# OPERACIONES

## SUMA DE LÍMITES

$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

### DEMOSTACIÓN:

Por hipótesis $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$

Por hipótesis $\exists \lim_{x \to a} f(x) = L_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0 / 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon_1}{2}$ 1

$\exists \lim_{x \to a} g(x) = L_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_2 > 0 / 0 < |x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon_1}{2}$ 2

Sea $\varepsilon_1 > 0$, quiero probar que $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$

Considero $\delta$ = min $\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \,/\, 0 < |x-a| < \delta$

$\left|\left(f(x)+g(x)\right) - (L_1+L_2)\right| = |f(x)+g(x) - L_1 - L_2| = |f(x) - L_1 + \text{g}(x) - L_2| \leq \underbrace{|f(x)-L_1|}_{<\varepsilon_1/2 \ (1)} + \underbrace{|g(x)-L_2|}_{<\varepsilon_1/2 \ (2)} < \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1$

$\therefore\ |f(x)+g(x) - (L_1+L_2)| < \varepsilon_1$

$\therefore\ \lim_{x \to a}\left(f(x)+g(x)\right) = L_1 + L_2$

## PRODUCTO DE LÍMITES

$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

### DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x \to q} g(x) = L_2$

Sea $\varepsilon_1 > 0, \delta_1 > 0 \,/\, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon_1}{2|L_2|}$ $\quad L_2 \neq 0$ 1

Considero M = supremo $\{|f(x)|,\ 0 < |x-a| < \delta_1\}$ y $\delta_2 > 0 \,/\, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon_1}{2M}$ 2

3

Sea $\delta$ = min $\{\delta_1, \delta_2\}$, $x \,/\, 0 < |x-a| < \delta$

$|f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| = |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot L_2 + f(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \leq$ Sumamos y restamos $-f(x) \cdot L_2 + f(x) \cdot L_2$

$\leq \ |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot L_2| + \ |f(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| = \ |f(x) \cdot (g(x) - L_2)| + |L_2 \cdot (f(x) - L_1)| =$

$|f(x)| \cdot |g(x) - L_2| + |L_2| \cdot |f(x) - L_1| < M\frac{\varepsilon_1}{2M} + |L_2|\frac{\varepsilon_1}{2|L_2|} = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1$

$\therefore \ |f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| < \varepsilon_1$

$\therefore \lim_{x \to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = L_1 \cdot L_2$

## COCIENTE DE LÍMITES

$\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

## $\lim_{x \to a} c = c$

### DEMOSTRACIÓN:

Sea $f(x) = c$, función constante.

Sea $\varepsilon_1 > 0$, considero $\delta = \varepsilon_1$; $x \ / \ 0 < |x - a| < \delta$

Quiero probar que = $|f(x) - c| < \varepsilon$

Como $f(x) = c$, entonces $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon_1$

$\therefore \ \lim_{x \to a} c = c$

## $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$

Se demuestra utilizando las propiedades anteriores, de *Producto de límites* y la $\lim_{x \to a} c = c$,considerando a $g(x) = c$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$