Álgebra lineal Computacional ~ Práctica 1: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

+ Ejercicio 1

a) Resuelvo el sistema no homogéneo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \xmapsto{\text{M.A.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1 \to F_3]{F_2 - 3F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{5F_3 - 2F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Llegamos a un sistema equivalente. Podemos observar que las soluciones serán infinitas, puesto que hay 3 filas no nulas en las primeras 4 columnas. Resuelvo de atrás para adelante.

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \to x_1 + 1 - x_4 - 4 + 2x_4 + x_4 = -2 \leftrightarrow x_1 + 2x_4 - 3 = -2 \leftrightarrow \underline{x_1} = 1 - 2x_4 \\ -5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9 \to -5x_2 + 7(2 - x_4) + 2x_4 = 9 \leftrightarrow -5x_2 + 14 - 7x_4 + 2x_4 = 9 \leftrightarrow \underline{x_2} = 1 - x_4 \\ x_3 + x_4 = 2 \to \underline{x_3} = 2 - x_4 \end{cases}$$

Finalmente, el conjunto de soluciones es: $S = \{ x_4 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Solución del homogéneo}}}{(-2,-1,-1,1)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Solución particular.}}}{(1,1,2,0)} : x_4 \in \mathbb{R} \}$

Ahora resuelvo el sistema homogéneo.

$$\xrightarrow{\text{M.A.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{escalono de la misma forma}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \to x_1 - x_4 + 2x_4 + x_4 = 0 \leftrightarrow x_1 = -2x_4 \\ -5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \to -5x_2 - 7x_4 + 2x_4 = 0 \leftrightarrow x_2 = -x_4 \\ x_3 + x_4 = 0 \to x_3 = -x_4 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S_0 = \{ x_4(-2,-1,-1,1) : x_4 \in \mathbb{R} \}$.

b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases} \xmapsto{\text{M.A.}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1 \to F_3]{F_2 - F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{4F_3 - 7F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Resuelvo de atrás para adelante

No Homogéneo:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \to x_1 + \cancel{\tfrac{3}{4}x_4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4}x_4 - \cancel{x_5} - \tfrac{1}{4} - \cancel{2x_4} + \cancel{x_5} = 1 \leftrightarrow x_1 = \tfrac{3}{2} \\ -4x_2 + 3x_4 = -1 \to x_2 = \tfrac{3}{4}x_4 - \tfrac{1}{4} \\ 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = -1 \to x_3 = \tfrac{5}{4}x_4 - x_5 - \tfrac{1}{4} \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S = \{ x_4(0, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, 1, 0) + x_5(0,0,-1,0,1) + (3/2, -1/4, -1/4, 0, 0) : x_4, x_5 \in \mathbb{R} \}$

Homogéneo:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \to x_1 + \tfrac{3}{4}x_4 + \tfrac{5}{4}x_4 - x_5 - 2x_4 + x_5 = 0 \leftrightarrow x_1 = 0 \\ -4x_2 + 3x_4 = 0 \to -4x_2 = -3x_4 \leftrightarrow x_2 = 3/4\, x_4 \\ 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0 \to 4x_3 = 5x_4 - 4x_5 \leftrightarrow x_3 = \tfrac{5}{4}x_4 - x_5 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S_0 = \{ x_4(0, 3/4, 5/4, 1, 0) + x_5(0,0,-1,0,1) \}$

c)

$$\begin{cases} i x_1 - (1+i)x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2i x_2 - x_3 = 2i \end{cases} \xmapsto{\text{M.A.}} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right) \xrightarrow[iF_3 - F_1 \to F_3]{iF_2 - F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & 1 \\ 0 & i-1 & -i & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} i x_1 - (1+i) x_2 = -1 \longrightarrow i x_1 = (1+i) x_2 - 1 \longleftrightarrow x_1 = \frac{(1+i)}{i} x_2 - \frac{1}{i} = (1-i) x_2 + i \\ (1-i) x_2 + i x_3 = 1 \longrightarrow x_3 = \frac{1-(1-i)x_2}{i} = \frac{1}{i} - \frac{(1-i)}{i} x_2 = -i + (1+i) x_2 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es: $S = \{ x_2 (1-i, 1, 1+i) + (i, 0, -i) : x_2 \in \mathbb{C} \}$

; y para el sist. homogéneo asociado: $S_0 = \{ x_2 (1-i, 1, 1+i), \ x_2 \in \mathbb{C} \}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3i x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & (-1+i) & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -3i & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2+F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & (-1+i) & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5+i & -6i & 11 & 4 \end{array} \right)$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 = 2 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left[(1-i)x_2 + \frac{(5+i)}{11} x_2 - \frac{6}{11} i x_3 + \frac{4}{11} + 2 \right] = \left(\frac{8-5i}{11} \right) x_2 - \frac{3}{11} i x_3 + \frac{13}{11} \\ (5+i)x_2 - 6i x_3 + 11 x_4 = 4 \longrightarrow x_4 = -\frac{(5+i)}{11} x_2 + \frac{6}{11} i x_3 + \frac{4}{11} \end{cases}$$

Las soluciones pertenecen al conjunto: $S = \{ x_2 (\frac{8-5i}{11}, 1, 0, \frac{-5-i}{11}) + x_3 (-\frac{3i}{11}, 0, 1, \frac{6}{11} i) + (\frac{13}{11}, 0, 0, \frac{4}{11}) : x_2, x_3 \in \mathbb{C} \}$

; y para el sist. homogéneo asociado: $S_0 = \{ x_2 (\frac{8-5i}{11}, 1, 0, \frac{-5-i}{11}) + x_3 (-\frac{3i}{11}, 0, 1, \frac{6}{11} i) : x_2, x_3 \in \mathbb{C} \}$

+ Ejercicio 2

a) $\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & (k-2) & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3-F_1 \to F_3]{F_2+F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & k+1 & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array} \right)$

+ Si $k-1 \neq 0$ y $k+1 \neq 0$ (es decir, $k^2-1 \neq 0$), obtendremos 3 filas no nulas para las 3 incógnitas que tenemos, es decir, será un sistema compatible determinado.

  $\hookrightarrow$ El sistema tiene solución única $\forall \ k \in \mathbb{R} / \{-1; 1\}$

+ Si $k = -1$, al escalonar la matriz obtenemos: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \leftarrow$ Observamos que tenemos menos de 3 filas no nulas. Luego, estamos frente a un sistema compatible indeterminado.

  $\hookrightarrow$ infinitas soluciones.

+ Si $k=1$, en la última ecuación vemos que: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, lo cual es absurdo y nos dice que el sist. es incompatible. Por lo tanto, para $k=1$, el sistema no tiene solución.

b) El sistema homogéneo asociado admite solución no trivial si y solo si es un SCI. Esto se cumple para $k=-1$.

Resuelvo:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 \\ -2x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = 0 \end{cases}$

El conjunto de soluciones para este sistema es: $S_0 = \{ (x_2, x_2, 0) : x_2 \in \mathbb{R} \}$

+ Ejercicio 3 ~ Notebook

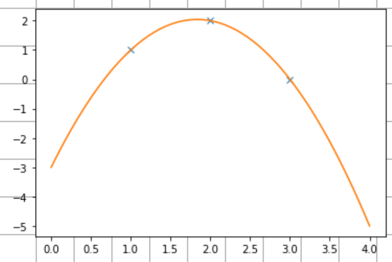
+ Ejercicio 4

Para encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos dados, resuelvo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 9F_1 \to F_3]{F_2 - 4F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 3F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \leftarrow$$

el sistema tiene solución única, como uno esperaría.

$$\sim \begin{cases} a + b + c = 1 \to a + \frac{11}{2} - 3 = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} \\ -2b - 3c = -2 \to -2b + 9 = -2 \Leftrightarrow b = \frac{11}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$



La parábola que pasa por los puntos dados es:

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$$

+ Ejercicio 5

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \,;\, x - y = 0\}$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \longrightarrow 2y - z = 0 \longleftrightarrow z = 2y \\ x - y = 0 \longrightarrow x = y \end{cases}$$

$$S = \{(y, y, 2y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,2) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,2) \rangle .$$

b) $\{A \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A = -A^t\} = \mathbb{V}$

sean $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i,j \leq 3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ii} = 0, & 1 \leq i \leq 3 \\ a_{ij} = -a_{ji} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : tr(A) = 0\} = \mathbb{V}$

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $tr(A) = a + b + c \Rightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c$.

$$\Rightarrow \mathbb{V} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0,\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ i & 1+i & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - iF_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 + x_2 - ix_4 = 0 \to x_1 + x_3 + x_4 - ix_4 = 0 \leftrightarrow x_1 = -x_3 + (-1+i)x_4 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \to x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\mathbb{V} = \langle (-1,1,1,0), (-1+i, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{C}^4 .$$

+ Ejercicio 6

$S = \langle (1,-1,2,1),(3,1,0,-1),(1,1,-1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$

a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

$(2,1,3,5) \in S \iff \exists\ a,b,c \in \mathbb{R}$ tq: $(2,1,3,5) = a(1,-1,2,1) + b(3,1,0,-1) + c(1,1,-1,-1)$

$\rightarrow (2,1,3,5) = (a+3b+c,\ -a+b+c,\ 2a-c,\ a-b-c)$

Resuelvo el sistema:

$$\begin{cases} a+3b+c = 2 \\ -a+b+c = 1 \\ 2a-c = 3 \\ a-b-c = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3-2F_1 \to F_3 \\ F_4-F_1 \to F_4}]{F_2+F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_2 \to F_4]{2F_3+3F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

El sistema no tiene solución. Luego $\nexists\ a,b,c$ y $(2,1,3,5) \notin S$.

b) Determinar si $\tilde{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$

¿Cómo son los elementos de $\tilde{S}$? $x_1 = x_2 + x_3$

$\Rightarrow \tilde{S} = \{x_2(1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(0,0,0,1);\ x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}\}$

$\tilde{S} = \langle (1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1) \rangle$

Paso S a ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 0 & -1 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3-2F_1 \to F_3 \\ F_4-F_1 \to F_4}]{F_2+F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & -6 & -3 & -2x_1+x_3 \\ 0 & -4 & -2 & -x_1+x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_2 \to F_4]{2F_3+3F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x_1 \\ 0 & 4 & 2 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1+5x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4+x_2 \end{array}\right) \rightarrow S = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1+5x_2 = 0;\ x_4+x_2 = 0\}$$

Veamos si los generadores de $\tilde{S}$ cumplen con las ecuaciones: $-1+5=0$; $0+1=0$ ABS!

$\Rightarrow \tilde{S} \not\subset S$.

c) Determinar si $S \subset \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} = \tilde{S}$

Veamos si cumplen la ecuación: $1+1-2=0$ ✓, $3-1-0=0$ ✗ $\Rightarrow S \not\subset \tilde{S}$.

+ Ejercicio 7

a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : 3x-2y+z=0\}$ y $T = \{(x,y,z) : x+z=0\}$

. $S \cap T = \{(x,y,z) : 3x-2y+z=0;\ x+z=0\}$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z=0 \rightarrow -3z-2y+z=0 \leftrightarrow y=-z \\ x+z=0 \rightarrow x=-z \end{cases} \rightarrow S \cap T = \langle (-1,-1,1) \rangle$$

. $S+T$: Primero paso a S y T a generadores.

$S = \langle (1,0,-3),(0,1,2) \rangle$, $T = \langle (-1,0,1),(0,1,0) \rangle$

$S+T = \langle (1,0,-3),(0,1,2),(-1,0,1),(0,1,0) \rangle = \langle (1,0,-3),(0,1,2),(-1,0,1) \rangle$

No es suma directa.

b) $W=\mathbb{R}^3$, $S=\{(x,y,z): 3x-2y+z=0,\ x-y=0\}$, $T=\langle(1,1,0),(5,7,3)\rangle$

. $S\cap T$. Paso T a ecuaciones.

$$a(1,1,0)+b(5,7,3)=(x,y,z)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&5&x\\1&7&y\\0&3&z\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1\to F_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&5&x\\0&2&y-x\\0&3&z\end{array}\right)\xrightarrow{2F_3-3F_2\to F_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&5&x\\0&2&y-x\\0&0&3x-3y+2z\end{array}\right)$$

$\rightarrow T=\{(x,y,z): 3x-3y+2z=0\}$

$S\cap T$ debe cumplir:
$$\begin{cases}3x-2y+z=0 & \rightarrow 3y-2y+z=0\rightarrow z=-y\\ x-y=0 & \rightarrow x=y\\ 3x-3y+2z=0 & \rightarrow 3y-3y-2y=0\rightarrow y=0=x=z\end{cases}\rightarrow S\cap T=\{\bar{0}\}$$

HAY SUMA DIRECTA.

. $S+T$. Paso S a generadores:

$S=\langle(1,1,-1)\rangle \rightsquigarrow S\oplus T=\langle(1,1,-1),(1,1,0),(5,7,3)\rangle$

c) $W=\mathbb{R}^3$, $S=\langle(1,1,3),(1,3,5),(6,12,24)\rangle$, $T=\langle(1,1,0),(3,2,1)\rangle$

Paso a S y T a ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&6&x\\1&3&12&y\\3&5&24&z\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-3F_1\to F_3]{F_2-F_1\to F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&6&x\\0&2&6&y-x\\0&2&6&z-3x\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2\to F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&6&x\\0&2&6&y-x\\0&0&0&-2x-y+z\end{array}\right)\rightarrow S=\{(x,y,z): -2x-y+z=0\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\1&2&y\\0&1&z\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1\to F_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\0&-1&y-x\\0&1&z\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_2\to F_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&x\\0&-1&y-x\\0&0&-x+y+z\end{array}\right)\rightarrow T=\{(x,y,z): -x+y+z=0\}$$

. $S\cap T$:

Es la solución de:
$$\begin{cases}-2x-y+z=0 \rightarrow -2x-y+x-y=0\leftrightarrow -x-2y=0\leftrightarrow x\overset{*}{=}-2y\\ -x+y+z=0\rightarrow z=x-y\overset{*}{\rightarrow} z=-3y\end{cases}$$

Luego, $S\cap T=\langle(-2,1,-3)\rangle$

. $S+T=\langle(1,1,3),(1,3,5),(6,12,24),(1,1,0),(3,2,1)\rangle$

d) $W=\mathbb{R}^{3\times3}$, $S=\{(x_{ij})\ /\ x_{ij}=x_{ji},\ \forall i,j\}$, $T=\{(x_{ij})\ /\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=0\}$

. $S\cap T$

Debe cumplir:
$$\begin{cases}x_{12}=x_{21}\\ x_{13}=x_{31}\\ x_{23}=x_{32}\\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=0\rightarrow x_{11}=-x_{21}-x_{31}.\end{cases}$$

Las variables "libres" van a ser: $x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{22}, x_{32}$

$$\rightarrow S\cap T=\left\langle\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

. $S+T$. Busco generadores de S y T.

$$S=\left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$T=\left\langle \begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\Rightarrow S+T=\left\langle \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

se puede simplificar.

e) $\mathbb{V}=\mathbb{C}^3$, $S=\langle (i,1,3-i),(4,1-i,0)\rangle$, $T=\{x\in\mathbb{C}^3 : (1-i)x_1-4x_2+x_3=0\}$

. $S\cap T$. Paso a S a ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 4 & x_1\\ 1 & 1-i & x_2\\ 3-i & 0 & x_3\end{array}\right)\xrightarrow[iF_3-(3-i)F_1\to F_3]{F_2+iF_1\to F_2}\left(\begin{array}{cc|c} i & 4 & x_1\\ 0 & 1+3i & x_2+ix_1\\ 0 & -12+4i & ix_3-(3-i)x_1\end{array}\right)\xrightarrow{(1+3i)F_3-(-12+4i)F_2\to F_3}\left(\begin{array}{cc|c} i & 4 & x_1\\ 0 & 1+3i & x_2+ix_1\\ 0 & 0 & (-2+4i)x_1+(12-4i)x_2+(-3+i)x_3\end{array}\right)$$

$\Rightarrow S=\{x\in\mathbb{C}^3 : (-2+4i)x_1+(12-4i)x_2+(-3+i)x_3=0\}$

Luego, $S\cap T$ debe cumplir:

$$\begin{cases}(-2+4i)x_1+(12-4i)x_2+(-3+i)x_3=0 & \mapsto *\\ (1-i)x_1-4x_2+x_3=0 & \mapsto x_3=(-1+i)x_1+4x_2\end{cases}$$

$*$ $(-2+4i)x_1+(12-4i)x_2+(-3+i)[(-1+i)x_1+4x_2]=0$

$\iff (-2+4i)x_1+(12-4i)x_2+(2-4i)x_1+(-12+4i)x_2\overset{?}{=}0$. Lo cual es válido $\forall\, x_1,x_2,x_3$.

$\Rightarrow S\cap T=\langle (1,0,-1+i),(0,1,4)\rangle = T$ $(T\subset S)$

. $S+T=\langle (i,1,3-i),(4,1-i,0),(1,0,-1+i),(0,1,4)\rangle$