Álgebra lineal Computacional ~ Práctica 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

+ Ejercicio 1

a) Resuelvo el sistema no homogéneo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \overset{\text{M.A.}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1 \to F_3]{F_2 - 3F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{5F_3 - 2F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Llegamos a un sistema equivalente. Podemos observar que las soluciones serán infinitas, puesto que hay 3 filas no nulas en las primeras 4 columnas. Resuelvo de atrás para adelante.

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \to x_1 + 1 - x_4 - 4 + 2x_4 + x_4 = -2 \leftrightarrow x_1 + 2x_4 - 3 = -2 \leftrightarrow \underline{x_1} = 1 - 2x_4 \\ -5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9 \to -5x_2 + 7(2 - x_4) + 2x_4 = 9 \leftrightarrow -5x_2 + 14 - 7x_4 + 2x_4 = 9 \leftrightarrow \underline{x_2} = 1 - x_4 \\ x_3 + x_4 = 2 \to \underline{x_3} = 2 - x_4 \end{cases}$$

Finalmente, el conjunto de soluciones es: $S = \{ x_4 \underbrace{(-2,-1,-1,1)}_{\text{Solución del homogéneo}} + \underbrace{(1,1,2,0)}_{\text{Solución particular.}} : x_4 \in \mathbb{R} \}$

Ahora resuelvo el sistema homogéneo.

$$\overset{\text{M.A.}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{escalono de la misma forma}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \to x_1 - x_4 + 2x_4 + x_4 = 0 \leftrightarrow x_1 = -2x_4 \\ -5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \to -5x_2 - 7x_4 + 2x_4 = 0 \leftrightarrow x_2 = -x_4 \\ x_3 + x_4 = 0 \to x_3 = -x_4 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S_0 = \{ x_4(-2,-1,-1,1) : x_4 \in \mathbb{R} \}$.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases} \overset{\text{M.A.}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1 \to F_3]{F_2 - F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{4F_3 - 7F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Resuelvo de atrás para adelante

No Homogéneo:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \to x_1 + \cancel{\tfrac{3}{4}x_4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4}x_4 - \cancel{x_5} - \tfrac{1}{4} - \cancel{2x_4} + \cancel{x_5} = 1 \leftrightarrow x_1 = \tfrac{3}{2} \\ -4x_2 + 3x_4 = -1 \to x_2 = \tfrac{3}{4}x_4 - \tfrac{1}{4} \\ 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = -1 \to x_3 = \tfrac{5}{4}x_4 - x_5 - \tfrac{1}{4} \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S = \{ x_4(0, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, 1, 0) + x_5(0,0,-1,0,1) + (3/2, -1/4, -1/4, 0, 0) : x_4, x_5 \in \mathbb{R} \}$

Homogéneo:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \to x_1 + \tfrac{3}{4}x_4 + \tfrac{5}{4}x_4 - x_5 - 2x_4 + x_5 = 0 \leftrightarrow x_1 = 0 \\ -4x_2 + 3x_4 = 0 \to -4x_2 = -3x_4 \leftrightarrow x_2 = 3/4\, x_4 \\ 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0 \to 4x_3 = 5x_4 - 4x_5 \leftrightarrow x_3 = \tfrac{5}{4}x_4 - x_5 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S_0 = \{ x_4(0, 3/4, 5/4, 1, 0) + x_5(0,0,-1,0,1) \}$

c)

$$\begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 = 2i \end{cases} \overset{\text{M.A.}}{\longmapsto} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right) \xrightarrow[iF_3 - F_1 \to F_3]{iF_2 - F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & 1 \\ 0 & i-1 & -i & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} i x_1 - (1+i)x_2 = -1 \rightarrow i x_1 = (1+i)x_2 - 1 \longleftrightarrow x_1 = \frac{(1+i)}{i}x_2 - \frac{1}{i} = (1-i)x_2 + i \\ (1-i)x_2 + i x_3 = 1 \rightarrow x_3 = \frac{1-(1-i)x_2}{i} = \frac{1}{i} - \frac{(1-i)}{i}x_2 = -i + (1+i)x_2 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S = \{x_2(1-i, 1, 1+i) + (i, 0, -i) : x_2 \in \mathbb{C}\}$

; y para el sist. homogéneo asociado: $S_0 = \{x_2(1-i, 1, 1+i),\ x_2 \in \mathbb{C}\}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3i x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & (-1+i) & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & (-1+i) & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 4 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left[(1-i)x_2 + \frac{(5+i)}{11}x_2 - \frac{6}{11}i x_3 + \frac{4}{11} + 2\right] = \left(\frac{8-5i}{11}\right)x_2 - \frac{3}{11}i x_3 + \frac{13}{11} \\ (5+i)x_2 - 6i x_3 + 11x_4 = 4 \rightarrow x_4 = -\frac{(5+i)}{11}x_2 + \frac{6}{11}i x_3 + \frac{4}{11} \end{cases}$$

Las soluciones pertenecen al conjunto: $S = \{x_2(\frac{8-5i}{11}, 1, 0, \frac{-5-i}{11}) + x_3(-\frac{3i}{11}, 0, 1, \frac{6}{11}i) + (\frac{13}{11}, 0, 0, \frac{4}{11}) : x_2, x_3 \in \mathbb{C}\}$

; y para el sist. homogéneo asociado: $S_0 = \{x_2(\frac{8-5i}{11}, 1, 0, \frac{-5-i}{11}) + x_3(-\frac{3i}{11}, 0, 1, \frac{6}{11}i) : x_2, x_3 \in \mathbb{C}\}$

+ Ejercicio 2

a) $\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & (k-2) & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1 \to F_3]{F_2+F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & k+1 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array}\right)$

+ Si $k-1 \neq 0$ y $k+1 \neq 0$ (es decir, $k^2-1 \neq 0$), obtendremos 3 filas no nulas para las 3 incógnitas que tenemos, es decir, será un sistema compatible determinado.

$\hookrightarrow$ El sistema tiene solución única $\forall\, k \in \mathbb{R} / \{-1; 1\}$

+ Si $\underbrace{k = -1}_{}$, al escalonar la matriz obtenemos: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \leftarrow$ Observamos que tenemos menos de 3 filas no nulas. Luego, estamos frente a un sistema compatible indeterminado.

$\hookrightarrow$ infinitas soluciones.

+ Si $k = 1$, en la última ecuación vemos que: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, lo cual es absurdo y nos dice que el sist. es incompatible. Por lo tanto, para $k = 1$, el sistema no tiene solución.

b) El sistema homogéneo asociado admite solución no trivial si y solo si es un SCI. Esto se cumple para $k = -1$.

Resuelvo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 \\ -2x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones para este sistema es: $S_0 = \{(x_2, x_2, 0) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

+ Ejercicio 3 ~ Notebook

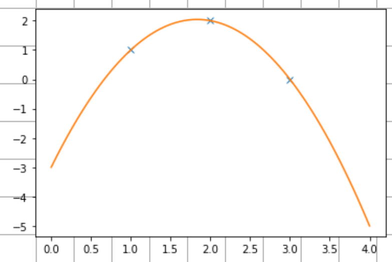
+ Ejercicio 4

Para encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos dados, resuelvo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 9F_1 \to F_3]{F_2 - 4F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 3F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \longleftarrow$$

el sistema tiene solución única, como uno esperaría.

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \rightarrow a + \frac{11}{2} - 3 = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \\ -2b - 3c = -2 \rightarrow -2b + 9 = -2 \Leftrightarrow b = \frac{11}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$



La parábola que pasa por los puntos dados es:

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$

+ Ejercicio 5

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 ; x - y = 0\}$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \longrightarrow 2y - z = 0 \longleftrightarrow z = 2y \\ x - y = 0 \longrightarrow x = y \end{cases}$$

$$S = \{(y, y, 2y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,2) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,2) \rangle .$$

b) $\{A \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A = -A^t\} = \mathbb{V}$

sean $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i,j \leq 3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq 3 \\ a_{ij} = -a_{ji} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : tr(A) = 0\} = \mathbb{V}$

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $tr(A) = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c$.

$$\rightarrow \mathbb{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0,\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ i & 1+i & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - iF_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - ix_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 - ix_4 = 0 \leftrightarrow x_1 = -x_3 + (-1+i)x_4 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\mathbb{V} = \langle (-1,1,1,0), (-1+i, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{C}^4 .$$

+ Ejercicio 6 $\quad S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$

a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

$(2,1,3,5) \in S \iff \exists\, a,b,c \in \mathbb{R}$ tq: $(2,1,3,5) = a(1,-1,2,1) + b(3,1,0,-1) + c(1,1,-1,-1)$

$\rightarrow (2,1,3,5) = (a+3b+c,\ -a+b+c,\ 2a-c,\ a-b-c)$

Resuelvo el sistema:
$$\begin{cases} a+3b+c = 2 \\ -a+b+c = 1 \\ 2a-c = 3 \\ a-b-c = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3-2F_1\to F_3 \\ F_4-F_1\to F_4}]{F_2+F_1\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_2\to F_4]{2F_3+3F_2\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema no tiene solución. Luego $\nexists\, a,b,c$ y $(2,1,3,5) \notin S$.

b) Determinar si $\tilde{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$

¿Cómo son los elementos de $\tilde{S}$? $\quad x_1 = x_2 + x_3$

$\Rightarrow \tilde{S} = \{x_2(1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(0,0,0,1);\ x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

$\tilde{S} = \langle (1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$

Paso S a ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 0 & -1 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3-2F_1\to F_3 \\ F_4-F_1\to F_4}]{F_2+F_1\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & -6 & -3 & -2x_1+x_3 \\ 0 & -4 & -2 & -x_1+x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_2\to F_4]{2F_3+3F_2\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1+5x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4+x_2 \end{array}\right) \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1+5x_2 = 0;\ x_4+x_2 = 0\}$$

Veamos si los generadores de $\tilde{S}$ cumplen con las ecuaciones: $\quad -1+5=0;\ 0+1=0$ ABS!

$\Rightarrow \tilde{S} \not\subset S$.

c) Determinar si $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} = \tilde{S}$

Veamos si cumplen la ecuación: $\quad 1+1-2=0$ ✓, $\quad 3-1-0=0$ ✗ $\quad \Rightarrow S \not\subset \tilde{S}$.

+ Ejercicio 7

a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x-2y+z=0\}$ y $T = \{(x,y,z) : x+z=0\}$

. $S \cap T = \{(x,y,z) : 3x-2y+z=0;\ x+z=0\}$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z=0 & \rightarrow -3z-2y+z=0 \leftrightarrow y=-z \\ x+z=0 & \rightarrow x=-z \end{cases} \quad \rightarrow S\cap T = \langle (-1,-1,1) \rangle$$

. $S+T$: Primero paso a S y T a generadores.

$S = \langle (1,0,-3), (0,1,2) \rangle$, $\quad T = \langle (-1,0,1), (0,1,0) \rangle$

$S+T = \langle (1,0,-3), (0,1,2), (-1,0,1), (0,1,0) \rangle = \langle (1,0,-3), (0,1,2), (-1,0,1) \rangle$

No es suma directa.

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $S=\{(x,y,z): 3x-2y+z=0,\ x-y=0\}$, $T=\langle(1,1,0),(5,7,3)\rangle$

. $S\cap T$. Paso T a ecuaciones.

$$a(1,1,0)+b(5,7,3)=(x,y,z)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&5&x\\1&7&y\\0&3&z\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1\to F_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&5&x\\0&2&y-x\\0&3&z\end{array}\right)\xrightarrow{2F_3-3F_2\to F_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&5&x\\0&2&y-x\\0&0&3x-3y+2z\end{array}\right)$$

$\rightarrow T=\{(x,y,z): 3x-3y+2z=0\}$

$S\cap T$ debe cumplir:
$$\begin{cases}3x-2y+z=0 \rightarrow 3y-2y+z=0\rightarrow z=-y\\ x-y=0 \rightarrow x=y\\ 3x-3y+2z=0\rightarrow 3y-3y-2y=0\rightarrow y=0=x=z\end{cases}\rightarrow S\cap T=\{\bar{0}\}$$

HAY SUMA DIRECTA.

. $S+T$. Paso S a generadores:

$S=\langle(1,1,-1)\rangle \rightsquigarrow S\oplus T=\langle(1,1,-1),(1,1,0),(5,7,3)\rangle$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$, $S=\langle(1,1,3),(1,3,5),(6,12,24)\rangle$, $T=\langle(1,1,0),(3,2,1)\rangle$

Paso a S y T a ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&6&x\\1&3&12&y\\3&5&24&z\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-3F_1\to F_3]{F_2-F_1\to F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&6&x\\0&2&6&y-x\\0&2&6&z-3x\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2\to F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&6&x\\0&2&6&y-x\\0&0&0&-2x-y+z\end{array}\right)\rightarrow S=\{(x,y,z): -2x-y+z=0\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\1&2&y\\0&1&z\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1\to F_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\0&-1&y-x\\0&1&z\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_2\to F_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\0&-1&y-x\\0&0&-x+y+z\end{array}\right)\rightarrow T=\{(x,y,z): -x+y+z=0\}$$

. $S\cap T$:

Es la solución de:
$$\begin{cases}-2x-y+z=0\rightarrow -2x-y+x-y=0\leftrightarrow -x-2y=0\leftrightarrow x\overset{*}{=}-2y\\ -x+y+z=0\rightarrow z=x-y\overset{*}{\rightarrow} z=-3y\end{cases}$$

Luego, $S\cap T=\langle(-2,1,-3)\rangle$

. $S+T=\langle(1,1,3),(1,3,5),(6,12,24),(1,1,0),(3,2,1)\rangle$

d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{3\times3}$, $S=\{(x_{ij})\,/\,x_{ij}=x_{ji},\ \forall i,j\}$, $T=\{(x_{ij})\,/\,x_{11}+x_{12}+x_{13}=0\}$

. $S\cap T$

Debe cumplir:
$$\begin{cases}x_{12}=x_{21}\\ x_{13}=x_{31}\\ x_{23}=x_{32}\\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=0\rightarrow x_{11}=-x_{21}-x_{31}.\end{cases}$$

Las variables "libres" van a ser: $x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{22}, x_{32}$

$$\rightarrow S\cap T=\left\langle\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

. $S+T$. Busco generadores de S y T.

$$S = \left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T = \left\langle \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow S + T = \left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\rangle$$

↓ se puede simplificar.

e) $\mathbb{V} = \mathbb{C}^3$, $S = \langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0) \rangle$, $T = \{x \in \mathbb{C}^3 : (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$

. $S \cap T$. Paso a S a ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 4 & x_1 \\ 1 & 1-i & x_2 \\ 3-i & 0 & x_3 \end{array}\right) \xrightarrow[iF_3 - (3-i)F_1 \to F_3]{F_2 + iF_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} i & 4 & x_1 \\ 0 & 1+3i & x_2 + ix_1 \\ 0 & -12+4i & ix_3 - (3-i)x_1 \end{array}\right) \xrightarrow[(1+3i)F_3 - (-12+4i)F_2 \to F_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} i & 4 & x_1 \\ 0 & 1+3i & x_2 + ix_1 \\ 0 & 0 & (-2+4i)x_1 + (12-4i)x_2 + (-3+i)x_3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{C}^3 : (-2+4i)x_1 + (12-4i)x_2 + (-3+i)x_3 = 0\}$$

Luego, $S \cap T$ debe cumplir:

$$\begin{cases} (-2+4i)x_1 + (12-4i)x_2 + (-3+i)x_3 = 0 \quad \rightsquigarrow * \\ (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \quad \rightsquigarrow x_3 = (-1+i)x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$* \ (-2+4i)x_1 + (12-4i)x_2 + (-3+i)[(-1+i)x_1 + 4x_2] = 0$

$\iff (-2+4i)x_1 + (12-4i)x_2 + (2-4i)x_1 + (-12+4i)x_2 \overset{?}{=} 0$. Lo cual es válido $\forall x_1, x_2, x_3$.

$\Rightarrow S \cap T = \langle (1, 0, -1+i), (0, 1, 4) \rangle = T \quad (T \subset S)$

. $S + T = \langle (i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0), (1, 0, -1+i), (0, 1, 4) \rangle$

+ Ejercicio 8

a) $S = \langle (-2, 1, 6), (3, 0, -8) \rangle = \langle (1, k, 2k), (-1, -1, k^2-2), (1, 1, k) \rangle = T$

Podemos ver que $\dim(S) = 2$. Voy a buscar un k tal que $\dim(T) = 2$, que genere lo mismo que S.

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ -1 & -1 & k^2-2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1 \to F_3]{F_2 + F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & k-1 & k^2+2k-2 \\ 0 & 1-k & -k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_2 \to F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 0 & k-1 & k^2+2k-2 \\ 0 & 0 & k^2+k-2 \end{pmatrix}$$

Vemos que la última fila se anula para $k = -2$ o $k = 1$.

. Si $k = -2 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \dim(T) = 2$ c.l.

. Si $k = 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \dim(T) = 2$. c.l.

. Si $k=-2$: $\quad T = \langle (1,-2,-4),(1,1,-2) \rangle$

qvq $S=T$: $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle (1,-2,-4),(1,1,-2)\rangle$

$\supseteq)$
$$\left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & -8 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+3F_1 \to F_3]{2F_2+F_1\to F_2} \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3-F_2\to F_3} \begin{array}{cccc} & & s_1 & s_2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \exists$$ únicos a y b que cumplen. Luego $T \subseteq S$.

$\subseteq)$
$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+4F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3-2F_2\to F_3} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \exists$$ únicos c y d que cumplen. Luego $S \subseteq T$.

. Si $k=1$ $\quad T = \langle (1,1,2),(1,1,1)\rangle$

qvq $S=T$: $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle(1,1,2),(1,1,1)\rangle$

$\supseteq)$
$$\left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+3F_1\to F_3]{2F_2+F_1\to F_2} \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_3-F_2\to F_3} \left(\begin{array}{cc|c|c} -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{array}\right)$$ $\rbrack$ 2 sistemas incompatibles $\to T \not\subseteq S$

. Conclusión: $S=T$ si y sólo si $k=-2$.

b) $S \cap T = \langle (0,1,1)\rangle$, $S = \{x \in \mathbb{R}: x_1+x_2-x_3=0\}$, $T = \langle (1,k,2),(-1,2,k)\rangle$

Para T a ecuaciones:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x_1 \\ k & 2 & x_2 \\ 2 & k & x_3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1\to F_3]{F_2-kF_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & k+2 & x_2-kx_1 \\ 0 & k+2 & x_3-2x_1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2\to F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & k+2 & x_2-kx_1 \\ 0 & 0 & (k-2)x_1-x_2+x_3 \end{array}\right)$$ $\leftarrow$ si $k=-2$, el sistema debe cumplir (además) $x_2-kx_1=0$, sino, sólo debe cumplir $(k-2)x_1-x_2+x_3$.

Analizamos los dos casos:

. Si $k=-2 \to T_{k=-2} = \{x \in \mathbb{R}: x_2+2x_1=0,\ -4x_1-x_2+x_3=0\}$

$\to S \cap T_{k=-2}$ debe cumplir:

$$\begin{cases} x_2+2x_1=0 \to x_2=-2x_1 \\ -4x_1-x_2+x_3=0 \to -4x_1+2x_1+x_3=0 \to x_3=2x_1 \\ x_1+x_2-x_3=0 \to x_1-2x_1-2x_1=0 \leftrightarrow x_1=0=x_2=x_3. \end{cases}$$ Es decir $S\cap T_{k=-2} = \{\bar{0}\} \neq \langle(0,1,1)\rangle$

. Si $k \neq -2 \to T_{k\neq-2} = \{x \in \mathbb{R}: (k-2)x_1-x_2+x_3=0\}$

$\to S \cap T_{k\neq -2}$ debe cumplir: $\begin{cases} (k-2)x_1-x_2+x_3=0 \to (k-2)x_1-x_3+x_1+x_3=0 \leftrightarrow (k-1)x_1=0. \\ x_1+x_2-x_3=0 \to x_2=x_3-x_1 \end{cases}$ $\left\langle \begin{array}{l} x_1=0 \\ \checkmark \\ k=1. \end{array}\right.$

. Si $k=1 \to S\cap T = \langle(1,-1,0)(0,1,1)\rangle \neq \langle(0,1,1)\rangle$

. Si $x_1=0$ $(k\neq 1)$ $\to S\cap T = \langle(0,1,1)\rangle$.

. Rta: Se cumple para $k \in \mathbb{R}/\{-2,1\}$

+ Ejercicio 9

Sean S y T subespacios de un $\mathbb{K}$ e.v. $S \cup T$ subespacio de $\mathbb{V}$ si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

$\Rightarrow$) $S \cup T$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Entonces, sabemos que dados $s, t \in S \cup T$, $s + t \in S \cup T$.

Suponemos que $s \in S/T$ y $t \in T/S$. Se tiene que

- $\underbrace{s + t}_{\in S \cup T} + \underbrace{(-s)}_{\in S} = t \Rightarrow t \in S$
- $\underbrace{t + s}_{\in S \cup T} + \underbrace{(-t)}_{\in T} = s \Rightarrow s \in T$.

Llegamos a una contradicción basada en la suposición inicial. Podemos afirmar entonces que $s \in S \to s \in T$ y $t \in T \to t \in S$, es decir $S \subset T$ o $T \subset S$.

$\Leftarrow$) . Si $S \subset T$, entonces $S \cup T = T$. Como T es subespacio, $S \cup T$ es subespacio.

. Si $T \subset S$, entonces $S \cup T = S$. Como S es subespacio, $S \cup T$ es subespacio. $\square$

+ Ejercicio 10

a) $\{(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,2,1,-5)\}$ en $\mathbb{R}^4$, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Coloco los vectores como filas de una matriz para operar con ellos y ver si se llega a una comb. lineal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[7F_3 + 2F_2 \to F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -49 \end{pmatrix}$$

El conjunto es linealmente independiente. Como operé con coeficientes en $\mathbb{R}$, puedo decir que es li sobre $\mathbb{R}$.

b) $\{(1-i, i), (2, -1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Planteo: $a(1-i, i) + b(2, -1+i) = \bar{0}$. Quiero ver que $a = b = 0 \in \mathbb{C}$.

$\leftrightarrow ((a+2b) - ai, -b + (a+b)i) = \bar{0}$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} a(1-i) + 2b = 0 \\ ai + b(-1+i) = 0 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 2 & 0 \\ i & -1+i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1-i)F_2 - iF_1 \to F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) *$$

Vemos que el sistema tiene infinitas soluciones. Luego, a y b no son siempre 0, y el cjto no es li sobre $\mathbb{C}$.

$* \to a(1-i) + 2b = 0 \leftrightarrow b = \frac{(-1+i)}{2} a$

Puedo escribir el primer vector como c.l. del 2do.

$a(1-i, i) + b(2, -1+i) = \bar{0} \leftrightarrow (1-i, i) = -\frac{b}{a}(2, -1+i) \leftrightarrow (1-i, i) = \frac{1-i}{2}(2, -1+i)$.

+ Ejercicio 11

a) $S = \langle (1,1,2), (1,3,5), (1,1,4), (5,1,1) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - 5F_1 \to F_4}]{F_2 - F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + 2F_2 \to F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_4 + 2F_3 \to F_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ este vector es c.l. del resto

$\rightarrow B_S = \{(1,1,2), (1,3,5), (1,1,4)\}$. $\dim(S) = 3$.

Como la dimensión es 3, es una base del e.v.

b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 - F_1 \to F_4]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_2 \to F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$] el último "vector" es CL del resto.

$\rightarrow B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim(S) = 3$.

Para obtener una base del espacio vectorial, agregamos un vector li con el resto:

$\rightarrow B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

+ Ejercicio 12

Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. $\{v_1, \dots, v_k\}$ es li sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es li sobre $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$) $\{v_1, \dots, v_k\}$ es li sobre $\mathbb{R}$, es decir, $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \iff a_i = 0,\ 1 \le i \le k,\ a_i \in \mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $1 \le i \le k$, luego, $\{v_1, \dots, v_k\}$ es li sobre $\mathbb{C}$.

$\Leftarrow$) $\{v_1, \dots, v_k\}$ es li sobre $\mathbb{C} \rightarrow \sum_{j=1}^{k} (a_j + i b_j) v_j = 0 \iff a_j + i b_j = 0,\ 1 \le j \le k$.

Podemos ver que $a_j + i b_j = 0 \iff a_j = b_j = 0$, $1 \le j \le k$, donde en ese caso, $a_j + i b_j \in \mathbb{R}$.

Luego, $\{v_1, \dots, v_k\}$ es li sobre $\mathbb{R}$. $\square$

+ Ejercicio 13 Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

a) . Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ satisface que $Ax = 0\ \forall x \in \mathbb{K}^n$, entonces $A = 0$.

Si tomamos e_i, el vector con un 1 en la i-ésima pos. y 0 en los demás,

$Ae_i = c_i$, donde c_i es la i-ésima columna de A. Como $Ax = 0\ \forall x \in \mathbb{K}^n$, en particular, $Ae_i = 0\ \forall\ 1 \le i \le n$, luego, $c_i = 0\ \forall\ 1 \le i \le n$.

Si todas las columnas de A son el vector nulo, entonces $A = 0$.

. Si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ satisfacen que $Ax = Bx\ \forall x \in \mathbb{K}^n$, entonces $A = B$.

De nuevo, tomando e_i, tenemos que $Ae_i = c_{A_i}$ y $Be_i = c_{B_i}$ las columnas i-ésimas de A y B respectivamente. Como $Ax = Bx\ \forall x$, $Ae_i = Be_i \iff c_{A_i} = c_{B_i}\ \forall\ 1 \le i \le n$. Si todas las columnas son iguales, $A = B$.

b) Si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times r}$ con $B = (b_{ij})$ y, para $1 \leq j \leq r$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j-ésima de B, entonces $AB = (AB_1 | \cdots | AB_r)$.

$$(AB_j)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (B_j)_k \Rightarrow AB_j = \begin{pmatrix} \sum a_{1k} (B_j)_k \\ \vdots \\ \sum a_{mk} (B_j)_k \end{pmatrix}$$

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Si queremos una columna: $(AB)_j = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1k} (B_j)_k \\ \vdots \\ \sum a_{mk} (B_j)_k \end{pmatrix}$.

Es decir, $(AB)_j = AB_j$, la columna j-ésima de AB corresponde al producto de A por la columna j de B. $\Rightarrow AB = (AB_1 | \cdots | AB_r)$.