $y = x^2$, y decirle que grafique con el botón Aceptar. Deberá aparecer lo siguiente:

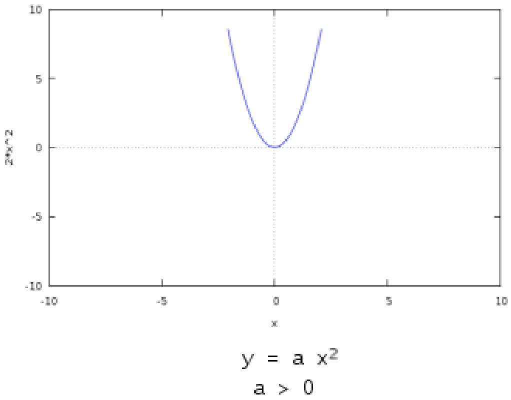


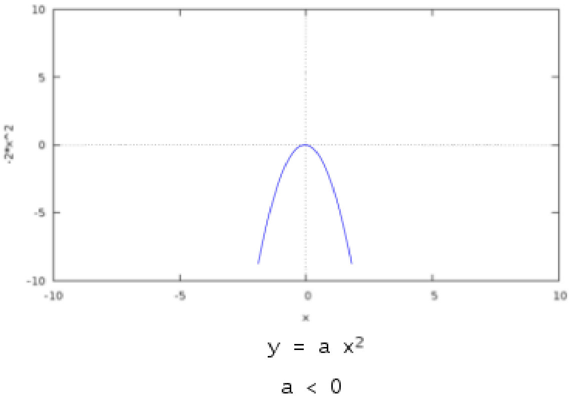
Siendo gnuplot una ventana totalmente independiente de “Máxima”, y teniendo funciones de zoom y de poder copiar la imágen de alta calidad de la función representada, integrándose fácilmente a herramientas de procesamiento de texto o de manipulación de imágenes.
Por ejemplo, copio la imágen como está en este documento:



Se puede ver también fácilmente que en la parte izquierda está en la forma escrita de la función, es la misma forma en que se escribe en la parte expresiones, como para tener en cuenta.
Desde ahora en más probaremos las funciones con dicho software.

Siguiendo con las funciones cuadráticas, se había dicho que si a, (el valor que acompaña a x), es mayor que 0 la curva iba a irse hacia arriba y si esa misma a tomaba valores negativos la curva iba a irse por abajo. Esto puede probarse con “máxima”.

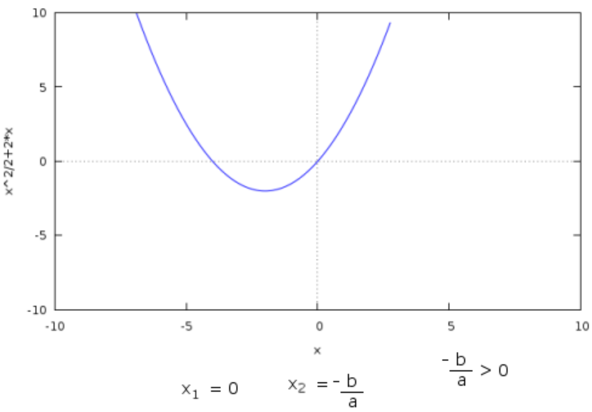


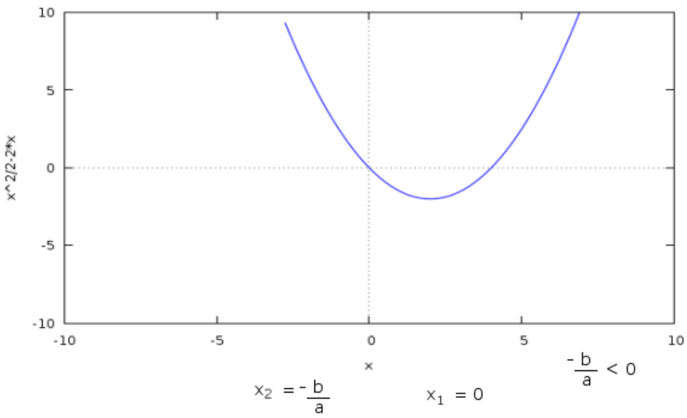


Si solamente $c = 0$, la función es $y = ax^2 + bx$; esta expresión puede escribirse $y = x\,(ax + b)$, en donde uno de los valores que hace cero la función es precisamente $x = 0$ y el otro surgirá de $ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$

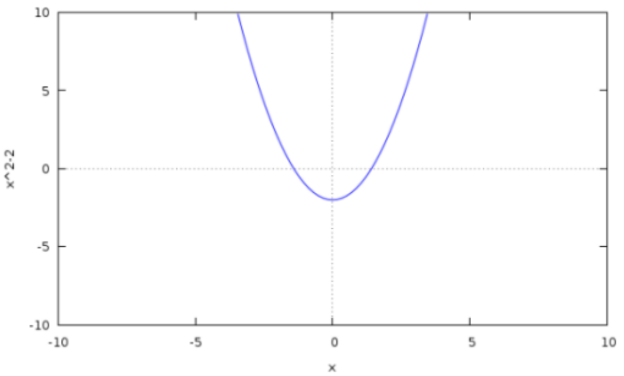
La curva corta al eje x en $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-b}{a}$

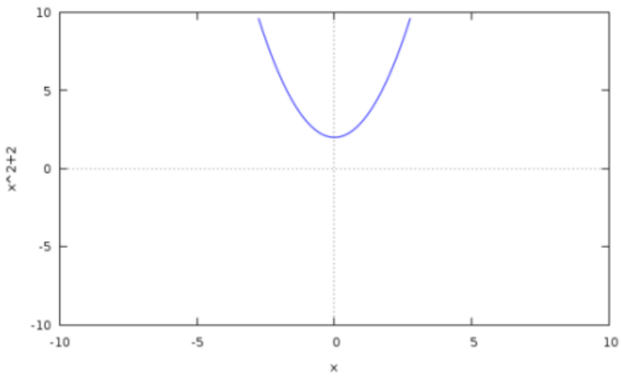
Si solamente $b = 0$, la función es: $y = ax^2 + c$; de esta expresión despejando x se obtienen los puntos donde la curva corta el eje x ; $ax^2 + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$; Si $\frac{-c}{a} > 0$; la curva corta el eje x.





Pero si $\frac{-c}{a} < 0$ la curva no corta el eje x y las raíces de la ecuación $ax^2 + c = 0$ (valores de x que hacen $f(x) = 0$), son números complejos.





Si $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$, la función cuadrática toma la forma completa $y = ax^2 + bx + c$ que puede escribirse: $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

si le sumamos y restamos $\frac{b^2}{4a^2}$ queda

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

la expresión encerrada entre corchetes es una diferencia de cuadrados, puede escribirse entonces:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right]$$

en esta expresión $y = 0$ solamente cuando uno de los corchetes sea nulo.

Si $\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a^2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ igualmente

Si $\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a^2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

De estas expresiones sale la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; si llamamos discriminante Δ a $b^2 - 4ac$; entonces

Si $\Delta > 0$ la gráfica de la función corta al eje x en dos puntos diferentes (tiene dos raíces reales diferentes la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$).
Si $\Delta < 0$ la gráfica de la función no corta al eje x (la ecuación citada tiene dos raíces reales complejas).
Si $\Delta = 0$ la gráfica de la función es tangente al eje x en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ (tiene una raíz real doble nuestra ecuación).

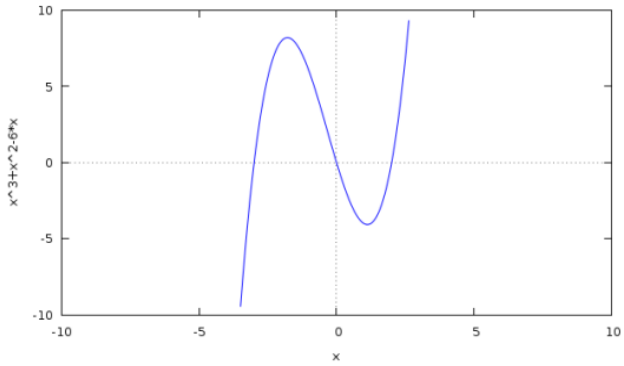
Función Racional Entera

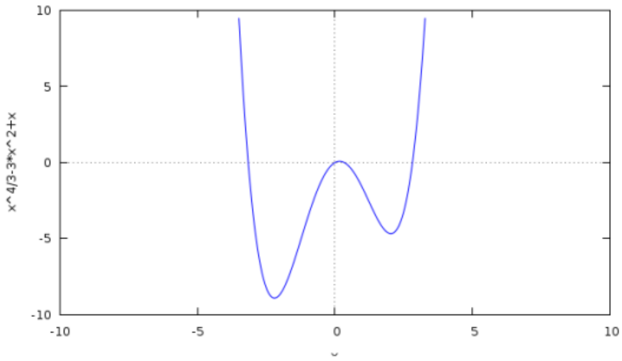
Las funciones racionales enteras o funciones polinómicas, son expresiones de la forma: $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
donde $n \in$ N, los a_i son números fijos en cada caso. El grado de la función está dado por el máximo exponente n, con $n \in$ N. La función lineal y la cuadrática son casos particulares de la función polinómica, donde n es igual a 1 y 2 respectivamente.
Para el análisis de estas funciones se usan los mismos recursos que en el trabajo con polinomios; el teorema de Gauss para hallar las posibles raíces racionales; relaciones entre raíces y coeficientes si es necesario (y posible); la regla de Ruffini para factorear la expresión y escribir por ejemplo:

$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - a_1)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + a_0)$

Ejemplos de gráficos de funciones polinómicas:

$y = x^3 + x^2 - 6x$; $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{3}$





Función Homográfica

Recibe este nombre la función de la forma $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

Si c = 0 la expresión se reduce a una función lineal: $y = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$

Si es c ≠ 0 y efectuamos el cociente, tenemos $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc - ad}{c\,(cx + d)}$

De donde, si bc – ad = 0, resulta $y = \dfrac{a}{c}$, que es una función constante.

Entonces, para que $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ sea función homográfica (y no se reduzca a una función constante o lineal), es necesario que:

1) c ≠ 0
2) bc – ad ≠ 0

El único valor de x para el cual esta función no está definida, es el que hace el denominador nulo: cx + d = 0 → $x = -\dfrac{d}{c}$; cuando x tiende (se acerca "mucho") a "$-\dfrac{d}{c}$"; el denominador de la función se acerca "mucho" a 0; en consecuencia $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ se hace cada vez más grande en valor absoluto a medida que nos acerquemos a $-\dfrac{d}{c}$. La recta $x = -\dfrac{d}{c}$ se llama asíntota vertical de la gráfica de la función, no la corta en ningún punto. Es un auxiliar importante para representar gráficamente la función.

Si, supuesto c ≠ 0, dividimos el numerador y denominador de la expresión fraccionaria de la función $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ por cx tenemos:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{cx}}{1 + \dfrac{d}{cx}}$$

Cuando x crece en valor absoluto indefinidamente, $\dfrac{b}{cx}$ y $\dfrac{d}{cx}$ se acercan mucho a cero; luego y se acerca a $\dfrac{a}{c}$.

Es precisamente la recta $y = \dfrac{a}{c}$ lo que llamamos asíntota horizontal de la gráfica de la función y es una recta perpendicular al eje y a la cual la función no la corta en ningún punto.

La asíntota horizontal es un auxiliar importante para representar gráficamente la función.

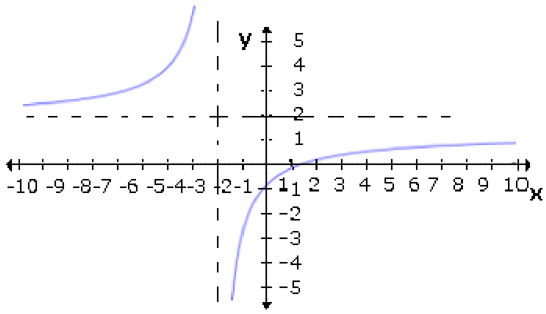
Ejemplo: Representamos gráficamente, analizando la función $y = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$

En la expresión $y = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$, a = 2, b = -3, c = 1, d = 2

La asíntota vertical está en $x = -\dfrac{d}{c}$ $\quad x_a = -\dfrac{d}{c} = \dfrac{-2}{1} = -2$

La asíntota horizontal está en $y = \frac{a}{c}$ $y_a = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$

Conociendo las asíntotas, buscamos los puntos donde la función intersecta los ejes. Intersecta el eje x en y = 0; esto sucede en $2x-3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$



Intersecta el eje y en x = 0; en este punto la función vale: $y = \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{2 . 0 - 3}{0 + 2} = \frac{-3}{2}$

Finalmente se buscan valores de f(x) para valores de x, preferentemente equidistantes de la asíntota vertical.

Función Racional Fraccionaria

La función homográfica es un cociente de dos funciones polinómicas de primer grado; las funciones racionales fraccionarias, son cocientes de dos polinomios de grado n y m respectivamente. De manera que:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

todos los valores de x que anulan al numerador, pero no el denominador son ceros de la función. Los valores de x que solo anulan al denominador, son polos o infinitos de la función y en el gráfico determinan asíntotas verticales.

Ejemplo:

Analizar y representar gráficamente la función $y = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

1) Buscamos las asíntotas verticales de la función (valores de x donde no existe f(x)). Hacemos el denominador igual a 0 y despejamos x.

$x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = -2$

2) Son ceros del numerador los valores de x que verificar: $2x^4 - x^2 + 1 = 0$ que resolvemos aplicando la fórmula de la resolvente bicradrática.

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad = \text{en nuestro caso:} \quad x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 . 2 . 1}}{2 . 2}}$$

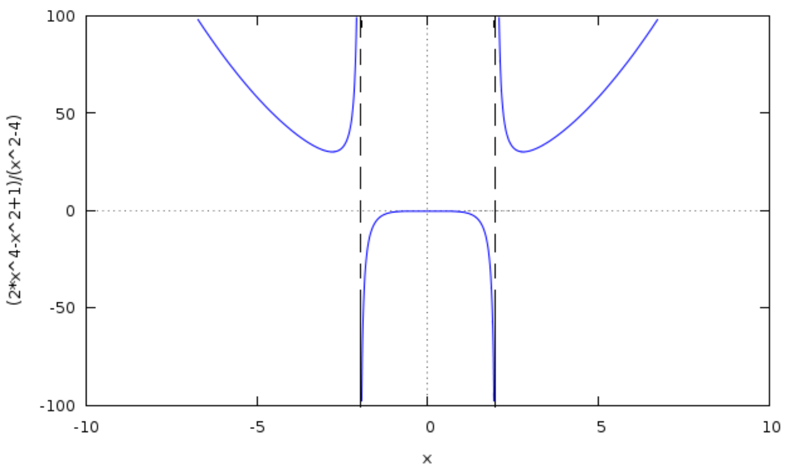
$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4}} =$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{7}i}}{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{7}i}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-\sqrt{1+\sqrt{7}i}}{2}$$

$$x_4 = \frac{-\sqrt{1-\sqrt{7}i}}{2}$$

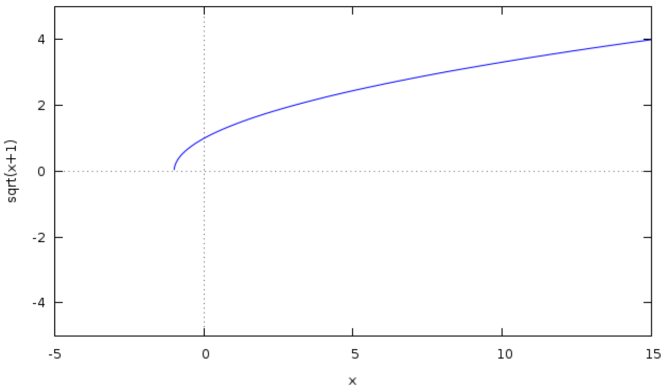


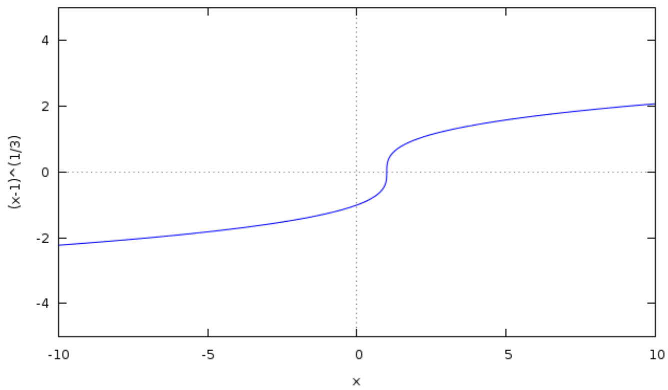
En este caso todas las raíces son complejas, lo que significa que el eje x no es cortado por la curva de la función. En nuestro gráfico, la curva parece tocar al eje x pero ello se debe a la diferencia adoptada para los ejes x e y.

Función Irracional

Cuando además de las 4 operaciones (suma, resta, producto y cociente, - y como caso particular la potenciación-), aparecen las raíces, se tiene una expresión irracional; son funciones de la forma $y = \sqrt{ax+b}$ o $y = \sqrt[3]{ax+b}$ en general: $y = \sqrt[3]{ax+b}$

Ejemplo: Trazar la gráfica de la función $y = \sqrt{x+1}$
La raíz cuadrada puede tomar signo + o -, hay que aclarar cual de los dos signos se adopta, de lo contrario estaremos en el caso de una "función multiforme", que no es objeto de estudio en este material.
Adoptamos como valor de la función, el resultado positivo (+) de la raíz cuadrada. Observe que la función está definida solamente para $x \geq -1$. Esto es porque la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. Por otra parte, es $x + 1 \geq 0$ cuando $x \geq -1$.





Ejemplo: Trazar la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{x-1}$
En el caso de la raíz cúbica no se plantea la cuestión del doble resultado y está definida para todos los números reales.

FUNCIONES TRASCENDENTES

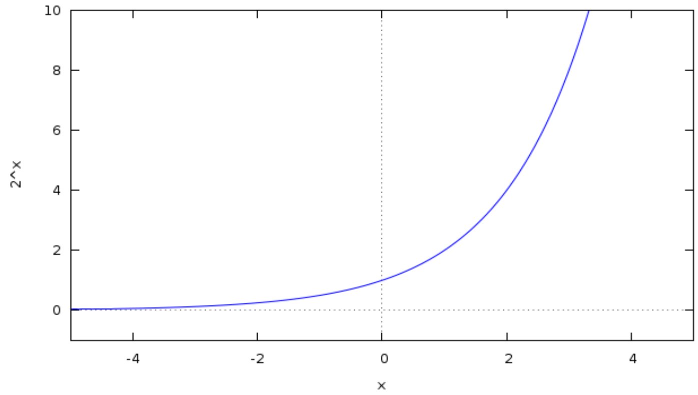
Son las funciones cuyo análisis trascienden el campo del álgebra.
Función Exponencial: Es la forma $y = a^x$ donde $a > 0 \wedge a \neq 1$. Esta función está definida para cualquier valor real de x.

En caso de ser x un número fraccionario, a la expresión $y = a^{m/n}$ toma la forma $\sqrt[n]{a^m}$.

En caso de ser x < 0; por ejemplo x = -p tendremos: $y = a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

Ejemplo: Trazar el gráfico de $y = 2^x$

x	*f(x)*
0	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

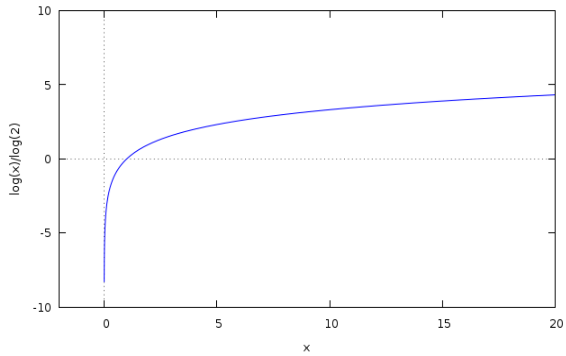


Función Logarítmica

El logaritmo en base a de un número x es el exponente y al que hay que elevar a para que resulte igual a x. Simbólicamente: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = ay$.
(La base a debe ser positiva y distinta de 1 -vea función exponencial-).

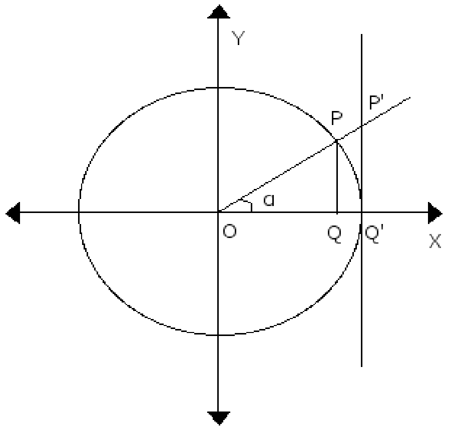
Ejemplo:
$y = \log_2 x$

x	*f(x)*
0,125	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4



Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas establecen relaciones entre el arco o ángulo α que barre el radio de una circunferencia y radio ρ. Para una circunferencia de radio ρ = 1, decimos que 1 giro completo del radio describe un ángulo c = 360° o un arco de 2π. Las relaciones llamadas seno, coseno, tangente; y sus inversas.



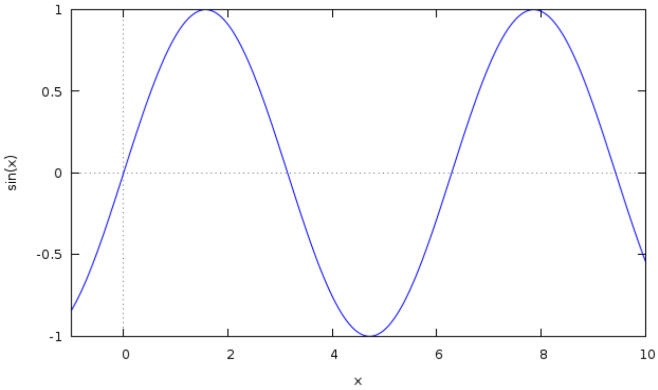
$$\text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{OP}{PQ}$$

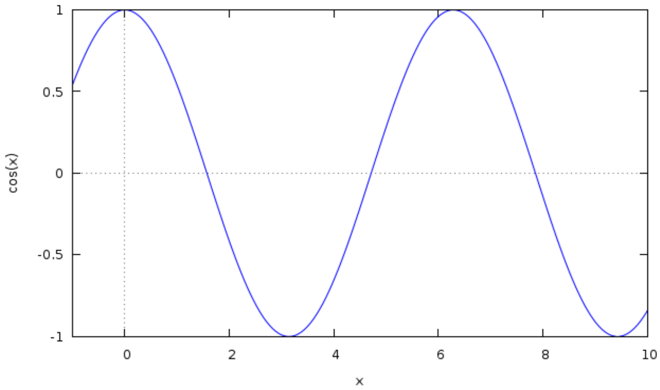
$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP} \qquad \sec \alpha = \frac{OP}{OQ}$$

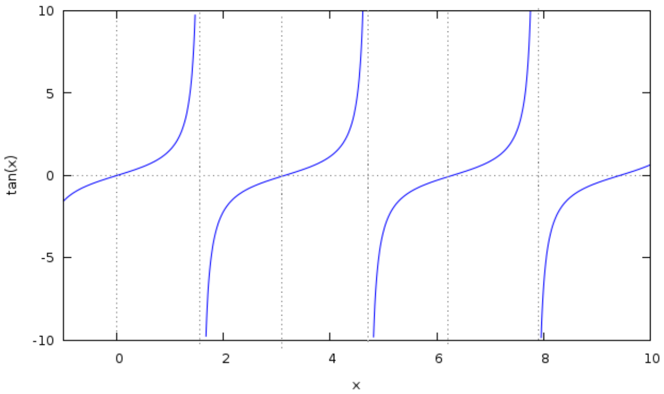
$$\text{tg } \alpha = \frac{PQ}{OQ} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{OQ}{PQ}$$

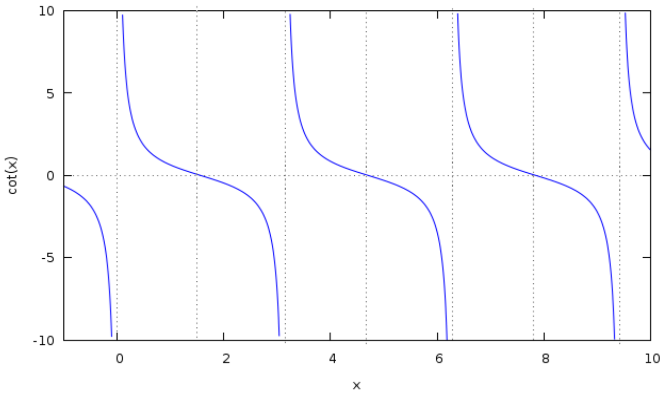
$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

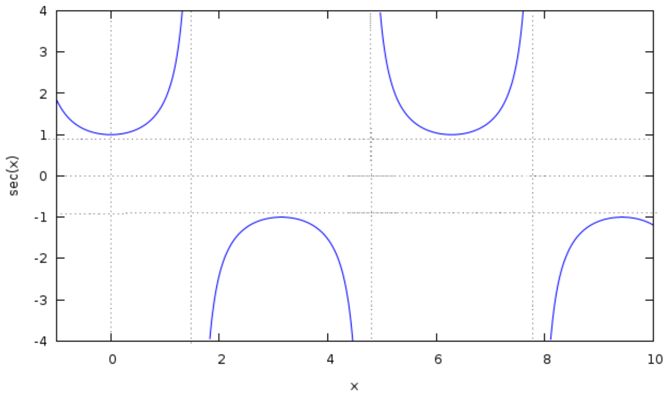
Tenga presente que el dominio de las funciones trigonométricas son ángulos expresados en sistema circular (radianes) o arcos; mientras la imágen es el intervalo [-1; 1] en el caso del seno y coseno, mientras que para la tangente, la imagen es el intervalo (-∞, +∞).

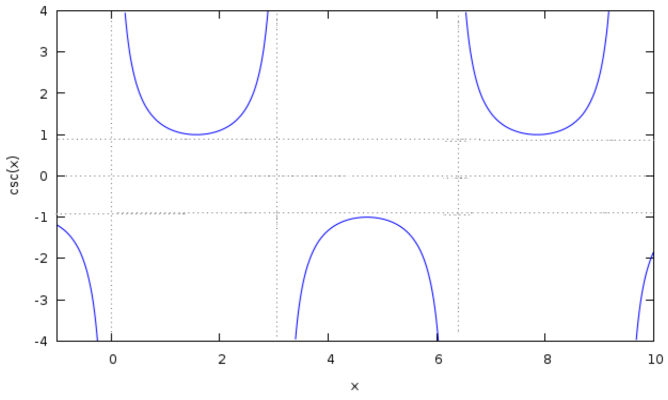












es la función inversa de y = sen(x)
Para la expresión y = sen(x) sucede que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y. Pero en la expresión y = arcsen(x) no sucede esto, porque, por ejemplo: si x = 1 el arco cuyo seno es 1 puede ser $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$ ..., en definitiva, le corresponden infinitos arcos x al valor sen(x) = 1.

Generalizando x toma los valores $\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ con $k \in N_0$

Para evitar esta ambigüedad, definiremos:

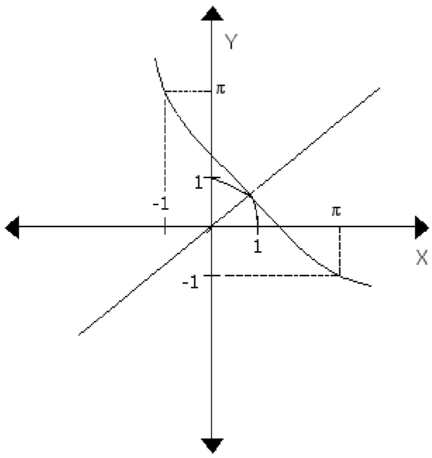
y = arc sen x, considerado sen y en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

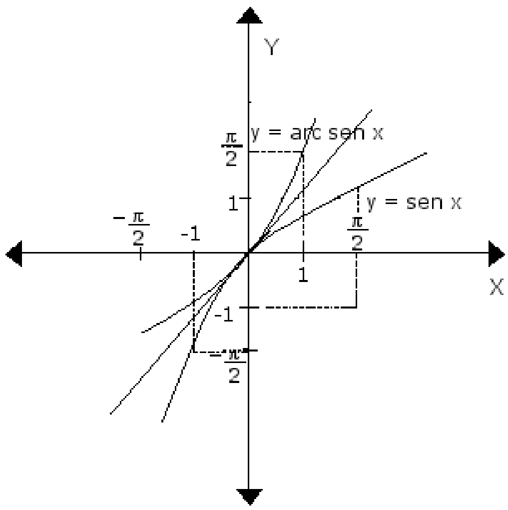
y = arc cos x, considerado cos y en el intervalo $0 \leq y \leq \pi$

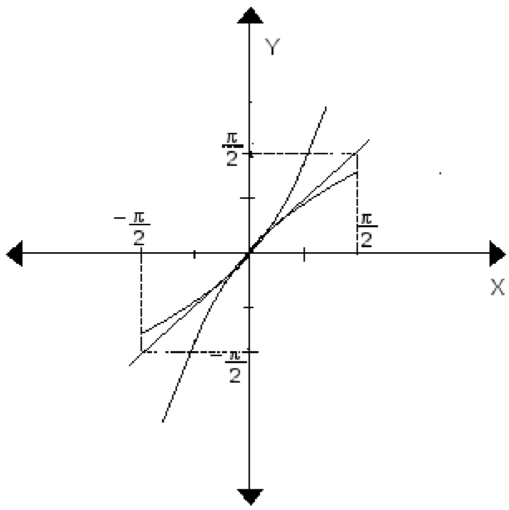
y = arc tg x, considerado tg y en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

De esta forma a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

En las gráficas las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente con sus respectivas inversas. Puede observar en todos los casos, que cada una de las funciones es simétrica, respecto de la función y = x (bisectriz del 1° cuadrante) con su inversa.







FUNCIONES DEFINIDAS POR PARTES

Este es un tipo particular de función (que no entra en la clasificación antes propuesta) en razón de que su "ley de variación" puede adoptar la forma de dos o más de las funciones antes detalladas.

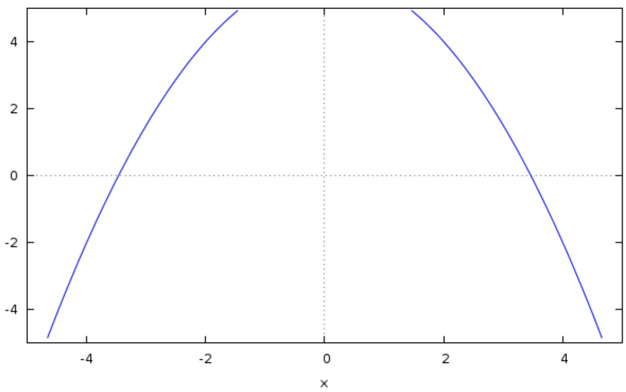
> *Definición:*
> Una función está definida por partes si para diferentes intervalos de su dominio, tiene diferentes leyes de variación.

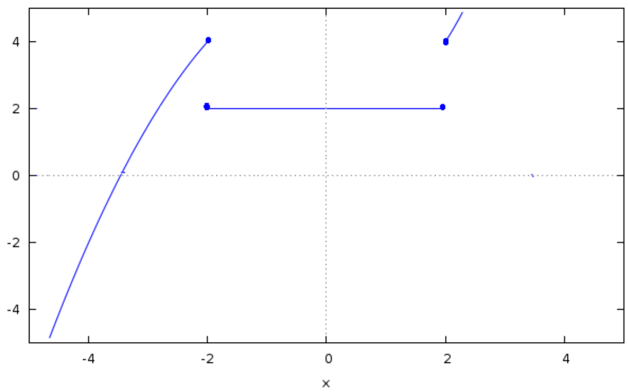
Ejemplo:
Sea la función f(x), definida en el conjunto de los números reales (es decir que el dominio de la función es elemento R); si f(x) tiene una ley de variación por ejemplo $x + 1$ para los valores reales menores que 1 (sin incluir al 1), esto es en el intervalo $(-\infty,1)$; y otra ley de variación diferente para valores reales mayores o iguales que 1, esto es en el intervalo [1,), por ejemplo $-x^2 -1$. Esta función se presenta de la siguiente manera:

$$f: R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y en su representación en ejes cartesianos se observa claramente una “forma” gráfica para cada intervalo del dominio con “definición diferente”.
Una función definida por partes puede tener más de dos “leyes de variación”.

$$f: R \to R \,/\, f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{2} + 6 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2^x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$





COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sea una función $y = f(u) = \sqrt{u}$; pero la variable u de la función dada es a su vez una función de una variable independiente x, expresada por: $u = g(x) = x^3 - 1$. Dado que y es función de u, pero u es a su vez función de x, es posible escribir:

$y = \sqrt{u} = \sqrt{x^3 - 1}$ o lo que es lo mismo $y = f(u) = f(g(x))$

Bien podemos escribir que $y = f(u) = f(g(x)) = h(x)$
Este procedimiento se llama composición de funciones, porque la nueva función h(x) se “compone” con funciones f(u) y g(x).
Este procedimiento se puede realizar cualquiera sea la variable de f y la variable de g.

> *Definición:*

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta f º g se define mediante (f º g)(x) = f(g(x)).

El dominio de (f º g)(x) son aquellos valores que toma la variable independiente x para los que existe g(x); con la condición de que a su vez, para esos valores de g(x), exista f(g(x)).

Ejemplo:
Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Determine las funciones compuestas (f º g)(x); (g º f)(x); (f º f)(x) y (g º g)(x) y analice sus dominios de definición.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$.
El dominio g(x) es el conjunto de los números reales, y el dominio de (f º g)(x) también es el conjunto de los números reales.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$
El dominio f(x) es el conjunto de los números reales mayores o iguales que 0 , y el dominio de (g º f)(x) en este caso, también es el conjunto de los números reales mayores o iguales a 0.

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{(\sqrt{x})^2} = \sqrt[4]{x}$
El dominio f(x) es el conjunto de los números reales mayores o iguales que 0 , y el dominio de (f º f)(x) en este caso, también es el conjunto de los números reales mayores o iguales a 0.

a) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2+2$
El dominio g(x) es el conjunto de los números reales, y el dominio de (g º g)(x), también es el conjunto de los números reales.

Límite de una función

Si consideramos la función $y = x^2 + 1$ y deseamos saber qué sucede para valores muy próximos a x = 1, pero sin que nos interese lo que pasa en x = 1 exactamente, sino solamente en valores muy próximos a él, por ejemplo:
para:
$x = 0{,}9 \to f(0{,}9) = 0{,}9^2 + 1 = 1{,}81$
$x = 0{,}99 \to f(0{,}99) = 0{,}99^2 + 1 = 1{,}98$
$x = 0{,}999 \to f(0{,}999) = 0{,}999^2 + 1 = 1{,}998$
$x = 0{,}9999 \to f(0{,}9999) = 0{,}9999^2 + 1 = 1{,}9998$
y así podríamos seguir "acercándonos" a x = 1 tanto como quisiéramos, agregando cifras decimales a la derecha (preferentemente 9); de esa manera, tendríamos valores de y cada vez más próximos a y = 2 (sin ser nunca y = 2 exactamente -recuerde que no calculamos el valor de la función en el punto, sino en valores de x muy próximos a x = 1). Observe que "nos acercamos" a x = 1 por la izquierda (con valores menores que 1); pero también podríamos haberlo hecho por la derecha, por ejemplo, con los siguientes valores:
para
$x = 1{,}1 \to f(1{,}1) = 1{,}1^2 + 1 = 2{,}21$
$x = 1{,}01 \to f(1{,}01) = 1{,}01^2 + 1 = 2{,}02$
$x = 1{,}001 \to f(1{,}001) = 1{,}001^2 + 1 = 2{,}002$
$x = 1{,}0001 \to f(1{,}0001) = 1{,}0001^2 + 1 = 2{,}0002$
tanto por izquierda como por derecha, cuando "nos acercamos" a x = 1 "tanto como quisiéramos", f(x) se acerca a 2 "cada vez más".
Informalmente "el límite de la función $x^2 + 1$ cuando x tiende a 1 es igual es igual a 2", simbólicamente $\lim_{x \to 2} (x^2+1) = 2$

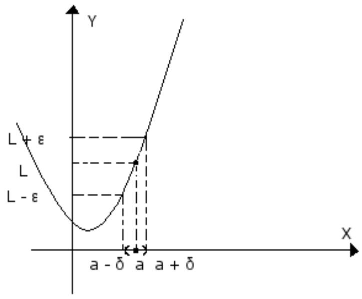
Definición:
Un límite $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

"El límite de una función para x tendiendo a "a" es L solo si para todo épsilon mayor que cero tal que el valor absoluto es mayor que cero y menor que delta entonces el valor del valor absoluto es menor que épsilon"

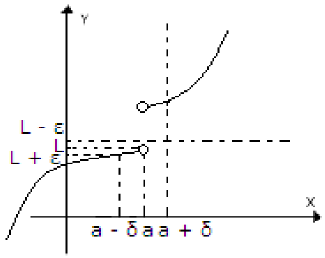
Interpretación geométrica

Definición:

La definición del límite se puede “interpretar geométricamente”, el límite de f(x) es igual a L cuando x tiende a a si es posible acercar arbitrariamente los valores de f(x) a L (tanto como lo deseemos), aproximando x a a, pero sin ser nunca x = a.



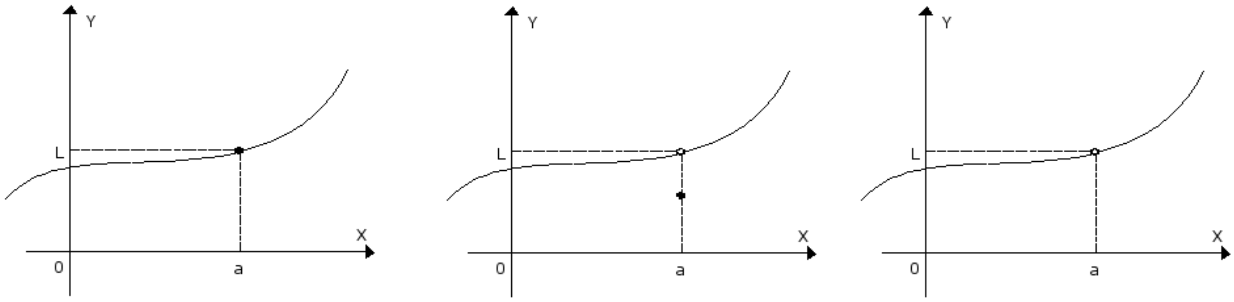
Se toma un entorno reducido centrado en a, de radio δ , (a – δ, a + δ) - {a} , excluyendo a a, por definición, donde cada punto en ese entorno va a tener va a tener su imagen en un entorno centrado en L , de radio ε (L – ε, L + ε).
Aunque esto no se da en todos los casos ya que si tenemos una función con un salto por ejemplo:



En el gráfico siguiente, la primera función está definida en el conjunto de los Reales y $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = L$

La segunda función -definida también en el conjunto de los Reales- tiene una ley de variación muy parecida que la anterior, con la sola excepción que en x = a la función no vale L, sino un valor diferente de L. En este caso $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pero $f(a) \neq L$.

La tercera función está definida en el conjunto de los Reales distintos de x = a y tiene una ley de variación muy parecida a las anteriores, con la sola excepción que la función no está definida en x = a. En este caso lim f(x) = L, aunque $f(a) \nexists$



Ejemplo:
Encuentre el límite de f(x) = 2*x – 1 cuando $x \to 3$ y verifique el valor hallado aplicando la definición.
Para calcular el límite de la función hallamos en “valor que tomaría” la función “si la variable fuera x = a”; sin perder de vista que no estamos calculando el valor de la función en el punto, sino en el límite.

$$\lim_{x \to 1} 2x - 1 = 2 \,.\, 3 - 1 = 5$$

Verificación si $|f(x) - L| < \varepsilon$ entonces:

$|f(x) - L| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2\,|x - 3| = |x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ si hacemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ tenemos que se verifica que:

$$\lim_{x \to 1} 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

Límites laterales

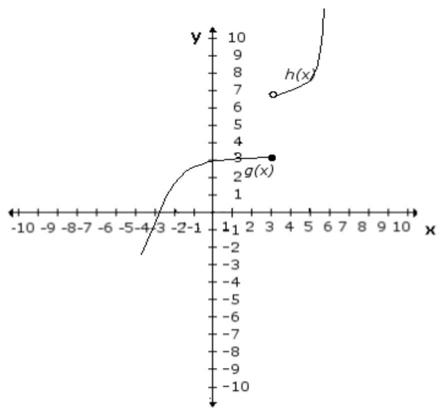
Algunas funciones, como las que se definen con dos leyes de variación diferentes – cada una en diferentes intervalos-, que tienen un “salto” en la gráfica para un valor de la variable x.

Definición:
Dado un salto en x = a y una función por partes:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{g(x)} & \mathbf{si}\ x \le a \\ \mathbf{h(x)} & \mathbf{si}\ x > a \end{cases}$$

Se define límite por izquierda a $\lim\limits_{\substack{x \to a\ (x<a) \\ x \to a^-}} f(x) = l_1$

Se define límite por derecha a $\lim\limits_{\substack{x \to a\ (x>a) \\ x \to a^+}} f(x) = l_2$



Si los límites laterales l_1 y l_2 son iguales decimos que la función tiene límite.

por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{6} + x + 2 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

tiene un “salto” en 3
Porque $f(3) = \dfrac{-3^2}{6} + 3 + 2 = \dfrac{-9}{6} + 5 = \dfrac{-21}{6}$ pero apenas se haya avanzado en el dominio más allá de x = 3, ya debemos usar la ley de variación $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + 6$, que en valores muy próximos a x = 3, pero por encima del punto x = 3 resultan:

$f(3{,}01) = \frac{(3{,}01)^2}{4} - \frac{(3{,}01)}{2} + 6 = 6{,}760025$

$f(3{,}001) = \frac{(3{,}001)^2}{4} - \frac{(3{,}001)}{2} + 6 = 6{,}7510$

$f(3{,}0001) = \frac{(3{,}0001)^2}{4} - \frac{(3{,}0001)}{2} + 6 = 6{,}7501$

Si x fuera igual a 3 – que no puede ser igual para esta ley de variación- pero "supongamos" que pudiéramos "acercarnos tanto" a x = 3; tendríamos que f(x) se "acercaría" mucho a f(3) calculado con la segunda ley de variación; esto es: $f(3) = \frac{3^2}{2} - \frac{3}{2} + 6 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} + 6 = \frac{27}{4}$

Observe que f(3) tiene diferentes resultados cuando se calcula con las dos leyes de variación, esto es porque se evidencia en el cálculo el "salto" que se ve en el gráfico.

Si tomamos la primera ley de variación $f(x) = -\frac{x^2}{6} + x + 2$ y por ella nos acercamos a x = 3, decimos que calculamos así el límite de f(x) cuando x tiende a 3 por izquierda; simbólicamente se escribe $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.

Si tomamos la segunda ley de variación $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 6$ y por ella nos acercamos a x = 3, decimos que calculamos así el límite de f(x) cuando x tiende a 3 por derecha; simbólicamente se escribe $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

En este caso entonces, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = l_1$, es distinto de $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = l_2$. Así, no se verificar que $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ porque L debe ser único; y nosotros tenemos $l_1 \neq l_2$. De donde decimos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Propiedades de los límites

Definición:

Si a y b son números reales y n un entero positivo, f y g son funciones, las propiedades se definen de la siguiente manera:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ **y** $\lim\limits_{x \to a} g(x) = K$

***Límites Básicos*:**

$\lim\limits_{x \to a} b = b$ $\qquad \lim\limits_{x \to a} x = a$ $\qquad \lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

Operaciones con límites:

Múltiplo Escalar: $\lim\limits_{x \to a} [b \cdot f(x)] = b \cdot L$

Suma o Diferencia: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

Producto: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = LK$

Cociente: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K'}$ **con K ≠ 0**

Potencias: $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$

Límites de las funciones polinomiales y racionales:

Si p es una función polinomial, entonces:

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

Si r es una función racional dada por r(x) = p(x)/q(x) y a un número tal que q(a) ≠ 0 , entonces:

$$\lim_{x \to a} r(x) = r(a) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

Límites de las funciones radicales:

Si n es un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda a si n es impar, y para toda a > 0 si n es par:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} .$$

Límites de las funciones compuestas:

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces :

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(L)$$

Límites de las funciones trigonométricas:

$$\lim_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a \qquad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x \to a} \text{tg } x = \text{tg } a \qquad \lim_{x \to a} \text{cotg } x = \text{cotg } a$$

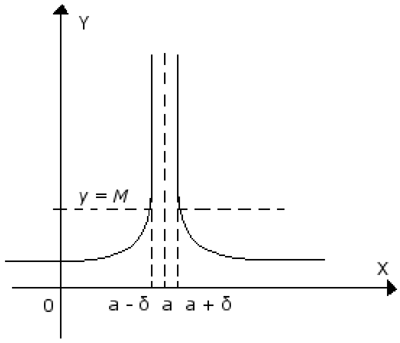
$$\lim_{x \to a} \sec x = \sec a \qquad \lim_{x \to a} \text{cosec } x = \text{cosec } a$$

Límites infinitos

Definición:

Una función f(x) tiene límite infinito cuando $x \to a$, si se puede hacer f(x), en valor absoluto, tan grande como se quiera, para valores suficientemente próximos de x = a.

$\mathbf{\lim_{x \to a} f(x) = \infty}$, se lee 'El límite de la función f(x) cuando x tiende a a es igual a infinito'. Significa que para cada valor positivo M que puede tomar la función f(x), hay un correspondiente **$\delta > 0$**, tal que **$f(x) > M$** siempre que **$0 < | x - a| < \delta$.**



Aquí tampoco interesa el valor de f(x) en x = a, sino en los valores del entorno de a.

Cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, en x = a existe una asíntota vertical.

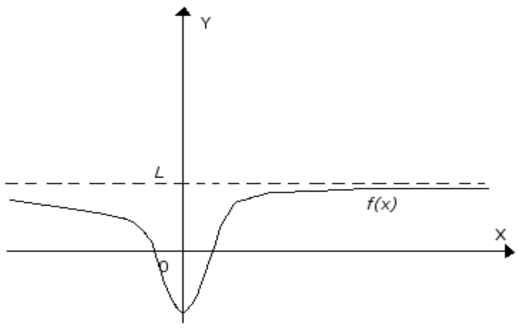
En rigor, podría decirse que escribir $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ es una manera de decir que la función f(x) no tiene límite finito cuando $x \to a$ porque ∞ no es un número, ni siquiera es un número "muy grande", sino que es una manera de expresar que la función f(x) crece tanto como se quiera, a medida que x tiende a a.

Límites con la variable x tendiendo a infinito

Límite finito con la variable tendiendo a infinito

Se dice que la función f(x) definida en un intervalo (a, ∞) tiene límite L cuando $x \to \infty$, si los valores f(x) se pueden acercar arbitrariamente a L, cuando x se hace tan grande como se quiera.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ se lee: "el límite de la función f(x) cuando x tiende a infinito es igual a L"

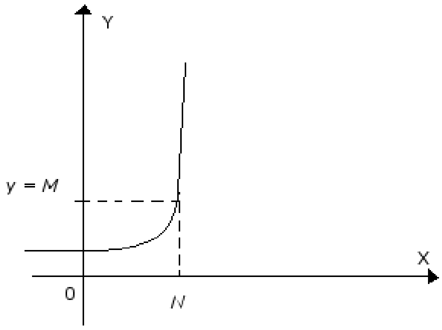


Límite infinito con la variable tendiendo a infinito

Se dice que la función f(x) definida en un intervalo (a, ∞) tiene límite *infinito* cuando $x \to \infty$, si los valores f(x) crecen a medida que x se hace tan grande como se quiera.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ se lee: "el límite de la función f(x) cuando x tiende a infinito es igual a infinito"

Significa que para todo número positivo M hay un número N > 0 correspondiente, tal que f(x) > M siempre que x > N.



Infinitésimos

> *Definición:*
> Se dice que una función y = f(x) es infinitésima en un punto x = a si y solo si el límite de esa función para x tendiendo a a es 0.
>
> $$f(x) \text{ es infinitésima en } x = a \iff \lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Ejemplos:

y = x es infinitésimo en x = 0 porque $\lim_{x \to 0} x = 0$

$y = x^2 - 1$ es infinitésimo en x = 0 y en x = -1 porque $\lim_{x \to 0} x^2 - 1 = 0$

Se observa que:
a) no hay números infinitésimos, sino funciones infinitésimas en un punto.
b) igualmente, las funciones no son infinitésimos en general, sino en distintos puntos x del dominio.

Comparación de infinitésimos

Sean α(x) y β(x) e infinitésimos para x → a.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

con x → 0 α(x) es de mayor orden que β(x)
β(x) es de orden menor que α(x)
una constante k ⇨ α(x) y β(x) son de igual orden
Si k ≠ 1 ⇨ son de igual orden

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 3$$

Operaciones con infinitésimos

1) La suma de varios infinitésimos en un mismo punto x = a es otro infinitésimo en punto a.
Si f(x) y g(x) son infinitésimos en x = a, ello significa que $|f(x)| < \varepsilon$ y $|g(x)| < \varepsilon$, para valores de x suficientemente próximos a a. Entonces:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

al ser ε tan pequeño como se quiera, queda demostrado que f(x) + g(x) puede hacerse en el entorno de ese punto, tan pequeño como se quiera.
2) El producto de dos infinitésimos es un infinitésimo.

$$|f(x) \,.\, g(x)| = |f(x)| \,.\, |g(x)| < \varepsilon \,.\, \varepsilon = \varepsilon^2$$

al ser ε tan pequeño como se quiera, queda demostrado que f(x) + g(x) puede hacerse en el entorno de ese punto, tan pequeño como se quiera.
3) El producto de un infinitésimo por una constante K cualquiera es un infinitésimo.

$$|K \,.\, f(x)| = |K|\,.\,|f(x)| < |K|\,.\,\varepsilon$$

la expresión $|K|\,.\,\varepsilon$ puede hacerse tan pequeña como se quiera en el entorno del punto considerado, con tal de hacer, ε suficientemente pequeño.

Cociente de Infinitésimos. Ordenes Infinitesimales

A diferencia de la suma (también la resta) y el proceso de infinitésimos, del cociente no se puede asegurar nada a priori.

Ejemplos:

a) $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^2$ son infinitésimos para x = 0. El cociente $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5}{x^3} = x^2$ también es un infinitésimo en x = 0. En este caso decimos además que f(x) es un infinitésimo de orden superior respecto de g(x). Se escribe f = O (g).

b) $f(x) = x^2$ y x^5 son infinitésimos para x = 0. El cociente $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^2}$. En este caso $\frac{f(x)}{g(x)}$ un infinitésimo en x = 0. En este caso decimos además que f(x) es un infinitésimo de orden inferior respecto de g(x). Se escribe g = O (f).

c) $f(x) = x^2$ y $3x^2$ son infinitésimos para x = 0. El cociente $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$ que es un valor distinto en 0. En este caso $\frac{f(x)}{g(x)}$ un infinitésimo en x = 0. En este caso decimos además que f(x) es un infinitésimo del mismo orden que g(x). Se escribe f = K (g).

Cálculo de limites indeterminados.

El cálculo de límites indeterminados tiene que ver con la parte práctica del cálculo en donde una indeterminación es un resultado que no se puede comparar con ningún valor.
Por ejemplo:

si $\frac{0}{0} = 2$ podría decirse que es correcto , ⇨ $0\,.\,2 = 0$ ⇨ $0 = 0$, ahora bien,

también $\frac{0}{0} = 3$ podría decirse que es correcto , ⇨ $0\,.\,3 = 0$ ⇨ $0 = 0$

Si ambas igualdades se dan, se podría decir que 2 = 3, lo cual no es cierto. Por eso se dice que una indeterminación es un valor que no se puede determinar, por lo cual no se puede igualar a nada.

Las indeterminaciones son:

$\frac{0}{0}$; $\frac{4}{4}$; $0.\,4$; $4 - 4$; 0^0 ; 1^4 ; 4^0

Si se tienen las indeterminaciones $\frac{0}{0}$; $\frac{4}{4}$ la indeterminación generalmente se salva por Ruffini

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8} = \frac{0}{0}$$

$x^3 - 8$ tiene raíz em dos, por lo tanto se puede expresar en forma factorizada $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, lo mismo que el denominador.
Ruffini:

Numerador

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	0

Denominador

	1	2	-8
2		2	8
	1	4	0

$$\lim_{x\to 2} \frac{2^3 - 8}{2^2 + 2.\,2 - 8} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 4)} = \frac{12}{6} = 2$$

Si se tiene la indeterminacion $4 - 4$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) = \frac{1}{0} - \frac{3}{0} = 4 - 4$$

Se usará el MCM:
$1 - x = 1 - x$
$1 - x^3 = 1 - x$
$1 - x^3 = (1 - x)\,(1^2\, x^0 + 1\,x + 1\,x^2)$
Si es negativo es decir a – b, la expresión es todo suma.
Si es a + b, la expresión es +, - , +, -.
$= (1 - x)\,(1 + x + x^2)$ (Expresiones comunes y no comunes)

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1 + x + x^2) - 3}{(1 - x)\,(1 + x + x^2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(1 - x)\,(1 + x + x^2)} = \frac{0}{0}$$

La indeterminación $\infty - \infty$ no se resuelve en el %90, de los casos y en efecto provoca otra indeterminación que se puede resolver directamente.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 1 & -2 \\
1 & & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 0
\end{array}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x - 1)\,(x + 2)}{(1 - x)\,(1 + x + x^2)} = \frac{-\cancel{(1 - x)}\,(1 + 2)}{\cancel{(1 - x)}\,(1 + 1 + 1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{3/x} = 1^\infty$$

Si se tienen las indeterminaciones 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 se resuelven con la definición del número e.

$$e = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \; . \; \lim_{t\to e} (1 + t)^{1/t}$$

Hay que analizar:

$$-2x = \frac{1}{t} \qquad x \to 0$$

$$x = \frac{-1}{2t} \qquad -\frac{1}{2t} \to 0 \qquad \text{tiende } t \to \infty$$

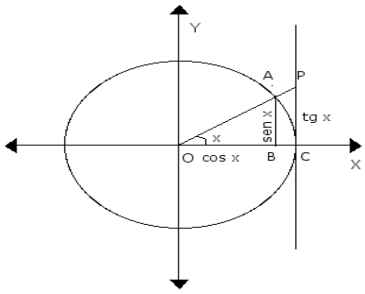
$$\lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3/(-1/2t)} = \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-6t} = \lim_{t\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-6} = e^{-6}$$

Límite importante

Definición:
El límite importante es

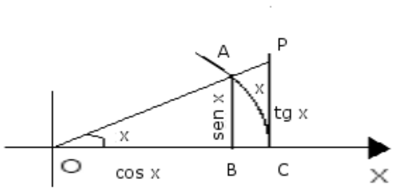
$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Para demostrar esto comenzaremos con una comparación de áreas en la circunferencia trigonométrica. Recordemos que la circunferencia tiene radio 1, en este caso el radio vector tiene un ángulo x y quedan determinados los segmentos que representan el sen x; cos x; tgx; y el arco determinado por los puntos AC lo llamamos x.



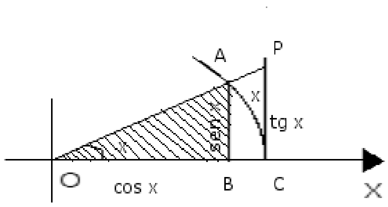
En la figura se presenta la región de la circunferencia trigonométrica que estudiaremos.

Vamos a establecer una comparación de áreas entre tres regiones de este gráfico.



Se pueden identificar tres regiones en el gráfico. Una región determinada por el triángulo OAB; otra región que contiene a la anterior es el sector circular OAC y la tercera región, que contiene a las dos anteriores es el triángulo OPC. Entre estas tres regiones se puede establecer la siguiente relación entre áreas: OAB < OAC < OPC

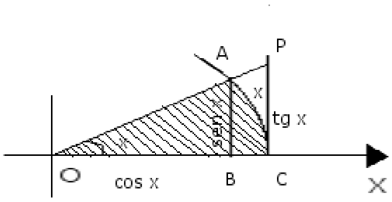
El área de la región sombreada OAB expresado en función de x queda determinado por la fórmula del área del triángulo: Área OAB = $\frac{1}{2}$. OB . AB = $\frac{1}{2}$ cos x . sen x



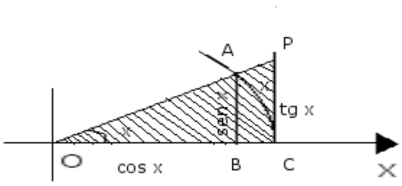
El área de la región sombreada OAC en el gráfico, expresado en función de x queda determinado por la fórmula del área del sector circular . La fórmula del área del sector circular es: $\frac{1\alpha}{2}$. r^2; donde α es el ángulo del sector circular, en nuestro caso α = x radianes. El radio r es igual a 1, porque recordemos, la circunferencia trigonométrica tiene radio unitario.

En este caso:

Área OAC = $\frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2$



El área de la región sombreada OPC en el gráfico, expresado en función de x queda determinado por la fórmula del triángulo La fórmula del triángulo es: Área OPC = $\frac{1}{2} \cdot OC \cdot CP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot tg\ x$. Tenga presente que le segmento OC es el radio = 1.



De manera que OAB < OAC < OPC puede escribirse:

$\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} \cdot x \cdot 1^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot tg\ x.$

Dividimos miembro a miembro, por $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ y tenemos:

$$\frac{\frac{1}{2} \cos x \cdot \operatorname{sen} x}{\frac{1}{2} \operatorname{sen} x} < \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x} < \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x}$$

Simplifico todos los medios:

$$\frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x}$$

Simplifico en el primer miembro los sen x y en el tercer miembro hago producto de los medios sobre el producto de los extremos:

$$\frac{\cos x \;.\; \text{sen } x}{\text{sen } x} < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{\text{sen } x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

Cambio las desigualdades:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Aplico los límites tendiendo a 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} > \lim_{x \to 0} \cos x$$

Los resuelvo si es posible:

$$1 > \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

El número e.

Definición:
El número e es:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}718281828$$

Ejemplos:
Supongamos que una persona tiene un capital de 1 peso, y que le pagan un interés anual de 100% por ese peso; al año, tendrá un total de 2 pesos, de los cuales uno corresponde al capital y el otro al interés.
Ahora el inversionista decide poner su dinero, un peso, a solo seis meses de plazo; es claro que al cabo de 6 meses el inversionista tendrá 1,50 pesos; y ahora deposita a seis meses de plazo el capital más el interés de los seis primeros meses, es decir 1,50 pesos a seis meses de plazo; tendrá al finalizar el año:

$$1{,}50 + \frac{1}{2} \;.\; 1{,}50 = 2{,}25$$

Observamos entonces que convendría, siempre que el banco lo permitiera, depositar de la segunda forma, ya que de la primera se obtuvo solo 2 pesos al cabo de un año, mientras que de la segunda se obtuvo 2,25 pesos en el mismo tiempo.
Si en vez de renovar el depósito a los seis meses, con el capital más el interés producido, se renovara a los cuatro meses, se tendría:

$$1 + \frac{1}{3} \;.\; 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

Renovando esto por cuatro meses más, resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right) . \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2$$

Renovando esto por cuatro meses más, resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 . \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}37037037\ldots$$

Si el depósito se renovara cada tres meses, la reinversión se produciría cuatro veces en el año, al cabo de un año, tendrá:

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44140625\ldots$$

Si el depósito se renovara cada dos meses, la reinversión se haría seis veces en el año, al cabo de un año, tendrá:

$$\left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 = 2{,}521626372\ldots$$

Si el depósito se renovara cada mes, la reinversión se haría doce veces en el año, al cabo de un año, tendrá:

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}61303529\ldots$$

Si el banco le permitiera al cliente renovar su depósito diariamente, la reinversión se haría 365 en el año, al cabo de un año, tendrá:

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}714567482\ldots$$

Si el banco le permitiera al cliente renovar su depósito por hora (el año tiene 8760 horas), la reinversión se haría 8760 veces en el año, al cabo de un año, tendrá:

$$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760} = 2{,}718126692\ldots$$

Si el banco le permitiera al cliente renovar su depósito en cada minuto, la reinversión se haría 525600 veces en el año, al cabo de un año, tendrá:

$$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600} = 2{,}718279243\ldots$$

Si el banco le permitiera al cliente renovar su depósito en cada segundo, la reinversión se haría 3453600 veces en el año, al cabo de un año, tendrá:

$$\left(1+\frac{1}{3453600}\right)^{3453600} = 2{,}718281793\ldots$$

Vemos que cuando se renueva el depósito mayor cantidad de veces en el año, el monto percibido en concepto es mayor, lo que debemos observar es precisamente, si bien crece el monto percibido en concepto de interés, no lo hace de manera “descontrolada”, ni “arbitraria”, sino más bien lo hace de manera “acotada”, “controlada”; vea que si se divide el año en más fracciones que los segundos que tiene, por ejemplo en fracciones de medio segundo, tendríamos 69072000 fracciones, el producido, más el capital sería:

$$\left(1+\frac{1}{69072000}\right)^{69072000} = 2{,}718281808\ldots$$

La forma de la expresión que usamos para el cálculo, podemos expresarla como:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Donde n es la cantidad de fracciones en las que se divide el año “para obtener mejores beneficios”; entonces si buscáramos un n tan grande como podamos imaginar, diríamos que n tiende a infinito ($n \to \infty$); y el producido sería:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

y al buscar un valor resulta

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e = 2{,}718281808\ldots$$

el número e es un número irracional en este caso nos “marca el límite” del mayor beneficio que podría tener el inversor de un peso en un año.

Continuidad

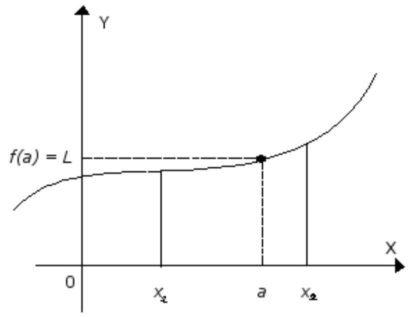
Definición:
Una función es continua en x = a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esta definición requiere implícitamente que:

1) f(x) está definida en x = a; entonces existe f(a) – y es valor finito -.
2) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, esto es que el límite de la función en el punto es finito; de modo que f(x) tiene que estar definida en un intervalo abierto que contenga al punto x = a.
3) Se verifique que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Simbólicamente.

1) **En x = a, f(x) = f(a).**
2) **$\lim_{x \to a} f(x) = L$**
3) **$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a)$.**

f(x) es continua en x = a



Función continua en un punto y en un intervalo.

Definición:
Continuidad en un punto: Una función es continua en un punto si se dan las 3 condiciones ya vistas:

1) **En x = a, f(x) = f(a).**
2) **$\lim_{x \to a} f(x) = L$**
3) **$\lim_{x \to a} f(x) = L = f(a)$.**

Continuidad en un intervalo abierto: Una función es continua en un intervalo abierto (a, b) si es continua en cada punto del intervalo. Una función continua en la recta completa de los números reales (R) es continua en todas partes.

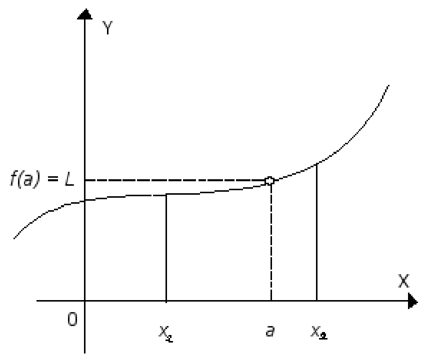
Discontinuidad

Definición:
Se define discontinuidad al hecho de no cumplirse alguna de las 3 condiciones de la continuidad. Cuando se cumplen las dos primeras condiciones, pero no la tercera, la discontinuidad es evitable, porque basta con re-difinir la función para que sea continua.
En el caso de no cumplirse las dos primeras condiciones (o ninguna), la discontinuidad es esencial.

Análisis de algunos casos de continuidad

1) En x = a no está definida en f(x)
No se verifica la primer condición y esto es suficiente para decir que f(x) es discontinua en x = a.

Discontinuidad esencial

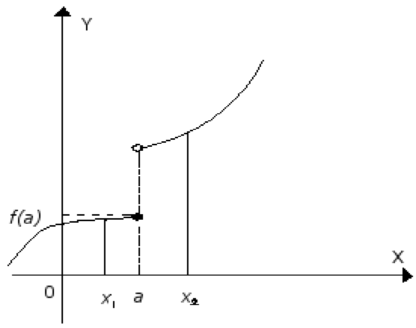


1) En x = a, f(x) = f(a) . Está definida la función en x = a. Se verifica en x = a la primer condición.
2) No existe $\lim_{x \to a}$ **f(x).**

Observe que $\lim_{x \to a^-}$ **f(x)** $\neq \lim_{x \to a^+}$ **f(x)**

No se verifica la segunda condición y esto es suficiente para decir que f(x) es discontinua en x = a.

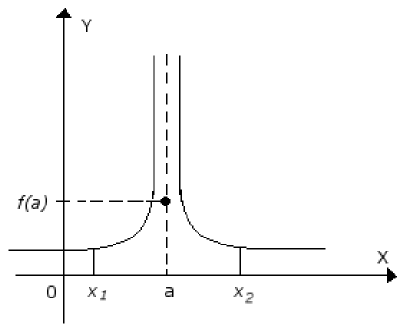
Discontinuidad esencial



1) En x = a, f(x) = f(a) . Está definida la función en x = a. Se verifica en x = a, la primer condición.
2) $\lim_{x \to a}$ **f(x) = ∞ .** No existe elemento finito en x = a.

No se verifica la segunda condición y esto es suficiente para decir que f(x) es discontinua en x = a.

Discontinuidad esencial

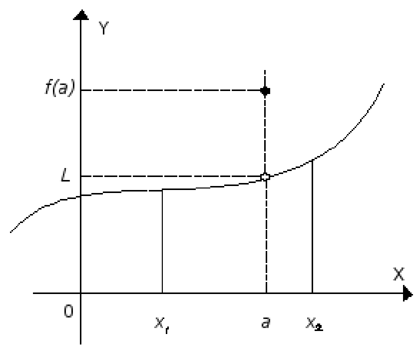


1) En x = a, f(x) = f(a)
2) $\lim_{x \to a}$ **f(x) = L**

3) $\lim_{x \to a}$ **f(x) = L ≠ f(a)**

No se verifica la tercera condición y esto es suficiente para decir que f(x) es discontinua en x = a.

Discontinuidad evitable



Propiedades de funciones continuas

1) Si f(x) y g(x) son funciones continuas en x = a y c es una constante, las siguientes funciones también son continuas en x = a.

a) f(x) + g(x) b) c. f(x) c) f(x) . g(x) d) $\frac{f(x)}{g(x)}$ con g(a) ≠ 0

Demostración:
Para demostrar estas propiedades, se parte de saber que: $\lim_{x \to a} f(x) = a$ y $\lim_{x \to a} g(x) = a$

Así: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$

Con lo que se demuestra que:

a) f(x) + g(x) está definida en x = a y es f(x) = f(a)

b) Existe $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L$

c) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$

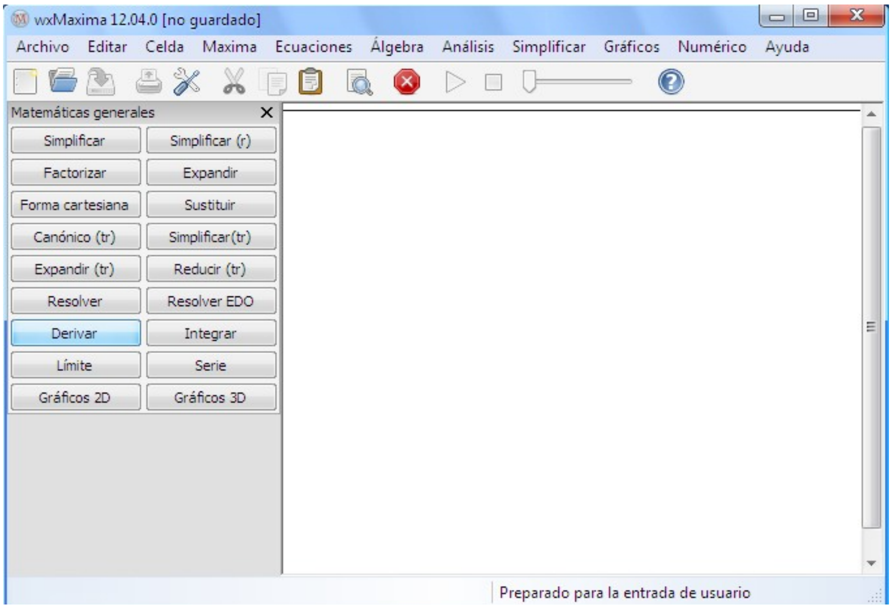
Así queda demostrada la continuidad de f(x) + g(x)

LA demostración de los otros casos son procedimientos análogos.

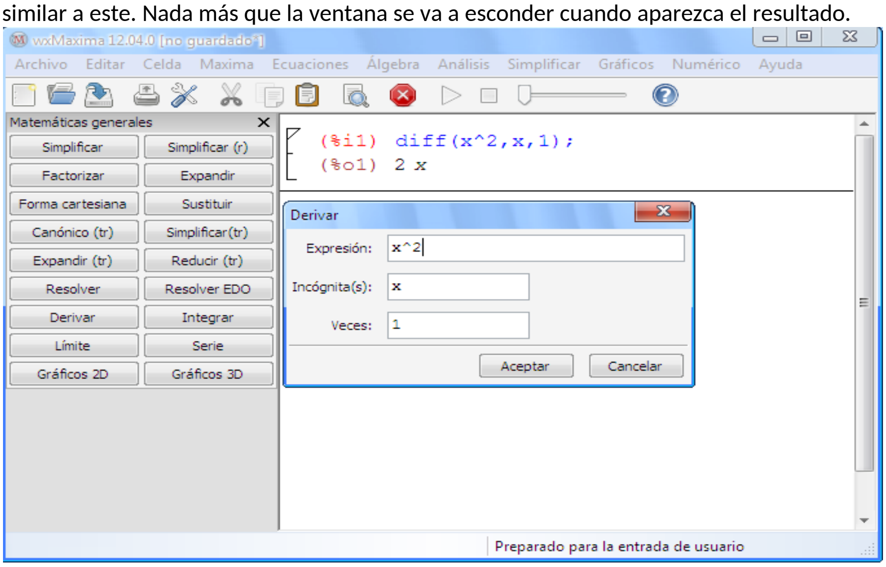
2) Una función polinómica es continua, con tal que tenga un número finito de términos.
Podemos pensar la función polinómica de grado n como la suma de n (o menos) funciones cuyas expresiones son monomios de la forma $y_i = a_i x^i$.
Siendo f(x) = x una función continua, también son continuas x^2; $x^{3;}$ … ; x^n y cualquier combinación lineal de las mismas del tipo: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ será también continua.

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE

Primeramente, para dar un ejemplo práctico y computacional al tema de la derivación, se puede utilizar el software libre Máxima para calcular una simple derivada:



Luego de abrir el programa, se debe ir a Máxima > Paneles > Matemáticas Generales, y se presiona el botón de Derivar.
Cuando se esté en la sección Derivar, hay que borrar el símbolo % y colocar x^2, es decir, x^2, recordando que hay que respetar la sintaxis propia del máxima.
El resultado debe ser similar a este. Nada más que la ventana se va a esconder cuando aparezca el resultado.



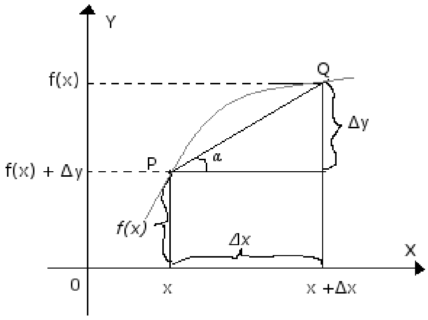
El resultado 2 x se interpreta de la siguiente manera: La derivada de x^2 es 2 . x 'El doble de x'.
Si se tiene algún inconveniente sobre el programa, la interfaz gráfica o los comandos que hay que utilizar, está la ayuda del programa que está bastante completita, o sino se dispone de un muy buen material didáctico "Primeros Pasos en Máxima" de Mario Riotorto http://riotorto.users.sourceforge.net/maxima/max.pdf o en http://cybercapo.wordpress.com. Todo es libre y gratuito.

Derivada de una función

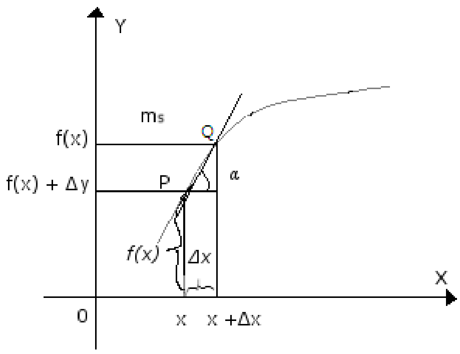
Definición:
Se define derivada como la función dada y = f(x), con respecto al argumento x, el límite de la razón del incremento de esta función Δy al incremento del argumento Δx, cuando este tiende a 0.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x que exista este límite, f' es una función de x



Interpretación geométrica



Se colocan dos puntos en la curva P y Q.
Se toma un punto x de abscisa y si se le agrega un incremento Δx se tendrá otro punto x + Δx.
El punto x tiene su correspondiente imagen f(x), la cual también sufre un incremento, en consecuencia del incremento de la variable independiente y obtenemos f(x + Δx).
Se traza una recta secante entre los dos puntos (P y Q), donde su pendiente va a ser el cociente entre el incremento de la función sobre el incremento de la variable independiente.

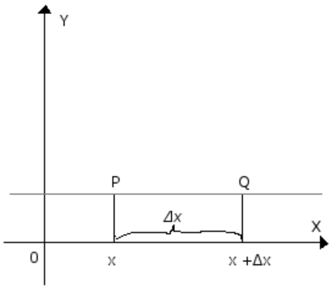
$$m_s = \frac{\text{CAT OP}}{\text{CAT ADY}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora se hace tender Δx a 0, el punto P permanece fijo, y el punto Q se desplaza sobre la curva en dirección de P y la recta secante PQ,va tomando distintas posiciones hasta convertirse en recta tangente a la curva por P.
Desde el punto de vista de la interpretación geométrica decimos que la derivada de una función en un punto es la tangente trigonométrica del ángulo formado por la tangente geométrica a la curva del punto con el semieje positivo de las x.

Derivadas de funciones algebraicas

1) Derivada de una constante
Constante es todo lo que no tenga x.

y = c



Como no existe el Δy :
Demostración:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Primera formula de la derivada

$$\begin{cases} y = c \\ y' = 0 \end{cases}$$

La derivada de una constante es 0.

2) Derivada de una variable independiente x

y = x
Demostración:
Incremento:
$y + \Delta y = x + \Delta x$
Despejo Δy
$\Delta y = \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}$

Formo el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Segunda formula de la derivada

$$\begin{cases} y = x \\ y' = a \end{cases}$$

La derivada de una variable independiente x es 1.

3) Derivada de una suma algebraica de funciones
Sea y = u + v – w donde u es una función de x .
v es una función de x .
w es una función de x .
Funciones continuas y derivables de x .
Demostración:
Incremento:
$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)$
Despejo Δy y quito los paréntesis:

$\Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w) - (u + v - w) \Rightarrow \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w - u - v + w$
$\Rightarrow \Delta y = \cancel{u} + \Delta u \cancel{+ v} + \Delta v \cancel{- w} - \Delta w \cancel{- u - v + w}$

Formo el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

y' = u' + v' - w'

Tercera formula de la derivada

$$\begin{cases} y = u + v - w \\ y' = \mathbf{u' + v' - w'} \end{cases}$$

La derivada de la suma algebraica de funciones es la suma algebraica de las derivadas de cada una de ellas.

4) Derivada de un producto de funciones

Sea y = u . v donde u es una función de x .
v es una función de x .
Funciones continuas y derivables de x .

Demostración:

Incremento:

$y + \Delta y = (u + \Delta u) . (v + \Delta v)$

Propiedad Distributiva:

$y + \Delta y = u. v + u . \Delta v + \Delta u . V + \Delta u . \Delta v$

Despejo Δy y quito los paréntesis:

$\Delta y = u. v + u . \Delta v + \Delta u . v + \Delta u . \Delta v - u . v \Rightarrow \Delta y = \cancel{u. v} + u . \Delta v + \Delta u . v + \Delta u . \Delta v \cancel{- u . v}$

Formo el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u . \Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u . v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} . \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u. \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} . v + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

y' = u . v' + v . u' + u' . 0

y' = u'. v + u . v'

Cuarta formula de la derivada

$$\begin{cases} y = u . v \\ \mathbf{y' = u'. v + u . v'} \end{cases}$$

La derivada de un producto de funciones es igual a la derivada del primer factor por el segundo como está más el primero por el segundo derivado.

5) Derivada de un cociente de funciones

Sea $y = \frac{u}{v}$ u es una función de x .
v es una función de x .
Funciones continuas y derivables de x .

Demostración:

Incremento:

$$y + \Delta y = \frac{(u + \Delta u)}{(v + \Delta v)}$$

Despejo Δy y quito los paréntesis:

$$\Delta y = \frac{(u + \Delta u)}{(v + \Delta v)} = \frac{u}{v} . \frac{v . (u + \Delta u) - u . (v + \Delta v)}{(v + \Delta v)} \Rightarrow \frac{\cancel{v . u} . v . \Delta v \cancel{- u . v} - u . \Delta v}{v^2 + v \Delta v} \Rightarrow \frac{v . \Delta v - u . \Delta v}{v^2 + v \Delta v}$$

hago el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \, . \, \frac{\Delta v}{\Delta x} - u \, . \, \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \ \Delta v} =$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \, . \, \frac{\Delta v}{\Delta x} - u \, . \, \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \ \Delta v} =$$

$$\mathbf{y' = \frac{u . v' - v . u'}{v^2}}$$

Quinta formula de la derivada

$$\begin{cases} y = \dfrac{u}{v} \\ y' = \dfrac{u . v' - v . u'}{v^2} \end{cases}$$

La derivada de un cociente es igual al numerador como está por el denominador derivado menos el denominador está por el numerador derivado todo sobre el cuadrado del denominador.

6) Derivada de una potencia

Sea $y = u^n$ u es una función de x .
n es una constante.

Incremento:

$\mathbf{y + \Delta y = (u + \Delta u)^n}$

$\mathbf{n \in Z^+}$

Despejo Δy y quito los paréntesis:

$$y = (u + \Delta u)^n - u^n \Rightarrow \binom{n}{0} . \ u^n + \binom{n}{1} . \ u^{n-1} . \ \Delta u + \ldots + \binom{n}{n} . \ u^0 . \ \Delta u^n \Rightarrow u^n + n \, u^{n-1} \, \Delta u + \ldots + \Delta u^n$$

hago el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)^n - u^n}{\Delta x} =$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u)^n - u^n}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u^n + n \, u^{n-1} \, \Delta u + \ldots + \Delta u^n - u^n}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[n \, u^{n-1} \, \Delta u + \ldots + \Delta u^{n-1}]}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \ . \ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[n \, u^{n-1} + \ldots + \Delta u^{n-1}]}{\Delta x} =$$

$$u' \ . \ n \, u^{n-1} \Rightarrow$$

$$\mathbf{y' = u' \ . \ n \, u^{n-1}}$$

Sexta formula de la derivada

$$\begin{cases} y = u^n \\ y' = u' \ . \ n \, u^{n-1} \end{cases}$$

Si $\mathbf{n \in Q^+}$ entonces n tiene la forma $n = \frac{p}{q}$; p, q $\in \mathbf{Z}$ (enteros del mismo signo).

Demostración:

$$y = u^n \Rightarrow u^{\frac{p}{q}} \Rightarrow y^q = (u^{\frac{p}{q}})^q = u^p \Rightarrow y^q = u^p \Rightarrow y^q = u^p \, . \, q \, y^{q-1} \Rightarrow y' = p . \, u^{p-1} \, . \, u' \Rightarrow y' = \frac{p . \, u^{p-1} \, . \, u'}{q \, . \, y^{q-1}} =$$

$$y' = \frac{p}{q} \, . \, \frac{(u^{p-1})}{(u^{\frac{p}{q}})^{q-1}} \ . \ u' = \frac{p}{q} \, . \, \frac{u^{p-1}}{u^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q} \, . \, \frac{u^{p-1}}{u^{p - \frac{p}{q}}} \, . \, u' = \frac{p}{q} \, . \, u^{p-1} \, . \, u^{-p - \frac{p}{q}} \, . \, u' = \frac{p}{q} \, . \, u^{\frac{p}{q} - 1} \, . \, u'$$

$$y = u^{\frac{-p}{q}} \Rightarrow y = \frac{1}{u^{\frac{p}{q}}}$$

Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

1) Derivada de un logaritmo natural

Sea y = ln u u es una función de x .

Demostración:

Incremento:

$y + \Delta y = \ln (u + \Delta u)$

Despejo Δy y quito los paréntesis:

$$\Delta y = \ln (u + \Delta u) - \ln u = \ln \frac{u + \Delta u}{u} = \ln \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

hago el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta u} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{u}{\Delta u} \ln\left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) =$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{n}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{n} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{u} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} \cdot \underbrace{\lim_{n \to \infty} \ln\left(u + \frac{1}{u}\right)^{n}}_{1}$$

$$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$\begin{cases} y = \ln u \\ y' = \dfrac{1}{u} \cdot u' \end{cases}$$

2) Derivada de una función logarítmica

Sea y = log u u es una función de x .

Demostración:

Incremento:

$y + \Delta y = \log (u + \Delta u)$

Despejo Δy y quito los paréntesis:

$$\Delta y = \log (u + \Delta u) - \log u = \log \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

hago el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta u} \cdot \log\left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \log\left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{u}{\Delta u} \log\left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) =$$

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{\frac{u}{\Delta u}}\right)^{\frac{u}{\Delta u}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{u} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} \underbrace{\lim_{n \to \infty} \log\left(u + \frac{1}{u}\right)^{n}}_{\log e}$$

$$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log e$$

$$\begin{cases} y = \log u \\ y' = \dfrac{u'}{u} \cdot \log e \end{cases}$$

3) Derivada de una función elevada a otra función

Sea $y = u^v$ u es una función de x .
v es una función de x .

Demostración:

$$\ln y = \ln u^v \Rightarrow (\ln y)' = \ln u^v \Rightarrow \frac{y'}{y} = (v \cdot \ln u)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot (\ln u)' \Rightarrow v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow$$

$$y' = u^v \cdot [v' \cdot \ln u + v \cdot u']$$

$$y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u' \cdot v \cdot u^{v-1}$$

Derivadas de funciones inversas

Sea y = f(x) u = g(y) .

Demostración:

Hago el cociente incremental:

$$f(x) = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad g(y) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \quad y' = f'(x) = 1 / g'(x)$$

$$y' = f'(u) \cdot g'(x)$$

$$\begin{cases} y = f(x) \ ; \ x = g(y) . \\ y' = 1 / g'(x) \end{cases}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

1) Derivada de la función seno

Sea y = sen u u es una función de x .

Demostración:

Incremento:

y + Δy = sen (u + Δu)

Despejo Δy y quito los paréntesis:

Δy = sen (u + Δu) - sen u

hago el cociente incremental:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen}(u+\Delta u) - \text{sen}\, u}{\Delta x} \Rightarrow \frac{2 \cdot \text{sen}(u+\Delta u-u) \cdot \cos(u+\Delta u+u)}{\Delta x} \Rightarrow \frac{2 \cdot \text{sen}\,\frac{\Delta u}{2} \cdot \cos\left(u+\frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{2 \cdot \text{sen}\,\frac{\Delta u}{2} \cdot \cos\left(u+\frac{\Delta u}{u}\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}} \cdot \cos\left(u+\frac{\Delta u}{u}\right) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\,\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(u+\frac{\Delta u}{u}\right)}_{\cos u} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} \Rightarrow$$

$y' = \cos u \cdot u'$

$$\begin{cases} y = \text{sen}\, u \\ \mathbf{y' = \cos u \cdot u'} \end{cases}$$

Derivadas de funciones compuestas

Sea $y = f(u)$ $\qquad$ $u = g(x)$.

Demostración:
Hago el cociente incremental:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta u} \qquad g'(x) = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow \quad y' = f'(u) \cdot g'(x)$$

$y' = f'(u) \cdot g'(x)$

$$\begin{cases} y = f(u) \ ; \quad u = g(x) \,. \\ \mathbf{y' = f'(u) \cdot g'(x)} \end{cases}$$

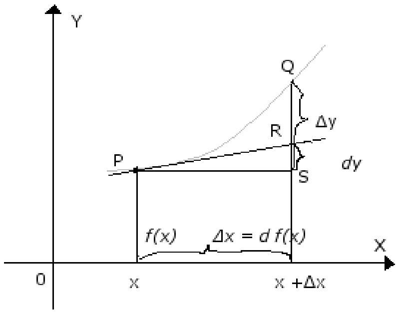
La derivada de una función de función es igual al producto de las derivadas de cada una de ellas respecto de las variables de las cuales dependen.

Diferenciales

Definición:
Se define diferencial de una función $y = f(x)$ al producto de la derivada de la misma, por el incremento de la variable independiente.

$$\Delta y = d\, f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

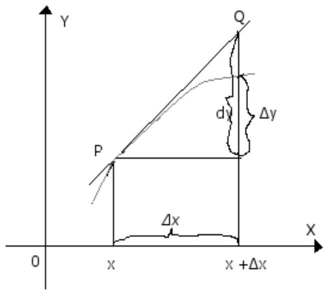
Interpretación geométrica



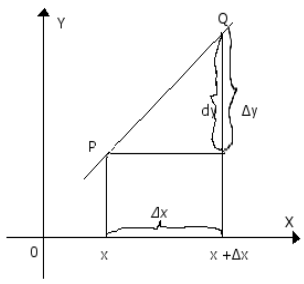
Donde $P\ \overset{\Delta}{R}\ S = tg\,\alpha = \dfrac{\overline{RS}}{\overline{PS}}$

$tg\,\alpha = \dfrac{\overline{RS}}{\Delta x} \Rightarrow \overline{RS} = f'(x)\,.\,\Delta x = dy \Rightarrow dy < \Delta y$

Decimos entonces que el diferencial de una función es el incremento de la recta tangente a diferencia del incremento de la función que es incremento de ordenada de curva.
$dy > \Delta y$



$dy = \Delta y$



$dy = \Delta y \Leftrightarrow$ la función es lineal

Relación con el incremento

$\Delta y - dy = a$
La diferencia puede ser positiva o negativa.
A es el error que se comete al tomar la diferencial como aproximación del incremento, pero ese error tiende a 0, con Δx tendiendo a 0.

Cálculos aproximados

Formula general de aproximación
$\Delta y \approx dy$
$f(\Delta x - x) - f(x) = f'(x).\,\Delta x$
$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x).\,\Delta x$

Errores

Error absoluto (a) = $\Delta y - dy$

Error relativo : $\frac{a}{\Delta y} = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta y} - \frac{dy}{\Delta y}$

Er : $a - \frac{dy}{\Delta y}$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} 1 - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1 - 1 = 0$$

Es decir que cuando **Δx** tiende a 0 el error relativo tiende a 0.

Error relativo porcentual : a * 100
Er % = Er. 100

Diferenciales de orden superior

Las diferenciales pueden ser nuevamente diferenciales segundas, o terceras, es decir, se puede volver a diferenciar a una diferencial.
y = f(x)

Δy = f'(x) . dx

Se puede adoptar el mismo incremento dx de la variable y resultará, indicando con doble apostrofe la derivada segunda de x.

$d'\,y = d\,(dy) = d\,(f'(x)\,.\,dx) = (f'(x)\,.\,dx)'\,.\,dx = f''(x)\,.\,dx^2$

Se lee 'diferencial segunda de y respecto de x dos veces', aclarando que dx^2 significa el cuadrado de dx y no la diferencial de x^2

Diferencial tercera...
$\mathbf{d''\,y = d\,(d'y) = d\,(f''(x)\,.\,dx^2) = (f''(x)\,.\,dx^2)'\,.\,dx = f'''(x)\,.\,dx^3}$

Así sucesivamente:

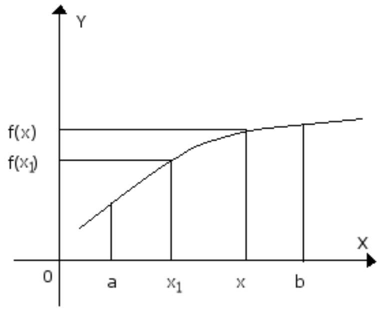
$\mathbf{d^n\,y = f^n(x).\,dx^n}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Funciones crecientes y decrecientes, signo de la derivada

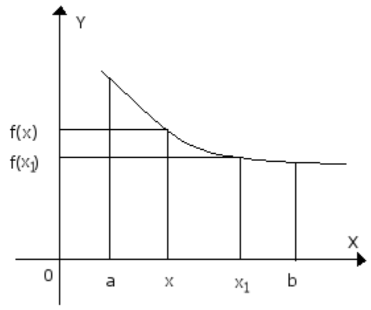
Definición:
Una función es creciente en un intervalo (a, b) cuando un x_1 es menor que x, eso implica que $f(x_1) < f(x)$

$$\forall x \in (a, b): \; x_1 < x \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x)$$



Definición:
Una función es decreciente en un intervalo (a, b) cuando un x es menor que x_1, eso implica que $f(x_1) > f(x)$

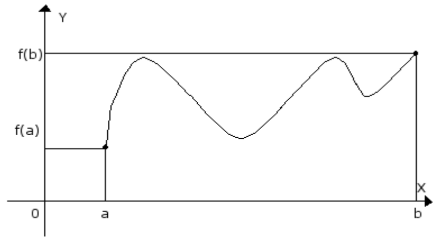
$$\forall x \in (a, b): \; x < x_1 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x)$$



Máximos y mínimos relativos y absolutos

Extremos Absolutos:

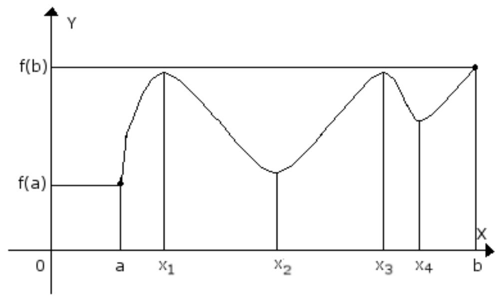
Definición:



En el punto x = a $\exists$ **mínimo absoluto** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in [a, b]: \; f(a) < f(x)$
En el punto x = b $\exists$ **máximo absoluto** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in [a, b]: \; f(a) > f(x)$

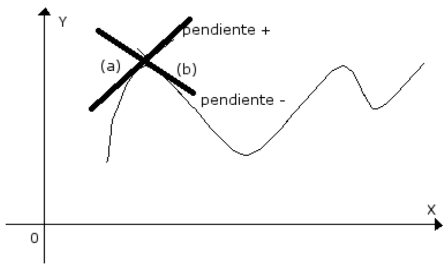
Extremos Relativos:

Definición:



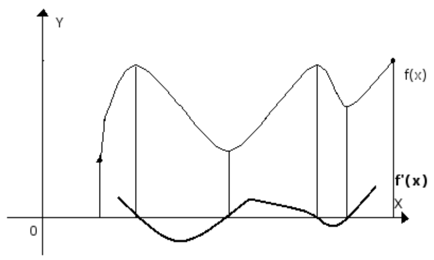
En el punto x = x_1 $\exists$ **un máximo relativo** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E(x_1, \delta) : f(x) < f(x_1)$
En el punto x = x_2 $\exists$ **un mínimo relativo** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E(x_2, \delta) : f(x) > f(x_2)$
En el punto x = x_3 $\exists$ **un máximo relativo** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E(x_3, \delta) : f(x) < f(x_3)$
En el punto x = x_4 $\exists$ **un mínimo relativo** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E(x_4, \delta) : f(x) > f(x_4)$
Existen puntos relativos máximos o mínimos en un entorno reducido a esos puntos.

Distintos criterios para su determinación
Si se utilizan rectas tangentes a la curva:



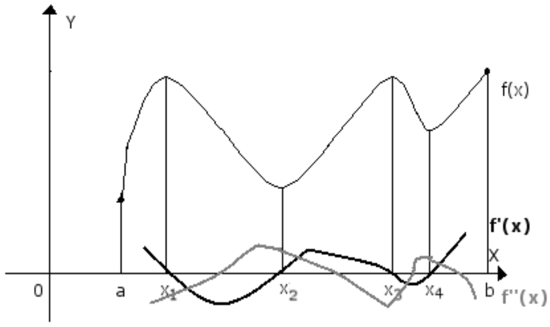
(a) Si la función es menor a la izquierda las tangentes tienen pendiente positiva
(b) Si la función es menor a la derecha las tangentes tienen pendiente negativa.

Con la derivación se puede obtener con precisión los máximos y mínimos.



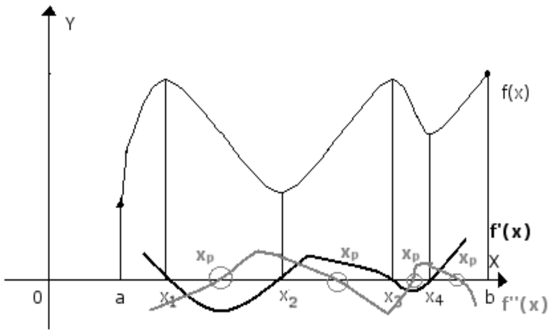
La derivada primera tomará los valores de la pendiente de la recta tangente, lo que significa que tomando el valor 0 indica el punto donde existe un máximo o un mínimo.

Utilizando las derivadas:
1)
y ' = 0 es condición necesaria pero no suficiente.
2)
y '' < 0 ⇨ existe un máximo
y '' > 0 ⇨ existe un mínimo
3)
y ' > 0 ⇨ función creciente
y ' < 0 ⇨ función decreciente



La segunda derivada pasa de menos a más cuando el punto es un máximo, y cuando el punto es un mínimo pasa de más a menos.

Concavidad y convexidad



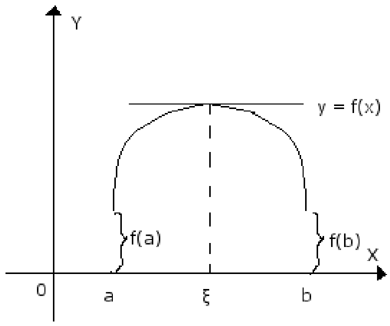
El criterio completo de la derivada es:
1)
y ' = 0 es condición necesaria pero no suficiente.
2)
y '' < 0 ⇨ existe un máximo
y '' > 0 ⇨ existe un mínimo
3)
y ' > 0 ⇨ función creciente
y ' < 0 ⇨ función decreciente
4)
y'' = 0 ⇨ posible punto de inflexión
y ''' ≠ 0 ⇨ condición suficiente.
5)
y'' < 0 ⇨ cóncava (-)
y '' > 0 ⇨ cóncava(+)

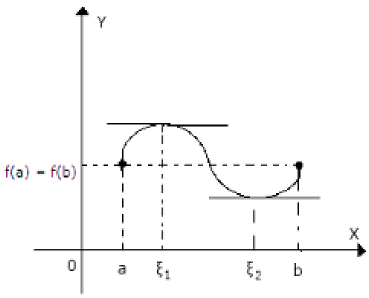
Puntos de inflexión

Definición:
Se definen puntos de inflexión a aquellos posibles puntos en donde la derivadas segundas de la función valen 0.

Teorema de Rolle

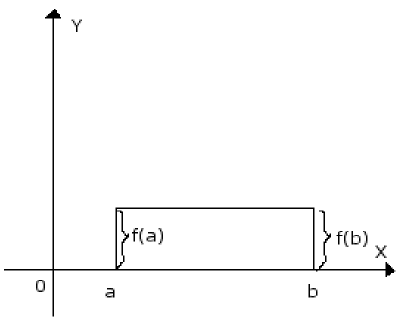
Si una función es continua y derivable en intervalo cerrado [a, b] que toma valores iguales en los extremos, es decir, con las imágenes iguales, f(a) = f(b), entonces va a existir por lo menos, un punto interior $\xi \in (a, b)$ del intervalo en el cual la primera derivada sea nula, es decir, vale 0.





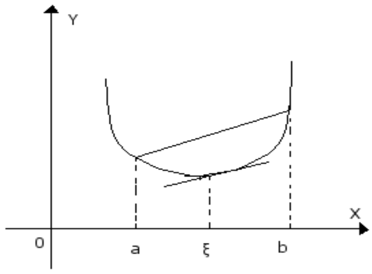
Cuando se dice continua es que no tiene interrupción y cuando se dice derivable es que admite tangente geométrica única.
La altura que toma en extremo inferior debe ser igual al extremo superior, o sea f(a) = f(b).
En este tipo de funciones por lo menos va a haber un punto ξ en donde la derivada tome un valor 0.

En toda función contante la derivada es 0.



Interpretación geométrica

Para una función cualquiera es imposible establecer una fórmula que de exactamente el valor ξ del Teorema de Rolle, pero se puede ver un caso particular en forma geométrica.



Sea $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ una función entera de 2° grado. Será $f(b) - f(a) = (Ax^2 + Bx + C) - (Ax^2 + Bx + C) = A(b^2 - a^2) + B(b - a) = (b - a) [A (b + a) + B]$.

Y puesto que es:

$f'(x) = 2 Ax + Bi$ $\quad f'(\xi) = 2A\xi + B$, deberá ser $(b - a) [A(b + a) + B] = (b - a) (2A\xi + B)$.

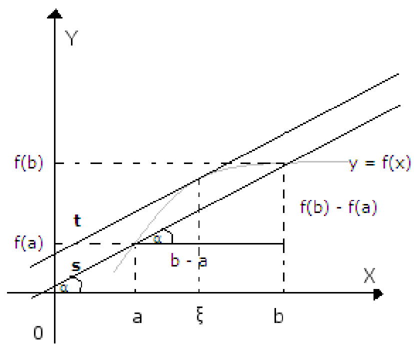
Dividiendo por el factor $(b - a) \neq 0$ y simplificando resulta $\xi = \frac{1}{2} (a + b)$. El significado geométrico de esta conclusión es la siguiente: "La cuerda que une 2 puntos cualquiera en una parábola de eje vertical es paralela a la tangente trazada en el punto que tiene como abscisa el promedio de las abscisas de los puntos considerados".

Teorema del valor medio

El teorema del valor medio del Cálculo Diferencial o también llamado Teorema de Lagrange dice:

El incremento de una función continua y derivable en el intervalo cerrado [a, b] es igual al producto de la derivada de la función en un punto interior del intervalo por la amplitud de la variable independiente.

Interpretación geométrica



Hipótesis)

$y = f(x)$ es continua y derivable en [a, b].

$\exists\ \xi \ / \ a < \xi < b$

Tesis)

$f(b) - f(a) = (b - a) . f'(\xi)$

Demostración)

$$\operatorname{tg} \hat{\alpha} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_s$$

$$t \parallel s$$

$$f'(\xi) = m_t$$

Como s | | t ⇨ $m_s = m_t$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Por a y b se traza una recta secante que es la que toca dos puntos de la curva, y por encima se traza una recta secante que choca con un solo punto de la curva, ambas paralelas.

Teorema de Cauchy

El cociente de los incrementos de dos funciones continuas y derivables en un intervalo cerrado [a, b] es igual al cociente de sus respectivas derivadas tomadas en un punto interior del intervalo y siempre que los denominadores no se anulen.

Hipótesis)

f(x) y g(x) son continuas y derivables en [a, b].

$\exists\ \xi \ / \ a < \xi < b$

Tesis)

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Demostración)

$\varphi(x) = f(x) + k \cdot g(x)$ **llamando a esto (1)**

$\varphi(a) = f(a) + k \cdot g(a)$

$\varphi(b) = f(b) + k \cdot g(b) \Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow f(a) + k. g(a) = f(b) + k \cdot g(b) \Rightarrow k. g(a) - k \cdot g(b) = f(b) - f(a) \Rightarrow k. [g(a) - g(b)] = f(b) - f(a) \Rightarrow$

$$k = \frac{-[f(b) - f(a)]}{-[g(b) - g(a)]} = k = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

En (1) reemplazo por k

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

Pero como la función φ(x) toma valores iguales en los extremos del intervalo entonces existe por lo menos un punto interior donde la derivada es nula. A ese punto se le llama ξ.

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

$$f'(\xi) = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Teorema de L'Hopital, aplicaciones al cálculo de distintos límites indeterminados.

Las indeterminaciones son:

$\frac{0}{0}$; $\frac{4}{4}$; $0 . 4$; $4 - 4$; 0^0 ; 1^4 ; 4^0

1° Indeterminación $\frac{0}{0}$

Una de las aplicaciones del Teorema de Cauchy es la resolución de límites indeterminados de la forma 0/0, mediante la llamada regla de L'Hopital, es decir:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Como f(a) = 0 ^ g(a) = 0

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Aplico límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} - \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

La regla de L'Hopital me dice que si al calcular el límite de un cociente de dos funciones me da 0/0 debo calcular el límite del cociente de las respectivas derivadas; si al calcular este límite se reitera la indeterminación 0/0, volvemos a aplicar la regla calculando el límite con la segunda derivada y así sucesivamente hasta que desaparezca la indeterminación.

2º Indeterminación $\frac{4}{4}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{ y } \begin{matrix} f(x) \to 4 \\ g(x) \to 4 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{4}$$

$$\left[L = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\frac{0.\ g(x) - 1.\ g'(x)}{[g(x)]^2}}{\frac{0.\ f(x) - 1.\ f'(x)}{[f(x)]^2}} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\frac{- g(x)}{[g(x)]^2}}{\frac{- f(x)}{[f(x)]^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{[f(x)]^2 \cdot g'(x)}{[g(x)]^2 \cdot f'(x)} = \left[L^2 = \lim_{x \to a} \frac{[f(x)]^2}{[g(x)]^2} \right] . \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow L = L^2 . \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \frac{L}{L^2} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \frac{1}{L} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3º Indeterminación $0.\ 4$

$$\lim_{x \to a} f(x) . g(x) \quad \text{y} \quad \begin{matrix} f(x) \to 0 \\ g(x) \to 4 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) . g(x) = 0.\ 4$$

$$\lim_{x \to a} f(x) . g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{(f(x))'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$$

4º Indeterminación $4 - 4$

$$\lim_{x \to a} f(x) - g(x) \quad \text{y} \quad \begin{matrix} f(x) \to 4 \\ g(x) \to 4 \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) - g(x) = 4 - 4$$

$$\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = \lim_{x \to a} \frac{[f(x) - g(x)] . [f(x) + g(x)]}{[f(x) + g(x)]} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{[f(x) - g(x)]^2}{[f(x) + g(x)]} = \frac{4}{4}$$

5º Indeterminaciones 0^0 ; 1^4 ; 4^0

$$\lim_{x \to a} f(a)^{g(a)} = 0^0 ; \quad \begin{matrix} f(x) \to 0 \\ g(x) \to 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \to a} f(a)^{g(a)} = 1^4 ; \quad \begin{matrix} f(x) \to 1 \\ g(x) \to 4 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \to a} f(a)^{g(a)} = 4^0 ; \quad \begin{matrix} f(x) \to 4 \\ g(x) \to 0 \end{matrix}$$

Para salvar estos tipos de indeterminaciones, se aplican logaritmos:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \ln \left[\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}\right] \Rightarrow \lim_{x \to a} \ln [f(x)]^{\ln [g(x)]} \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) . \ln [f(x)] = 0.\ 4$$

Polinomio de Taylor, desarrollo de la fórmula de Taylor.

Dado el siguiente polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Derivada primera:

$$P'(x) = a_1 + 2\ a_2 x + 3\ a_3 x^2 + \ldots + (n - 1)\ a_{n-1} x^{n-2} + n\ a_n x^{n-1}$$

Derivada segunda:

$$P''(x) = 2 . 1\ a_2 + 2 . 3\ a_3 x + \ldots + (n - 1)(n - 2)\ a_{n-1} x^{n-3} + n\ (n - 1)\ a_n x^{n-2}$$

Derivada tercera:

$$P'''(x) = 3 . 2 . 1\ a_3\ x + \ldots + (n - 1)(n - 2)(n - 3)\ a_{n-1} x^{n-4} + n\ (n - 1)\ (n - 2)\ a_n x^{n-3}$$

Derivada n-ésima:

$$P^n(x) = n\,(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3.\,2.\,1 a_n = n!\,.\,a_n$$

Si x = 0 entonces $P(0) = a_0$; $P'(0) = a_1$; $P''(0) = 2a_2$; $P'''(0) = 3.\,2.\,1\,a_3$; $P^n(0) = n!\,.a_n$

Se reescribe P(x) usando las deducciones antes realizadas.

$$a_0 = P(0)\ ;\ a_1 = \frac{P'(0)}{1!}\ ;\ a_2 = \frac{P''(0)}{2!}\ ;\ a_3 = \frac{P'''(0)}{3!}\ ;\ \ldots\ ;\ a_n = \frac{P^n(0)}{n!}$$

$$P(X) = \sum_{r=1}^{n} \frac{P^r(0)}{r!}\,.\,X^r$$

Si la función no es polinómica se puede escribir de esta manera:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}\,x^n + T_r$$

T_r es un término complementario.

Polinomio de Mac Laurin, desarrollo de la fórmula de Mac Laurin.

Lo que hace Taylor es generalizar con los distintos a_i, siendo la fórmula de Maclaurin la siguiente:

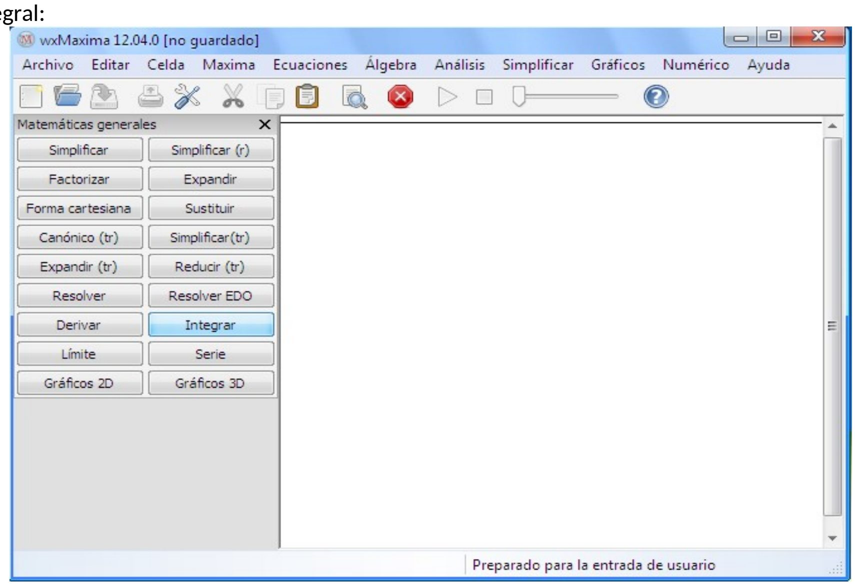
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}\,x^n + T_r$$

$$f(a\,H) = f(a) + f'(a)\,\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\,\frac{(x-a)^3}{3!} + \ldots + f^n(a)\,\frac{(x-a)^n}{n!} + T_r$$

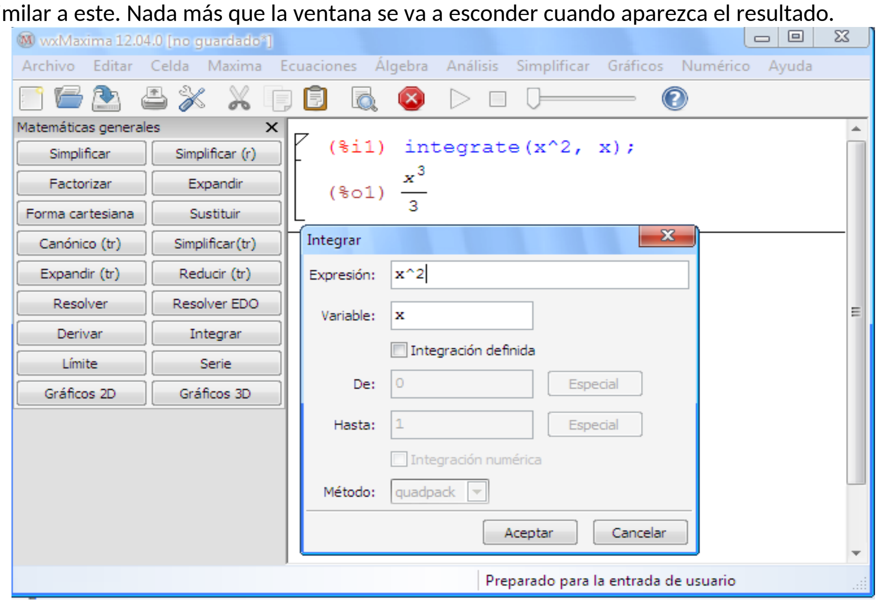
El término residual se pasa al otro lado restando a f(a H) entonces va a ser un número más pequeño que el último término

4. INTEGRALES INDEFINIDAS

Primeramente, para dar un ejemplo práctico y computacional al tema de la integración, se puede utilizar el software libre Máxima para calcular una simple integral:



Luego de abrir el programa, se debe ir a Máxima > Paneles > Matemáticas Generales, y se presiona el botón de Integrar.
Cuando se esté en la sección Integrar, hay que borrar el símbolo % y colocar x^2, es decir, x^2, recordando que hay que respetar la sintaxis propia del máxima.
El resultado debe ser similar a este. Nada más que la ventana se va a esconder cuando aparezca el resultado.



El resultado en este caso se interpreta claramente que es 'x al cubo sobre tres'.
Si se tiene algún inconveniente sobre el programa, la interfaz gráfica o los comandos que hay que utilizar, está la ayuda del programa.

La función primitiva

Definición:

$$\int f(x)\,.\,dx = F(x) + C \Leftrightarrow [F(x) + C]' = f(x)$$

Se define función primitiva F(x) si es primitiva de otra función f(x) , la expresión F(x) + C se llama integral indefinida de la función de f(x) y se designa mediante el símbolo $\int f(x)\ .\ dx$. En este caso f(x) se llama integrando o función bajo el signo de la integral y el símbolo $\int$, signo de integral.
Así la integral indefinida representa una familia de funciones y = F(x) + C.

La integral indefinida es también llamada la anti-derivada por ser la contraria de la derivada. Se puede ver una tabla de derivación al revés viendo los resultados como los problemas y los problemas como resultados.

El teorema fundamental del cálculo integral

Definición:
Todas las funciones que tienen igual derivada difieren entre si en una constante, o en otros términos, todas las primitivas de una misma función difieren entre sí en una constante.

Conviene destacar la importancia de este teorema de demostración elemental.
Cuando se efectúa la suma a + b de 2 números el resultado es único. Se dice que la función goza de la propiedad uniforme. También tienen esta propiedad las otras operaciones racionales (diferencia, producto, cociente o potencia). La radicación sin embargo no es uniforme, sino multiforme. Así $\sqrt{4}$ es igual a +2 o -2 y habrá que aclarar a cual de las 2 determinaciones nos referimos. En el campo de los números complejos la logaritmación es infiniforme, es decir, tiene infinitas determinaciones ; por ejemplo, las infinitas determinaciones del logaritmo neperiano de 2 están comprendidas en la fórmula ln 2 + 2 kπi, con k = 0, ± 1, ± 2, ± 3, ... Conocido un valor del logaritmo se conocen todos los demás agregándole un número entero de veces $2\pi i$.
En el cálculo de las primitivas se ve que también hay infinitas soluciones, pero, toda vez se conoce una función que satisfaga el problema, se conocen todas las soluciones, pues cualquier otra solución que sea solución debe diferir de la primera en una constante. En otras palabras: una vez encontrada una función tal que su derivada coincida con la expresión dada hemos encontrado todas las funciones que cumplen con esa condición.

Integrales inmediatas

Definición:
Es la simple lectura de una tabla de derivadas en donde se sabe las derivadas, entonces calcular una integral inmediata es calcular una anti- derivada como está.

Es el clásico y mecánico reemplazo de fórmulas de la tabla de integrales, sin realizar nada más.

Consecuencias inmediatas de la definición de integral

1) La derivada de una integral indefinida es igual al integrando, es decir, si F'(x) = f(x), entonces:

$$\left(\int f(x)\,.\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

Esta ultima igualdad significa que la derivada de una primitiva cualquiera es igual al integrando.

2) La diferencial de la integral indefinida es igual al elemento de integración:

$$d\,.\left(\int f(x)\,.\,dx\right) = f(x)\,.\,dx$$

3) La integral indefinida de la diferencial de una cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria.

$$\int d\,.\,F(x) = F(x) + C$$

Es fácil comprobar que esta igualdad es válida mediante la derivación (las diferenciales de ambos miembros de la igualdad son iguales a d F(x))

Propiedades de las integrales indefinidas

Teorema 1: La integral indefinida de la suma algebraica de dos o varias funciones es igual a la suma (o resta) algebraica de sus integrales.

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Para demostrar el teorema hallamos la derivadas del primero y segundo miembro de esta igualdad y se halla:

$$\left(\int [f(x) \pm g(x)]\,dx\right)' = f(x) \pm g(x)\ ; \qquad \left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x) + dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

Así, la derivada del primer miembro de la primer igual es igual a la derivada del segundo miembro, es decir, la derivada de cualquier función primitiva del primer miembro es igual a la derivada de una función arbitraria del segundo miembro. Por consiguiente y ya que, la derivada de una integral indefinida es igual al integrando, toda función del primer miembro de la primer igualdad se diferencia de toda función del segundo miembro de esta igualdad en un sumando constante. La primer igualdad tiene precisamente este significado.

Teorema 2: El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral.

$$\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Siendo k una constante.

Para demostrar esta igualdad del teorema 2 se derivan los dos miembros:

$$\left(\int k\,f(x)\,dx\right)' = k.\,f(x)\ ; \qquad \left(k.\int f(x)\,dx\right)' = k\,.\left(\int f(x)\,dx\right)' = k\,.\,f(x)$$

Las derivadas de ambos miembros son iguales, por consiguiente, lo mismo que en la primer igualdad del teorema 1, la diferencia de dos funciones cualquiera , dispuestas a la derecha o la izquierda, es una constante.

La igualdad del teorema 2 tiene este significado.

Teorema 3: La integral del diferencial de una función es igual a la función dada.

$$\int dx = x + C$$

Durante el cálculo de las integrales indefinidas es útil tener en cuenta las reglas sguientes:

1) Si

$$\int f(x)\,.\,dx = F(x) + C$$

entonces:

$$\int f(k\,.\,x)\,.\,dx = \frac{1}{k}\,.\ F(k\,.\,x) + C$$

En efecto derivando ambos miembros de esta igualdad de esta primer regla:

$$\left(\int f(k\,.\,x)\,.\,dx\right)' = f(k\,.\,x)\ ;$$

$$\left(\frac{1}{k}\int F(k\,.\,x)\right)' = \frac{1}{k}\,(F(k\,.\,x))'_x = \frac{1}{k}\,F(k\,.\,x)\,.\,k = F'\,(k\,.\,x) = f(k.\,x)$$

La derivada de los miembros son iguales, lo que se trataba de demostrar:

2)

$$f(x)\,.\,dx = F(x) + C$$

entonces:

3) $$\int f(x + b)\,.\,dx = F(x + b) + C$$

$$\int f(x)\,.\,dx = F(x) + C$$

entonces:

$$\int f(ax + b)\,.\,dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Tabla de integrales inmediatas

La tabla de integrales se deduce inmediatamente de la definición de la diferencial de la integral indefinida que es igual al elemento de integración, y de la tabla de las derivadas. (Es fácil comprobar que las igualdades de las tablas son válidas mediante la derivación, es decir que se puede verificar que la derivada del segundo miembro es igual al integrando).

1. $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n + 1}$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

3. $\int \text{sen } x\, dx = - \cos x + C$

4. $\int \cos x\, dx = \text{sen } x + C$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$

6. $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = -\text{cotg } x + C$

7. $\int \text{tg } x\, dx = - \ln |\cos x| + C$

8. $\int \text{cotg } x\, dx = \ln |\text{sen } x| + C$

9. $\int e^x\, dx = e^x + C$

10. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

11. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = -\text{arc tg } x + C$

11'. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\,.\,\text{arc tg } \frac{x}{a} + C$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \text{arc sen } x + C$

13'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sen } \frac{x}{a} + C$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

En la tabla de derivadas no hay fórmulas que correspondan a las 7, 8, 11', 12, 13' y 14. Sin embargo, es fácil comprobar que estas formulas son válidas mediante la derivación.
En el caso de la fórmula 7 se tiene:

$$(\ln |\cos x|)' = \frac{-\text{sen } x}{\cos x} = \text{tg } x,$$

por lo tanto **$\int$ tg x dx = - ln |cos x| + C.**
En el caso de la fórmula 8 se tiene:

$$(\ln |\text{sen } x|)' = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x,$$

por lo tanto, **$\int$ cotg x = ln |sen x| + C**
En el caso de la fórmula 12 se tiene:

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a + x}{a - x}\right|\right)' = \frac{1}{2a} [\ln |a + x| - \ln |a - x|]' = \left(\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x}\right) = \frac{1}{a^2 - x^2},$$

por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$$

Note que la última fórmula se deduce también de los resultados generales del 9.
En el caso de la fórmula 14 se tiene:

$$\ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|' = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 \pm x^2}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}\right) = \frac{1}{a^2 \pm x^2}$$

por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Esta formula también se deduce de los resultados generales del 11.
De manera análoga se verifican las fórmulas 11' y 13'. Se puede observar que estas fórmulas serán obtenidas de lo interior de las fórmulas 11 y 13.

Métodos de integración: integración por descomposición, por sustitución y por partes

Integración por descomposición

Es la aplicación de la propiedad de suma de integrales o de linealidad.

Integración por sustitución

Supongamos que es preciso hallar la integral.

$$\int f(x) \cdot dx$$

Pero, no se puede elegir inmediatamente la función primitiva para f(x), aunque sabemos que ésta existe.
Se realiza el cambio de variable en el elemento de integración, haciendo:

$$x = \varphi(t)$$

siendo esta la primer igualdad y donde φ(t) es una función continua, lo mismo que su derivada, y tiene una función inversa. Entonces dx = φ' (t) dt; se demuestra entonces que en este caso se verifica la siguiente igualdad:

$$\int f(x)\,.\,dx = \int f[\varphi(t)]\,.\,\varphi'(t)\,dt$$

Aquí se da la segunda igualdad, y se sobreentiende que la variable t será sustituida después de la integración del segundo miembro de la igualdad por su expresión en función de x, en virtud de la primera igualdad.
Para determinar que las expresiones en los dos miembros son iguales, en el sentido indicado, es preciso demostrar que sus derivadas respecto a x son iguales. Se puede hallar la derivada del primer miembro:

$$\left(\int f(x)\,.\,dx\right)'_x = f(x)$$

Derivemos el segundo miembro de la segunda igualdad, respecto a x, como función compuesta en la que t es un argumento intermedio.
La primer igualdad expresa la dependencia que tiene t de x siendo dx/dt = φ' (t); según la regla de derivación de una función inversa:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

De tal manera tenemos:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\,.\,\varphi'(t)\,dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\,.\,\varphi'(t)\,dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\,.\;\varphi'(t)\,.\,\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi'(t)] = f(x).$$

Por consiguiente, las derivadas respecto a x de los dos miembros de la segunda igualdad son iguales, lo que se trataba de demostrar.
Hay que elegir la función x = φ' (t) de modo que se pueda calcular la integral indefinida que figura en el segundo miembro de la segunda igualdad.
A veces es preferible elegir la sustitución de la variable en la forma t = φ(x) y no en x = φ(t).
Ilustrémoslo con un ejemplo. Supongamos que es preciso calcular la integral.

$$\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)}$$

Es conveniente poner:

$$\varphi(x) = t$$

entonces:

$$\varphi'(x)\,dx = dt$$

$$\int \frac{\varphi'(x)\,dx}{\varphi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$$

Integración por partes

Este método se aplica cuando no es posible integrar por sustitución, es decir, en el integrando aparece el producto de una función por la diferencial de otra función y no es posible encontrar una sustitución adecuada.
Se parte entonces de la diferencial de un producto:

$$d(u\,v) = (u\,.\,v)'\,dx \Rightarrow ((u'\,.\,v) + (u\,.\,v'))\,dx \Rightarrow u'.\;v\,dx + u\,.\,v'\,dx \Rightarrow v\,.\,du + u\,.\,dv \Rightarrow$$

$$d(u\,.\,v) = v\,.\,du + u\,.\,dv \Rightarrow \int d(u\,.\,v) = \int v\,.\,du + \int u\,.\,dv \Rightarrow u\,.\,v = \int v\,.\,du + \int u\,.\,dv \Rightarrow$$

$$\int u\,.\,dv = u\,.\,v - \int v\,.\,du$$

Esta es la fórmula de la integración por partes. Esta fórmula se usa frecuentemente para integrar las expresiones que pueden ser representadas en forma de un producto de dos factores, u y dv, de tal manera que la búsqueda de la función v, a partir de su diferencial dv y el cálculo de la integral **∫ v . du ,** constituyan en conjunto un problema más simple que el cálculo directo de la integral **∫ u . dv.**
Para descomponer el elemento de integración dado en dos factores u y dv se necesita cierta experiencia que se adquiere resolviendo problemas.

Métodos especiales de integración: potencia de funciones circulares, integración de funciones algebraicas e irracionales

Integración de funciones racionales elementales

Como veremos, no toda integral de una función elemental se resuelve mediante las funciones elementales. Por eso tiene gran importancia la definición de ciertas clases de funciones, cuyas integrales pueden ser expresadas mediante las funciones elementales. La más simple de estas clases es la clase de las funciones racionales.
Toda función racional puede ser representada en la forma una función racional, es decir, como la razón de dos polinomios:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m}{B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m}$$

Sin limitar la generalidad del razonamiento, supongamos que estos polinomios no tienen raíces comunes.
Si el grado del numerador es inferior al del denominador, la fracción se llama propia; en el caso contrario, la fracción se llamará impropia.
Si la fracción es impropia, al dividir el numerador por el denominador (según la regla de división de los polinomios) se puede representar la fracción dada como la suma de un polinomio y de una fracción propia:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)'}$$

donde, M(x) es un polinomio, y $\frac{F(x)}{f(x)}$ es una fracción propia.
La integración de los polinomios no ofrece dificultades. Por eso, la dificultad fundamental de la integración de fracciones consiste en la integración de las fracciones racionales propias.

Definición:
Las fracciones racionales propias son del tipo:

I. $\int \frac{A}{x - n}\,dx$

II. $\int \frac{A}{x - a^k}\,dx$ (k es un número entero positivo ≥ 2)

III. $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,dx$ (las raíces del denominador son complejas, es decir, $\frac{p^2}{4} - q < 0$)

IV. $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}\,dx$ (k es un número entero positivo ≥ 2, las raíces del denominador son complejas)

Se llaman fracciones simples del tipo I, II, III, IV, respectivamente.

La integración de fracciones simples no representan grandes dificultades , por eso se efectuarán las integración sin mayores explicaciones:

I. $$\int \frac{A}{x - n}\,dx = A \,.\, \ln|x - a| + C$$

II. $$\int \frac{A}{x - a^k}\,dx = A \,.\int (x - a^{-k})\,dx = A \,.\, \frac{(x - a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1 - k)\,(x - a)^{-k+1}} + C$$

III. $$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2 + px + q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q}\,dx + \left(\frac{B - Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x - \frac{p}{2}\right)\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{4}{2}\ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

La integración de las fracciones simples del tipo IV requiere cálculos más complicados:

I5. $$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^k}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k}\,dx + \left(\frac{B - Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} =$$

La primera integral se halla por sustitución $x^2 + px + q = t$; $(2x + p)\,dx = dt$:

$$Ax + B\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}\,dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)\,(x^2+px+q)^{k-1}} + C$$

Escribamos la segunda integral designada por I_k, en la forma:

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dx}{(t^2 + m^2)^k} =$$

haciendo:

$$x + \frac{p}{2} = t \;;\; dx = dt \;;\; q - \frac{p^2}{4} = m^2$$

(según la hipótesis , las raices del denominador son complejas, y por lo tanto $q - \frac{p^2}{4} > 0$). Ahora procedamos del modo siguiente.

$$I_k = \int \frac{dx}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k}\,dt$$

Transformemos la ultima integral

$$I_k = \int \frac{t^2\,dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{t\,.\,t\,dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,.\,d\,(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{-\,t}{2\,(k-1)^{k-1}}\int t\,.\,d\left(\frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}}\right) =$$

Integrando por partes tenemos:

$$\int \frac{t^2\,dt}{(t^2 + m^2)^k} = -\frac{1}{2\,(k-1)}\left[t\;.\;\frac{1}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}\right]$$

Sustituyendo esta expresión en la primer igualdad de la transformación realizada.

$$I_k = \int \frac{t^2\,dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2}\;\frac{1}{2\,(k-1)}\left[\frac{t}{2\,(k-1)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}}\right] =$$

$$\frac{t}{2m^2\,(k-1)\,(t^2 + m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2\,(k-1)}\int \frac{dt}{(t^2 - m^2)^{k-1}}$$

En el segundo miembro se encuentra la integral del mismo tipo que Ik, siendo el exponente del grado del denominador del integrando menor en una unidad (k – 1); así resulta que hemos expresado I_k en función de I_{k-1} .
Aplicando sucesivamente este procedimiento obtenemos la integral conocida:

$$I_t = \int \frac{t^2\,dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{m} + C$$

Sustituyendo ahora t y m por sus valores, obtenemos la expresión de la integral IV, en función de x y números dados A, B, p, q.

Integrales de las funciones irracionales

No siempre es posible expresar la integral de función irracional mediante funciones elementales.. Se estudiará entonces las funciones irracionales, cuyas integrales se reducen, mediante sustituciones de las variables correspondientes, a las integrales de funciones racionales y se integran, por lo tanto, totalmente.

Definición:
Las fracciones racionales propias son del tipo:

1) Se examina la integral $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})\, dx$ donde R es una función racional de sus argumentos*.

*) El símbolo $R(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$ inidica que con las magnitudes $x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}$ se ejecutan sólo operaciones racionales.
Del mismo modo hay que entender en lo último los símbolos del tipo
$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots\right)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, R(sen x, cos x), etc. Así por ejemplo, el símbolo R(sen x, cos x) indica que con sen x y cos x se realizan operaciones racionales.

Sea k el común denominador de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.
Se ejecuta la sustitución:

$$\mathbf{x = t^k \quad ; \quad dx = k \,.\, t^{k-1}\, dt}$$

Entonces, cada potencia fraccionaria de x se puede expresar mediante una potencia entera de t y, por consiguiente, el integrando se transformará en función racional de t.

2) Se examina la integral del tipo $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/n}\right] dx$

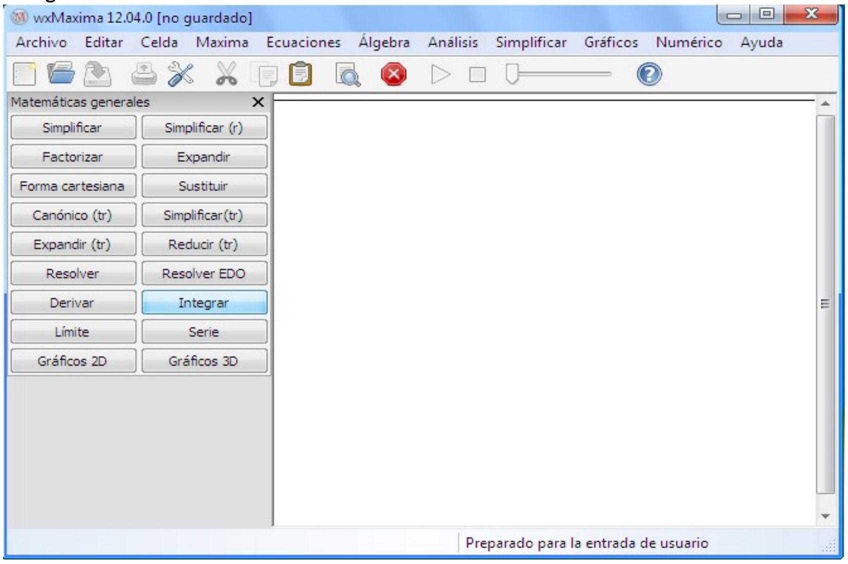
La integral se reduce a la suma de una función racional por medio de la sustitución.

$$\mathbf{\frac{ax+b}{cx+d} = t^k}$$

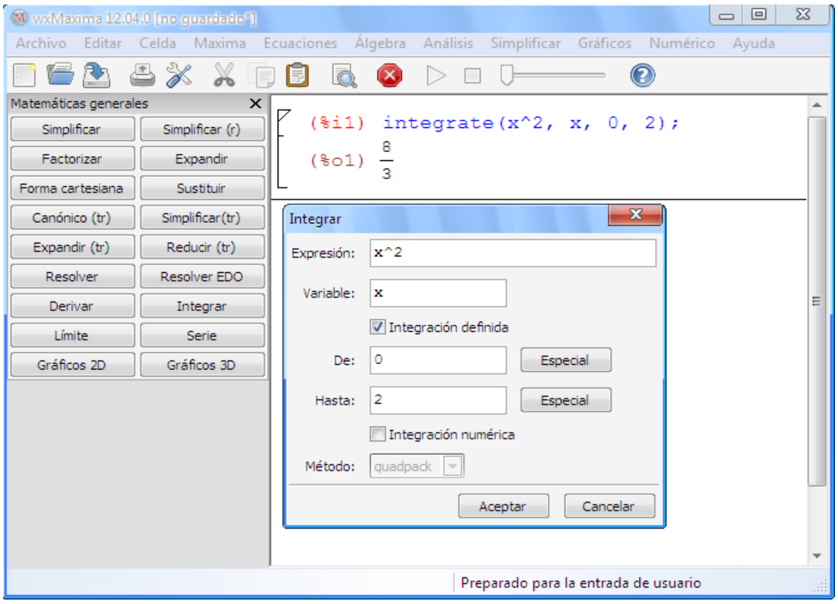
donde, k es un denominador común de las fracciones $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

5. INTEGRALES DEFINIDAS. APLICACIONES

Primeramente, para dar un ejemplo práctico y computacional al tema de la integración definida, se puede utilizar el software libre Máxima para calcular una simple integral:



Luego de abrir el programa, se debe ir a Máxima > Paneles > Matemáticas Generales, y se presiona el botón de Integrar.
Cuando se esté en la sección Integrar, hay que borrar el símbolo % ; colocar x^2, es decir, x^2; hacer clic en la cajita donde dice "Integración definida" y colocar en donde dice "Hasta:" un 2 borrando el 1 anterior, recordando también que hay que respetar la sintaxis propia del máxima.
El resultado debe ser similar a este. Nada más que la ventana se va a esconder cuando aparezca el resultado.



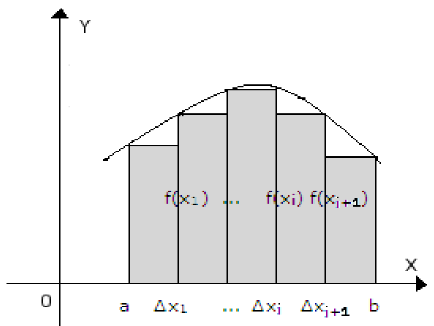
El resultado en este caso se interpreta de la siguiente manera, como se ha visto, integró si, la expresión y dio su resultado 'x cubo sobre tres' pero ¿que pasó?. Lo que sucedió fue que existe una regla que se llama Barrow, y lo que hace es reemplazar x con el valor de lo que se haya colocado en "Hasta:" restando a lo que se haya colocado en "De:" (todo afectando solo a x). En este caso 2 – 0. Por lo tanto, 2 – 0 al cubo es 8 y esto seguirá dividiéndose por 3, al estar 3 solo sin alguna equis que lo modifique.
Si se tiene algún inconveniente sobre el programa, la interfaz gráfica o los comandos que hay que utilizar, está la ayuda del programa.

Definición e interpretación geométrica de la integral definida

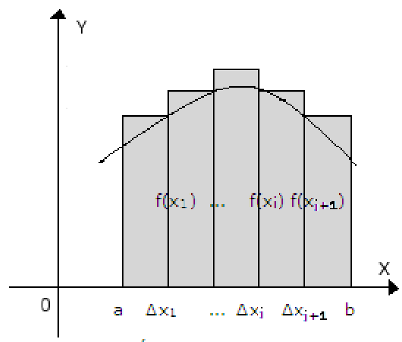
Definición:

$$\int_a^b f(x)\,dx = S = \lim_{\Delta x_{i+1} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_{i+1}\, f(x_i)$$

Se define integral definida al área S, que se encuentra entre el área por exceso y el por defecto. Es el límite de las divisiones realizadas al eje x Δx_{i+1} tendiendo a 0 de la suma de productos de las divisiones Δx_{i+1} por la función del extremo superior.
Gráficamente se ve como:



Área por defecto (a)



Área por exceso (A)

Demostración:
Según el gráfico tenemos que

$\frac{\mathbf{b.\,a}}{\mathbf{n}} = \Delta x_i$ Siendo n el número de particiones.

$\Delta_i = \Delta x_i + f(x_i)$ Que es el área de la amplitud del rectángulo por la función por la izquierda o por la derecha.

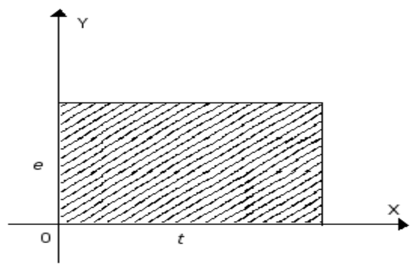
$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_i + \ldots + A_n = A$

Esta área está por debajo de la curva.

$$a = \Delta x_i + f(x_i) \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a > A \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} M_i + f(x_i) < S < \sum_{i=0}^{n-1} m_i + f(x_i) \Rightarrow \square < S < A \Rightarrow S = \lim_{\Delta x_{i+1} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_{i+1} f(x_i) = \int_a^b f(x)\,.\,dx$$

Entonces, si el límite del incremento de x_{i+1} por $f(x_i)$ es cero, se encuentra la superficie que une los dos errores de la curva.
Los errores mencionados se encuentran en las partes sobrantes de los rectángulos.

Interpretación geométrica:



$\mathbf{t = \frac{R}{t} \Rightarrow e = e\,.\,t}$

Propiedad de la integral

Propiedad 1.
La integral definida de la constante por el diferencial de x es la constante por la integral definida del diferencial de x.

$$\int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = c\,(b-a)$$

Propiedad 2.
El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral; si c es una constante:

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración:

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{I=1}^{n} c\,\Delta x_i\, f(x_i) = c \,.\, \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{I=1}^{n} \Delta x_i\, f(x_i) = c\int_a^b dx = c\,(b-a)$$

Propiedad 3.
La integral definida de la suma algebraica de varias funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de los sumandos.:

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Demostración:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{I=1}^{n} \Delta x_{i+1}\,[f(x_i)+g(x_i)] = \lim_{\max \Delta x \to 0} \left[\sum_{I=1}^{n} \Delta x_i\, f(x_i) + \sum_{I=1}^{n} \Delta x_i\, g(x_i)\right] =$$

$$\lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{I=1}^{n} \Delta x_i\, f(x_i) + \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{I=1}^{n} \Delta x_i\, g(x_i) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La demostración es válida para cualquier número de sumandos.

A diferencia de las propiedades demostradas la propiedad 4 solo es válida si a < b.

Propiedad 4
Si en el segmento [a, b], donde a < b, las funciones f(x) y φ(x) satisfacen la condición , f(x) ≤ φ(x) entonces :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Demostración:
Examinemos la diferencia:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\,dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{I=1}^{n} \Delta x_i\,[\varphi(x_i) - f(x_i)]$$

Aquí la diferencia **$\varphi(x) - f(x) \ge 0$, $\Delta x_i \ge 0$.** Por consiguiente, cada sumando de la suma no es negativo, igual que no es negativa toda la suma ni su límite, es decir.

$$\int_a^b \varphi(x) - f(x)\,dx \ge 0, \qquad ó \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0,$$

de donde se deduce la primer igualdad de esta propiedad.

Propiedad 5
Si m y M son los valores mínimo y máximo respectivamente de la función f(x) en el segmento [a, b] y a ≤ b, entonces :

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Demostración:
Según la hiótesis:

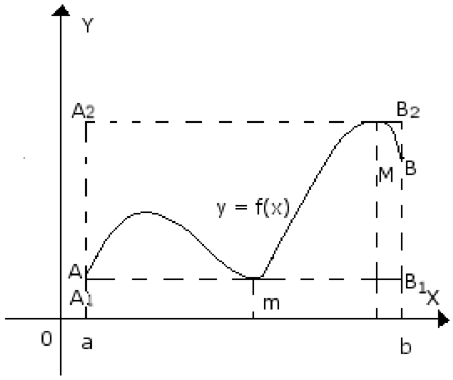
m ≤ f(x) ≤ M

En virtud de la propiedad 3, tenemos.

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

Pero,

$$\int_a^b m\,dx = m\,(b - a)\ ; \quad \int_a^b M\,dx = M\,(b - a)$$



Propiedad 6

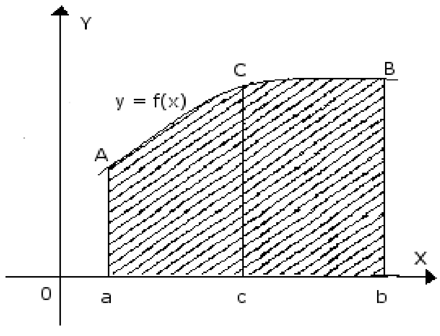
Para tres números arbitrarios a, b, c, se verifica la igualdad :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Siempre que estas tres integrales existan.

Demostración:

Se va a suponer al principio que a < c < b, y formemos la suma integral para la función f(x) en el segmento [a, b] :



Puesto que el límite de la suma integral no depende del modo de dividir el segmento [a, b] en partes, lo dividimos en segmentos pequeños de tal manera que c sea el punto de división. Descompongamos luego la suma integral $\sum_a^b$ correspondiente al segmento [a, b] en dos sumas: una $\sum_a^c$ que corresponde al segmento [a, c], y la otra $\sum_c^b$ que corresponde al segmento [c, b].

Entonces:

$$\sum_{a}^{b} \Delta x_i \; f(x_i) = \sum_{a}^{c} \Delta x_i \; f(x_i) + \sum_{c}^{b} \Delta x_i \; f(x_i)$$

Tomando límites (en la última ecuación) para **max Δxi → 0** obtenemos la correlación (la primer igualdad de la propiedad)

Si a < b < c en virtud de lo demostrado podemos escribir:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

ó

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Pero, de acuerdo con la propiedad 5.

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

Por esto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

De modo análogo se demuestra la propiedad 6 para cualquier otra disposición de los puntos a, b y c.
La figura antes presentada ilustra geométricamente la propiedad 6 para el caso en que f(x) > 0 y a < c < b: el área del trapecio aABb es igual a la suma de las áreas de los trapecios aACc y cCBb.

Teorema del valor medio del calculo integral

Definición:
Si la función f(x) es continua en el segmento [a, b] , existe en este segmento un punto ξ tal que se verifique la igualdad siguiente:

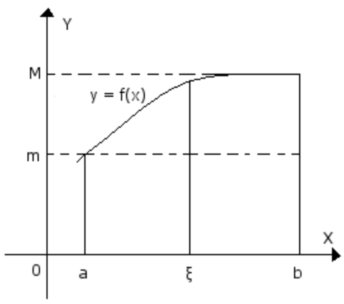
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$$

Demostración:

Para precisar supongamos que a < b. Si m y M son valores mínimo y máximo, respectivamente, de la f(x) en el segmento [a, b] , en virtud de la propiedad 4 de la integral definida se tiene:

a < b

f(a) = m
f(b) = M



$A_m < f(x) < A_M$

$m < f(x) < A_M \Rightarrow a < \xi < b \Rightarrow m(b-a) < f(\xi)(b-a) < M(b-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow m(b-a) < \int_a^b f(\xi)\,dx < M(b-a) \Rightarrow m < \dfrac{\int_a^b f(\xi)\,dx}{b-a} < M$

Puesto que f(**ξ**) es continua con **a < ξ < b,** esta función toma todos los valores intermedios comprendidos entre m y M. Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

entonces, f(**ξ**) es un cociente entre un área y una longitud.

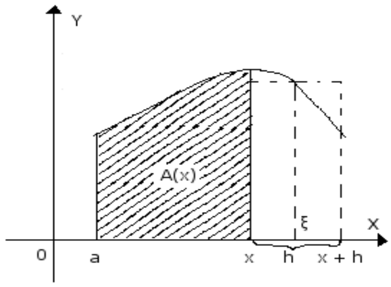
La derivada de la integral definida

Definición:

La derivada de la función $F(x) = \int_a^b f(x)\,dx$ siendo f(x) una función continua, es f(x).

Demostración:

En lugar de determinar la derivada de F(x) mediante la pendiente de la curva correspondiente, la aplicación directa de la definición de la derivada, resolverá la cuestión:



$$F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) + F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^{x} f(x)\,dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)\,dx}{h} =$$

De acuerdo al teorema de la media resulta:

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = (x+h-x)\,f(\xi)$$

con $x \leq \xi \leq x+h$. Por consiguiente es:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,f(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

Cálculo de la integral definida mediante la primitiva

Definición:

El cálculo de la integral $F(x) = \int_a^b f(x)\,dx$ difiere de una primitiva cualquiera P(x) de f(x) en una constante.

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l}\text{De acuerdo al teorema anterior es } F'(x) = f(x)\\ \text{De acuerdo al teorema anterior es } P'(x) = f(x)\end{array}\right\} \text{ por lo tanto } F'(x) = P'(x)$$

Dos funciones que tienen igual derivada diferen en una constante:

$$F(x) = P(x) + C$$

Conocida una primitiva cualquiera de f(x), se conoce la integral

$\int_a^x$ **f(x) dx** a menos de una constante.

Barrow

Demostración:

Como la derivada de la función área es la misma función debajo del signo integral

$$A'(x) = f(x)$$

entonces $A(x) = \int A'(x) \;\Rightarrow\; A(x) = \int_a^x f(x)\,dx \;\Rightarrow\; F(x) - F(a)$

En particular si el extremo superior es b resulta la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

indicando simbólicamente con la última expresión la diferencia F(b) – F(a).

Integrales generalizadas e impropias

Integrales con límites infinitos:

Definición :
Si existe el límite finito .

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

este límite se llama integral impropia o generalizada de la función f(x) en el intervalo [a, $+\infty$] y se designa por:

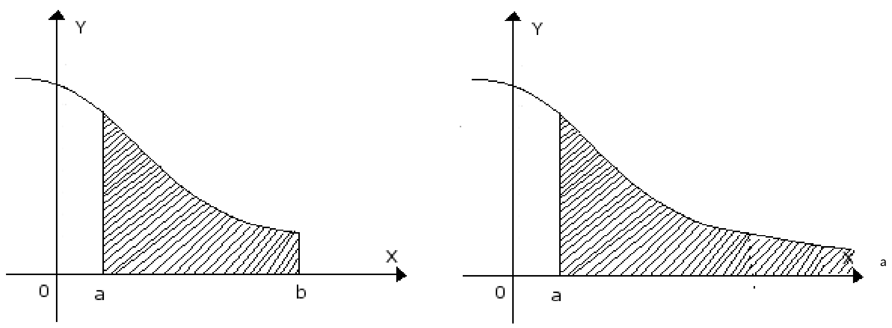
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Teniendo así:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Esta integral tiene significado, para cualquier t > a. Cuando t varía, la integral varía también, por esto la integral es una función continua de b y la función f(x) está definida para todos los valores de x tales que $a \leq x \leq +\infty$.

En este caso podría decirse que la integral existe o converge. Si la integral $\int^t$ f(x) dx, para $t \to +\infty$, no tiene límite finito, se dice que



$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ no existe o diverge.

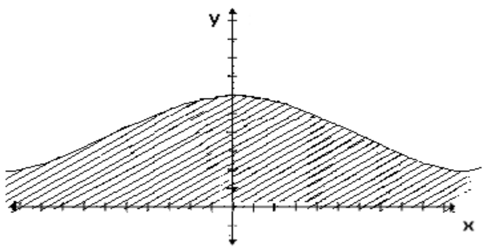
Es fácil definir el significado geométrico de la integral impropia para f(x) ≥ 0: si la integral $\int_a^{b} f(x)\,dx$ representa el área de un dominio limitado por la curva y = f(x), el eje de las abscisas y las ordenadas x = a, x = b, es natural considerar que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ expresa el área de un dominio ilimitado (infinito), comprendido entre las líneas y = f(x), x = a y el eje de las abscisas.

De modo análogo se determinan las integrales impropias en otros intervalos infinitos:

$$\int_{-\infty}^{b} \mathbf{f(x)\,dx} = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{b} \mathbf{f(x)\,dx}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{c} \mathbf{f(x)\,dx} + \int_{c}^{+\infty} \mathbf{f(x)\,dx}$$

La última igualdad, se comprende así: si existe cada una de las integrales impropias del segundo miembro, entonces existe (converge), según la definición, la integral del primer miembro.



Teorema 1.

Si para todos x (x ≥ a) se verifica la desigualdad

$$\mathbf{0 \le f(x) \le \varphi(x)}$$

Siendo $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ convergente, entonces, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es convergente y

$$\int_a^{+\infty} \mathbf{f(x)\,dx} \le \int_a^{+\infty} \mathbf{\varphi(x)\,dx}$$

Teorema 2.

Si para todos x (x ≥ a) se verifica la desigualdad

$$\mathbf{0 \le f(x) \le \varphi(x)}$$

Siendo $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ divergente entonces, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también es divergente

En los dos últimos teoremas se ha estudiado las integrales impropias de las funciones no negativas. Para el caso de la función f(x) que cambia de signo en un intervalo infinito, se tiene el teorema siguiente

Teorema 3.

Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge entonces, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también converge, en este caso, la última integral se llama absolutamente convergente.

Integrales de funciones discontinuas:

Sea f(x) una función definida y continua para a < x < c. Pero en el punto x = c la función, o bien, no está definida, o bien es discontinua. En este caso no se puede definir la integral $\int_a^c \mathbf{f(x)\,dx}$ como límite de sumas integrales, puesto que la función f(x) no es continua en el segmento [a, c] y este límite puede no existir.

La integral $\int_a^c f(x)\,dx$ de la función f(x), discontinua en el punto c, se determina del modo siguiente:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c \to 0} \int_a^b f(x)\,dx$$

Si la función f(x) es dicontinua en un punto x = x_0, dentro del segmento [a, c], entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^c f(x)\,dx$$

si existen ambas integrales impropias del segundo miembro.
Se observa que si la función f(x), definifa en el segmento [a, b], tiene dentro de este segmento un número finito de puntos de discontinuidad a_1, a_2 ,... a_n , la integral de la función f(x) en el segmento [a, b] se determina del modo siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^b f(x)\,dx$$

si cada una de las integrales impropias del segundo miembro converge. Si por lo menos una de las integrales diverge, entonces,

$\int_a^b f(x)\,dx$ es también divergente.

Para determinar la convergencia de integrales impropias de las funciones discontinuas y calcular sus valores se pueden aplicar frecuentemente teoremas análogos a los teoremos de las integrales con límites infinitos.

Teorema 1.

Si las funciones f(x) y φ(x) son discontinuas en el punto c del segmento [a, c], mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades

$$\boldsymbol{\varphi(x) \geq f(x) \geq 0}$$

y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ convergente, entonces, $\int_a^c f(x)\,dx$ también es convergente.

Teorema 2.

Si las funciones f(x) y φ(x) son discontinuas en el punto c del segmento [a, c], mientras que en todos los puntos de este segmento se cumplen las desigualdades

$$\boldsymbol{0 \leq f(x) \leq \varphi(x)}$$

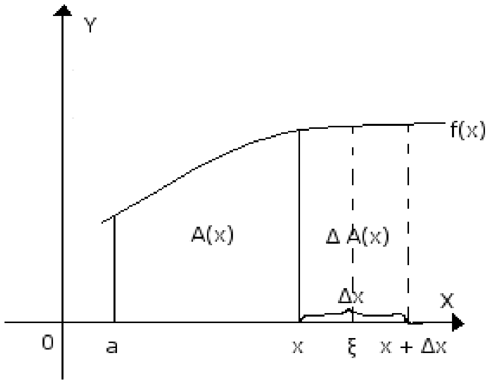
y $\int_a^c \varphi(x)\,dx$ es divergente entonces, $\int_a^c f(x)\,dx$ es también divergente

En los dos últimos teoremas se ha estudiado las integrales impropias de las funciones no negativas. Para el caso de la función f(x) que cambia de signo en un intervalo infinito, se tiene el teorema siguiente

Teorema 3.

Si la integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge entonces, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también converge, en este caso, la última integral se llama absolutamente convergente.

Cálculo de áreas



A(x) = Área de x
Se llama así porque si x se hace grande A(x) aumenta, de lo contrario, disminuye.
ΔA(x) = Incremento del área de x

Demostración:
x se reemplaza por t. Siendo t un extremo de integración.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$A(x) = \int_a^b f(t)\,dt \Rightarrow \Delta A(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow \Delta A(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \Rightarrow \Delta A(x) = \Delta x\, f(\xi) \Rightarrow x < \xi < x + \Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) \Rightarrow \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x) \Rightarrow A'(x) = f(x)$$

La derivada del área es igual a la función.

Cambios de variables en la integral definida

$$\int_a^b f(t)\,dt \Rightarrow f(x) \text{ continua en } [a, b)$$

$$x = \varphi(t) \text{ luego } dx = \varphi'(t)\,dt$$

1) $\varphi(\alpha) = a \wedge \varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t) \wedge \varphi'(t)$ continuas y derivables en $[\alpha, \beta]$
3) $f[\varphi(t)]$ Está definida, es continua y derivable en $[\alpha, \beta]$

Demostración:

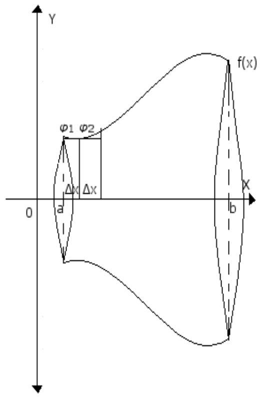
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = \int f[\varphi(t)] \,.\, \varphi'(t)\,.\,dt = F(\varphi(t)) + C \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)] \,.\, \varphi'(t)\,.\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Entonces, se puede concluir que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \,.\, \varphi'(t)\,.\,dt =$$

Volumen de un sólido de revolución

Definición:
Un sólido de revolución son dos puntos que uno es la bisectriz y otro la generatriz, en donde la generatriz va a girar en torno a la bisectriz.



Demostración:

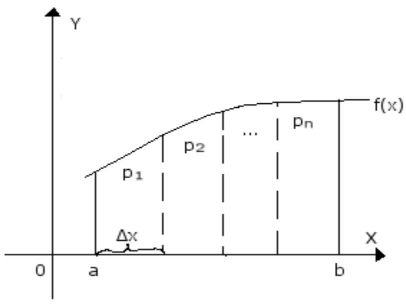
$\pi \cdot r^2 \cdot \Delta x$

$\pi \cdot f(\varphi_1)^2 \cdot \Delta x_1 + \pi \cdot f(\varphi_2)^2 \cdot \Delta x_2 + \dots + \pi \cdot f(\varphi_n)^2 \cdot \Delta x_n$
Cada Δx es un disco y los φ_i son todos los valores medios.

$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)^2 \cdot \Delta x_i \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)^2 \cdot \Delta x_i \Rightarrow \pi \lim_{\Delta x \to 0} f(\varphi)^2 \cdot \Delta x_i \Rightarrow \pi \lim_{max\, \Delta x_i \to 0} f(\varphi_i)^2 \cdot \Delta x_i$$

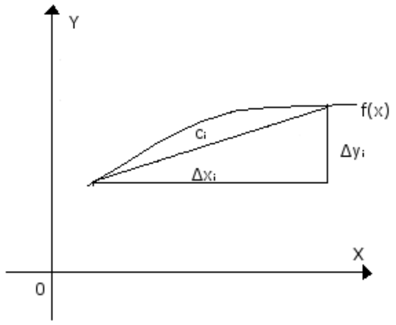
$\pi \int_a^b f(\varphi_i)^2 \, dx$ es a lo que se denomina Volúmen del Sólido de Revolución.

Longitud de un arco de curva



Una forma de calcular la longitud es sumar los segmentos en los que se dividió en la gráfica.

$$\pi \sum_{i=1}^{n} P_i = P \approx S$$



$$c_i^2 = \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$$

$$c_i = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}}$$

$$c_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}$$

$$c_i = \sqrt{\frac{\Delta x_i^2}{\Delta x_i^2} + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{4} c_i$$

Para que i = 4, **Δx → 0.** Tiende a 0, porque se habla de fracciones que se vuelven cero.

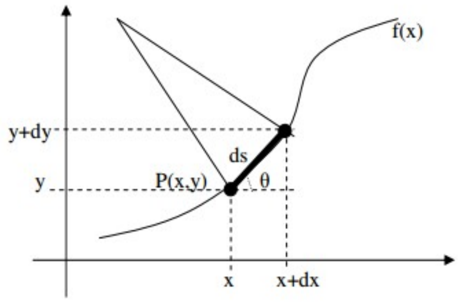
$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i$$

Por propiedad de límite, el límite puede ir dentro de la raíz.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$ es lo que nos da una longitud de curva.

Diferencial de Arco. Aplicaciones

Dada una función como la mostrada para el punto P(x,y), podemos analizar la curvatura de dicha función si al tomar ese punto calculamos una línea normal (90° respecto a la pendiente de la función en el punto P) y le incrementamos un diferencial dx; al evaluar la función en el punto P(x+dx, f(x + dx)) repetimos el proceso de calcular la línea normal, en el punto incrementado, así podemos obtener el centro y radio de una curvatura



La idea de analizarlo nuevamente es recordar que las ecuaciones obtenidas por el teorema de pitágoras si consideramos que ds (EL DIFERENCIAL DE ARCO) es la hipotenusa y cada diferencial dx y dy son los catetos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Ahora si despejamos para obtener un diferencial de arco respect o al cambio en dx tenemos que:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 .\ dx^2}{dx^2}} = \sqrt{dx^2\left[1^2 + \frac{dy^2}{dx^2}\right]} = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right] dx =$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx =$$

Análogamente para un diferencial de arco ds respecto al eje y, queda:

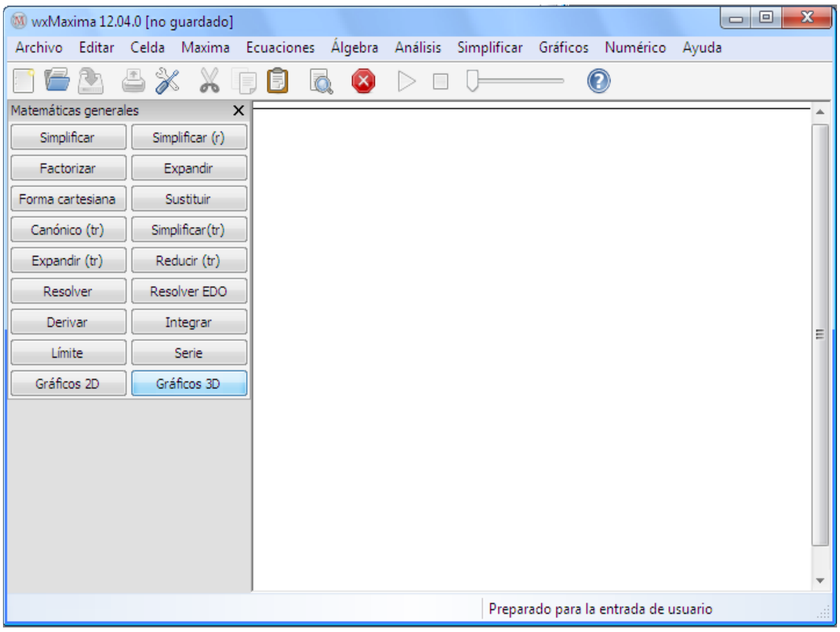
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dy =$$

O puede quedar simplemente como:

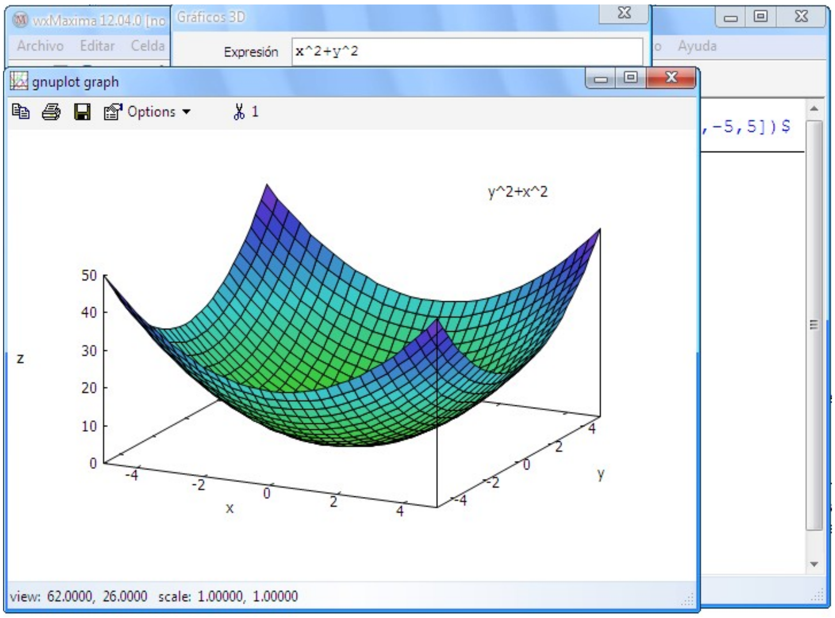
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

6. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Primeramente, para dar un ejemplo práctico y computacional al tema de las funciones de varias se puede utilizar el software libre Máxima para graficar una simple función de 2 variables independientes, ya que gráficamente no se puede representar una función de 3 o más variables independientes:



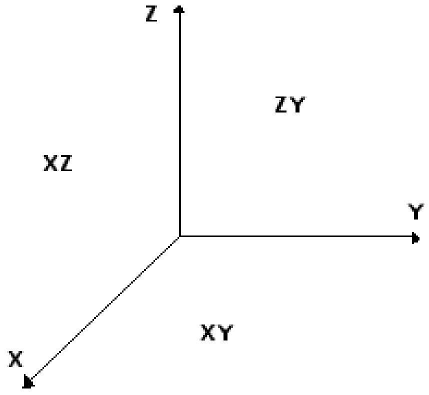
Luego de abrir el programa, se debe ir a Máxima > Paneles > Matemáticas Generales, y se presiona el botón de Gráficos 3D.
Cuando se esté en la sección Gráficos 3D, hay que borrar el símbolo % ; colocar $x^2 + y^2$ es decir, x^2 + y^2; recordando que hay que respetar la sintaxis propia del máxima.
El resultado debe ser similar a este. Nada más que la ventana se va a esconder cuando aparezca el resultado y va a aparecer otra nueva ventana que es la de gnuplot.



El resultado en este caso se interpreta perfectamente. Es la función $x^2+ y^2$ graficada, en donde lo más claro es lo más profundo de ese cuerpo, es similar a una sábana.
Se tiene la posibilidad también de poder girar el gráfico, tanto con las flechas direccionales como con el mouse.
Si se tiene algún inconveniente sobre el programa, la interfaz gráfica o los comandos que hay que utilizar, está la ayuda del programa.

Funciones de dos y de n variables independientes

Se representa los puntos en este espacio en un sistema de tres ejes cartesianos perpendiculares entre sí. Los ejes coordenados tomados de a 2, determinan los planos coordenados “x”, “y”, y, “z” que dividen al espacio en 8 partes llamadas octantes.



Distancia entre dos puntos en R^3

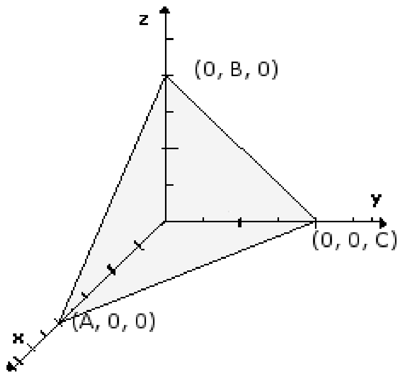
$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$A = \sqrt{(x_1, x_2)^2 + (y_1, y_2)^2 + (z_1, z_2)^2}$

Ecuación segmentaria del plano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = \frac{-D}{-D} \Rightarrow \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

Posiciones

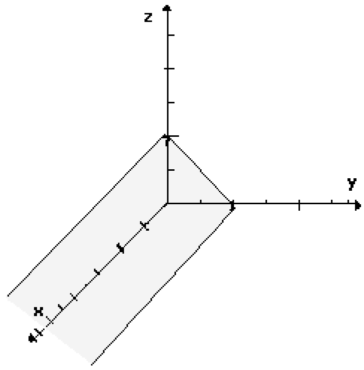


particulares del plano

$Ax + By + Cz = 0 \Rightarrow$

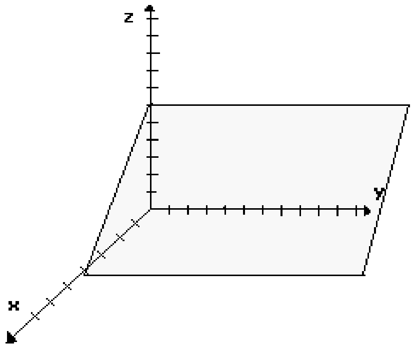
1) $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$

Resulta un plano paralelo el eje x y perpendicular al plano yz.



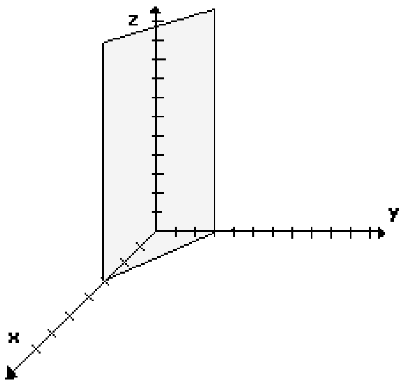
2) B = 0 ⇨ Ax + Cz + D = 0

Resulta un plano paralelo el eje y y perpendicular al plano xz.



3) C = 0 ⇨ Ax + By + D = 0

Resulta un plano paralelo el eje z y perpendicular al plano xy.



Superficies:

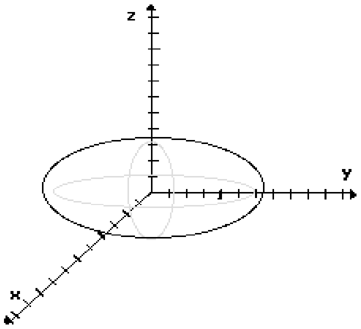
Son los conjuntos P(x, y, z) que están vinculados, mediante una ecuación.

Algunas superficies notables son la esfera del centro C(α, β, δ) y radio r > 0, con β > 0.

$(x - \alpha)^2 + (x - \beta)^2 + (x - \delta)^2 = r^2$

Elipsoide:
C = (0, 0, 0)

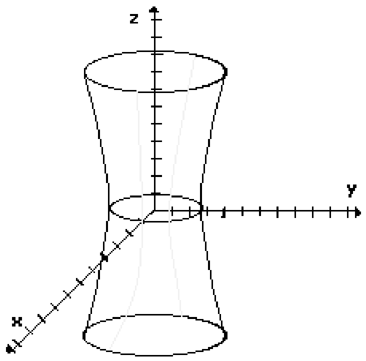
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Elipsoide de Centro:
El origen de este elipsoide tiene origen en el centro de coordenadas.

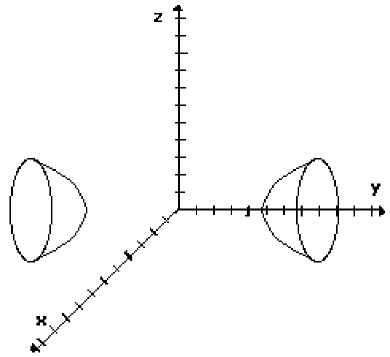
Hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



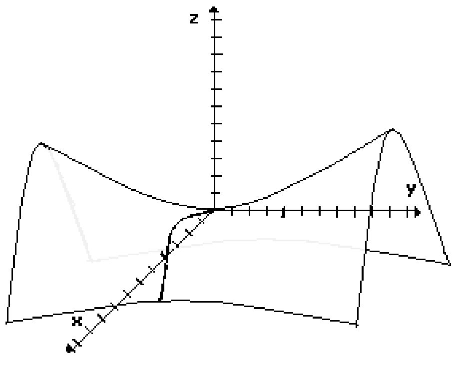
Hiperboloide de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Paraboloide PHiperbólico:

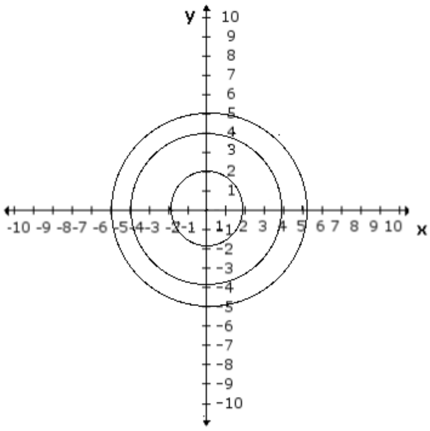
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Paraboloide hiperbólico



Curvas y superficies de nivel

Curvas de Nivel:
Sea una superficie de ecuación z = xy, vamos a representar en el espacio el eje x, el eje y y, eje z.

Si se intersecta con planos paralelos al plano xy, (z = k) (porque va a ser un plano que corta al eje de las z). Se obtienen curvas que se pueden proyectar sobre el plano x,y. Estas curvas se llaman curvas de nivel.
Podemos definir a las curvas de nivel como las proyecciones sobre el plano xy de las intersecciones de la superficie, con planos paralelos al plano xy. Ejemplo:
Sea $z = (x^2 + y^2)$
Si intersectamos a la superficie dada con planos de ecuaciones.
Z = 1, z = 2, z = 4, vamos a obtener las siguientes curvas de nivel.
Si z = 1, entonces:
$\mathbf{z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1}$
Sería una ecuación de circunferencia de radio 1.



$z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 = \sqrt{2}$. (Se obtiene una circunsferencia de radio raiz 2)
$z = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 = 2$. (Radio de 2)
En este caso las curvas de nivel son círculos concéntricos.

Superficies de Nivel:

Diferencias:
Lo que se quiere representar son las curvas, las superficies no se pueden representar porque son de 4 dimensiones.

En el caso de que U depende de tres variables, u = (x, y, z) a cada terna de valores x, y, z, le corresponde un valor de u.
La gráfica de u se encontrará en una cuarta dimensión, no perceptible a nuestros sentidos, entonces, las superficies de nivel surgen cuando a la función le asignamos un valor constante.

Si $u = c_1 \Rightarrow f(x, y, z) = c_1$
Si $u = c_2 \Rightarrow f(x, y, z) = c_2$

Ejemplo:
Obtener superficies de nivel si tengo una función:
$u = f(x, y, z) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$
Si $u = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3$ La superficie de nivel obtenida es una esfera de radio $\sqrt{3}$, de centro (0 , 0 , 0)
Si le asigno a $u = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$ Tendría una esfera de radio 2, de centro (0 , 0 , 0)

Limites de dos variables independientes

Definición:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Decimos que la función z = (x, y) tiene límite L, cuando x, tiende a x_0 , y tiende y_0 si la diferencia $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, donde z = (x, y) de un entorno de (x_0, y_0).

Es decir:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \delta_1,\ 0 < |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

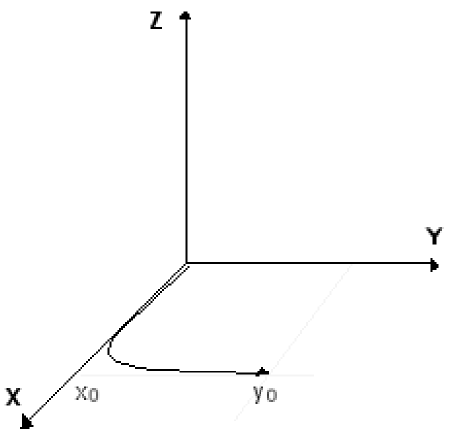
Esta definición se corresponde perfectamente con el límite de una variable.

Limite doble y limites iterados

En este caso, se hace tender a su límite primero una variable, dejando fija la otra y luego esta en la función así obtenida.

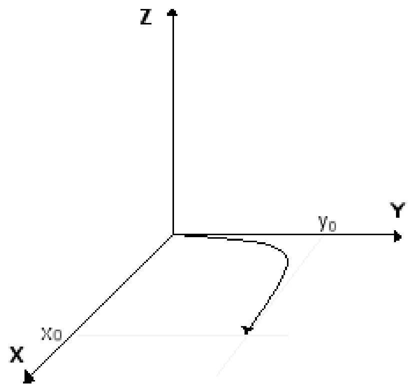
$$L_1 = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y)\right)$$

Primero se resuelve lo de "adentro" , y hace tender a x e y con respecto a x_0 y luego a y_0.

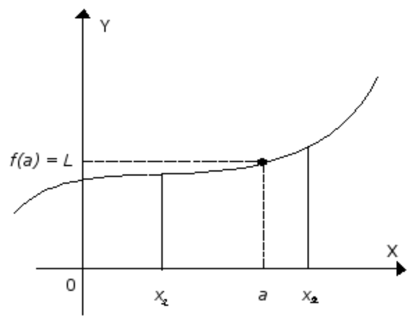


$L_2 = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \right)$

Primero se resuelve lo de "adentro" , y hace tender a x e y con respecto a y_0 y luego a x_0.



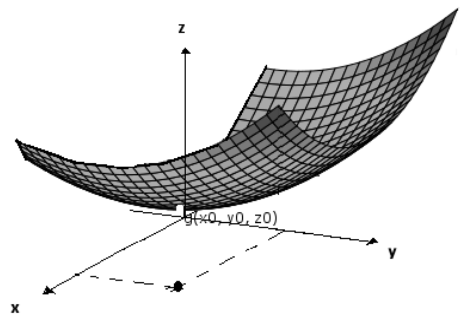
Continuidad de funciones de dos variables independientes
Condiciones de continuidad:

En una variable era : 1) **En x = a, f(x) = f(a).** 2) **$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$** 3) **$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = f(a)$.** **f(x) es continua en x = a**	

En varias variables es :

1) **$\exists$ f(x, y) en (x_0 , y_0).**
2) **$\lim\limits_{(x,\ y) \to (x0,\ y0)} f(x, y) = L$**
3) **L = f(x_0 , y_0).**

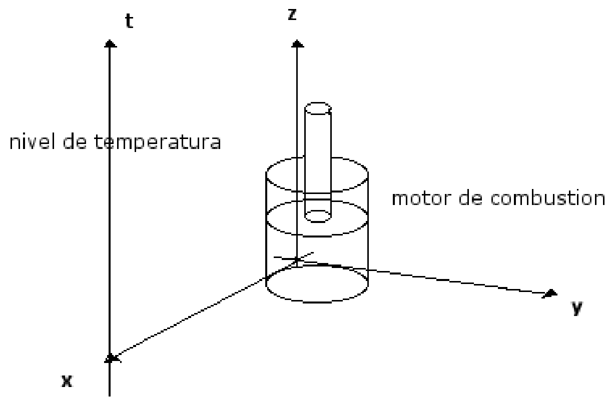
f(x) es continua en (x_0 , y_0).



Continuidad de funciones de n variables independientes

Si se tienen tres variables y una variable dependiente.

u = f(x, y, z)
Se manejan 4 variables, pero no se pueden graficar las cuatro, sino que uno se puede imaginar esa variable y su aplicación.

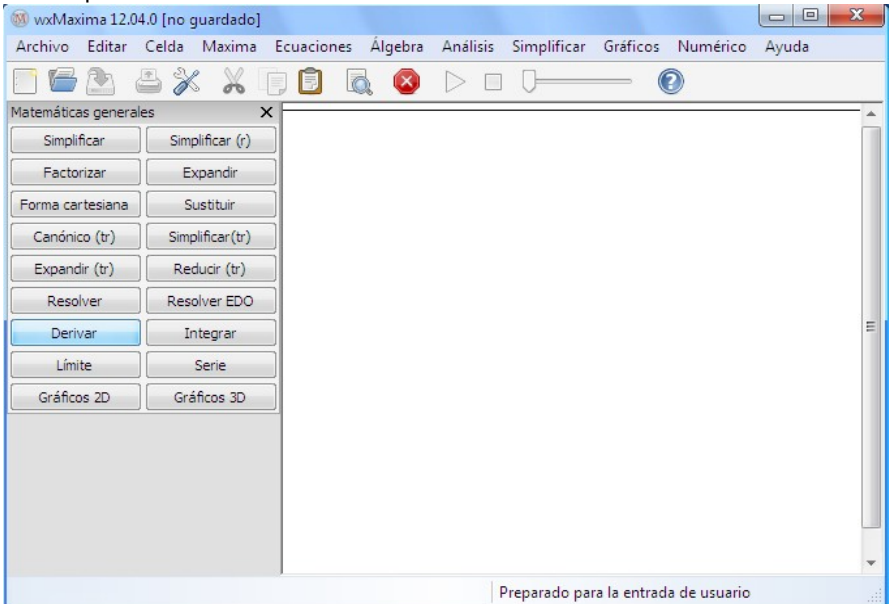


f(x) $\in$ R^4
Condiciones de continuidad:

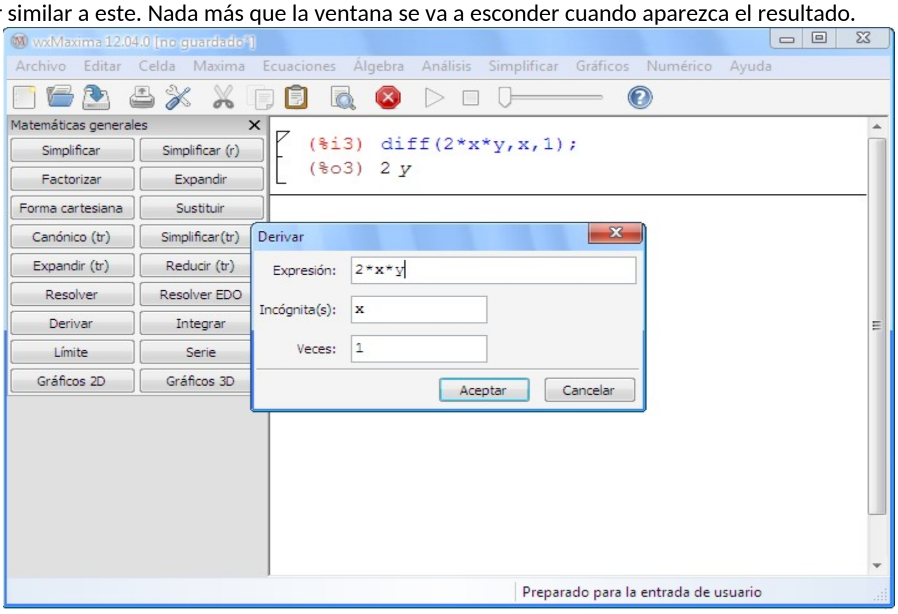
1) **$\exists$ u = f(x, y, z) en (x_0 , y_0, z_0).**
2) **$\lim\limits_{(x,\ y,\ z) \to (x0,\ y0,\ z0)} f(x, y, z) = L$**
3) **L = f(x_0 , y_0, z_0).**

7. DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Primeramente, para dar un ejemplo práctico y computacional al tema de la derivación de varias variables, se puede utilizar el software libre Máxima para calcular una simple derivada de varias variables:



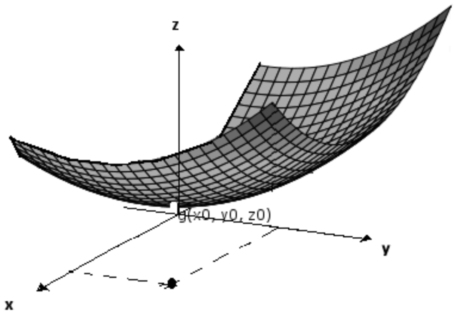
Luego de abrir el programa, se debe ir a Máxima > Paneles > Matemáticas Generales, y se presiona el botón de Derivar.
Cuando se esté en la sección Derivar, hay que borrar el símbolo % y colocar 2xy es decir, 2 * x * y; recordando que hay que respetar la sintaxis propia del máxima.
El resultado debe ser similar a este. Nada más que la ventana se va a esconder cuando aparezca el resultado.



El resultado 2 y se interpreta de la siguiente manera: La derivada parcial de 2xy con respecto a x, es 2y. Lo que se hace es juntar el 2 y el y, como si ambos fueran constantes y derivar como siempre, como se hace en una sola variable.
Si se tiene algún inconveniente sobre el programa, la interfaz gráfica o los comandos que hay que utilizar, está la ayuda del programa.

Derivada de una función de dos variables independientes

Definición:
El límite de la razón del incremento parcial $\Delta_x z$ respecto a x, en relación al incremento Δx, cuando Δx tiende a cero se llama derivada parcial respecto a x de la función z = f(x, y)



La derivada parcial respecto a x de la función z = f(x, y) se designa por uno de los símbolos siguientes:

$$Z'_x \; ; \; f'_x(x, y)'_x \; ; \frac{\partial z}{\partial x} \; ; \frac{\partial f}{\partial x}$$

De tal modo, según la definición:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x_0}{\Delta x} \Rightarrow Z'_x = \frac{D\lambda}{\partial \lambda} = \operatorname{tg} \alpha$$

Análogamente, la derivada parcial respecto a y de la función z = f(x, y) se determina como el límite de la razón del incremento parcial de la función $\Delta_y z$ respecto a y, en relación el incremento Δy, cuando Δy tiende a cero. La derivada parcial respecto a y se designa por uno de los siguientes:

$$Z'_y \; ; \; f'_y(x, y)'_x \; ; \frac{\partial z}{\partial y} \; ; \frac{\partial f}{\partial y}$$

De tal modo, según la definición:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Rightarrow \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Rightarrow \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta y} \Rightarrow Z'_y = \frac{D\lambda}{\partial \lambda} = \operatorname{tg} \alpha$$

Observemos que Z'_y se calcula manteniéndose "y" invariable y Δy_0 manteniéndose x invariable; se llama derivada parcial de la función z = f(x, y), respecto a x, a la derivada de esta función respecto a x, calculada en la suposición de que y es constante. Se llama derivada parcial de la función z = f(x, y), respecto a y, a la derivada de esta función respecto a y, calculada en la suposición de que x es constante.
De la definición formulada se deduce que las reglas para calcular las derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular la derivada de las funciones de una variable; es preciso, solamente, tener en cuenta respecto a qué variable se busca la derivada.

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Sea

$$z = f(x, y)$$

una ecuación.
Se traza un plano x = const.
Una recta P va a pasar por toda la curva formada por la interseccion del plano, moviéndose en dirección a x.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \widehat{\alpha}$$

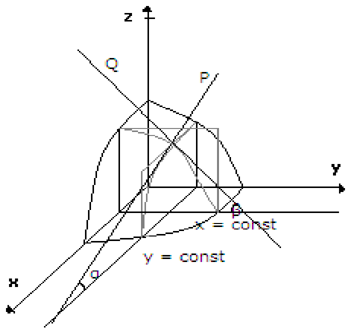
La derivada con respecto a x va a es la pendiente de la recta P

De manera similar $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Se traza un plano x = const.
Una recta P va a pasar por toda la curva formada por la interseccion del plano, moviéndose en dirección a y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \hat{\beta}$$

La derivada con respecto a y va a es la pendiente de la recta Q



Derivadas parciales de funciones de n variables independientes

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si w = f(x, y z) existen tres derivadas parciales cada una de las cuales se forma manteniendo constantes las otras dos variables. Es decir, para definir la derivada parcial de *w* con respecto a *x*, se consideran *y* y *z* constantes y se deriva con respecto a *x*. Para hallar las derivadas parciales de *w* con respecto a *y* y con respecto a *z* se emplea un proceso similar.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'_x(x, y, z) \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f'_y(x, y, z) \Rightarrow \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f'_z(x, y, z) \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hay *n* derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f'_{xk}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, se mantienen constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada.

Derivadas parciales de orden superior

Sea z = f(x, y) una función de dos variables independientes.
Las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ son, en general, funciones de las variables x e y. Por eso, éstas también pueden tener derivadas parciales. Por cinsiguiente, las derivadas parciales de segundo orden de una función de dos variables, son cuatro, puesto que cada una de las funciones $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ puede ser derivada tanto respecto a x, como respecto a y.

Las derivadas parciales se designan así:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$; donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f''_{xy}(x, y)$; donde f se deriva primero respecto a x, luego el resultado se deriva respecto a y

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{yx}(x, y)$; donde f se deriva primero respecto a y, luego el resultado se deriva respecto a x

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$; donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a y;

Las derivadas de segundo orden se pueden derivar de nuevo, tanto respecto a x, como respecto a y; como resultado obtenemos derivadas de tercer orden. Es evidente que serán ocho:

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\, \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

En general, la derivada parcial de n-ésimo orden es la primera derivada de la derivada de (n – 1) – ésimo orden.
De igual manera se definen las derivadas parcial de órdenes superiores para la función de cualquieri número de variables.

Diferenciabilidad de funciones de dos variables independientes

Si una función dada por $y = f(x)$ es *diferenciable*, se puede utilizar la diferencial $dy = f'(x)\, dx$ como una aproximación (para Δx pequeños) al valor $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Cuando es válida una aproximación similar para una función de dos variables, se dice que la función es diferenciable. Esto se expresa explícitamente en la definición siguiente.

Definición:
Una función f dada por $z= f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f'_y(x_0, y_0)\, \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(x_0, y_0) \to (0, 0)$. La función es diferenciable en una región *R* si es diferenciable en todo punto de *R*.

Diferencial total

Definición:
El diferencial de una función de 2 variables es igual a la suma de los productos de sus derivadas parciales por los respectivos incrementos de las variables independientes.
Como x e y son independientes, el incremento es igual al diferencial

$$\Delta x = dx$$
$$\Delta y = dy$$
$$dz = Z'x\, dx + Z'y\, dy$$

Recordemos, en una variable :

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x)\ \frac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \Rightarrow \Delta y = [f'(x) + \varepsilon(\Delta x)] \,.\, \Delta x \Rightarrow \Delta y = f'(y) \,.\, \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \,.\, \Delta x \Rightarrow \Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x) \,.\, \Delta x$$

Esta es la fórmula del incremento de y = f(x)

z = f(x, y)

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \,.\, \Delta x + \varepsilon_1(\Delta x) \,.\, \Delta x$$

$$\Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \,.\, \Delta x + \varepsilon_2(\Delta y) \,.\, \Delta y$$

$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z$
El incremento total es la suma de los dos incrementos.
Como la suma es conmutativa, se coloca los incrementos delante y los infinitésimos atras.
$\Delta z = Z'_x\, \Delta x + Z'_y\, \Delta y + \varepsilon_1(\Delta x) \,.\, \Delta x + \varepsilon_2(\Delta y) \,.\, \Delta y$
Siendo esta la fórmula del incremento total de funciones de variables.
$\Delta z = \underline{Z'_x\, \Delta x + Z'_y\, \Delta y} + \varepsilon_1(\Delta x) \,.\, \Delta x + \varepsilon_2(\Delta y) \,.\, \Delta y$
La parte subrayada se denomina parte principal del incremento total, que es la diferencial de la función de dos variables.dz.

z = f(x, y)
dz = z'x Δx + z'y Δy

Diferencial de una función de n variables independientes

Si $w = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$
$dw = f'x_1\, dx_1 + f'x_2\, dx_2 + .. + f'x_n\, dx_n$

Para que una función de f(x, y) sea diferenciable en un punto (x_0, y_0)es suficiente que sea continua, derivable y con derivadas parciales de primer orden, continuas en (x_0, y_0) es decir, es condición suficiente para que una función z = f(x, y) sea diferenciable en el punto (x_0, y_0), que admita derivadas parciales de primer orden continuas en el punto (x_0, y_0).

Propiedades:

1) si z = f(x, y) es diferenciable en un punto (x0, y0) entonces es continua en ese punto.
2) si z = f(x, y) no es continua en un punto (x0, y0) entonces no es diferenciable en el punto.

Derivada de la función compuesta

z = f(x, y)
donde x = g(t)
y = h(t)

Se parte de la fórmula del incremento total de la función de 2 variables.

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = Z'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + Z'_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{(\Delta x)}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{(\Delta y)}{\Delta t}$$

Se aplica ahora el límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} f(x) \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[Z'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + Z'_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right]$$

$$\frac{du}{dt} \quad Z'_x \frac{du}{dt} + Z'_y \frac{du}{dt}$$

Siendo la fórmula de la función compuesta.

Derivada de la función implícita

Consideramos la ecuación:
F(x, y) = 0, queremos saber bajo que condiciones la expresión de f(x, y) es igual a 0, define una función derivable y queremos calcular la derivada.
Las condiciones son:

1) F(x, y) = 0
2) F'x y F'y existen y son continuas en un entorno de P0 (x0, y0)
3) $F'y\,(x_0, y_0) = 0$

dz = F'x dx + F'y dy
Para deducir la fórmula de la derivada de una función implícita z = F(x, y) = 0 partimos de la fórmula de la diferencial total de la función.
Pero como esta igualada, esto es:

$$dx = F'x\, dx + F'y\, dy \Rightarrow F'x\, dx + F'y\, dy = 0 \Rightarrow F'x \frac{dx}{dx} + F'y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow F'y \frac{dy}{dx} = -F'x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{F'x}{F'y}$$

Extremos relativos de una función de dos variables

z = f(x, y)
Zx = 0 ^ Zy = 0

Hessiano:

$$H = \begin{vmatrix} Zxx & Zxy \\ Zyx & Zyy \end{vmatrix}$$

Se calcula primero un Hessiano general.

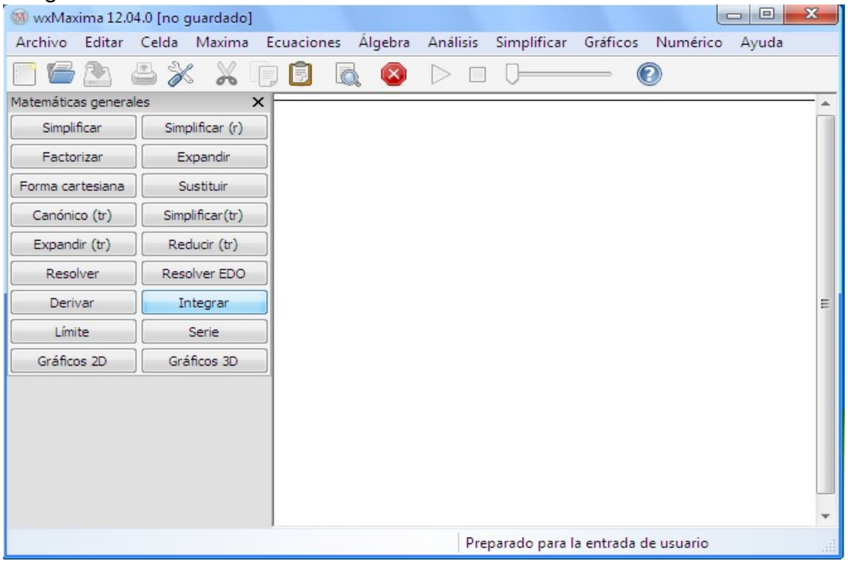
$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \textbf{Extremo relativo} \\ = 0 & \Rightarrow \textbf{Caso Dudoso} \\ < 0 & \Rightarrow \textbf{Punto de Ensilladura} \end{cases}$$

A cada punto crítico se le corresponde un Hessiano:
Si tenemos un extremo relativo, entonces tenemos:

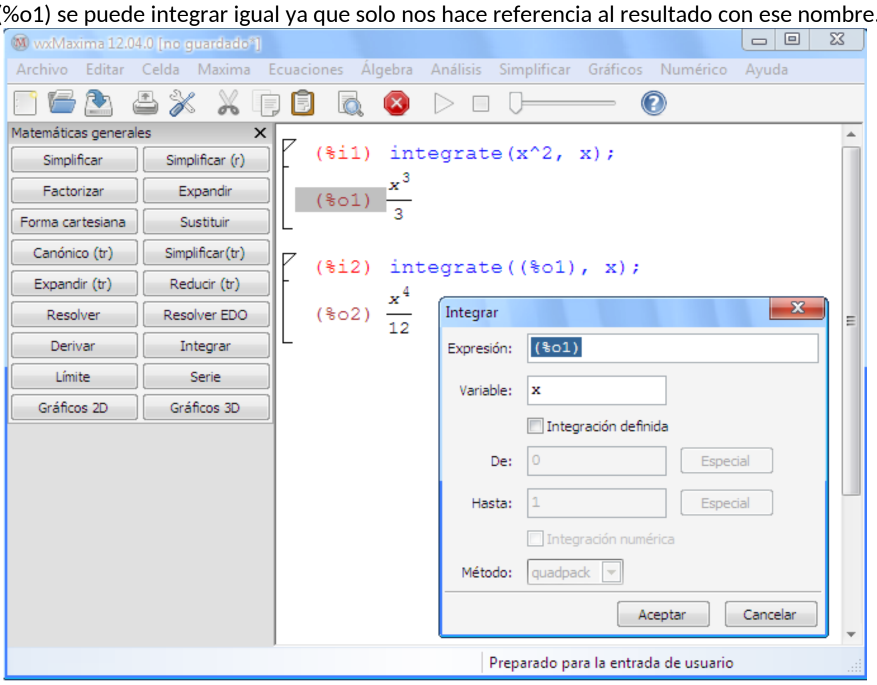
$$Z_{xx} \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \textbf{Mínimo relativo} \\ = 0 & \Rightarrow \textbf{Caso Dudoso} \\ < 0 & \Rightarrow \textbf{Máximo relativo} \end{cases}$$

8. INTEGRALES MÚLTIPLES

Primeramente, para dar un ejemplo práctico y computacional al tema de la integración múltiple, se puede utilizar el software libre Máxima para calcular una simple integral:

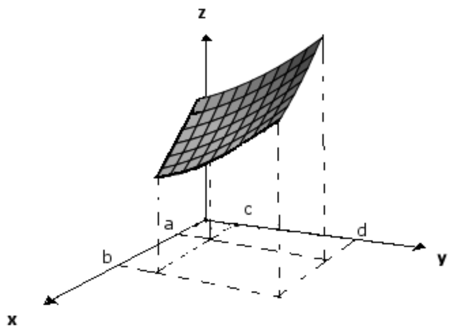


Luego de abrir el programa, se debe ir a Máxima > Paneles > Matemáticas Generales, y se presiona el botón de Integrar.
Cuando se esté en la sección Integrar, hay que borrar el símbolo % y colocar x^2, es decir, x^2, recordando que hay que respetar la sintaxis propia del máxima.
Al resultado visto en integrales indefinidas, podemos volver a integrar presionando en la parte en donde muestran los resultados en donde dice (%o1) que está detrás del resultado y nuevamente, presionar el botón de integrar tanto en forma indefinida como definida.
Aunque nos aparezca (%o1) se puede integrar igual ya que solo nos hace referencia al resultado con ese nombre.



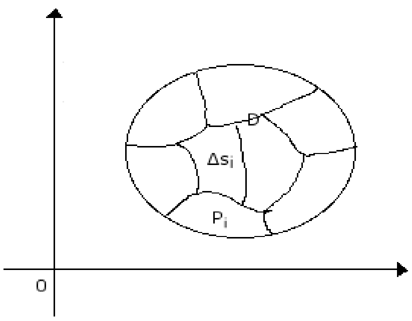
El resultado en este caso se interpreta así: el resultado se parte en una multiplicación 1/3 . x^3, como un tercio es constante puede salir del signo de la integral y luego se integra el x^3, se obtiene el resultado, que es 1/3 . x^4 / 4, y se junta todo quedando de la manera mostrada .
Si se tiene algún inconveniente sobre el programa, la interfaz gráfica o los comandos que hay que utilizar, está la ayuda del programa.

Región de integración



Sea dada en el dominio D una función continua $z = f(x, y)$
Se divide el dominio D mediante curvas arbitraria en n partes.

Las que llamaremos dominios parciales o elementos. Para no introducir nuevos símbolos designaremos por $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$ no sólo a los propios elementos, sino también también sus áreas. En cada Δs_i (en su interior o en la frontera), elijamos un punto P_i; entonces se obtienen n puntos:
$P_1, P_2, \ldots P_n$



Sean $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$ los valores de la función en los puntos elegidos; formemos la suma de productos de la forma $f(P_i)\, As_i$:

$$V_n = f(P_1)\, \Delta s_1 + f(P_2)\, \Delta s_2 + \ldots f(P_n)\, \Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta s_i$$

que se llama suma integral de la función f(x, y) en el dominio D.
Si $f > 0$ en el dominio D, entonces cada sumando $f(P_i)\, \Delta s_i$ se puede representar geométricamente como el volumen de un cilindro elemental de base Δsi y de altura $f(P_i)$.
Así, V_n es la suma de los volúmenes de los cilindros elementales indicados, es decir, el volumen de un cierto cuerpo escalonado.
Examinemos una sucesión arbitraria de las sumas integrales formadas con ayuda de la función f(x, y) en el dominio D:
$V_{n1}, V_{n2}, \ldots, V_{nk}, \ldots$
para diferentes métodos de división del dominio D en las partes Δs_i. Supongamos que el diámetro máximo de los elementos Δs_i tiende a cero, cuando $n_k \to \infty$.

Propiedades de la integral doble

Teorema 1. Siendo f(x, y) una función continua en el dominio cerrado D, la sucesión de las sumas integrales tiene un límite, si el diámetro máximo de Δs_i tiende a cero, mientras que $n \to \infty$. Este límite siempre es el mismo para cualquier sucesión de la forma mencionada, es decir, no depende del modo de división del dominio en los elementos Δs_i, ni la elección del punto P_i dentro del dominio parcial Δs_i.
Este límite se llama integral doble de la función f(x, y) extendida por el dominio D y se designa así:

$$\iint_D f(P)\, ds \quad \text{o} \quad \iint f(x, y)\, dx\, dy =$$

es decir,

$$\lim_{diam\ \Delta s_i \to 0} = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta s_i = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

Aquí D se llama dominio de integración
Si es f(x, y) > 0, la integral doble de f(x, y) extendida por el dominio D es igual al volumen Q de un cuerpo limitado por la superficie z = f(x, y), el plano z = 0 y la superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje z y la directriz es la frontera del domino D.
Examinemos ahora los siguientes teoremas acerca de la integral doble.

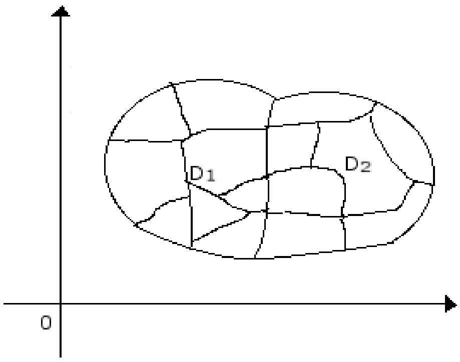
Teorema 2. La integral doble de la suma de dos funciones **φ**(x, y) + ψ(x, y), extendida por un dominio D es igual a la suma de las integrales dobles extendidas por este dominio D de cada una de las funciones por separado:

$$\iint_D [\varphi(x, y) + \psi(x, y)]\,ds = \iint_D \varphi(x, y)\,ds + \iint_D \psi(x, y)]\,ds =$$

Teorema 3. El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral doble:
Sea a una constante, así tenemos:

$$\iint_D [a \cdot \varphi(x, y)]\,ds = a \cdot \iint_D \varphi(x, y)\,ds =$$

La demostración de estos dos teoremas últimos se efectúa de modo análogo al que hemos practicado para demostrar teoremas correspondientes de la integral definida.



Teorema 4. Si el dominio D está dividido en dos dominios parciales D_1 y D_2, sin poseer puntos interiores comunes y la función f(x, y) es continua en todos los puntos del dominio D, entonces:

$$\iint_D [f(x, y)]\,dx\,dy = \iint_{D1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{D2} f(x, y)\,dx\,dy =$$

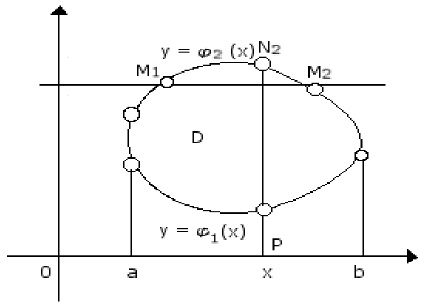
Demostración:
La suma integral por el dominio D se puede representar en la forma:

$$\sum_D f(P_i)\,\Delta s_i = \sum_{D1} f(P_i)\,\Delta s_i + \sum_{D2} f(P_i)\,\Delta s_i$$

donde la primera suma contiene términos correspondientes a los elementos del dominio D_1, y la segunda, términos correspondientes a los elementos del dominio D_2. En efecto, como la integral doble no depende del modo de dividir el dominio D, dividámoslo de manera que la frontera común de D_1 y D_2 sea también una frontera de los elementos As_i. Pasando en la igualdad anterior al límite, cuando $\Delta s_i \to 0$, obtenemos la igualdad 3. Es evidente que este teorema es válida para cualquier número de sumandos.

Cálculo de integrales dobles

Sea un dominio D del plano xy tal que toda recta paralela a uno de los ejes de coordenadas (por ejemplo, al eje y) y que pasa por un punto interior del dominio, corta su frontera en dos puntos N_1, y N_2.



Supongamos que en el caso examinado el dominio D está limitado por las curvas: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ y las rectas, $x = a$, $x = b$; que:

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x); \quad a < b;$$

y además las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son continuas en el segmento [a, b]. Convengamos llamar tal dominio regular en la dirección del eje x.
Un dominio regular en las direcciones de ambos ejes de coordenadas llamemos simplemente dominio regular.
Sea f(x, y) una función continua en el dominio D.
Examinemos la expresión:

$$I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx =$$

la que se llamará integral iterada de segundo orden de la función f(x, y), extendida por el dominio D. En esta expresión al principio se calcula la integral entre paréntesis. La integración se realiza respecto a y, considerando x constante. Como resultado de la integración obtenemos una función continua de x.

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy =$$

Integramos la última función respecto a x entre los límites desde a hasta b:

$$I_D = \int_a^b \Phi(x)\, dx$$

En definitiva obtenemos un número constante.
Integrales iteradas

Teorema:
El volumen de una región en R^3 es igual a la integral del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado.

Este resultado permite calcular volúmenes calculando áreas de secciones planas y tiene importantes consecuencias para el cálculo de integrales dobles.
Dada una función positiva f:

$$\mathbf{u = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in A,\ 0 \le z \le f(x, y)\}}$$

Se calcula el área de la sección $u(x_0)$ para cada x_0 fijo, que se obtiene cortando u con el plano de ecuación $X = x_0$. Se puede ver que $u(x_0)$ es una sección de u perpendicular al eje "x", y por lo tanto paralela al plano yz. Como:

$$\mathbf{u(x_0) = \{(x_0, y, z) : y \in [c, d],\ 0 \le z \le f(x_0, y)\}}$$

se tiene que $u(x_0)$ es la región del plano $X = x_0$ comprendida entre la curva $z = f(x_0, y)$, el eje "y" y las rectas $y = c$, $y = d$.
Para calcular el volumen de u se integra las áreas de las secciones u(x) cuando $x \in [a, b]$, y obtenemos finalmente que:

$$\iint_D f(x, y)\, dy\, dx = \text{volumen } (u) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

Razonando de forma análoga, considerando secciones de u(y) de u paralelas al plano xz, se obtiene la igualdad.

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \text{volumen } (u) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

De estas igualdades se deduce que:

$$\iint_D \mathbf{f(x,y)\ dx\,dy} = \int_a^b \left[\int_c^d \mathbf{f(x,y)\ dy}\right] \mathbf{dx} = \int_c^d \left[\int_a^b \mathbf{f(x,y)\ dx}\right] \mathbf{dy}$$

Las integrales del segundo y el tercer miembro de esta igualdad se denominan integrales iteradas y, son iguales y su valor común es igual a la integral doble presentada en el primer miembro de la igualdad. Se observa que son dos integrales simples, que para calcular cada una lo que se hace es integrar con respecto a la variable del diferencial a la que hace referencia dejando a la otra como constante.
Para ello lo que se hace es obtener una primitiva de la función z = f(x, y) y usar la regla de Barrow. Se puede ver que la función z = f(x, y) puede describirse como una primitiva parcial de f(x, y) con respecto a alguna de las variables. Lo mismo que en las derivadas parciales.

La integral triple

Sea dado en el espacio cierto dominio V, limitado por una superficie cerrada S. Se supone que en el dominio V y en su frontera está definida una función continua f(x, y, z), donde x, y , z son las coordenadas rectangulares de un punto del dominio. Para precisar las ideas en el caso en que f(x, y, z) ≥ 0, se puede suponer que ésta representa la densidad de distribución de cierta materia en el dominio V.
Dividamos el dominio V arbitrariamente en dominios parciales Δv_i, designando con el símbolo Δv_i no solo el dominio elemental, sino también su volumen. En cada Δv_i tomemos un punto arbitrario P_1 y designemos $f(P_1)$ el valor de la función f en ese punto.
Formemos la suma integral.

$$\sum f(P_i)\,\Delta v_i$$

y se aumenta indefinidamente el número de los dominios parciales de modo que el diámetro máximo de Δv_i tienda a cero. Si la función f(x, y, z) es continua, existe el límite de las sumas integrales de la forma de la sumatoria mostrada, donde al límite se le da el mismo significado, que hemos dado durante la determinación de la integral doble. Este límite, que no depende del modo de dividir el dominio V ni de la manera de elegir los puntos Pi, se designa por el símbolo

$\iiint_V f(P)\,dv$ y se llama integral triple. Así según la definición, tenemos:

$$\lim_{\text{diam } \Delta vi \to 0} \sum \mathbf{f(P_i)\,\Delta v_i} = \iiint \mathbf{f(P)\,dv}$$

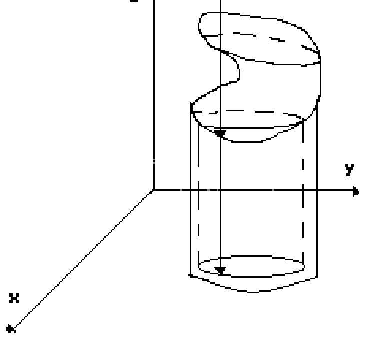
$$\iiint_V \mathbf{f(P)\ \ \Delta v} = \iiint_V \mathbf{f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz}$$

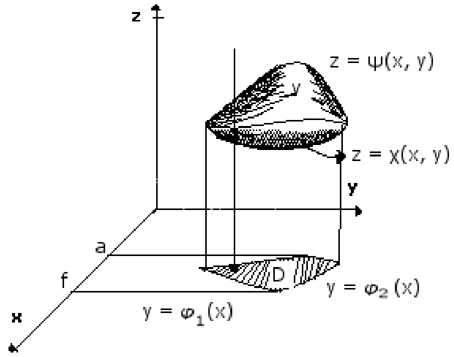
Calculo de integrales triples:

Se supone que un dominio espacial (tridimensional) V, limitado por una superficie cerrada S, tiene las siguientes propiedades:

1) Toda recta paralela al eje z, trazada por un punto interior del dominio V (es decir, por un punto que no pertenece a la frontera S) corta la superficie S en dos puntos;
2) Todo dominio V se proyecta sobre el plano xy en forma de un dominio regular (de dos dimensiones) D;
3) Toda parte del dominio V, separada por un plano paralelo a un plano de coordenadas cualquiera (xy, xz, yz), también posee las dos propiedades mencionadas, y se llama dominio regular tridimensional.

Un dominio V tiene que tiene las propiedades indicadas se llama dominio regular tridimensional.
Estos dominios tridimensionales regulares son, por ejemplo, un elipsoide, un paralelepípedo rectangular, un tetraedro, etc.
Solo se examinarán los dominios regulares





Sea z = χ(x, y) la ecuación de una superficie que limita el dominio V por debajo y z = ψ(x, y) la de una superficie que limita V por arriba.
Se va a introducir la noción de una integral iterada de tercer orden I y, extendida por el dominio V, de una función de tres variables f(x, y, z) y continua en V. Se va a suponer que la proyección del dominio V sobre el plano xy es el dominio D que está limitado por las líneas:

$y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ x = a , x = b

En este caso, la integral iterada de tercer orden de la función f(x, y, z)por el dominio V se determina así:

$$I_v = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi 1(x)}^{\varphi 2(x)} \left[\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right\} dx =$$

Se puede notar que , como el resultado de la integración respecto a z, y la sustitución de los límites en las llaves, se obtiene una función de x e y. Luego, se puede calcular una integral doble de esta función extendida por el dominio D, como lo hecho anteriormente.

Cambios de variables

Para funciones de una variable se sabe que

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

donde se supone que a < b y g(c) = a, g(d) = b. Supongamos que la función g es inyectiva, entonces g debe ser creciente o decreciente. Si es decreciente se tiene que d < c y g ´ (t) 0, por lo que |g ´ (t)| = −g ´ (t) y podemos escribir

$$\int_c^d f(g(t))\, g'(t)\, dt = - \int_d^c f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

Podemos, por tanto, cuando g es inyectiva, escribir en todos los casos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

donde g es una biyección del intervalo [a, b] sobre el intervalo [α, β]. Esta fórmula se generaliza para funciones de varias variables dando lugar al teorema del cambio de variables.

El teorema del cambio de variable para integrales dobles afirma que:

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_B f(g(u, v))\,|\det J_g(u, v)|\; d(u, v)$$

donde se supone que la función g es una biyección de B sobre A de clase C (sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas) con determinante jacobiano distinto de cero, esto es, det J_g (u, v) ≠ 0 para todo (u, v) ∈ B. En esta fórmula se interpreta que la función g hace un cambio de coordenadas pues permite asignar a cada punto (x, y) ∈ A el único punto (u, v) ∈ B tal que g(u, v) = (x, y).

Aunque la integral de la derecha en la fórmula parece más complicada que la de la izquierda, cuando hacemos un cambio de variable lo que se trata es de conseguir que o bien la función f (g(u, v))|det J_g (u, v)| sea más sencilla de integrar en B que la función f (x, y) en A o bien que el recinto de integración B sea más sencillo que A. Si podemos conseguir las dos cosas, mejor.

Las condiciones que hemos supuesto para la validez de la fórmula se pueden relajar un poco permitiendo que puedan fallar en un número finito de curvas. Por ejemplo, es suficiente que g sea una biyección de B sobre el conjunto A en el que se ha suprimido un segmento; o puede permitirse que el determinante jacobiano de g se anule en alguna curva en B. La idea, que no hay que olvidar, es que para calcular integrales dobles podemos ignorar lo que pasa en conjuntos de “área cero”.

Solamente con la práctica se puede aprender cuándo es conveniente hacer un cambio de variables y qué función es la adecuada para realizarlo. Para integrales dobles el cambio de variable más útil es a coordenadas polares.

9. ECUACIONES DIFERENCIALES.

Definición
Una ecuación diferencial es una ecuación que vincula un número finito de variables con las derivadas de cada una de ellas respecto de las otras.

Orden y grado de una ecuación diferencial

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial.
El grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden
Ejemplos:

$y'' + y'^{2} = 2xy$ 2° Orden
1° Grado

$2xy'^{2} + 2y''^{3} = 2y$ 2° Orden
1° Grado

Es una ecuación diferencial la solución no es un valor determinado, sino dicha solución es una función del tipo y = F(x); donde F(x) es una función de la forma F(x) = f(x) + C de manera que F(x) finalmente resulta una familia o haz de curvas; porque cualquiera que sea f(x) , habrá una F(x) diferente para cada valor de la constante C.

Soluciones de las ecuaciones diferenciales
Solución general
Dada una ecuación diferencial cualquiera, la solución general de esa ecuación diferencial son todas las funciones que satisfacen la ecuación diferencial

$$y' = x \rightarrow \frac{dy}{dx} = x \rightarrow dy = x \, . \, dx = \int dy = \int x \, . \, dx \rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C$$

Solución particular

Solución particular de una ecuación diferencial es la función que siendo solución general, cumple una determinada condición. por ejemplo: pasa por un punto determinado $P(x_0,y_0)$.

$$y' = x \text{ ó } \frac{dy}{dx} = x \text{ es } y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \text{Si pasa por } P(1, 1) \Rightarrow 1 = \frac{1^2}{2} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Son aquellas donde los términos de la ecuación diferencial pueden disponerse de manera que tome la forma

$$f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$$

donde f(x) es una función únicamente de x y g(y) es una función únicamente de y.
Suelen aparecer expresadas se la siguiente manera:

$$f(x) + g(y) = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad M + N \, . \, y' = 0$$

donde M es una función de x e y y N también es una función de x e y.

$M + N \, . \, y' = 0$ se escribe $M(x, y) + N(x, y) \, . \, \frac{dy}{dx} = 0$

donde $M(x, y) = M_1(x) \, . \, M_2(y)$
$N(x, y) = N_1(x) \, . \, N_2(y)$

Entonces podemos escribir

$$M\{x,y) + N(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = M_1(x) \cdot M_2(y) + N_1(x) \cdot N_2(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Se resuelven por un procedimiento que se llama separación de variables.

Dividimos miembro a miembro por $N_1(x) \cdot M_2(y)$ y tenemos

$$\frac{M_1(x) \cdot M_2(y)}{N_1(x) \cdot M_2(y)} + \frac{N_1(x) \cdot N_2(y)\ dy}{N_1(x) \cdot M_2(y)\ dx} = 0 \quad , \text{ queda} \quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)} + \frac{N_1(x)\ dy}{M_2(y)\ dx}$$

Hacemos entonces:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)} = f(x) \quad y \quad \frac{N_1(x)}{M_2(y)} = g(x)$$

así queda planteado:

$$f(x) + g(x) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad g(y) \frac{dy}{dx} = - f(x)$$

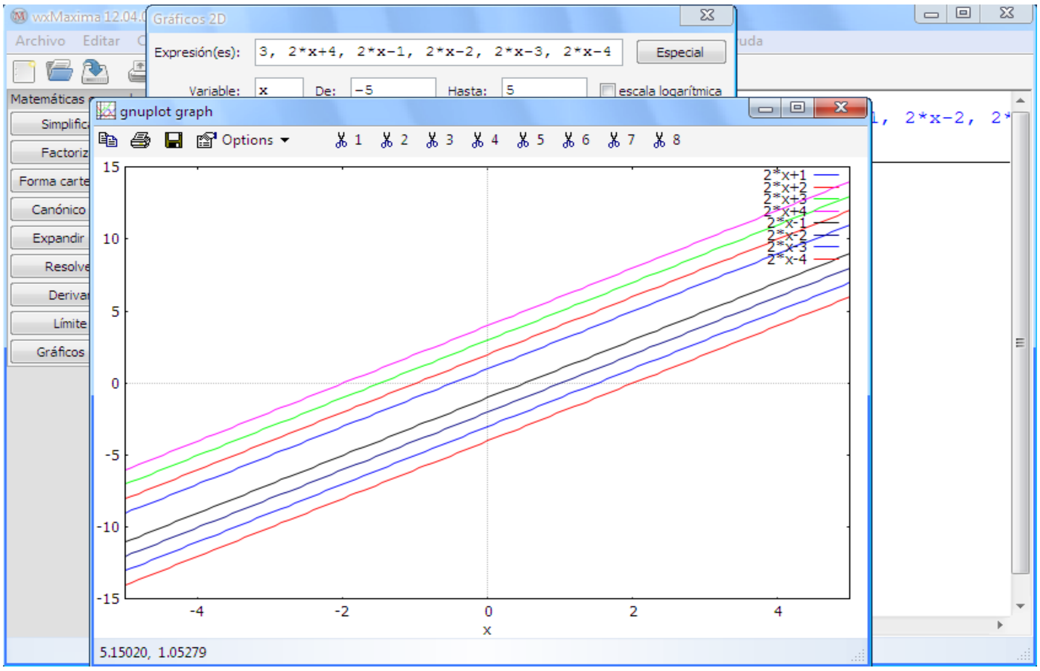
$$g(y)dy = - f(x)dx \rightarrow \int g(y)dy = - \int f(x)dx \rightarrow G(y) + C_1 = - F(x) + C_2 \rightarrow G(y) = - F(x) + C_2 - C_1 \rightarrow G(y) = - F(x) + (C_2 - C_1) \rightarrow G(y) = - F(x) + C$$

$C_2 - C_1 = C$ porque es la diferencia de dos constantes.

Así en adelante al resolver ecuaciones diferenciales, consideraremos solamente la constante de integración en x.

Interpretación Gráfica de las Ecuaciones Diferenciales

Una familia de curvas es un conjunto de ecuaciones que tienen la misma “forma”, difiriendo todas ellas (las ecuaciones) solamente en alguna constante.
En la familia de curvas de la ecuación $y = 2x + b$ están ecuaciones como:
$y = 2x + 1$ si $b = 1$
$y = 2x + 2$ si $b = 2$
$y = 2x + 3$ si $b = 3$
$y = 2x + 4$ si $b = 4$
$y = 2x - 1$ si $b = -1$
$y = 2x - 2$ si $b = -2$
$y = 2x - 3$ si $b = -3$
$y = 2x - 4$ si $b = -4$
Si se grafican todas estas rectas copiando esto: 2*x+1, 2*x+2, 2*x+3, 2*x+4, 2*x-1, 2*x-2, 2*x-3, 2*x-4 en vez del símbolo % en máxima queda:



La derivada de $y = 2x + b$ es $y' = 2$ donde sabemos que la pendiente de cualquiera de las curvas de la familia de curvas estudiada es $m = 2$.
A partir de este dato, es posible hallar una familia de curvas ortogonales a las curvas $y = 2x + b$ sabiendo que la normal a una recta cualquiera está dada por una curva cuya pendiente es la inversa de la recíproca; la normal a la recta $y = 2x + b$ es

$$y = -\frac{1}{2}x + C$$

Así conocida la pendiente de una familia de curvas, $m = 2$ en nuestro caso, podemos plantear que la pendiente de la normal es: $y_n' = -\frac{1}{2}y$

y en la búsqueda la familia de curvas normales a la familia $y = 2x + b$ está una aplicación importante de las ecuaciones diferenciales, ya que si

$$y_n' = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} \rightarrow 2dy = -dx$$

$$\int 2dy = \int -dx \rightarrow 2\int dy = -\int dx \rightarrow 2y = -x + C \rightarrow 2y = -x + C$$

$y = -\frac{x}{2} + C$ es la ecuación de la familia de las curvas ortogonales $y = 2x + b$.

Ecuaciones diferenciales homogéneas
Una función $z = f(x,y)$ es homogénea de grado n si y solo si al multiplicar ambas variables por t, la función queda multiplicada por t^n; o sea

$z = f(x,y)$ es homogénea $\Leftrightarrow f(t\,.\,x, t\,.\,y) = t^n\ f(x,y) = t^n\,.\,z$
Los casos mas simples son los polinomios homogéneos.
$f(x, y, z) = x^3 + x^2\,y + y^2\,x$ es homogénea de grado 3; porque
$f(tx, ty, tz) = t^3\,x^3 + t^2\,x^2\,ty + t^2\,y^2\,tz = t^3\,(x^3 + x^2\,y + y^2\,z) = t^3\,f(x,y,z)$

Toda función del cociente $\frac{y}{x}$ es homogénea de grado cero en x e y

$$f\left[\frac{y}{x}\right] = f\left[\frac{t\,.\,y}{t\,.\,x}\right] = t^0\,.\,f\left[\frac{y}{x}\right]$$

Definición:

Una ecuación diferencial de primer orden y de primer grado se llama homogénea en x e y si se puede llevar a la forma $\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{y}{x}\right]$ con f(x,y) en el segundo miembro. Es decir que son aquellas funciones homogéneas de grado cero.
La solución de las ecuaciones diferenciales homogéneas consiste en transformarlas en una ecuación diferencial de variables separables mediante un simple artificio.

Sea la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{x}{y}\right]$; hacemos $\frac{y}{x} = u \rightarrow y = u \cdot x$

donde u es una función de x e y, como puede constatar en la expresión anterior, que introducimos porque nos conviene. Derivamos la expresión y= u . x que queda:

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \cdot 1 = u + x \cdot \frac{du}{dx}$ igualando los resultados de ambas expresiones de $\frac{dy}{dx}$ tenemos:

$u + x \cdot \frac{du}{dx} = f\left[\frac{y}{x}\right] = f(u) \rightarrow u + x \frac{du}{dx} = f(u) \rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u$

y ya tenemos la ecuación diferencial de variables separables; que resolvemos

$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow H(u) = \ln(x) + C$

haciendo C = -ln C tendremos $H(u) = \ln(x) - \ln C = \ln\left(\frac{y}{C}\right) \rightarrow \frac{x}{C} = e^{H(u)}$

luego: $x = C \cdot e^{H(u)} \rightarrow x \cdot C \cdot e^{H(y/x)}$

Esta expresión que "no nos dice mucho"; porque en definitiva $H\left(\frac{y}{x}\right)$ va a depender fundamentalmente de cada f. Sin embargo es importante, porque no nos está mostrando que si se puede calcular $\frac{du}{f(u) - u}$ se puede encontrar H(u).

Ecuaciones diferenciales lineales

Son ecuaciones diferenciales de la forma y' + P(x)y = Q(x) donde P(x) y Q(x) son funciones continuas.
Si Q(x) = 0 para cualquier x, se obtiene y' + P(x)y = 0 que es una ecuación diferencial de variables separables. Estas ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales incompletas, y se las resuelve separando variables.

$y' + P(x)y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y \rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \rightarrow \int \frac{dy}{Y} = \int -P(x)\,dx$

Siempre que y 0 la solución $\ln|y| = -\int P(x) \cdot dx + \ln|C|$ la constante se expresión como ln |C|
por comodidad; resulta entonces $\ln|y| - \ln|y| = -\int P(x) \cdot dx$ entonces:

$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x) \cdot dx \rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\int P(x) \cdot dx} \rightarrow y \cdot e^{-\int P(x) \cdot dx} = C$

Si hacemos $D_x\left[y \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}\right] = y' \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} + P(x) \cdot y \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} = e^{\int P(x) \cdot dx}[y' \cdot P(x) \cdot y]$, luego, si multiplicamos miembro a miembro $y' \cdot P(x) \cdot y = Q(x)$ por $e^{\int P(x) \cdot dx}$ tenemos
$e^{\int P(x) \cdot dx}[y' \cdot P(x) \cdot y] = Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}$ de lo que resulta ser $D_x[y \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}] = Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}$ integrando ambos miembros

$y \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}\,dx + C$ despejando y queda $y = \frac{\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}\,dx + C}{e^{\int P(x) \cdot dx}}$ que resulta $y = e^{-\int P(x) \cdot dx}\left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}\,dx + C\right]$

que es la expresión de la solución general de y' + P(x)y = Q(x).

<u>Otra forma:</u>

y' + P(x)y = Q(x) hacemos y = u . v donde u y v son funciones la derivada de y será: y' = u'. v + u . v' entonces:
$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x) \rightarrow u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x)$

si $v' + P(x) \cdot v = 0 \rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v \rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x)\,dx \rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)\,dx \rightarrow \ln v = -\int P(x)\,dx \rightarrow v = e^{-\int P(x) \cdot dx}$ Reemplazando en el renglón anterior.

$u'.\,v = Q(x) \rightarrow \frac{du}{dx}\, e^{-\int P(x)\,.\,dx} = Q(x)$ porque $v' + P(x)v = 0$

Entonces $\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)\,.\,dx}} \rightarrow du = Q(x)\,.\, e^{-\int P(x)\,.\,dx}\,dx$, luego, $\int du = \int Q(x)\,.\,e^{-\int P(x)\,.\,dx} \rightarrow u = \int Q(x)\,.\,e^{-\int P(x)\,.\,dx}\,dx + C$

Finalmente

$y = u\,.\,v = [\int Q(x)\,.\,e^{-\int P(x)\,.\,dx}\,dx + C]\,.\,e^{-\int P(x)\,.\,dx}$

Sustitución de Lagrange

Definición:
Se define Sustitución de Lagrange a la sustitución de la ecuación de la forma

$$\mathbf{y = x\,\varphi(y') + \psi(y')}$$

donde φ y ψ son funciones conocidas de $\frac{dy}{dx}$ y la ecuación es lineal respecto a y y, x; por otra ecuación en donde es la integral de la ecuación original introduciendo un parámetro p.
Haciendo:

$$\mathbf{y' = p}$$

entonces, la ecuación original toma la forma:

$$\mathbf{y = x\,\varphi(p) + \psi(p)}$$

Derivando con respecto a x, obtenemos:

$$\mathbf{p = \varphi(p) + [x\,\varphi(p) + \psi'(p)]\,\frac{dp}{dx}}$$

ó

$$\mathbf{p - \varphi(p) = [x\,\varphi'(p) + \psi'(p)]\,\frac{dp}{dx}}$$

De la última ecuación se puede deducir inmediatamente ciertas soluciones, a saber: la ecuación se transforma en una identidad para todo valor constante $p = p_0$, que satisfaga la condición:

$$p_0 - \varphi(p_0) = 0$$

En efecto, siendo p constante, la derivada $\frac{dp}{dx} \equiv 0$ y ambos miembros de la última ecuación de la definición, se anulan. La solución que que corresponde a cada valor $p = p_0$, es decir, $\frac{dy}{dx} = p_0$, es una función lineal de x (puesto que la derivada $\frac{dy}{dx}$ es constante sólo para las) funciones lineales). Para hallar esta función es suficiente sustituir en la ecuación $y = x\,\varphi(p) + \psi(p)$ el valor $p = p_0$:

$$\mathbf{y = x\,\varphi(p_0) + \psi(p_0)}$$

Si esta solución no se deduce de la solución general, cualquiera que sea el valor de la constante arbitraria, será, por tanto, una solución singular.
Se encontrará, ahora la solución general. Para esto escribamos la última ecuación de la definición en la forma:
considerando x como función p. La ecuación obtenida es entonces una ecuación diferencial lineal respecto a la función x de p-
Resolviéndola, encontramos:

$$x = \omega\,(p, C)$$

Eliminando el parámetro p de las ecuaciones $y = x\,\varphi(p) + \psi(p)$ y , se obtiene la integral general de la primer ecuación de la definición en la siguiente forma:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación diferencial $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ es exacta si el primer miembro es exactamente la diferencial total de una función de dos variables; es decir si existe una función U(x, y) tal que $dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$

Hallada la función U(x, y) la ecuación toma la forma $dU(x, y) = 0 \rightarrow U(x, y) = C$, la solución general se obtiene integrando $\int dU\,(x, y) = C \rightarrow U\,(x, y) = C$

Condición de simetría. Solución general

Si $dU = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \wedge \frac{\partial U}{\partial y} = P(x, y)$ calculando las derivadas cruzando de U: $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = P_y(x, y) \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = Q_y(x, y)$
al ser las derivadas cruzadas iguales $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ por el teorema de Schwartz; resulta $P_y(x, y)$ y $Q_y(x, y)$ igualdad que se conoce como

condición de simetría.
Para que una ecuación diferencial que tiene la forma exacta, sea exacta, debe cumplir la condición de simetría.
Luego de verificar que U(x, y) existe, vamos a calcularla, asegurándonos que se trata de una ecuación diferencial exacta.
Si $dU = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ ^ $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$

entonces $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \rightarrow U(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y)$

vea que al integrar U(x, y) la constante de integración puede ser una función de y, a la que llamaremos $\varphi(y)$; entonces.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx + \varphi(y) = \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

luego hacemos $\int P_y(x, y)\,dx + \varphi'(y) = Q(x, y)$ de aquí despejamos $\varphi'(y)$; $\varphi'(y) = Q(x, y) - \int P_y(x, y)\,dx$
y podemos hallar $\varphi'(y) = Q(x, y) - \int P_y(x, y)\,dx$ y podemos hallar $\varphi'(y) = \int \varphi'(y)\,dy$ con este valor vamos a la fórmula $U(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y)$ y tenemos el resultado de la ecuación diferencial total exacta.

10. SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS.

Sucesiones: concepto

Dada una sucesión infinita de números
$u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$
Se llama serie numérica a la siguiente expresión:

$$\mathbf{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{4} u_n}$$

Una serie es una suma infinita de números.

Si quiero calcular la suma de los dos primeros términos:
$S_1 = u_1$
$S_2 = u_1 + u_2$
$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$
...
$S_n = u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n$

Si quiero calcular todos los números de la serie

$$S = \lim_{n \to 4} S_n = \lim_{n \to 4} (u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n)$$

Sucesiones numéricas acotadas

Definición: Se dice que una sucesión es $\{\mathbf{a_n}\}$ es acotada si y sólo si tiene una cota superior y una cota inferior.

Teorema.

Cuando $\{a_n\}$ es creciente, $\lim_{n \to 4} \{a_n\}$ es la cota superior

Cuando $\{a_n\}$ es decreciente, $\lim_{n \to 4} \{a_n\}$ es la cota inferior

Sucesiones numéricas convergentes, divergentes y oscilantes
S = n° infinito → La serie es convergente
S = n° + / - infinito → La serie es divergente
S = No existe límite → La serie es oscilante

Series: definición y clasificación
Condición necesaria para la convergencia de una serie.
Ley general de convergencia: Que el límite tienda a infinito y el número tiende a cero.
Condición necesaria y suficiente
Serie geométrica

Se llama serie geométrica, a aquella serie en que cada término es igual al anterior multiplicado por un factor contante,

$$\mathbf{a + a.\,q + a.\,q^2 + a\,.\,q^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{4} a\,.\,q^n}$$

Se estudia cuando una serie geométrica es convergente y cuando no.

Calculamos su enésima suma parcial.

$S_n = a + a\,.\,q + a\,.\,q^2 + a\,.\,q^3 + \ldots aq^{n-1}$
Ahora multiplico ambos miembros por q .

$S_n \cdot q = (a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots aq^{n-1}) \cdot q$
$-q \cdot S_n = a - a \cdot q^n$
$S_n = a - q = a - q^n$

$$S_n = \frac{a\,(a - q^n)}{1 - q}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a \cdot (1 \cdot q^n)}{1 - q}$$

Consideramos distintos casos:
1º Caso $|q| < 1 \Rightarrow -1 < q < 1$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$$ = nº infinito, por lo tanto serie convergente

Quiere decir que cuando la razón es un número la serie es convergente.

2º Caso $|q| > 1$

$\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$ limite divergente

3º Caso $q < -1$

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \nexists$$

Este límite no existe pues los valores saltan de uno positivo a uno negativo, por lo tanto qn no tiende a valor alguno cuando n crece indefinidamente. Es decir si $q < -1$ la serie es oscilante.

4º Caso $q = 1$

$a.\,1 + a.\,1 + a.\,1 + \ldots + a.\,n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$ Es divergente.

5º Caso $q = -1$

$a \cdot -a + a. -a + \ldots$ Es oscilante.

Serie armónica

Se define serie armónica a la que sigue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots$$

Se llama así porque la longitud de onda de los armónicos de una cuerda que vibra es proporcional a su longitud según la serie 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7…

Propiedades:

Divergencia de la serie armónica

La serie armónica es divergente, aunque diverge lentamente (los primeros 1043 términos de la serie suman menos de 100). Esto se puede demostrar haciendo ver que la serie armónica es mayor, término por término, que esta otra serie:

$$\sum_{n=1}^{4} 2^{-[\log_2 n]} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \dots$$

que está claro que diverge. (Esto es bastante riguroso ya que los mismos términos se agrupan de la misma manera).

Otras series, como la suma de los inversos de los números primos diverge.

Convergencia de la serie armónica alternada

La serie armónica alternada, sin embargo, converge:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Ésta es una consecuencia de la serie de Taylor del logaritmo natural.

Series reales a términos positivos. Criterios de comparación

Sean dos series con términos positivos:

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$

$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$

Para éstas son válidas las siguientes expresiones

Teorema 1:

Si los términos de la primer serie no son mayores que los términos correspondientes de la segunda serie, es decir:

$$u_n \le v_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

y la segunda serie converge, entonces la primer serie también converge.

Teorema 2:

Si los términos de la primer serie no son menores que los términos respectivos de la segunda serie, es decir:

$$u_n \ge v_n$$

y la segunda serie converge, entonces la primer serie también converge.

Criterios clásicos de convergencia: criterio de D`Alembert, criterio de Cauchy

Criterio de D'Alembert

Dada una serie de términos positivos cuyo carácter queremos conocer. Formemos el cociente entre un término general cualquiera y el inmediato anterior y se calcula el límite.

$$\lim_{n \to 4} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L$$

Si
- L < 1 ⇨ Serie convergente
- L > 1 ⇨ Serie divergente
- L = 1 ⇨ El criterio no da respuesta sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Criterio de Cauchy

Dada una serie de términos positivos $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$. La magnitud $\sqrt[n]{u_n}$ tiene un límite finito L cuando $n \to 4$, es decir

$$\lim_{n \to 4} \sqrt[n]{u_n} = L$$

Si
- L < 1 ⇨ Serie convergente
- L > 1 ⇨ Serie divergente

BIBLIOGRAFIA

PISKUNOV N. Cálculo Diferencial e Integral (Tercera edición). Ed. Mir. Rusia. 1977

LARSON R., EDWARDS B. Cálculo 1 de una variable (Novena edición). Ed. Mc Graw Hill. México. 2010

LARSON R., EDWARDS B. Cálculo 2 de varias variables (Novena edición). Ed. Mc Graw Hill. México. 2010

ENLACES DE INTERES

LIBREOFFICE (PARA EDITAR EL DOCUMENTO): https://es.libreoffice.org/

MAXIMA (SOFTWARE UTILIZADO): http://www.maxima.sourceforge.net/es/

MATERIALES DE ESTUDIO: http://cybercapo.wordpress.com