

Datenanalyse durch Einbettung endlicher Datenreihen

DIPLOMARBEIT

vorgelegt dem Fachbereich Physik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

von
Tobias Maier

Die Arbeit wurde von Prof. Dr. Peter E. Beckmann
betreut.

Mainz, im Juni 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Dynamische Systeme	6
1.2	Das Rekonstruktionsproblem	9
2	Das Takens–Theorem	11
2.1	Einleitung	11
2.2	Abbildungsräume der Differentialtopologie und der Satz von Whitney	12
2.3	Die Delay–Koordinatenabbildung	16
2.4	Das Standard–Takens–Theorem	18
2.5	Rekonstruktion der Flußabbildung	20
2.6	Diskussion und Folgerungen aus dem Satz von Takens	22
2.6.1	Weshalb benötigt man $2m + 1$ Delay–Koordinaten ?	23
2.6.2	„Optimalität“ des Satzes von Takens	31
2.6.3	Der Satz von Huke	38
2.7	Implikationen der Endlichkeit der aufgenommenen Datenreihe	38
3	Weitere Rekonstruktiotheoreme	44
3.1	Der Satz von Sauer–York–Casdagli	44
3.2	Rekonstruktion deterministisch getriebener Systeme	47
3.3	Rekonstruktion nicht–deterministisch getriebener Systeme	53

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
4 Polyedrisierung	56
4.1 Problemstellung und Lösungsidee	56
4.2 Polyeder	58
4.2.1 Simpliciale Komplexe	59
4.2.2 Topologisierung der simplizialen Komplexe	61
4.2.3 Die Euler–Charakteristik	68
4.3 Triangulierungsverfahren	69
4.3.1 Die Delaunay–Triangulierung	69
4.3.2 Triangulierung entlang Trajektorien	72
4.3.3 Ein Triangulierungsalgorithmus für Zustandsflächen	75
5 Invarianten	80
6 Zusammenfassung	87

Vorwort

Um die Methoden zur Untersuchung nichtlinearer Systeme auf reale Systeme anzuwenden, werden die Zustandsräume dieser Systeme zunächst rekonstruiert. Für die Rekonstruktionsaufgabe ist die Delay-Methode am besten geeignet. Eine strenge mathematische Rechtfertigung dieser Methode wird durch das Takens-Theorem erbracht. Die Anwendung dieses Verfahrens erfordert eine unendlich lange Meßreihe, die aus offensichtlichen Gründen jedoch durch reale Experimente nicht geliefert wird. Die sich hieraus ergebenden Probleme und einige Lösungsvorschläge sind Gegenstand dieser Arbeit und sollen kritisch beleuchtet werden.

Hierbei interessieren mich vor allem prinzipielle Fragen und weniger solche, die sich aus der Anwendung des Delay-Verfahrens auf spezielle Systeme ergeben. In dieser Arbeit werde ich stets annehmen, daß die Zustandsräume besonders handhabbare mathematischen Eigenschaften besitzen, die sich in Form differenzierbarer Mannigfaltigkeiten widerspiegeln. Ferner sind die betrachteten Systeme stets Flußsysteme, d.h. differenzierbare dynamische Systeme.

In Kapitel 1 wird der Begriff einer Rekonstruktion und das Rekonstruktionsproblem ganz allgemein definiert. Kapitel 2 widmet sich der Aufgabe, eine einheitliche Notation und Begriffsbildung für diese Arbeit zu schaffen. Weiterhin werden in diesem und dem folgenden Kapitel die wichtigsten Rekonstruktionssätze der Nichtlinearen Dynamik angegeben. In diesem Kapitel versuche ich auch der Frage nachzugehen, weshalb gerade „ $2m + 1$ Variable“ zur Einbettung der Zustandsmannigfaltigkeit benötigt werden und welche Folgerungen noch gezogen werden können, wenn die Anzahl der Koordinaten kleiner als $2m + 1$ ist. In Kapitel 4 wird die Frage abgehandelt, ob Zustandsräume überhaupt aus nur endlich vielen Meßwerten eindeutig rekonstruiert werden können. Die Frage kann erstaunlicherweise positiv beantwortet werden. Ich werde drei Verfahren angeben, die den Zustandsraum

aus nur endlich vielen Meßwerten rekonstruieren. Eines dieser Verfahren ist allerdings auf die Rekonstruktion 2-dimensionaler Zustandsräume beschränkt. Schließlich möchte ich in Kapitel 4 die Aufmerksamkeit auf die Frage lenken, welche Kenngrößen invariant unter den Rekonstruktionsabbildungen sind.

Symbolverzeichnis

Die meisten in dieser Arbeit verwendeten Symbole und Bezeichnungen entsprechen denen, welche in der Mathematik üblich sind. Einige weniger gebräuchliche Symbole und Bezeichnungen, die im Text auftreten, sind hier nochmals zusammengestellt:

$A - B$	Das Mengenkomplement von B in A
$Abb(X, Y)$	Menge aller Abbildungen von X nach Y
$B_\varepsilon(x)$	Offene Kugel mit Radius ε um x in einem metrischen Raum
$\overline{B}_\varepsilon(x)$	Abgeschlossene Kugel mit Radius ε um x in einem metrischen Raum
$CH(A)$	Konvexe Hülle der Menge A
$d_p f$	Tangentialabbildung von f im Punkte p
$D^k f$	k -te Ableitung einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
$f : X \xrightarrow{\cong} Y$	f ist ein Diffeomorphismus oder Homöomorphismus von X nach Y
$in : X \hookrightarrow Y$	Inklusionsabbildung von der Menge X in die Menge Y
$K = (E, S)$	Simplizialer Komplex
$ K $	Geometrische Realisierung des simplizialen Komplexes K
\mathcal{M}^m	m -dimensionale Mannigfaltigkeit
$\min A$	Das Minimum in der Menge A
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen: $1, 2, 3, \dots$
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null: $0, 1, 2, \dots$
$\pi_X : X \times Y \rightarrow X$	Kanonische Projektion auf X
$\operatorname{rg}_p f$	Rang der Tangentialabbildung $d_p f$ von f in p
$\sigma(x_1, \dots, x_k)$	Geometrisches Simplex mit den Eckpunkten $x_1 \dots x_k$
$T_p \mathcal{M}$	Tangentialraum an \mathcal{M} im Punkte p
(X, d)	Metrischer Raum mit Metrik d
(X, \mathcal{O})	Topologischer Raum mit Topologie \mathcal{O}
$\chi(X)$	Euler-Charakteristik von X
$\langle v_1, \dots, v_n \rangle$	Vektorraumzeugnis der Vektoren v_1, \dots, v_n
$\operatorname{vol}(A)$	Volumen von A
\cong	Isomorph oder homöomorph
$\ \cdot \ $	Vektorraumnorm
$\ \cdot \ _m$	m -Norm im \mathbb{R}^n
$\ \cdot \ _{\sup A}$	Supremumsnorm bzgl. der Menge A

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Dynamische Systeme

In dieser Arbeit wird der Begriff eines dynamischen Systems eine entscheidende Rolle spielen. Er soll in diesem Unterabschnitt deshalb kurz diskutiert werden.

In der Physik wird die Zeit entweder diskret oder kontinuierlich modelliert. Im diskreten Fall hat man eine Ordnungsrelation-erhaltende Bijektion $(T, \prec) \simeq (\mathbb{Z}, \leq)$, bzw. $(T, \prec) \simeq (\mathbb{R}, \leq)$ für den kontinuierlichen Fall.

Diese Bijektionen induzieren auf T in kanonischer Weise eine Gruppenstruktur. Wir dürfen deshalb im Folgenden o.B.d.A. stets annehmen:

$$\begin{aligned} T &= (\mathbb{Z}, +) && \text{für diskrete Zeit} \\ T &= (\mathbb{R}, +) && \text{für kontinuierliche Zeit} \end{aligned}$$

Bevor die Definition eines dynamischen Systems angegeben werden kann, benötigen wir noch einige Bezeichnungen. Sei Z eine nichtleere Menge. Dann bildet die Menge aller bijektiven Abbildungen von Z auf sich eine Gruppe S_Z bezüglich des Kompositums von Abbildungen. S_Z heißt die symmetrische Gruppe von Z . Die Elemente von S_Z heißen Permutationen und werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Definition (Dynamisches System): Ein dynamisches System ist ein Tripel (T, Z, ψ) , bestehend aus einer Gruppe T , einer Menge Z und einem Gruppenhomomorphismus

$$\psi : T \longrightarrow S_Z \quad \text{mit} \quad t \longmapsto \pi(t) ,$$

wobei T die Systemzeit und Z der Zustandsraum heißt.

In der Literatur wird für gewöhnlich eine etwas „anschaulichere“, aber dennoch äquivalente Definition verwendet. Der Beweis der Äquivalenz beider Definitionen ist nicht schwierig und wird deshalb ausgelassen.

Definition (Dynamisches System): Ein dynamisches System ist ein Tripel (T, Z, φ) , bestehend aus einer Gruppe T , einer Menge Z und einer Abbildung $\varphi : T \times Z \longrightarrow Z$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} (i) \quad \varphi(0, z) &= z & \forall z \in Z, \\ (ii) \quad \varphi(t_1 + t_2, z) &= \varphi(t_1, \varphi(t_2, z)) & \forall t_1, t_2 \in T \text{ und } \forall z \in Z. \end{aligned}$$

φ nennt man die Flußabbildung des dynamischen Systems.

In diesen Zusammenhang lassen sich nun noch einige Begriffe definieren, die später ihre Verwendung finden werden.

Definition: Sei (T, Z, φ) ein dynamisches System.

(a) Für $z_1, z_2 \in Z$ definiert

$$z_1 \sim z_2 : \iff (\text{Es gibt ein } t \in T \text{ mit } \varphi(t, z_1) = z_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf Z . Die Menge der Äquivalenzklassen $\mathcal{O}(Z) := Z / \sim$ heißt der Orbitraum oder auch Bahnenraum.

Die Äquivalenzklasse $[z] \in \mathcal{O}(Z)$ von z heißt Orbit oder auch Bahn durch z .

(b) $\text{Fix}(\varphi) := \{z \in Z \mid \varphi(t, z) = z \quad \forall t \in T\} \subseteq Z$ heißt die Fixpunktmenge von φ und die Elemente von $\text{Fix}(\varphi)$ heißen Fixpunkte von φ .

Für die Nichtlineare Dynamik ist obige Definition eines dynamischen Systems allerdings noch zu allgemein, um mit ihr arbeiten zu können. So, wie man die Zustandsräume in der Natur vorfindet, sind sie meist nicht nur abstrakt gegeben als eine Menge, sondern mit weiterer Struktur ausgestattet. Diese mathematische Struktur darf einerseits nicht zu schwach sein, um tiefliegende mathematische Aussagen zu erhalten, andererseits muß sie allgemein genug sein, um eine möglichst gute Korrespondenz zwischen der

physikalischen Welt und dem mathematischen Kalkül zu erhalten. Als hinreichend allgemein hat sich in der Mathematik die Definition einer Topologie erwiesen. Dadurch werden die Elemente des Zustandsraumes durch Umgebungssysteme in Beziehung zueinander gesetzt. Darüber hinaus wird der Zustandsraum aber vielleicht noch mit weiteren Strukturen versehen, wie es die Situation eben mit sich bringt. Oft ist etwa in natürlicher Weise ein Abstandsbegriff oder eine Metrik auf dem Zustandsraum gegeben. Ohne eine Metrik bzw. Topologie wäre eine Definition des für die Nichtlineare Dynamik so wichtigen Begriffs des Attraktors nicht möglich. Ferner kommt man in der Nichtlinearen Dynamik ohne differenzierbare Strukturen nur schwer aus. Die Ljapunov-Exponenten wären ohne einen Differenzierbarkeitsbegriff nicht definierbar. Erst durch diese Erweiterungen des Zustandsraumes über eine bloße Punktmenge hinweg, wird die Entwicklung einer erfolgreichen Theorie möglich.

Ebensowenig wie der Zustandsraum Z eine bloße Punktmenge ist, sind die vom dynamischen System induzierten Abbildungen $\pi(t) \in S_Z$ des Zustandsraumes in sich bloß Bijektionen. Sie respektieren die zusätzliche mathematische Struktur auf dem Zustandsraum und sind somit Isomorphismen in der entsprechenden Kategorie¹.

Da sich die Flußabbildung eines dynamischen Systems häufig aus einem Differentialgleichungssystem generiert, werden wir im folgenden den Zustandsraum als eine endlich-dimensionale differenzierbare² Mannigfaltigkeit annehmen und mit \mathcal{M} bezeichnen.

Da wir die Systemzeit T isomorph zu \mathbb{R} oder \mathbb{Z} angenommen haben, ist T in kanonischer Weise eine Lie-Gruppe. Die Lie-Gruppen-Struktur soll unter der Flußabbildung ebenfalls erhalten bleiben. Man erhält somit folgende Definition eines differenzierbaren dynamischen Systems, die man in [BRJ90] findet:

Definition (Differenzierbares dynamisches System): Sei \mathcal{M} eine endlich-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und T eine Lie-Gruppe. Eine differenzierbare Abbildung $\Phi : T \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$

¹Zum Beispiel Vektorraum-Isomorphismen, falls der Zustandsraum Z eine lineare Struktur trägt oder Homöomorphismen bzw. Diffeomorphismen, wenn Z mit einer topologischen bzw. differenzierbaren Struktur versehen ist.

²Differenzierbar soll stets beliebig oft differenzierbar bedeuten. Die subtilen Probleme, die bei nur endlich oft differenzierbaren Mannigfaltigkeiten auftreten, werden in unseren Überlegungen keine Rolle spielen.

heißt Fluß auf \mathcal{M} , wenn für alle $p \in \mathcal{M}$ und für alle $t, s \in T$ gilt:

$$\begin{aligned} (i) \quad \Phi(0, p) &= p \\ (ii) \quad \Phi(t, \Phi(s, p)) &= \Phi(t + s, p). \end{aligned}$$

Das Tripel (T, \mathcal{M}, Φ) heißt dann ein dynamisches System.

Für den Rest dieser Arbeit ist ein dynamisches System stets ein differenzierbares dynamisches System. Weiterhin setze ich voraus, daß alle physikalischen Systeme, die in dieser Arbeit betrachtet werden, durch ein differenzierbares dynamisches System modelliert werden können. Nur für solche Systeme sind bisher Rekonstruktionssätze formuliert worden. Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß es neben diesen speziellen Systemen noch weitere Modellsysteme gibt. So fällt beispielsweise die logistische Gleichung nicht in die Klasse von Systemen, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Auch stochastische Systeme werden hier nicht untersucht.

1.2 Das Rekonstruktionsproblem

Nicht immer ist der Zustandsraum eine Teilmenge eines euklidischen Raumes \mathbb{R}^n . Er kann sehr abstrakt definiert sein. Man denke zum Beispiel an Quotientenmannigfaltigkeiten wie die Kleinsche Flasche³ oder an Unterräume von Funktionenräumen⁴. Dennoch kann der Zustandsraum unter gewissen Voraussetzungen isomorph, d.h. bijektiv und strukturerhaltend, auf eine Teilmenge eines geeigneten Raumes abgebildet werden. Solche Räume haben oft mehr Struktur als der eigentliche Zustandsraum oder besitzen besonders schöne Eigenschaften. Neben dem vertrauten \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n erwiesen sich in der Theorie dynamischer Systeme Folgenräume, wie sie in der Symboldynamik auftreten, als geeignete Rekonstruktionsräume. In der Mathematik werden solche Aussagen als Einbettungssätze subsumiert. Neben dem Wunsch nach besserer Anschaulichkeit des Zustandsraumes tritt in der Praxis ein weiterer Grund für die Anwendung von Einbettungssätzen auf. Der Zustandsraum ist zunächst gar nicht gegeben. Der Experimentator nimmt mit Hilfe einer Meßapparatur einen Datensatz auf. Diese Meßreihe

³Die Kleinsche Flasche ist das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, bei dem die gegenüberliegenden Seiten entgegengesetzt identifiziert werden.

⁴Funktionenräume als Zustandsräume treten zum Beispiel in der Strömungsmechanik auf. In der Regel sind diese aber unendlich-dimensional. In solchen Räumen ist bereits die numerische Berechnung des Abstandes zweier Abbildungen schwierig.

beeinhaltet die einzige Information, die man über das dynamische System besitzt. Unter einer Rekonstruktion versteht man nun ein Verfahren, das aus diesen Meßdaten den Zustandsraum und die Flußabbildung extrahiert. Die Rekonstruktionsabbildung ist eine Einbettung, die mittels konkret gegebener Meßgrößen realisiert werden kann. Eng verknüpft mit dem Begriff einer Rekonstruktion ist der Begriff einer Realisation. Ist ein Modell eines physikalischen Systems gegeben, so soll unter einer *Realisation* dieses Modells eine isomorphe Abbildung des Zustandsraumes in einen geeigneten Raum mit zur Verfügung stehender Mittel verstanden werden. In dieser Arbeit wird nun davon ausgegangen, daß ein Modellsystem bereits existiert und dieses in einen \mathbb{R}^n realisiert werden soll.

Gründe für die Realisation eines dynamischen Systems in einen \mathbb{R}^n sind neben der Visualisierung die numerische Berechnung charakteristischer Größen, wie Dimensionen, Entropien oder Ljapunov-Exponenten. Zur Lösung des Rekonstruktionsproblems und des Realisationsproblems wurden in den letzten Jahren sehr mächtige Theoreme formuliert, die in den nächsten beiden Kapiteln vorgestellt werden.

Kapitel 2

Das Takens–Theorem

2.1 Einleitung

Für Zeitreihenanalysen erweist sich der Einbettungssatz von Takens von unschätzbarem Wert. Er ist mittlerweile zur Grundlage fast aller Datenanalyseverfahren auf dem Gebiet der Nichtlinearen Dynamik geworden. Ebenso wie alle gängigen Methoden zur Berechnung von Ljapunov-Exponenten auf ihm basieren, wären auch Algorithmen, wie der Grassberger-Procaccia-Algorithmus zur Berechnung der Korrelationsdimension, ohne dem Einbettungssatz von Takens das theoretische Fundament entzogen. Neben der Datenanalyse nichtlinearer Systeme entfaltet dieses Theorem seine Stärke auch auf dem Sektor der Prädiktion dynamischer Systeme. Bis jetzt ist ein Ende seines Anwendungsbereiches nicht erkennbar. Der Satz von Takens beschreibt und begründet ein Verfahren zur Konstruktion einer Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n aus einer unendlich langen skalaren Meßreihe, wobei die Untermannigfaltigkeit in einem noch zu erklärenden Sinne äquivalent zum ursprünglichen Zustandsraum ist. Er gestattet es, ein unbekanntes dynamisches System durch eine sukzessive Folge reellwertiger Meßwerte zu rekonstruieren. Man erhält somit Punkte auf einem äquivalenten Abbild des Zustandsraumes im \mathbb{R}^n und kann dort numerische Operationen durchführen.

Im nächsten Abschnitt sind einige grundlegende Definitionen aus der Differentialtopologie zusammengestellt, wie man sie etwa in [HIR76] oder [BRJ90] findet. Diese mathematischen Begriffe sind für eine strenge mathematische Formulierung der Rekonstruktionstheoreme unabdingbar.

2.2 Abbildungsräume der Differentialtopologie und der Satz von Whitney

Die Definition einer Mannigfaltigkeit wird in der Literatur nicht einheitlich angegeben.. Eine kurze Zusammenstellung dieser Begriffe und einiger grundlegender Notationen, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind deshalb wohl angebracht. Sie dienen auch einer einheitlichen Notation und Begriffsbildung. Im folgenden wird unter einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit ein 2-abzählbarer¹ Hausdorffraum verstanden, der lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^m ist. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt zusätzlich einen maximalen differenzierbaren Atlas. Ferner bezeichnet $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ die Menge aller r -fach differenzierbaren Abbildungen von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} nach der differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{N} , wobei $r \in \mathbb{N}_0$ oder $r = \infty$. Mit $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ kennzeichnen wir schließlich die Menge der Diffeomorphismen von \mathcal{M} nach \mathcal{N} .

Um die Abbildungen aus $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ zueinander in Beziehung zusetzen, ist es notwendig auf $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ eine Topologie anzugeben. Es wird eine Topologie auf $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ definiert, die für die Differentialtopologie wichtig ist und sich als geeignet für den Satz von Takens erweist. Nachfolgende Definitionen für eine solche Topologie wurden [HIR76, Seiten 34–36] entnommen.

Definition (\mathcal{C}^r -kompakt-offen-Topologie): Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten, (U, φ) eine Karte von \mathcal{M} und (V, ψ) eine Karte von \mathcal{N} . Ferner sei $K \subset U$ kompakt, $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ mit $f(K) \subset V$ und $\varepsilon > 0$. Dann setze:

$$\mathcal{U}_\varepsilon(K, f, \varphi, \psi) := \left\{ g \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \mid g(K) \subset V \text{ und } \|D^k(\psi f \varphi^{-1}) - D^k(\psi g \varphi^{-1})\|_{\sup \varphi(K)} < \varepsilon \quad \forall k = 0, \dots, r \right\}$$

Die von den $\mathcal{U}_\varepsilon(K, f, \varphi, \psi)$ erzeugte Topologie heißt die \mathcal{C}^r -kompakt-offen-Topologie auf $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Jede offene Menge in $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bzgl. der \mathcal{C}^r -kompakt-offen-Topologie ist also Vereinigung endlicher Durchschnitte der $\mathcal{U}_\varepsilon(K, f, \varphi, \psi)$. Auf Kompakta liegen somit zwei Funktionen nahe beieinander, falls der maximale

¹Ein topologischer Raum heißt 2-abzählbar, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt.

euklidische Abstand ihrer Funktionswerte und ihrer Ableitungen bzgl. der Karten bis zu einer bestimmten Ordnung klein ist. Nach [HIR76, Seite 35] kann gezeigt werden, daß $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sogar metrisierbar ist. Weiterhin ist für kompakte Mannigfaltigkeiten der Abbildungsraum $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ sogar ein Banachraum, insbesondere also vollständig. Es bleibt noch die Menge der unendlich oft differenzierbaren Abbildungen zu topologisieren.

Definition: Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten, sowie $in_r : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ die kanonischen Inklusionsabbildungen² wobei $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ mit der \mathcal{C}^r -kompakt-offen-Topologie versehen sei. Dann erzeugt

$$\{ in_r^{-1}(U) \mid U \subseteq \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \text{ ist offen und } r \in \mathbb{N}_0 \}$$

die \mathcal{C}^∞ -kompakt-offen-Topologie auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Offenbar ist die \mathcal{C}^∞ -kompakt-offen-Topologie die größte³ Topologie auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, so daß alle Inklusionen in_r stetig sind.

Die \mathcal{C}^∞ -kompakt-offen-Topologie kontrolliert die „Nähe“ zweier Abbildungen nur auf kompakten Mengen. Für nicht-kompakte Mengen ist deshalb die Definition einer weiteren Topologie notwendig.

Definition (Whitney-Topologie): Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Λ eine Indexmenge, $\mathfrak{U} = (U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie lokal-endlicher Karten von \mathcal{M} , d.h. zu jedem Punkt aus \mathcal{M} gibt es eine Umgebung, die nur endlich viele der U_λ trifft, und $\mathfrak{V} = (V_\lambda, \psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Karten auf \mathcal{N} . Ferner sei $\mathbf{K} = (K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie kompakter Teilmengen mit $K_\lambda \subset U_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$), sowie $\varepsilon = (\varepsilon_\lambda > 0)_{\lambda \in \Lambda}$. Dann setze für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ mit $f(K_\lambda) \subset V_\lambda$:

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{K}, f, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}) := \left\{ g \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \mid g(K_\lambda) \subset V_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda \text{ und } \right. \\ \left. \| D^k(\psi_\lambda f \varphi_\lambda^{-1}) - D^k(\psi_\lambda g \varphi_\lambda^{-1}) \|_{sup \varphi_\lambda(K_\lambda)} < \varepsilon_\lambda \quad \forall k = 0, \dots, r \right\}$$

Die von den $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{K}, f, \mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ erzeugte Topologie heißt die \mathcal{C}^r -Whitney-Topologie auf $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

²Sei X eine Teilmenge von Y , so versteht man unter der kanonischen Inklusionsabbildung $X \hookrightarrow Y$ die Abbildung, die jedem Element x aus X das Element x aus Y zuordnet.

³Sind \mathcal{O} und \mathcal{O}' Topologien auf einer Menge X , so heißt \mathcal{O} gröber als \mathcal{O}' , falls $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ gilt, d.h. falls jede \mathcal{O} -offene Menge auch \mathcal{O}' -offen ist.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathbf{K}, f, \mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ nicht nur eine Subbasis, sondern sogar eine Basis der Whitney-Topologie auf $\mathcal{C}^r(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bilden. Analog der \mathcal{C}^∞ -kompakt-offen-Topologie wird die \mathcal{C}^∞ -Whitney-Topologie definiert. Im folgenden werden wir uns häufig nur für kompakte Mannigfaltigkeiten interessieren. Für solche stimmen die \mathcal{C}^r -kompakt-offen-Topologie und die \mathcal{C}^r -Whitney-Topologie überein.

Für die Rekonstruktionssätze ist der Begriff einer Einbettung grundlegend. Deshalb wollen wir ihn hier noch einmal kurz in Erinnerung rufen.

Definition (Einbettung): Eine differenzierbare Abbildung $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt eine (differenzierbare) *Einbettung*, wenn $f(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit und $f : \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} f(\mathcal{M})$ ein Diffeomorphismus ist.

Mit $\mathcal{E}mb(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ wird die Menge aller Einbettungen von \mathcal{M} nach \mathcal{N} bezeichnet.

Ein sehr früher Einbettungssatz aus der Differentialtopologie stammt von WHITNEY (1936). Auch wenn dieser Satz in der Mathematik viel zum Verständnis von Mannigfaltigkeiten beitrug, so werden wir gleich sehen, weshalb er für die Nichtlineare Dynamik von geringen Nutzen ist und nicht als Rekonstruktionssatz bezeichnet werden kann. In einer für die Rekonstruktionstheorie geeigneten Form lautet er:

Definition (Einbettungssatz von Whitney): Sei \mathcal{M}^m eine m -dimensionale, differenzierbare und kompakte Mannigfaltigkeit, sowie $n \geq 2m + 1$ eine natürliche Zahl. Dann liegt $\mathcal{E}mb(\mathcal{M}^m, \mathbb{R}^n)$ offen und dicht in $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^m, \mathbb{R}^n)$.

Einen Beweis findet man etwa in [HIR76, Seiten 37,55].

Da \mathcal{M}^m als kompakt vorausgesetzt wurde, ist die Aussage des Satzes von der speziellen Wahl der Topologie, d.h. von der \mathcal{C}^∞ -kompakt-offen-Topologie oder der \mathcal{C}^∞ -Whitney-Topologie, unabhängig. Insbesondere ist nach dem Satz jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit in einen geeigneten euklidischen Raum einbettbar. Aber auch jede nicht-kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit läßt sich in einen euklidischen Raum hinreichend hoher Dimension einbetten (siehe [HIR76, Seite 55]). In der differentialtopologischen Kategorie sind die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten,

gleich wie abstrakt sie definiert sind, von Untermannigfaltigkeiten euklidischer Räume nicht zu unterscheiden. Es ist zu beachten, daß die Stärke des Satzes in der Globalität seiner Aussage liegt. Nach der Definition einer Mannigfaltigkeit ist die lokale Einbettbarkeit eine Trivialität.

Nun will ich obige Bemerkung begründen, weshalb der Satz von Whitney nur bedingt als eine Rekonstruktionsaussage gewertet werden kann. Um diesen Einbettungssatz zur Rekonstruktion unbekannter dynamischer Systeme verwenden zu können, muß eine differenzierbare Abbildung vom Zustandsraum in einen euklidischen Raum hinreichend großer Dimension gegeben sein. Dem Experimentator stehen hierfür Meßfunktionen zur Verfügung. Für gewöhnlich liefert ein an das System installiertes Meßgerät eine Folge reeller Zahlen, die durchaus dimensionsbehaftet sein können. Man denke beispielsweise an die Temperatur einer Flüssigkeit oder an die elektrische Spannung eines Schaltkreises. Mit mehreren solchen Anordnungen kann die gewünschte differenzierbare Abbildung zusammengesetzt werden:

$$F := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei mit $f_j : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ die skalaren Meßfunktionen bezeichnet werden.

Im allgemeinen stehen in einem typischen Meßaufbau nicht hinreichend viele Meßgrößen zur Verfügung, um den Satz von Whitney anwenden zu können. Meistens werden an einem unbekannten dynamischen System höchstens ein oder zwei Meßgrößen aufgenommen. Ist F keine Einbettung, so findet man zwar für eine Einbettung sich eignende Funktionen $\tilde{f}_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ in der „Nähe“ der Meßfunktionen f_j , diese werden aber im allgemeinen eine bestehende funktionale Abhängigkeit der Meßfunktionen untereinander nicht mehr aufweisen. Sei beispielsweise folgende funktionale Abhängigkeit zwischen f_1 und f_2 vorhanden: $f_2 = g \circ f_1$, wobei $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine feste Funktion ist, die f_1 und f_2 miteinander in Beziehung setzt, so hängen die Approximationen \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 nicht notwendig in derselben Art und Weise voneinander ab. Solche Abhängigkeiten treten in physikalischen Meßanordnungen häufig auf, man denke nur an den Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und Spannung über einem Widerstand, der durch

das Ohmsche Gesetz gegeben ist: $U = RI$. In diesem Sinne müssen also die Meßfunktionen unabhängig voneinander sein. Dies stellt sich als ein nicht minder schwieriges Problem als die zu geringe Anzahl der zur Verfügung stehenden Meßfunktionen heraus.

Durch Einführung von *Delay-Koordinaten* konnte TAKENS diese Probleme meistern.

2.3 Die Delay-Koordinatenabbildung

Typischerweise wird in einem Meßaufbau zur Untersuchung nichtlinearer Systeme eine Meßgröße zu äquidistanten⁴ Meßzeiten aufgezeichnet. Die resultierende Folge der Meßwerte heißt eine *Datenreihe* oder auch *Zeitreihe*. Die Meßgröße ordnet jedem Zustand eine reelle Zahl zu, welche wir *Meßwert* nennen wollen. Sie wird als differenzierbar angenommen und heißt dann eine *Meßfunktion*. Die Meßfunktionen stellen beobachtbare Eigenschaften, wie Temperatur oder elektrische Spannung, des Systems dar.

Ist (T, \mathcal{M}^m, ϕ) ⁵ das unbekannte dynamische System und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^m, \mathbb{R})$ die Meßfunktion, so bezeichnet $(f(\phi(n\tau, p)))_{n=0}^N \subset \mathbb{R}$ die aufgenommene Zeitreihe. Auch wenn die Wahl des *Abtastzeitintervalls* τ von großer praktischer Bedeutung ist, so werden wir ohne Einschränkung $\tau = 1$ annehmen. Dies kann stets durch eine lineare Transformation der Zeit erreicht werden. Der Zustandsraum und die Dynamik bleiben selbstverständlich invariant unter einer solchen Transformation. Auf Grund dessen werden wir uns in dieser Arbeit auch häufiger auf den Fall eines diskreten dynamischen Systems als auf den eines kontinuierlichen dynamischen Systems beschränken. Weiterhin wird oft ein solches diskretes dynamisches System mit einem Diffeomorphismus identifiziert. Folgende Definition soll zur Notation des nachfolgenden Abschnittes dienen:

Definition (Delay-Koordinatenabbildung): Sei (T, \mathcal{M}^m, ϕ) ein dynamisches System, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^m, \mathbb{R})$ eine Meßfunktion und $n \in \mathbb{N}$ eine

⁴Diese Bedingung ist allerdings keine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Takens-Theorems. Eine streng monotone Zeitfolge kann stets durch einen Diffeomorphismus in eine äquidistante Zeitfolge transformiert werden kann. Teilweise werde ich hierauf in Unterabschnitt 3.3 nochmals zurückkommen.

⁵Es sei noch einmal daran erinnert, daß für den Rest dieser Arbeit $T = \mathbb{R}$ oder $T = \mathbb{Z}$ angenommen wird.

natürliche Zahl. Dann heißt:

$$F_{(\phi, f, n)} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit}$$

$$F_{(\phi, f, n)}(p) = (f(\phi(0, p)), f(\phi(1, p)), \dots, f(\phi(n-1, p)))$$

eine *Delay-Koordinatenabbildung*.

Die Schreibweise der Delay-Koordinatenabbildung deutet an, daß F strenggenommen ein Funktional ist:

$$F : \text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$$

Einem Punkt p des Zustandsraumes wird somit durch die Delay-Koordinatenabbildung ein n -Tupel reeller Zahlen zugeordnet, dessen Komponenten die aufeinanderfolgenden Meßwerte entlang der Trajektorie von p sind. Diese Zuordnung wird durch nachfolgende Abbildung 2.1 nochmals verdeutlicht.

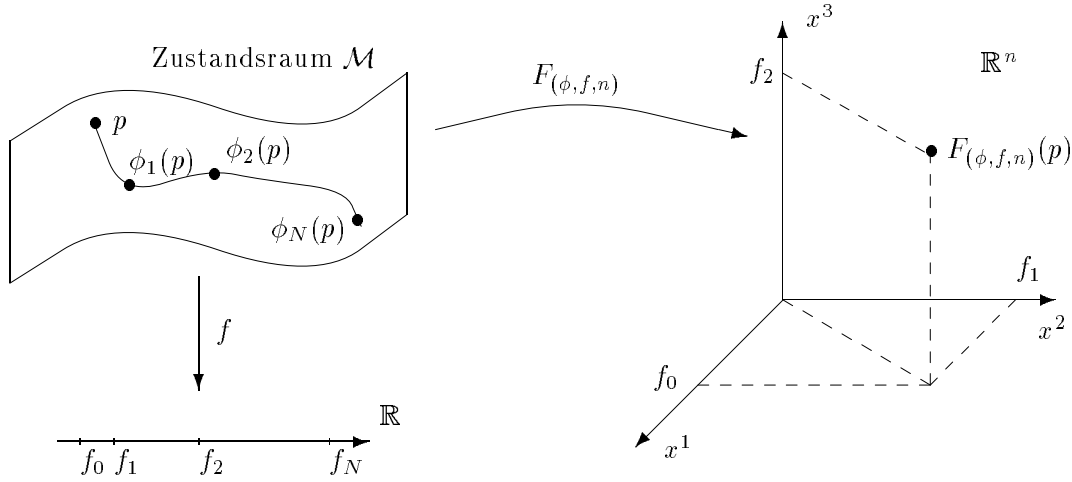


Abbildung 2.1: Die Delay-Koordinatenabbildung

Um die Notationen nicht unnötig aufzublähen, werden auch folgende Notationen verwendet:

$$\phi_t(p) := \phi(t, p)$$

$$\phi(p) := \phi(\tau, p)$$

$$\phi^j(p) = \phi(j\tau, p)$$

$$f_j := f_j(p) := f(\phi^j(p))$$

Mit diesen Abkürzungen läßt sich etwa die Delay-Koordinatenabbildung auch wie folgt schreiben: $F_{(\phi, f, n)}(p) = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$

2.4 Das Standard-Takens-Theorem

Häufig ist man an Teilmengen mit bestimmten Eigenschaften interessiert, die offen und dicht sind. Zum Beispiel ist die Teilmenge des Polynomrings $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ mit $p(x) \neq 0$ von diesem Typ. Hat man endlich viele solcher Teilmengen, so bilden offensichtlich die Elemente, die alle Eigenschaften erfüllen, ebenfalls eine offene und dichte Menge. Wie verhält es sich nun aber mit abzählbar unendlich vielen solcher Eigenschaften? Man wird wohl kaum erwarten können, daß die Menge der Punkte, die alle Eigenschaften erfüllen, offen ist. Aber für eine große Klasse von Räumen ist diese Menge noch dicht. Solche Räume haben in der Mathematik einen eigenen Namen. So findet man etwa in [ABRMAR78, Seite 16] folgende Definition:

Definition (Baire-Raum): Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt *residual*, wenn sie der Durchschnitt abzählbar vieler offener und dichter Teilmengen ist.

Ein topologischer Raum heißt ein *Baire-Raum*, falls jede residuale Teilmenge dicht ist.

Folgender Satz liefert eine sehr große Klasse Bairescher-Räume.

Satz: (a) Jeder vollständige metrische Raum ist ein Baire-Raum.
 (b) Jeder lokal-kompakte Hausdorffraum ist ein Baire-Raum.

Beweis: siehe [BRE93, Seite 58].

Da Mannigfaltigkeiten lokal-kompakte Hausdorffräume sind, sind sie insbesondere auch Baire-Räume. Ebenso ist nach obigem Satz jeder Banachraum auch ein Baire-Raum. Für kompakte Mannigfaltigkeiten sind also die in 2.2. eingeführten Abbildungsräume $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ bezüglich der Whitney-Topologie Baire-Räume.

In der Differentialtopologie hat sich für eine Eigenschaft, die für „fast alle“ Elemente eines topologischen Raumes gilt, die Bezeichnung *generisch* eingebürgert, auch wenn dies nicht die einzige Präzisierung für „fast alle“

darstellt. In Kapitel 3 werden wir eine weitere Definition für „fast alle“ kennenlernen. In [ABRMAR78, Seite 16] findet man:

Definition: Sei X ein topologischer Raum und E eine Eigenschaft, die die Elemente von X haben oder nicht haben. Dann heißt diese Eigenschaft *generisch*, falls die Menge

$$\{ x \in X \mid x \text{ erfüllt die Eigenschaft } E \}$$

eine residuale Teilmenge enthält.

Elemente eines Baireschen-Raumes können demnach beliebig genau durch Elemente approximiert werden, welche eine generische Eigenschaft erfüllen. Dies bedeutet, daß zu jedem Punkt eines Baireschen-Raumes und jeder Umgebung dieses Punktes ein Element existiert, welches die generische Eigenschaft erfüllt und in der vorgegebenen Umgebung liegt. Gerade diese Approximationsfähigkeit generischer Eigenschaften macht diese zu äußerst wertvollen Werkzeugen. TAKENS gab 1980 eine für die Nichtlineare Dynamik grundlegend gewordene generische Eigenschaft an. Für eine kompakte Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m ist nämlich die Delay-Koordinatenabbildung generisch eine Einbettung in den \mathbb{R}^{2m+1} . Da $\mathcal{D}\text{iff}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ Baire-Räume sind, liegen die Delay-Einbettungen sogar dicht in den Abbildungsräumen. Zudem sind die Delay-Einbettungen sogar offen. Wir können somit zusammenfassend notieren:

Satz (Takens): Sei \mathcal{M}^m eine kompakte und differenzierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit, sowie $n \geq 2m + 1$ eine natürliche Zahl. Dann liegt

$$\{ (\phi, f) \in \mathcal{D}\text{iff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \mid F_{(\phi, f, n)} \text{ ist eine Einbettung} \}$$

offen und dicht in $\mathcal{D}\text{iff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, wobei $F_{(\phi, f, n)}$ die Delay-Koordinatenabbildung bezeichnet.

Beweis: Siehe [TAK80].

An dieser Stelle sind einige Bemerkungen angebracht. Die erste bezieht sich auf die Begriffe „offen“ und „dicht“. Die Offenheitsaussage kann als eine *schwache Stabilitätsaussage* gewertet werden. Stört man bei einer

gegebenen Delay–Einbettung $F_{(\phi,f,n)}$ die Meßfunktion f oder die diskrete Flußabbildung ϕ , so bleibt die Delay–Koordinatenabbildung weiterhin eine Einbettung. Der Satz macht hingegen keine Aussage darüber, wie stark gestört werden darf. Im Gegensatz zu *starken Stabilitätsaussagen* existiert auch keine positive untere Schranke der zulässigen Störung.

Wie bereits oben erwähnt, ist die Eigenschaft der Dichtheit eine Approximationsaussage. Beliebige nahe an irgendeinem Paar $(\phi, f) \in \mathcal{D}\text{iff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, bestehend aus einem diskreten Fluß ϕ und einer Meßfunktion f , findet man ein Paar $(\tilde{\phi}, \tilde{f}) \in \mathcal{D}\text{iff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, welches eine Takens–Einbettung generiert.

Es ist durchaus wert zu bemerken, daß der Satz von Takens eine wirklich zu beweisende Aussage macht und keine triviale Folgerung aus dem Einbettungssatz von Whitney ist. Denn die Delay–Einbettungen sind spezielle Einbettungen und nicht jede differenzierbare Abbildung $G : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ läßt sich als eine Delay–Koordinatenabbildung darstellen. Die approximierbare Einbettung einer beliebigen Delay–Koordinatenabbildung $F_{(\phi,f,n)}$, welche aus dem Satz von Whitney folgt, ist im allgemeinen nicht mehr von der Gestalt $F_{(\tilde{\phi}, \tilde{f}, n)} = (\tilde{f}, \tilde{f} \circ \tilde{\phi}, \dots, \tilde{f} \circ \tilde{\phi}^{n-1})$. Es ist schon erstaunlich, daß diese speziellen Abbildungen generisch Einbettungen sind.

2.5 Rekonstruktion der Flußabbildung

Neben der Rekonstruktion der Zustandsmannigfaltigkeit \mathcal{M} erlaubt der Satz von Takens auch die Rekonstruktion der Flußabbildung ϕ , also der eigentlichen Dynamik. Hierbei entwickelt der Satz seine eigentliche Stärke, denn die Flußabbildung ist oftmals das wesentlich interessantere Element eines dynamischen Systems. Dies wird in diesem Abschnitt diskutiert, wobei ich im wesentlichen der Darstellung in [STA95] folge.

Weil die Delay–Koordinatenabbildung F invertierbar ist, kann eine Abbildung auf dem rekonstruierten Zustandsraum $F(\mathcal{M})$ konstruiert werden:

$$\Phi : F(\mathcal{M}) \rightarrow F(\mathcal{M}), \quad \text{wobei} \quad \Phi := F \circ \phi \circ F^{-1}.$$

Da F und ϕ Diffeomorphismen sind, ist klarerweise auch die neu konstruierte Abbildung Φ ein Diffeomorphismus und die Familie der Iterationen $(\Phi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bildet ein diskretes dynamisches System auf $F(\mathcal{M})$.

Der Zusammenhang zwischen dem originalen dynamischen System (ϕ, \mathcal{M}) und dem rekonstruierten System (Φ, \mathcal{M}') ist im folgenden kommutativen Diagramm dargestellt:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{M} \\ F_{(\phi, f, n)} \downarrow & & \downarrow F_{(\phi, f, n)} \\ \mathcal{M}' & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M}' \end{array}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{M}' := F_{(\phi, f, n)}(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{R}^n$ den rekonstruierten Raum.

Vom differentialtopologischen Standpunkt aus betrachtet sind beide dynamischen Systeme — (\mathcal{M}, ϕ) und (\mathcal{M}', Φ) — vollständig äquivalent. Sie sind mit topologischen oder differentialtopologischen Methoden nicht zu unterscheiden. Beide dynamischen Systeme werden deshalb auch als \mathcal{C}^∞ -konjugiert bezeichnet.

Die Beantwortung auf die Frage, wie denn nun die rekonstruierte Dynamik aussieht, ist denkbar einfach. Die aus einer Zeitreihe

$$\left(f_j = f(\phi^j(p)) \right)_{j \in \mathbb{N}_0}$$

konstruierten Delay-Vektoren

$$x_j := F_{(\phi, f, n)}(\phi^j(p)) = (f_j, f_{j+1}, \dots, f_{j+n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

verhalten sich unter der rekonstruierten diskreten Flußabbildung Φ wie folgt:

$$\begin{aligned} \Phi(x_j) &= (F_{(\phi, f, n)} \circ \phi \circ F_{(\phi, f, n)}^{-1})(x_j) \\ &= (F_{(\phi, f, n)} \circ \phi \circ F_{(\phi, f, n)}^{-1})(F_{(\phi, f, n)}(\phi^j(p))) \\ &= (F_{(\phi, f, n)} \circ \phi)(\phi^j(p)) \\ &= F_{(\phi, f, n)}(\phi^{j+1}(p)) \\ &= x_{j+1} \end{aligned}$$

Die Dynamik Φ auf dem rekonstruierten Zustandsraum $F_{(\phi, f, n)}(\mathcal{M}) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist demnach verblüffend einfach. Sie besteht lediglich aus der Verschiebung der Delay-Koordinaten um eine Position nach links, d.h. um einen Zeitschritt:

$$(f_j, f_{j+1}, f_{j+2}, \dots, f_{j+n-1}) \xrightarrow{\Phi} (f_{j+1}, f_{j+2}, \dots, f_{j+n})$$

In der Zeitreihe $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist bereits die gesamte Information über die diskrete Flußabbildung kodiert.

An dieser shift-Abbildung Φ setzen viele Prädiktionsalgorithmen an. Die ersten $(n-1)$ Komponenten in der Ein-Schritt-Vorhersage für die rekonstruierte Dynamik sind trivial. Lediglich die letzte Komponente muß explizit bestimmt werden. Sie ist eine differenzierbare skalare Funktion der n vorhergehenden Meßwerte $f_{j+n} = f_{j+n}(f_j, \dots, f_{j+n-1})$ und somit gilt⁶:

$$\Phi(f_j, f_{j+1}, \dots, f_{j+n-1}) = (f_{j+1}, f_{j+2}, \dots, f_{j+n}(f_j, \dots, f_{j+n-1}))$$

Die Zeitreihe und damit auch die rekonstruierte Dynamik ist durch die ersten n Werte der Zeitreihe bereits vollständig determiniert. Rekursiv lassen sich aus den n Anfangswerten alle nachfolgenden berechnen, wenn die funktionale Abhängigkeit $f_{j+n}(f_j, \dots, f_{j+n-1})$ der Meßwerte bekannt ist. Setzt man für die eigentliche Prädiktionsfunktion parameterabhängige bekannte Funktionen, wie Polynome, an, so können die Parameter und damit auch die Prädiktionsfunktion selber mit hinreichend viel Datenmaterial geschätzt werden. Einen guten Überblick hierüber findet man in [ABA93, ABA96].

Auch wenn der Orbit $(\phi^j(p))_{j \in \mathbb{Z}}$ auf einer Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m definiert ist und direkt gemessen werden kann, ist es für Prädiktionsaufgaben häufig günstiger, die Dynamik zunächst mit Hilfe der Delay-Methode zu rekonstruieren. Anschließend muß dann nur noch eine skalare Funktion, anstatt der m skalaren Funktionen der Originaldynamik geschätzt werden.

2.6 Diskussion und Folgerungen aus dem Satz von Takens

Im vorherigen Unterabschnitt sahen wir, daß der Satz von Takens eine Methode zur Rekonstruktion eines unbekannten Zustandsraumes mit Hilfe einer Meßfunktion beschreibt. Die Takens-rekonstruierte Mannigfaltigkeit ist diffeomorphie-äquivalent zum ursprünglichen Zustandsraum. Ein Teil des in 1.2. gestellten Rekonstruktionsproblems scheint somit gelöst. Die konkrete Implementierung dieses Verfahrens bedarf allerdings einiger Vorsicht und

⁶ f_{j+n} ist die durch die Delay-Einbettung $F_{(\phi, f, n)}$ auf den \mathbb{R}^n transformierte Meßfunktion und müßte strenggenommen auch symbolisch von der auf dem Zustandsraum operierenden Meßfunktion f unterschieden werden, etwa $\tilde{f} := f \circ F_{(\phi, f, n)}^{-1}$. Hiervon wird allerdings abgesehen.

Umsicht, da nicht immer alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Insbesondere sind so gut wie nie die Meßfunktion f und das dynamische System ϕ vollständig gegeben. Aus offensichtlichen Gründen können die Werte der Meßfunktion nur auf einer endlichen Teilmenge der Zustandsmannigfaltigkeit bekannt sein. Das gleiche gilt natürlich auch für das dynamische System ϕ . Ferner ist die geeignete Wahl der Dimension des Rekonstruktionsraumes für die erfolgreiche Umsetzung des Verfahrens wesentlich. Nach Voraussetzung muß diese Dimension eine Ungleichung erfüllen, die die Dimension der originalen Zustandsmannigfaltigkeit enthält. Diese ist allerdings nur in ganz speziellen Fällen bekannt. Auch stellt es sich bei der Anwendung des Rekonstruktionsverfahrens heraus, daß die Länge des Abtastzeitintervalls die „Güte“ der Rekonstruktion stark beeinflußt. Die Suche nach einer optimalen Länge des Abtastzeitintervalls ist keine Trivialität und oftmals bleibt einem nichts anderes übrig, als diese Parameter durch Ausprobieren zu bestimmen. Einen hervorragenden Überblick über diese nur sehr kurz angedeuteten Probleme und deren Lösungen bietet der Artikel und die Monographie von [ABA93, ABA96]. Teilweise werde ich auf diese Probleme in Kapitel 4 noch näher eingehen und einige Lösungsvorschläge vorstellen.

2.6.1 Weshalb benötigt man $2m + 1$ Delay-Koordinaten ?

Der Einbettungssatz von Takens bzw. Whitney kann als eine Beschränkung der Komplexität von Zustandsmannigfaltigkeiten interpretiert werden. Denn eine m -dimensionale Zustandsmannigfaltigkeit kann nur so komplex und vielschichtig sein, wie man noch eine diffeomorphe „Kopie“ von ihr in einem \mathbb{R}^{2m+1} erzeugen kann. Daß man gerade mindestens $2m + 1$ Variablen benötigt, um eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit einzubetten, mag zunächst als eine Kuriosität anmuten. Die Zahl $2m + 1$ scheint schwer verständlich zu sein. Es ist ja noch nicht einmal a priori klar, daß es überhaupt einen euklidischen Raum gibt, in dem alle m -dimensionalen Zustandsmannigfaltigkeiten einbettbar sind. Obwohl sich eine formale Begründung für diese Zahl nur aus dem Beweis des Einbettungssatzes ergeben kann, gibt es dennoch eine anschauliche geometrische Plausibilitätsüberlegung, weshalb zur Einbettung einer m -Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum wenigstens $2m + 1$ Koordinaten benötigt werden. Diese Überlegung möchte ich nun skizzieren.

Zunächst werde die kompakte m -Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m von einem end-

lichen differenzierbaren Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i) | i = 1, \dots, s\}$ überdeckt. Jede dieser Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist nun nach der Definition eines differenzierbaren Atlases eine Einbettung von U_i in den \mathbb{R}^m und damit sicherlich auch eine Einbettung in den \mathbb{R}^n für $n \geq m$. Aus diesen Kartenabbildungen wird anschließend eine globale Abbildung von der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^m in den \mathbb{R}^n konstruiert. Eine so erzeugte Abbildung definiert dann eine lokale Einbettung, die allerdings im allgemeinen noch nicht injektiv ist. Die Injektivität wird schließlich durch geeignete Deformation der konstruierten Abbildung erreicht. Es wird sich zeigen, daß dieser letzte Schritt gerade die mysteriösen $2m + 1$ Variablen erfordert. Schließlich hat man somit eine injektive Abbildung, die lokal eine Einbettung ist, auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, insgesamt also eine globale Einbettung.

Ich betone nochmals, daß diese Überlegungen keinen strengen formalen Beweis ersetzen und deshalb auch nur kurz skizziert werden können. Nun zu den Schritten im Einzelnen. Die Bilder der Kartengebiete U_i unter den Kartenabbildungen φ_i sind Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Durch geometrische Operationen, wie Verschiebungen, Drehungen, Streckungen, ..., werden diese Untermannigfaltigkeiten nun so „zusammengeklebt“, daß für jedes Paar i, j gilt:

$$\tilde{\varphi}_i(U_i \cap U_j) = \tilde{\varphi}_j(U_i \cap U_j),$$

wobei mit $\tilde{\varphi}_i$ die so modifizierten Kartenabbildungen bezeichnet werden⁷. Diese Operationen dürfen allerdings nicht die Diffeomorphie-Eigenschaft der Kartenabbildungen verletzen. Setze nun:

$$F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad F|_{U_i} = \tilde{\varphi}_i$$

F ist somit eine differenzierbare Abbildung und auf den Kartengebieten U_i sogar eine Einbettung. Allerdings ist F im allgemeinen noch nicht injektiv, denn die „zusammengeklebten“ Untermannigfaltigkeiten können einander „durchstoßen“ und schneiden. Der oben beschriebene Identifizierungsprozeß nahm hierauf keine Rücksicht. Diese Schnitte werden nun durch kleine Deformationen an den Schnittstellen entfernt.

Damit dieser Prozeß möglich wird, ist dafür Sorge zu tragen, daß sich die Untermannigfaltigkeiten *nicht* transversal schneiden. Um diese Forderung ein wenig besser verstehen zu können, wird folgendes Lemma formuliert:

⁷Genaugenommen muß sogar eine punktweise Übereinstimmung $\tilde{\varphi}_i|_{U_i \cap U_j} = \tilde{\varphi}_j|_{U_i \cap U_j}$ (für alle $i, j = 1, \dots, s$) erreicht werden, damit die zu konstruierende globale Abbildung auch wohldefiniert ist.

Lemma: Seien \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 kompakte Untermannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , die sich in \mathcal{M} transversal schneiden, d.h. es gilt folgende Transversalitätsbedingung:

$$T_p\mathcal{N}_1 + T_p\mathcal{N}_2 = T_p\mathcal{M} \quad \text{für alle } p \in \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$$

Ferner sei $f : \mathcal{N}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ eine beliebige differenzierbare Homotopie von der Inklusionsabbildung $\iota : \mathcal{N}_1 \hookrightarrow \mathcal{M}$, d.h. es gilt: $f(p, 0) = p \quad \forall p \in \mathcal{N}_1$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß sich $f(\cdot, t)$ und \mathcal{N}_2 für alle $t < \varepsilon$ transversal schneiden.

Beweis: Ist $f : \mathcal{N}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ eine differenzierbare Homotopie, so ist die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} d_{(p,t)}f(T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R}) + T_{f(p,t)}\mathcal{N}_2 &= T_{f(p,t)}\mathcal{M} \\ \forall (p, t) \in \mathcal{N}_1 \times [0, \varepsilon) \quad \text{mit } f(p, t) \in \mathcal{N}_2 \end{aligned}$$

zu zeigen. Sei zunächst $(p, t) \in f^{-1}(\mathcal{N}_2)$ fest gegeben und (U, φ) eine Untermannigfaltigkeitskarte von \mathcal{N}_2 um $f(p, t)$, d.h. $\varphi(U \cap \mathcal{N}_2) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n_2} \times 0)$, wobei $n_2 := \dim \mathcal{N}_2$.

Bezeichne mit $\tilde{\varphi} = (\varphi_{n_2+1}, \varphi_{n_2+2}, \dots, \varphi_m)$ die letzten $m - n_2$ Komponenten von φ , dann gilt lokal um $f(p, t)$: $U \cap \mathcal{N}_2 = \tilde{\varphi}^{-1}(0)$.

ZWISCHENBEHAUPTUNG:

Genau dann ist $g := \tilde{\varphi} \circ f$ eine Submersion⁸, wenn gilt:

$$d_{(p,t)}f(T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R}) + T_{f(p,t)}\mathcal{N}_2 = T_{f(p,t)}\mathcal{M}$$

BEWEIS DER ZWISCHENBEHAUPTUNG:

$d_{(p,t)}g : T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R} \rightarrow T_0\mathbb{R}^{m-n_2} \simeq \mathbb{R}^{m-n_2}$ ist genau dann surjektiv, also g submersiv, wenn gilt:

$$(d_{f(p,t)}\tilde{\varphi} \circ d_{(p,t)}f)(T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m-n_2} \quad (\text{nach der Kettenregel})$$

Da nun aber $d_{f(p,t)}\tilde{\varphi}$ bereits surjektiv ist, gilt:

$$\begin{aligned} d_{f(p,t)}\tilde{\varphi}\left(d_{(p,t)}f(T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R})\right) &= \mathbb{R}^{m-n_2} \iff \\ d_{(p,t)}f(T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R}) + \text{Kern } d_{f(p,t)}\tilde{\varphi} &= T_{f(p,t)}\mathcal{M} \end{aligned}$$

⁸Eine differenzierbare Abbildung $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt eine Submersion, falls die Tangentialabbildung $d_pg : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{g(p)}\mathcal{N}$ in jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ surjektiv ist.

Nun gilt aber: Kern $d_{f(p,t)}\tilde{\varphi} = T_{f(p,t)}\mathcal{N}_2$, d.h.

$$d_{(p,t)}f(T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R}) + T_{f(p,t)}\mathcal{N}_2 = T_{f(p,t)}\mathcal{M},$$

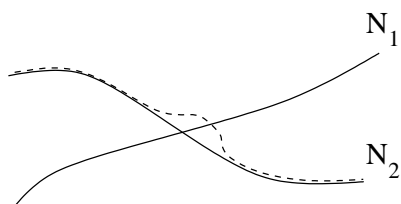
womit die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Es genügt demnach die Submersivität der differenzierbaren Homotopie g für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ zu zeigen. Da nach Voraussetzung \mathcal{N}_1 kompakt ist, gibt es zu jeder offenen Umgebung V von $\mathcal{N}_1 \times \{0\} \subset \mathcal{N}_1 \times [0, 1]$ ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft: $\mathcal{N}_1 \times [0, \varepsilon) \subset V$. Der Beweis reduziert sich somit auf folgende Behauptung: Für jedes $(p_0, 0) \in \mathcal{N}_1 \times [0, 1]$ gibt es eine offene Umgebung $V \subset \mathcal{N}_1 \times [0, 1]$ von $\mathcal{N}_1 \times \{0\}$, so daß

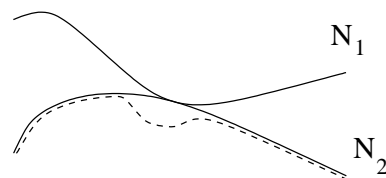
$$d_{(p,t)}g : T_p\mathcal{N}_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{m-n_2} \quad \forall (p, t) \in V$$

surjektiv ist. Da die Behauptung lokal ist, kann o.B.d.A. $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ angenommen werden⁹. Aus der Surjektivität von $d_{(p_0,0)}g = d_{(p_0,0)}\tilde{\varphi}$ folgt, daß die Jacobi-Matrix $d_{(p_0,0)}g$ eine reguläre Untermatrix enthält. Die Komponenten dieser Untermatrix sind stetige Funktionen auf $\mathcal{N}_1 \times [0, 1]$. Zusammen mit der Stetigkeit der Determinantenfunktion folgt die Existenz einer offenen Umgebung von $(p_0, 0)$, auf der diese Untermatrix als Funktion von (p, t) regulär ist. Dies zeigt die Submersivität von g auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $(p_0, 0)$, womit das Lemma bewiesen ist.

Transversale Durchschnitte sind also stabil gegenüber kleinen Deformationen (im Sinne von Homotopien). Dies wird durch folgende Abbildung nochmals verdeutlicht:



Transversale Schnitte können durch kleine Deformationen nicht aufgehoben werden



Nicht-transversale Schnitte können durch kleine Deformationen entfernt werden

⁹Dies kann lokal stets durch „Herunterholen“ mittels Karten erreicht werden.

Damit durch kleine Deformationen die Durchschnitte aufgehoben werden können – also die Injektivität der globalen Abbildung F erreicht wird –, dürfen sich die bereits euklidisch eingebetteten m -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $\varphi_i(U_i)$ im umgebenen Raum \mathbb{R}^n *nicht* transversal schneiden. Die Transversalitätsbedingung

$$T_x\varphi_i(U_i) + T_x\varphi_j(U_j) = T_x\mathbb{R}^n \quad \text{für alle } x \in \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$$

ist aus Dimensionsgründen sicher *nie* erfüllt, wenn $n > 2m$ gilt, da:

$$\begin{aligned} \dim(T_x\varphi_i(U_i) + T_x\varphi_j(U_j)) &= \dim T_x\varphi_i(U_i) + \dim T_x\varphi_j(U_j) \\ &\quad - \dim(T_x\varphi_i(U_i) \cap T_x\varphi_j(U_j)) \\ &\leq 2 \dim T_x\varphi_i(U_i) = 2m \\ &\quad \text{und } \dim T_x\mathbb{R}^n = n \end{aligned}$$

Die Transversalität ist demnach der tiefere Grund für die Dimensionsbedingung in dem Satz von Takens bzw. Whitney.

$2m + 1$ Delay-Koordinaten genügen, um generisch eine Einbettung zu erzeugen. Ich möchte nun kurz diskutieren, welcher Informationsverlust mit einer geringeren Anzahl von Delay-Koordinaten einhergeht. Eine wichtige Feststellung der Takens-Rekonstruktionsmethode ist, daß nach einer gelungenen Delay-Einbettung jeder Punkt der rekonstruierten Mannigfaltigkeit genau einem Zustandspunkt in der ursprünglichen Zustandsmannigfaltigkeit entspricht und auch jeder rekonstruierte Orbit genau einen äquivalenten Orbit im Originalsystem besitzt. Neben der Immersivität der Einbettung stellt erst diese Eigenschaft sicher, daß das rekonstruierte System genauso gut wie das Originalsystem ist. Wählt man nun die Rekonstruktionsraumdimension zu klein, so wird die Delay-Koordinatenabbildung auch generisch keine Einbettung sein und die eben formulierten Eigenschaften sind für das delay-konstruierte System nicht erfüllt. Es stellt sich nun sofort die Frage, wieviele Zustände in einem solchen Fall einem gegebenen Delay-Vektor entsprechen und wieviele „Bruderorbits“ ein delay-konstruierter Orbit besitzt. Sind diese korrespondierenden Zustände endlich, abzählbar oder gar überabzählbar viele? Wenn es denn überabzählbar viele Zustände sind, bilden diese dann überhaupt noch ein „vernünftiges“ und „handhabbares“ geometrisches Objekt, wie etwa eine Mannigfaltigkeit? Auch dürfte die Frage interessieren, welche dynamischen Eigenschaften eines delay-konstruierten Orbits, etwa dessen Fixpunktverhalten, auf sie „Bruderorbits“ zutrifft. Daß solche dynamischen Eigenschaften durch Delay-Koordinatenabbildungen stark

verfälscht werden können, soll an einem kleinen Beispiel verdeutlicht werden. Ist die Delay-Koordinatenabbildung effektiv eine Projektion des \mathbb{R}^3 auf den \mathbb{R}^2 , so wird ein entlang der Projektionsachse verlaufender Orbit im delay-konstruierten Raum ein Punkt sein. Hier würde man also fälschlicherweise von einem Fixpunkt ausgehen, obwohl der Originalorbit keineswegs ein Fixpunkt ist. Diesen Fragen wollen wir uns nun zuwenden.

Da eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit stets lokal in einen \mathbb{R}^m einbettbar ist, darf man erwarten, mit m Delay-Koordinaten noch aussagekräftige Informationen über die Zustandsmannigfaltigkeit zu erhalten. Folgender Satz soll diese Vermutung bestätigen.

Satz: Sei \mathcal{M}^m eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m und $F_{(\phi,f,m)} : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Delay-Koordinatenabbildung. Dann gibt es eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$, so daß die Fasern¹⁰ $F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^m - N$ endlich sind.

Weiterhin existieren für jedes $x \in F_{(\phi,f,m)}(\mathcal{M}) - N$ paarweise disjunkte offene Umgebungen $U_j \subseteq \mathcal{M}$ von den Punkten der Faser und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von x , so daß

$$F_{(\phi,f,m)|U_j} : U_j \rightarrow V$$

für jedes j ein Diffeomorphismus ist.

Beweis: Nach dem Satz von Sard (siehe [BRJ90, Seite 58]) ist die Menge der kritischen Werte¹¹ von $F_{(\phi,f,m)}$ eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^m$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^m - N$ ist demnach regulärer Wert der differenzierbaren Abbildung $F_{(\phi,f,m)}$. Die Fasern $F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)$ sind folglich gemäß des Satzes vom regulären Wert (siehe [BRJ90, Seite 51]) Untermannigfaltigkeiten von \mathcal{M} der Codimension m , d.h. 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten.

$F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)$ ist also lokal homöomorph zu \mathbb{R}^0 , d.h. zu einem Punkt. Demnach sind die ein-elementigen Teilmengen von $F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)$ offen und

$$F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x) = \bigcup_{p \in F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)} \{p\}$$

¹⁰Unter der Faser einer Abbildung soll das Urbild eines Punktes aus dem Wertebereich dieser Abbildung verstanden werden.

¹¹Ein Punkt $q \in \mathcal{N}$ heißt kritischer Wert einer differenzierbaren Abbildung $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, falls es ein $p \in f^{-1}(q)$ mit $\text{rg}_p f < \dim \mathcal{N}$ gibt.

ist eine offene Überdeckung von $F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)$. Da $F_{(\phi,f,m)}$ stetig ist und $\{x\}$ abgeschlossen in \mathbb{R}^m (in Hausdorffräumen sind die Punkte stets abgeschlossen), ist auch $F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)$ abgeschlossen in \mathcal{M}^m und somit kompakt, da \mathcal{M} kompakt ist. Nach der Definition der Überdeckungskompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung von $\{p \mid p \in F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)\}$, also ist $F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x)$ endlich.

Sei nun $x \in F_{(\phi,f,m)}(\mathcal{M}) - N$, so gibt es nach dem eben gezeigten Teil des Beweises k paarweise verschiedene Punkte p_1, \dots, p_k mit:

$$F_{(\phi,f,m)}^{-1}(x) = \{p_1, \dots, p_k\}$$

Die Tangentialabbildungen $d_{p_j}F_{(\phi,f,m)}$ sind dann lineare Isomorphismen, da die p_j reguläre Punkte sind und die Tangentialräume an \mathcal{M}^m und die an \mathbb{R}^m dieselbe Dimension haben. Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit differenzierbarer Abbildungen (siehe [BRJ90, Seite 45]) liefert nun offene Umgebungen $U_j \subseteq \mathcal{M}^m$, $V_j \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $p_j \in U_j$, $x \in V_j$, so daß

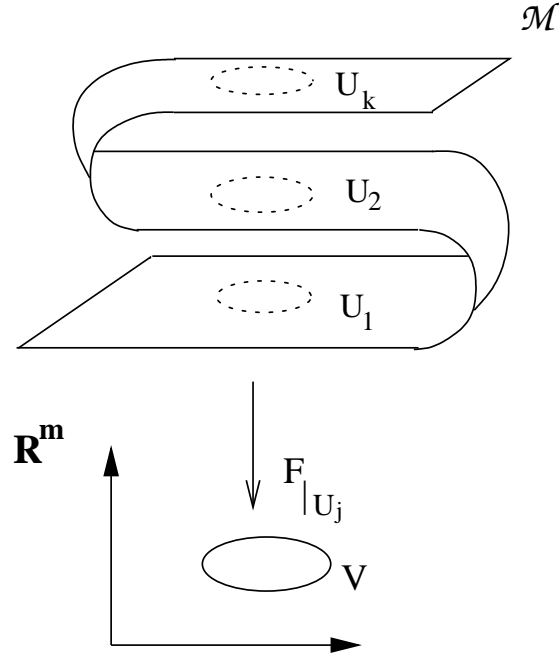
$$F_{(\phi,f,m)}|_{U_j} : U_j \longrightarrow V_j$$

Diffeomorphismen sind. Durch Verkleinern der V_j , darf o.B.d.A. angenommen werden: $V_j = V_i := V \ \forall j, i = 1, \dots, k$. Ebenso können aufgrund der Hausdorff-Eigenschaft die U_j als disjunkt angenommen werden, womit die Behauptung gezeigt ist.

Wie obige Skizze andeutet, kann man sich den Zustandsraum über dem Rekonstruktionsraum „gefaltet“ vorstellen. Die Delay-Koordinatenabbildung ist dann eine lokale Projektion auf den Rekonstruktionsraum. Eine anschauliche Interpretation des vorherigen Satzes besagt, daß jede der aus den Falten „ausgestanzten“ Umgebungen U_j diffeomorph zur Umgebung V im Rekonstruktionsraum ist. Die Umkehrabbildungen $F_{(\phi,f,m)}^{-1}|_{U_j}$ bilden V auf jeweils nur eine der untereinander diffeomorphen Umgebungen U_j ab. Anschaulich gesprochen rekonstruiert eine solche Delay-Koordinatenabbildung nur einen Bruchteil der Zustandsmannigfaltigkeit, nämlich eine „Falte“.

Die Mächtigkeit der Fasern von regulären Delay-Vektoren

$$x = (f_j, f_{j+1} \dots, f_{j+m-1})$$



ist lokal konstant. Für eine submersive Delay-Abbildung $F_{(\phi, f, m)}$, d.h. für eine solche, mit leerer Lebesgue-Nullmenge N , und einer zusammenhängenden Zustandsmannigfaltigkeit, ist die Mächtigkeit der Fasern von Delay-Vektoren sogar global konstant. Ist die Mächtigkeit der Fasern in einem solchen Fall k , so „sieht“ man mit der Delay-Koordinatenabbildung gewissermaßen nur den „ k -ten Bruchteil“ der Zustandsmannigfaltigkeit. Der Informationsverlust aufgrund der zu klein gewählten Rekonstruktionsraumdimension ist demnach nicht allzu schwerwiegend. Insbesondere ist zu erwarten, mit einer solchen Delay-Koordinatenabbildung die Mannigfaltigkeitsdimension noch korrekt „messen“ zu können. Ist die Rekonstruktionsraumdimension nicht kleiner als die Zustandsraumdimension, so sind gemäß des Satzes alle lokalen diffeomorphie-invarianten Eigenschaften des delay-konstruierten Raumes¹² und auch der delay-konstruierten Orbits bis auf eine Menge vom Maß Null gleich denen, des Originalsystems. Als ein Beispiel möchte ich die oben formulierte Frage nach dem Fixpunktverhalten aufgreifen. Ist ein Delay-Vektor ein Fixpunkt für die delay-konstruierte Flußabbildung, so darf man fast immer (im Sinne der Lebesgue-Nullmengen-

¹²Ich verwende hier nur den allgemeinen Begriff eines Raumes, da eine spezielle Struktur, wie die einer Mannigfaltigkeit, auf der Bildmenge der Delay-Koordinatenabbildung im allgemeinen nicht existiert.

Definition) schließen, daß dies auch für die endlich vielen korrespondierenden Zustände der Originaldynamik gilt. Ebenso ist das Stabilitätsverhalten eines solchen Fixpunktes gleich dem der Originaldynamik.

Ich möchte abschließend noch erwähnen, daß der Informationsverlust für Rekonstruktionsraumdimensionen n , die echt kleiner als die Zustandsraumdimension m sind, zu groß ist, um aussagekräftige Größen aus dem delay-konstruierten System extrahieren zu können. Die Fasern der Delay-Koordinatenabbildung sind in einem solchen Fall fast immer Untermannigfaltigkeiten der Dimension $m-n$, insbesondere enthalten sie also überabzählbar viele Zustände.

2.6.2 „Optimalität“ des Satzes von Takens

Trotz der enormen Aussagekraft des Satzes von Takens stellt sich doch natürlicherweise die Frage, ob es eine Modifikation des Satzes gibt, in dem die Eigenschaft „generisch“ durch die Eigenschaft „immer“ ersetzt werden kann. Der Anwender der Takens-Rekonstruktionsmethode ist mehr daran interessiert, ob seine konkret gegebene Delay-Koordinatenabbildung eine Einbettung definiert, als daran, ob die Delay-Koordinateneinbettungen eine residuale Teilmenge im Raum aller Einbettungen bilden. Also liegt der Wunsch nahe, einen Einbettungssatz für Delay-Koordinatenabbildungen zu finden, der zwar unter Umständen restriktivere Voraussetzungen an das dynamische System und die Meßfunktion stellt als im Satz von Takens gefordert sind, dafür aber in seiner Aussagekraft schärfer als dieser ist. Die Aussage eines solchen Satzes soll gewährleisten, daß die Delay-Koordinatenabbildung, die aus einem dynamischen System und einer Meßfunktion generiert wird, welche die Voraussetzungen eines solchen Satzes erfüllen, stets eine Einbettung ist. Ich werde im folgenden versuchen zu begründen, weshalb ein solches Anliegen an der praktischen Umsetzung scheitern wird.

Zunächst wird die Situation betrachtet, in der eine beliebige Meßfunktion gegeben ist. Zu dieser wird dann ein diskretes dynamisches System konstruiert, so daß die aus der Meßfunktion und diesem dynamischen System erzeugte Delay-Koordinatenabbildung keine Einbettung, ja noch nicht einmal injektiv ist. Selbst mit einer noch so „guten“ Meßanordnung kann der Anwender das Pech haben, sein konkret gegebenes dynamisches System nicht eindeutig rekonstruieren zu können. Wie der folgende Satz zeigt, kann

in einem solchen Fall auch durch Erhöhung der Rekonstruktionsraumdimension die „Güte“ der Rekonstruktionsabbildung nicht verbessert werden.

Satz: Sei \mathcal{M}^m eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim \mathcal{M} = m \geq 2$. Ferner sei $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^m, \mathbb{R})$ eine Meßfunktion und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es einen Diffeomorphismus

$$\phi : \mathcal{M}^m \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}^m \quad \text{mit} \quad \phi \neq \text{id}_{\mathcal{M}},$$

so daß die Delay-Koordinatenabbildung $F_{(\phi, f, n)} : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nicht injektiv, insbesondere also keine Einbettung ist.

Für den Beweis des Satzes wird folgender Hilfssatz benötigt.

Hilfssatz: Sei \mathcal{M}^m eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Dimension m größer als Eins. Ferner seien $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{M}^m$ und $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{M}^m$ jeweils paarweise verschiedene Punkte. Dann gibt es einen Diffeomorphismus $g : \mathcal{M}^m \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}^m$ mit $g(p_j) = q_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion nach n geführt.

INDUKTIONSANFANG $n = 1$: Definiere folgende Relation auf \mathcal{M}^m :

$$p \sim q \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt einen Diffeomorphismus} \\ h : \mathcal{M}^m \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}^m \quad \text{mit} \quad h(p) = q$$

Offenbar ist \sim eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{M} . Es wird nun gezeigt, daß die Äquivalenzklassen offen sind. Dann folgt die Behauptung aus dem Zusammenhang von \mathcal{M}^m , da es somit nur eine Äquivalenzklasse geben kann.

Sei p Repräsentant einer Äquivalenzklasse, so findet man eine Karte (U, φ) um p mit $\varphi(p) = 0$. Es genügt nun zu zeigen, daß es zu jedem beliebigen $x_0 \in \varphi(U)$ hinreichend nahe an 0 einen Diffeomorphismus $g : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathcal{M}^m$ gibt, der bzgl. der Karte (U, φ) die Null $0 \in \mathbb{R}^m$ auf x_0 abbildet. Sei $\varepsilon > 0$ zunächst beliebig, so setze:

$$\alpha(x) = \frac{\rho(\varepsilon - \|x\|)}{\rho(\|x\| - \varepsilon/2) + \rho(\varepsilon - \|x\|)} \quad \text{mit} \quad \rho(t) := \begin{cases} e^{-t^{-2}} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Dies definiert eine differenzierbare Funktion $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ mit $\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in B_{\varepsilon/2}(0)$ und kompakten Träger $\text{Tr } \alpha = \overline{B_\varepsilon}(0)$.

Da Drehungen im \mathbb{R}^m Vektorraum-Automorphismen, insbesondere also Diffeomorphismen sind, darf o.B.d.A. $x_0 = (x_0^{(1)}, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ angenommen werden. Definiere nun:

$$\tilde{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} : (x, y) \longmapsto (x + \alpha(x, y) x_0^{(1)}, y)$$

Offenbar ist \tilde{g} differenzierbar mit $\tilde{g}(0, 0) = (x_0^{(1)}, 0) = x_0$. Es bleibt also noch zu zeigen, daß \tilde{g} lokal um 0 ein Diffeomorphismus ist. Für die Determinante der Jacobi-Matrix gilt:

$$\begin{aligned} \det d_{(0,0)} \tilde{g} &= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial}{\partial x} \alpha(0, 0) \cdot x_0^{(1)} & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \frac{\partial}{\partial x} \alpha(0, 0) \cdot x_0^{(1)} = 1, \end{aligned}$$

da $\alpha|_{B_{\varepsilon/2}(0)} \equiv 1$. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit (siehe [BRJ90, Seite 45]) gibt es somit eine offene Umgebung U' von 0, so daß $\tilde{g}|_{U'}$ ein Diffeomorphismus ist. Wähle nun $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq U'$.

$$g := \begin{cases} \text{id} & \text{auf } \mathcal{M} - \varphi^{-1}(U') \\ \varphi^{-1} \circ \tilde{g} \circ \varphi & \text{auf } \varphi^{-1}(U') \end{cases}$$

erfüllt schließlich die Behauptung für $n = 1$.

INDUKTIONSSCHRITT $n - 1 \rightarrow n$: Aus dem Zusammenhang von \mathcal{M} und $\dim \mathcal{M} \geq 2$ folgt der Zusammenhang von $\mathcal{M} - \{p_n, q_n\}$. Die Induktionsvoraussetzung liefert nun einen Diffeomorphismus

$$h : \mathcal{M} - \{p_n, q_n\} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M} - \{p_n, q_n\}$$

mit $h(p_j) = q_j \quad \forall j = 1, \dots, n - 1$. Ferner darf gemäß des Beweises des Induktionsanfangs als Induktionsvoraussetzung angenommen werden, daß h auf einer Umgebung von p_n und q_n die Identität ist und somit auf ganz \mathcal{M} diffeomorph fortgesetzt werden kann. Ebenso erhält man einen Diffeomorphismus $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ mit $f(p_n) = q_n$ durch Anwendung des Induktionsanfangs auf die zusammenhängende

Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \{p_1, \dots, p_{n-1}, q_1, \dots, q_{n-1}\}$. Der Diffeomorphismus $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ mit $g := f \circ h$ leistet nun das Gewünschte.

Beweis des Satzes: O.B.d.A. darf \mathcal{M} als zusammenhängend angenommen werden, ansonsten wird der Beweis auf einer Zusammenhangskomponente von \mathcal{M} durchgeführt. Weiterhin darf angenommen werden, daß f nicht konstant ist (ansonsten ist die Aussage klar). Es gibt somit Zahlen $a < b$ mit $(a, b) \subseteq f(\mathcal{M})$. Nach dem Satz von Sard (siehe [BRJ90, Seite 58]) findet man n reguläre Werte von $f : m_1, \dots, m_n \in (a, b)$. Gemäß des Satzes vom regulären Wert (siehe [BRJ90, Seite 51]) sind die Fasern dieser Werte unter der Meßfunktion f Untermannigfaltigkeiten von \mathcal{M} der Codimension 1. Wegen $\dim \mathcal{M} \geq 2$, findet man folglich stets verschiedene Punkte $p_j, q_j \in f^{-1}(m_j)$ für $j = 1, \dots, n$. Obiger Hilfssatz stellt nun die Existenz eines Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{M} \quad \text{mit} \\ \phi(p_j) &= p_{j+1} \quad \text{und} \quad \phi(q_j) = q_{j+1} \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

sicher. Also gilt für die Delay-Koordinatenabbildung:

$$\begin{aligned} F_{(\phi, f, n)}(p_1) &= (f(p_1), f(\phi(p_1)), \dots, f(\phi^{n-1}(p_1))) \\ &= (m_1, m_2, \dots, m_n) \\ &= (f(q_1), f(\phi(q_1)), \dots, f(\phi^{n-1}(q_1))) \\ &= F_{(\phi, f, n)}(q_1) \quad \text{mit } p_1 \neq q_1, \end{aligned}$$

d.h. $F_{(\phi, f, n)}$ ist nicht injektiv, womit der Beweis beendet ist.

Entgegen dem eben beschriebenen Fall, in dem gezeigt wurde, daß es zu jeder Meßfunktion dynamische Systeme gibt, welche nicht mit der Delay-Methode rekonstruierbar sind, soll jetzt die Situation näher beleuchtet werden, in der das dynamische System fest vorgegeben ist. Zunächst möchte ich aber die Eigenschaften von Meßfunktionen untersuchen. Insbesondere interessiert hier die Frage, welche Minimalanforderungen an eine „physikalische“ Meßfunktion zu stellen sind. Da die Delay-Koordinatenabbildung injektiv ist, falls die Meßfunktion diese Eigenschaft besitzt, drängt sich sofort die Frage auf, unter welchen Voraussetzungen denn eine skalare Meßfunktion überhaupt injektiv ist. Zur Beantwortung dieser Frage dient folgendes kleine Lemma.

Lemma: Sei \mathcal{M} eine kompakte und differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $\dim \mathcal{M} \geq 2$. Dann gilt:

- (a) Es gibt keine stetige und injektive Meßfunktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) Es gibt keine stetige und surjektive Meßfunktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis: (a) Angenommen es gäbe eine stetige und injektive Meßfunktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann wäre $f : \mathcal{M} \rightarrow f(\mathcal{M})$ eine stetige und bijektive Abbildung auf einem Kompaktum, also ein Homöomorphismus. Wegen $\dim f(\mathcal{M}) \leq 1$ und $\dim \mathcal{M} \geq 2$, erzeugt der Satz von der Invarianz der Dimension lokal euklidischer Räume (siehe [STOZIE88, Seite 273]) einen Widerspruch.

(b) Angenommen es gäbe eine stetige und surjektive Meßfunktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, dann wäre $f(\mathcal{M}) = \mathbb{R}$ kompakt, denn stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt. Widerspruch.

Auch wenn die Aussage des Lemmas einleuchtend ist — denn wer zweifelt ernsthaft daran, daß es unmöglich ist, ein hochdimensionales geometrisches Objekt stetig und injektiv auf ein ein-dimensionales Objekt abzubilden? —, so ist sie keineswegs trivial. Im Beweis geht wesentlich der von BROUWER bewiesene Satz von der Invarianz der Dimension ein und dieser ist alles andere als trivial. Der Beweis von Teil (a) des Lemmas zeigt ferner, daß es unter obigen Voraussetzungen noch nicht einmal eine stetige und lokal-injektive Meßfunktion geben kann. Ebenso leicht sieht man, daß Meßfunktionen auf Zustandsmannigfaltigkeiten, deren Dimension größer als Eins sind, *niemals* immersiv sein können. Die Tangentialabbildungen sind sogar in keinem Zustandspunkt injektiv, denn sonst würde gelten:

$$\operatorname{rg}_p f \geq 2, \quad \text{wegen } \operatorname{rg}_p f = \dim \mathcal{M}$$

$$\text{im Widerspruch zu: } \operatorname{rg}_p f = \dim d_p f(T_p \mathcal{M}) \leq \dim T_{f(p)} \mathbb{R} \leq 1.$$

Weiterhin bleibt festzuhalten, daß der Meßwertebereich einer stetigen Meßfunktion auf einem kompakten und zusammenhängenden Zustandsraum ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall ist. Denn der Zusammenhang und die Kompaktheit sind invariant unter einer stetigen Meßfunktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, also ist $f(\mathcal{M})$ zusammenhängend und kompakt, d.h. ein kompaktes Intervall: $f(\mathcal{M}) = [m_1, m_2]$. Auch auf nicht-kompakten Zustandsräumen bleibt ein beschränkter Meßwertebereich eine vernünftige An-

nahme an eine „physikalische“ Meßfunktion. Die Anzeige der Meßwerte eines Meßgerätes ist stets auf einen beschränkten Bereich eingengt. Auch sind Meßgeräte oftmals nur innerhalb eines bestimmten Intervalls geeicht. Sollte der Meßwertebereich eines Meßgerätes dennoch unbeschränkt sein, so kann man diesen stets auf einen beschränkten Bereich transformieren. Dem Experimentator stehen also von vornherein nur Meßfunktionen mit beschränkten Meßwertebereich zur Verfügung. Ferner sollte eine „physikalische“ Meßfunktion stetig, wenn nicht gar differenzierbar sein. Dieser Punkt dürfte sich wohl als der problematischste erweisen. Es gibt eine große Klasse an Beispielen, die zeigt, daß realistische Meßanordnungen im allgemeinen nur stückweise stetige bzw. stückweise differenzierbare Meßfunktionen liefern. Beispielsweise gehören digitale Meßinstrumente zu diesem Typ. Auch Meßanordnungen, die Analog–Digital–Wandler enthalten, produzieren Meßfunktionen mit „Sprüngen“. Trotz dieser Einwände wollen wir eine „physikalische“ Meßfunktion weiterhin als wenigstens stetig voraussetzen. Die Unstetigkeitsstellen kann man sich notfalls stetig verbunden denken. Wesentlich unproblematischer läßt sich die Erweiterung der Stetigkeit auf die Differenzierbarkeitsforderung „physikalischer“ Meßfunktionen erreichen. Auf kompakten Hausdorffräumen läßt sich nämlich nach dem Satz von Stone–Weierstraß (siehe [WER97, Seite 354]) jede stetige Funktion beliebig genau durch unendlich oft differenzierbare Funktionen approximieren. Schließlich wird man auch nur solche Meßfunktionen als „physikalisch“ bezeichnen wollen, deren Meßwerte über eine gewisse Variabilität verfügen. Konstante oder lokal–konstante Meßfunktionen sind einfach zu uninformativ, um sie verwenden zu können.

Im nächsten Satz kann nun gezeigt werden, daß es zu jedem gegebenen dynamischen System stets eine „physikalische“ Meßfunktion gibt, mit der die Zustandsmannigfaltigkeit nicht rekonstruierbar ist. Auch kann hier die „Güte“ der Rekonstruktionsabbildung nicht durch Erhöhung der Rekonstruktionsraumdimension verbessert werden.

Satz: Sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\phi : \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}$ ein Diffeomorphismus, sowie $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es eine nicht–konstante Meßfunktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, so daß die Delay–Koordinatenabbildung $F_{(\phi, f, n)} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nicht injektiv, insbesondere also keine Einbettung ist.

Für den Beweis wird der Whitneysche Nullstellensatz benötigt, der hier

deshalb kurz erwähnt werden soll.

Satz (Whitneyscher Nullstellensatz): Jede abgeschlossene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist Nullstellenmenge einer differenzierbaren Funktion.

Beweis: Siehe [BRJ90, Seiten 153,154].

Beweis obigen Satzes: Wähle $p, q \in \mathcal{M}$ mit $p \neq q$. Dann ist

$$A = \{p, q, \phi(p), \phi(q), \dots, \phi^{n-1}(p), \phi^{n-1}(q)\}$$

abgeschlossen in \mathcal{M} , da \mathcal{M} hausdorffsch ist. Nach dem Whitneyschen Nullstellensatz gibt es somit eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ mit $A = f^{-1}(0)$. Also gilt für die Delay-Koordinatenabbildung:

$$\begin{aligned} F_{(\phi, f, n)}(p) &= (f(p), f(\phi(p)), \dots, f(\phi^{n-1}(p))) \\ &= (0, 0, \dots, 0) \\ &= (f(q), f(\phi(q)), \dots, f(\phi^{n-1}(q))) \\ &= F_{(\phi, f, n)}(q) \end{aligned}$$

d.h. $F_{(\phi, f, n)}$ ist nicht injektiv, womit die Behauptung gezeigt ist.

Insgesamt läßt sich schließlich festhalten: Zu jeder „physikalischen“ Meßfunktion gibt es ein diskretes dynamisches System, welches mit dieser Meßfunktion nicht vollständig beobachtbar ist. Umgekehrt gibt es zu jedem diskreten dynamischen System eine Meßfunktion, die den oben vorgeschlagenen physikalischen Minimalanforderungen genügt, mit der die Zustandsmannigfaltigkeit aber nicht rekonstruierbar ist. In diesem Sinne können also keine expliziten Voraussetzungen formuliert werden, so daß die Delay-Koordinatenabbildungen stets Einbettungen sind. Weiterhin zeigten diese Sätze, daß es sehr wohl Delay-Koordinatenabbildungen gibt, die keine Einbettungen sind. Ein blindes Vertrauen bei der Analyse delay-rekonstruierter Daten ist trotz der enormen Leistungsstärke der Delay-Rekonstruktionsmethode leider nicht möglich. Damit scheinen generische Aussagen über die Rekonstruktion dynamischer Systeme das „Beste“ zu sein, was man erwarten darf. Dies ist glücklicherweise aber nicht ganz richtig. 1991 veröffentlichten SAUER, YORK und CASDAGLI [SAU91] eine Arbeit, in der sie zeigten, daß die Klasse der Delay-Koordinateneinbettungen noch wesentlich größer ist, als von Takens bewiesen wurde. Diese Ergebnisse werden im nächsten Kapitel vorgestellt.

2.6.3 Der Satz von Huke

Im vorherigen Unterabschnitt wurde gezeigt, daß es zu jedem dynamischen System neben den konstanten Meßfunktionen noch weitere gibt, für die die Delay-Koordinatenabbildung keine Einbettungen sind. Nachfolgender Satz von HUKÉ, auf den STARK in [STA95] hinweist, macht nun eine Aussage über solche Meßfunktionen, welche Delay-Einbettungen erzeugen.

Satz: Sei \mathcal{M}^m eine kompakte m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\phi \in \text{Diff}(\mathcal{M}^m, \mathcal{M}^m)$ habe nur endlich viele periodischen Orbits mit Periode $< n$. Ferner seien die Eigenwerte der Linearisierung jeder dieser periodischen Orbits verschieden. Ist zudem $n \geq 2m + 1$, so gibt es eine offene und dichte Teilmenge $A \subset \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^m, \mathbb{R})$, so daß für alle $f \in A$ gilt:

$$F_{(\phi, f, n)} \in \mathcal{Emb}(\mathcal{M}^m, \mathbb{R}^n)$$

2.7 Implikationen der Endlichkeit der aufgenommenen Datenreihe

Bedingt durch die beschränkte Zeit zur Durchführung eines Experimentes kann der Anwender nur endlich viele Punkte des Zustandsraumes „abtasten“. Auch wenn der Experimentator unendlich viel Zeit für die Aufnahme seiner Daten hätte, so könnte er dennoch nicht alle Punkte der Zustandsmannigfaltigkeit „abtasten“. Die Aufnahme der einzelnen Daten erfolgt in diskreten Zeitschritten, was zur Folge hat, daß man höchstens eine abzählbare Teilmenge der Zustandsmannigfaltigkeit „abtasten“ kann, *niemals* aber die überabzählbare Mannigfaltigkeit selber¹³. Aus diesem Grund sollten die aus der Endlichkeit der aufgenommenen Meßreihe resultierenden Probleme ernst genommen werden.

Zunächst stellt sich die Frage, was unter einer Realisation einer endlichen Teilmenge des Zustandsraumes zu verstehen ist. Gemäß unserer allgemeinen Definition aus 1.2 wird eine bijektive und strukturerhaltende Abbildung eine Realisation genannt. Da endliche Teilmengen von Mannigfaltigkeiten keinerlei Struktur tragen, würde sich eine Realisation einer endlichen Menge auf eine bijektive Abbildung reduzieren. Solche Abbildungen sind allerdings

¹³Der uninteressante Fall einer 0-dimensionalen Zustandsmannigfaltigkeit, d.h. eines diskreten Raumes, sei hier ausgeschlossen.

vom Gesichtspunkt der Nichtlinearen Dynamik betrachtet, äußerst informationsarm. Da eigentlich auch der gesamte Zustandsraum realisiert werden soll und nicht bloß eine endliche Teilmenge von diesem, möchte ich eine ergänzende Definition vorschlagen.

Definition (Endliche Realisation): Eine *endliche Realisation* ist eine Abbildung von einer endlichen Teilmenge des Zustandsraumes in einen geeigneten Raum, die sich zu einer Realisation auf dem gesamten Zustandsraum, im Sinne der Definition aus 1.2 fortsetzen läßt.

Trägt der Zustandsraum \mathcal{M} eine differenzierbare Struktur, so ist demnach $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine endliche Realisation auf einer endlichen Teilmenge $X \subset \mathcal{M}$, falls es eine euklidische Einbettung

$$\tilde{G} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \tilde{G}|_X = G$$

gibt.

Nun wollen wir Antworten auf die Frage erörtern, ob es nachprüfbar Kriterien für eine solche Fortsetzbarkeit einer endlichen Abbildung gibt und wenn ja, wie diese lauten. Für die Praxis ist diese Frage gleichwertig mit: Welche Bedingungen muß eine endliche Zeitreihe erfüllen, damit aus ihr eine endliche Realisation generiert werden kann? Offensichtlich ist die Injektivität für eine endliche Realisation notwendig. Der nächste Satz zeigt nun, daß die Injektivität einer Abbildung $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ von einer endlichen Teilmenge der Zustandsmannigfaltigkeit \mathcal{M} auch hinreichend für eine endliche Realisation ist, falls die Rekonstruktionsraumdimension n hinreichend groß gewählt wurde.

Satz: Sei \mathcal{M} eine kompakte, m -dimensionale und differenzierbare Mannigfaltigkeit, sowie $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{M}$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils paarweise verschieden. Dann gibt es eine Einbettung

$$G : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad G(p_j) = x_j \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

falls $n \geq 2m + 1$ gilt.

Beweis: Da \mathcal{M} und \mathbb{R}^m hausdorffsch sind, findet man Karten $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=1}^k$ der Mannigfaltigkeit mit folgenden Eigenschaften:

$$p_j \in U_j, \quad \varphi(p_j) = x_j \quad \forall j = 1, \dots, k \quad \text{sowie} \\ U_1 \cap U_2 \cdots \cap U_k = \emptyset \quad \text{und} \quad \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \cdots \cap \varphi(U_k) = \emptyset$$

Setze nun $U_{k+1} := \mathcal{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$. Dann ist $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=1}^{k+1}$ eine offene Überdeckung von \mathcal{M} , zu der eine untergeordnete differenzierbare Zerlegung der Eins $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$ existiert (siehe [HIR76, Seite 43]). O.B.d.A kann hierbei für die Träger $\text{Tr } \tau_j \subseteq U_j \quad \forall j = 1, \dots, k$ angenommen werden. Ferner darf vorausgesetzt werden, daß es für jedes $j = 1, \dots, k$ eine offene Umgebung $V_j \subseteq \text{Tr } \tau_j$ von p_j mit $\tau_j|_{V_j} \equiv 1$ gibt. Setze nun:

$$g_j(p) := \begin{cases} (\tau_j(p) \varphi_j(p), 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} & \text{für } p \in U_j \\ 0 \in \mathbb{R}^n & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $j = 1, \dots, k$.

Dann sind die g_j injektive Immersionen auf den hinreichend kleinen Umgebungen V_j , da φ_j Diffeomorphismen sind und $\tau_j|_{V_j} \equiv 1$. Definiere nun:

$$g := \sum_{j=1}^k g_j$$

Dann ist $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar und wegen $\varphi(U_i) \cap \varphi(U_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j$ auf $V := V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ eine injektive Immersion. Für den weiteren Verlauf des Beweises wird ein Satz aus der Differentialtopologie benötigt, den man in [BRJ90, Seite 72] findet:

SATZ: Sei $g : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung und $n \geq 2m + 1$. Sei $A \subseteq \mathcal{M}^m$ abgeschlossen und die Einschränkung von g auf eine Umgebung U von A sei eine injektive Immersion. Dann gibt es beliebig nahe an g eine injektive Immersion $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $G|_A = g|_A$.

Da nun $\{p_1, \dots, p_k\}$ abgeschlossen und g auf der Umgebung V von $\{p_1, \dots, p_k\}$ eine injektive Immersion ist, gibt es nach diesem Satz eine injektive Immersion $G : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf ganz \mathcal{M} mit:

$$G(p_j) = g(p_j) = g_j(p_j) = \varphi_j(p_j) = x_j \quad \forall 1, \dots, k$$

Aus der Kompaktheit von \mathcal{M} folgt, daß G sogar eine Einbettung ist.

Der Beweis des Satzes läßt sich auch auf nicht kompakte Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Ebenso kann die Beweismethode auch auf die Interpolation einer nicht-endlichen, aber dennoch wenigstens diskreten Teilmenge, durch eine Einbettung angewandt werden.

Auch wenn die endliche Abbildung $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ in obigen Satz nicht weiter spezifiziert wurde, so wird für diese in der Nichtlinearen Datenanalyse häufig die Delay-Koordinatenabbildung $F_{(\phi, f, n)}$ gewählt. In diesem Fall läßt sich unter Umständen sogar direkt anhand der gemessenen Daten entscheiden, ob diese Abbildung eine endliche Realisation ist. Kann etwa durch erweiterte Kenntnisse des zu realisierenden Systems oder der Meßapparatur ausgeschlossen werden, daß ein Zustandspunkt mehrmals während einer Messung von der Meßfunktion f „abgetastet“ wurde, so ist die Delay-Koordinatenabbildung $F_{(\phi, f, n)}$ genau dann eine endliche Realisation, wenn die konstruierten Delay-Vektoren paarweise verschieden sind. In der Zeitreihe dürfen sich n aufeinanderfolgende Werte nicht wiederholen. Liegt der Anfangszustand der Zeitreihe aber auf einem periodischen Orbit, dessen Periode kleiner als die Hälfte der Länge der Zeitreihe ist, so werden sich n aufeinanderfolgende Meßwerte wiederholen¹⁴, ohne daß notwendigerweise die Nicht-Injektivität von $F_{(\phi, f, n)}$ gefolgert werden darf. Betrachte zum besseren Verständnis folgendes Beispiel:

Beispiel: Ist $(f_j = f(\phi^j(p)))_{j=0}^{104}$ die aufgenommene Zeitreihe mit Periode 60, d.h. $f_j = f_{j+60}$. Ferner seien die Meßwerte f_0, f_1, \dots, f_{59} paarweise verschieden. Wählt man als Rekonstruktionsraumdimension $n = 6$, so wiederholen sich 6 aufeinanderfolgende Werte, etwa f_0, f_1, \dots, f_5 und $f_{60}, f_{61}, \dots, f_{65}$. Ohne weitere Kenntnisse des System müßte somit die Delay-Koordinatenabbildung als endliche Realisation verworfen werden, obwohl sie offensichtlich eine ist. Denn:

$$F_{(\phi, f, 6)} : \{p, \phi(p), \dots, \phi^{59}(p)\} \rightarrow \mathbb{R}^6 : \phi^j(p) \mapsto (f_j, \dots, f_{j+5})$$

ist injektiv.

Ist die Periodenlänge relativ zur gesamten Länge der Zeitreihe kurz, so ist dies ein gutes Indiz für einen periodischen Orbit. In einem solchen Fall wird man nur die Meßwerte innerhalb einer Periode zur Konstruktion der Delay-Koordinatenabbildung verwenden und untersuchen, ob diese injektiv ist. Wurden an einem System mehrere Zeitreihen mit jeweils verschiedenen Anfangszuständen aufgenommen, so können zur Konstruktion der Delay-Koordinatenabbildung die jeweils ersten n Meßwerte einer Zeitreihe verwendet werden. Diese Vorgehensweise stellt sicher, daß die

¹⁴Hierbei sollte natürlich auch die Rekonstruktionsraumdimension n kleiner als die Hälfte der Länge der Zeitreihe sein.

Mächtigkeit der endlichen Teilmenge $X \subset \mathcal{M}$ auch wirklich mit der Anzahl $N + 1 - (n - 1)$ der konstruierbaren Delay-Vektoren übereinstimmt. Wie obiges Beispiel zeigt, ist dies im allgemeinen nicht der Fall (dort galt: $|X| = 60$ und $N + 1 - (n - 1) = 10^4 + 1 - 5$).

Bezeichnet $(f_j^{(k)} = f(\phi^j(p_k)))_{j=0}^{N_k}$ die k -te Zeitreihe von K aufgenommenen Zeitreihen mit dem Anfangszustand $p_k \in \mathcal{M}$, dann ist die endliche Delay-Koordinatenabbildung

$$F_{(\phi, f, n)} : \{p_1, \dots, p_K\} \longrightarrow \mathbb{R}^n : p_k \longmapsto (f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)})$$

genau dann eine endliche Realisation, wenn für alle $k \neq l$ gilt:

$$(f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)}) \neq (f_0^{(l)}, \dots, f_{n-1}^{(l)})$$

Diese Methode zur Konstruktion der Delay-Koordinatenabbildung eignet sich allerdings nur dann, wenn hinreichend viele Zeitreihen mit verschiedenen Anfangszuständen, beispielsweise mittels „Durchstimmen“ eines Parameters, erzeugt werden können.

Schließlich bleibt festzuhalten, daß offenbar durch Erhöhung der Rekonstruktionsraumdimension n jede Delay-Koordinatenabbildung auf einer endlichen Menge zu einer endlichen Realisation wird.

Ein weiteres durch die Endlichkeit der Datenreihe bedingtes Problem ist, daß durch die endliche Realisationsabbildung unter Umständen der „falsche“ Zustandsraum rekonstruiert wird. Die endlich vielen rekonstruierten Zustände könnten auf einer Untermannigfaltigkeit des Zustandsraumes liegen, die dann fälschlicherweise mit dem gesamten Zustandsraum gleichgesetzt wird. Wie der folgende Satz zeigt, kann dann nicht einmal die Mannigfaltigkeitsdimension des Zustandsraumes eindeutig bestimmt werden.

Satz: Sei \mathcal{M}^m eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{M}^m$ paarweise verschiedene Punkte. Dann gibt es für jedes $n \leq m$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit $\mathcal{N}^n \subseteq \mathcal{M}^m$ mit $p_j \in \mathcal{N}^n \quad \forall j = 1, \dots, k$.

Beweis: Da \mathcal{M}^m hausdorffsch ist, findet man Karten (U_i, φ_i) ($j = 1, \dots, k$) mit folgenden Eigenschaften:

$$U_1 \cap \dots \cap U_k = \emptyset, \quad \varphi_i(p_i) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_i(U_i) = B_1^{(m)}(0) \quad \forall i = 1, \dots, k,$$

wobei $B_1^{(m)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1\}$ die m -dimensionale Einheitskugel bezeichnet. Setze nun: $\mathcal{N}_i := \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^n \cap B_1^{(m)}(0))$. Dann erfüllt

$$\mathcal{N}^n := \bigcup_{i=1}^k \mathcal{N}_i$$

die Behauptung.

Die Untermannigfaltigkeit, auf der die zu rekonstruierenden Zustände liegen, kann sogar zusammenhängend gewählt werden.

Dieser Satz zeigt, daß man nicht zwingend folgern darf, aus endlich vielen Datenpunkten die gesamte Zustandsmannigfaltigkeit eindeutig rekonstruieren zu können. Zu jeder endlichen Teilmenge $X \subset \mathcal{M}$ gibt es Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{M}$, die nicht diffeomorph zueinander sind, deren charakteristischen Kenngrößen, wie Dimension, Geschlecht oder Eulercharakteristik also nicht gleich sind, die aber beide die endliche Menge X enthalten. Hier zeigt sich erneut, daß aufgrund der Endlichkeit der Meßreihen, Kenngrößen kritisch behandelt werden müssen. Neben Konvergenzproblemen bei deren Berechnung liegt hier eine nicht überwindbare prinzipielle Schwierigkeit vor.

Kapitel 3

Weitere Rekonstruktiotheoreme

3.1 Der Satz von Sauer–York–Casdagli

Der Satz von Takens macht lediglich Aussagen über topologische Eigenschaften der Menge aller Delay–Einbettungen. Er beschreibt wie die Delay–Einbettungen im Funktionenraum aller Diffeomorphismen und Meßfunktionen liegen, nämlich offen und dicht. Dies muß allerdings vielmehr als eine qualitative Aussage als eine quantitative Aussage gewertet werden. Die Eigenschaften der Dichtheit und Offenheit sind selbstverständlich kein Maß für die Größe des Raumes der Delay–Einbettungen. Aber ein solches quantitatives Maß wäre zur Bewertung der Zuverlässigkeit der Takens–Rekonstruktionsmethode unbedingt notwendig.

Die Dichtheit suggeriert eine vermeintliche Größe, die sich aber nicht zwingend ergibt. Daß nämlich eine generische Eigenschaft sehr wohl auch von „wenigen“ Elementen eines Raumes angenommen werden kann, soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel: $B_r^{(n)}(x)$ bezeichne eine offene Kugel im \mathbb{R}^n vom Radius r um x . Ferner sei $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung aller rationalen Punkte im \mathbb{R}^n , d.h. Punkte der Form $q = (q_1, \dots, q_n)$, wobei $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$. Dann ist mit $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\Omega := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon(1/k)^2}^{(n)}(q_k)$$

als abzählbare Vereinigung offener Mengen offen. Da weiterhin \mathbb{Q}^n dicht in \mathbb{R}^n liegt, ist somit auch Ω dicht im \mathbb{R}^n . Aus dem Volumen einer n -dimensionalen Kugel $\text{vol}(B_r^{(n)}(0)) = c_n r^n$, wobei c_n eine vom Radius unabhängige Konstante ist, kann nun das Volumen von Ω abgeschätzt werden.

$$\text{vol}(\Omega) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(B_{\varepsilon(1/k)^2}^{(n)}(q_k)) = c_n \varepsilon^n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{2n} = c_n \varepsilon^n \zeta(2n)$$

$\zeta(k)$ bezeichnet die Riemannsche Zeta-Funktion, die für $k > 1$ konvergiert. Das Volumen von Ω kann also durch den variablen Parameter ε kontrolliert werden. Insgesamt wurde somit eine offene und dichte Teilmenge Ω der \mathbb{R}^n mit beliebig kleinen Volumen konstruiert. Ein sehr ähnliches Beispiel findet sich auch in [RUE89, Seite 45].

Obiges Beispiel zeigt, daß es sehr wohl offene und dichte Teilmengen eines Raumes geben kann, die nur einen sehr kleinen Bruchteil des Raumes einnehmen. Für die Anwendung der Takens-Rekonstruktionsmethode ist ein solches Beispiel von entscheidender Relevanz. Bedeutet es doch gerade, daß sich aus dem Satz von Takens nicht zwingend ergibt, daß die „meisten“ dynamischen Systeme mit Hilfe einer skalaren Meßfunktion rekonstruierbar sind. Hierbei muß nun allerdings die „meisten“ im Sinne einer maßtheoretischen Interpretation verstanden werden. Ist μ ein auf Eins normiertes Maß auf dem Abbildungsraum der Diffeomorphismen und Meßfunktionen $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, so folgt aus dem Satz von Takens nicht die Existenz einer Teilmenge

$$E \subseteq \text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \mu(E) = 1,$$

deren Elemente vermöge der Delay-Koordinatenabbildung Einbettungen erzeugen. Für den anwendenden Experimentator wäre eine solche Aussage aber äußerst wünschenswert. Er würde doch gerne wissen, ob sein konkret gegebenes dynamisches System mit Hilfe einer Meßfunktion mit Wahrscheinlichkeit-Eins Takens-einbettbar ist.

In der Stochastik werden die Eigenschaften solcher Wahrscheinlichkeitsmaße systematisch studiert. Ein sehr populäres Maß ist das Lebesgue-Maß, welches man als eine verallgemeinerte Volumenfunktion auf endlich-dimensionalen Vektorräumen verstehen kann. Leider gibt es nach [SAU91] keine vernünftige Entsprechung des Lebesgue-Maßes auf unendlich-dimensionale Vektorräume und auch nicht auf Banachräume. Die im Satz von

Takens vorkommenden Abbildungsräume sind aber, bis auf wenige triviale Ausnahmen, unendlich-dimensionale Vektorräume bzw. Mannigfaltigkeiten. HUNT, SAUER und YORK schlugen deshalb wenigstens eine Verallgemeinerung des Wahrscheinlichkeits-Eins Begriffes auf unendlich-dimensionale Vektorräume vor. Ich folge hier der Definition in der Arbeit von SAUER, YORK und CASDAGLI [SAU91].

Definition (Prävalenz): Eine Borel-Teilmenge S eines normierten Vektorraumes V heißt prävalent, falls es einen endlich-dimensionalen Unterraum U von V gibt, so daß für jeden Vektor $v \in V$ gilt:
Es existiert eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset U$ mit der Eigenschaft, daß $v + u \in S$ für alle $u \in U - N$ gilt.

In diesem Sinne sollen „fast alle“ Elemente eines normierten Vektorraumes eine Eigenschaft besitzen, wenn es eine prävalente Teilmenge gibt, deren Elemente diese Eigenschaft haben.

SAUER ET AL. stellen in [SAU91] ferner fest, daß in endlich-dimensionalen Vektorräumen die Begriffe Prävalenz und Wahrscheinlichkeit-Eins äquivalent sind. Eine weitere Folgerung aus der Definition ist die Implikation der Dichtheit einer prävalenten Teilmenge eines normierten Raumes. Damit scheint mit dem Prävalenz-Begriff eine adäquate Verallgemeinerung des Wahrscheinlichkeits-Eins Begriffes gegeben zu sein.

SAUER ET AL. konnten zeigen, daß man im Satz von Takens „generisch“ durch „prävalent“ ersetzen kann. In einer etwas abgeschwächten Version lautet dieser Satz wie folgt:

Satz (Sauer-York-Casdagli): Sei \mathcal{M}^m eine kompakte differenzierbare und m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $\phi : \mathcal{M}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^m$ ein Diffeomorphismus und $n \geq 2m + 1$ eine natürliche Zahl. Ferner sei die Anzahl der periodischen Orbits von ϕ mit Perioden kleiner oder gleich n endlich und die Tangentialabbildung jeder dieser periodischen Orbits habe verschiedene Eigenwerte. Dann gibt es eine prävalente Teilmenge E des \mathbb{R} -Vektorraumes $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, so daß die Delay-Koordinatenabbildung

$$F_{(\phi, f, n)} : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{für alle } f \in E \text{ eine Einbettung ist.}$$

Beweis: siehe [SAU91].

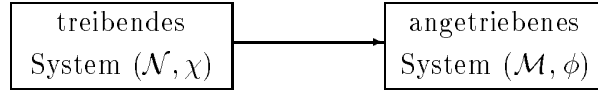
Es sollte nicht unerwähnt bleiben, daß SAUER ET AL. in der Originalversion des Satzes die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} durch eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^k mit fraktaler Dimension ersetzen. In der Nichtlinearen Dynamik besteht durchaus Bedarf an einer solchen Ersetzung. Häufig bewegen sich dynamische Systeme nach einer transienten Phase nur noch auf kompakten Attraktoren, die nur allzu selten Untermannigfaltigkeiten sind. Solche fraktalen Attraktoren sind gemäß der Erweiterung von SAUER ET AL. ebenfalls rekonstruierbar.

3.2 Rekonstruktion deterministisch getriebener Systeme

Im Takens–Theorem wird implizit vorausgesetzt, daß das dynamische System und die Meßfunktion autonom sind, d.h. unabhängig von anderen äußeren Systemen und Einflüssen. Die Flußabbildung und die Meßfunktion dürfen nur von Punkten der Zustandsmannigfaltigkeit abhängen. Für etliche reale Systeme erweist sich diese Einschränkung als ein ernstzunehmendes Hindernis für die Anwendung der Takens–Rekonstruktionsmethode. Natürliche Systeme lassen sich nur schwierig autonom isolieren. Die Wechselwirkungen mit ihren Umgebungen können nicht abgeschaltet werden. So sind etwa mechanische Systeme stets der Gravitationswechselwirkung ausgesetzt. Welche Einflüsse vernachlässigbar sind und welche nicht, ist abhängig von den Anforderungen an das Modell. In Laborexperimenten werden sogar ganz bewußt dynamische Systeme durch äußere angekoppelte Systeme ange-regt und in Gang gehalten. Zu dieser Klasse von Systemen zählen beispielsweise periodisch angetriebene Oszillatoren (mechanische oder elektrische), die ohne eine antreibende Kraft aufgrund dissipativer Wechselwirkungen einem uninteressanten Gleichgewichtspunkt zulaufen würden. STARK [STA95] war wohl einer der ersten, der diese Probleme erkannte und ernsthaft anging. Diese Probleme möchte ich nun weiter präzisieren und einige Lösungsvorschläge vorstellen. Ich orientiere mich hierbei an [STA95].

Um angetriebene Systeme mit der Takens–Methode rekonstruieren zu können, müssen diese zunächst autonomisiert werden. Dies gelingt durch Erweiterung des Zustandsraumes \mathcal{M} um den Zustandsraum des antreibenden Systems \mathcal{N} . Der neue Zustandsraum wird somit durch das kartesische Produkt aus diesen beiden modelliert: $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$
Bei der Modellierung der zu autonomisierenden Flußabbildung wird expli-

zit berücksichtigt, daß das getriebene System keine Rückwirkung auf das antreibende System ausübt, oder doch zumindest diese Rückwirkung vernachlässigbar klein ist. Die „Wechselwirkung“ zwischen den beiden gekoppelten Systemen bleibt also einseitig.



Definiere nun:

$$\mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) := \{ \xi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \mid \xi(\cdot, q) \in \mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \quad \forall q \in \mathcal{N} \}$$

Mit dieser Notation ergibt sich als neue Dynamik auf dem autonomisierten Zustandsraum:

$$\theta : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{N} \quad : \quad (p, q) \longmapsto (\phi(p, q), \chi(q))$$

$$\text{wobei} \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M})$$

$$\text{und} \quad \chi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$$

ϕ repräsentiert die Dynamik des angeregten Systems und kann als eine durch die Elemente aus \mathcal{N} parametrisierte Familie diskreter Flußabbildungen auf \mathcal{M} aufgefaßt werden. Für einen festen Parameter $q \in \mathcal{N}$, der den Zustand des treibenden Systems beschreibt, ist $(\phi^k(\cdot, q))_{k \in \mathbb{Z}}$ ein diskreter Fluß auf \mathcal{M} . Das antreibende dynamische System (\mathcal{N}, χ) wird als deterministisch angenommen und ist während der Kopplung an das anzutreibende System von diesem vollständig unabhängig.

Es ist nicht ganz offensichtlich, daß die neue Abbildung θ auf dem autonomisierten Zustandsraum $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ tatsächlich eine diskrete Flußabbildung, d.h. ein Diffeomorphismus ist. Dies wird nun kurz gezeigt.

Feststellung: Sind \mathcal{M} und \mathcal{N} kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M})$ und $\chi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$. Dann ist

$$\theta : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{N} \quad : \quad (p, q) \longmapsto (\phi(p, q), \chi(q))$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis: θ IST INJEKTIV: Sind $(p, q), (p', q') \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ beliebige Punkte mit $\theta(p, q) = \theta(p', q')$, d.h. $\phi(p, q) = \phi(p', q')$ und $\chi(q) = \chi(q')$, dann folgt sofort: $q = q'$, da χ injektiv ist. Für festes q ist aber auch $\phi(\cdot, q)$ injektiv, also $p = p'$.

θ IST SURJEKTIV: Ist $(p, q) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ beliebig, so gibt es ein $q' \in \mathcal{N}$ mit $\chi(q') = q$, da χ surjektiv ist. Aus der Surjektivität von $\phi(\cdot, q')$ folgt nun die Existenz eines $p' \in \mathcal{M}$ mit $\phi(p', q') = p$. Also: $\theta(q', p') = (p, q)$. Insgesamt ist somit θ bijektiv.

Ähnlich zeigt man die Bijektivität der Tangentialabbildung $d_{(p,q)}\theta$.

Aus der Bijektivität und Stetigkeit von θ , sowie der Kompaktheit von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, folgt nun, daß θ ein Homöomorphismus ist. Gemäß des Satzes von der globalen Umkehrbarkeit ist eine bijektive und differenzierbare Abbildung genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die Differentialabbildung in jedem Punkt ein Isomorphismus ist und die Umkehrabbildung stetig ist. Demnach ist θ also ein Diffeomorphismus.

Die Meßfunktion des angetriebenen Systems soll auch nach Erweiterung des Zustandsraumes um den des angekoppelten Systems nur von Zuständen des angeregten Systems abhängen. Die neue Meßfunktion wird durch

$$\tilde{f} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \tilde{f} := f \circ \pi_{\mathcal{M}}$$

modelliert. Hierbei bezeichnet $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ die Meßfunktion des freien, d.h. entkoppelten Systems, und $\pi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$ die kanonische Projektion auf die Zustandsmannigfaltigkeit \mathcal{M} . Solange keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird die Meßfunktion auf dem autonomisierten System auch weiterhin mit f bezeichnet.

Oberflächlich betrachtet scheint die Anwendung der Delay-Rekonstruktionsmethode auf getriebene Systeme keine Probleme zu bereiten. Die Voraussetzungen des Satzes von Takens sind nach Durchführung des oben beschriebenen Autonomisierungsprozesses erfüllt, um das erweiterte dynamische System $(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \theta)$ mit Hilfe der Meßfunktion f zu rekonstruieren. Sind \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n kompakte Mannigfaltigkeiten, so auch $\mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$. Weiterhin ist nach Voraussetzung und obiger Feststellung $\theta = (\phi, \chi)$ ein Diffeomorphismus. Auch wenn das Paar (θ, f) noch keine Delay-Einbettung in den $\mathbb{R}^{2(m+n)+1}$ erzeugt, so findet man doch zumindest beliebig nahe an (θ, f) ein Paar

$$(\theta', f') \in \text{Diff}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M} \times \mathcal{N}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathbb{R}),$$

welches eine Einbettung generiert. Dies ist die Aussage des Takens–Theorems. Unbeantwortet von diesem Satz bleibt allerdings die Frage, ob das „gestörte“ Paar (θ', f') ebenfalls von der speziellen Form wie (θ, f) ist, d.h. ob gilt:

$$\theta' = (\phi', \chi') \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \text{Diff}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \quad \text{und} \quad f' \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

Es ist nicht auszuschließen, daß χ' ebenfalls von Zuständen aus \mathcal{M} und f' von Zuständen aus \mathcal{N} abhängt. In diesem Punkt ähnelt dieses Problem der Notwendigkeit für den Übergang von dem Satz von Whitney zu dem Satz von Takens. Gemäß des Satzes von Whitney existiert in der „Nähe“ jeder Delay–Koordinatenabbildung eine Einbettung. Aus dem Satz von Whitney kann allerdings nicht notwendig gefolgert werden, daß diese Einbettung von der Gestalt einer Delay–Koordinatenabbildung ist.

Gesucht wird ein Satz, der aussagt, daß die Menge der Tripel aus

$$\mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \text{Diff}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}),$$

welche Delay–Einbettungen generieren, offen und dicht ist. Da $\mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \text{Diff}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ nicht offen und dicht in $\text{Diff}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M} \times \mathcal{N})$ ist und auch $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ nicht offen und dicht in $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathbb{R})$ liegt, kann ein solcher Satz nicht trivial aus dem Satz von Takens gefolgert werden. STARK veröffentlichte 1995 einen solchen Satz mit Beweis.

Satz (Stark): \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n seien kompakte und differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $m \geq 1$ bzw. $n \geq 1$, sowie $k \geq 2(m+n)+1$ eine natürliche Zahl. Ferner seien die periodischen Orbits von $\chi \in \text{Diff}(\mathcal{N}^n, \mathcal{N}^n)$ mit Perioden $\leq k$ isoliert und die Tangentialabbildungen dieser Orbits haben verschiedene Eigenwerte. Dann gibt es eine offene und dichte Teilmenge $A \subset \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, so daß für die Delay–Koordinatenabbildungen gilt:

$$\begin{aligned} F_{((\phi, \chi), f, k)} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (p, q) &\longmapsto (\tilde{f}(p, q), \tilde{f}((\phi, \chi))(p, q), \dots, \tilde{f}((\phi, \chi)^{k-1})(p, q)) \end{aligned}$$

ist eine Einbettung für alle $(\phi, f) \in A$, wobei $\tilde{f} = f \circ \pi_{\mathcal{M}}$.

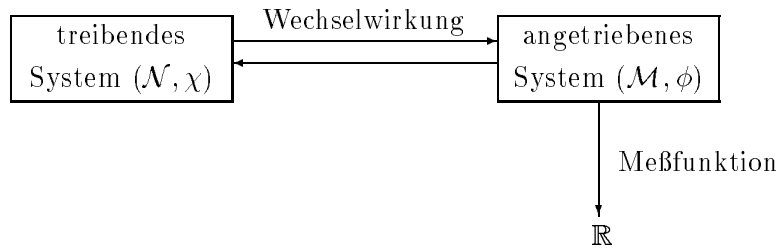
Beweis: siehe [STA95].

In [STA95] wird darauf hingewiesen, daß nach einer leichten Verallgemeinerung des Satzes von Kupka–Smale die Menge der Diffeomorphismen χ , welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllen, offen und dicht in $\text{Diff}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ liegt. Damit ist der oben formulierte Wunsch erfüllt.

Der Satz von Stark setzt implizit voraus, daß das antreibende System unabhängig vom angetriebenen System ist. Für etliche reale Systeme ist diese Annahme wohl auch gerechtfertigt. Doch stellt sich die Frage, ob man den Satz nicht auch auf solche Situationen ausdehnen kann, in denen das antreibende System auch von Zuständen des angetriebenen Systems abhängt. Dies würde einer echten Wechselwirkung zwischen treibenden und angetriebenen System entsprechen. Die Frage lautet demnach, ob es eine dichte und offene Teilmenge von

$$(\phi, \chi, f) \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{N}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

gibt, deren Elemente Delay–Einbettungen erzeugen. Könnte diese Frage positiv beantwortet werden, so wären vollständig gekoppelte dynamische Systeme generisch mit einer skalaren Meßfunktion, welche nur an einem Teilsystem installiert wäre, rekonstruierbar. Bis heute konnte diese Frage meines Wissens jedoch leider nicht beantwortet werden.



Ist der Zustandsraum und die Dynamik des antreibenden Systems (\mathcal{N}, χ) bereits bekannt, so ist es eine Verschwendung von Ressourcen, diese zusammen mit dem angetriebenen System ebenfalls zu rekonstruieren. Insbesondere könnte eine kleinere Rekonstruktionsraumdimension gewählt werden. In vielen Laborexperimenten ist das treibende dynamische System explizit gegeben. Beispielsweise ist der Zustandsraum eines mit gleichförmig-

ger periodischer Kraft treibenden Systems der Einheitskreis S^1 und die Flußabbildung ist gegeben durch:

$$\chi(\alpha) = \alpha + \omega \pmod{2\pi}$$

Da die Zustände $q \in \mathcal{N}$ bekannt sind, genügt es, lediglich die Fasern $\mathcal{M} \times \{q\}$ einzubetten. Für $\theta = (\phi, \chi) \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \text{Diff}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$ und $q_0 \in \mathcal{N}$ definiert folgendes kommutative Diagramm eine sogenannte *Faser-Delay-Abbildung* $F_{(\theta, f, q_0, k)}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times \{q_0\} & \hookrightarrow & \mathcal{M} \times \mathcal{N} \\ & \searrow F_{(\theta, f, q_0, k)} & \swarrow F_{(\theta, f, k)} \\ & \mathbb{R}^k & \end{array}$$

Mit dieser Notation kann ein weiterer Rekonstruktionssatz formuliert werden, der die Rekonstruktion von Fasern $\mathcal{M} \times \{q\}$ der autonomisierten Zustandsmannigfaltigkeit $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ durch Faser-Delay-Abbildungen behandelt.

Satz (Faser-Delay-Einbettungen, STARK): Seien \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n kompakte und differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $n, m \geq 1$, sowie $k \geq 2m + 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Ferner sei der topologische Abschluß der periodischen Orbits von $\chi \in \text{Diff}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ mit Perioden $\leq k$ nirgends dicht¹ in \mathcal{N} . Dann gibt es eine residuale Teilmenge $A \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, so daß es für jedes Paar $(\phi, f) \in A$ eine offene und dichte Teilmenge $\mathcal{N}_{(\phi, f)} \subseteq \mathcal{N}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

$$F_{((\phi, \chi), f, q, k)} : \mathcal{M}^m \times \{q\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

ist für jedes $q \in \mathcal{N}_{(\phi, f)}$ eine Einbettung.

Beweis: siehe [STA95].

¹Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt nirgends dicht in X , falls $X - \overline{A}$ dicht in X liegt.

3.3 Rekonstruktion nicht-deterministisch getriebener Systeme

Ist das treibende System nicht deterministisch, wird es anstatt eines Diffeomorphismusses $\chi \in \text{Diff}(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ von einer beliebigen Zustandsfolge getrieben, so versagen die bisherigen Rekonstruktionssätze. Zu dieser Klasse von Systemen zählen beispielsweise stochastisch getriebene Systeme.

Bezeichnet \mathcal{N} die Zustandsmannigfaltigkeit des treibenden Systems, so werden die in einer zeitlichen Ordnung durchlaufenden Zustände durch ein Element des Folgenraumes

$$\Sigma_{\mathcal{N}} := \text{Abb}(\mathbb{Z}, \mathcal{N})$$

modelliert². Dieser sei mit der Produkttopologie versehen. Die diskrete Dynamik des treibenden Systems ist durch die shift-Abbildung

$$\sigma : \Sigma_{\mathcal{N}} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{N}} \quad : \quad (\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}} \longmapsto (\omega_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}}$$

gegeben und die des anzutreibenden Systems durch $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M})$. Die zeitliche Entwicklung des Gesamtsystems wird schließlich durch

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{M} \times \Sigma_{\mathcal{N}} &\longrightarrow \mathcal{M} \times \Sigma_{\mathcal{N}} \\ (p, \omega) &\longmapsto (\tilde{\phi}(p, \omega), \tilde{\sigma}(p, \omega)) := (\phi(p, \omega_0), \sigma(\omega)) \end{aligned}$$

beschrieben. Eine vom treibenden System unabhängige Meßfunktion $f \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ erzeugt wieder den Datensatz.

Auch wenn $\Sigma_{\mathcal{N}}$ im allgemeinen keine endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit und θ kein Diffeomorphismus ist, so soll doch

$$F_{(\theta, f, k)} : \mathcal{M} \times \Sigma_{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

mit der üblichen Notation die Delay-Koordinatenabbildung bezeichnen. Wie in Abschnitt 3.2 definiert nachfolgendes kommutative Diagramm eine *Faser-Delay-Koordinatenabbildung* $F_{(\theta, f, \omega, k)}$:

² $\text{Abb}(\mathbb{Z}, \mathcal{N})$ bezeichnet die Menge aller Abbildungen von \mathbb{Z} nach \mathcal{N} , d.h. die Menge aller Zustandsfolgen $(\omega_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M} \times \{\omega\} & \hookrightarrow & \mathcal{M} \times \Sigma_{\mathcal{N}} \\
& \searrow & \swarrow \\
& \mathbb{R}^k &
\end{array}
\begin{array}{c}
F_{(\theta,f,\omega,k)} \\
F_{(\theta,f,k)}
\end{array}$$

STARK ET. AL. [STA96] folgerten aus dem Faser-Delay-Einbettungstheorem, daß das nicht-deterministisch getriebene System (\mathcal{M}, ϕ) für „fast alle“ Zustandsfolgen $\omega \in \Sigma_{\mathcal{N}}$ rekonstruierbar ist.

Satz (Stark et al.): Seien \mathcal{M}^m und \mathcal{N}^n kompakte und differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Dimensionen $m, n \geq 1$. Ferner sei $k \geq 2m+1$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es eine residuale Teilmenge

$$A \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}),$$

so daß für jedes Paar $(\phi, f) \in A$ eine offene und dichte Teilmenge $\Sigma_{(\phi,f)} \subseteq \Sigma_{\mathcal{N}}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

$$F_{(\theta,f,\omega,k)} : \mathcal{M}^m \times \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

ist für jede Zustandsfolge $\omega \in \Sigma_{(\phi,f)}$ eine Einbettung.

Beweis: siehe [STA96].

Als Anwendungsbeispiel dieses bemerkenswerten Satzes möchte ich kurz demonstrieren, daß auch eine mit nicht-äquidistanten Abtastzeitintervallen aufgenommene Zeitreihe mit der Delay-Methode generisch rekonstruierbar ist. Im Takens-Theorem wird ein konstantes Abtastzeitintervall τ vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist allerdings in vielen realen Gegebenheiten nicht erfüllt.

Beispiel: $\phi : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$ sei ein (kontinuierlicher) Fluß auf einer kompakten Zustandsmannigfaltigkeit \mathcal{M} und $\tau := (\tau_j > 0)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von Abtastzeitintervallen. Um obigen Satz anwenden zu können, müssen die τ_j beschränkt sein, etwa durch $s > 0$. Für reale Zeitreihen ist dies keine wirkliche Einschränkung. Damit hat man : $\mathcal{N} := [0, s] \subset \mathbb{R}$

Mit der üblichen Notation erhält man nun für den Orbit des Anfangszustandes $(p, \tau) \in \mathcal{M} \times \Sigma_{\mathcal{N}}$:

$$\begin{aligned}\theta(p, \tau) &= (\phi(p, \tau_0), \sigma(\tau)) = (\phi_{\tau_0}(p), \sigma(\tau)) \\ \theta^2(p, \tau) &= \theta(\phi_{\tau_0}(p), \sigma(\tau)) = (\phi(\phi_{\tau_0}(p), \sigma(\tau)_0), \sigma^2(\tau)) \\ &= ((\phi_{\tau_1} \circ \phi_{\tau_0})(p), \sigma^2(\tau)) = (\phi_{\tau_1+\tau_0}(p), \sigma^2(\tau)) \\ &\vdots \\ \theta^j(p, \tau) &= (\phi_{\tau_{j-1}+\dots+\tau_0}(p), \sigma^j(\tau))\end{aligned}$$

Die Faser-Delay-Abbildung sieht also folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}F_{(\theta, f, \tau, 2m+1)}(p) &= (\tilde{f}(p), \tilde{f}(\theta(p, \tau)), \tilde{f}(\theta^2(p, \tau)), \dots, \tilde{f}(\theta^{2m}(p, \tau))) \\ &= (f(p), f(\phi_{\tau_0}(p)), f(\phi_{\tau_1+\tau_0}(p)), \dots, f(\phi_{\tau_{2m-1}+\dots+\tau_0}(p)))\end{aligned}$$

und ist generisch eine Einbettung. Demnach kann eine zeitlich irregulär aufgenommene Datenreihe zur Rekonstruktion eines dynamischen Systems mit Hilfe der Delay-Methode benutzt werden. Ein ähnliches Resultat veröffentlichte AEYELS bereits 1981. Er konnte in [AEY81] zeigen, daß die Delay-Koordinatenabbildung für eine residuale Menge von Abtastzeitintervallen injektiv ist. Den Beweis für die Immersivität deutete er allerdings in [AEY81] nur kurz an.

Kapitel 4

Polyedrisierung der Zustandsmannigfaltigkeiten

4.1 Problemstellung und Lösungsidee

Das Takens-Theorem gestattet einen unbekannten Zustandsraum durch eine reellwertige Meßfunktion in einem geeigneten \mathbb{R}^n einzubetten. Diese Einbettung erfordert jedoch die Meßwerte von jedem Punkt des Zustandsmannigfaltigkeit, die aber stets überabzählbar ist¹. Die zur Verfügung stehende endliche Datenreihe führt also unweigerlich zu Problemen. Wie bereits in 2.7 diskutiert, liefern die Takens-rekonstruierten Zustände lediglich eine endliche Punktmenge im \mathbb{R}^n , die natürlich nicht äquivalent zum Zustandsraum ist. Das Takens-Rekonstruktionsverfahren ist also so zu modifizieren, daß der Zustandsraum äquivalent zum so rekonstruierten Raum wird, welchen man aus einer endlichen Datenmenge erhält.

Man wird wohl kaum erwarten, differentialgeometrische Informationen, wie etwa das Krümmungsverhalten der Mannigfaltigkeit, aus endlich vielen Punkten einer Mannigfaltigkeit extrahieren zu können. Wohl aber kann eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit topologisch vollständig durch ein endliches Datenschema beschrieben werden. Nach einem Satz von WHITEHEAD [WH40] ist jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit endlich triangulierbar, d.h. sie ist topologisch äquivalent zu einem Polyeder. Dieser Polyeder wiederum ist eindeutig durch Angabe seiner Eckpunkte, Kanten,

¹Der uninteressante Fall einer 0-dimensionalen Zustandsmannigfaltigkeit, d.h. eines diskreten Raumes, sei hier ausgeschlossen.

Dreiecke, ... bestimmt, welche eine endliche Menge bilden. Die Idee der Polyedrisierung ist nun, die Zustandsmannigfaltigkeit durch die Ecken, Kanten, Dreiecke, ... des korrespondierenden Polyeders zu beschreiben. Ähnlich wie in der Linearen Algebra die endlich-dimensionalen Vektorräume durch endlich viele Vektoren, nämlich den Basis-Vektoren, eindeutig bestimmt sind, so sollen hier die kompakten Zustandsmannigfaltigkeiten ebenfalls durch ein endliches Datum, nämlich den Meßwerten, bis auf Homöomorphie eindeutig beschrieben sein. Dies wird nun ein wenig präzisiert.

Bezeichnet man mit (\mathcal{M}^m, ϕ) ein diskretes dynamisches System und mit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}^m, \mathbb{R})$ eine Meßfunktion, so wird ein Algorithmus \mathcal{A} gesucht, welcher der endlichen Datenmenge $X := \{f_j \mid j = 0, \dots, N\}$ von Meßwerten einen Raum $\mathcal{A}X$ zuordnet, der topologisch äquivalent zur Zustandsmannigfaltigkeit \mathcal{M}^m ist. Weiterhin soll dieser Algorithmus auch die Flußabbildung ϕ rekonstruieren. Die Abbildung $\phi|_{\mathcal{O}_p}$ auf $\mathcal{O}_p := \{\phi^j(p) \mid j = 0, \dots, N\}$ korrespondiert nach der Messung mit der Standard-shift-Abbildung σ auf X : $\sigma((f_j)_j) = (f_{j+1})_j$. Dieser Abbildung σ soll nun durch den Algorithmus \mathcal{A} eine Abbildung $\mathcal{A}\sigma : \mathcal{A}X \rightarrow \mathcal{A}X$ zugewiesen werden, die topologisch konjugiert zur originären Flußabbildung ϕ ist.

Ein solcher Algorithmus \mathcal{A} wird als ein (covarianter) Funktor

$$\mathcal{A} : fset \rightarrow Simp$$

von der Kategorie der endlichen Mengen und Abbildungen in die Kategorie der simplizialen Komplexe und simplizialen Abbildungen aufgefaßt werden. In dieser Kategorie, die in Unterabschnitt 4.2.1 eingeführt wird, können die Polyeder in einer äußerst effizienten Art und Weise beschrieben werden. Betrachtet man auch die Triangulierung, die in 4.2.2 formal eingeführt wird, als einen Funktor $Tri : kDynS \rightarrow Simp$ von der Kategorie der kompakten Mannigfaltigkeiten und Flußabbildungen in die simpliziale Kategorie, so kann die Bedingung der Äquivalenz von originären dynamischen System und dem rekonstruierten dynamischen System durch folgendes Diagramm veranschaulicht werden, welches bis auf natürliche Äquivalenz kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} fset & \xrightarrow{\mathcal{A}} & Simp \\ \text{Mess} \uparrow & \nearrow Tri & \downarrow geo \\ kDynS & \xrightarrow{in} & kTop \end{array}$$

Hierbei wird der Meßvorgang auch als ein Funktor \mathcal{M}_{ess} von der Kategorie der kompakten dynamischen Systeme $k\mathcal{DynS}$ in die Kategorie der endlichen Mengen aufgefaßt. Den Objekten $\mathcal{M} \in \text{Obj}(k\mathcal{DynS})$ wird durch die Messung die endliche Menge X der Meßwerte und den Isomorphismen ϕ die shift-Abbildung σ zugeordnet. Weiterhin bezeichnet $in : k\mathcal{DynS} \rightarrow k\mathcal{Top}$ den Inklusionsfunktor, d.h. die zusätzliche Struktur der Kategorie $k\mathcal{DynS}$ wird durch in einfach „vergessen“. Der Funktor der geometrischen Realisierung geo , der in 4.2.2 definiert wird, ordnet den simplizialen Komplexen und Abbildung topologische Räume und stetige Abbildungen zu. Dem Diagramm kann entnommen werden, daß der Meßvorgang zusammen mit dem Algorithmus \mathcal{A} in gewissen Sinne dem Prozeß der Triangulierung entspricht.

Ich werde im Abschnitten 4.3 drei Verfahren angeben, die das oben formulierte Problem teilweise lösen. Die ersten beiden Verfahren bauen auf die Takens-Rekonstruktion auf und fassen die Takens-rekonstruierten Vektoren im \mathbb{R}^n als Eckpunkte eines Gerüsts auf, welches die Zustandsmannigfaltigkeit durch Simplexe approximiert.

Im dritten Verfahren wird aus einer Datenreihe ein kombinatorisches Schema konstruiert, welches eine Triangulierung der Zustandsmannigfaltigkeit beschreibt. Das Rekonstruktionsproblem wird somit auf ein kombinatorisches Problem reduziert, welches leichter zugänglich ist. Zunächst müssen allerdings noch einige mathematischen Definitionen zusammengestellt werden, die in den nachfolgenden Abschnitten verwendet werden. Der folgende Abschnitt widmet sich deshalb dieser Aufgabe.

4.2 Polyeder

Die aus einer endlichen Datenreihe vermöge des Algorithmus \mathcal{A} rekonstruierten Räume werden keine differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mehr sein, sondern Polyeder. Polyeder sind geometrische Objekte, die aus elementaren geometrischen Räumen, den sogenannten Simplexe, aufgebaut werden. Die Simplexe werden als eine Verallgemeinerung von Dreiecken und Tetraedern in höhere Dimensionen verstanden, welche dann zu einem Polyeder „zusammen geklebt“ werden. Ich werde in diesen Abschnitt nur einen kurzen Abriß der Theorie simplizialer Komplexe geben. Einzelheiten und eine detaillierte Darstellung findet man etwa in [SPAN66, Seiten 106ff.] und [STOZIE88, Seiten 70ff.]

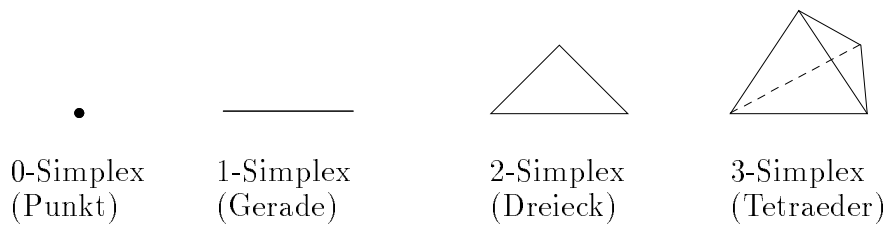
4.2.1 Simpliziale Komplexe

Definition (Simplex): Ein *geometrisches k -Simplex* im \mathbb{R}^n ist die konvexe Hülle von $k+1$ in allgemeiner Lage liegender Vektoren $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$.

Die Vektoren $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ heißen in allgemeiner Lage, falls $\dim\langle x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0 \rangle = k$ gilt, d.h. falls $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ linear unabhängig sind. Die konvexe Hülle dieser Vektoren ist die kleinste konvexe Menge, die diese Vektoren enthält. Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß die konvexe Hülle folgendermaßen charakterisiert werden kann:

$$CH(x_0, \dots, x_k) = \left\{ \sum_{j=0}^k \lambda_j x_j \mid \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1 \right\}$$

Die Vektoren x_0, \dots, x_k , die den geometrischen Simplex aufspannen, werden Ecken genannt. Unter einem Teilsimplex versteht man die konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{x_0, \dots, x_k\}$.



Definition (Polyeder): Eine Menge K geometrischer Simplexe im \mathbb{R}^n heißt ein *geometrischer Polyeder*, falls gilt:

- (i) Mit jedem geometrischen Simplex aus K enthält K auch sämtliche Teilsimplexe.
- (ii) Der Durchschnitt zweier geometrischer Simplexe aus K ist entweder leer oder ein gemeinsames Teilsimplex.
- (iii) K ist lokal endlich.

Es ist wichtig zu erkennen, daß ein geometrischer Polyeder kein topologischer Raum ist, sondern lediglich eine Menge geometrischer Simplexe. Wohl aber ist die Vereinigung

$$|K| := \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^n$$

aller geometrischen Simplexe als Teilmengen des \mathbb{R}^n ein dem geometrischen Polyeder zugrundeliegender topologischer Raum.

Für die Formulierung der in dem Abschnitt 4.3 vorzustellenden Rekonstruktionsalgorithmen erweist es sich als günstig, sich von der euklidischen Einbindung der geometrischen Simplexe und Polyeder zu lösen. Wir definieren nun einen abstrakten simplizialen Komplex und abstrakte Simplexe.

Definition (Abstrakter simplizialer Komplex): Ein *abstrakter simplizialer Komplex* $K=(E,S)$ besteht aus einer Menge E von Ecken und einer Menge S endlicher nichtleerer Teilmengen von E , den sogenannten *abstrakten Simplexen*, so daß gilt:

- (i) Jede einpunktige Teilmenge von E ist ein Simplex, d.h. ein Element von S .
- (ii) Jede nichtleere Teilmenge eines Simplex ist ein Simplex.

Unter einem abstrakten k -Simplex s versteht man ein abstraktes Simplex mit genau $k + 1$ Elementen. Das abstrakte Simplex heißt dann auch k -dimensional und man schreibt: $\dim s = k$. Die 0-dimensionalen abstrakten Simplexe werden mit den Ecken identifiziert. Die 1-dimensionalen abstrakten Simplexe werden oft auch als *Kanten* bezeichnet. Ein abstrakter simplizialer Komplex heißt n -dimensional, wenn er einen abstrakten n -dimensionalen Simplex, aber keinen abstrakten $(n+1)$ -dimensionalen Simplex enthält. Eindimensionale abstrakte simpliziale Komplexe, d.h. solche,

die nur aus Ecken und Kanten bestehen, heißen auch *Graphen*. Wenn die Gefahr einer Verwechslung mit den geometrischen Simplexen nicht besteht, so werden wir anstatt eines abstrakten Simplex nur von einem Simplex sprechen.

Um die abstrakten simplizialen Komplexe zu einer Kategorie zu machen, müssen noch die Morphismen angegeben werden.

Definition (Simpliziale Abbildungen): Seien $K_j = (E_j, S_j)$ für $j = 1, 2$ abstrakte simpliziale Komplexe. Dann heißt eine Abbildung $f : E_1 \rightarrow E_2$ simplizial, wenn stets gilt: $s \in S_1 \implies f(s) \in S_2$.

Damit werden die abstrakten simplizialen Komplexe zu einer Kategorie *Simp*. Um die simplizialen Komplexe als Zustandsräume der Nichtlinearen Dynamik verwenden zu können, müssen diese gemäß Abschnitt 1.1 zumindest mit einer Topologie versehen sein. Dieser Topologierungsprozeß wird im nächsten Unterabschnitt beschrieben.

4.2.2 Topologisierung der simplizialen Komplexe

Jedem abstrakten simplizialen Komplex $K = (E, S)$ wird ein topologischer Raum $|K|$, seine geometrische Realisierung zugeordnet. Zunächst wird die Menge $|K|$ und danach eine Topologie auf dieser Menge definiert. Die Bezeichnung $|K|$ darf trotz gleicher Notation nicht mit der Mächtigkeit einer Menge oder gar mit dem Betrag einer Zahl verwechselt werden.

Definition: Sei $K = (E, S)$ ein simplizialer Komplex, so setze:

$$|K| := \left\{ \alpha : E \rightarrow [0, 1] \mid \{e \in E \mid \alpha(e) > 0\} \right. \\ \left. \text{ist ein Simplex und } \sum_{e \in E} \alpha(e) = 1 \right\}$$

$|K|$ ist zunächst also nur eine Menge beschränkter Funktionen. Die Werte der Ecken e von K unter einer solchen Funktion α werden als baryzentrische Koordinaten von α bezeichnet. Sie bestimmen die Elemente aus $|K|$ eindeutig. Ist insbesondere der simpliziale Komplex K endlich, so werden die Funktionen $\alpha \in |K|$ durch ein Tupel baryzentrischer Koordinaten, d.h. Zahlen zwischen 0 und 1, kodifiziert. Dabei ist allerdings zu beachten, daß die Endlichkeit von K keinesweges die Endlichkeit von $|K|$ impliziert.

Nun wollen wir auf $|K|$ eine Topologie angeben. Sei $s \in S$, so heißt

$$|s| := \{ \alpha \in |K| \mid \text{für alle } e \in E \text{ mit } \alpha(e) \neq 0 \text{ folgt stets: } e \in s \}$$

abgeschlossenes abstraktes Simplex von $|K|$ genannt.

Ist s ein k -Simplex, d.h. s enthält $k+1$ Elemente, so ist $|s|$ bijektiv zum k -dimensionalen geometrischen Standardsimplex $\sigma(e_1, \dots, e_{k+1})$, welches von den Einheitsvektoren e_1, \dots, e_{k+1} des \mathbb{R}^n aufgespannt wird. Vermöge dieser Bijektion vererbt $\sigma(e_1, \dots, e_{k+1})$, welches mit der Teilraumtopologie des \mathbb{R}^n versehen ist, seine Topologie an $|s|$. Offensichtlich ist $|s|$ bezüglich dieser induzierten Topologie abgeschlossen und kompakt.

Nun wird eine gängige Methode der mengentheoretischen Topologie zur Konstruktion neuer topologischer Räume verwendet.

Definition (Coinduzierte Topologie): Sei M eine Menge, Λ eine Indexmenge, $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow M)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Abbildungen. Dann heißt:

$$\tau := \{ U \subset M \mid f_\lambda^{-1}(U) \text{ ist offen in } X_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \}$$

die durch die Familie $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ auf der Menge M coinduzierte Topologie.

Offenbar ist τ die feinste Topologie auf M , für die die Abbildungen $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow (M, \tau)$ für alle $\lambda \in \Lambda$ stetig sind.

Durch eine solche initiale Konstruktion wollen wir nun vermöge der kanonischen Inklusionen $(in_s : |s| \hookrightarrow |K|)_{s \in S}$ die Menge $|K|$ mit der coinduzierten Topologie versehen. Diese Topologie heißt die *Komplextopologie* auf $|K|$ und $|K|$ zusammen mit der Komplextopologie wird die *geometrische Realisierung* von K genannt.

In ähnlicher Weise können simplizialen Abbildungen stetige Abbildungen zugeordnet werden. Sei $f : K_1 = (E_1, S_1) \rightarrow K_2 = (E_2, S_2)$ eine simpliziale Abbildung, so wird vermöge:

$$|f| : |K_1| \rightarrow |K_2| \quad \text{mit} \quad |f|(\alpha)(e_2) = \sum_{f(e_1)=e_2} \alpha(e_1) \quad \forall \alpha \in |K_1|, e_1 \in E_1$$

eine stetige Abbildung definiert. $|f|$ heißt die *geometrische Realisierung* der simplizialen Abbildung f . Offensichtlich ist die geometrische Realisierung

wohldefiniert, da nach Voraussetzung nur über endlich viele Ecken summiert wird.

Es ist nicht schwierig nachzuprüfen, daß die Konstruktion der geometrischen Realisierung einen (covarianten) Funktor $\mathcal{Simp} \rightarrow \mathcal{Top}$ von der simplizialen Kategorie in die topologische Kategorie liefert.

Die geometrische Realisierung eines (abstrakten) simplizialen Komplexes gestattet es, sich vollständig von den euklidischen Räumen zu lösen, in denen die geometrischen Polyeder noch lagen. Zu jedem geometrischen Polyeder gibt es einen (abstrakten) simplizialen Komplex, dessen geometrische Realisierung homöomorph zum vorgegebenen geometrischen Polyeder ist. (Strenggenommen ist die geometrische Realisierung natürlich homöomorph zum zugrundeliegenden topologischen Raum des geometrischen Polyeders.) So wurde ja gerade die Komplextopologie definiert. Umgekehrt gibt es nun auch zu einer Vielzahl (abstrakter) simplizialer Komplexe einen geometrischen Polyeder, der homöomorph zur geometrischen Realisierung des simplizialen Komplexes ist. Bevor dieser Satz formuliert wird, muß ein weiterer Begriff eingeführt werden.

Definition (Polyeder): Sei $K = (E, S)$ ein simplizialer Komplex und $\{x_e \mid e \in E\}$ eine Teilmenge des \mathbb{R}^n , so heißt das Bild unter einer topologischen Einbettung

$$f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^n \quad : \quad \alpha \mapsto \sum_{e \in E} \alpha(e) x_e$$

eine *Realisierung* von K als *Polyeder* im \mathbb{R}^n .

Man beachte, daß obige Abbildung f wohldefiniert ist, da $\alpha(e)$ für nur endlich viele $e \in E$ nicht verschwindet. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine topologische Einbettung heißt, falls sie injektiv ist und X die induzierte Topologie trägt, d.h. die grösste Topologie bezüglich der f noch stetig ist.

Der folgende Satz kann mit gewissen Einschränkungen als das Analogon des Whitney'schen Einbettungssatzes für Polyeder aufgefaßt werden.

Satz (Einbettungssatz für Polyeder): Zu jedem abzählbaren, lokal endlichen und m -dimensionalen simplizialen Komplex gibt es eine polyedrale Realisierung im \mathbb{R}^{2m+1} .

Einen Beweis findet man etwa in [SPAN66].

Ich möchte hier eine etwas schwächere Version beweisen, die für unsere Zwecke allerdings vollkommen ausreicht. Dieser Beweis hat den Vorteil, daß er konstruktiv ist und somit in dem in Abschnitt 4.3 vorzustellenden Verfahren leicht implementiert werden kann.

Satz: Zu jedem endlichen, m -dimensionalen simplizialen Komplex gibt es eine polyedrale Realisierung im \mathbb{R}^{2m+1} .

Beweis: Sei $K = (E, S)$ ein m -dimensionaler, endlicher simplizialer Komplex mit $E = \{e_0, \dots, e_n\}$. Dann wähle $n + 1$ Punkte in \mathbb{R}^{2m+1} mit der Eigenschaft, daß je $2m + 2$ dieser Punkte sich in allgemeiner Lage befinden. Eine mögliche Wahl ist:

$$x_j = (j, j^2, \dots, j^{2m+1}) \quad \text{für } j = 0, \dots, n.$$

Je $2m + 2$ dieser Punkte, etwa $x_{j_1}, \dots, x_{j_{2m+2}}$ mit $j_1, \dots, j_{2m+2} \in \{0, \dots, n\}$, liegen tatsächlich in allgemeiner Lage, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{2m+2} \\ j_1^2 & j_2^2 & \dots & j_{2m+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_1^{2m+1} & j_2^{2m+1} & \dots & j_{2m+2}^{2m+1} \end{pmatrix} = \prod_{k>l} (j_k - j_l) \neq 0$$

Dies ist die berühmte Vandermonde-Determinante.

Setze nun: $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1} : \alpha \mapsto \sum_{j=0}^n \alpha(e_j) x_j$.

f IST INJEKTIV: Seien $\alpha, \beta \in |K|$ mit $f(\alpha) = f(\beta)$, d.h. $\sum_{j=0}^n \alpha(e_j) x_j = \sum_{j=0}^n \beta(e_j) x_j$. Daraus erhält man dann:

$$\sum_{j=0}^n (\alpha(e_j) - \beta(e_j)) x_j = 0$$

Da nun K m -dimensional ist, können jeweils nur $m + 1$ der Zahlen $\alpha(e_j)$ bzw. $\beta(e_j)$ von Null verschieden sein. Insgesamt verschwinden demnach höchstens $2m + 2$ der Koeffizienten $\alpha(e_j) - \beta(e_j)$ nicht. Die affin lineare Unabhängigkeit der x_j liefert nun: $\alpha = \beta$.

f IST STETIG: Die durch die kanonischen Inklusionen $(|s| \xrightarrow{in_s} |K|)_{s \in S}$ auf $|K|$ coinduzierte Topologie hat die universelle Eigenschaft, d.h. sie ist die einzige Topologie auf $|K|$, so daß für jeden topologischen Raum Z und jede Abbildung $g : |K| \rightarrow Z$ gilt:

g ist genau dann stetig, wenn $g \circ in_s$ für alle $s \in S$ stetig ist.

Wir haben nun nach Konstruktion folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} |s| & \xhookrightarrow{in_s} & |K| \\ & \searrow f \circ in_s & \swarrow f \\ & \mathbb{R}^{2m+1} & \end{array}$$

wobei $(f \circ in_s)(|s|) = \sigma(x_{j_0}, \dots, x_{j_k})$ das von den Punkten x_{j_0}, \dots, x_{j_k} aufgespannte geometrische Simplex mit $k = \dim s$ ist. Aus der Homöomorphie von $\sigma(x_{j_0}, \dots, x_{j_k})$ zum k -dimensionalen Standardsimplex folgt nun die Stetigkeit von $f \circ in_s$.

Zu zeigen bleibt noch, daß die Umkehrabbildung der von f induzierten Abbildung $\tilde{f} : |K| \rightarrow f(|K|) \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ stetig ist, d.h. daß \tilde{f} ein Homöomorphismus ist. Hierzu benötigen wir ein Ergebnis, welches weiter unten bewiesen werden wird. $|K|$ ist nämlich genau dann kompakt, wenn K endlich ist. Da nun nach einem bekannten Resultat der Topologie jede stetige und bijektive Abbildung von einem Kompaktum in einem Hausdorffraum ein Homöomorphismus ist, ist insbesondere \tilde{f}^{-1} stetig. Damit ist der Satz bewiesen.

Ich betonen nochmals, daß der angegebene Beweis konstruktiv ist und sich somit für ein algorithmisches Verfahren zur Einbettung abstrakter simplizialer Komplexe in euklidische Räume eignet.

Das Resultat des Satzes ist in dem Sinne optimal, daß es zu jeder natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$ einen m -dimensionalen simplizialen Komplex gibt, der nicht in \mathbb{R}^{2m} eingebettet werden kann. Dies bedeutet allerdings nicht, daß es nicht doch m -dimensionale simpliziale Komplexe gibt, die in niedere Dimensionen als $2m + 1$ eingebettet werden können.

Eine interessante Charakterisierung endlicher simplizialer Komplexe — dies sind diejenigen, die uns im wesentlichen interessieren werden — liefert folgender Satz.

Satz: Ein simplizialer Komplex ist genau dann endlich, wenn seine geometrische Realisierung kompakt ist.

Beweis: Siehe [SPAN66, Seite 113].

Mit diesem Satz ist nun auch der Beweis des polyedralen Einbettungssatzes vollständig.

Eine Folgerung obigen Resultates ist die Metrisierbarkeit der geometrischen Realisierung endlicher simplizialer Komplexe. Gemäß eines Korollars des Satzes von Urysohn aus der mengentheoretischen Topologie ist jeder kompakte Hausdorffraum — und um einen solchen handelt es sich nach obigen Satz bei einem endlichen simplizialen Komplex — genau dann metrisierbar, wenn er zwei-abzählbar ist, d.h. wenn er eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. In unserem Fall läßt sich die Metrik sogar explizit angeben.

$$\text{Setze für } \alpha, \beta \in |K| : \quad d(\alpha, \beta) := \sqrt{\sum_{e \in E} (\alpha(e) - \beta(e))^2}$$

Offenbar definiert d eine Metrik auf $|K|$ und $|K|$ zusammen mit dieser Metrik soll mit $|K|_d$ bezeichnet werden. Es bleibt noch zu zeigen, daß die von d auf $|K|$ induzierte Topologie tatsächlich auch äquivalent zur Komplextopologie von $|K|$ ist.

Aus der universellen Eigenschaft der Komplextopologie und folgendem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |s| & \xhookrightarrow{\quad in_\lambda \quad} & |K| \\ & \searrow id \circ in_\lambda & \swarrow id \\ & & |K|_d \end{array}$$

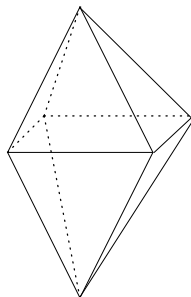
entnimmt man, daß die Identität $id : |K| \longrightarrow |K|_d$ stetig ist. Für einen endlichen Komplex K ist gemäß obigen Satzes $|K|$ bezüglich der Komplextopologie kompakt, also ist $id : |K| \xrightarrow{\cong} |K|_d$ ein Homöomorphismus. Dies zeigt, daß die Komplextopologie auf $|K|$ mit der metrischen Topologie übereinstimmt.

Als nächstes stellt sich die Frage, welche Räume sich denn überhaupt durch einen simplizialen Komplex beschreiben lassen. Solche Räume heißen Polyeder und die nächste Definition dient der Präzisierung dieses Begriffes.

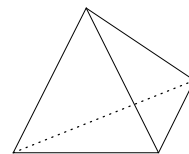
Definition (Triangulierung): Eine Triangulierung eines topologischen Raumes X ist ein Paar (K, t) , bestehend aus einem simplizialen Komplex K und einem Homöomorphismus $t : |K| \xrightarrow{\sim} X$.

Falls es zu einem topologischen Raum X eine Triangulierung gibt, so heißt X ein abstrakter Polyeder.

Die Triangulierung eines topologischen Raumes ist nicht eindeutig. Im allgemeinen kann es zu einem gegebenen topologischen Raum sogar mehrere Triangulierungen geben, die nicht einmal isomorph zueinander zu sein brauchen. Nachfolgende Abbildung zeigt zwei verschiedene Triangulierungen der 2-Sphäre S^2 .



Triangulierung der Sphäre
durch ein Oktaeder



Triangulierung der Sphäre
durch ein Tetraeder

Ein bis heute ungelöstes Problem der Topologie ist die Frage, welche Räume überhaupt eine Triangulierung besitzen. Insbesondere beschäftigt die Mathematiker die Frage, ob jede topologische Mannigfaltigkeit triangulierbar ist. Die Triangulierbarkeit von Flächen, also von 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten, konnte von RADÓ [MOI77] gezeigt werden. 1951 gelang MOISE [MOI77] der Beweis für die Triangulierbarkeit 3-dimensionaler topologischer Mannigfaltigkeiten. Die Antwort auf die Frage, ob noch höher dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten triangulierbar sind und wenn ja welche, steht bis heute noch aus. Differenzierba-

re Mannigfaltigkeiten hingegen sind triangulierbar (siehe hierzu [WH140]). Die Triangulierung kann sogar so gewählt werden, daß sie auf jedem Simplex eine differenzierbare Einbettung ist. Dieses Resultat wollen wir uns im folgenden zu Nutze machen. Bedeutet es doch gerade die prinzipielle topologische Klassifikation kompakter Zustandsräume durch endliche Datenmengen. Denn diese sind nach obiger Feststellung triangulierbar, also homöomorph zu einem kompakten Polyeder im \mathbb{R}^n , der sich aus einem endlichen simplizialen Komplex ableitet. Die endlichen simplizialen Komplexe sind aber nichts anderes, als eine endliche Zusammenfassung endlicher Mengen, also selber ein endliches Datum. Gelingt es aus den Meßdaten vermöge eines Algorithmus die Simplexanzahlen und Inzidenzen eines zur Zustandsmannigfaltigkeit gehörenden Polyeders zu ermitteln, so können im Prinzip alle topologischen Invarianten aus diesen Daten berechnet werden. Eine dieser Invarianten ist die Euler-Charakteristik.

4.2.3 Die Euler-Charakteristik

Definition: Sei $K = (E, S)$ ein endlicher simplizialer Komplex und $a_k(K)$ die Anzahl der k -dimensionalen Simplexe von K . Dann heißt

$$\chi(K) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(K)$$

die *Euler-Charakteristik* von K .

Da K als endlich vorausgesetzt wurde, ist die Summe in der Definition von $\chi(K)$ endlich und somit eine ganze Zahl. Die Euler-Charakteristik wird für gewöhnlich in einer Homologie-Theorie eingeführt. Obige Definition hat aber den Vorteil, daß $\chi(K)$ als eine kombinatorische Größe definiert wurde und somit einer algorithmischen Behandlung durch den Computer besser zugänglich ist. Die Euler-Charakteristik eines Polyeders wird nun als die Euler-Charakteristik des den Polyeder zugrundeliegenden simplizialen Komplexes definiert. Einen tieferen Sinn erhält die Euler-Charakteristik erst durch einen nicht-trivialen Invarianzsatz: Die Euler-Charakteristik eines Polyeders ist eine Homöomorphie-Invariante. Insbesondere ist sie somit von einer speziellen Triangulierung des Polyeders unabhängig. Dies kann an obigen Beispiel der Triangulierung der Sphäre S^2 überprüft werden:

$$\chi(\text{Oktaeder}) = a_0 - a_1 + a_2 = 6 - 12 + 8 = 2$$

$$\chi(\text{Tetraeder}) = a_0 - a_1 + a_2 = 4 - 6 + 4 = 2$$

Die Euler–Charakteristik der 2–Sphäre ist also: $\chi(S^2) = 2$

Weiterhin ist gemäß dieses Invarianzsatzes die Euler–Charakteristik einer delay–rekonstruierten Zustandsmannigfaltigkeit gleich der, der originären Zustandsmannigfaltigkeit.

Um die Mächtigkeit der Euler–Charakteristik zu demonstrieren, möchte ich kurz erwähnen, daß sie zur Klassifikation kompakter Flächen fast alleine genügt. Denn zwei kompakte Flächen² sind genau dann homöomorph, wenn sie die gleiche Euler–Charakteristik haben und beide orientierbar oder beide nicht orientierbar sind. Nähere hierzu findet man in [MAS67, Seite 33] und [MOI77, Seite 163].

4.3 Triangulierungsverfahren

4.3.1 Die Delaunay–Triangulierung

Ein in der Informatik sehr populärer Algorithmus zur Triangulierung endlicher Punktmengen geht auf Überlegungen von DIRICHLET und VORONOI zurück. Erst jüngst wurden diese Überlegungen zur Triangulierung geometrischer Algorithmen wiederentdeckt. Wohl als erster versuchte Mees diese Methoden auch auf die Nichtlineare Datenanalyse anzuwenden. Er schlug in [MEES91] vor, die aus einer endlichen Datenreihe Delay–konstruierten Vektoren mit einem Delaunay–Algorithmus zu triangulieren und anschließend durch ein rekursives Verfahren „falsche“ Simplexe aus dem simplizialen Komplex zu entfernen. Diese Vorgehensweise soll nun ein wenig näher betrachtet werden.

Nachfolgende Definitionen wurden [KLEI97, Seiten 213ff.] und [EDE87, Seite 293] entnommen. Aber auch in [MEES91] findet man eine kurze Einführung. Die Delaunay–Triangulierung wird am einfachsten durch ihre duale Struktur, die sogenannten Voronoi–Diagramme definiert. Im folgenden sei E stets eine k –elementige Teilmenge des \mathbb{R}^n . Definiere nun für zwei Punkte $e_1, e_2 \in E$ folgenden Halbraum im \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{D}(e_1, e_2) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \| e_1 - x \| < \| e_2 - x \| \}$$

Die verwendete Norm des \mathbb{R}^n ist zunächst beliebig und wird erst bei der konkreten Implementierung des Algorithmus bedeutsam. Dennoch vereinfacht

²Eine Fläche ist eine 2–dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

es die Anschauung, die euklidische Norm zu verwenden. Nun heißt:

$$\mathcal{VG}(e, E) := \bigcap_{p \in E - \{e\}} \mathcal{D}(e, p)$$

das *Voronoi-Gebiet*³ von e bzgl. E . Als endlicher Durchschnitt offener Halbräume ist das Voronoi-Gebiet von E offen und konvex, aber nicht notwendig beschränkt.

Da für $e_1, e_2 \in E$ die offenen Halbräume $\mathcal{D}(e_1, e_2)$ und $\mathcal{D}(e_2, e_1)$ disjunkt sind, sind auch die zugehörigen Voronoi-Gebiete $\mathcal{VG}(e_1, E)$ und $\mathcal{VG}(e_2, E)$ schnittfremd. Das Voronoi-Gebiet $\mathcal{VG}(e, E)$ von e bzgl. E besteht deshalb aus allen Punkten des \mathbb{R}^n , die näher an e liegen als alle anderen Punkte aus E .

Ein *Voronoi-Diagramm* $\mathcal{V}(E)$ von E besteht nun aus den Randpunkten aller Voronoi-Gebiete:

$$\mathcal{V}(E) := \bigcup_{e \in E} \partial \mathcal{VG}(e, E)$$

Hierbei bezeichnet $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n - A)}$ den topologischen Rand einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Das Voronoi-Diagramm von E besteht demnach aus genau den Punkten des \mathbb{R}^n , die zwei oder mehr nächste Nachbarn in E besitzen. Um dies einzusehen betrachte man eine äquivalente Definition des Voronoi-Diagramms von E

$$\mathcal{V}(E) = \bigcup_{\substack{e_1, e_2 \in E \\ e_1 \neq e_2}} \overline{\mathcal{VG}(e_1, E)} \cap \overline{\mathcal{VG}(e_2, E)}$$

zusammen mit der Feststellung

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{VG}(e_1, E)} \cap \overline{\mathcal{VG}(e_2, E)} &\subseteq \overline{\mathcal{D}(e_1, e_2)} \cap \overline{\mathcal{D}(e_2, e_1)} \\ &= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|e_1 - x\| = \|e_2 - x\| \} \end{aligned}$$

Einen Beweis für die Äquivalenz beider Definitionen wird in [KLE197] gegeben.

Haben Voronoi-Gebiete einen gemeinsamen Rand, so heißen sie benachbart. Die Nachbarschaft von Punkten aus E ist nun das Kriterium für die

³In der Physik, insbesondere in der Festkörperphysik und in der Kristallographie, sind solche Konstruktionen eher unter dem Namen *Wigner-Seitz-Zelle* bekannt. Ich werde dennoch die Bezeichnung aus der Informatik verwenden und im folgenden von *Voronoi-Gebieten* sprechen.

Konstruktion der Simplexe.. Eine Teilmenge $\{e_1, \dots, e_m\}$ von E soll genau dann Simplex des *Delaunay-Komplexes* $K_D = (E, S)$ sein, wenn die Punkte e_1, \dots, e_m im Sinne der Voronoi-Diagramm-Definition benachbart sind:

$$s := \{e_1, \dots, e_m\} \in S \quad :\Longleftrightarrow \quad \bigcap_{j=1}^m \partial \mathcal{VG}(e_j, E) \neq \emptyset$$

Feststellung: Der Delaunay-Komplex $K_D = (E, S)$ einer endlichen Teilmenge E des \mathbb{R}^n ist ein abstrakter simplizialer Komplex.

Beweis: Es sind die Definitionsbedingungen eines abstrakten simplizialen Komplexes (siehe 4.2.1) nachzuprüfen:

- (i) Die Ecken $e \in E$ sind Simplexe: Wegen $\partial \mathcal{VG}(e, E) \neq \emptyset$ gilt: $\{e\} \in S$. Wie für die gesamte Konstruktion des Delaunay-Komplexes wurde auch hier angenommen, daß E wenigstens zwei Elemente enthält.
- (ii) Teilmengen von Simplexe sind Simplexe: Ist $s = \{e_1, \dots, e_m\}$ ein Simplex und $\{j_1, \dots, j_l\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine Teilmenge, so gilt: $\bigcap_{j=1}^m \partial \mathcal{VG}(e_j, E) \neq \emptyset$. Wegen $\bigcap_{i=1}^l \partial \mathcal{VG}(e_{j_i}, E) \subseteq \bigcap_{j=1}^m \partial \mathcal{VG}(e_j, E)$ gilt dann sicherlich auch: $\bigcap_{j=1}^l \partial \mathcal{VG}(e_{j_i}, E) \neq \emptyset$. Also ist auch $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_l}\}$ ein Simplex.

Die Delaunay-Triangulierung einer endlichen Punktmenge im \mathbb{R}^n ordnet dieser Punktmenge im allgemeinen einen n -dimensionalen abstrakten simplizialen Komplex zu. Was ist aber nun, falls diese Punktmenge auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit liegt, wobei $m < n$? In diesem Fall ist der Delaunay-Komplex wohl kaum eine annehmbare Approximation der Mannigfaltigkeit.

Mees schlägt in [MEES91] zur Lösung dieses Dilemmas vor, „falsche“ Simplexe aus dem Komplex zu entfernen. Die endlich vielen delay-rekonstruierten Meßwerte werden zunächst als Teilmengen des \mathbb{R}^n vermöge der Konstruktion von Voronoi-Diagrammen trianguliert. Da die Mannigfaltigkeitsdimension echt kleiner als die Dimension des Delaunay-Komplexes ist, wird im allgemeinen nur ein Teilsimplex der wesentlichen geometrischen Simplexe einen Teil der Zustandsmannigfaltigkeit richtig approximieren, während die anderen Teilsimplexe „falsch“ sind. Diese „falschen“ Teilsimplexe können identifiziert werden, da wenigstens einer ihrer Eckpunkte in

einer anderen Gegend der Zustandsmannigfaltigkeit liegt und somit weiter vom Zentrum des Simplexs liegt als die Eckpunkte der „richtigen“ Teilsimplexe. Entfernt man nun solche Eckpunkte aus dem Simplex und wiederholt den Prozeß solange, bis alle wesentlichen Simplexe symmetrisch sind, so erhält man einen geometrischen Polyeder, der die Zustandsmannigfaltigkeit approximiert. Für diesen Polyeder können nun topologische Invarianten, wie beispielsweise die Euler-Charakteristik berechnet werden. Auch kann nach einer gelungenen Triangulierung die Dimension der Zustandsmannigfaltigkeit direkt am Polyeder abgelesen werden; diese ist identisch mit der Dimension des geometrischen Polyeders. MEES weist in [MEES91] darauf hin, daß seine Methode für nieder-dimensionale Systeme ($m = 2, 3, 4$) recht gute Resultate liefert, für höher-dimensionale Systeme aber andere Methoden zu bevorzugen seien. Ein Grund liegt in dem mit der System-Dimension schnell wachsenden Rechenaufwand. Ich möchte in den nächsten beiden Unterabschnitten zwei alternative Triangulierungsverfahren vorschlagen.

4.3.2 Triangulierung entlang Trajektorien

Die in diesem und dem nächsten Unterabschnitt von mir entwickelten Triangulierungsalgorithmen sind keineswegs ausgereift oder gar optimiert. Sie entstanden aus einer heuristischen Betrachtung des Problems der Polyedrisierung von Zustandsmannigfaltigkeiten mittels endlich vieler Punkte. Sie sollen lediglich als eine weitere, aber keineswegs mit der Delaunay-Triangulierung gleichwertigen, Triangulierungsmethode verstanden werden. Im Gegensatz zur Delaunay-Triangulierung sind beide Methoden auf die Polyedrisierung von Zustandsmannigfaltigkeiten mit Hilfe von Zeitreihen beschränkt.

Wie bereits bei der Delaunay-Triangulierung wird zunächst aus der Zeitreihe eines m -dimensionalen dynamischen Systems durch Konstruktion von Delay-Vektoren eine endliche Punktmenge im \mathbb{R}^n erzeugt:

$$E = \{ x_j \in \mathbb{R}^n \mid j = 0, 1, \dots, N \}$$

Aus diesen Datenpunkten wird nun ein m -dimensionaler simplizialer Komplex $K = (E, S)$ generiert, dessen Eckpunkte gerade die endliche Punktmenge E ist.

Für die Konstruktion der 1-dimensionalen Simplexe geht wesentlich die Information der Dynamik ein, die sich in der zeitlichen Ordnung der Datenpunkte widerspiegelt. So werden zwei aufeinander folgende Delay-Vektoren

$\{x_j, x_{j+1}\}$ eine Kante, d.h. einen 1-dimensionalen Simplex, des Komplexes K bilden. Dies scheint vernünftig zu sein, da aufgrund der Stetigkeit der Flußlinien alle zwischen zwei Meßzeiten j und $j+1$ liegenden Flußlinienpunkte ebenfalls zum Zustandsraum gehören. Also haben wir bisher:

$$\{ \{x_j, x_{j+1}\} \mid j = 0, 1, \dots, N \} \subseteq S$$

Zu jeder dieser Kanten $\{x_j, x_{j+1}\}$ werden schließlich durch Minimierung einer Kostenfunktion

$$\kappa : \{x_j\} \times \{x_{j+1}\} \times \underbrace{E \times \dots \times E}_{m-1 \text{ -mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$m-1$ paarweise verschiedene Eckpunkte gesucht, die zusammen mit x_j und x_{j+1} einen m -Simplex bilden. Die Kostenfunktion κ dient dem Ermitteln der Nachbarn von x_j und x_{j+1} . Diese Nachbarn sollen möglichst nahe beieinander liegen. Eine mögliche Wahl der Kostenfunktion ist deshalb die Gasamtlänge aller Kanten:

$$\begin{aligned} \kappa(x_j, x_{j+1}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}}) = \\ \|x_j - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - x_{i_1}\| + \dots + \|x_{i_{m-2}} - x_{i_{m-1}}\| + \|x_{i_{m-1}} - x_j\| \end{aligned}$$

Eine andere Wahl wäre das von den Argumenten aufgespannte Volumen:

$$\kappa(x_j, x_{j+1}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}}) = \text{vol}(x_j, x_{j+1}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{m-1}})$$

Neben diesen beiden Möglichkeiten gibt es sicherlich noch viele weitere. Es ist auch eine gewichtete Linearkombination aus mehreren solcher Kostenfunktionen denkbar, die extremalisiert werden soll.

Dieser Prozeß liefert k ($k \leq N$) m -Simplexe. Diese Simplexe generieren schließlich den simplizialen Komplex K in dem Sinne, daß alle Teilsimplexe der konstruierten m -Simplexe dem Komplex hinzugefügt werden.

Der so konstruierte Komplex wurde als ein abstrakter simplizialer Komplex aus einer im \mathbb{R}^n eingebetteten Punktmenge gewonnen. Obwohl dieser simpliziale Komplex bereits die gesamte topologische Information über die Zustandsmannigfaltigkeit beinhaltet und somit zur weiteren Analyse des dynamischen Systems vollkommen ausreicht, stellt man sich doch die Frage, ob es eine Realisierung dieses Komplexes als Polyeder im \mathbb{R}^n gibt. Sicherlich gibt es nach dem Einbettungssatz für Polyeder eine polyedrale Realisierung in einem hinreichend hoch-dimensionalen euklidischen Raum. Für die Visualisierung dynamischer Systeme ist man aber aus offensichtlichen Gründen an niedrige Dimensionen interessiert.

Feststellung: Sei K ein simplizialer Komplex einer endlichen Teilmenge E des \mathbb{R}^n . Befinden sich die Elemente der wesentlichen Simplexe, d.h. derer, die nicht Teilsimplexe anderer Simplexe sind, stets in allgemeiner Lage, so gibt es eine kanonische Realisierung von K als geometrischen Polyeder im \mathbb{R}^n .

Beweis: Sind $s_1, \dots, s_l \in S$ die wesentlichen Simplexe des simplizialen Komplexes $K = (E, S)$, dann setze $\sigma_j := CH(s_j)$ ($j = 1, \dots, l$), wobei $CH(s_j)$ die konvexe Hülle von s_j bezeichnet. Da sich die Elemente von s_j in allgemeiner Lage befinden, ist σ_j ein geometrisches Simplex. Die Menge dieser Simplexe zusammen mit allen Teilsimplexen ist ein geometrischer Polyeder:

Die Bedingungen (i) und (iii) der Definition eines geometrischen Polyeders (siehe 4.2.1) sind trivialerweise erfüllt.

Sind σ_i und σ_j zwei geometrische Simplexe mit nichtleerem Durchschnitt, die sich aus den wesentlichen Simplexen s_i und s_j des simplizialen Komplexes ableiten, dann folgt aus der affinen linearen Unabhängigkeit der wesentlichen Simplexe:

$$\sigma_i \cap \sigma_j = \sigma(s_i) \cap \sigma(s_j) = \sigma(s_i \cap s_j)$$

Also ist $\sigma_i \cap \sigma_j$ ein gemeinsames Teilsimplex von σ_i und σ_j , und damit ist auch die Bedingung (ii) erfüllt.

Als ein Nachteil des eben vorgestellten Triangulierungsverfahrens entlang Trajektorien mag empfunden werden, daß die Mannigfaltigkeits-Dimension für die Konstruktion des Komplexes bekannt sein muß. Falls diese aus anderen Kenntnissen über das System nicht zur Verfügung steht, scheint diese Methode zunächst zum Scheitern verurteilt. Ähnlich wie die Methode der nächsten Nachbarn (siehe hierzu etwa [ABA93]) eine zu gering gewählte Rekonstruktionsraumdimension anhand von sich schneidenden Orbits identifiziert, so wird eine zu klein gewählte Komplexdimension m bei der kanonischen Realisierung⁴ der abstrakten Simplexe als geometrische Simplexe im \mathbb{R}^n zu einander schneidenden Simplexe führen. Falls sich diese geometrischen Simplexe nicht-trivial schneiden, d.h. falls $\sigma(s) \cap \sigma(s')$ kein Teilsimplex von $\sigma(s)$ und $\sigma(s')$ und auch nicht leer ist, so muß dies als ein gutes Indiz für eine zu klein gewählte Komplex-Dimension m gewertet werden. Bei „richtigem

⁴Einem durch obigen Verfahren konstruierten wesentlichen Simplex $s \subset \mathbb{R}^n$ wird hierbei seine konvexe Hülle $\sigma(s) = CH(s)$ zugeordnet.

Durchschnittverhalten“ bilden diese geometrischen Simplexe eine Realisierung des erzeugten simplizialen Komplexes als geometrischen Polyeder. Für die algorithmische Implementierung zum Ermitteln des „richtigen Durchschnittsverhaltens“ kann etwa obige Feststellung herangezogen werden. Die Frage, ob sich gegebene Vektoren in allgemeiner Lage befinden, ist einer numerischen Behandlung zugänglich. Dieses Problem reduziert sich im wesentlichen auf die Berechnung einer Determinante.

4.3.3 Ein Triangulierungsalgorithmus für Zustandsflächen

Folgende Triangulierungsmethode ist auf kompakte Zustandsflächen beschränkt. Eine Verallgemeinerung auf höher-dimensionale Zustandsmannigfaltigkeiten sollte aber nach einigen Modifikationen möglich sein. Die Zustandsraumdimension muß also auch hier vorher bekannt sein. Im Gegensatz zu den in 4.3.1 und 4.3.2 beschriebenen Triangulierungsalgorithmen werden aus den Meßwerten *keine* Delay-Vektoren konstruiert, die dann trianguliert werden, sondern direkt aus den Meßwerten wird ein abstrakter simplizialer Komplex erzeugt. Dieses Verfahren ist in gewissen Sinne unabhängig vom Satz von Takens. Für dieses Verfahren wird noch eine weitere Definition und ein mathematischer Satz benötigt, den man in [MAS67] findet.

Definition: Ein endlicher, zwei-dimensionaler, abstrakter simplizialer Komplex heißt *flächenartig*, wenn gilt:

- (i) Jede Ecke ist Teilsimplex einer Kante.
- (ii) Jede Kante ist Teilsimplex von mindestens einem und höchstens zwei 2-Simplexe.
- (iii) Sei e eine Ecke und s_1, \dots, s_l alle 2-Simplexe, die e als Teilsimplex enthalten. Dann kann man diese so numerieren, daß s_i und s_{i+1} ($1 \leq i \leq l$) eine gemeinsame Kante haben.

Satz: Die geometrische Realisierung eines endlichen, abstrakten simplizialen Komplexes als Polyeder im \mathbb{R}^n ist genau dann eine kompakte Fläche, wenn der Komplex flächenartig ist.

Um diesen Satz richtig einschätzen zu können, sollte beachtet werden, daß eine geometrische Realisierung eines simplizialen Komplexes als Polyeder zwar ein topologischer Raum, aber im allgemeinen keine Mannigfaltigkeit ist. Die Realisierungen von Flächenkomplexen sind aber nach diesem

Satz stets kompakte 2-Mannigfaltigkeiten. Dieser Satz dient als theoretische Grundlage für das Folgende. Entlang der Meßtrajektorie wird ein flächenartiger simplizialer Komplex konstruiert, dessen geometrische Realisierung dann homöomorph zur Zustandsfläche sein soll.

Bezeichnet $(f_j)_{j=0}^N \subset \mathbb{R}$ die aufgenommene skalare Zeitreihe, so wollen wir von vornherein annehmen, daß jeder Meßwert wenigstens zweimal auftritt. Ist dies nicht der Fall, so werden die nur einmal vorkommenden Meßwerte aus der Zeitreihe entfernt. Folgende Funktion⁵

$$f : \underline{N} \longrightarrow \mathbb{R} : j \longmapsto f_j$$

repräsentiere die aufgenommene endliche Datenreihe, wobei $\underline{N} := \{0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{N}_0$. Bevor der Algorithmus beschrieben werden kann, muß noch eine weitere Notation eingeführt werden:

Für $j \in \underline{N}$ bezeichne $\nu(j) \in f^{-1}(f_j) - \{j\}$, d.h. den Meßpunkt mit demselben Meßwert wie j : $f_j = f_{\nu(j)}$. Enthält die Menge $f^{-1}(f_j) - \{j\}$ mehrere Elemente, so wähle dasjenige Element für $\nu(j)$, welches den Abstand $|f_{j+1} - f_{\nu(j)+1}|$ minimiert.

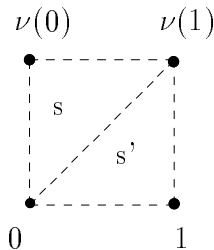
Die Konstruktion des Flächenkomplexes erfolgt induktiv und untergliedert sich deshalb in einem Induktionsanfang und einem Induktionsschritt. In einer algorithmischen Implementierung dieses Verfahrens wird hierfür ein Schleifenkonstrukt verwendet.

Anfang

Ohne Einschränkung sei $f_0 \neq f_1$. Dann setze:

$$s := \{0, \nu(0), \nu(1)\} \text{ und } s' := \{0, 1, \nu(1)\}$$

Offensichtlich erzeugen s und s' einen flächenartigen simplizialen Komplex. Um die konstruierten Simplexe s und s' zu visualisieren, verwende ich folgende symbolische Schreibweise:



Die vertikalen Linien repräsentieren die Fasern von f und entlang der unteren horizontalen Linie verläuft die Trajektorie.

⁵Diese Funktion darf trotz gleicher Notation nicht mit der Meßfunktion verwechselt werden.

Die zunächst wenig verständliche Wahl für die beiden erzeugenden Simplexe s und s' wird ein wenig durchsichtiger, wenn man sich eine naive Triangulierung von Delay-Vektoren im \mathbb{R}^2 in Erinnerung ruft. Zu einem gegebenen Delay-Vektor (f_j, f_{j+1}) wird man aus der Menge aller Delay-Vektoren die beiden auswählen, die dem Vektor (f_j, f_{j+1}) am nächsten sind. Zusammen bilden diese drei Delay-Vektoren dann einen erzeugenden 2-Simplex. Der nächste Nachbar (f_k, f_{k+1}) von (f_j, f_{j+1}) muß also folgende Bedingung erfüllen:

$$|f_j - f_k| + |f_{j+1} - f_{k+1}| \longrightarrow \text{minimal}$$

Es darf nun erwartet werden, daß diese Größe in den meisten Fällen klein sein wird, falls gilt: $|f_j - f_k| = 0$, d.h. falls $k \in f^{-1}(f_j)$. Der Abstand der jeweils folgenden Meßwerte $|f_{j+1} - f_{k+1}|$ sollte aufgrund der Stetigkeit der Flußlinien und der Meßfunktion ebenfalls noch klein sein, so daß der Abstand der beiden Delay-Vektoren (f_j, f_{j+1}) und (f_k, f_{k+1}) voneinander, wenn nicht minimal, so doch zumindest hinreichend klein ist. Dies ist umso besser erfüllt, je kleiner das Abtastzeitintervall ist. Ich möchte hier betonen, daß diese heuristische Herleitung für die Wahl der beiden erzeugenden Simplexe keineswegs als Beweis die die richtige Repräsentation der Zustandsfläche durch diese Simplexe verstanden werden darf.

Schritt

Als Induktionsvoraussetzung wird angenommen, daß $K = (E, S)$ ein flächenartiger simplizialer Komplex und n maximal mit $j \in E \ \forall j \leq n < N$ ist. Ferner soll $\{n, \nu(n)\}$ die Kante von höchstens einem 2-Simplex sein. Nun werden entlang der Trajektorie 2-Simplexe konstruiert, die entlang bereits existierender Kanten des Flächenkomplexes K „verklebt“ werden. Als Kriterium für die Erzeugung dieser 2-Simplexe dienen obige Axiome (i) – (iii) der Definition eines Flächenkomplexes. Es treten nun mehrere Fälle auf, die einzeln behandelt werden:

FALL 1: $\nu(n+1) \notin E$: Dann setze:

$$s := \{n, \nu(n), \nu(n+1)\} \text{ und } s' := \{n, n+1, \nu(n+1)\}$$

FALL 4: $\nu(n+1) \in E$, $\{n, \nu(n+1)\}$ oder $\{\nu(n), \nu(n+1)\}$ ist Kante von genau zwei 2-Simplexe: Würde man nun eine Simplex-Konstruktion gemäß Fall 3 vornehmen, so wäre Axiom (u) der Definition eines Flächenkomplexes verletzt. Deshalb muß vom bisherigen Konstruktionsschema ein wenig abgewichen werden. Zunächst wird ein Meßpunkt $\mu(n+1)$ in der Menge $f^{-1}(f_{n+1}) - \{n+1, \nu(n+1)\}$ mit der Eigenschaft gesucht, daß die beiden Kanten $\{n, \mu(n+1)\}$ und $\{\nu(n), \mu(n+1)\}$ nicht mehr Kanten von genau zwei 2-Simplexe sind. Findet man einen solchen Meßpunkt in der Faser $f^{-1}(f_{n+1}) - \{n+1, \nu(n+1)\}$ nicht, so suche man einen solchen in den Fasern benachbarter Meßpunkte. Setze schließlich $\nu(n+1) = \mu(n+1)$ und konstruiere ein oder zwei 2-Simplexe entsprechend der Fälle 1 – 3.

Dieses induktive Verfahren terminiert, wenn die Abbruchbedingung $n = N$ erfüllt ist.

An dieser Stelle möchte ich nochmals den Unterschied zu den beiden anderen Triangulierungsverfahren hervorheben. Aus einer endlichen Zeitreihe wurde ohne (direkte) Hilfeleistung des Satzes von Takens ein abstrakter simplizialer Komplex konstruiert, der vermöge des Satzes in 4.2.2 als geometrischer Polyeder realisiert werden kann. Ferner ist dieser Polyeder stets eine kompakte Fläche, die im Idealfall homöomorph zur originären Zustandsfläche ist. Vorteilhaft an dieser Methode dürfte sich der wohl geringe Rechenaufwand auswirken. Im Gegensatz zu den beiden anderen Verfahren müssen hier nur skalare Abstände berechnet werden. Ansonsten reduziert sich der numerische Aufwand auf die Frage, ob ein Meßpunkt in einer bestimmten Menge⁶ enthalten ist oder nicht. Insbesondere gestaltet sich die numerische Berechnung topologischer Invarianten, die als kombinatorische Größen definiert werden können, besonders einfach. So reduziert sich etwa die Berechnung der Euler-Charakteristik auf das Abzählen aller ein-, zwei- und drei-elementigen Mengen des Flächenkomplexes.

Neben vielen denkbaren Modifikationen und Verbesserungen möchte ich eine kurz erwähnen, die sich auf reale Datenreihen positiv auswirken dürfte. Da die durch reale Messungen erzeugten Zeitreihen stets verrauscht sind, wird als Auswahlkriterium für $\nu(n)$ folgende Bedingung

$$|f_n - f_{\nu(n)}| < \text{Rauschschranke}$$

wahrscheinlich bessere Resultate liefern.

⁶Diese Mengen werden in einer algorithmischen Implementierung als `arrays` realisiert.

Kapitel 5

Invarianten unter Rekonstruktionsabbildungen

Neben der Prädiktion von Zeitreihen ist die Klassifikation dynamischer Systeme ein Hauptanliegen der Nichtlinearen Dynamik. Die Gesamtheit aller dynamischen Systeme wird in Äquivalenzklassen zerlegt. Welches die hierzu benutzte Äquivalenzrelation ist, hängt von der angestrebten Beschreibungstiefe und damit auch von den Anforderungen an das Klassifikationsschema ab. Eine häufig gebrauchte Äquivalenzrelation ist die, der \mathcal{C}^∞ -Konjugation. Es ist zu beachten, daß andere Äquivalenzrelationen einen etwas loseren oder auch strengeren Begriff des dynamischen Systems erfordern, als den gängigen, eines differenzierbaren Flusses auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Allgemeinere Definitionen wurden in 1.1 vorgestellt. Ein strengerer Begriff wäre beispielsweise der, eines holomorphen Flusses auf einer komplexen Mannigfaltigkeit.

Durch Einführung sogenannter *charakteristischer Kenngrößen* möchte man die Äquivalenzklassen eindeutig beschreiben. Eine Äquivalenzklasse soll durch möglichst endlich viele, leicht berechenbarer charakteristischer Größen eindeutig bestimmt sein. Da solche Größen für alle Mitglieder einer Äquivalenzklasse gleich sein sollen, werden diese auch als *Invarianten* bezeichnet. Umgekehrt definieren beliebige charakteristische Größen eine Partition der Gesamtheit aller dynamischen Systeme. Diese Größen sind dann natürlich invariant auf den partitionierten Klassen. Im Idealfall soll diese Partition mit der Partition in Äquivalenzklassen bzgl. der vorgegebenen Äquivalenzrelation übereinstimmen. Das Auffinden geeigneter, insbesonde-

re leicht zu berechnender, charakteristischer Größen ist nicht einfach und eine vollständige Klassifikation aller dynamischen Systeme ein ungelöstes Problem.

Zu den Homöomorphie-Invarianten der Topologie zählen die Euler-Charakteristik und die Betti-Zahlen. Die algebraische Topologie kennt zudem noch algebraische Objekte, wie die Homotopie- oder Homologiegruppen, die ebenfalls auf den Homöomorphieklassen invariant sind. Die Anzahl der Fixpunkte, periodischer Orbits und deren Stabilitätseigenschaften sind typische Invarianten der Theorie dynamischer Systeme. In der Nichtlinearen Dynamik wurden zudem weitere charakteristische Größen, wie fraktale Dimensionen oder Ljapunov-Exponenten, eingeführt. All diese Größen müssen unter Rekonstruktionsabbildungen erhalten bleiben. Nur so ist es möglich, solche charakteristischen Größen am rekonstruierten System zu berechnen und auszunutzen, daß diese mit denen des Originalsystems übereinstimmen.

In diesen kurzen Kapitel möchte ich zeigen, daß nicht alle charakteristischen Größen notwendig invariant unter den in Kapitel 2 und Kapitel 3 eingeführten Rekonstruktionsabbildungen sind.

Die Delay-Koordinatenabbildungen sind generisch Einbettungen und somit Diffeomorphismen auf die Bilder der Einbettungen. Damit bleiben alle Diffeomorphie- und Homöomorphieinvarianten generisch unter Delay-Koordinatenabbildungen erhalten. Zu diesen zählen die bereits erwähnten Homotopie-, Homologie- oder Cohomologiegruppen, ebenso wie die Bordismenklassen.

Trägt die Zustandsmannigfaltigkeit neben der differenzierbaren Struktur noch weitere Strukturen, wie zum Beispiel algebraische oder metrische, so werden die Delay-Einbettungen diese zusätzlichen Strukturen im allgemeinen nicht respektieren.

In der Nichtlinearen Dynamik werden zur Charakterisierung von Attraktoren fraktale Dimensionen herangezogen. Viele dieser Dimensionen sind metrische Größen, d.h. ihre Definitionen benötigen eine Metrik auf den Zustandsräumen. Sind die Zustandsräume als Mannigfaltigkeiten modelliert, so sind sie zunächst mit keiner Metrik ausgerüstet, auf ihnen ist lediglich eine Topologie gegeben. Aber differenzierbare Mannigfaltigkeiten lassen sich metrisieren, d.h. es gibt eine Metrik auf ihnen, die die Topologien der Mannigfaltigkeiten erzeugen. Ist \mathcal{M}^m eine m -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, so induziert eine Einbettung $F : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ eine

Metrik d_F auf \mathcal{M}^m :

$$d_F(p, q) := \|F(p) - F(q)\|_2 \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{M}^m$$

Die induzierte Metrik d_F erzeugt ferner die Topologie von \mathcal{M}^m , d.h. eine Teilmenge von \mathcal{M}^m ist genau dann offen bzgl. der Topologie von \mathcal{M}^m , wenn sie offen bzgl. der Metrik d_F ist. Mit dieser Bemerkung macht es also durchaus Sinn, eine metrische Dimension auf einer Zustandsmannigfaltigkeit zu definieren.

Nachfolgende Überlegungen werden exemplarisch an der box-counting-Dimension durchgeführt, da diese leicht zu definieren und auch zu berechnen ist. Es kann aber auch jede andere metrische Dimension verwendet werden. Folgende Definition wurde aus [PES93] entnommen.

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von X .

Dann setze für $\varepsilon > 0$:

$$N_\varepsilon(A) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \dots, x_n \in X \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{j=1}^n \overline{B_\varepsilon}(x_j) \right\}$$

Falls folgender Grenzwert existiert

$$\dim_{box}(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log 1/\varepsilon},$$

so heißt er die *box-counting-Dimension* von A .

Es ist klar, daß die box-counting-Dimension nur für beschränkte Mengen existieren kann. Die box-counting-Dimension eines beschränkten Attraktors auf einer Zustandsmannigfaltigkeit ist nun bzgl. einer mit der Topologie der Mannigfaltigkeit verträglichen Metrik zu erklären.

Ist $F_{(\phi, f, n)} : \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Delay-Einbettung, wobei die Zustandsmannigfaltigkeit \mathcal{M}^m mit der von $F_{(\phi, f, n)}$ induzierten Metrik d_F versehen sei, und $A \subset \mathcal{M}^m$ ein Attraktor, für den die box-counting-Dimension existiert, dann existiert auch $\dim_{box}(F_{(\phi, f, n)}(A))$ und es gilt

$$\dim_{box}(F_{(\phi, f, n)}(A)) = \dim_{box}(A).$$

Diese Invarianz ist sofort einsichtig, wenn man bedenkt, daß $F_{(\phi, f, n)}$ eine Isometrie zwischen den beiden metrischen Räumen (\mathcal{M}^m, d_F) und $(\mathbb{R}^n, d_{eukl.})$ ist. Für andere Metriken auf der Zustandsmannigfaltigkeit ist

obige Relation im allgemeinen nicht mehr erfüllt, selbst dann, wenn diese Metriken zu d_F äquivalent¹ sind. Um dies zu zeigen, benötigt man das nächste Lemma.

Lemma: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $0 < \alpha < 1$ eine reelle Zahl. Dann ist d^α eine zu d äquivalente Metrik auf X .

Beweis: Symmetrie und Positivität von d^α sind klar. Bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Wähle zunächst ein festes $t_0 \in (0, \infty)$ und setze:

$$f_\alpha(t) := t^\alpha + t_0^\alpha - (t - t_0)^\alpha$$

Dann gilt für die Ableitung: $f'_\alpha(t) = \alpha(t^{\alpha-1} - (t - t_0)^{\alpha-1}) \geq 0 \quad \forall t \geq t_0$, wegen $\alpha - 1 < 0$. Also ist f_α monoton wachsend für $t \geq t_0$. Aus $f_\alpha(0) = 0$ folgt deshalb: $f_\alpha(t) \geq 0 \quad \forall t \geq t_0$.

Seien nun $x, y, z \in X$ beliebig, dann gilt aufgrund obiger Eigenschaft von f_α und der Dreiecksungleichung für d :

$$d^\alpha(x, z) \leq (d(x, y) + d(y, z))^\alpha \leq d^\alpha(x, y) + d^\alpha(y, z)$$

Damit definiert d^α eine Metrik auf X .

Aus $d^\alpha(x, y) < \varepsilon \iff d(x, y) < \varepsilon^{1/\alpha}$ folgt sofort:

$$\mathcal{O}(d^\alpha) = \mathcal{O}(d)$$

Also sind d und d^α äquivalente Metriken.

Folgerung: Für jedes $\gamma \geq 1$ gibt es auf \mathbb{R}^n eine Metrik, die die euklidische Topologie erzeugt und bzgl. derer für die box-counting-Dimension gilt: $\dim_{box}^{(\gamma)}([0, 1]^n) = \gamma n$.

Beweis: Für $\gamma = 1$ wähle die euklidische Metrik und für $\gamma > 1$ setze:

$$d^\alpha(x, y) := \|x - y\|_2^\alpha \quad \text{mit } \alpha = 1/\gamma.$$

Aus $B_\varepsilon^{(\alpha)}(x) = B_{\varepsilon^\gamma}^{(eukl.)}(x)$ folgt: $N_\varepsilon([0, 1]^n) = 1/\varepsilon^{n\gamma}$, wobei $B_\varepsilon^{(\alpha)}(x)$ die offene ε -Kugel bzgl. der Metrik d^α und $B_\varepsilon^{(eukl.)}(x)$ die offene ε -Kugel bzgl. der euklidischen Metrik bezeichnet. Also gilt:

$$\dim_{box}^{(\gamma)}([0, 1]^n) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log 1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 1/\varepsilon^{n\gamma}}{\log 1/\varepsilon} = n\gamma.$$

¹Zwei Metriken d und d' auf einer Menge X heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie auf X erzeugen: $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(d')$. Dies ist gleichwertig zu der Aussage, daß die Identität $\text{id} : (X, d) \longrightarrow (X, d')$ ein Homöomorphismus ist.

Diese Folgerung zeigt, daß die box-counting-Dimension abhängig von der benutzten Metrik ist. Selbst auf dem \mathbb{R}^n gibt es Metriken, die die euklidische Topologie erzeugen, bzgl. derer aber so reguläre geometrische Objekte, wie der Einheitswürfel $[0, 1]^n$, sehr wohl nicht-ganzzahlige box-counting-Dimensionen haben können.

Mit dieser Folgerung kann nun eine Delay-Einbettung konstruiert werden, die die box-counting-Dimension nicht erhält.

Feststellung: Sei $0 < \alpha < 1$ beliebig. Dann gibt es eine Delay-Einbettung $F_{(\phi, f, m)} : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$, wobei $\mathcal{M} \subseteq (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2^\alpha)$ eine Untermannigfaltigkeit ist, die den Einheitswürfel enthält, mit folgender Eigenschaft:

$$\dim_{box}([0, 1]^m) \neq \dim_{box}(F_{(\phi, f, m)}([0, 1]^m))$$

Beweis: Wähle $\phi(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) = (x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(m)}, x^{(1)})$ und $f(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = x^{(1)}$. Dann ist ϕ ein Diffeomorphismus und die Delay-Koordinatenabbildung $F_{(\phi, f, m)}$ eine Einbettung, da $F_{(\phi, f, m)} = id$. Aus obiger Feststellung erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{m}{\alpha} &= \dim_{box}^{(\alpha)}([0, 1]^m) \neq \dim_{box}(F_{(\phi, f, m)}([0, 1]^m)) \\ &= \dim_{box}([0, 1]^m) = m \end{aligned}$$

Wählt man in obiger Feststellung die diskrete Metrik² für den Definitionsbereich der Delay-Einbettung, so existiert die box-counting-Dimension für den Einheitswürfel $[0, 1]^m$ noch nicht einmal, wohingegen diese für das Bild von $[0, 1]^m$ unter der Delay-Einbettung sehr wohl existiert. Diese Bemerkungen zeigen, daß metrische Dimensionen zur Charakterisierung von Delay-rekonstruierten Zustandsräumen oder Attraktoren im allgemeinen ungeeignet sind.

Im nächsten Satz wird eine hinreichende Voraussetzung für die Invarianz der box-counting-Dimension unter Delay-Einbettungen angegeben.

Satz: Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, sowie $f : X_1 \rightarrow X_2$ ein Homöomorphismus, der einer Lipschitz-Bedingung genügt. Ferner sei auch die Umkehrabbildung Lipschitz-stetig und für

²Die diskrete Metrik auf einer Menge X ist durch das Kronecker-Delta $\delta_{x,y}$ definiert.

$A \subseteq X_1$ existiere die box-counting-Dimension. Dann existiert auch $\dim_{box} f(A)$ und es gilt:

$$\dim_{box}(A) = \dim_{box}(f(A))$$

Beweis: Sei L die Lipschitz-Konstante von f und $\varepsilon > 0$ beliebig, aber zunächst fest. Dann folgt aus

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon(A)} \overline{B_\varepsilon}(x_j) \implies f(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon(A)} f(\overline{B_\varepsilon}(x_j)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon(A)} \overline{B_{L\varepsilon}}(f(x_j))$$

Also hat man: $N_{L\varepsilon}(f(A)) \leq N_\varepsilon(A)$ Damit ergibt sich nun:

$$\frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log 1/\varepsilon} \geq \frac{\log N_{L\varepsilon}(f(A))}{\log 1/L\varepsilon + \log L} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \dim_{box}(f(A))$$

Also gilt folgende Ungleichung: $\dim_{box}(A) \geq \dim_{box}(f(A))$. Ein analoger Schluß für die Umkehrabbildung liefert die Behauptung.

Daß man auf die Lipschitz-Bedingung nicht verzichten kann, zeigt obige Feststellung. Selbst die Forderung der gleichmäßigen Stetigkeit genügt nicht. Eine direkte Folgerung aus dem Satz ist die Konstanz der box-counting-Dimension eines beschränkten Attraktors A auf den Äquivalenzklassen der Metriken bzgl. der Lipschitz-Äquivalenzrelation³. Denn sind d und d' zwei Lipschitz-äquivalente Metriken auf X , so ist $id : (X, d) \longrightarrow (X, d')$ ein Lipschitz-stetiger Homöomorphismus mit Lipschitz-stetiger Umkehrabbildung und somit gilt: $\dim_{box}^{(d)}(A) = \dim_{box}^{(d')}(id(A))$.

Werden nur Metriken auf dem \mathbb{R}^n betrachtet, die sich aus Normen ableiten, so ist die box-counting-Dimension unabhängig von der gewählten Metrik, denn bekanntlich sind alle Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen (Lipschitz-)äquivalent.

Ist der Zustandsraum \mathcal{M} eine kompakte konvexe Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^k und mit einer Metrik versehen, die Lipschitz-äquivalent zur euklidischen Metrik ist, so sind die Delay-Einbettungen stets Lipschitz-stetig mit Lipschitz-stetiger Umkehrabbildung; insbesondere ist dann die box-counting-Dimension generisch eine Invariante für Delay-Koordinatenabbildung. Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Schrankensatz der Analysis [KON93, Seite 108,109]. Für allgemeine Zustandsmannigfaltigkeiten ist die Situation komplizierter. Aber immerhin kann

³Zwei Metriken d und d' auf einer Menge sollen Lipschitz-äquivalent heißen, wenn es Konstanten $c, C > 0$ mit $cd \leq d' \leq Cd$ gibt.

aus dem Satz von Stone–Weierstraß gefolgert werden, daß die Meßfunktionen auf Kompakta generisch einer Lipschitz–Bedingung genügen. Ist zudem noch die diskrete Flußabbildung Lipschitz–stetig, so sind die Delay–Koordinatenabbildungen generisch ebenfalls Lipschitz–stetig und man erhält eine Abschätzung für die box–counting–Dimension:

$$\dim_{box}(F_{(\phi, f, n)}(A)) \leq \dim_{box}(A)$$

Kapitel 6

Zusammenfassung

Das Takens–Theorem begründet ein äußerst mächtiges Verfahren zu Rekonstruktion dynamischer Systeme. Wie in dieser Arbeit diskutiert wurde, ist jedoch eine gewisse kritische Haltung diesem Verfahren gegenüber angebracht. Der Satz von Takens macht eine Aussage darüber wie die Flußabbildungen und Meßfunktionen, welche eine Einbettung generieren, im Raum aller Diffeomorphismen und Meßfunktionen liegen, nämlich offen und dicht. Die Offenheitsaussage kann so interpretiert werden, daß die Paare (ϕ, f) , welche eine Delay–Einbettung erzeugen, nicht diskret liegen. Anschaulich gesprochen bedeutet die Dichtheit, daß die Paare (ϕ, f) , die eine Delay–Einbettung generieren, „homogen“ im Abbildungsraum $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ verteilt sind. Allerdings macht dieser Satz keine Aussage darüber, welche nachprüfbaren Voraussetzungen ein Paar (ϕ, f) erfüllen muß, damit es eine Delay–Einbettung erzeugt. In Kapitel 2 konstruierte ich zwei Fälle, für die das Delay–Rekonstruktionsverfahren versagte. Diese Konstruktion stellte so wenige Anforderungen an das dynamische System und die Meßfunktion, daß eine modifizierte Version des Satzes von Takens, die gewährleisten würde, daß jedes dynamische System und jede Meßfunktion, welche bestimmte Voraussetzungen erfüllen, eine Einbettung generiert, nicht erwartet werden kann. Weiterhin sahen wir in diesem Kapitel, daß die Transversalität der tiefere Grund für die erforderlichen $2m+1$ Variablen der Einbettungssätze ist. Wählt man weniger Freiheitsgrade, so können dennoch fast immer lokale Eigenschaften und Kenngrößen des dynamischen Systems aus einer Delay–Koordinatenabbildungen gewonnen werden.

Wir sahen ferner, daß die Endlichkeit der aufgenommenen Datenreihe zu prinzipiellen Schwierigkeiten der Rekonstruktion führt. Eine injektive Delay-Koordinatenabbildung auf einer endlichen Teilmenge der Zustandsmannigfaltigkeit läßt sich zwar zu einer Einbettung fortsetzen, der Definitionsbereich einer solchen Einbettung ist aber keineswegs eindeutig. Jede Untermannigfaltigkeit des Zustandsraumes, welche die endliche Teilmenge enthält, eignet sich für einen solchen fortgesetzten Definitionsbereich.

Die Diskussion in Kapitel 4 zeigte nun aber, daß ein kompakter Zustandsraum zusammen mit seiner Topologie prinzipiell aus nur endlich vielen Punkten rekonstruiert werden kann. Dieses verblüffende Ergebnis basiert auf einem tiefliegenden Satz von WHITEHEAD über die Triangulierbarkeit kompakter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Um Rekonstruktionsverfahren aus nur endlich vielen Meßpunkten zu beschreiben, erwiesen sich abstrakte simpliziale Komplexe als ein effizientes Hilfsmittel. Die Delaunay-Triangulierung und die Triangulierung entlang Trajektorien erzeugen aus den Delay-Vektoren, welche aus einer endlichen Meßreihe gewonnen werden, einen simplizialen Komplex. Hingegen generiert das in 4.3.3 vorgestellte Triangulierungsverfahren für kompakte Zustandsflächen direkt aus den Meßwerten, d.h. ohne diese vorher in einen \mathbb{R}^n einzubetten, einen abstrakten simplizialen Komplex. Ein solcher Komplex beinhaltet die gesamte topologische Information des Zustandsraumes. Insbesondere kann aus diesem sehr leicht die Euler-Charakteristik des Zustandsraumes berechnet werden, aber auch alle anderen topologischen Invarianten sind prinzipiell durch den simplizialen Komplex des Zustandsraumes determiniert. Ein weiteres Ergebnis dieses Kapitels war, daß die aus einem Triangulierungsverfahren gewonnenen simplizialen Komplexe auch als geometrische Polyeder in einem \mathbb{R}^n realisiert werden können.

In Kapitel 5 führte ich exemplarisch an der box-counting-Dimension vor, daß nicht alle charakteristischen Kenngrößen der Nichtlinearen Dynamik unter Delay-Einbettungen notwendig invariant sind. Die durch eine Delay-Einbettungen gewonnenen Kenngrößen sollten deshalb kritisch betrachtet werden. Vor allem bei metrischen und algebraischen Größen ist Vorsicht geboten.

Literaturverzeichnis

- [ABA93] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, L. S. Tsimring: *The analysis of observed chaotic data in physical systems*, Reviews of Modern Physics, **65**, 4 (1993) 1331–1392.
- [ABA96] H. D. I. Abarbanel: **Analysis of observed chaotic data**, Springer–Verlag, New York 1996.
- [ABRMAR78] R. Abraham, J. E. Marsden: **Foundations of Mechanics**, second printing, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading 1978.
- [AEY81] D. Aeyels: *Generic observability of differentiable systems*, SIAM Journal of Control and Optimization, **19**, 5 (1981) 595–603.
- [BRE93] G. E. Bredon: **Topology and Geometry**, Springer–Verlag, New York 1993.
- [BRJ90] T. Bröcker, K. Jänich: **Einführung in die Differentialtopologie**, korrigierter Nachdruck, Springer–Verlag, Berlin 1990.
- [EDE87] H. Edelsbrunner: **Algorithms in Combinatorial Geometry**, Monographs on Theoretical Computer Science, Volume 10, Springer–Verlag, New York 1987.
- [HIR76] M. W. Hirsch: **Differential Topology**, second printing, Springer–Verlag, New York 1976.
- [KLE197] R. Klein: **Algorithmische Geometrie**, Addison–Wesley, Bonn 1997.
- [KON93] K. Königsberger: **Analysis 2**, Springer–Verlag, Berlin 1993.

- [MAS67] W. S. Massey: **Algebraic Topology: An Introduction**, Harcourt, Brace & World, Inc. , New York 1967.
- [MEES91] A. I. Mees: *Dynamical systems and tessellations: detecting determinism in data*, International Journal of Bifurcation and chaos, **1**, 4 (1991) 777–794.
- [MOI77] E. E. Moise: **Geometric Topology in Dimensions 2 and 3**, Springer–Verlag, New York 1977.
- [PES93] Y. B. Pesin: *On rigorous mathematical definitions of correlation dimension and generalized spectrum for dimensions*, Journal of Statistical Physics, **71**, 3 (1993) 529–547.
- [RUE89] D. Ruelle: **Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory**, Academic Press Inc., San Diego 1989.
- [SAU91] T. Sauer, J. A. York, M. Casdagli: *Embedology*, Journal of Statistical Physics, **65**, 3 (1991) 579–616.
- [SPAN66] E. H. Spanier: **Algebraic Topology**, Mc Graw–Hill, Inc. , New York 1966.
- [STA95] J. Stark: *Delay embeddings for forced systems: I Deterministic forcing*, preprint, University College London 1995.
- [STA96] J. Stark, D. S. Broomhead, M. E. Davies, J. Huke: *Takens embedding theorems for forced and stochastic systems*, preprint, University College London 1996.
- [STOZIE88] R. Stöcker, H. Zieschang: **Algebraische Topologie**, B. G. Teubner, Stuttgart 1988.
- [TAK80] F. Takens: *Detecting Strange Attractors in Turbulence*, in: **Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980**, ed. D. A. Rand and L. -S. Young, Lecture Notes in Mathematics **898**, Springer–Verlag, Berlin 1980, 366–381.
- [WER97] D. Werner: **Funktionalanalysis**, 2. Auflage, Springer–Verlag, Berlin 1997.
- [WHI40] J. H. C. Whitehead: *On C^1 -complexes*, Annals of Mathematics, **41**, (1940) 809–824.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Beckmann für die interessante Themenstellung und Betreuung bedanken. Seine ständige Gesprächsbereitschaft und intensiven Diskussionen trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Dank schulde ich auch Dipl. Phys. Carsten Michel für die Unterstützung bei der Erstellung der L^AT_EX-Version dieser Arbeit. Er und Dipl. Phys. Jan C. Schmidt investierten viel Zeit in die kritische Durchsicht meiner Arbeit, wofür ich mich ganz herzlich bedanken möchte.

Überdies ist es der Verdienst meiner Eltern, mir mein Physikstudium überall die Jahre zu ermöglichen. Ihnen gilt mein besonderer Dank.