

Wolfgang Mathis
Albrecht Reibiger

Küpfmüller

Theoretische

Elektrotechnik

Elektromagnetische Felder, Schaltungen
und elektronische Bauelemente

20. Auflage

EXTRAS ONLINE



Springer Vieweg

Küpfmüller Theoretische Elektrotechnik

Wolfgang Mathis · Albrecht Reibiger

Küpfmüller Theoretische Elektrotechnik

Elektromagnetische Felder, Schaltungen
und elektronische Bauelemente

20., aktualisierte Auflage



Springer Vieweg

Wolfgang Mathis
Hannover, Deutschland

Albrecht Reibiger
Dresden, Deutschland

Extras online finden Sie unter
<http://www.springer.com/de/book/978-3-662-54837-0>

ISBN 978-3-662-54836-3 ISBN 978-3-662-54837-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-54837-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg
© Springer-Verlag GmbH Deutschland 1932, 1939, 1941, 1952, 1955, 1959, 1962, 1965, 1968, 1973, 1984, 1988, 1990, 1993, 2000, 2005, 2006, 2008, 2013, 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Unseren Frauen Barbara und Christine gewidmet

Vorwort und TET-Wegweiser

Erweiterte 20. Auflage:

In diesem Jahr ist es genau 85 Jahre her, seit Karl Küpfmüller, damals Professor für Elektrotechnik, Messtechnik und Nachrichtentechnik an der Technischen Hochschule Danzig (heute Gdańsk in Polen), die 1. Auflage seines Buches vorlegte. Auch die zuletzt erschienene 19. Auflage fand eine freundliche Aufnahme und hat uns damit ein unvermindertes Interesse an einer theoretischen Darstellung elektrotechnischer Inhalte angezeigt. Dieses Vertrauen ermutigte uns, nunmehr die 20. Jubiläumsauflage vorzulegen und wir hoffen natürlich, dass auch diese neue Auflage das Interesse an der Theoretischen Elektrotechnik erhöht.

Um einen schnellen Überblick zu erhalten, was unter der „Theoretischen Elektrotechnik (TET)“ zu verstehen ist, wurde der Untertitel des Buches verändert. Es soll betont werden, dass es um die theoretischen Hintergründe der elektromagnetischen Felder und von Schaltungen aus elektronischen Bauelementen geht. Dazu soll auch der TET-Wegweiser dienen, der erstmals in der 20. Auflage des Buches erscheint. Er soll einen kurzen Überblick über die Inhalte geben, die in den Teilen I bis VIII des Buches vermittelt werden sollen. Wir hoffen, dass diejenigen, die das Buch noch nicht kennen, schneller erkennen, in welcher Weise es ihnen in Studium und Beruf hilfreich sein kann.

Weiteres umfangreiches Material zum Buch findet man auf den Internet-Seiten zum Buch, die vom Springer-Verlag bereitgestellt werden:

<http://www.springer.com/de/book/9783662548363>

- Die Abschnitte über Elektronenoptik 14.6 und Stromleitung in Gasen 37.1 sowie das Kapitel über Elektronenröhren 38, die noch bis zur 15. Auflage im Buch enthalten waren, sind für einige Leser möglicherweise interessant. Daher haben wir sie auf der Homepage des Buches zugänglich gemacht. Deren Überschriften erscheinen an den sachlich richtigen Stellen des Bu-

ches und im Gesamtinhaltsverzeichnis (mit (**Internet**) gekennzeichnet). Auch die Verweise beziehen sich auf die vorliegenden 20. Auflage.

- Foliensätze der Vorlesung „Theoretischen Elektrotechnik (TET)“, gehalten von Wolfgang Mathis an der Leibniz Universität Hannover in den Jahren 2000 bis 2018 sowie entsprechende Übungs- und Klausuraufgaben (teilweise mit Lösungen), Repetitorien zu den Grundlagen der Elektrotechnik und der Halbleiterschaltungstechnik, zugehörige Foliensätze sowie Übungs- und Klausuraufgaben (teilweise mit Lösungen)

Bei einer intensiven Durchsicht wurden wiederum eine ganze Reihe von Präzisierungen des Textes durchgeführt und Schreibfehler beseitigt. Wir danken sehr herzlich den folgenden aufmerksamen Lesern, die uns auf eine Reihe von Fehlern hingewiesen haben: Lukas Kussel (TU Dortmund) sowie Michael Popp (Leibniz Universität Hannover), dem wir verschiedene Hinweise zum Abschnitt über elektrisch-mechanische Energiewandlung verdanken. Natürlich wären wir auch in Zukunft allen Lesern sehr dankbar, wenn wir Anmerkungen zum Buch und Hinweise auf Fehler erhalten würden.

Abschließend möchten wir uns nun endlich einmal ganz herzlich für die phantastische Zusammenarbeit mit Frau Eva Hestermann-Beyerle und Frau Birgit Kollmar-Thoni vom Springer-Verlag bedanken. Seit vielen Jahren haben wir von Ihnen in vielfältiger Weise Hilfe erfahren, so dass es immer großen Spaß gemacht hat, an dem Buchprojekt zu arbeiten. Unser Dank gilt natürlich auch den anderen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Springer-Verlages. Nicht zuletzt gilt unser Dank auch Herrn Dr. Hubertus von Riedesel vom Springer-Verlag, der uns vor vielen Jahren für dieses Buchprojekt begeistert hat. Wir waren immer bemüht, das in uns gesetzte Vertrauen mit guter Arbeit zu rechtfertigen.

Hannover und Dresden, Juni 2017 *Wolfgang Mathis und Albrecht Reibiger*

Vorwort zur 16. Auflage: (Neuordnung des Buches)

Im Jahre 1932 hat Karl Küpfmüller das erste Vorwort zu seinem Buch „Einführung in die Theoretische Elektrotechnik“ verfasst, aber es ist, wie man sich leicht überzeugen kann, nach wie vor ebenso aktuell wie sein Plan, der Ingenieurwissenschaft *Elektrotechnik* ein einheitliches Fundament zu verschaffen. In den Jahren nach dem erstmaligen Erscheinen dieses Buches wurden vor allem in der Nachrichtentechnik zahlreiche neue Konzepte entwickelt, die sich wie die Informationstheorie nicht mehr unter dem Dach einer feldtheoretisch und netzwerktheoretisch orientierten Elektrotechnik zusammenfassen lassen. Mit der Regelungstechnik hat sich nach dem 2. Weltkrieg eine neue Theorie entwickelt, die sich zwar ursprünglich aus der Netzwerktheorie entwickelte,

aber inzwischen mit anderen Disziplinen wie Maschinenbau und Verfahrenstechnik ein neuer ingenieurwissenschaftlicher Bereich mit interdisziplinärer Ausprägung geworden ist. Schließlich ist zumindest der materialwissenschaftliche Teil der Halbleiterschaltungstechnik eine offenbar unauflösliche Verbindung mit der Physik und Chemie eingegangen. Anstatt dasjenige, was man unter *Theoretischer Elektrotechnik* versteht, immer weiter auszudehnen, beschränken wir uns ganz im Sinne von Küpfmüllers erster Auflage weitgehend auf die netzwerk- und feldtheoretischen Grundlagen der Elektrotechnik und wagen allenfalls hier und da einen Blick auf das, was auch noch zur Elektrotechnik gehört. Bevor wir näher darauf eingehen, was sich an Aufbau und Inhalt dieser 16. Auflage der *Einführung in die Theoretische Elektrotechnik* geändert hat, wollen wir zunächst noch einmal Karl Küpfmüller selbst sprechen lassen, indem wir das im Jahre 1932 noch an der Technischen Hochschule Danzig verfasste Vorwort voranstellen:

„Die Elektrotechnik bildet heute ein so großes und vielfach verzweigtes Gebiet der Ingenieurwissenschaften, dass es für den einzelnen nicht möglich ist, dieses Gebiet auch nur einigermaßen kennenzulernen; in noch stärkerem Maße muss sich der am Fortschritt der Technik arbeitende Ingenieur auf die Betätigung in einem verhältnismäßig engen Teilgebiet beschränken. Für das Studium an den Hochschulen, das nicht angenähert so weit spezialisiert werden kann, wie es die spätere Tätigkeit des Studierenden erfordern würde, ergibt sich daraus die Notwendigkeit einer Beschränkung auf diejenigen Grundlagen, die möglichst vielen Gebieten gemeinsam sind. Das sind insbesondere die den elektrotechnischen Anwendungen zugrunde liegenden physikalischen Gesetze.

Es gibt heute eine Reihe von vorzüglichen Einführungen in die einfacheren Grundgesetze der Elektrotechnik. Es gibt ferner eine ausgezeichnete Spezialliteratur, die sich mit den Anwendungen der Grundgesetze beschäftigt. Hinsichtlich der theoretischen Vorbildung sind nun die Anforderungen an die allgemeinen Kenntnisse des wissenschaftlich tätigen Ingenieurs in den letzten Jahren bedeutend gewachsen, und wenn hier auch sehr gute physikalische Lehrbücher zur Verfügung stehen, so folgen doch Schwierigkeiten daraus, dass sich die Sprache der Elektrotechnik zum Teil nicht unerheblich von der der Physik entfernt hat und dass der Studierende nicht in der Lage ist, das für ihn Notwendige aus der großen Stoffmenge herauszufinden.

In dem vorliegenden Buch habe ich versucht, eine *Einführung in die Vorstellungen und die Methoden* zu geben, deren Kenntnis nach meinen Erfahrungen heute zur Allgemeinbildung des an der Weiterentwicklung der Elektrotechnik interessierten Ingenieurs gehören muss. Damit ergab sich eine Abgrenzung des Stoffes gegen die mehr physikalischen Lehrbücher. Eine weitere Einschränkung wurde noch im Hinblick auf die vorhandene einführende Literatur der Elektrotechnik vorgenommen, die gewisse Gebiete sehr ausführlich behandelt. Diese Gebiete konnten daher hier etwas zurückgestellt werden.

Ebenso wurde kein Versuch gemacht, die Theorie der elektrischen Maschinen aufzunehmen; sie stellt ein hochentwickeltes Spezialgebiet dar, das ein besonderes Studium erfordert.

Die *Stoffeinteilung* ist keine systematische, sondern so gewählt, wie es für das Verständnis am zweckmäßigsten erschien. Daraus folgte eine Einteilung in einzelne Abschnitte, die nur verhältnismäßig lose zusammenhängen und z.T. ineinander greifen, die aber ungefähr von Leichterem zu Schwierigerem fortschreiten. Der Stoff ist so weit fortgeführt, wie es zum Verständnis und zum Studium der Spezialliteratur notwendig ist; insbesondere ist bei der Darstellung auch den Bedürfnissen von Studierenden der Physik, die auf dem Gebiet der Elektrotechnik tätig sein wollen, Rechnung getragen¹.

Die von Küpfmüller geschilderten Vorstellungen² über die Bedeutung von Theorie in der Elektrotechnik und ihr Verhältnis zu den technischen Anwendungen sind, so glauben wir, nach wie vor – und vielleicht sogar mehr denn je – richtig. Küpfmüllers „Theoretische Elektrotechnik“ kann auch mehr als siebzig Jahre nach dem Erscheinen der ersten Auflage trotz Computer und Internet und der dennoch fast unübersehbaren Fülle von Literatur auf diesem Gebiet ihren Platz in den Bücherregalen von ElektrotechnikerInnen und InformationstechnikerInnen finden. Ein Grund dafür mag sein, dass es Küpfmüller nicht darum ging, ein neues Buch über elektromagnetische Felder zu schreiben, denn auch zu seiner Zeit gab es hervorragende Werke wie etwa Breisigs „Theoretische Telegraphie“ aus dem Jahre 1910. Vielmehr wollte er auf einem theoretisch durchaus anspruchsvollen Niveau eine Gesamtschau über diejenigen Bereiche der Elektrotechnik bieten, bei denen man durch Probieren nicht weiterkommt und daher Theorie benötigt. Eine solche Intention kann heute aus den oben genannten Gründen kein Ziel mehr sein; dazu ist die theoretische Basis der Elektrotechnik und Informationstechnik heute zu breit geworden. Beschränkt man sich jedoch auf die netzwerktheoretischen und feldtheoretischen Grundlagen, dann ist Küpfmüllers Unternehmung auch heute noch sinnvoll. Deshalb haben wir genau diesen Weg beschritten, als wir uns an die Neubearbeitung der „Theoretischen Elektrotechnik“ gemacht haben.

Nicht die Inhalte sondern die Form der „Theoretischen Elektrotechnik“ ist ein wenig in die Jahre gekommen. Das liegt nicht zuletzt daran, dass bisher keine *elektronische Form* von Küpfmüllers Buch vorlag. So haben G. Bosse, der

¹ Küpfmüllers Vorwort endete mit einigen Hinweisen über die Vorzüge von *Größengleichungen*, die in der heutigen Literatur vollständig umgesetzt sind. Daher müssen diese Ausführungen für heutige Leserinnen und Leser unverständlich bleiben und entfallen daher.

² Küpfmüllers Vorwort von 1932 endete mit einigen Danksagungen: „Für eine Reihe von Anregungen bei der Auswahl des Stoffes bin ich Herrn Dir. Dr. phil. Dr.-Ing. E.h. F. Lüschen zu Dank verpflichtet. Ferner danke ich den Herren Dr.-Ing. H. Jenss und Dipl.-Ing. H. Werrmann für ihre freundliche Mühewaltung bei der Durchsicht des Manuskripts und der Korrekturen. Der Verlagsbuchhandlung danke ich für das bereitwilligem Eingehen auf meine Wünsche.“.

die 11. Auflage bearbeitete, und G. Kohn, der die 12. bis 14. Auflage betreute³, wobei Änderungen in die vorhandene Buchvorlage eingearbeitet werden mussten. Dadurch konnten strukturelle Veränderungen nicht ausgeführt werden. Als wir die Arbeiten an der 16. Auflage aufnahmen, war es das Ziel, einen strukturellen Neuaufbau durchzuführen und dabei die Küpfmüllersche Art der Aufbereitung des Materials unbedingt zu beachten. Die Leserinnen und Leser mögen beurteilen, ob das gelungen ist. Zur besseren Orientierung wollen wir jedoch die Grundgedanken der neuen Struktur des Buches skizzieren. Dabei ist das Buch in Teile, Abschnitte und Unterabschnitte gegliedert.

Bevor wir näher auf die Grundelemente der theoretischen Elektrotechnik eingehen, stellen wir im ersten Teil zunächst einmal die Frage: Was ist theoretische Elektrotechnik? Dabei werden systemtheoretische Grundgedanken betont, wie sie von Küpfmüller bereits in den 1920er Jahren erdacht und in seiner berühmten Monographie systematisch entwickelt wurden. Wie in Küpfmüllers ursprünglicher Konzeption der „Theoretische Elektrotechnik“ ist der zweite Teil des Buches der Theorie elektrischer Netzwerke gewidmet. Dieser Teil ist völlig neu konzipiert worden, wobei auch neuere Entwicklungen wie alternative Darstellungen der Grundlagen der resistiven Netzwerke und der Wechselstromrechnung einbezogen wurden. Anschließend werden die Methoden anhand ausgewählter Beispiele demonstriert.

Im gleichen Sinne wie der zweite Teil sind auch die anderen Teile der Neufassung des Buches aufgebaut. Dazu wurden die theoretischen und methodischen Anteile, die zugehörigen Interpretationen und die Beispiele der vorherigen Auflage der „Theoretischen Elektrotechnik“ getrennt und in systematischer Weise neu geordnet. Um die inhaltliche Einordnung zu verbessern, wurden jedem Abschnitt in kompakter Form die wesentlichen theoretischen Aspekte hinzugefügt.

Nach der Theorie elektrischer Netzwerke wird die Theorie elektromagnetischer Felder in induktiver Weise aufgebaut. Darunter versteht man, dass nicht die vollständigen Maxwellschen Gleichungen für das elektromagnetische Feld Ausgangspunkt der Betrachtungen sind wie beispielsweise bei Sommerfeld [264], sondern es werden schrittweise auf der Grundlage entsprechender experimenteller Erfahrungen näherungsweise gültige Theorien entwickelt, bis die vollständige Theorie aufgebaut ist. Wie Bopp in einem lesenswerten Artikel [35] betont, können wir elektromagnetische Felder nicht unmittelbar erfahren, sondern sie lassen sich nur über ihre Wirkungen auf geladene Körper erfahren. Daher wird der Inhalt der Theorie elektromagnetischer Felder anschaulicher, wenn man einerseits von den Ladungen, die unmittelbar messbar sind und andererseits von den Kräften auf sie ausgeht, die man ebenfalls messen kann, ohne den Inhalt der aufzubauenden Theorie zu kennen.

Von diesem induktiven Standpunkt ausgehend wird im dritten Teil dieses Buches in ausführlicher Weise auf die Theorie des statischen elektrischen

³ In der 15. Auflage haben W. Mathis und A. Reibiger die 14. Auflage nur hinsichtlich der Abbildungen ein wenig kosmetisch verändert

Feldes – die Elektrostatik – eingegangen. Dazu wird wie im gesamten Buch intensiv vom Satz von Helmholtz (vgl. Anhang A.2) Gebrauch gemacht, um die mathematischen Felder zur Beschreibung des physikalischen Sachverhaltes in nachvollziehbarer Weise einzuführen; dabei wird auch das Nahwirkungsprinzip verwendet. Nach den theoretischen Grundlagen und einem Abschnitt über die Interpretation der Elektrostatik werden zahlreiche Beispiele diskutiert. Danach werden die Methoden zur Lösung der mathematischen Probleme ausführlich vorgestellt. In entsprechender Weise wird im vierten Teil das elektrische Strömungsfeld behandelt. Es ist zu hoffen, dass die Leserinnen und Leser aufgrund der neuen Struktur des Buches sehr viel besser auf die teilweise hochinteressanten Inhalte von Küpfmüllers „Theoretischer Elektrotechnik“ zugreifen können.

Im fünften Teil des Buches wird auf die Theorie des stationären Magnetfeldes eingegangen. Dabei werden die mathematischen Felder der Theorie auf eine wenig bekannte, aber sehr durchsichtige Weise aufgrund einer einfachen experimentellen Beobachtung eingeführt, die auf Falk und Ruppel [76] zurückgeht. Es folgen wiederum Beispiele und Rechenmethoden sowie weitere theoretische Aspekte. Ebenfalls auf eine alternative Weise wird das Induktionsgesetz in sechsten Teil des Buches eingeführt, die man in dem klassischen Lehrbuch über Theoretische Physik von Weizel [300] finden kann, die bisher aber kaum beachtet wurde. Für uns ist es besonders wichtig, dass die Gleichungen des quasistationären elektromagnetischen Feldes entwickelt werden. Diese Gleichungen enthalten auch einen Anteil des Verschiebungsstromes, um die Ladungsbilanz zu gewährleisten, aber ohne dass Wellenlösungen möglich sind. Auf diese Erweiterung hat Ludwig [172] erstmals in voller Klarheit hingewiesen; siehe auch Mathis [180]. Ansonsten wird der Gedanke der Felddiffusion in die Theorie des quasistationären elektromagnetischen Feldes eingearbeitet, wie er beispielsweise in der ausgezeichneten Monographie von Lehner [162] zu finden ist.

Im siebten Teil des Buches wird dann die vollständige Theorie des elektromagnetischen Feldes entwickelt, wobei der noch fehlende Anteil des Verschiebungsstromes – die Maxwellsche Ergänzung – hinzugefügt wird und somit Wellenlösungen auftreten können. Völlig neu ist der Abschnitt über TEM-Wellen auf Leitungen. Dabei werden die Leitungsgleichungen für verlustfreie homogene Leitungen konsequent aus den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet. Für verlustbehaftete Leitungen gelten diese Gleichungen nur näherungsweise. Wie in den vorherigen Abschnitten wird in diesem Teil des Buches der Zusammenhang der feldtheoretischen Inhalte mit der Netzwerktheorie und der Zustandsdarstellung betont, die bei Leitungen einen unendlich-dimensionalen Zustandsraum erfordert.

Im achten Teil des Buches wird die Anwendung netzwerk- und feldtheoretischer Methoden auf die Modellierung von Bauelementen und Schaltungen behandelt. Auch in diesem Abschnitt werden zahlreiche neue Aspekte diskutiert. In den Anhängen werden schließlich einige wichtige mathematische Ergebnisse zusammenfasst.

Aus Platzgründen konnten nicht sämtliche Inhalte der 15. Auflage der „Theoretischen Elektrotechnik“ übernommen werden. In Absprache mit dem Springer-Verlag haben wir uns entschieden, einige, eher in den Hintergrund getretene, aber dennoch interessante Aspekte der theoretischen Elektrotechnik auf der Homepage des Buches verfügbar zu machen. Dazu gehören die Abschnitte über Elektronenoptik 14.6, Stromleitung in Gasen 37.1 und Elektronenröhren 38, deren Überschriften an den sachlich richtigen Stellen des Buches und im Gesamtinhaltsverzeichnis erscheinen (mit (**Internet**) gekennzeichnet), die jedoch in vollständiger Form als PDF-File von der Homepage <http://www.springer.com/978-3-540-78589-7> heruntergeladen werden können. Dort findet man auch umfangreiches weiteres Material zur theoretischen Elektrotechnik: Eine Biographie von Karl Küpfmüller, PowerPoint-Files und PDF-Files von Vorlesungen über theoretische Elektrotechnik, Animationen, historische Hinweise, vieles andere mehr. Der eine von uns (W.M.) arbeitet mit seinem Team ständig daran, zusätzliches Material bereitzustellen. Da bei der erstmaligen Umsetzung eines derart umfangreichen Manuskripts in eine elektronische Version eine erhöhte Fehlerquote auftreten kann, wird auf der Homepage auch ein *Erratum* bereitgestellt, das laufend aktualisiert wird. Für ihre Hinweise wären wir allen Leserinnen und Lesern sehr dankbar. Wir laden Sie ein, die Seiten zu besuchen und freuen uns über Ihre Anregungen. Eine Email-Adresse dafür steht auf der Homepage zur Verfügung.

Um dem Inhalt des Buches folgen zu können, sollten einige grundlegende Kenntnisse der Physik und Mathematik sowie der Grundlagen der Elektrotechnik bekannt sein. Hinsichtlich der physikalischen Vorkenntnisse sollte zumindest die Schulphysik (wie Metzler Physik [200]) aber besser noch die Physik für Ingenieure (wie bei Dobrinski, Krakau, Vogel [66]) präsent sein. Die notwendigen mathematischen Vorkenntnisse der linearen Algebra und Vektoranalysis kann man bei Jänich [135], [134] erlangen. Zur Auffrischung dieser Mathematik kann das Repetitorium von Merziger und Wirths [198] sehr empfohlen werden. Die Grundlagen der Elektrotechnik werden in einer Vielzahl von Lehrbüchern dargestellt; vgl. z. B. das an der Universität Hannover eingeführte Buch von Haase, Garbe und Gerth [100] oder Unbehauen's Lehrbuch [281]. Hinsichtlich weiterführender (Übungs-)Aufgaben zur Theorie elektromagnetischer Felder sei u. a. auf Flügge [82], Mrozynski [204] und das Lehrbuch von Wolff [306] verwiesen; weitere Hinweise findet man auf der Homepage des vorliegenden Buches.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass in den letzten Jahren alternative Darstellungen der Theorie elektromagnetischer Felder mit Hilfe sogenannter *Differentialformen* entwickelt wurden. Man erhält gute strukturelle Einsichten in die Theorie und hat Vorteile bei analytischen Rechnungen. Allerdings genügen Differentialformen nicht, sondern es müssen orientierte Formen eingeführt werden. Darauf wird u. a. in den Monographien von Meetz und Engl [195] sowie von Hehl [108] hingewiesen werden; vgl. auch Russer [253]. Inzwischen konnten Bossavit [36], Hiptmair [121] und andere nachweisen, dass

man von diesem geometrischen Standpunkt aus gesehen auch neuartige Einblicke in die Numerik elektromagnetischer Felder gewinnen kann. Ein weiterer Zugang wird bei Gerlich⁴ [87] beschrieben. Diese Aspekte gehen jedoch weit über den Rahmen dieses einführenden Buches hinaus, und wir müssen daher auf diese Literatur verweisen.

Am Schluss dieses Vorwörteres sollen noch einige Danksagungen folgen, da ohne die entsprechende Hilfe das Buch wohl kaum in der vorliegenden Form entstanden wäre. Zunächst möchten wir unseren Familien herzlich für die Unterstützung danken, die uns zuteil geworden ist, da sie über einen längeren Zeitraum nicht selten auch an Abenden und Wochenenden auf uns verzichten mussten; aufgrund sehr großen Arbeitsanteils gilt das insbesondere für die (W.M.)-Familie. Weiterhin möchten wir uns zutiefst bei Herrn Hans-Jürgen Bödecker bedanken, denn ohne dessen engagierte und unermüdliche Arbeit bei der Vorbereitung eines großen Teils des Textes hinsichtlich der elektronischen Fassung und bei der Aufbereitung der Bilder das Erscheinen dieses Buches sich noch lange hinausgeschoben hätte. Mit Hans-Jürgen Bödecker ist einer von uns (W.M.) schon lange und intensiv freundschaftlich verbunden, wobei sich sein Wahlspruch „*Die Liebe zur Sache*“ und seine darauf gegründete Art des Arbeitens auch bei diesem Buchprojekt auf das Trefflichste bewährt hat. Wir danken auch unseren Mitarbeitern, den Herrn Dipl.-Ing. F. Felgenhauer und M. Streitenberger (beide Hannover) und Herrn Dipl.-Ing. T. Nähring (Dresden) für mannigfache Hilfe bei der computermäßigen Erstellung des Manuskripts, verschiedenen Abbildungen und Diskussionen zum Thema der jeweiligen Abschnitte. Darüberhinaus dankt einer von uns (W.M.) seiner Frau Barbara für das Korrekturlesen. Von zahlreichen Fachkolleginnen und Kollegen haben wir immer wieder ermunterndes Interesse erfahren; dabei möchten wir Herrn Prof. Jürgen Nitsch (Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg), Herrn Prof. Gerhard Wunsch (TU Dresden) und Herrn Prof. Sigurd Falk (TU Braunschweig) besonders erwähnen. Schließlich möchten wir uns bei den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Springer-Verlages für die ausgezeichnete Zusammenarbeit bedanken.

Hannover und Dresden, Juli 2004 Wolfgang Mathis und Albrecht Reibiger

⁴ Herr Prof. Dr. rer. nat. Gerhard Gerlich war der Betreuer der Diplomarbeit von W.M. am Institut für Mathematische Physik in den Jahren 1978 bis 1980. W. M. ist ihm zu großem Dank verpflichtet, da er seine wissenschaftliche Laufbahn in vielfacher Weise stark beeinflussend hat

TET-Wegweiser

Einleitung (Teil I)

Als Karl Küpfmüller⁵ im Jahre 1932, also vor genau 85 Jahren, die erste Auflage seines Buch „Theoretische Elektrotechnik“ verfasste, ging es ihm auch

⁵ Karl Küpfmüller (geboren am 6. Oktober 1897 in Nürnberg; gestorben am 26. Dezember 1977 in Darmstadt) studierte von 1913 bis 1919 am Königlich Bayerischen Technikum in Nürnberg das Fach Elektrotechnik. Danach ging er an das Telegraphen-Versuchsammt der Deutschen Post in Berlin, wechselte aber 1921 zur Siemens&Halske AG in Berlin. Dort war er bis 1928 Oberingenieur im Zentrallaboratorium. In diese Zeit fielen wichtige Arbeiten auf dem Gebiet der Nachrichtentechnik, mit denen er später die Systemtheorie mitbegründete. Ohne einen Abschluss an einer wissenschaftlichen technischen Hochschule zu besitzen, wurde er ordentlicher Professor für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Danzig (heute Gdańsk in Polen). 1935 wechselte er an die Technische Hochschule zu Berlin, aber schon im Jahre 1937 wechselte er wiederum zu Siemens&Halske jetzt als Leiter der nachrichtentechnischen Entwicklung des Siemens-Wernerwerkes für Fernmeldetechnik und danach bis zum Mai 1945 als Direktor der Zentralen Entwicklungsabteilung. In diese Zeit fielen auch seine zunehmend engeren Verbindungen zum nationalsozialistischen Regime in Deutschland: 1933 wurde er Mitglied des NS-Kraftfahrkorps, 1934 Mitglied der SA und ab 1937 (bis 1945) Mitglied der NSDAP und der SS. In der SS stieg er bis 1945 zum Rang eines SS-Obersturmbannführers auf. Über die Nähe zum NS-Regime gibt es inzwischen eine umfassende vergleichende Untersuchung von J. Hagenauer und M. Pabst: Anpassung, Unbotmäßigkeit und Widerstand. Karl Küpfmüller, Hans Piloty, Hans Ferdinand Mayer – Drei Wissenschaftler der Nachrichtentechnik im „Dritten Reich“, Bayerische Akademie der Wissenschaften, München, Folge 178, C.H. Beck Verlag 2014. Auch wenn sich aufgrund der verfügbaren Quellen keine direkte Beteiligung an Überwachungs- und Verfolgungsmaßnahmen in der NS-Zeit nachweisen lassen, kann dies aufgrund seines hohen SS-Ranges auch nicht ausgeschlossen werden. Nach dem 2. Weltkrieg endete die Untersuchung seiner Aktivitäten während der NS-Zeit im Rahmen eines Spruchkammerverfahrens trotz seines SS-Ranges mit einer Einstufung als Mitläufer, was beim heutigen Kenntnisstand eher überraschend ist. Auch aufgrund der Neuorientierung der politischen Lage im Sinne des Ost-West-Konflikts spielte seine SS-Zugehörigkeit bald keine Rolle mehr und Küpfmüller konnte seine wissenschaftliche Karriere am Institut für allgemeine Fernmeldetechnik der TH Darmstadt mit vielfältigen Arbeiten auf dem Gebiet der Nachrichtentechnik weiterführen. Küpfmüller bekleidete verschiedene bedeutende Ämter im VDE und der Deutschen Forschungsgemeinschaft und starb im Jahre 1977 hochgeachtet im Alter von 80 Jahren. Es bleibt ein zwiespältiger Eindruck über Karl Küpfmüller zurück, denn auf der einen Seite gehört er zur Gruppe der wichtigstens Ingenieurwissenschaftler des 20. Jahrhunderts mit interdisziplinärer Ausrichtung. Andererseits hat er sich sehr stark an ein verbrecherisches politisches Regime angepasst. In diesem Sinne ist sein Fall dem des bekannten Raketenpioniers Wernher von Braun sehr ähnlich, der in der NS-Zeit und danach eine ganz ähnliche Karriere gemacht hatte. Auch er war SS-Mitglied und stieg zum Sturmbannführer auf. Allerdings hat von Braun im Unterschied zu Küpfmüller nachweislich Schuld auf sich geladen, in dem er die Qualen und

darum, den Inhalt des Gebietes genauer zu definieren. Seit der 8. Auflage des Buches hat er dazu ausgeführt, dass die „*theoretische Elektrotechnik*“ alle diejenigen physikalischen Gesetzmäßigkeiten und mathematischen Verfahren umfasst, die bei der Lösung von Aufgaben der Elektrotechnik nützlich sein können (siehe Kapitel 1). Auch wenn es an vielen Technischen Hochschulen ein Fach mit dieser Bezeichnung gab, wurden damit sehr unterschiedliche Inhalte in Beziehung gebracht. Der Ansatz, den er verfolgte, war vielleicht am ehesten vergleichbar mit Breisigs Monographie „Theoretische Telegraphie“, die im Jahre 1910 erschien. Jedoch fehlten dort weitgehend die Gebiete der Elektrotechnik, die sich mit energietechnischen Inhalten befassten. Das war in der 1. Auflage von Küpfmüllers „Theoretische Elektrotechnik“ nicht viel anders. Aber eine erste Buchbesprechung des damals bedeutenden Elektrotechnikers Franz Ollendorff wies auf diesen Mangel hin und er forderte, dass die theoretischen Konzepte der gesamten Elektrotechnik in dem Buch enthalten sein sollten. Diesem Rat folgte Küpfmüller offensichtlich. Denn in den folgenden Auflagen wurde das ursprünglich 285 Seiten starke Buch nach und nach erweitert, so dass schließlich ein Standardwerk der theoretischen Elektrotechnik entstand, das alle wichtigen Gebiete der Elektrotechnik ansprach und von Generationen geschätzt wurde. Bisher erschienen neunzehn Auflagen des Buches.

Die elektrotechnischen Disziplinen wurden von Küpfmüller schon in der 1. Auflage näher beschrieben und später ausgebaut. Dem ist bis heute nur wenig hinzuzufügen und daher findet man in Kapitel 1 die nur mit geringen Änderungen versehenen Ausführungen von Küpfmüller. In Kapitel 2 werden die für das Buch wichtigen mathematischen Aspekte der Systemtheorie in heuristischer Weise eingeführt. Die Systemtheorie, die der Charakterisierung allgemeiner Übertragungssysteme dient, geht ganz wesentlich auf Küpfmüllers Arbeiten aus den 1920er Jahren zurück; allerdings wären auch Harry Nyquist, Norbert Wiener, Andrej N. Kolmogorow und weitere zu nennen. Küpfmüllers wegweisende Arbeit „Über die Dynamik der selbstdämmigen Verstärkungsregler“ von 1928 war Ausgangspunkt für seine Monographie „Systemtheorie der elektrischen Nachrichtentechnik“ von 1949. Die Systemtheorie ist wohl eine der wichtigen eigenständigen theoretischen Disziplinen, die von den Ingenieurwissenschaften geschaffen wurden. Vorbild war sicherlich die theoretische Mechanik, die von Isaac Newton gegen Ende des 17. Jahrhunderts begründet wurde und bis heute zu den erfolgreichsten physikalischen Disziplinen zählt. Die Mechanik ist auch für die Theorie elektromagnetischer Felder sehr wichtig und daher werden ihre Grundzüge in einer auf den Karlsruher Physiker Gottfried Falk zurückgehende Beschreibung auf der Basis von Energie-Impuls-Transporten dargestellt.

Die Ausweitung der Inhalte hatte allerdings gewisse Nachteile. In der 15. Auflage war der Umfang des Buches bereits auf 645 Seiten angewachsen, wobei

den Tod von Gefangenen bei der Produktion von Raketen in den Lagern von Peenemünde und Dora Mittelbau in Kauf nahm.

die neuen Inhalte weitgehend in die bereits vorhandene Vorlage eingearbeitet wurden. Des weiteren wurde versucht, der sich ausweitenden theoretischen Basis der Elektrotechnik Rechnung zu tragen und weitere Aspekte der theoretischen Nachrichtentechnik sowie System- und Regelungstechnik einzubeziehen. Eine grundlegende Revision wurde erst im Rahmen der 16. Auflage und im Zusammenhang mit der Erstellung einer elektronischen Fassung des Manuskripts vorgenommen. Dabei wurden die vorhandenen Inhalte des Buches nach dem systematischen Gesichtspunkten der Teilgebiete Netzwerke, Elektrostatik, elektrisches Strömungsfeld, stationäres Magnetfeld, quasistationäres elektromagnetisches Feld, vollständige Maxwellsche Gleichungen sowie einigen Anwendungsgebieten der Theorie elektromagnetischer Felder geordnet und zusätzliche Inhalte eingebracht. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die klassischen Bezeichnungen für die Feldgrößen des elektromagnetischen Feldes schon ab der 16. Auflage geändert wurden. Dafür gab es mindestens zwei Gründe: 1) Die den klassischen Feldbezeichnungen zugrundeliegenden physikalischen Interpretationen sind inzwischen überholt. 2) Die Bezeichnungen werden nicht einheitlich verwendet. Da die bereits von Maxwell eingeführten Bezeichnung der elektromagnetischen Feldgrößen bis heute auch international verwendet werden, bot es sich an, die Bezeichnungen E-Feld, D-Feld, B- Feld und H-Feld zu verwenden. An entsprechenden Stellen werden jedoch die im deutschsprachigen Raum verwendeten klassischen Bezeichnung erwähnt.

Der Ausbau in Richtung theoretische Nachrichtentechnik sowie der System- und Regelungstechnik wurde allerdings nicht fortgeführt. Trotzdem stieg der Umfang der 19. Auflage der „Theoretischen Elektrotechnik“ auf fast 800 Seiten an, so dass es selbst nach der Neuordnung nicht leicht war, innerhalb des Buches interessierende Inhalte schnell aufzufinden.

Insbesondere für die Einsteiger in die „Theoretische Elektrotechnik (TET)“ ist es durchaus zweckmäßig, eine Orientierung hinsichtlich der Kernaussagen und Anwendungsgebiete der einzelnen Teilgebiete der theoretischen Elektrotechnik zu haben. Daher habe wir uns entschlossen, einen TET-Wegweiser aufzubauen, um die Vielfalt des Buches besser nutzen zu können. Dabei soll in einer Art Doppelstrategie vorgegangen werden: 1. Das Buch enthält den TET-Wegweiser für die Hauptabschnitte. 2. Zusätzlich wird auf den Internet-Seiten zum Buch

<http://www.springer.com/de/book/9783662548363>

auch für die Unterkapitel ein Wegweiser aufgebaut. Gern können sich auch interessierte Leserinnen und Leser an diesem Aufbau beteiligen und eigene Beiträge für den TET-Wegweiser einreichen. So wird Küpfmüllers Buch zu einem kommunikativen Projekt.

Theorie elektrischer Netzwerke (Teil II)

- **Zweck:** Es handelt sich um eine Modelltheorie für elektromagnetische Anordnungen, bei denen die physikalischen Effekte einer elektrischen Strömung, der Elektrostatik, des stationären Magnetfelds und des quasistationären elektromagnetischen Feldes separiert und räumlich konzentriert betrachtet werden. Bei der Modellbildung werden integrale Größen wie Strom und Spannung herangezogen und damit die räumliche Ausdehnung der physikalisch aktiven Bereiche eliminiert. Die Bereiche werden durch wenige Parameter charakterisiert, welche die Netzwerkelemente Widerstand R (Abschn. 4.1), Kapazität C und Induktivität L (Abschn. 4.2) sowie unabhängige und gesteuerte Strom- und Spannungsquellen (Abschn. 4.1) parameterisieren. Eine Zusammenschaltung dieser Netzwerkelemente erfolgt durch widerstandslose Verbindungen.
- **Typische Anwendungen:** Elektrische und elektronische Schaltungen, die sich aus Bauelementen wie Widerständen, Kondensatoren und Spulen (Kapitel 5) sowie Elektronenröhren (Kapitel 38) und Halbleiterbauelementen (Dioden und Transistoren, Kapitel 39) zusammensetzen und im Frequenzbereich von 0 Hz (Gleichgrößen) bis zu einigen GHz (Wechselgrößen) eingesetzt werden. Diese Schaltungen werden mit Hilfe der Netzwerke modelliert, wobei man sich für das Verhalten hinsichtlich verschiedener (Klemmen-) Ströme und -Spannungen interessiert. Unter gewissen Voraussetzungen (ausschließlich transversale elektromagnetische Wellen) lässt sich auch das Klemmenverhalten von Übertragungsleitungen durch Netzwerkmodelle beschreiben (vgl. Kapitel 35).
- **Genauigkeit:** Durch Erhöhung der Anzahl der Netzwerkelemente kann die Genauigkeit der Nachbildung des Klemmenverhaltens technischer Bauelemente durch die Erhöhung der Anzahl der Netzwerkelemente verbessert werden. Dabei können auch nichtelektrische physikalische Effekte einbezogen werden.
- **Grenzen der Anwendung:** Wesentliche Voraussetzung der Modelltheorie ist die Möglichkeit einer getrennten Betrachtung der genannten physikalischen Effekte. Ist das nicht mehr gegeben, dann lassen sich elektromagnetische Effekte nur noch bedingt durch Netzwerkmodelle repräsentieren. Beispielsweise kann man Verzögerung auf Leitungen nur noch näherungsweise darstellen (Kapitel 35).
- **Methoden:** Analysenmethoden für Gleichstromschaltungen beziehen sich auf die Lösung linearer und nichtlinearer Modellgleichungen (Abschn. 4.1). Werden dynamische Netzwerkelemente wie Kapazitäten und Induktivitäten einbezogen, dann ergeben sich Modellgleichungen in Form von Differentialgleichungen. Im Fall von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man diese Gleichungen in lineare algebraische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten reduzieren, wobei die Wechselstromrechnung (Abschn. 4.3) bzw. die Fourier- und Laplace-Transformation (Abschn. 4.2) zum Einsatz kommen. Bei Modellgleichun-

gen mit nichtlinearen Zusammenhängen muss auf Lösungsmethoden für nichtlineare Differentialgleichungen und ggf. Algebro-Differentialgleichungen zurückgegriffen werden (Abschn. 40.4.5).

Das elektrostatische Feld (Teil III)

- **Zweck:** Nach dem Coulombschen Gesetz üben zwei nicht bewegte Punktladungen Kräfte aufeinander aus (Kapitel 6). Ausgehend davon verallgemeinert man im Rahmen des Modellierungsansatzes der Elektrostatik die Coulombsche Anordnung dahingehend, dass man eine Punktladung als Probeladung auffasst und die andere Punktladung durch eine nicht bewegte Ladungsverteilung ersetzt, um die auf die Probeladung normierte Kraft zu bestimmen - das E-Feld. Im Sinne des Nahwirkungsprinzips (Kapitel 6) wird die Ladungsverteilung durch eine elektrische Erregung - das D-Feld - äquivalent ersetzt. Legt man ein lineares Materialgesetz (Kapitel 8) zwischen D- und E-Feld zugrunde, kann man für das mit dem E-Feld zusammenhängende elektrische Potenzial eine Fundamentalgleichung in Form einer Poissons-Gleichung ableiten. Zumindest für lineare Materialgleichungen ist die Poissons-Gleichung, eine partielle Differentialgleichung, deren Eigenschaften im Rahmen der mathematischen Potenzialtheorie behandelt werden, die Grundlage für alle Feldberechnungen. Bei allgemeineren Materialgleichungen erhält man eine kompliziertere Differentialgleichung.
- **Typische Anwendungen:** Elektrostatische Modellierungsansätze verwendet man immer dann, wenn die Bewegung von Ladung vernachlässigt werden kann oder Ladungen ihre endgültige räumliche Position eingenommen haben. Das ist häufig in der Hochspannungstechnik der Fall, aber auch in vielen elektronischen Bauelementen (Kapitel 38 und 39) ist die Ladung der Gitteratome nicht ortsveränderlich und die Elektrostatik erfolgreich anwendbar.
- **Genauigkeit:** Die Modelle für das Materialgesetz (Kapitel 8) bestimmen die Art der partiellen Differentialgleichungen des elektrischen Feldes, während die Geometrie eines Problems die Randbedingungen festlegt. Ist man an analytischen Lösungen interessiert, muss man einen Kompromiss von der Güte einer Lösung und deren Berechenbarkeit finden.
- **Grenzen der Anwendung:** Um den elektrostatischen Modellansatz erfolgreich einsetzen zu können, dürfen sich die Ladungen nicht bewegen. Kommt es zu zeitveränderlichen elektrischen Strömungen von Ladungen, ist das Wegintegrals des E-Feldes nicht mehr wegunabhängig. Bei sehr hohen elektrischen Feldern können Ladungen aus elektrischen Leitern austreten (Feldemission), was durch die Elektrostatik nicht beschrieben werden kann.
- **Methoden:** Liegt eine Poissons-Gleichung für das elektrostatische Potenzial vor, dann kann man auf die Methoden partieller Differentialgleichungen

der Potenzialtheorie (Abschn. 11.1) zurückgreifen. Neben einigen speziellen analytischen Methoden zur Bestimmung exakter sowie approximativer Lösungen (Abschn. 11.2 - 11.7) kann man die auf viele Typen linearer partieller Differentialgleichungen anwendbare Separationsmethode (Abschn. 11.8) benutzen. Darüber hinaus gibt es sehr effiziente numerische Methoden (Hinweise in Abschnitt 11.9). Im Fall eines linearen Materialgesetzes kann man auch bei Randbedingungen im Endlichen die Methode der Greenschen Funktion anwenden, die als Methode der Antwortfunktion in vielen Bereichen der Physik und Elektrotechnik bekannt ist. Dabei können Lösungen bei bekannter Greenscher Funktion formelmäßig bis auf eine Integration angegeben werden. In einigen Fällen kann die Methode der Spiegelladungen zur Bestimmung der Greenschen Funktion herangezogen werden.

Das elektrische Strömungsfeld (Teil IV)

- **Zweck:** Bewegen sich Ladungen in einem leitfähigen Material, ohne dass sich die Ladungsdichte ϱ zeitlich verändert, dann reduziert sich die Kontinuitätsgleichung, welche die allgemeine Ladungserhaltung beschreibt (Kapitel 15), zu $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Ist man nur an der Bestimmung des elektrischen Feldes und der aus dem Ohmschen Gesetz folgenden zeitunabhängigen elektrischen Stromdichte interessiert, kann der Modellierungsansatz des elektrischen Strömungsfeldes gewählt werden. Das stationäre Magnetfeld wird bei diesem Ansatz nicht berücksichtigt, lässt sich aber anschließend berechnen (Teil V).
- **Typische Anwendungen:** Dieses Modellierungskonzept wird bei der Berechnung der Verteilung der elektrischen Stromdichte in leitfähigen Gebieten mit inhomogener Leitfähigkeit sowie unter Berücksichtigung komplizierter Geometrien angewendet: Stromverteilungen auf Gerätechassis und Stromschienen bei Gleichströmen und Strömen sehr kleiner Frequenz, wobei das gleichzeitig auftretende stationäre Magnetfeld keine Bedeutung besitzt und daher außer acht gelassen werden kann. Derartige Problemstellungen kommen beispielsweise bei der Modellierung der elektrischen Kopplung über das Substrat in integrierten MOS-Schaltungen (Abschn. 39.3) sowie bei der Erstellung von Modellen für die geoelektrische Widerstandstiefensondierung auf, wobei das Problem der geometrischen Auslegung von Erdern gegen gefährliche Blitzeinschläge (Kapitel 17) als Spezialfall gesehen werden kann.
- **Genauigkeit:** Untersuchungen der Stromdichteverteilungen hängen insbesondere bei linearen "Ohmschen" Materialmodellen von der Genauigkeit der Modellierung der Leitfähigkeit in den betrachteten Gebieten ab. Dabei sollte die räumliche Ausdehnung der Gebiete so groß sein, dass die atomis-

tische Struktur der Materie keine wesentliche Rolle spielt. Bei nichtlinearen Materialmodellen müssen gesonderte Überlegungen angestellt werden.

- **Grenzen der Anwendung:** Wesentliche Voraussetzung für die Genauigkeit der sich ergebenden Stromdichteverteilungen ist die Zeitunabhängigkeit der Stromdichte und damit des umgebenden Magnetfeldes. Andernfalls würde es aufgrund der Felddiffusion (Kapitel 29) zu einer Rückwirkung auf die Stromdichteverteilung kommen und diese insbesondere bei höheren Frequenzen erheblich verändern.
- **Methoden:** Geht man von einem linearen "Ohmschen" Materialmodell aus, erhält man eine Laplacegleichung (Kapitel 15), mit der das elektrische Potenzial in dem betrachteten Gebiet berechenbar ist und aus dem die Stromdichteverteilung ermittelt werden kann. Dabei kommen neben den graphischen Methoden (Abschn. 16.1) alle analytischen und numerischen Methoden zur Lösung der Laplacegleichung zum Einsatz, die schon aus der Elektrostatik bekannt sind (Kapitel 11). Allerdings hat man es hinsichtlich der Randbedingungen mit anderen Situationen zu tun, da elektrische Einströmungen durch Neumann-Randwerte zu beschreiben sind. Im Fall nichtlinearer Materialgesetze ergeben sich kompliziertere partielle Differentialgleichungen, die fast ausschließlich numerisch behandelt werden können.

Das stationäre Magnetfeld (Teil V)

- **Zweck:** Stationäre Magnetfelder treten auf, wenn in der Umgebung zeitunabhängige, divergenzfreie Stromdichteverteilungen – Experimente von Ørsted – oder permanente Magnete vorhanden sind (Kapitel 18), wobei bewegte Ladungen ein sehr guter Indikator für solche magnetische Felder sind. Geht man von der heute experimentell überprüfbaren Erfahrungstatsache aus, dass sich bewegte Ladungen in stationären Magnetfeldern hinsichtlich der Richtung ihrer Geschwindigkeit, aber nicht in Bezug auf deren Betrag verändern, kann auf die Kopplung von Ladung und Feld geschlossen werden. Dazu muss das Vektorpotenzial eingeführt werden, was den translatorischen Impuls im Sinne einer Minimalkopplung verändert und dessen Rotation in die Bewegungsgleichungen im Sinne der Lorentz-Kraft eingeht (Kapitel 18). Die Grundgleichungen des stationären Magnetfeldes erhält man unter Berücksichtigung des Nahwirkungsprinzips und eines linearen Materialgesetzes (Kapitel 20). Schließlich erhält man eine vektorielle Poisongleichung für das Vektorpotenzial, die als Grundgleichung des stationären Magnetfeldes angesehen werden kann, da alle anderen Feldgrößen aus dem Vektorpotenzial ermittelt werden können. Das gilt insbesondere für das B-Feld, das mit mechanischen Kräften in Beziehung steht. Allerdings müssen bei Aufgabenstellungen des stationären Magnetfeldes häufig auch andere Materialgesetze unter Einschluss von Hysterese-Effekten ver-

wendet werden (Kapitel 20), so dass modifizierte Poissons-Gleichungen auftreten.

- **Typische Anwendungen:** Zu den bekanntesten Effekten, die mit stationären Magnetfeldern in Zusammenhang gebracht werden, gehören die auf metallische Körper wirkenden anziehenden und abstoßenden mechanischen Kräfte (Kapitel 25), die sich mit Permanent- und Elektromagneten erzeugen lassen (Abschn. 22.3). Diese Kräfte lassen sich detailliert bestimmten, wenn das B-Feld bekannt ist. Solche Magnete werden aber nicht nur in großtechnischen Anlagen wie in elektrischen Maschinen und bei Hubmagneten eingesetzt. Seit langer Zeit werden magnetisierbare Materialien zur Datenspeicherung eingesetzt, wobei die Strukturgröße magnetisierbarer Gebiete bei Festplatten und CDs inzwischen im Mikrometer- und teilweise sogar im Nanometer-Bereich liegt. Zur messtechnischen Charakterisierung müssen dann sogenannte magnetische Kraftmikroskope eingesetzt werden, die eine Auflösung bis zu wenigen Nanometern erreichen. Ein anderes Anwendungsgebiet stationärer Magnetfelder ist die Bestimmung magnetischer Kopplungen, wobei Selbst- und Gegeninduktivitäten zu berechnen sind (Kapitel 12), die in Form von Spulen und Transformatoren in elektronischen Schaltungen sowie in energietechnischen Anlagen auftreten. Schließlich werden stationäre Magnetfelder bei der Konstruktion von elektronischen Bauelementen (z. B. Braunsche Röhre, Magnetron) und in der Teilchenphysik (z. B. Zyklotron (Abschn. 19.2) und Kernspinresonanzspektroskopie (NMR)) benötigt.
- **Genauigkeit:** Bei einem linearen Materialgesetz kommt es auf die Bestimmung von Lösungen der vektoriellen Poissons-Gleichung für das Vektorpotenzial an, wobei nur eine begrenzte Anzahl von Geometrien eine exakte Lösung erlauben. In vielen Anwendungen stellt ein lineares Materialgesetz nur eine grobe Näherung dar. Werden inhomogene, anisotrope oder sogar nichtlineare Materialgesetze verwendet, können nur selten exakte Lösungen ermittelt werden. Alternativ kann auf die Biot-Savart-Formel zurückgegriffen werden, die aber ähnlichen Einschränkungen unterliegt.
- **Grenzen der Anwendung:** Um die Theorie stationärer Magnetfelder anwenden zu können, müssen die physikalischen Voraussetzungen eingehalten werden. Wenn das Gebiet leitfähig ist, führen moderate, zeitveränderliche Magnetfelder zu einer Kopplung mit dem elektrischen Feld und es kommt zu Wirbelströmen (Abschn. 29.1), die zu einer Veränderung des Magnetfelds führen.
- **Methoden:** Die Berechnung stationärer Magnetfelder führt bei einem linearen Materialgesetz zu einer vektoriellen Poissons-Gleichung für das Vektorpotenzial, wobei eine Reihe von analytischen und Näherungsmethoden zur Verfügung stehen (Kapitel 21). Insbesondere wenn keine Randbedingungen im Endlichen vorgegeben sind, kann für das Vektorpotenzial eine Lösungsformel angegeben werden (Abschn. 21.2), aus der eine Lösungsformel für das B-Feld ableitbar ist (Biot-Savart-Laplace-Formel in Abschn. 21.3 und Kapitel 22). Enthält das Gebiet, in dem das stationäre Magnet-

feld zu berechnen ist, keine Stromdichten bzw. Ströme, dann kann mit einem skalaren magnetischen Potenzial gerechnet werden. Anders als in der Elektrostatik verliert man jedoch die Wegunabhängigkeit entsprechender Wegintegrale, was sich in nicht einfach zusammenhängenden Gebieten zeigt. Kraftberechnungen im stationären Magnetfeld kann man auch auf der Grundlage der magnetischen Energie durchführen (Abschn. 25.2).

Das quasistationäre elektromagnetische Feld (Teil VI)

- **Zweck:** Sind die elektromagnetischen Felder zeitabhängig und verändern sich mit moderaten Frequenzen, dann führt das von Faraday entdeckte Induktionsgesetz (Abschn. 26.2) zu einer Kopplung des elektrischen und magnetischen Feldes. Berücksichtigt man die allgemeine Form der Kontinuitätsgleichung durch eine Erweiterung des Durchflutungsgesetzes (Abschn. 26.4 und Kapitel 30), erhält man die Grundgleichungen des quasistationären elektromagnetischen Feldes, die alle Phänomene außer den elektromagnetischen Wellen beschreiben (Abschnitt 26.5). Ein Vorteil der Theorie ist, dass die Berechnung des Magnetfeldes auf der Grundlage der Theorie des stationären Magnetfeldes erfolgen kann (Teil V). Insbesondere kommt es in leitfähigen Gebieten zu einer Felddiffusion, wobei äußere elektromagnetische Felder in diese Gebiete gedämpft eindringen (Kapitel 29). Bei höheren Frequenzen dringt das Feld nur wenig in das leitfähige Gebiet ein, so dass die elektromagnetischen Felder fast nur an der Oberfläche vorhanden sind; man spricht auch vom Skineffekt (Abschn. 29.1). Innerhalb des leitfähigen Gebietes fließen sogenannte Wirbelströme (Abschn. 29.1.4), die u. U. zu ganz erheblichen Ohmschen Verlusten führen können. Die traditionelle Bezeichnung Strom- oder Feldverdrängung für die Felddiffusion ist physikalisch nicht gerechtfertigt. Um neben den elektromagnetischen auch mechanische Vorgänge einzubeziehen, was zu zeitabhängigen geometrischen Nebenbedingungen führt, können die Gleichungen so umgeschrieben werden, dass sie explizite mechanische Größen wie die Geschwindigkeit enthalten (Abschn. 31.1).
- **Typische Anwendungen:** Die Energietechnik ist ein bedeutendes Anwendungsgebiet der Theorie quasistationärer elektromagnetischer Felder. Insbesondere bei der Modellierung von Transformatoren (Abschn. 29.3) und bei der elektrisch-mechanischen Energiewandlung (Abschn. 29.4) baut man auf diese Theorie auf. Aber auch das Gebiet der elektronischen Schaltungstechnik, wo ebenfalls Spulen und Transformatoren (Abschn. 29.3.4 - 29.3.5) sowie Kondensatoren eingesetzt werden, nutzt diese Theorie.
- **Genauigkeit:** Die Theorie quasistationärer elektromagnetischer Felder ist physikalisch abgeschlossen. Erst wenn die Effekte elektromagnetischer Wellen zu berücksichtigen sind, müssen die Grundgleichungen der Theo-

rie (Abschn. 26.5) erweitert werden, was Maxwell durch seine Ergänzung realisiert hat (Abschn. 32.1).

- **Grenzen der Anwendung:** Die Abgrenzung quasistationärer und instationärer elektromagnetischer Felder sollte die Frequenz, die Lichtgeschwindigkeit und die Größenordnung der räumlichen Abmessungen einer Anordnung berücksichtigen (Abschn. 32.1). Auch die Formulierung des Induktionsgesetzes für elektromagnetische Anordnungen mit mechanisch beweglichen Teilen ist auf Änderungsgeschwindigkeiten der Mechanik beschränkt, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Andernfalls muss die spezielle Relativitätstheorie berücksichtigt werden (Abschn. 31.1)
- **Methoden:** Bei linearen Materialien lassen sich alle Phänomene der Theorie quasistationärer Felder auf der Grundlage von Vektor-Diffusionsgleichungen für die verschiedenen Feldgrößen analysieren. Für den räumlich 1-dimensionalen Fall steht eine Lösungsformel in Form eines Faltungsintegrals zur Verfügung, wenn die zugehörige Greensche Funktion bekannt ist (Kapitel 28). Weiterhin kann auch die Methode der Separation angewendet werden, wenn eine entsprechende Geometrie des Problems vorliegt (z. B. Zylindergeometrie). Ansonsten gibt es in der Literatur zahlreiche spezielle Methoden zur Berechnung von Wirbelströmen ("Eddy-Currents") sowie einige Methoden für die Behandlung von Problemen mit nichtlinearer Felddiffusion.

Das instationäre elektromagnetische Feld (Teil VII)

- **Zweck:** Die Theorie des instationären elektromagnetischen Feldes muss eingesetzt werden, wenn elektromagnetische Wellen im Freiraum oder wenn geführte elektromagnetische Wellen auftreten. Solche Wellen wurden ursprünglich von Maxwell nach dem Aufbau seiner Theorie des elektromagnetischen Feldes vorausgesagt und später von Hertz experimentell nachgewiesen. Die grundlegenden Gleichungen der Theorie werden Maxwellsche Gleichungen genannt (Abschn. 32.2), wobei für den Fall linearer Materialgleichungen und einer Eichung (d.h. geeignete Nutzung des Freiheitsgrades der Divergenz des Vektorpotenzials) eine skalare und eine vektorielle Wellengleichung für das skalare elektrische Potenzial und das Vektorpotenzial auftreten. Der Hertzsche Dipol ist eine der ganz wenigen Anordnungen, für die ein instationäres elektromagnetisches Feld mit Hilfe elementarer Funktionen dargestellt werden kann (Abschn. 34.1). Eine Rekonstruktion der in der Strahlen- und Wellenoptik bekannten Phänomene wie Reflexion und Brechung kann mit Hilfe von ebenen elektromagnetischen Wellen erfolgen (Abschn. 34.3).
- **Typische Anwendungen:** Anordnungen, bei denen Wellenphänomene eine wichtige Rolle spielen, sind Antennen und Draht- und Koaxialleitungen (Kapitel 35) sowie Hohlleiter und Hohlraumresonatoren (Kapitel 36).

Die Ergebnisse des Hertzschen Dipols können auf eine einfache Dipolantenne übertragen werden (Abschn. 34.1.3).

- **Genauigkeit:** Wenn man die Maxwellschen Gleichungen mit geeigneten Materialmodellen für eine gegebene geometrische Anordnung formuliert, hat man im Bereich der klassischen Physik die bestmögliche Beschreibung. Allerdings muss man bei vielen Anordnungen erhebliche Näherungen anwenden, um zu analytisch lösbarer Gleichungen zu kommen. Dadurch wird die Genauigkeit beschränkt.
- **Grenzen der Anwendung:** Treten in elektromagnetischen Anordnungen auch Quantenphänomene auf, muss auf ein allgemeineres physikalisches Konzept zurückgegriffen werden. Allerdings verlässt man dann den Rahmen der klassischen Physik.
- **Methoden:** Bei linearen Materialgesetzen müssen Wellengleichungen für das skalare elektrische Potenzial und das Vektorpotenzial gelöst werden, was analytisch nur dann gelingt, wenn man sich auf den Fall ebener harmonische Wellenlösungen beschränkt (Abschn. 34.3). Darüber hinaus kann man nach d'Alembert eine additive Zerlegung in einen retardierten und einen avancierten Anteil auch in allgemeineren Fällen ableiten, ohne allerdings die funktionale Abhängigkeit der Anteile explizit zu bestimmen (Abschn. 34.3). Weiterhin gibt es auch eine Vielzahl numerischer Methoden mit unterschiedlichen Anwendungsgebieten. Dazu findet man ebenso wie für die Methode der Greenschen Funktion bei Wellengleichungen einige Literaturhinweise in Abschn. 32.2.

Das elektromagnetische Feld in elektronischen Bauelementen (Teil VIII)

- **Zweck:** Elektromagnetische Felder werden zur Manipulation von Ladungsträgern (z.B. Elektronen) herangezogen. Die verschiedenen Techniken wurden seit Ende des 19. Jahrhunderts zur Konstruktion elektronischer Bauelemente wie die Braunsche Röhre (1897) und die Elektronenröhre (ab 1904) als auch halbleiterbasierter Bauelemente wie PN-Dioden und Transistoren verwendet. Daher wird in Teil VIII dieses Buches auf die Funktion dieser Bauelemente (Kapitel 39) und auf die entsprechende Art der Manipulation der Ladungsträger eingegangen (Kapitel 37). Um den Umfang des Buches zu reduzieren, wurden die Grundlagen einiger nur noch selten gebräuchlicher Bauelemente wie die Stromleitung in Gasen (Abschn. 37.1) und Elektronenröhren (Kapitel 38) ausgegliedert, stehen jedoch im Internet zur Verfügung (s. URL oben). Da elektronische Bauelemente zum Aufbau von elektronischen Schaltungen verwendet werden, wird auch auf ausgewählte Schaltungen sowie auf deren Analyse und deren Eigenschaften eingegangen (Kapitel 40).

- **Typische Anwendungen:** Elektronische Bauelemente werden in linearen und nichtlinearen elektronischen Schaltungen eingesetzt und bilden damit die Basis auch für integrierte Schaltungstechnik analoger Schaltungen (Kapitel 40). Für die Analyse- und Entwurfsmethoden werden die in Teil II diskutierten Netzwerkmodelle verwendet, wobei nicht immer scharf zwischen Netzwerkmodell und realer Schaltung unterschieden wird. Schaltungen, bei denen sich Strom und Spannung nur in zwei Niveaus (binäre Level) befinden, wenn man von den Umschaltvorgängen absieht, nennt man digitale Schaltungen. Darüber hinaus gibt es Schaltungen, in denen sich die Ströme und Spannungen kontinuierlich als auch binär verändern; man spricht dann von Mixed-Signal-Schaltungen. Neben den Grundschaltungen für Bipolartransistoren (Abschn. 40.2) wird auch kurz auf den Aufbau von Operationsverstärkern eingegangen (Abschn. 40.3). Weiterhin werden Systeme mit Rückkopplung betrachtet (Abschn. 40.4), bei denen die Rückkopplung zu einem negativen Widerstand äquivalent ist. Zu diesen Schaltungen gehören auch die Oszillatoren, die nichtlineare Eigenschaften besitzen und die periodische Schwingungen erzeugen.
- **Genauigkeit:** Für die Bauelemente werden Netzwerkmodelle angegeben, bei denen die räumliche Ausdehnung durch einen räumlichen Mittelungsprozess eliminiert wurde. Das führt insbesondere bei den Anwendungen in der Schaltungstechnik zu brauchbaren Ergebnissen, wenn man exemplarische Vergleiche mit Messungen zugrunde legt.
- **Grenzen der Anwendung:** Wenn die Strukturen der Bauelemente immer kleiner werden, wie es in der modernen integrierten Schaltungstechnik der Fall ist, müssen gegebenenfalls Modellierungsansätze für den räumlich verteilten Ladungstransport (Drift-Diffusions-Näherung) oder sogar mit Quantenaspekten erweiterte Modelle verwendet werden. Aufgrund des großen Rechenaufwandes kann man nur sehr kleine Anteile des strukturierten Siliziums analysieren.
- **Methoden:** Die Transportmechanismen nutzen fast ausschließlich elektrostatische Kräfte, so dass man auf die der Elektrostatik zugrundeliegende Poissons-Gleichung und deren Lösungsverfahren (ggf. unter Berücksichtigung von Näherungen) zurückgreifen kann. Bei der Analyse von Schaltungen die Beschreibungsgleichungen in Form von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen verwendet (Teil II) werden.

Inhaltsverzeichnis

Teil I Was ist Theoretische Elektrotechnik?

1	Die elektrotechnischen Disziplinen	3
2	Systemtheoretische Grundlagen	9
3	Grundlegende Aspekte physikalischer Systeme	15
3.1	Verteilte physikalische Systeme	15
3.2	Mechanik und Energie-Impuls-Transporte	17

Teil II Theorie elektrischer Netzwerke

4	Grundgleichungen und Analysemethoden elektrischer Netzwerke	23
4.1	Netzwerkmodellierung und Widerstandsnetzwerke	23
4.2	Elektrischen Netzwerke mit dynamischen Elementen	38
4.3	Die Wechselstromrechnung: AC-Kalkül	42
4.4	Darstellungen von Übertragungsfunktionen	55
4.5	Zweitore und Vierpole	63
5	Einfache elektrische Grundschaltungen	74
5.1	Einführende Überlegungen	74
5.2	Einfache Schaltungen aus Spulen und Widerständen	76
5.2.1	Lade- und Entladevorgang eines RC-Gliedes	76
5.2.2	Ein einfacher Wechselstromkreis mit Kondensator	81
5.3	Netzwerke aus Spulen und Widerständen	86
5.3.1	Aufladenvorgang eines LR-Gliedes	86
5.3.2	Ein einfacher Wechselstromkreis mit Spule	89
5.4	Dreiphasennetzwerke	94
5.5	Der Gyrator	101

Teil III Das elektrostatische Feld

6 Die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes	107
7 Elementare Betrachtungen zur Elektrostatik	113
8 Materialgesetze in der Elektrostatik	121
9 Influenzwirkungen	129
10 Einfache Beispiele für elektrostatische Felder	132
10.1 Das elektrische Feld von Punktladungen	133
10.1.1 Die homogen geladene Kugel und die Punktladung	133
10.1.2 Endlich viele Punktladungen	134
10.1.3 Das Potenzial zweier Punktladungen	135
10.1.4 Der elektrische Dipol	137
10.1.5 Das elektrische Feld zweier Kugeln	140
10.1.6 Endlich ausgedehnte Linienladungen	142
10.2 Ebene elektrostatische Felder	144
10.2.1 Unendlich lange Linienleiter	144
10.2.2 Koaxialkabel, Zylinderkondensator	146
10.2.3 Zweidrahtleitung, parallele Zylinder	150
10.2.4 Zylinder und Platte	155
10.2.5 Liniendipol	156
10.2.6 Erdseil	158
11 Lösungsverfahren der Poisson- und Laplace-Gleichung	161
11.1 Grundlagen	161
11.1.1 Poisson- und Laplace-Gleichung und ihre Lösungsmengen	162
11.1.2 Rand- und Grenzbedingungen, Eindeutigkeit des Potenzials	164
11.2 Elementare Methoden	165
11.2.1 Die graphische Methode	165
11.2.2 Eindimensionale Potenzialprobleme	168
11.2.3 Überlagerung von Punktladungen	169
11.3 Das Kirchhoff-Integral	170
11.4 Die Greensche und Neumannsche Funktionen	171
11.5 Die Multipolmethode	172
11.6 Die Spiegelungsmethode	174
11.7 Konforme Abbildungen	176
11.8 Die Separationsmethode	192
11.9 Bemerkungen über numerische Verfahren	193

12 Kapazitätskoeffizienten	195
12.1 Der elementare Kapazitätsbegriff	195
12.2 Graphische Berechnung von Kapazitätskoeffizienten	197
12.3 Kapazität einfacher Anordnungen	198
12.4 Parallel- und Reihenschaltung von Kapazitäten	207
12.5 Kapazitäten in Mehrleitersystemen	208
12.5.1 Maxwellsche Potenzial- und Kapazitätskoeffizienten	208
12.5.2 Berechnung von Teilkapazitäten	221
13 Energie in der Elektrostatik	230
14 Mechanische Kräfte in der Elektrostatik	234
14.1 Kräfte an Leiteroberflächen	234
14.2 Mechanische Spannungen im elektrischen Feld	236
14.3 Kräfte an Grenzflächen zwischen Nichtleitern	238
14.4 Berechnung der Feldkräfte aus der Kapazität	240
14.5 Einwirkung elektrischer Felder auf Elektronenbahnen: Elektronenoptik (Internet)	243
14.6 Einwirkung elektrischer Felder auf Elektronenbahnen: Elektronenoptik (Internet)	244

Teil IV Das elektrische Strömungsfeld

15 Grundgleichungen des elektrischen Strömungsfeldes	247
16 Elementare Betrachtungen zum elektrischen Strömungsfeld 252	
16.1 Experimentelle Betrachtungen	252
16.2 Das stationäre Strömungsfeld und Widerstandsnetzwerke	256
16.3 Zusammenhang zwischen Kapazität und Widerstand	262
17 Beispiele von elektrischen Strömungsfeldern	266
17.1 Punktquelle	266
17.2 Spiegelung	274
17.3 Linienquelle	276

Teil V Das stationäre Magnetfeld

18 Grundgleichungen des stationären Magnetfeldes	285
19 Elementare Betrachtungen zum stationären Magnetfeld ... 292	
19.1 Magnetische Kraftwirkungen und das B-Feldes	292
19.2 Beispiele für magnetische Kraftwirkungen	297
19.3 Das Durchflutungsgesetz	301
19.4 Der magnetische Dipol	305

20 Materialgesetze im stationären Magnetfeld	307
20.1 Diamagnetismus und Paramagnetismus	307
20.2 Messung der Permeabilität	310
20.3 Ferromagnetismus	311
20.4 Magnetische Werkstoffe	319
20.5 Magnetische Anisotropie	322
21 Lösungsverfahren für die Vektor-Poissongleichung	325
21.1 Ableitung der Vektor-Poissongleichung	325
21.2 Das vektorielle Kirchhoff-Integral	327
21.2.1 Kirchhoff-Integral für Stromdichteverteilungen	327
21.2.2 Kirchhoff-Integral für einen Linienleiter	329
21.3 Das Biot-Savart-Integral	333
21.4 Die Multipolmethode	335
21.5 Das skalare magnetische Potenzial und konforme Abbildungen	337
22 Beispiele für stationäre Magnetfelder	346
22.1 Anwendung der Laplaceschen Formel	346
22.2 Anwendung des magnetischen skalaren Potenzials	348
22.3 Der magnetische Kreis: Elektro- und Dauermagnete	353
22.3.1 Grundgleichungen des magnetischen Kreises	353
22.3.2 Angenäherte Berechnung von Elektromagneten	354
22.3.3 Scherung	359
22.3.4 Berechnung von Dauermagneten	360
22.3.5 Theorie der Kompassnadel	365
23 Induktionskoeffizienten	367
23.1 Der Induktivitätsbegriff	367
23.2 Induktivitäten einfacher Anordnungen	368
23.2.1 Induktivität einer Ringspule	368
23.2.2 Induktivität einer Zylinderspule	370
23.2.3 Induktivität einer Doppelleitung	370
23.2.4 Induktivität eines Drahtringes	371
23.2.5 Induktivität von Drähten beliebiger Form	372
23.2.6 Induktivität in nichtlinearen magnetischen Kreisen	373
23.3 Gegeninduktivität und Koppelkoeffizient	374
24 Energie im stationären Magnetfeld	379
25 Kräfte im stationären Magnetfeld	388
25.1 Kräfte zwischen Stromleitern	388
25.2 Methode der virtuellen Verschiebung zur Kraftberechnung	391
25.3 Kräfte zwischen Stromleitern und magnetischen Stoffen	392
25.4 Kräfte an Grenzflächen	393

Teil VI Das quasistationäre elektromagnetische Feld

26 Grundgleichungen des quasistationären Feldes	401
26.1 Elektrisches und magnetisches Feld	401
26.2 Das Induktionsgesetz	402
26.3 Die Grundgleichungen mit Induktionsgesetz	405
26.4 Das Induktionsgesetz und die Kontinuitätsgleichung	407
26.5 Die Grundgleichungen des quasistationären elektromagnetischen Feldes	409
27 Elementare Betrachtungen zur Induktionswirkung	413
28 Lösungsverfahren für Diffusionsgleichungen	431
29 Anwendungen des quasistationären Feldes	434
29.1 Wirbelströme und Skineffekt	434
29.1.1 Stromverdrängung im zylindrischen Leiter	435
29.1.2 Ebene Wirbelfelder	440
29.1.3 Einseitige Stromverdrängung in Ankerleitern und Spulen	445
29.1.4 Wirbelströme in Eisenblechkernen	449
29.1.5 Abschirmung von Hochfrequenzfeldern	455
29.1.6 Triebströme eines Wechselstromzählers	456
29.2 Ummagnetisierungsverluste bei ferromagnetischen Werkstoffen	457
29.3 Der Transformator	466
29.3.1 Allgemeine Beziehungen	466
29.3.2 Streuungs-Ersatzbild	469
29.3.3 Die Streuung	470
29.3.4 Der lineare Übertrager	473
29.3.5 Kopplungs-Ersatzbilder des linearen Übertragers	477
29.4 Elektrisch-mechanische Energiewandlung	479
29.4.1 Allgemeines	479
29.4.2 Die Grundgleichungen der elektrischen Maschine	480
29.4.3 Die Gleichstrommaschine	481
29.4.4 Die Synchronmaschine	485
29.4.5 Die Induktionsmaschine	491
29.4.6 Lineare elektrisch-mechanische Systeme	497
30 Der Verschiebungsstrom im quasistationären Feld	503
31 Bewegte Leiter und das Induktionsgesetz	508
31.1 Bewegte Leiter	508
31.2 Bewegte nichtleitende Körper	511
31.3 Weitere Bewegungseffekte	512

Teil VII Das instationäre elektromagnetische Feld

32 Die Maxwellsche Theorie des elektromagnetisches Feldes	519
32.1 Die Maxwellsche Ergänzung und Wellen	519
32.2 Die Maxwellschen Gleichungen	521
33 Elementare Betrachtungen zum instationären elektromagnetischen Feld	524
34 Elektromagnetische Wellen	533
34.1 Elementarform der elektromagnetischen Welle	533
34.1.1 Nahfeld der schwingenden Ladung	539
34.1.2 Fernfeld der schwingenden Ladung	539
34.1.3 Energiefluss in der Elementarwelle, Strahlungswiderstand	540
34.2 Energiedichte des elektromagnetischen Feldes	546
34.3 Ebene Welle	549
34.4 Empfangsantennen	559
34.5 Elektromagnetische Schirme	560
35 TEM-Wellen auf Doppel- und Mehrfachleitungen	564
35.1 Vorbemerkungen	564
35.2 Verlustfreie Doppelleitungen	566
35.2.1 Feldtheoretische Beschreibung	566
35.2.2 Leitungsgleichungen	577
35.2.3 Konstruktion von Leitungsmodellen mit Differenzenformeln	591
35.2.4 Ausblick: Mehrfachleitungen	595
35.2.5 Schlußbemerkung	597
35.3 Verlustbehaftete Doppelleitungen	597
35.3.1 Doppelleitungen mit verlustbehaftetem Dielektrikum ..	597
35.3.2 Doppelleitungen mit verlustbehaftetem Dielektrikum und verlustbehafteten Leitern	600
35.4 Lösung der Leitungsgleichungen im Zeitbereich	603
35.4.1 Wellenausbreitung auf verlustlosen Doppelleitungen ..	603
35.4.2 Leitungsmodelle zur Netzwerkanalyse im Zeitbereich ..	616
35.5 Lösung der Leitungsgleichungen im Frequenzbereich	625
35.5.1 Sinusförmig eingeschwungene Lösungen der Leitungsgleichungen	626
35.5.2 Leitungsmodelle für die Netzwerkanalyse im Frequenzbereich	632
35.5.3 Eigenschaften der Lösungen der Leitungsgleichungen im Frequenzbereich	635
36 Hohlleiter und Hohlraumresonatoren	644

Teil VIII Das elektromagnetische Feld in elektronischen Bauelementen

37 Mechanismen der Stromleitung	659
37.1 Stromleitung in Gasen: Grundbegriffe (Internet)	659
37.1.1 Stoßionisierung	659
37.1.2 Elektronenauslösung an der Kathode	659
37.1.3 Anlaufspannung. Durchschlag in Gasen	659
37.1.4 Koronaentladung	659
37.1.5 Kurzzeitige Gasentladung	659
37.1.6 Bogenentladung	659
37.1.7 Bogenentladung an Kontakten	659
37.1.8 Die Kapazität bei Feldern mit Raumladungen	659
37.1.9 Der Durchschlag von Isolierstoffen	659
37.2 Stromleitung in festen Körpern und Flüssigkeiten	660
37.2.1 Atomstruktur der Leiter und Leitungsmechanismen	660
37.2.2 Metallische Leiter	661
37.2.3 Ionenleiter	666
37.2.4 Schwankungerscheinungen	667
37.2.5 Das Wesen der Spannungsquellen - Quellenspannung	669
37.3 Stromleitung in Halbleitern	670
37.3.1 Siliziumkristall	670
37.3.2 Bändermodell	672
37.3.3 Eigenleitung	673
37.3.4 Störstellenleitung	675
37.3.5 Feldstrom und Diffusionsstrom	678
37.3.6 Diffusion von Minoritätsträger	681
37.3.7 Diffusion von Löchern aus einer <i>p</i> -Zone in eine <i>n</i> -Zone. Diffusionsspannung	685
37.3.8 Thermoeffekt	689
37.3.9 Photoeffekt	689
38 Elektronenröhren (Internet)	692
38.1 Die Raumladungsgleichung	692
38.2 Elektronenemission	692
38.3 Photoemission	692
38.4 Die Strom-Spannungsrelation für Elektronenröhren	692
38.5 Die Hochvakuumtriode	692
38.6 Die Hochvakuumtriode	692
38.7 Raumladung in leitenden Stoffen	692

39 Halbleiterbauelemente	693
39.1 Der <i>pn</i> -Übergang	693
39.1.1 Der <i>pn</i> -Übergang im stromlosen Zustand	693
39.1.2 <i>pn</i> -Übergang im Durchlassbereich	697
39.1.3 <i>pn</i> -Übergang im Sperrbereich	702
39.1.4 Kapazität des <i>pn</i> -Überganges	702
39.2 Der bipolare <i>npn</i> -Transistor	707
39.2.1 Der Aufbau	710
39.2.2 Die Ersatzschaltung	710
39.3 Der MOSFET	716
40 Schaltungen und Netzwerke	722
40.1 Grundbegriffe der Schaltungstechnik	722
40.2 Der Bipolartransistor und seine Grundschaltungen	725
40.2.1 Die Basisschaltung	725
40.2.2 Die Emitterschaltung	729
40.2.3 Die Kollektorschaltung (Emitterfolger)	732
40.3 Grundaufbau von Operationsverstärkern	734
40.4 Systeme mit Rückkopplung	737
40.4.1 Stabilitätsbedingungen	737
40.4.2 Negativer Widerstand	739
40.4.3 Die beiden Typen von negativen Widerständen	743
40.4.4 Rückkopplung	747
40.4.5 Erzeugung von Schwingungen in Oszillatoren	750
A Mathematische Felder	757
A.1 Differentialoperatoren und Rechenregeln	757
A.2 Das Satz von Helmholtz	763
B Der Laplace-Operator	765
B.1 Skalare Felder	765
B.2 Vektorielle Felder	766
Literatur	769
Index	783

Teil I

Was ist Theoretische Elektrotechnik?

Die elektrotechnischen Disziplinen

Viele technische Aufgaben können im Prinzip durch Probieren gelöst werden, z. B. der Bau eines Elektromotors oder einer Verstärkerröhre oder einer Fernsprechverbindung. Beim Bau eines Transistors oder einer mikro- oder gar nanoelektronischen Schaltung in integrierter Technologie ist das jedoch nicht mehr so einfach und kann bei fehlerhaften Ergebnissen hohe Kosten verursachen. Wendet man die „Probiermethode“ an und erfüllt das erste Gerät nicht die gewünschten Bedingungen, ist z. B. die Leistung des Elektromotors nicht ausreichend oder zeigen sich irgendwelche anderen Mängel, dann wird man ein zweites Gerät herstellen und versuchen, durch Abänderungen diese Mängel zu beseitigen, und es ist wahrscheinlich, dass man bei Verwertung der dabei gemachten Erfahrungen nach einer gewissen Anzahl von Versuchen schließlich zu einem brauchbaren Gerät kommen wird. Dieses empirische Verfahren ist in der Tat das Verfahren, das in der Technik, besonders in der Anfangszeit neuer Zweige der Technik, häufig angewendet wurde und noch angewendet wird. Heute wird in der Entwurfsphase meistens keine praktische Realisierung mehr durchgeführt, sondern die Systemeigenschaften werden mit Hilfe von Rechnersimulationen optimiert. Offensichtlich erfordert es aber zumindest große Aufwendungen an Hilfsmitteln und an Zeit. Sie lassen sich um so mehr verringern, je genauer man die Vorgänge kennt, die sich in der betreffenden Einrichtung abspielen. Diese Kenntnis kann zwar grundsätzlich nur durch Erfahrung ermittelt werden; es ist jedoch möglich, auch ohne dass Erfahrungen mit der besonderen Einrichtung vorliegen, um deren Herstellung es sich handelt, Voraussagen über ihre Eigenschaften zu machen. Dazu dient die Theorie.

Die Theorie bildet die Zusammenfassung der jeweils vorliegenden, durch Beobachtung und Messung gewonnenen Gesamterfahrungen, so dass diese auf möglichst viele Fälle übertragen werden können.

Diese unseren heutigen Vorstellungen entsprechende Definition unterscheidet sich grundsätzlich von der alten Bedeutung dieses Wortes, wie sie Goethe im „Faust“ meint, wenn er von der „grauen“ Theorie spricht. Jene „Theorie“

ging nicht von der Erkenntnis der Naturvorgänge aus, sondern beruhte auf einer dogmatischen Weltbetrachtung.

Zur Lösung einer technischen Aufgabe stehen also grundsätzlich *Versuch und Theorie* zur Verfügung, wobei die Theorie die bereits früher gemachten Versuche und Erfahrungen berücksichtigt. Daher sind zur Lösung einer technischen Aufgabe im allgemeinen drei Arten von Aufwendungen erforderlich:

1. *Gedankenarbeit* zur Verwertung der theoretischen Erkenntnisse.
2. *Mittel* zur Ausführung von Versuchen (Rohstoffe, Werkstoffe, Bauelemente, Herstellungskosten der Versuchseinrichtungen, Betriebskosten).
3. Man braucht *Zeit*, wobei zur Lösung ein und derselben Aufgabe mehr Entwürfe, Versuche und Versuchseinrichtungen erforderlich sind, wenn man von den theoretischen Erkenntnissen weniger Gebrauch macht.

An materiellem Aufwand kann gespart werden, wenn mehr geistige Arbeit bei der Lösung des Problems aufgewendet wird. Dazu kommt noch, dass das empirische Verfahren unvergleichlich mehr Zeit und Gesamtarbeit erfordert als bei Anwendung der theoretischen Erkenntnisse notwendig ist. Hierin liegen die Erfolge des wissenschaftlichen Verfahrens der Bearbeitung technischer Aufgaben, das den Gegensatz zum empirischen Verfahren bildet, und dessen Einführung die raschen Fortschritte der Technik in den letzten Jahrzehnten ermöglicht hat. Die theoretischen Erkenntnisse sind allerdings gegenwärtig – und das galt nicht nur in der Zeit Küpfmüllers, sondern aufgrund des ständigen Technologiewandels gilt diese Aussage in jeder Epoche – noch weit von dem idealen Zustand entfernt, dass man jede technische Aufgabe rein durch Gedankenarbeit lösen könnte, dass also die zweite Art von Aufwendungen vollständig durch die erste ersetzt werden könnte; um so wichtiger ist es daher, mit der Auswertung des Vorhandenen so weit zu gehen wie irgend möglich. Jede technische Aufgabe ist lösbar. Häufig erfordert die Lösung große Aufwendungen an Mitteln und an Zeit; sie können in dem Maße vermindert werden, in dem es möglich ist, theoretische Erkenntnisse anzuwenden.

Gewöhnlich gibt es zur Lösung einer technischen Aufgabe viele verschiedene Wege oder verschiedene Arten der Ausführung, die alle die gestellten Bedingungen an sich erfüllen. Die zweckmäßige und daher richtige Lösung ist dann immer diejenige, die den geringsten Gesamtaufwand erfordert. Es können z. B. die Herstellungskosten der verschiedenen Ausführungen verschieden sein oder der Materialbedarf, der Bedarf an besonders wertvollen Rohstoffen oder der Raumbedarf; es können aber auch die Betriebskosten oder diejenigen Kosten verschieden sein, die für die Instandhaltung der betreffenden Einrichtung und die Sicherstellung des Betriebes laufend erforderlich sein werden. Daher ist es in vielen Fällen schwierig, die zweckmäßigste Lösung zu finden. *Es gehört aber grundsätzlich zur Lösung einer technischen Aufgabe, dass sie die gestellten Bedingungen mit einem Minimum an Gesamtaufwand erfüllt.* Je genauer man die Eigenschaften der herzustellenden Einrichtung im voraus ermitteln kann, um so sicherer wird dies zu erreichen sein. Auch in dieser Beziehung ergeben sich daher wichtige Anwendungen der theoretischen Erkenntnisse.

Es ist nicht möglich, dass jeder Einzelne alle Erfahrungen, die im Laufe der Zeit gemacht worden sind, in der gleichen Reihenfolge und Vollständigkeit sammelt, besonders wegen der Fülle des Erfahrungsmaterials, die ungeheuer groß ist im Vergleich zu dem was ein Mensch während seines Lebens auf diese Weise aufnehmen könnte. Daher ist es nötig, die Erfahrungen in eine möglichst konzentrierte Form zu bringen und in dieser Form zu verbreiten. Ein Hilfsmittel dazu stellt die *Mathematik* dar, die, vom Standpunkt der Anwendung aus betrachtet, einerseits eine Art Kurzschrift zur Zusammenfassung der Erkenntnisse bildet und andererseits Anweisungen für die Auswertung dieser Erkenntnisse gibt. Aus diesem Grunde sind mathematische Kenntnisse eine unentbehrliche Voraussetzung zum Verständnis der Ingenieurwissenschaften.

Die mathematischen Verfahren ermöglichen es, viel kompliziertere Zusammenhänge zu erfassen, als es mit bloßem Nachdenken möglich wäre; sie können Denkprozesse ersetzen, die über die Fähigkeit des menschlichen Gehirns weit hinausgehen. Gewisse Erfindungen konnten sogar nur auf dem Weg über mathematische Überlegungen entstehen; ein Beispiel dafür bilden die Wellenfilter. Allerdings sind dies seltene Fälle. Für den wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur gilt die Grundforderung, dass er sich eine klare *Vorstellung* von dem Wesen der Naturvorgänge erwirbt, mit denen er es zu tun hat. Darunter ist zu verstehen, dass mit dem Ablauf dieser Vorgänge bestimmte Ideen verbunden werden, die die Erscheinungen auf wenige allgemeine Gesetzmäßigkeiten zurückführen. Zu jeder Technik gehört eine ganz bestimmte Vorstellungswelt, die durch die Theorie vermittelt wird. Die Fortschritte der Technik gehen jeweils von dieser Vorstellungswelt aus. Jede Erweiterung der theoretischen Vorstellungen gibt daher die Möglichkeit weiterer Fortschritte. *Diese Vorstellungen aber können in vollem Umfang nur mit Hilfe der Mathematik erworben werden.*¹

Der Computer ist dabei ein mächtiges Werkzeug besonders zur Auflösung sehr großer linearer Gleichungssysteme, zur Wurzelbestimmung von Polynomen höheren Grades, zur automatischen Durchführung der Fouriertransformation beim Wechsel von Zeit- und Frequenzbetrachtung, und natürlich zur Feldberechnung, die mit Hilfe verschiedener Diskretisierungsmethoden ihrerseits wieder auf die Auflösung linearer Gleichungssysteme zurückgeführt werden kann. Rechnung und Simulation ganzer Systeme erhöhen insbesondere über eine graphische Ausgabe der Ergebnisse die Anschaulichkeit.

Unentbehrlich für eine wissenschaftliche Tätigkeit auf dem Gebiete der Elektrotechnik sind aber nach wie vor die Elemente der Differential- und Integralrechnung, die Lehre von den Potenzreihen und den Fourierschen Reihen, ferner das Rechnen mit komplexen Zahlen und die Elemente der Vektorrechnung und Vektoranalysis; es ist nicht im geringsten ausreichend, diese Gebiete

¹ Weitere interessante Ausführungen über die Philosophie des Schaltungsentwurfs und des Schaltungsdesigners findet man bei O'Dell [218]. Über den Sinn und Zweck von Theorie in den Ingenieurwissenschaften findet man Lesenswertes bei Mathis [183].

der Mathematik zu *kennen*, sondern es gehört dazu die Fähigkeit, die in diesen Gebieten gelehrt Regeln *anzuwenden*. Diese Fähigkeit kann man durch ein noch so ausgedehntes Studium der Formeln nicht erwerben, sondern nur dadurch, dass man spezielle Aufgaben in hinreichend großer Zahl selbst löst.

Die Vorstellungen von dem Wesen der Naturerscheinungen werden durch die *Physik* geschaffen. Die allgemeine Aufgabe der Physik besteht darin, unsere Erkenntnisse von den Naturvorgängen zu erweitern. Die physikalischen Gesetze fassen die beobachteten Naturerscheinungen quantitativ zusammen und bilden damit auch die theoretischen Grundlagen der technischen Anwendungsgebiete. Neue physikalische Entdeckungen führen immer auch zu neuen technischen Anwendungen. Die physikalische Forschung, die eine ständige Verbesserung der physikalischen Vorstellungen und die Entdeckung neuer Zusammenhänge anstrebt, bestimmt daher, über lange Zeiten gesehen, grundsätzlich die Schnelligkeit aller technischen Fortschritte.

Dabei fördern sich die Fortschritte der Physik und die der technischen Anwendungen in einem fortgesetzten Kreislauf. Neue technische Produkte, neue technische Ideen und Erfindungen führen bei der Durcharbeitung in der Regel auf neue physikalische Fragestellungen, sei es, dass die Genauigkeit der vorhandenen Kenntnis bestimmter physikalischer Zusammenhänge nicht ausreicht, sei es, dass physikalische Effekte als Störungen auftreten, die noch nicht näher untersucht worden sind, sei es, dass die Ursachen irgendwelcher Erscheinungen noch unbekannt sind. Daher kommt es, dass ein großer Teil der physikalischen Erkenntnisse aus der Entwicklung technischer Erzeugnisse stammt. Beispiele dafür bilden die Entwicklung der Akustik, die Entwicklung der Elektronenoptik oder die Entwicklung der Festkörperphysik und Halbleiterphysik in den letzten Jahrzehnten. Neue technische Aufgaben, für die noch keine brauchbare Lösung vorliegt, stellen vielfach Aufgaben für die physikalische Forschung und regen diese zum Aufsuchen neuer Erkenntnisse an. Aus solchen Arbeiten entstehen andererseits nicht selten technische Anwendungen für ganz andere Zwecke; Beispiele dafür aus der neuesten Zeit bilden die Legierungen und Stoffe für Dauermagnete und Magnetkerne oder die Halbleiter für Gleichrichter und Verstärker.

Man kann das ineinandergreifen von Physik und Technik beim Werdegang der technischen Produkte etwa durch die folgende Reihe veranschaulichen:

- *Die Physikalische Forschung* umfasst Entdeckungen, Versuche und Messungen und führt zu physikalischen Erkenntnissen, Gesetzen und Theorien, auf deren Basis sich Erfindungen und Verbesserungsideen entwickeln können. Anschließend folgt die Modellierung und Simulation und/oder es müssen Versuchsgeräte und Modelle erstellt werden, um Versuche und Messungen auszuführen.
- *Die Technische Entwicklung* baut auf den Entdeckungen der physikalischen Forschung auf und nutzt deren Erkenntnisse, Gesetze und Theorien, um zu Erfindungen und Verbesserungsideen zu kommen, die mit Hilfe von Simulationen und messtechnischen Versuchen weiterentwickelt werden. Zur

Produktentwicklung führt die Konstruktion und Projektierung auf der Grundlage von Berechnungen und es folgen Fertigungsversuche und Fertigungsmuster. Am Ende steht die technische Erprobung und schließlich die Fertigung.

- *Betriebsentwicklung* umfasst Anwendungsforschung und Betriebsversuche.

Jedes Stadium hat die vorhergehenden zur Voraussetzung; ein wesentlicher Vorgang ist jedoch der, dass sich aus allen diesen Stadien laufend Fragestellungen nach rückwärts ergeben, die wieder zu neuen Wegen, Erkenntnissen und Verbesserungen führen, so dass das Fortschreiten der gesamten Entwicklung mit vielfachen „Rückkopplungen“ vor sich geht. Daher kann auch die Grenze zwischen der Forschung und der technischen Entwicklung nicht scharf gezogen werden, ebensowenig wie die zwischen der technischen Entwicklung und der Erforschung der Anwendungsmöglichkeiten technischer Erzeugnisse. Das letztgenannte Gebiet ist in der Aufstellung durch den Begriff „Betriebsentwicklung“ gekennzeichnet; dazu gehören z.B. die Anwendungen der Automatisierung in Verwaltungs- und Bürobetrieben.

Unter der Bezeichnung *Elektrotechnik* werden alle technischen Aufgaben und Anwendungen zusammengefasst, bei denen elektrische Vorgänge wesentlich sind, die also auf der Ausnutzung der Wirkungen elektrischer Ströme oder Spannungen beruhen. Die Elektrotechnik ist daher kein eigenes technisches Aufgabengebiet, sondern fasst verschiedenartige technische Aufgaben unter einem physikalischen Gesichtspunkt zusammen. Zwei technische Aufgabengebiete sind besonders eng mit der Elektrotechnik verbunden: die Energietechnik und die Nachrichtentechnik.

Die *Energietechnik* befasst sich mit der Umwandlung und der Übertragung von Energie. Für den Anteil der Elektrotechnik an diesem Aufgabengebiet ist die Bezeichnung *Starkstromtechnik* gebräuchlich. Die Aufgabe der Starkstromtechnik besteht in der Erzeugung, Umwandlung, Übertragung, Verteilung und Speicherung elektrischer Energie.

Die Aufgabe der *Nachrichtentechnik* ist die Übertragung, Verteilung, Verarbeitung und Speicherung von Nachrichten (Information). Der zur Elektrotechnik gehörige Teil wird als *elektrische Nachrichtentechnik* bezeichnet. Hier werden gewöhnlich die beiden Hauptgebiete *Nachrichtenübertragung* und *Nachrichtenverarbeitung* (Informationsverarbeitung, Datenverarbeitung) unterschieden.

Die *Messtechnik* kann nach diesen Definitionen als Teil der Nachrichtentechnik angesehen werden, da der Zweck jeder Messung die Gewinnung oder Umwandlung von Information ist. Gewöhnlich wird die Messtechnik als Sondergebiet der Technik betrachtet. Die elektrische Messtechnik befasst sich mit der Messung von elektrischen und nichtelektrischen physikalischen Größen mit elektrotechnischen Hilfsmitteln.

Ebenso wird die *Steuerungs- und Regelungstechnik* als ein Sondergebiet betrachtet, da sie Energietechnik und Nachrichtentechnik miteinander ver-

knüpft: Jede Steuerung kann als die Einwirkung einer Nachricht auf einen Energiefluss oder einen Transportvorgang aufgefasst werden.

Unter *Elektronik* wird die *Schaffung und Anwendung elektronischer Baulemente und Schaltungen* verstanden. Dies sind solche Bauelemente und Systeme, bei denen keine mechanischen Bewegungen vorkommen (z.B. Verstärkerröhren, Braunsche Röhren, Halbleiter- und Röhrengleichrichter, Transistoren, früher magnetische Speicherkerne und inzwischen integrierte mikroelektronische und nanoelektronische Schaltungen (Chips) oder ähnliches); einen aktuellen Überblick über *nanoelektronische Systeme* gibt Goser et al. [90].

Die Bezeichnung „*theoretische Elektrotechnik*“ soll alle diejenigen physikalischen Gesetzmäßigkeiten und mathematischen Verfahren umfassen, die bei der Lösung von Aufgaben der Elektrotechnik nützlich sein können. Es gibt jedoch keine eigentliche Abgrenzung zwischen diesen theoretischen Grundlagen der Elektrotechnik und der Physik und der Mathematik. Bei neuen technischen Problemen müssen oft neue mathematische und physikalische Hilfsmittel herangezogen werden.

Dieses Buch soll so weit in die verschiedenen für die Elektrotechnik wichtigen Theorien einführen, dass ein Spezialstudium und das Verständnis für schwierigere Zusammenhänge dadurch erleichtert werden. Bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes wurde versucht, von Leichterem zu Schwierigerem fortzuschreiten, so dass durch das Studium des Vorhergehenden das jeweils Folgende leichter verständlich wird.

Die in den Text des Buches eingestreuten Zahlenbeispiele sollen eine Vorstellung von den Größenverhältnissen der besprochenen Zusammenhänge geben. Es ist zweckmäßig, beim Studium möglichst viele von diesen und ähnlichen Zahlenbeispielen selbst durchzurechnen, da man auf diese Weise ein Gefühl für die Bedeutung der Größen erhält.

Für ein weitergehendes Studium wurden zahlreiche Literaturhinweise eingefügt, anhand derer spezielle Aspekte der dargestellten Theorie vertieft werden können.

2

Systemtheoretische Grundlagen

In der Einleitung zu diesem Buch wurde zunächst einmal versucht, die Gegenstände etwas näher zu charakterisierten, die im folgenden betrachteten werden sollen. Jedoch hat Ludwig [171] bereits im ersten Band seiner *Einführung in die Theoretische Physik* darauf hingewiesen, dass es zumindest schwierig wenn nicht gar unmöglich ist, eine Wissenschaft und insbesondere die Theoretische Physik – wir können das wohl letztlich auch auf die Theoretische Elektrotechnik übertragen – inhaltlich zu charakterisieren, ohne dasjenige detailliert zu schildern, was diejenigen wirklich tun, welche in der Disziplin arbeiten. Dem ist kaum etwas hinzuzufügen, denn auch Küpfmüller hat bei der Konzeption der ersten Ausgabe seines Buches „Eine Einführung in die Theoretische Elektrotechnik“ mit Hilfe von Motivationen, theoretischen Ausführungen und vorgerechneten Beispielen gezeigt, wie ein theoretischer Elektrotechniker arbeitet. Er hat die „Theoretische Elektrotechnik“ zwar nicht erfunden, denn Vorlesungen und Lehrstühle dieser Art gab es schon lange (z.B. vertrat W. Kohlrausch an der TH Hannover ab 1886 das Lehrgebiet *Grundzüge der Elektrotechnik und Theoretischen Elektrotechnik* und H. Hertz hielt an der TH Karlsruhe im Studienjahr 1885/86 eine Vorlesung *Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik*¹), aber er hat genauer präzisiert, was „Theoretische Elektrotechnik“ bei sich wandelnder Technologie bedeutet. Im Unterschied zur Theoretischen Physik hängen die Inhalte der Theoretischen Elektrotechnik und somit auch das was theoretische Elektrotechniker tun ganz wesentlich von den technologischen Möglichkeiten der jeweiligen Epoche ab.

Küpfmüller hat aber nicht nur für die Entwicklung der Theoretischen Elektrotechnik eine maßgebliche Rolle gespielt. Noch weit wichtiger war er für das Entstehen einer neuen technischen Disziplin, der „Systemtheorie“, welche – zunächst als Näherungstheorie zur Charakterisierung komplexer technischer und insbesondere nachrichtentechnischer Systeme gedacht – zu einer völlig neuen Sichtweise bei der Beschreibung von Natur und Technik geführt hat.

¹ Fridericiana - Zeitschr. der Universität Karlsruhe (TH), Heft 52: 100 Jahre Elektrotechnik und der Universität Karlsruhe

Der signaltheoretische Hintergrund der linearen Systemtheorie wird in dem Aufsatz von Mathis [184] sehr ausführlich geschildert; siehe auch Krabs [150].

Diese Entwicklung ist, wie Wunsch [309] in seiner „Geschichte der Systemtheorie“ dargelegt hat, auch noch keineswegs beendet, sondern erfasst immer weitere Bereiche der Wissenschaft. So hat Wunsch vor einigen Jahren, aufbauend auf einer Vielzahl von Grundkonzepten aus der Systemtheorie (Mesarovic, Klir, Pichler, Willems etc.) und der Physik und der entsprechenden Basisdisziplin Mathematik die Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Prozesse entworfen. Besonders interessant sind Bestrebungen, auch die Möglichkeiten, welche heutige Computer und Programmsysteme bieten, mit in die Betrachtungen einzubeziehen und zu einer Computer-Aided Systems Theory (CAST) zu kommen, wie es Pichler [225] vorschlug. Während die Physik viele Jahrzehnte lang wichtige „Grundelemente“ für den Aufbau theoretischer Fundamente technischer Disziplinen lieferte, zeigen neueste Entwicklungen wie Quantencomputing und Quanteninformationsverarbeitung (siehe u. a. Leuchs, Beth et al. [164]), dass es inzwischen zur „Rückwirkung“ von der Technik in die Physik gekommen ist. Eine Quanten-Systemtheorie könnte die klassische Systemtheorie in Zukunft ergänzen. Man spricht nun auch in der Physik von *Systemen* und *Modellen* im engeren Sinne, wie es zunächst nur in der Technik üblich war. Man wird gespannt sein dürfen, ob es zu einer vereinheitlichten System- oder Prozesstheorie kommt, die als gemeinsame *Sprache* für Naturwissenschaften und Technik dienen kann; vgl. Wunsch [311], Willems [303] und Polderman, Willems [226].

Küpfmüller hat sich in seinen ersten Arbeiten zur Systemtheorie auf eine kleinere Klasse von Systemen beschränkt, obwohl er auch schon damals an eine Erweiterung seiner Betrachtungsweise auf allgemeinere technische und sogar an nichttechnische Systeme dachte. Die Bezeichnung „Systemtheorie“ führte er übrigens erst im Jahre 1949 im Titel seiner Monographie „Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtentechnik“ [154] ein.

Der Kerngedanke der Systemtheorie linearer zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) besteht darin, deren Systemverhalten durch eine einzige Funktion zu charakterisieren. Dazu verwendet man die *Systemantwort* auf ein spezielles Eingangssignal – die sogenannte *Impulsantwort*. Der Gedanke ist eigentlich nicht neu, denn sowohl in der Theorie linearer Differentialgleichungen als auch bei der Lösung der Feldgleichungen für elektromagnetische Felder hatte man diesen Gedanken implizit bereits benutzt. Auch in der Praxis liegt es nahe, das Verhalten eines physikalischen Systems möglichst nur durch eine einzige „Antwort“ zu charakterisieren. So schlägt ein Glockengießer mit einem Hammer seine neue Glocke an, um anhand des sich ergebenden Klangs die Güte seiner Arbeit zu ermitteln. Eine mathematische Formalisierung dieses Gedankens war in vielen Arbeiten bereits enthalten, aber Küpfmüller hat diese Konzepte systematisch weiterentwickelt und eine vereinheitlichte Sprache entwickelt. Insbesondere konnte er zeigen, dass es in vielen Fällen günstiger ist, die Systemantwort eines LTI-Systems nicht aus den Grundgleichungen abzuleiten, sondern nur die wesentlichen Aspekte zu modellieren. Auf diese Weise

gelang es, für die Anwendungen hinreichend genaue Systembeschreibungen zu ermitteln, die jedoch die für den Entwurf von Systemen notwendige Einfachheit besitzen. Auch wenn sich die Küpfmüllersche Systemtheorie später als zu eng erwiesen hat, war diese neuartige Sichtweise, als deren Begründer Küpfmüller zusammen mit Nyquist gelten muss (vgl. Bissell [31]), für die Analyse als auch den Entwurf technischer Systeme kaum zu unterschätzen. Auch in der Theorie elektromagnetischer Felder ist der systemtheoretische Standpunkt als Ordnungsprinzip sehr hilfreich und wir werden daher immer wieder auf systemtheoretische Konzepte zurückgreifen.

Um das mathematische Konzept der „Impulsantwort“ zu verdeutlichen, soll eine kurze Betrachtung über die Verwendung der Methode der Green-schen Funktion zur Lösung von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenität folgen. Diese Vorgehensweise entspricht weitgehend der Impulsantwort in der Systemtheorie.

Möchte man die Menge aller Lösungen linearer inhomogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ermitteln, dann kann man davon ausgehen, dass sich die Lösungsmenge aus sämtlichen Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichungen und einer speziellen oder partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen in additiver Weise zusammensetzt². Diese recht allgemeine mathematische Aussage hängt übrigens nicht davon ab, ob es sich um algebraische Gleichungen oder gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen handelt. Daher notieren wir lineare inhomogene Gleichungen in Operatorform³

$$\mathbf{L}[x] = f, \quad (2.1)$$

wobei der Operator $\mathbf{L}[\cdot]$ ein algebraischer oder ein Differentialoperator sein kann. Ein Differentialoperator kann sich aus gewöhnlichen oder partiellen Ableitungen zusammensetzen und soll konstante Koeffizienten besitzen, so dass er gegen Verschiebungen der unabhängigen Variablen invariant ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns an dieser Stelle auf Ableitungen nach der Zeit t . Dann lässt sich $\mathbf{L}[\cdot]$ in folgender Weise darstellen

$$\mathbf{L}[x] := \left(a_n \frac{d^n(\cdot)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}(\cdot)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_1 \frac{d(\cdot)}{dt} + a_0(\cdot) \right) x = f, \quad (2.2)$$

wobei die Koeffizienten a_i konstant sind und die Funktion x in t hinreichend oft differenzierbar ist.

Auch wenn sich die allgemeine Lösung der Operatorgleichung (2.1) aus zwei Anteilen zusammensetzt, ist man häufig nur an einer partikulären Lösung interessiert. Sie ist in bestimmten Fällen sogar eindeutig. Andernfalls ist eine

² Eine solche Menge wird auch *affiner Raum* genannt [136]

³ Auf eine mathematische Präzisierung des Operatorkonzepts im Sinne der Funktionalanalysis soll in diesem Buch, das in seiner Anlage eher physikalisch orientiert ist, verzichtet werden

solche partikuläre Lösung eindeutig bis auf eine additiv hinzugefügte Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung⁴ $\mathbf{L}[x] = 0$, die an dieser Stelle nicht weiter interessieren soll. Die Bedeutung einer solchen Eindeutigkeitsaussage liegt darin, dass jede Methode, die zu einer Lösung führt, angewandt werden kann. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Methode mathematisch gerechtfertigt werden kann, da ein Ergebnis durch Einsetzen daraufhin überprüft werden kann, ob es sich um eine Lösung handelt. Die im folgenden skizzierte Methode der Greenschen Funktion (siehe z. B. [107]) arbeitet mit der sogenannten *Delta-Funktion* $\delta(t)$, die keine Funktion im Sinne der gewöhnlichen Analysis ist (z. B. Jänich [132]), aber dennoch eine partikuläre Lösung für die Gl. (2.1) liefert.

Man geht davon aus, dass sich alle „praktisch“ vorkommenden reellwertigen Funktionen $f(t)$ mit Hilfe der δ -Funktion darstellen lassen, d.h.

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Weiterhin geht man davon aus, dass die Greensche Funktion $G(t)$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung mit der δ -Funktion als rechter Seite ist

$$\mathbf{L}[G] = \delta(t). \quad (2.4)$$

Diese Greensche Funktion wird auch Impulsantwort des durch Gleichung ((2.1)) festgelegten Operators \mathbf{L} genannt.

Nach einer „Verschiebung“ des Arguments t in Gl. (2.4) um τ , einer skalaren Multiplikation mit $f(\tau)$ und der Integration bezüglich der Variablen τ erhält man

$$\int_{\mathbb{R}} f(\tau) \mathbf{L}[G(t - \tau)] d\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t). \quad (2.5)$$

Mit der Beziehung Gl. (2.3) und der Vertauschbarkeit des linearen Operators $\mathbf{L}[\cdot]$ mit der skalaren Multiplikation und der Integration bezüglich τ ergibt sich schließlich

$$\mathbf{L} \left[\int_{\mathbb{R}} f(\tau) G(t - \tau) d\tau \right] = f(t). \quad (2.6)$$

Wenn wir Gl.(2.1) mit Gl.(2.6) vergleichen, dann erhalten wir eine Darstellung der Lösung von Gl.(2.1)

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) G(t - \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

In vielen Fällen kann man zur Bestimmung von G die Fouriertransformation verwenden. Geht man nämlich von der Fouriertransformierten $\hat{G}(j\omega)$ von $G(t)$ aus, die man wie folgt darstellen kann

⁴ In der Mathematik kann man an dieser Stelle zu „Äquivalenzklassen“ übergehen

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.8)$$

und verwendet die „Fouriertransformierte“ der δ -Funktion

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.9)$$

so ergibt sich

$$\mathbf{L}[G(t)] = \mathbf{L}\left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.10)$$

Da der Differentialoperator $\mathbf{L}[\cdot]$ nur auf Funktionen in t angewendet wird, ist eine Vertauschung mit der Integration nach ω möglich

$$\mathbf{L}[G(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{G}(j\omega) \mathbf{L}[e^{j\omega t}] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.11)$$

Vergleicht man die beiden letzten Integranden in Gl. (2.11), so erhält man eine Beziehung für die Fouriertransformierte der gesuchten Greenschen Funktion

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{e^{j\omega t}}{\mathbf{L}[e^{j\omega t}]} \quad (2.12)$$

In der Systemtheorie wird $\hat{G}(j\omega)$ auch *Übertragungsfunktion* genannt.

Zweifellos ist die genannte Vorgehensweise für Operatorgleichungen des Typs (2.1) sehr zweckmäßig, aber es hat sich gezeigt, dass weitere Schwierigkeiten mit der Interpretation der Übertragungsfunktion auftreten, wenn die rechte Seite der Gl. (2.1) nicht einfach eine Funktion f sondern ihr Bild $\tilde{\mathbf{L}}[f]$ bezüglich eines Differentialoperators $\tilde{\mathbf{L}}[\cdot]$ ist.

Dieses Problem, das mit den Anfangsvorgaben der Differentialoperatoren zusammenhängt, hat Wunsch [308] schon sehr früh erkannt und ausführlich diskutiert. Mit Hilfe eines neuartigen Operatorkalküls zeigte Mathis [180], dass die Übertragungsfunktion $\hat{G}(j\omega)$ auch bei Differentialgleichungen der Form $\mathbf{L}[x] = \tilde{\mathbf{L}}[f]$ immer unabhängig von den genannten Anfangsvorgaben ist; einen Beweis mit klassischen Techniken lieferte Wunsch bereits in seiner Arbeit [308] aus dem Jahre 1962; siehe auch Berg [24], [25].

Die genannten Schwierigkeiten konnten von Kalmann Anfang der 1960er Jahre durch Einführung des Konzepts der sogenannten Zustands- und Beobachtungsgleichungen wenigstens teilweise überwunden werden. Dabei wurden neben den Eingangs- und Ausgangsgrößen auch noch Zustandsgrößen eingeführt, die das „innere“ Verhalten eines Systems beschreiben. Dieser Standpunkt war keineswegs neu, denn in der Physik hat man schon die Newtonschen Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme in dieser Weise formuliert. In der Elektrotechnik und insbesondere der Nachrichtentechnik sowie der daraus entstandenen Regelungstechnik ist man andere Wege gegangen,

da man häufig nur an dem Übertragungsverhalten eines Systems interessiert war. Lineare zeitinvariante Systeme (LTI) werden im Sinne der Theorie der Zustandsgleichungen in folgender Form dargestellt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

wobei \mathbf{u} der Vektor der (zeitabhängigen) Eingangsgrößen, \mathbf{y} der Vektor der Ausgangsgrößen und \mathbf{x} der Vektor der Zustandsgrößen ist; die Koeffizientenmatrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sind konstant. Die erste Gl. (2.13) wird *Zustandsgleichung* und die zweite Gl. (2.14) *Beobachtungsgleichung* genannt. Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} bestimmen die Stabilität des Systems; vgl. z. B. Kisacanin und Agarwal [143], Mathis [180].

Auch bei dieser Systembeschreibung ist es möglich und häufig auch sinnvoll, die Zustands- und Beobachtungsgleichungen nicht aus den fundamentalen Beziehungen für die Teilsysteme und den Gleichungen für deren Verbindungen abzuleiten, sondern durch vereinfachte Modelle zu beschreiben. Somit kann man neben den im Rahmen des gewählten Modellansatzes exakt gültigen Gleichungen auch hier genäherte Beschreibungsgleichungen verwenden, die für die ursprüngliche Übertragungstheorie nach Küpfmüller und Nyquist charakteristisch war. Es handelt sich also bei den Zustands- und Beobachtungsgleichungen um eine konsequente Erweiterung der Theorie von Küpfmüller und Nyquist. Wir werden den Gedanken der Zerlegung der Beschreibungsgleichungen in Zustands- und Beobachtungsgleichungen auch im Rahmen der Theorie elektromagnetischer Felder aufgreifen und seine Nützlichkeit bei der Interpretation der Theorie erläutern.

3

Grundlegende Aspekte physikalischer Systeme

3.1 Verteilte physikalische Systeme

In der Physik gibt es zahlreiche Systeme, deren Verhalten im *Ortsraum* bzw. *Konfigurationsraum* als „lokalisiert“ angesehen werden kann, wobei sich der Ortsraum eines solchen Systems nur in einfachen Fällen durch einen dreidimensionalen Punkttraum¹ repräsentieren lässt; vgl. auch Anhang A.1. Das Verhalten solcher Systeme lässt sich dann für jeden Zeitpunkt in sehr guter Näherung durch einen Punkt im zugehörigen Orts- und Konfigurationsraum darstellen. Das wichtigste Beispiel ist die Newtonsche Punktmechanik, im Rahmen derer man die Bewegung von Punktmassen unter dem Einfluss von Kräften diskutieren kann. Dabei wird die Dynamik im Raum durch Orts- und Geschwindigkeitsgrößen charakterisiert; zusammengenommen handelt es sich um die Zustandsgrößen der Newtonschen Mechanik – auch klassische Mechanik genannt. Solche Punktmassensysteme sind offensichtlich im oben genannten Sinne lokalisiert. Sie dienten als Vorbild für viele andere physikalische Systeme. Die Dynamik elektrischer Netzwerke, die durch Ströme und Spannungen beschrieben werden, ist ein weiteres Beispiel dafür, dass der Konfigurationsraum i. a. eine Dimension höher als drei besitzt.

Daneben gibt es in der Physik auch solche Systeme, deren Eigenschaften räumlich nicht lokalisiert sind, d. h. man muss die beschreibenden Zustandsgrößen in einem ganzen Gebiet des Ortsraumes kennen, um das zukünftige Systemverhalten zu bestimmen. Beispielhaft sei die Kontinuumsmechanik und die Hydrodynamik genannt, wo erst die Kenntnis der mechanischen Spannungen bzw. der Geschwindigkeiten in einem Raumgebiet² das Systemverhalten charakterisiert. Wir sprechen von einem (räumlich) verteilten oder nichtlo-

¹ Eigentlich sollte für den Orts- oder Konfigurationsraum ein *affiner Raum* (siehe z. B. Jähnich [133]) zugrunde gelegt werden, aber üblicherweise wird ein geeigneter \mathbb{R}^n verwendet.

² In diesen Theorien wie bei elektromagnetischen Feldern genügt ein 3-dimensionaler Ortsraum, so dass wir einfach von „Raum“ sprechen können.

kalisierten System; elektromagnetische Felder sind ein weiteres Beispiel für ein nichtlokalisiertes System. Dort werden die elektrischen oder magnetischen Kraftwirkungen auf nicht bewegte oder bewegte Ladungen durch gewisse Feldgrößen repräsentiert, die in einem Raumgebiet bekannt sein müssen, um das elektromagnetische System vollständig zu beschreiben. Im Unterschied zur Kontinuumsmechanik und Hydrodynamik besitzen diese Feldgrößen zunächst keine unmittelbar anschauliche Interpretation wie ein Geschwindigkeitsfeld zur Charakterisierung einer hydrodynamischen Strömung. Allerdings können mechanische Spannungen (Kraft pro Fläche) eines Materials auch nicht direkt beobachtet werden, aber durch messtechnische Hilfsmittel der Optik gelingt es, wenigstens den Spannungszustand transparenter Materialien sichtbar zu machen. In der fehlenden direkten Anschauung liegt sicherlich eine besondere Schwierigkeit der Theorie elektromagnetischer Felder begründet. Erst mit Hilfe des Zusammenspiels von Theorie und experimenteller Erfahrung sowie der rechnerischen Analyse von Beispielen gelingt es, tiefere Einblicke in das Gebiet elektromagnetischer Felder zu gewinnen.

Auch im Hinblick auf die Dynamik verteilter Systeme können ähnliche Ausführungen angefügt werden. Anstatt mit einem modifizierten Kraftbegriff zu arbeiten, ist es oft günstiger, die Dynamik verteilter Systeme als Energie-Impuls-Transporte aufzufassen, wie es vor allem in der Elementarteilchenphysik üblich ist. Allerdings enthält bereits die Newtonsche Mechanik mit dem Kraftkonzept ein nicht lokalisierbares Element, das mathematisch mit einem vektoriellen Feld beschrieben wird (vgl. Anhang A). Darauf wird in den klassischen Darstellungen leider nur selten hingewiesen. Auf diese Weise könnte nämlich die begrifflich durchaus schwierige Einführung physikalischer und mathematischer Felder erheblich erleichtert werden, was u. a. auch damit zu tun hat, dass man physikalische und mathematische Felder nicht klar unterscheidet. In diesem Buch wird zumindest in den einführenden Abschnitten auf eine solche Unterscheidung geachtet.

Während die physikalischen Felder zur Charakterisierung der qualitativen Eigenschaften eines physikalischen Systems herangezogen werden, benötigt man zur quantitativen Beschreibung mathematische Hilfsmittel, mit denen man die physikalischen Felder modellieren kann. Beispielsweise ist ein räumliches Temperaturfeld ungerichtet; mathematisch beschreibt man ein solches physikalisches Feld mit einer skalarwertigen oder in diesem Fall reellwertigen Abbildung über dem \mathbb{R}^3 , der den Ortsraum in den meisten Feldtheorien modelliert. Man nennt solche Abbildungen auch skalares (mathematisches) Feld oder Skalarfeld und definiert es in folgender Weise

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi : \mathbf{r} \mapsto \varphi(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Der Definition ist zu entnehmen, dass jedem Raumpunkt \mathbf{r} eine Zahl $\varphi(\mathbf{r})$ – in diesem Fall ein positiver Temperaturwert – zugeordnet wird.

Es ist sehr zweckmäßig das physikalische Temperaturfeld und das mathematische skalare Feld φ , das zur physikalischen Modellierung verwendet wird,

auseinander zu halten. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass die Modellgleichungen, die das skalare Feld φ erfüllt, je nach Genauigkeit der Beschreibung unterschiedlich sein können. Dabei ändert sich natürlich nur das Feldmodell φ , während das physikalische Feld keiner Änderung unterliegt. Diese Unterscheidung ist beim hierarchischen Aufbau der Theorie elektromagnetischer Felder ausgehend von Grundexperimenten für das Verständnis außerordentlich wichtig.

Außer den skalaren Feldern, die jedem Raumpunkt eine Zahl zuordnen und die zur Beschreibung ungerichteter physikalischer Felder benötigt werden, werden auch mathematische Beschreibungshilfsmittel für gerichtete nichtlokalisierte physikalische Eigenschaften gebraucht. Das schon erwähnte Geschwindigkeitsfeld einer inhomogen sich bewegenden Flüssigkeit wäre ein Beispiel dafür. Dazu verwendet man vektorielle mathematische Felder oder auch Vektorfelder, die in folgender Weise definiert sind

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v} : \mathbf{r} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

Auf diese Weise wird jedem Raumpunkt \mathbf{r} ein Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ zugeordnet. Fasst man den \mathbb{R}^3 als Vektorraum auf, wobei der Nullpunkt der ausgezeichnete Punkt ist, dann kann man jedem Punkt des Ortsraumes einen vom Nullpunkt ausgehenden Ortsvektor zuordnen. Im Gegensatz dazu ist der Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ an den Punkt \mathbf{r} „angeheftet“ und wird erst durch die Abbildung \mathbf{v} spezifiziert. Die Menge aller solcher Vektoren im Punkt \mathbf{r} wird als *Tangentialraum* in \mathbf{r} bezeichnet.

Da es sich bei den genannten mathematischen Feldern um Abbildungen handelt, lassen sie sich in Klassen einteilen (stetige, differenzierbare, usw. Abbildungen). Eine wichtige Teilklasse der unendlich oft differenzierbaren Vektorfelder \mathbf{v} wird dadurch charakterisiert, dass \mathbf{v} zusammen mit seinen Ableitungen im Unendlichen verschwindet. Nach dem Satz von Helmholtz (vgl. Anhang A.2) lassen sich diese Vektorfelder \mathbf{v} bis auf ein konstantes Vektorfeld mit Hilfe der Rotation $\text{rot } \mathbf{v}$ und der Divergenz $\text{div } \mathbf{v}$ eindeutig festlegen. Der Satz von Helmholtz wird beim hierarchischen Aufbau der Theorie elektromagnetischer Felder eine wichtige Rolle spielen.

Schließlich wird auch deutlich, dass man in der Mathematik die Freiheit hat, auch andere mathematische Objekte wie Matrizen, Flächen, Differentialgleichungen und dergleichen an die Punkte des Ortsraumes \mathbb{R}^3 anzuhften. Damit wird noch einmal deutlich, dass zwischen dem physikalischen und dem mathematischen Feldbegriff ein grundsätzlicher Unterschied besteht, der beim Aufbau einer physikalischen Theorie auf keinen Fall verwischt werden sollte.

3.2 Mechanik und Energie-Impuls-Transporte

In der Newtonschen Theorie der Bewegung mechanischer Körper unterscheidet man Kinematik und Dynamik. Die Kinematik bezieht sich auf die mathematische Beschreibung der mechanischen Bewegung durch Bahnen oder

Trajektorien, die man als Lösungen von Differentialgleichungen interpretiert. Dazu muss man voraussetzen, dass die Ausdehnung der Körper in einem gewissen Sinne physikalisch lokalisiert sind. Geht man etwa von der Menge aller möglichen Orte eines Körpers aus - oft Ortsraum des Körpers genannt - und wird dieser Ortsraum als \mathbb{R}^3 modelliert, dann lässt sich die Ausdehnung eines Körpers mit Hilfe eines geeigneten Abstandsbegriffes quantifizieren. Da es physikalisch nicht sinnvoll ist, irgendeinen Punkt im Ortsraum auszuzeichnen, sollte der \mathbb{R}^3 als affiner Raum oder lineare Mannigfaltigkeit angesehen werden, der nur lineare Verschiebungen als zusätzliche Struktur enthält. Das Modell der Punktmasse kann bei einem starren ausgedehnten Körper mit der Lage des Schwerpunktes identifiziert werden.

Veränderungen eines Punktes im Ortsraum werden mit Hilfe einer reellen Größe t parametrisiert; t wird Zeit genannt. Man geht davon aus, dass eine Folge von Veränderungen als mit der Zeit parametrisierte Bahnen $\mathbf{r}(t)$ im Ortsraum repräsentiert werden können. Entsprechend den auf Experimenten basierenden Vorstellungen von Galilei und Newton (vgl. Longair [170]) werden für den Aufbau der kinematischen Mechanik die erste und die zweite Zeitableitung von $\mathbf{r}(t)$, d.h. die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ und die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ benötigt. Nach Newton wird die physikalische Bewegung eines Massenpunktes in der Mechanik mit einer von null verschiedenen Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung in Verbindung gebracht. Nach Galilei wird ein mechanischer Körper ohne Wechselwirkung mit seiner Umgebung als beschleunigungsfrei interpretiert und mit Hilfe von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ mathematische charakterisiert. Demzufolge wird ein wechselwirkender Körper nach Newton durch eine Kraftfunktion $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ definiert, d.h. es gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (3.3)$$

der Einfluß auf die Beschleunigung des Körpers noch umgekehrt proportionaler Weise von der Masse m des Körpers abhängt. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die Kraftfunktion im Gegensatz zu den bisher betrachteten mechanischen Körpern ein nichtlokalisiertes physikalisches System modelliert. In solchen Fällen spricht man von einem physikalischen Feld, das durch ein mathematisches vektorielles Feld beschrieben wird. So hat Newton mit dem Gravitationskraftfeld ein erstes Beispiel angegeben und näher untersucht.

Hat man es mit mehreren Massen zu tun, dann lassen sich diese Betrachtungen ohne Schwierigkeiten verallgemeinern, wobei der 3-dimensionale Ortsraum durch einen $3n$ -dimensionalen \mathbb{R}^{3n} ersetzt wird.

Im Zusammenhang mit der Einführung einer Kraftfunktion und der Masse spricht man übrigens auch von klassischer Newtonscher Mechanik. Erst im Zusammenhang mit der Entwicklung der Prinzipien der klassischen Mechanik (vgl. z. B. Goldstein [89]; siehe aber auch Föppl [84]) traten Erhaltungsgrößen wie Energie, „linearer“ Impuls und Drehimpuls in den Mittelpunkt des Interesses. Insbesondere die sogenannte Hamiltonsche Form der klassischen Mechanik bildet die Grundlage der Quantenmechanik, so dass die Dynamik der

Elementarteilchen auf Erhaltungssätzen begründet wird. Man beachte, dass Energie und „linearer“ Impuls im folgenden keine abgeleiteten Größen wie in der Newtonschen Mechanik sind sondern Fundamentalgrößen des entsprechenden Dynamikkonzepts. Daher ist es zweckmäßig, auch die Dynamik der elementaren Mechanik auf der Basis von Erhaltungsgrößen aufzubauen. Es zeigt sich, dass dieser Zugang eine sehr durchsichtige Darstellung der Dynamik geladener Körper und der eng damit zusammenhängenden Theorie elektromagnetischer Felder gestattet, die mit Hilfe physikalisch nicht lokalisierter Feldgrößen formuliert wird.

Eine erste ausführliche Darstellung einzelner Aspekte einer solchen Darstellung findet man bei Falk [77], [78] sowie Falk und Ruppel [76]. Im folgenden sollen die wichtigsten Elemente dieser Theorie zusammengestellt werden. Um die Diskussion zu vereinfachen, betrachten wir nur solche Situationen, wo Energie E und „linearer“ Impuls \mathbf{p} die einzigen Erhaltungsgrößen sind und für die im Ortsraum eine das zu untersuchende physikalische System charakterisierende Energiefunktion $E(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ existiert. Für den Aufbau der zugehörigen Dynamik wird nach Falk das totale Differential der Energie betrachtet³

$$dE = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (3.4)$$

wobei die Ableitungen nach \mathbf{p} und \mathbf{r} die entsprechenden Gradienten sind. Ein Zusammenhang mit den kinematischen Größen Geschwindigkeit \mathbf{v} und Kraft \mathbf{F} kann wie folgt hergestellt werden

$$\mathbf{v} := \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}}, \quad -\mathbf{F} := \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.5)$$

Damit können mit den zeitlichen Änderungen von \mathbf{p} und \mathbf{r} die verallgemeinerten dynamischen Gleichungen eines mechanischen Systems formuliert werden

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (3.6)$$

Die Vorgabe der charakteristischen Energiefunktion eines mechanischen Systems legt somit dessen verallgemeinerte dynamische Gleichungen fest. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass diese Betrachtungsweise auf der Formulierung der theoretischen Mechanik nach Hamilton – die Hamiltonmechanik – beruht; vgl. Goldstein et al. [89].

Anhand der Geschwindigkeits- und der Kraftfunktionen lassen sich noch spezielle Klassen mechanischer Systeme angeben. Hängt nämlich die Kraftfunktion $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ nur vom Ort ab, dann kann man leicht zeigen, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ nur vom linearen Impuls abhängt; auch die Umkehrung gilt. Wenn also $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ nur vom Ort \mathbf{r} und somit $\mathbf{v}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ nur vom Impuls

³ Die Ableitung von skalaren Feldern nach Vektoren entspricht dem Gradientenoperator

\mathbf{p} abhängt, dann spricht man von Kräften 1. Art andernfalls von Kräften 2. Art. Die nach Newton benannte Gravitationskraft ist eine Zentralkraft und ist nur vom Ort \mathbf{r} abhängig; es handelt sich demnach um eine Kraft 1. Art. Wir werden im Abschnitt „Elektrostatik“ kennenlernen, dass die von Coulomb in Analogie mit der Gravitationskraft formulierte elektrostatische Kraft ebenfalls eine Kraft 1. Art ist. Im Gegensatz dazu wird sich erweisen, dass die magnetischen Kräfte nicht von 1. Art sind. Sie erfüllen auch nicht die sogenannte Newtonsche Relation $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, die nur für Kräfte 1. Art gilt. Mit dieser Relation lassen sich die verallgemeinerten dynamischen Gleichungen (3.6) auch auf die Newtonschen Bewegungsgleichungen (3.3) reduzieren.

Teil II

Theorie elektrischer Netzwerke

Grundgleichungen und Analysemethoden elektrischer Netzwerke

4.1 Netzwerkmodellierung und Widerstandsnetzwerke

Elektrische und elektronische Schaltungen gehören zu den wichtigsten physikalischen Systemen, die auf elektromagnetischen Eigenschaften basieren und daher grundsätzlich mit der Theorie elektromagnetischer Felder behandelt werden müssten. Eine mathematische Modellierung und Beschreibung mit Hilfe elektromagnetischer Felder ist jedoch aufgrund der hohen Komplexität solcher Schaltungen – d. h. der großen Anzahl von Bauelementen – und der damit zusammenhängenden komplizierten geometrischen Struktur zumeist ausserordentlich schwierig, wenn nicht gar unmöglich. Außerdem wird häufig die vollständige Kenntnis der elektromagnetischen Felder gar nicht benötigt, da fast alle Messgeräte, mit denen man elektrische und elektronische Schaltungen untersucht, nur bestimmte Aspekte und integrale Größen dieser Felder ermitteln. Es ist daher sehr zweckmäßig, eine eigenständige Theorie für solche Schaltungen zu entwickeln, die von Anfang an auf diesen integralen Größen aufbaut. Tatsächlich ist man physikhistorisch gesehen auf diese Weise vorgegangen. Noch lange bevor eine vollständige physikalische Theorie elektromagnetischer Felder existierte, haben Ohm und Kirchhoff sowie Helmholtz und andere eine eigenständige Theorie linearer Widerstandsnetzwerke entwickelt, die man als Modelltheorie für elektrische Schaltungen aus metallischen Drahtleitern verwenden kann.

Ausgangspunkt war die Suche von Ohm nach geeigneten physikalischen Größen zur Beschreibung solcher physikalischen Systeme. Auch wenn über Spannung und Strom auch schon vor Ohm gewisse Vorstellungen existierten, so ist es doch allein sein Verdienst, die Bedeutung dieser Größen für die Charakterisierung elektrischer Schaltungen¹ bestehend aus metallischen Drahtleitern und „galvanischen Elementen“ erkannt zu haben; vgl. z. B. Wunsch [309], Mathis [180]. Nach umfassenden Untersuchungen über die physikalischen Gesetzmäßigkeiten von Strömen und Spannungen in elektrischen Schaltungen hat

¹ Solche Anordnungen sind damals als „galvanische Kette“ bezeichnet worden

Ohm in seiner im Jahre 1827 erschienenen Monographie „*Die galvanische Kette – mathematisch bearbeitet*“ [219] die heute als Kirchhoffsche Gesetze bekannten Beziehungen in verbaler Form angegeben. Eine mathematische Formulierung in der uns bekannten Form wurde allerdings erst von Kirchhoff in seiner ersten Veröffentlichung von 1845 publiziert. Nachdem Ohm die Größen Spannung und Strom als zentrale physikalische Größen zur Beschreibung von elektrischen Schaltungen aus metallischen Drahtleitern erkannt hatte und gleichzeitig physikalische Messgeräte zur Messung dieser Größen vorschlug, war es natürlich eine einfache Aufgabe, den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an metallischen Drahtleitern zu bestimmen, der bis heute als Ohmsches Gesetz bezeichnet wird. An dieser Stelle soll aber noch einmal betont werden, dass nicht die Ermittlung des Ohmschen Gesetzes sondern die Modellierung von Schaltungen aus metallischen Drahtleitern die eigentliche Leistung Ohms gewesen ist. Leider wird dieser Umstand – häufig aus didaktischen Gründen – nicht immer in der notwendigen Klarheit hervorgehoben.

Im folgenden wollen wir die Modellierung und mathematische Beschreibungsmethoden von Schaltungen aus Widerständen sowie unabhängigen Spannungs- und Stromquellen im Sinne der Theorie von Ohm und Kirchhoff diskutieren. Dazu gehen wir so vor, dass zunächst die Bauelemente modelliert werden, aus denen sich solche Schaltungen zusammensetzen. Das gesamte Modellsystem wird auch als *elektrisches Netzwerk* bezeichnet, obwohl inzwischen der Ausdruck „Netzwerk“ anders als bis in die 1960er Jahre hinein in ganz vielfältiger Weise verwendet wird (Computernetzwerke, Energieversorgungsnetzwerke, neuronale Netzwerke, etc.). Daher wird häufig auch der Begriff „elektrische Schaltung“ verwendet, wobei zwischen der realen Schaltung und dem Modell einer Schaltung unterschieden werden muss. Im folgenden werden wir jedoch an der Bezeichnung „Netzwerk“ festhalten. Als physikalische Größen zur Beschreibung von Netzwerken werden ausschließlich Spannungen und Ströme oder aus ihnen abgeleitete Größen verwendet, die nicht nur einen numerischen Wert sondern auch eine Richtung aufweisen, was in einfacher Weise anhand von messtechnischen Experimenten bestätigt werden kann.

Mikroskopisch gesehen, handelt es sich beim *elektrischen Strom* um den Transport von elektrischen *Ladungen*, den man sich ganz analog zu den fließenden Wasserteilchen eines Wasserstromes vorstellen kann. Mikroskopisch liegt die Richtung des Transports von Wasserteilchen – die Flussrichtung – liegt eindeutig fest. Da bekanntlich positive und negative Ladungen existieren (vgl. Abschnitt 6), gibt es aus mikroskopischer Sicht beim elektrischen Strom I eine Flussrichtung der positiven und eine Flussrichtung der negativen Ladungsträger. Man spricht auch von den „physikalischen Stromrichtungen“. In der Netzwerktheorie, die das mikroskopische Geschehen nicht in ihre Betrachtungen einbezieht, werden die Bezugsrichtungen oder *Zählpfeile* für die Ströme willkürlich festgelegt und durch einen Pfeil gekennzeichnet. Der Grund dafür ist, dass für den elektrischen Strom ebenso wie für inkompressible Flüssigkeiten (z. B. Wasser) eine Erhaltungsgleichung existiert (vgl. weiter unten: das Kirchhoffsche Stromgesetz) und somit eine Umkehrung der Bezugsrichtungen

der Ströme keinen Einfluss auf das Ergebnis einer Analyse der Ströme hat. Die Zählpfeile für die Ströme müssen, nachdem sie festgelegt sind, nur konsequent verwendet werden, um auf die richtigen Werte für die gesuchten Größen zu kommen. Es ergeben sich nur Vorzeichenwechsel in Bezug auf die festgelegten Bezugsrichtungen.

Wir wollen noch anmerken, dass eine bestimmte Art der Festlegung gelegentlich noch als „technische Stromrichtung“ genannt wird, was aber nur aus der geschichtlichen Entwicklung der Elektrizitätslehre zu begreifen ist, da sie lange vor der Entdeckung des Elektrons erfolgte. Im allgemeinen ist die technische Stromrichtung der tatsächlichen Bewegung der negativ geladenen Elektronen, welche Träger des Stromes in metallischen Leitern sind, entgegengerichtet.

Auch bei der Spannung soll eine kurze Motivation auf der Grundlage einer mikroskopischen Betrachtung vorangestellt werden, wobei wir uns wiederum der Analogie der elektrischen Ladungen mit den Wasserteilchen bedienen. Besitzen nämlich die Wasserteilchen eines Sees in Bezug auf einen tiefer liegenden Teil des Gewässers eine höhere potenzielle Energie und betrachten wir einen abrupten Übergang zwischen beiden Teilen des Sees („Wasserfall“), dann gehen die Wasserteilchen vom Ort höherer potenzieller Energie zu einem Ort geringerer potenzieller Energie über; es kommt zum Fließen des Wassers.

In Analogie dazu kommt es zum einem elektrischen Strom („fließende Ladungen“) von einer Klemme a mit hohem Potenzial V_a zur Klemme b mit niedrigerem Potenzial V_b . Die Potenzialdifferenz entspricht einem Gefälle in der hydrodynamischen Analogie und die Richtung der Potenzialdifferenz gibt die Richtung des „Gefälles“ an, in welcher der Strom transportiert wird. Damit das Wasser auch „bergauf fließen“ kann, wird im hydrodynamischen Bild eine Kolbenpumpe zum Pumpen des Wassers benötigt. Eine „Ladungspumpe“ wird in der Theorie elektrischer Netzwerke als Stromquelle bezeichnet.

Wie wir in einem späteren Abschnitt 13 ausführlicher diskutieren werden, hat eine Ladung Q in einem Punkt a eine bestimmte *elektrische Energie* W_a , die proportional zur Ladung ist; der Proportionalitätsfaktor wird *Potenzial* V_a genannt. Das Potenzial $V_q = W_a/Q$ ist demnach die auf die Ladung Q bezogene elektrische Energie W_a einer Ladung. Weiterhin sei V_b das Potenzial in einem weiteren Punkt b . Das elektrische Potenzial wird in der Elektrostatik mit dem Buchstaben φ bezeichnet wird; siehe Abschnitt 18.

Die elektrische *Spannung* zwischen den Punkten a und b ist gleich der Potenzialdifferenz

$$U_{ab} := V_a - V_b. \quad (4.1)$$

Die Orientierung einer Spannung wird in der Theorie elektrischer Netzwerke durch einen Zählpfeil markiert, so dass eine Richtungsangabe durch Indizes a, b nicht mehr nötig ist und daher in Zukunft entfällt.

Bei realen Bauelementen mit zwei Klemmen gibt es einen Zusammenhang des Stromes, der durch das Bauelement fließt, und der Spannung, die an dem Bauelement anliegt. Die Spannungen und Ströme, die i. a. zeitabhängig sind,

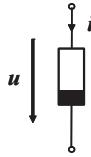


Abbildung 4.1. Symbol eines nichtlinearen Widerstandes

bezeichnen wir mit kleinen Buchstaben u bzw. i . Sind diese Größen zeitunabhängig, sprechen wir von Gleichspannungen und Gleichströmen (konstante Funktionen!), wobei große Buchstaben U bzw. I verwendet werden.

Modellmäßig kann ein Zusammenhang von Spannung u und Strom i eines Bauelementes häufig in funktionaler Weise erfolgen, d. h. er wird mit Hilfe einer Funktion² $i = i(u)$ oder $u = u(i)$ charakterisieren und durch das in Abbildung 4.1 gezeigte Symbol darstellen, wobei das Symbol als *Netzwerk-element* bezeichnet wird. Dabei kann $i = i(u)$ eine komplizierte Funktion – wie beispielsweise bei *pn*-Dioden; vgl. Abschnitt 39.1. Dabei werden die Momentanwerte von Spannung $u(t)$ und Strom $i(t)$ in jedem Zeitpunkt t miteinander in Beziehung gesetzt. Spannungs-Strom-Relationen der genannten Art werden in der Netzwerktheorie als (*nichtlinearer*) *Widerstand* bezeichnet, wobei die Richtungen von Spannung und Strom, wie in Abbildung 4.1 gezeigt, einem zweipoligen Symbol – Netzwerkelement – zugeordnet sind. Bei zweipoligen Widerständen werden, wenn nichts anders gesagt wird, die Zählpfeile für Spannung und Strom immer als gleichgerichtet angenommen.

Bei vielen Materialien, besonders bei metallischen Leitern, ergibt das Experiment aber einen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Strom, der in Abb. 4.2 gezeigt wird und den Ohm bereits 1827 [219] aufgrund der von ihm durchgeführten Experimente angegeben hat. Der Strom durch einen Leiter ist also der anliegenden Spannung u proportional und die Proportionalitätskonstante wird sein *Leitwert* G genannt. Das ist der Inhalt des Ohmschen Gesetzes

$$i = Gu. \quad (4.2)$$

Gleichbedeutend damit ist die Aussage: Fließt durch einen Leiter ein Strom i , so fällt an ihm eine Spannung u ab, wobei u proportional zu i ist. Die Proportionalitätskonstante wird *Widerstand* R des Leiters benannt. Dann lautet das Ohmsche Gesetz

$$u = Ri. \quad (4.3)$$

Der Leiter kann also völlig gleichberechtigt durch seinen Leitwert G oder durch seinen Widerstand R gekennzeichnet werden. Es ist immer

² Wie in der Technik üblich, werden wir den Funktionswert und die Funktion in diesem Buch häufig nicht unterscheiden, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, was gemeint ist. Zusätzlich wird im folgenden vielfach die abhängige Variable auch als Bezeichnung des entsprechenden Funktionssymbols verwendet.

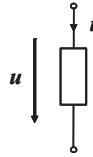


Abbildung 4.2. Symbol eines linearen Widerstandes

$$R = \frac{1}{G}. \quad (4.4)$$

In Abb. 4.2 wird das Symbol für das Netzwerkelement „Linearer Widerstand“ mit Zählpfeilen für Spannung und Strom gezeigt.

Bemerkung: Im deutschen Sprachgebrauch wird das Netzwerkelement selbst kurz „Widerstand“ genannt, im Englischen wird die Eigenschaft mit „resistance“, das Element selbst mit „resistor“ bezeichnet. Die Bezeichnung „Ohmscher Widerstand“ wird verwendet, wenn die lineare $u - i$ -Abhängigkeit besonders betont werden soll.

Die Berechnung des Widerstandswertes wird besonders einfach, wenn es sich um homogene drahtförmige Leiter handelt. Sind die Querschnittsabmessungen der Drähte sehr klein gegen die Drahtlänge, dann füllt der elektrische Strom den Querschnitt der Leiter gleichmäßig aus, und es gelten für den Widerstand eines Drahtes von der Länge l und dem Querschnitt A die folgenden Formeln

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \text{oder} \quad G = \kappa \frac{A}{l}. \quad (4.5)$$

Die Größen ρ und κ werden spezifischer elektrischer Widerstand und elektrische Leitfähigkeit genannt. Aus Gl. (4.5) geht hervor, dass als Einheit für den spezifischen Widerstand z. B. $1 \Omega m$, als Einheit für die spezifische Leitfähigkeit z. B. $1 S/m$ gewählt werden kann (S (Siemens): $1 S = 1/\Omega$). Eine praktisch häufig verwendete Einheit für den spezifischen Widerstand ist auch $1 \Omega mm^2/m$. In dem Nachschlagewerk „Hütte“ [126] findet man die Werte des spezifischen Widerstandes und der Leitfähigkeit bei $\vartheta = 20^\circ C$ für zahlreiche Stoffe, ferner der Temperaturkoeffizient α bei dieser Temperatur, der definiert ist durch die Gleichung

$$R(\vartheta) = R_{20}(1 + \alpha\vartheta). \quad (4.6)$$

Als einfachste Quelle stelle man sich einen Bleiakkumulator (z. B. Autobatterie) vor. Trotz komplizierter elektrochemischer Vorgänge in seinem Inneren kann seine *Klemmenspannung* u in guter Näherung mit einem hochohmigen Voltmeter gemessen werden. Die Spannung hängt nur in geringerem Maße von dem durch das Messgerät fließenden Strom i ab, weshalb diese Quelle den Namen *Spannungsquelle* führt. Im Idealfall, dass die Spannung der Quelle vom durchfließenden Strom völlig unabhängig ist, spricht man von einer

eingeprägten Spannung, da in diesem Fall die Spannung in dem betreffenden Zweig festliegt. In der älteren Literatur nennt man diese Spannung auch *Urspannung* oder *EMK*³. Das Symbol einer (idealen) Spannungsquelle und deren Spannungs-Stromrelation wird in Abb. 4.3, Teil a gezeigt, wobei die eingeprägte Spannung mit U_0 bezeichnet wird. In Abb. Abb. 4.3, Teil b findet man das Symbol sowie die Spannungs-Stromrelation einer idealen *Stromquelle*, bei welcher I_0 des Zweiges unabhängig von der Zweigspannung einen festen Wert besitzt und man von einem *eingeprägten Strom* sprechen kann. In beiden Fällen werden entgegen gerichtete Zählpfeile für die Spannungen und Ströme verwendet. Diese in praktischen Rechnungen durchaus zweckmäßige Konvention wird jedoch im Zusammenhang mit der später folgenden systematischen Behandlung der Kirchhoffschen Gesetze aufgegeben. Dort werden die Bezugsrichtungen für Spannung und Strom in allen Zweigen – also auch den Zweigen mit unabhängigen Quellen – gleich gewählt.

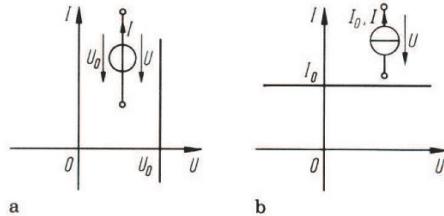


Abbildung 4.3. Ideale Quellen: a) Spannungsquelle, b) Stromquelle

Der in Wirklichkeit bei einem fließenden Strom immer auftretende Abfall der Klemmenspannung $u = u(i)$ lässt sich durch Einführung eines *Innenwiderstandes* R_i der Quelle, der in Reihe zu einer idealen Spannungsquelle mit der eingeprägten Spannung U_0 geschaltet ist, näherungsweise berücksichtigen. So entsteht ein verbessertes Modell für eine reale Quelle. Im Fall einer realen Spannungsquelle verwendet man die Ersatzschaltung mit einem Innenwiderstand R_i in Reihe, wobei R_i „klein“ sein sollte. In diesem Fall kann man Klemmenspannung U und Klemmenstrom I offensichtlich in folgender Weise in Zusammenhang bringen

$$U = U_0 - IR_i. \quad (4.7)$$

Die Ersatzschaltung für eine reale Stromquelle mit dem *eingeprägten Strom* I_0 , der in der älteren Literatur auch als „Urstrom“ bezeichnet wurde, erhält man wie folgt

$$I = I_0 - G_i U. \quad (4.8)$$

³ Sehr treffende Bemerkungen zu der etwas unglücklichen Bezeichnung EMK (elektromotorische Kraft) findet man bei Klein [145], [147]

Außerdem sieht man unter Berücksichtigung der Beziehungen $G_i = 1/R_i$ und $I_0 = U_0/R_i$, das sich sowohl die Beziehung (4.7) als auch die Beziehung (4.8) als Modell für eine reale Spannungsquelle bzw. eine reale Stromquelle verwenden lässt. In diesem Fall sollte der Leitwert G_i groß sein.

Es ist offensichtlich, dass sich die *Leerlaufspannung* im ersten Fall bei $I = 0$ zu $U = U_0$ und der *Kurzschlussstrom* im zweiten Fall für $U = 0$ zu $I = I_0$ ergibt.

Durch Zusammenfügen von Netzwerkelementen (Widerständen und Quellen) entsteht ein *elektrisches Netzwerk*, wobei es sich um ein Modell für eine elektrische Schaltung handelt. Die einzelnen Netzwerkelemente eines solchen Netzwerkes sind in den *Knoten* miteinander verbunden. Sieht man davon ab, um welches Netzwerkelement es sich handelt, dann sprechen wir auch von *Zweigen* des Netzwerkes. Geht man von irgend einem Knotenpunkt aus und „bewegt“ sich längs der elektrischen Leiter, so kann man bei vielen Netzwerken auf mindestens einem Wege zu dem Ausgangspunkt zurückkehren, ohne dass ein Zweig mehrmals durchlaufen wird. Einen solchen geschlossenen Weg nennt man eine *Masche* eines Netzwerkes. Ein Netzwerk ist hinsichtlich seiner Verbindungsstruktur durch Knoten, Zweige und Maschen charakterisiert, während die physikalischen Eigenschaften eines Netzwerkes durch die speziellen Netzwerkelemente in den Zweigen festgelegt sind. Ordnet man den Zweigen Strom- und Spannungszählpfeile zu, dann lassen sich die Grundgesetze der Verbindungsstruktur mathematisch formulieren.

Das Kirchhoffsche Stromgesetz

Dieses auf die Arbeiten von Ohm zurückgehende Gesetz bezieht sich auf die Knoten des Netzwerkes. Es bringt die Erfahrungstatsache zum Ausdruck, dass sich der elektrische Strom an der Verzweigungsstelle wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält und daher eine Erhaltungssatz gilt. Mikroskopisch gesehen wird von der Verzweigungsstelle in jedem Zeitelement die gleiche Ladung wegfließen, die ihr zugeführt wird. Man kann daher das Kirchhoffsche Stromgesetz mikroskopisch auch als eine Formulierung des Gesetzes von der Erhaltung der Ladung bezeichnen. Bei der netzwerktheoretischen Untersuchung elektrischer Netzwerke genügt es jedoch, den elektrischen Strom als Fundamentalgröße aufzufassen, ohne auf die mikroskopische Interpretation zurückzugreifen. Dabei muss man eine Wahl hinsichtlich der Zählpfeile der Ströme vornehmen.

Wir betrachten zunächst einen beliebigen Knoten eines Netzwerkes. Diesem Knoten wird eine Orientierung zugeordnet, wobei es zwei Möglichkeiten gibt: a) Die Knotenorientierung zeigt zum Knoten und b) die Knotenorientierung zeigt vom Knoten weg. Grundsätzlich kann bei jedem Knoten eine andere Knotenorientierung gewählt werden. Es empfiehlt sich bei praktischen Rech-

nungen für alle Knoten die gleiche Knotenorientierung auszuwählen⁴. Wir wählen im folgenden eine Knotenorientierung, die vom Knoten weg gerichtet ist.

Werden alle Ströme I_ν mit dem Zählpfeil zum Knoten mit einer Wichtung $\alpha_\nu = -1$ und dementsprechend alle Ströme I_ν , deren Zählpfeil vom Knoten weg zeigt, mit einer Wichtung $\alpha_\nu = +1$ versehen, dann erhält man die folgende Stromsumme für einen ausgewählten Knoten

$$\sum_\nu \alpha_\nu I_\nu = 0. \quad (4.9)$$

Das soll für sämtliche k Knoten eines Netzwerkes gelten. Auf der Grundlage der Theorie orientierter Graphen kann man zeigen, dass die Anzahl der *unabhängigen* Gleichungen gleich $k - 1$ ist; vgl. z. B. [15].

Bringt man die Summe aller negativ gewichteten Ströme auf die rechte Seite der Gleichung, dann kann man auch sagen: „*Die Summe der einem Knoten abfließenden Ströme ist gleich der Summe aller zufließenden Ströme des Knotens*“.

Wenn man im Vektor $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^b$ die Ströme aller Zweige eines Netzwerkes zusammenfasst

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

wobei b die Anzahl der Zweige ist, dann ergibt sich aufgrund des Kirchhoff'schen Stromgesetzes bei einem Netzwerk mit k Knoten ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0}; \quad (4.11)$$

dabei besitzen die Koeffizienten der $k \times b$ -Matrix \mathbf{A} nach Gl. (4.9) die Werte ± 1 , wenn die Ströme den entsprechenden Knoten berühren und ansonsten den Wert 0.

Dieses zunächst für Gleichströme formulierte Kirchhoff'sche Stromgesetz kann natürlich sofort auf zeitabhängige Ströme übertragen werden, wobei die Stromsummen für die Momentanwerte $i_\nu(t)$ für beliebige Zeitpunkte t gilt, so dass das Argument t entfallen kann. Die Gln. (4.10) und (4.11) muss dementsprechend auch mit den Strömen i_1, \dots, i_b und \mathbf{i} notiert werden.

Das Kirchhoff'sche Spannungsgesetz

⁴ Beispielsweise kann man die Knotenorientierung ebenso orientieren wie die Normalen einer Hüllefläche, aus der Ströme hinein und heraus fließen. Im Zusammenhang mit dem Gaußschen Integralsatz ist es üblich, die Normalenvektoren auf einer geschlossenen Fläche nach außen zu orientieren.

Das Kirchhoffsche Spannungsgesetz bezieht sich auf die Maschen des Netzwerkes. Mikroskopisch gesehen ist die Aussage des Kirchhoffschen Spannungsgesetzes eine spezielle Form des Energiesatzes. Bringt man die Ladung Q von einem Punkt 2 mit der elektrischen Energie $W_2 = QV_2$ zu einem Punkt 1 mit der elektrischen Energie $W_1 = QV_1$, so muss man die Arbeit

$$W_{12} := W_1 - W_2 = Q(V_1 - V_2) = QU_{12} \quad (4.12)$$

aufwenden. Beim Umlauf um die ganze Masche kommt man auf die gleiche potentielle Energie zurück.

Bei der netzwerktheoretischen Untersuchung elektrischer Netzwerke genügt es jedoch, die Spannung als Fundamentalgröße aufzufassen, ohne auf die mikroskopische Interpretation zurückzugreifen. Dabei muss man zunächst eine Wahl hinsichtlich der Zählpfeile der Spannungen vornehmen.

Wir betrachten zunächst eine beliebige Masche eines Netzwerkes, die sich aus einem geschlossenen Pfad von Zweigen zusammensetzt. Dieser Masche wird eine Orientierung zugeordnet, wobei es zwei Möglichkeiten gibt. Grundsätzlich kann bei jeder Masche eine andere Maschenorientierung gewählt werden. Wir wählen im folgenden eine der beiden Maschenorientierungen.

Durchlaufen wir die Masche, dann erhalten alle Spannungen, deren Zählpfeile in der gewählten Orientierung gerichtet sind, eine positive Wichtung $\alpha_\nu = +1$, während die anderen eine negative Wichtung $\alpha_\nu = -1$ bekommen. Die Maschensumme aller dieser Spannungen längs einer Masche ist Null, d. h.

$$\sum_\nu \alpha_\nu U_\nu = 0. \quad (4.13)$$

Das soll für sämtliche m Maschen des Netzwerkes gelten. Auf der Grundlage der Theorie orientierter Graphen kann man zeigen, dass die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen ist gleich $b - k + 1$, wenn das Netzwerk b Zweige und k Knoten besitzt; vgl. z. B. [15].

Bringt man die Summe aller negativ gewichteten Spannungen auf die rechte Seite der Gleichung, dann kann man auch sagen: „Die Summe der in einer Masche positiv gewichteten Spannungen ist gleich der Summe aller negativ gewichteten Spannungen“.

Sind im Vektor $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^b$ alle Zweigspannungen enthalten, d. h.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_b \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

wobei b die Anzahl der Zweige ist, dann bilden die m Maschengleichungen eines Netzwerkes ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{0}; \quad (4.15)$$

dabei besitzen die Koeffizienten der $m \times b$ -Matrix \mathbf{B} entsprechenden der oben genannten Vorschriften die Werte ± 1 , wenn die Spannungen an der entsprechenden Masche beteiligt ist und ansonsten den Wert 0.

Dieses zunächst für Gleichspannungen formulierte Kirchhoffsche Spannungsgesetz kann natürlich sofort auf zeitabhängige Spannungen übertragen werden, wobei die Spannungssummen für die Momentanwerte $u_\nu(t)$ für beliebige Zeitpunkte t gilt, so dass das Argument t entfallen kann. Die Gln. (4.14) und (4.15) muss dementsprechend auch mit den Spannungen u_1, \dots, u_b und \mathbf{u} notiert werden.

Man kann zeigen, dass für beliebige Netzwerke die Beziehungen $\mathbf{AB}^T = \mathbf{0}$ und $\text{Rang}(\mathbf{A}) + \text{Rang}(\mathbf{B}) = b$ gilt; vgl. z. B. Kuh und Rohrer [157].

Sehr häufig werden die beiden Kirchhoffschen Gesetze kurz als *Knotenregel* und *Maschenregel* bezeichnet. Sie stehen im engen Zusammenhang mit den Erhaltungssätzen von Ladung und Energie und sind sehr allgemein gültig. Sie gelten daher für jede Schaltung unabhängig davon ob sie linear oder nichtlinear ist. Weiter unten werden sie zur Charakterisierung von Kirchhoffschen Verbindungslementen verwendet. Es sei noch angemerkt, dass man schon bei Kirchhoff [142] erste Beweise über die Anzahl der linear unabhängigen Maschen- und Knotengleichungen findet. Weiterhin leitet Kirchhoff seine kombinatorischen Regeln her, die – bis auf die Bezeichnungen – auch das Baum- und Cobaum-Konzept enthalten.

Die Gleichungen (4.11) und (4.15) können beim Aufbau einer *axiomatischen* Theorie linearer Widerstandsnetzwerke in sehr unterschiedlicher Weise interpretiert werden. Am häufigsten wird wohl die bereits auf Kirchhoff zurückgehende Vorgehensweise mit gerichteten Netzwerkgraphen verwendet. Dabei wird dem elektrischen Netzwerk ein orientierter Graph – *Netzwerkgraph* – zugeordnet, und die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} als Knoten-Zweig- bzw. Maschen-Zweig-Inzidenzmatrizen gedeutet. Wir wollen an dieser Stelle nicht weiter auf diese Vorgehensweise eingehen und stattdessen auf die umfassende Literatur verweisen, z. B. Balabanian, Bickart und Seshu [15], Kuh und Rohrer [157], Vlach und Singhal [288]. Mit Hilfe des Konzepts der „dualen“ Netzwerkgraphen kann man beispielsweise mit Hilfe der Lösungsmenge eines Netzwerkes auf die Lösungsmenge des dualen Netzwerkes schließen. Konstruktionsvorschriften für den dualen Netzwerkgraphen findet man z. B. bei Desoer und Kuh ([63], S. 448ff). Besonders einfache Fälle dualer Netzwerke sind die sogenannten widerstandsreziproken Netzwerke, bei denen man die Impedanz- und Admittanzformeln mit Hilfe bestimmter Regeln übertragen kann; vgl. Cauer [47] [48], Feldtkeller [80].

Ein Nachteil der Verwendung von Netzwerkgraphen ist, dass nicht immer ein dualer Netzwerkgraph existiert; erste Hinweise findet man bereits bei Cauer [46]. Erst mit Hilfe idealer Übertrager (vgl. auch Abschnitt 29.3.1) können duale Netzwerke angegeben werden (siehe Bloch [32]).

Einen Ausweg bieten verallgemeinerte Konzepte, die Graphen als Spezialfälle enthalten. Reibiger hat auf der Grundlage der Arbeiten von Minty [197] das Konzept der graphoidalen Netzwerke entwickelt. Zugleich hat er in [238] mit Rückgriff auf Cauer [47] und Belevitch [20] eine widerspruchsfreie netzwerktheoretische Interpretation der Bondgraphen-Terminologie geliefert. Alternativ dazu griffen Mathis und Marten [181] Ideen von Ghenzi, Bloch und Belevitch [20] auf und entwickelten ein Konzept verallgemeinerter Verbindungselemente, wobei sie nach Ghenzi einige Bezeichnungen der algebraischen Topologie verwendeten; die entsprechende Literatur findet man in der Monographie von Mathis [180].

Dementsprechend gibt es auch mehrere Formulierungen für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz Kirchhoffscher Netzwerke, deren Spannungen und Ströme auf den Kirchhoffschen Gesetzen basieren und die Ohmsche Widerstände mit positiven Werten sowie unabhängige Quellen enthalten. Bereits Kirchhoff [142] hat einen solchen Satz angegeben.

Da das Konzept von Netzwerken mit Kirchhoffschen Verbindungselementen ohne große Vorbereitung mit Hilfe der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} formuliert werden kann, sollen die Grundzüge dargestellt werden.

Das neue Netzwerkelement, das wir *Kirchhoffsches Verbindungselement* (siehe Mathis [180]) nennen, wird durch zwei reelle Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times b}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times b}$ definiert, welche die folgende *Exaktheitsbedingungen* erfüllen

- $\mathbf{AB}^T = \mathbf{0}$,
- $\text{Rang}(\mathbf{A}) + \text{Rang}(\mathbf{B}) = b$.

Zwei Matrizen, die diese Bedingungen erfüllen, nennen wir *exaktes Matrizenpaar*.

Die verallgemeinerten Kirchhoffschen Gleichungen lassen sich nun mit einem solchen *exakten Matrizenpaar* formulieren

$$\mathbf{BU} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{AI} = \mathbf{0}. \quad (4.16)$$

Nach Belevitch [20] kann jedes Kirchhoffsche Verbindungselement mit Hilfe eines idealen Mehrtor-Übertragers realisiert werden. Vertauscht man die Matrizen in den Gln. (4.16), dann erhält man das bezüglich der Ströme und Spannungen duale Netzwerk nach Bloch, dessen Verbindungselement auch ideale Übertrager enthalten kann (siehe Mathis, Marten [181]). Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann auch eine kompaktere Form der Gleichungen zur Analyse von Netzwerken ermittelt werden; vgl. z. B. Mathis [180].

Zusammen mit den Zweigbeziehungen der Ohmschen Widerstände und unabhängigen Quellen können alle linearen Widerstandsnetzwerke beschrieben werden.

Das Joulesche Gesetz

Aufgrund umfangreicher Messungen hat Joule im Jahre 1840 festgestellt (siehe Schreier [257]), dass in einem Leiter mit dem Widerstand R , der vom

Strom I durchflossen wird, Energie pro Zeit – also Leistung – in Wärme umgesetzt wird. Quantitativ ermittelte er für diese Leistung die folgende Beziehung

$$P = I^2 R. \quad (4.17)$$

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes (4.3) können alternativ auch die folgenden Formulierungen verwendet werden: $P = U I$ oder $P = U^2/R$.

Die bisherigen Betrachtungen in linearen Widerstandsnetzwerken lassen sich mathematisch weitgehend mit Hilfe des Vektorraumkonzepts formuliert; siehe z. B. Reibiger et al. [238], [239]. Eine Ausnahme bildete das Joulesche Gesetz für einen Ohmschen Widerstand, das u. a. mit Hilfe des Produkts von Spannung und Strom formuliert werden kann. Der folgende Satz von Weyl-Tellegen verknüpft die Leistungsprodukte aller Zweige eines Widerstandsnetzwerks und ist sogar für beliebige Netzwerke gültig, da der Beweis nur auf den Kirchhoffsschen Gesetzen basiert. Für eine kompakte Formulierung dieses Satzes ist es zweckmäßig, neben dem Vektorraumkonzept ein Skalarprodukt einzuführen, so dass die mathematische Basis der Netzwerktheorie auf euklidische Räume erweitert wird. Wir verwendet dazu das natürliche innere (oder Skalar-)Produkt $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ von Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^b$.

Satz von Weyl-Tellegen: Für alle Spannungen \mathbf{U} und Ströme \mathbf{I} , welche die verallgemeinerten Kirchhoffsschen Gleichungen erfüllen, gilt

$$(\mathbf{U}|\mathbf{I}) = \sum_{k=1}^b U_k I_k = 0. \quad (4.18)$$

Dieser Satz kann so interpretiert werden, dass die Summe der in den Zweigen umgesetzten Leistungen verschwindet.

Dieser Satz hat in der Netzwerktheorie vielfältige Anwendungen. Neben der Ableitung von Beschreibungsgleichungen und Leistungsaspekten (z. B. Desoer und Kuh [63]) dient er auch zur Formulierung von Empfindlichkeits- und Reziprozitätsaussagen (u. a. Penfield et al. [223], Mathis und Pauli [189]).

Zum Nachweis des Satzes von Weyl-Tellegen verwendet man die expliziten Lösungen der verallgemeinerten Kirchhoffsschen Gleichungen (4.16). Man kann zeigen, dass die Lösungen der beiden linearen homogenen Gleichungssysteme (4.16) mit Hilfe der Transponierten der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} bestimmt werden können

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \mathbf{V}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{B}^T \mathbf{J}, \quad (4.19)$$

wobei die Elemente der Vektoren \mathbf{V} und \mathbf{J} Knotenpotenziale bzw. Maschenströme genannt werden; die Koeffizientenmatrizen sind ein exaktes Matrizenpaar, das ein verallgemeinertes Kirchhoffssches Verbindungselement charakterisiert, und daher auch ideale Übertrager enthalten kann. In speziellen Fällen kann man dieses Verbindungselement auch mit Hilfe eines Netzwerkgraphen darstellen, wobei das Matrizenpaar die Inzidenzmatrizen des Graphen bildet.

Einen Beweis für die Lösungsformeln (4.19) findet man bei Mathis ([180], Anhang).

Danach kann der Satz von Weyl-Tellegen mit den Rechenregeln für innere Produkte und lineare Abbildungen sowie den Beziehungen in (4.19) sehr leicht bewiesen werden

$$(\mathbf{U}|\mathbf{I}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{V} | \mathbf{B}^T \mathbf{J}) = (\mathbf{V} | \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{J}) = 0, \quad (4.20)$$

wenn man die ersten Exaktheitsbedingung $\mathbf{A} \mathbf{B}^T = \mathbf{0}$ berücksichtigt.

Auf der Grundlage der bisherigen Überlegungen können nun die *Knotenpotenzialgleichungen* und die *Maschenstromgleichungen* für eine bestimmte Klasse linearer Widerstandsnetzwerke einfach abgeleitet werden. Dazu wird angenommen, dass jeder Zweig eines Netzwerk in einer sogenannten *Standardform* vorliegt, d. h. es gilt die sogenannte *Leitwertform*

$$I_k = G_k U_k + I_0^k - G_k U_0^k \quad (4.21)$$

für alle k Zweige, oder es gilt die sogenannte *Widerstandsform*

$$U_k = R_k I_k + U_0^k - R_k I_0^k \quad (4.22)$$

für alle k Zweige. Verwendet man die Leitwert- und Widerstandsform in Matrzenschreibweise und benutzt die Lösungen der verallgemeinerten Kirchhoffgleichungen, dann erhält man

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{V} + \mathbf{I}_0 - \mathbf{Y} \mathbf{U}_0, \quad (4.23)$$

wobei die *Leitwertmatrix* \mathbf{Y} eine Diagonalmatrix mit den Leitwerten G_k auf der Hauptdiagonalen ist, bzw.

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{B}^T \mathbf{J} + \mathbf{U}_0 - \mathbf{Z} \mathbf{I}_0, \quad (4.24)$$

wobei die *Widerstandsmatrix* \mathbf{Z} eine Diagonalmatrix mit den Widerständen R_k auf der Hauptdiagonalen ist.

Multipliziert man die Gln. (4.23) und (4.24) mit \mathbf{A} bzw. mit \mathbf{B}

$$\mathbf{0} = \mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{V} + \mathbf{A} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{Y} \mathbf{U}_0), \quad (4.25)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{B} \mathbf{U} = \mathbf{B} \mathbf{Z} \mathbf{B}^T \mathbf{J} + \mathbf{B} (\mathbf{U}_0 - \mathbf{Z} \mathbf{I}_0), \quad (4.26)$$

dann erhalten wir daraus die verallgemeinerten Knotenpotenzial- bzw. Maschenstromgleichungen

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{V} = -\mathbf{A} (\mathbf{I}_0 - \mathbf{Y} \mathbf{U}_0), \quad (4.27)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{Z} \mathbf{B}^T \mathbf{J} = -\mathbf{B} (\mathbf{U}_0 - \mathbf{Z} \mathbf{I}_0), \quad (4.28)$$

die in die gewöhnlichen Knotenpotenzial- bzw. Maschenstromgleichungen übergehen, wenn die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} Inzidenzmatrizen eines Netzwerkgraphen sind. Die *Knotenleitwertmatrix* $\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T$ und die *Maschenwiderstandsmatrix* $\mathbf{B} \mathbf{Z} \mathbf{B}^T$ sind nicht notwendigerweise regulär und daher haben diese

Gleichungssysteme nicht unbedingt eine eindeutige Lösung \mathbf{V} und \mathbf{J} , so dass es in beiden Fällen der Bezeichnung „Potenzial“ für diese Größen gerechtfertigt wäre. Eindeutigkeit der Lösungen kann erreicht werden, wenn \mathbf{A} und \mathbf{B} als Inzidenzmatrizen eines Netzwerkgraphen gedeutet werden können und geeignete Gleichungen gestrichen werden bzw. bestimmte Komponenten von \mathbf{V} und \mathbf{J} auf feste Werte (z. B. auf null) gesetzt werden; im Fall der Knotengleichungen entspricht diese mathematische Vorgehensweise der Festlegung der sogenannten *Masse* eines Netzwerkes. Außer den Ohmschen Widerständen,

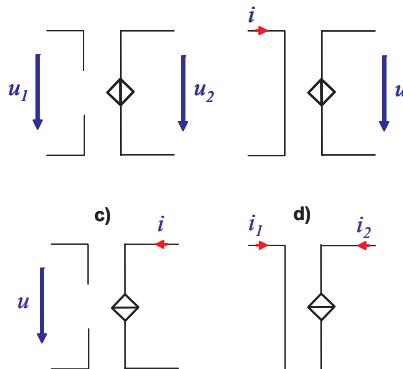


Abbildung 4.4. Gesteuerte Quellen: a) VCVS, b) CCVS, c) VCCS, d) CCCS

die Strom und Spannungen in einem Zweig eines Netzwerkes in Beziehung setzen, gibt es auch sogenannte *gesteuerte Quellen*, die Ströme und Spannungen in verschiedenen Zweigen koppeln. Die entsprechenden Symbole dieser Quellen sind in Abb. 4.4 abgebildet, wobei die gesteuerte Größe als Quadrat dargestellt wird. Beschränken wir uns auf lineare Relationen zwischen der steuernden und der gesteuerten Größe, dann repräsentieren die Symbole die folgenden mathematischen Relationen, wobei es sich beim linken Zweig um die steuernde und beim rechten Zweig um die gesteuerte Größe handelt:

- a) *VCVS*: Eine lineare spannungsgesteuerte Spannungsquelle (Voltage Controlled Voltage Source) stellt die Relation $u_2 = v u_1$ dar, wobei der Parameter v als Spannungsverstärkung interpretiert werden kann.
- b) *CCVS*: Eine lineare stromgesteuerte Spannungsquelle (Current Controlled Voltage Source) stellt die Relation $u = r i$ dar, wobei der Parameter r als Übertragungswiderstand interpretiert werden kann.
- c) *VCCS*: Eine lineare spannungsgesteuerte Stromquelle (Voltage Controlled Current Source) stellt die Relation $i = g u$ dar, wobei der Parameter g als Übertragungsleitwert oder Steilheit interpretiert werden kann.
- d) *CCCS*: Eine lineare stromgesteuerte Stromquelle (Current Controlled Current Source) stellt die Relation $i_2 = \beta i_1$ dar, wobei der Parameter β als Stromverstärkung interpretiert werden kann.

Gesteuerte Quellen kann man auch als spezielle 2-Toren auffassen; siehe Abschnitt 4.5. Nichtlineare gesteuerte Quellen werden bei Chua, Desoer und Kuh [58] behandelt. Dort wird auch beschrieben (Abschnitt 2.1), wie man nichtlineare gesteuerte Quellen mit Hilfe linearer gesteuerter Quellen und nichtlinearen Spannungs-Strom-Relationen darstellen kann.

Während sich die beiden zuerst genannten Arten gesteuerter Quellen weder in die Knotenpotenzial- noch in die Maschenstromgleichungen einbringen lassen, können stromgesteuerte Spannungsquellen in die Maschenstromgleichungen und spannungsgesteuerte Stromquellen in die Knotenpotenzialgleichungen eingefügt werden. Steuert beispielsweise die Spannung U_2 den Strom I_1 , d. h. $I_1 = gU_2$, so kann man dieses Netzwerkelement in die Leitwertmatrix \mathbf{Y} als Nichtdiagonalelement einbringen. Die üblicherweise als gesteuerte Quelle bezeichneten Teilnetzwerke werden noch durch zusätzliche Beziehungen ergänzt; vgl. Mathis [180], Vlach und Singhal [288]. Netzwerke können somit aus zusammengeschalteten Admittanzweigen und spannungsgesteuerten Stromquellen mit Hilfe von Knotenstromgleichungen beschrieben werden. Entsprechend können Netzwerke aus zusammengeschalteten Impedanzweigen und stromgesteuerten Spannungsquellen mit Hilfe von Maschenstromgleichungen beschrieben werden.

Neben diesen Grundgleichungen linearer Widerstandsnetzwerke gibt es zahlreiche andere Möglichkeiten für Beschreibungsgleichungen, die in speziellen Situationen vorteilhaft sind. In einige dieser Beschreibungsgleichungen lassen sich auch lineare stromgesteuerte Stromquelle und spannungsgesteuerte Spannungsquellen einfügen. Diese Beschreibungsgleichungen sind zwar für die Anwendungen und insbesondere für die Konstruktion von Schaltkreissimulatoren (SPICE, siehe Vlach, Singhal [288], Kielkowski [140]) von wesentlicher Bedeutung, aber es ergeben sich daraus keine grundsätzlich neuen Einsichten, so dass wir den interessierten Leser auf die Literatur verweisen; ausführlich wird die Aufstellung von Netzwerkgleichungen auch bei Reinschke und Schwarz [247] diskutiert.

Allgemeine nichtlineare Widerstandsnetzwerke können ebenfalls mit Hilfe eines Kirchhoffschen Verbindungselementes dargestellt werden, das mit linearen und nichtlinearen Zweipol-Widerständen sowie gesteuerten und unabhängigen Quellen beschaltet ist. Gelingt es beispielsweise, die konstitutiven Relationen sämtlicher Netzwerkelemente in einer nichtlinearen Standardform zu beschreiben, so dass sie folgendermaßen repräsentiert werden können

$$\mathbf{I} = \mathbf{f}(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0) + \mathbf{I}_0, \quad (4.29)$$

dann kann man in der obengenannten Weise mit Gl. (4.19) die Beschreibungsgleichungen solcher nichtlinearen Widerstandsnetzwerke ableiten

$$\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{A}^T\mathbf{V} - \mathbf{U}_0) = -\mathbf{A}\mathbf{I}_0. \quad (4.30)$$

Da sich die nichtlinearen Elemente nur in Ausnahmefällen in der Standardform (4.29) formulieren lassen, können die allgemeinen Beschreibungsgleichungen nichtlinearer Widerstandsnetzwerke nur in der allgemeineren Form

$$\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{U}, \mathbf{I}) = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

notiert werden, wobei \mathbf{f}_{NL} die nichtlinearen Widerstände beschreibt. Geometrisch gesehen handelt es sich um die Nullstellenmenge von \mathbf{f}_{NL} bzw. die Lösungen der nichtlinearen Gleichungen (4.31), die mit der Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichungen (4.32) in der Menge $\mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ aller Ströme und Spannungen geschnitten werden; Lösungsmengen homogener linearer Gleichungen tragen stets eine Vektorraumstruktur. Diese Schnittmenge kann auch Zustandsraum eines (nichtlinearen) Widerstandsnetzwerkes genannt werden (siehe Mathis [180]); die Elemente eines Zustandsraumes werden *Arbeitspunkte* genannt. Bei linearen Netzwerklementen ist die Nullstellenmenge eine lineare Mannigfaltigkeit, die im Fall eines „echten (transversalen) Schnittes“ ebenfalls eine lineare Mannigfaltigkeit ist, die im Falle einer eindeutigen Lösung des Netzwerkes die Dimension null hat, d. h. zu einer einteiligen Menge entartet. Dann besteht der Zustandsraum genau aus einem Arbeitspunkt.

Das Arbeitspunktproblem bei linearen Widerstandsnetzwerken kann auf die Lösung linearer Gleichungen zurückgeführt werden und ist daher gut verstanden und auch für die numerische Lösung stehen verschiedene Algorithmen zur Verfügung (siehe z.B. Vlach und Singhal [288]). Dagegen kann man das Arbeitspunktproblem nur für wenige Klassen nichtlinearer Widerstandsnetzwerken analytisch behandeln. So gibt es wichtige Schaltungsklassen, die Netzwerkmodelle mit mehreren Arbeitspunkten erfordern; beispielsweise zwei (stabile) Arbeitspunkte von Flip-Flop-Schaltungen, die in SRAM-Speichern eingesetzt werden. Eine Reihe von Ergebnissen über die Anzahl von Arbeitspunkten sind für nichtlineare Widerstandsnetzwerke aus Ohmschen Widerständen und unabhängigen Quellen sowie aus Halbleiterdioden und Bipolartransistoren verfügbar. Wie in Abschnitt 39 näher ausgeführt wird, werden für die Ersatzschaltungen dieser Halbleiterbauelemente, die das Gleichstromverhalten modellieren, gesteuerte Quellen verwendet. Einen Überblick über die Ergebnisse solcher Netzwerke findet man bei Willson [304], Hasler, Neirynck [103], Mathis [180]. Interessante neue Resultate sind in der Arbeit von Reibiger, Mathis et al. enthalten [239], die auf einer Idee von Kronenberg, Mathis und Trajkovic basiert [152].

4.2 Elektrischen Netzwerke mit dynamischen Elementen

Im vorangegangenen Abschnitt 4.1 haben wir uns auf Schaltungen beschränkt, die keine dynamischen Netzwerklemente enthalten. Im Rahmen der Theorie elektromagnetischer Felder werden wir sehen, dass die Spannungen und Ströme dynamischer Netzwerklemente über differentielle und integrale Beziehungen zusammenhängen und somit der bisherige netzwerktheoretische Rahmen erweitert werden muss. In Abschnitt 12 wird gezeigt, dass Leiteranordnungen, die sich auf unterschiedlichen Potenzialen befinden, mit Hilfe

des Kapazitätsbegriffs in integraler Form beschreiben lassen. In der Schaltungstechnik werden solche Anordnungen als Kondensatoren bezeichnet, so dass man auf der Ebene der Spannungen und Ströme das folgende einfache Netzwerkmodell definieren kann

$$C \frac{du}{dt} = i, \quad (4.33)$$

welches Kapazität genannt wird. Dabei muss wie bei den Widerstandsnetzwerken nicht auf den feldtheoretischen Hintergrund zurückgegriffen werden; vgl. Abschnitt 12.1.

In ähnlicher Weise kann man das magnetische Feld in stromdurchflossenen Leiteranordnungen mit Hilfe des Begriffs der Selbst- oder Gegeninduktivität in integraler Form beschreiben, so dass solche Anordnungen, die man in der Schaltungstechnik als Spulen bezeichnet, mit Hilfe des folgenden einfachen Netzwerkmodells beschreiben kann

$$L \frac{di}{dt} = u, \quad (4.34)$$

welches Induktivität genannt wird; vgl. Abschnitt 23.

Bemerkung: Ebenso wie beim Widerstand werden die Bauelemente, die feldtheoretischen Kenngrößen und die Netzwerkmodelle hinsichtlich ihrer Bezeichnung in der deutschsprachigen Literatur nicht unbedingt unterschieden, so dass man dem inhaltlichen Ausführungen entnehmen muss, was gemeint ist.

Fasst man die Gleichungen sämtlicher Kapazitäten und Induktivitäten in jeweils einer vektoriellen Form zusammen

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{u}_C}{dt} = \mathbf{i}_C, \quad \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}_L}{dt} = \mathbf{u}_L, \quad (4.35)$$

wobei \mathbf{C} die (diagonale) Kapazitätsmatrix und \mathbf{L} die (diagonale) Induktivitätsmatrix sind, die bei kapazitiven bzw. induktiven Kopplungen auch Nicht-diagonalelemente enthalten können, dann können die Beschreibungsgleichungen nichtlinearer RLC-Netzwerke mit Hilfe der Gleichungen (4.31) und (4.32) in folgender Weise beschrieben werden

$$\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{i}_R, \mathbf{u}_R) = \mathbf{0}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{u}_C}{dt} = \mathbf{i}_C, \quad \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}_L}{dt} = \mathbf{u}_L. \quad (4.38)$$

Dabei werden die dynamischen Netzwerkelemente mit Hilfe derjenigen Strömen und Spannungen des Kirchhoffschen Verbindungselements beschrieben, an denen diese Netzwerkelemente angeschaltet sind. Sie werden mit $\mathbf{i}_R, \mathbf{u}_R, \mathbf{i}_C, \mathbf{u}_C, \mathbf{i}_L$ und \mathbf{u}_L bezeichnet und in den Vektoren aller Ströme \mathbf{i} bzw. aller Spannungen

\mathbf{u} enthalten. Die Kapazitätsmatrix kann auch von den Kapazitätsspannungen \mathbf{u}_C und die Induktivitätsmatrix von den Induktivitätsströmen abhängen; vgl. Abschnitt 23.2.6.

Die Beschreibungsgleichungen allgemeiner nichtlinearer RLC-Netzwerke können in der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad (4.39)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.40)$$

notiert werden, die man als Algebro-Differentialgleichungen⁵ bezeichnet. Offensichtlich bestehen sie aus einem System nichtlinearer oder linearer Differentialgleichungen und algebraischer Gleichungen, die selbst wiederum linear oder nichtlinear sein können. Diese Gleichungen lassen sich nur in speziellen Fällen in die kompaktere Form $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}})$ bringen. Dazu müsste man Gl. (4.40) (global) nach \mathbf{y} auflösen, diese Größe in Gl. (4.39) eliminieren und die Matrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ (global) invertieren. Algebro-Differentialgleichungen besitzen unter bestimmten Umständen Lösungen, die *explizite* Differentialgleichungen der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ nicht besitzen und müssen daher gesondert klassifiziert (Indexbegriff, Differentialalgebra) und analytisch behandelt werden, wobei sich die Dimension des Zustandsraumes i. a. reduziert. Auch bei der numerischen Analyse müssen Besonderheiten beachtet werden. Bezuglich der Einzelheiten verweisen wir auf die Literatur: einen Überblick geben z. B. Mathis [182] und Deuflhard [65].

Wenn die dynamischen Netzwerke nur lineare Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten sowie gesteuerte und unabhängige Quellen enthalten, dann kann man diese Netzwerke, bei denen Eingangs- und Ausgangsgrößen gesondert bezeichnet sind, in bestimmten Fällen, den sogenannten Index1-Systemen (siehe z. B. Hairer und Wanner [102], Ascher und Petzold [10], Kunkel und Mehrmann [158]), mit Hilfe der obengenannten Zustandsgleichungen (2.14)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4.42)$$

beschrieben, wobei die Größen \mathbf{x} , \mathbf{u} und \mathbf{y} geeignete Ströme und Spannungen des Netzwerkes sind. In diesen Fällen kann man auf die analytischen Lösungsverfahren der Theorie linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückgreifen; siehe z. B. Jänich [132]. Die allgemeine Lösung der Zustandsgleichung (4.41) lautet bei vorgegebenen Anfangswerten $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ (für $t_0 = 0$)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t} \star \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4.43)$$

wobei $\exp(\mathbf{At})$ die allgemeine Lösung von

⁵ Die englische Bezeichnung lautet: Differential-Algebraic Equations (DAE)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (4.44)$$

und \star das zugehörige Faltungsprodukt ist, das für geeignete Funktionen $a, b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(a \star b)(t) := \int_0^t a(t - \tau) b(\tau) d\tau \quad (4.45)$$

definiert ist. Die Ausgangsgröße \mathbf{y} lässt sich danach in einfacher Weise bestimmen. Weitere Einzelheiten zur Lösung expliziter linearer Vektordifferenzialgleichungen findet man in der Literatur; vgl. z. B. Kisacanin, Agarwal [143], Mathis [180]. In Abschnitt 5 wollen wir jedoch auf beispielhafte Anwendungen eingehen.

Wir wollen nur darauf hinweisen, dass man lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und insbesondere die Zustandsgleichungen auch mit Hilfe der Laplace-Transformation und den sogenannten Operatormethoden lösen kann. Das liegt vor allem daran, dass der Lösungsraum solcher Gleichungssysteme (4.44) grundsätzlich ein endlich dimensionaler Funktionenvektorraum ist und somit das Problem auch explizit algebraisch formuliert werden kann. Wie in Gl. (4.43) zu erkennen ist, kann man die spezielle Lösung der Zustandsgleichung mit Hilfe eines Faltungsintegral formulieren. Führt man die Faltung als Produkt in den entsprechenden Funktionenvektorraum ein, dann kann in dieser Algebra auch Lösungen des Differentialgleichungssystems ausrechnen. Eine sehr zweckmäßige Methode geht von dem sogenannten Mikusinski-Kalkül für Distributionen aus und reduziert die Menge der verfügbaren Distributionen auf sogenannte Hyperfunktionen (vgl. Yosida [313]). In Anwendung auf die System- und Netzwerktheorie, in der die Klasse der Algebro-Differentialgleichungen im Vordergrund steht, gelangt man zu dem eleganten, von Mathis und Marten (siehe z. B. Mathis [180]) entwickelten HY-Kalkül, bei dem es sich um eine erweiterte Fassung des Heaviside-Kalküls (vgl. Courant, Hilbert [59]) handelt. Auf analytische, beweistechnisch aber sehr viel kompliziertere Art und Weise erhält man die Ergebnisse des HY-Kalküls auch mit Hilfe der Laplace-Transformation, deren Anwendbarkeit darauf beruht, dass man das Faltungsprodukt im Urbildraum als Produkt komplexwertiger Funktionen im Bildraum dieser Transformation schreiben kann. Hinsichtlich weiterer Einzelheiten verweisen wir auf die Literatur; z. B. Kisacanin, Agarwal [143], Ziemer, Tranter, Fannin [317].

Bei vielen Anwendungen derartiger Methoden geht es insbesondere darum, die spezielle Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu ermitteln, die man nach Gl. (4.43) mit Hilfe eines Faltungsproduktes darstellen kann. Ist die Impulsantwort eines Systems h mit dem Eingang u und dem Ausgang y bekannt, dann erhält man im Zeitbereich die folgende Beziehung

$$y = h \star u, \quad (4.46)$$

wenn das Symbol \star das Faltungsprodukt bezeichnet. Dabei soll darauf hingewiesen werden, dass nach Abschnitt 2 ein enger Zusammenhang zwischen der Impulsantwort und der Greenschen Funktion besteht.

Im Bildbereich der Laplace-Transformation kann man das Übertragungsverhalten des LTI-Systems (4.41), (4.42) in Produktform ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$)

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{C}(s\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{U} = \mathbf{H}(s) \mathbf{U} \quad (4.47)$$

ausdrücken, wenn s die komplexe Frequenz sowie \mathbf{Y}, \mathbf{H} und \mathbf{U} die Laplace-Transformierten von \mathbf{y}, \mathbf{h} und \mathbf{u} sind. Die Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(s)$ ist komplexwertig, die sich im Fall eines Eingangs und eines Ausgangs auf eine komplexwertige Funktion $H(s)$ reduziert und auch als Quotient $H(s) = Y(s)/U(s)$ dargestellt werden kann. Eine ausführliche Diskussion der Zustands- und Beobachtungsgleichungen im Zeit- und Frequenzbereich findet man in Lehrbüchern der linearen Regelungstechnik; z. B. Lunze [174], Ludyk [173] oder Kisacanin, Agarwal [143].

In Abschnitt 5 werden die genannten Verfahren anhand einiger Beispiele illustriert.

4.3 Die Wechselstromrechnung: AC-Kalkül

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf lineare zeitinvariante Netzwerke mit sinusförmiger Anregung, die durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und sinusförmiger Inhomogenität beschrieben werden.

Sinusförmige Zeitfunktionen sind Funktionen, die sich mit einer vorgegebenen Kreisfrequenz $\omega \geq 0$ und reellen Koeffizienten $\gamma, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ wahlweise durch Terme der Form

$$\gamma \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{oder} \quad \gamma \sin(\omega t + \psi) \quad (4.48)$$

darstellen lassen. Wegen der für alle ϑ gültigen Identität $\sin \vartheta = \cos(\vartheta - \pi/2)$ kann man sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Terme der ersten Form beschränken. Bezeichnet \mathcal{F}_ω die Menge aller sinusförmigen Zeitfunktionen mit der Kreisfrequenz ω , so gilt

$$\mathcal{F}_\omega = \{\gamma \cos(\omega t + \varphi) \mid \gamma, \varphi \in \mathbb{R}\}. \quad (4.49)$$

Wegen $\cos(\eta + \vartheta) = \cos \eta \cos \vartheta - \sin \eta \sin \vartheta$ erhält man mit $\alpha := \gamma \cos \varphi$ und $\beta := -\gamma \sin \varphi$ die Beziehung $\gamma \cos(\omega t + \varphi) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$. Folglich gilt auch

$$\mathcal{F}_\omega = \{\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \quad (4.50)$$

Aus (4.50) folgt sofort, dass sowohl die für alle t punktweise definierten definierten Produkte reeller Zahlen mit Zeitfunktionen aus \mathcal{F}_ω als auch die gleichfalls punktweise definierten endlichen Summen solcher Zeitfunktionen

wieder zu \mathcal{F}_ω gehören. Zusammen mit diesen Operationen bildet die Menge \mathcal{F}_ω einen reellen Vektorraum. Wie man leicht nachprüft, sind die durch die Terme $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ definierten Zeitfunktionen linear unabhängig. Also ist \mathcal{F}_ω ein zweidimensionaler reeller Vektorraum und die durch diese Terme definierten Zeitfunktionen liefern eine Basis dieses Vektorraums.

Betrachtet werde nun ein Netzwerk, das außer einer unabhängigen Spannungs- oder Stromquelle mit einer sinusförmigen eingeprägten Größe keine weiteren unabhängigen Quellen enthält. Interessieren wir uns lediglich für eine Netzwerkvariable x , dann reduzieren sich die Beschreibungsgleichungen auf eine Differentialgleichung der Form

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f, \quad f \in \mathcal{F}_\omega \quad (4.51)$$

Bei der Übertragung der in diesem Abschnitt diskutierten Methoden auf Netzwerke mit mehreren Eingangsquellen und Ausgangsgrößen muss man auf Systeme inhomogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückgreifen, was jedoch zu keinen neuen Einsichten führt. Daher verweisen wir an dieser Stelle auf die Literatur; vgl. Mathis [180].

Ist man ausschließlich an Lösungen $x \in \mathcal{F}_\omega$ von Gl. (4.51) interessiert, dann können spezielle Rechenmethoden entwickelt werden, die wir unter dem Schlagwort *Methoden der Wechselstromrechnung* zusammenfassen wollen. Alle Methoden der Wechselstromrechnung laufen letztlich darauf hinaus, dass das unbequeme Arbeiten mit Sinus- und Kosinus-Funktionen und den dazu notwendigen Additionstheoremen durch das Arbeiten mit einer einzigen Basisfunktion ersetzt wird. Man ist also bestrebt, den 2-dimensionalen durch einen 1-dimensionalen Vektorraum von Funktionen zu ersetzen, obwohl das in expliziter Weise in praktisch allen Darstellungen der Wechselstromrechnung, die man in den elektrotechnischen Lehrbüchern findet, überhaupt nicht zum Ausdruck kommt.

Erste Ansätze für solche Methoden wurden bereits von Helmholtz und Rayleigh um 1880 (und sicher auch vorher) benutzt (siehe Marten, Mathis [179]), aber erst durch Steinmetz und Kennelly wurde im Jahre 1893 ein systematisches Verfahren entwickelt und zunächst auf Probleme der elektrischen Energietechnik angewendet; siehe Steinmetz [267], [268]. Wenig später wurde auch das Konzept der komplexen Leistung durch Janet (vgl. Breisig [43]) eingeführt. Um 1910 war die Methode der Wechselstromrechnung schon vollständig etabliert und es gab zahlreiche Darstellungen der „symbolischen Methode“, wie sie schon von Rayleigh genannt wurde, obwohl die Einführung komplexer Ströme und Spannungen für viele Elektroingenieure auch noch nach 1930 eine erhebliche Hürde darstellte; siehe z. B. das Vorwort der Monographie von Landolt aus dem Jahre 1936 [161]. Eine mathematisch befriedigende Darstellung der Methode zur Lösung der obengenannten Klasse von Differentialgleichungen existierte jedoch lange nicht. Erst im Jahre 1937 hat Quade [233] die vielfach angewendete Methode in eine mathematische Form gebracht. Allerdings hielt er an den komplexen Strömen und Spannungen fest, welche von

vielen Ingenieuren, die an reellwertige Funktionen für physikalische Größen gewöhnt waren, mit zum Teil erheblicher Skepsis betrachtet wurden.

Mathis und Marten haben im Jahre 1986 eine alternative und mathematisch fundierte Darstellung der Wechselstromrechnung präsentiert, die auf die Einführung komplexwertiger Zeitfunktionen für Spannungen und Ströme verzichtet und komplexe Zahlen ausschließlich zur mathematischen Darstellung von Differential- und Integraloperatoren verwendet; siehe u. a. Mathis [180], Marten und Mathis [179]. Die Darstellung greift auf gängige Hilfsmittel der linearen Algebra zurück und wird damit sogar mit Hilfe der Schulmathematik verständlich. Ein besonderer Vorteil dieser alternativen Methode zur Lösung von Wechselstromaufgaben kann auch darin gesehen werden, dass sich die komplexe Leistung in mathematisch sehr durchsichtiger Weise einführen lässt. Im folgenden soll zunächst auf die Grundlagen dieser Darstellung eingegangen werden, da es keine kompakte mathematische Darstellungen der klassischen Darstellung der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly gibt. Erst danach werden wir kurz skizzieren, wie man die klassische Darstellung einordnen muss.

Ausgangspunkt der Darstellung der Wechselstromrechnung nach Mathis und Marten, die wir im folgenden *AC-Kalkül* nennen wollen, ist die Tatsache, dass der *Differentialoperator* D_ω , der für alle $x \in \mathcal{F}_\omega$ durch

$$D_\omega(x) := \frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt} \quad (4.52)$$

definiert ist, die bemerkenswerte Eigenschaft

$$D_\omega \circ D_\omega = -\text{id}_{\mathcal{F}_\omega} \quad (4.53)$$

besitzt, wobei \circ die Verkettung von Operatoren und $\text{id}_{\mathcal{F}_\omega}$ die Identität auf \mathcal{F}_ω ist. Offensichtlich ist die Inverse von D_ω der Operator⁶ $-D_\omega$. Zum Nachweis dieser Aussagen mache man sich klar, dass D_ω auch auf die hier gewählten *Basisfunktionen* $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ angewendet werden kann, woraus sich die Beziehungen

$$D_\omega \cos \omega t = -\sin \omega t, \quad D_\omega \sin \omega t = \cos \omega t \quad (4.54)$$

ergeben. Daraus folgt für die Basisfunktionen sofort die Beziehung (4.53), die dann offensichtlich auch auf beliebige Linearkombinationen erweitert oder linear fortgesetzt werden kann.

Wenn auf einem 2-dimensionalen reellen Vektorraum eine lineare Abbildung mit der in Gl. (4.53) genannten Eigenschaft existiert, die auch als *komplexe Struktur* bezeichnet wird (vgl. Nomizu [216], Mathis [180]), dann kann die reelle skalare Multiplikation dieses Vektorraumes auf eine solche Weise zu einer komplexen skalaren Multiplikation erweitert werden, dass die *Trägermenge* dieses Vektorraumes – also die sinusförmigen Funktionen ohne weitere

⁶ Man beachte, dass neben dem durch Gl. (4.52) definierten Differentialoperator D_ω auch der durch $\hat{D}_\omega := -D_\omega$ definierte Operator eine zu Gl. (4.53) analoge Eigenschaft besitzt.

operationale Struktur – zusammen mit dieser komplexen skalaren Multiplikation und einer Addition seiner Vektoren, die von der Struktur des ursprünglichen reellen Vektorraumes unverändert übernommen wird, nunmehr einen *komplexen Vektorraum* bildet.

Auf \mathcal{F}_ω kann eine solche komplexe skalare Multiplikation durch

$$(\alpha + j\beta) \odot f := \alpha \cdot f + \beta \cdot D_\omega(f), \quad (4.55)$$

definiert werden⁷. Um diese komplexe skalare Multiplikation von der gleichfalls auf \mathcal{F}_ω definierten reellen skalaren Multiplikation zu unterscheiden, soll ihre Bezeichnung durch das Symbol \odot im Folgenden konsequent beibehalten werden. Wie bei skalaren Multiplikationen üblich kann das Symbol \odot aus Gründen der Bequemlichkeit weggelassen werden. Definitionsgemäß entspricht also der Multiplikation von f mit j bezüglich \odot die Anwendung des Differentialoperators D_ω auf die Funktion f .

Übersetzt man die Beziehungen in Gl. (4.54) mit Hilfe von \odot , so erhält man

$$j \odot \cos \omega t = -\sin \omega t, \quad j \odot \sin \omega t = \cos \omega t. \quad (4.56)$$

Das bedeutet aber, dass die durch die Terme $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ definierten Zeitfunktionen, die beide zusammen in dem ursprünglich mit einer reellen skalaren Multiplikation versehenen Raum \mathcal{F}_ω eine Basis bildeten, in dem mit der komplexen skalaren Multiplikation \odot ausgestatteten Raum \mathcal{F}_ω linear abhängig sind. Folglich ist der mit \odot versehene Raum der sinusförmigen Zeitfunktionen nunmehr ein *eindimensionaler komplexer Vektorraum*. Als Basen dieses komplexen Vektorraums kann man sowohl die durch $\cos \omega t$ oder die durch $\sin \omega t$ definierte Zeitfunktion, aber auch jede nichttriviale Linearkombination dieser Funktionen verwenden. Für die Anwendungen ist gerade diese Wahlfreiheit ein weiterer Vorteil des AC-Kalküls.

In den Anwendungen ist die mit $\varphi \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ durch

$$c_\varphi(t) := \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.57)$$

definierte Basis vorteilhaft. Dann gilt mit fest vorgegebenem Wert von φ

$$\mathcal{F}_\omega = \{\gamma \odot c_\varphi \mid \gamma \in \mathbb{C}\}. \quad (4.58)$$

Man beachte den grundlegenden Unterschied zwischen den Darstellungen von \mathcal{F}_ω in den Gleichungen (4.49) und (4.58). Während in Gl. (4.49) die Größen γ und φ beliebige reelle Zahlen bezeichnen, ist γ in (4.58) eine zwar eine beliebige, aber komplexe Zahl und φ eine fest vorgegebene reelle Zahl. An dieser Stelle sei nochmals explizit darauf hingewiesen, dass gemäß Gl. (4.55) stets die Beziehung

$$(\alpha + j\beta) \odot c_\varphi = \alpha c_\varphi + \beta D_\omega c_\varphi = \alpha c_\varphi - \beta s_\varphi. \quad (4.59)$$

⁷ In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit meistens mit j bezeichnet, da Symbol i für den Strom vergeben ist.

gilt, d.h. dass die Elemente der mit der komplexen skalaren Multiplikation \odot versehenen Menge \mathcal{F}_ω der sinusförmigen Zeitfunktionen nach wie vor reellwertige Zeitfunktionen sind.

Selbstverständlich hätte man an Stelle von c_φ auch die durch $s_\varphi(t) := \sin(\omega t + \varphi)$ definierte Zeitfunktion als Basis der als komplexen Vektorraum angesehenen Menge \mathcal{F}_ω verwenden können.

Erweitern wir die rechte Seite von Gl. (4.59) mit $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und parametrisieren die Quotienten $\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und $\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ mit dem Winkel $\psi := \arctan(\beta/\alpha)$ ⁸

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \cos \psi, \quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sin \psi, \quad (4.60)$$

dann ergibt sich mit (4.59)

$$(\alpha + j\beta) \odot c_\varphi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos \psi c_\varphi - \sin \psi s_\varphi). \quad (4.61)$$

Mit Hilfe eines Additionstheorems erhält man schließlich mit der Definition in Gl. (4.57) die nützliche Beziehung

$$(\alpha + j\beta) \odot c_\varphi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (\cos(\omega t + (\varphi + \psi))) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} c_{\varphi+\psi}. \quad (4.62)$$

Sucht man nun eine sinusförmige Lösung x einer Differentialgleichung⁹ vom Typ (4.51), deren Eindeutigkeit man zeigen kann, dann lassen sich die Differentialoperatoren d^k/dt^k durch einfaches Erweitern mit ω^k ($k = 1, \dots, n$) in Potenzen von D_ω überführen. Anschließend kann man die Differentialgleichung (4.51) mit Hilfe von \odot formulieren

$$(a_n \omega^n j^n + a_{n-1} \omega^{n-1} j^{n-1} + \dots + a_2 \omega^2 j^2 + a_1 j + a_0) \odot x = f. \quad (4.63)$$

Entsprechend den Rechenregeln der imaginären Einheit j können nun die ungeraden Potenzen von j auf $\pm j$ und die geraden Potenzen von j auf ± 1 reduziert werden, so dass sich die Klammer in Gl. (4.63) als komplexe Zahl $A + jB$ schreiben lässt

$$(A + jB) \odot x = f, \quad (4.64)$$

wobei A und B von den Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ und der Frequenz ω abhängen. Gilt $A + jB \neq 0$ (keine Resonanz), dann kann man die Lösung in folgender Form

⁸ Eine geometrische Deutung erhält man, in dem man die komplexe Zahl $\alpha + j\beta$ in der komplexen Ebene \mathbb{C} betrachtet. Dabei ist ψ das Argument der komplexen Zahl. Die hier und im folgenden verwendete Beschreibung des Arguments von $(\alpha + j\beta)$ mit der arctan-Funktion ist zunächst nur im ersten Quadranten der komplexen Ebene \mathbb{C} gültig. In den anderen Quadranten sind bekanntlich Modifikationen notwendig; vgl. z. B. Merziger und Wirth ([198], S. 94f).

⁹ Man kann zeigen, dass eine solche Differentialgleichung i. a. eine eindeutige Lösung besitzt; ein entsprechendes Kriterium wird weiter unten angegeben.

$$x = \frac{1}{(A + jB)} \odot f \quad (4.65)$$

notiert werden.

Für $A + jB = 0$ und $f \neq 0$ hat die Differentialgleichung (4.51) keine Lösung in \mathcal{F}_ω . Für $A + jB = 0$ und $f = 0$ ist jedes Element von \mathcal{F}_ω eine Lösung der Differentialgleichung (4.51).

Der komplexe Faktor $1/(A + jB)$ wird in der Netzwerk- und Systemtheorie als Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ von f nach x interpretiert. Mit Hilfe der Fundamentalbeziehung (4.55) des AC-Kalküls kann man nun die Lösung x nach Umwandlung des komplexen Faktors in die Form $(\alpha + j\beta)$ auch explizit im Zeitbereich ausdrücken. In den Anwendungen der Netzwerk- und Systemtheorie genügt es jedoch häufig, den Einfluss von $1/(A + jB)$ auf die sinusförmige Anregungsfunktion f zu ermitteln. Dazu ist es zweckmäßig, die Lösung in der obengenannten Basis (4.57) zu betrachten. Beide Vorgehensweisen sollen zunächst in allgemeiner Form erläutert werden. Später folgt ein illustratives Beispiel.

Der Nenner des komplexen Faktors von f in (4.65) kann reell gemacht werden und das Ergebnis mit Hilfe der Definition (4.55) in eine Linearkombination von f und der Zeitableitung von f umgewandelt werden

$$x = \frac{b(A - jB)}{(A^2 + B^2)} \odot f = \frac{A}{(A^2 + B^2)} f - \frac{B}{(A^2 + B^2)} \omega \frac{df}{dt}. \quad (4.66)$$

Insbesondere Gl. (4.66) zeigt, dass im Rahmen der Darstellung der Wechselstromrechnung nach Mathis und Marten die komplexen Zahlen zur Darstellung von Differentialoperatoren dienen, wobei komplexe Äquivalente für die Funktionen f und die Lösungen x überflüssig sind.

Soll der Einfluss auf die Anregungsfunktion f mit dem AC-Kalkül ermittelt werden, ist die Darstellung der Lösung in Gl. (4.66) ungünstig, da sie i. a. eine Superposition aus Sinus- und Kosinustermen enthält. Häufig ist man daran interessiert, die durch ein Netzwerk oder System verursachte Amplituden- und Phasenänderung zu berechnen. Für eine direkte Bestimmung dieser Größen ist es zweckmäßig, die Basis c_φ zu verwenden, um umständliche Umformungen zu vermeiden.

Man geht von der Darstellung der Lösung in (4.65) aus und stellt die sinusförmige Anregungsfunktion f bezüglich c_φ dar, wobei zweckmäßigerweise der Winkel φ entsprechend f gewählt wird, d. h. es gilt $f = \hat{f} c_\varphi$, wobei \hat{f} die Amplitude ist. Weiterhin stellt man auch die ebenfalls sinusförmige Lösung x bezüglich c_φ dar, wobei die unbekannte Amplitude \hat{x} und der unbekannte (zusätzliche) Winkel φ_x auftritt, d. h. es gilt $x = \hat{x} c_{\varphi+\varphi_x}$. Der Faktor $1/(A + jB)$ charakterisiert den Systemoperator, der auf die Anregungsfunktion wirkt. Um die sich daraus ergebende Amplituden- und Phasenänderung zu bestimmen, bildet man Betrag und Phase von $(A + jB)$ und erhält $\sqrt{A^2 + B^2}$ bzw. $\arctan(B/A)$. Die Amplituden- und Phasenänderung bezüglich c_φ und damit \hat{x} und φ_x erhält man dann unter Berücksichtigung der Inversenbildung

$$x = \frac{\hat{f}}{\sqrt{A^2 + B^2}} e^{(\varphi - \arctan(B/A))}. \quad (4.67)$$

Die Übertragungsfunktion in Gl. (4.65) kann als rationale Funktion $H(j\omega)$ in $j\omega$ dargestellt werden. Die in Abschnitt 4.2 eingeführte Übertragungsfunktion $H(s)$ kann durch analytische Fortsetzung von $H(j\omega)$ in die komplexe Ebene \mathbb{C} gewonnen werden (vgl. z. B. Jänich [132]). Auf verschiedene Darstellungen von Übertragungsfunktionen kommen wir noch einmal in Abschnitt 4.4 zurück.

Bisher haben wir den AC-Kalkül in allgemeiner Form formuliert, um damit eine sinusförmige Lösung von inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und sinusförmiger Anregung zu ermitteln.

Wir wollen im folgenden annehmen, dass es sich bei den betrachteten sinusförmigen Funktionen um Spannungen und Ströme handelt. Insbesondere seien u und i die sinusförmige Spannung bzw. der Strom eines Zweiges in einem Netzwerk, dann ist die zugeordnete *Wirkleistung* P in folgender Weise definiert ($T := 2\pi/\omega$)

$$P := \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt. \quad (4.68)$$

Die rechte Seite kann als inneres Produkt oder Skalarprodukt $(u|i)$ im Raum der sinusförmigen Funktionen \mathcal{F}_ω gedeutet werden. Die Basisfunktionen $c_0(t) = \cos \omega t$ und $s_0(t) = \sin \omega t$ sind bezüglich $(u|i)$ orthogonal, d. h. es gilt $(s_0|c_0) = 0$. Bildet man die inneren Produkte der Basisfunktionen untereinander, so ergeben sich die Beziehungen $(c_0|c_0) = 1/2$ und $(s_0|s_0) = 1/2$. Erst nach einer Multiplikation von c_0 und s_0 mit dem Faktor $\sqrt{2}$ erhält man *orthonormale* Basisfunktionen mit

$$(\sqrt{2}c_0|\sqrt{2}c_0) = 1, \quad (\sqrt{2}s_0|\sqrt{2}s_0) = 1; \quad (4.69)$$

das innere Produkt $(\sqrt{2}c_0|\sqrt{2}s_0)$ verschwindet ebenfalls.

Es fragt sich nun, ob und in welcher Weise sich dieses innere Produkt $(u|i)$ verändert, wenn man die neue skalare Multiplikation \odot in \mathcal{F}_ω einführt. In einem komplexen Vektorraum muss ein inneres Produkt $\langle u|i \rangle$ Hermitesch sein; siehe z. B. Alt [4]). Ein solches inneres Produkt ist nicht mehr symmetrisch bezüglich der Vertauschung von u und i ; vielmehr gilt $\langle u|i \rangle = \langle i|u \rangle^*$. Weiterhin ist ein solches inneres Produkt $\langle |\rangle$ entweder bezüglich des ersten oder zweiten Arguments linear, d. h. gelten für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Beziehungen $\langle \lambda u|i \rangle = \lambda \langle u|i \rangle$ und $\langle u|\lambda i \rangle = \lambda^* \langle u|i \rangle$ oder $\langle \lambda u|i \rangle = \lambda^* \langle u|i \rangle$ und $\langle u|\lambda i \rangle = \lambda \langle u|i \rangle$.

Mathis und Marten konnten zeigen [179], dass unter der Voraussetzung, dass der Realteil des Hermiteschen inneren Produkts $\langle u|i \rangle$ gleich dem reellen inneren Produkt $(u|i)$ ist, der zugehörige Imaginärteil bis auf das Vorzeichen¹⁰ eindeutig festgelegt ist. Man erhält

¹⁰ Das entspricht den beiden Möglichkeiten einer komplexen Struktur $\pm D_\omega$, welche offensichtlich die Beziehung $D_\omega^2 = -id_{\mathcal{F}_\omega}$ erfüllen.

$$\langle u|i \rangle := (u|i) \pm j(u|D_\omega(i)). \quad (4.70)$$

Die Eigenschaften dieses inneren Produkts werden klar, wenn man die möglichen Produkte der Basisfunktionen $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ berechnet.

Das Hermitesche innere Produkt $\langle u|i \rangle$ wird – nach Festlegung des Vorzeichens – *komplexe Leistung* und der Imaginärteil *Blindleistung* genannt; den Betrag $|\langle u|i \rangle|$ bezeichnet man als *Scheinleistung*. Eine interessante physikalische Interpretation dieser Leistungsgrößen findet man Desoer und Kuh ([63], S. 396ff), wobei auch das Weyl-Tellegen-Theorem verwendet wird.

Wir nehmen nun an, dass u und i bezüglich einer willkürlich ausgewählten Basisfunktion $e \in \mathcal{F}_\omega$ (mit $\langle e|e \rangle = 1$) durch komplexe Zahlen U und I dargestellt werden, d. h. es gilt $u := U \odot e$ und $i := I \odot e$. Dann kann mit den Rechenregeln des Hermiteschen Skalarprodukts nachrechnen, dass sich die komplexe Leistung $\langle u|i \rangle$ in Bezug auf e durch das Produkt UI^* darstellen lässt. $\langle u|i \rangle$ ist nämlich linear bezüglich u , so dass der Koeffizient I konjugiert komplex aus $\langle u|i \rangle$ herausgezogen wird.

Eine Beispielrechnung mit dem AC-Kalkül findet man am Ende dieses Unterabschnitts. Wir weisen jedoch darauf hin, dass man weitere mit dem AC-Kalkül durchgerechnete Beispiele in [179] und auf den Internetseiten des vorliegenden Buches (vgl. Vorwort) findet.

Nach der Darstellung des AC-Kalküls soll noch kurz skizziert werden, wie die Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly – die Methode der komplexen Amplitude – eingeführt wird; vgl. z. B. Bosse III [38]. Dabei geht man von einer allgemeinen sinusförmigen Größe in folgender Form aus

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.71)$$

wobei \hat{x} der Scheitelwert und φ der Phasenwinkel ist, und ergänzt x im Sinne der Eulerschen Formel $\exp z = \cos z + j \sin z$ mit einem Imaginärteil

$$\tilde{x}(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) + j \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (4.72)$$

Zerlegt man $\exp(j(\omega t + \varphi))$ in ein Produkt, dann ist \tilde{x} vollständig durch den zeitunabhängigen Teil $X := \hat{x} \exp(j\varphi)$ – die *komplexe Amplitude* – festgelegt¹¹.

Diese komplexe Amplitude ergibt sich übrigens im AC-Kalkül, indem man Spannungen und Ströme der Form $\hat{x} c_\varphi(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$ bezüglich der Basisfunktion $c_0(t) = \cos \omega t$ darstellt. Man erhält dann

$$\hat{x} c_\varphi = (\hat{x} e^{j\varphi}) \odot c_0. \quad (4.73)$$

Die Methode der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly geht von \tilde{x} nach Gl. (4.72) aus. Da der zeitabhängige Anteil $\exp(j\omega t)$ für alle komplex erweiterten sinusförmigen Zeitfunktionen mit derselben Frequenz ω identisch ist, was bei linearen Netzwerken mit konstanten Netzwerkparametern –

¹¹ In vielen Darstellungen der Wechselstromrechnung werden die komplexen Größen nicht mit dem Scheitelwert sondern mit dem Effektivwert definiert.

LTI-Systeme nach Abschnitt 2 – immer der Fall ist, da nur Additionen, skalare Multiplikationen, Zeitableitungen und Integrationen auftreten, braucht dieser zeitabhängige Faktor bei der Durchführung der Rechnungen nicht beachtet werden. Man arbeitet also zunächst mit der komplexen Amplitude X und erst wenn man auf reelle Zeitfunktionen übergehen will, wird der Faktor $\exp(j\omega t)$ wieder hinzugefügt und der Imaginärteil abgetrennt. Diese Vorgehensweise kann zwar hinsichtlich der rechentechnischen Grundidee durchaus in heuristischer Weise gegeben werden (z. B. Bosse [38]), aber bei einer Rekonstruktion der mathematischen Struktur würden unnötige Komplikationen auftreten (z. B. eine Komplexifizierung aller Größen; siehe Arnold [6]), die bei der Darstellung nach Mathis und Marten vermieden werden. Mit Ausnahme der bereits erwähnten Arbeit von Quade [233] wird in der Literatur kein Versuch unternommen, eine solche Begründung zu liefern.

Der eigentliche Vorteil der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly, nämlich die algebraische Durchführung von Zeitableitungen und Integrationen nach der Zeit, wird in klassischen Darstellungen wie folgt präsentiert. Bildet man die Zeitableitung von \tilde{x} und trennt wiederum den zeitabhängigen Anteil $\exp(j\omega t)$ ab, dann kann diese Ableitung von \tilde{x} auch durch Multiplikation des zeitunabhängigen Teils X von \tilde{x} mit $j\omega$ in der Form

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \frac{d(\hat{x}e^{j(\omega t+\varphi)})}{dt} \rightarrow j\omega (\hat{x}e^{j\varphi}) = j\omega X \quad (4.74)$$

dargestellt werden. Die zeitliche Integration von \tilde{x} lässt in analoger Weise durchführen und führt auf die Multiplikation mit $1/(j\omega)$. Auch bei der Darstellung der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly wird also die Ableitung (bis auf ω) durch eine Multiplikation mit j repräsentiert, aber gleichzeitig müssen *alle* Zeitfunktionen durch eine komplexe Größe ersetzt werden. Somit wird der eigentliche Grund für die Einführung komplexer Zahlen in die Wechselstromrechnung, nämlich eine alternative algebraische Behandlung von Differential- und Integraloperatoren in der Menge der sinusförmigen Zeitfunktionen zu gestatten, eher verdeckt als explizit herausgearbeitet. Beide Darstellungen der Wechselstromrechnung führen zu den gleichen Ergebnissen.

Bei der praktischen Anwendung des AC-Kalküls geht man nicht so vor, dass man zunächst die Differentialgleichungen zur mathematischen Beschreibung einer Schaltung aufstellt und sie danach in den AC-Kalkül übersetzt. Vielmehr werden lediglich Differentialgleichungen zur Modellierung von Kondensatoren und Spulen in den AC-Kalkül übersetzt. Man erhält dann wiederum Spannungs-Strom-Relationen, die jedoch mit der komplexen Größe $j\omega$ formuliert werden. Daher spricht man dann nicht mehr von Widerständen oder Leitwerten sondern von *Impedanzen* und *Admittanzen*. Die beiden Größen sind wie Widerstand und Leitwert Kehrwerte voneinander.

Aus der konstitutiven Differentialgleichung für die Kapazität

$$C \frac{du}{dt} = i \quad (4.75)$$

erhält man mit dem AC-Kalkül die Gleichung $j\omega C \odot u = i$ mit der Admittanz $Y_C(j\omega) := j\omega C$ für die Kapazität. Deren Kehrwert $1/Y_C$ ist die Impedanz Z_C mit $u = Z_C \odot i$ ist. Man erhält damit eine *verallgemeinertes Ohmsches Gesetz* für Kapazitäten.

In entsprechender Weise kann mit dem AC-Kalkül

$$L \frac{di}{dt} = u \quad (4.76)$$

in die Beziehung $j\omega L \odot i = u$ übersetzen. Die Größe $Z_L(j\omega) := j\omega L$ kann dann als Impedanz der Induktivität bzw. deren Kehrwert als Admittanz der Induktivität definiert werden. Mit Z_L kann ebenfalls ein *verallgemeinertes Ohmsches Gesetz* für Induktivitäten formuliert werden.

Nutzt man Impedanzen und Admittanzen im Rahmen des AC-Kalküls, dann kann man die grundlegenden Verfahren für die Netzwerkanalyseverfahren von Gleichstromschaltungen, wie sie in Abschnitt 4.1 diskutiert wurden, ohne Probleme auf Wechselstromschaltungen übertragen. Anstatt der reellen Widerstände erscheinen dann in der Leitwertmatrix \mathbf{Y} bzw. der Widerstandsmatrix \mathbf{Z} Admittanzen und Impedanzen. An der Form der Gleichungen ändert sich nichts, was anhand der Analyse eines komplexen Spannungsteilers illustriert werden soll.

Beispiel: Für den in Abb. 4.5 abgebildeten Spannungsteiler aus den Impedanzen Z_1 und Z_2 soll die Beziehung $u = H(j\omega) \odot u_0$ ermittelt werden.

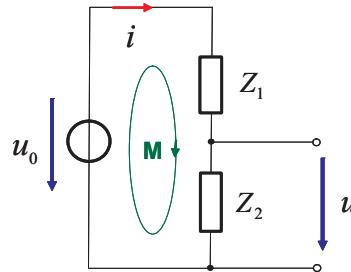


Abbildung 4.5. Komplexer Spannungsteiler

Wie bei einem Spannungsteiler aus Ohmschen Widerständen verwendet man die Maschensumme der Masche M , d. h.

$$-u_0 + Z_1(j\omega) \odot i + Z_2(j\omega) \odot i = 0 \quad (4.77)$$

und die Impedanzbeziehung $u = Z_2(j\omega) \odot i$ und erhält nach Elimination von i und kurzer Rechnung die gewünschte Beziehung

$$u = H(j\omega) \odot u_0 = \frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} \odot u_0. \quad (4.78)$$

Nach Zerlegung des komplexen Übertragungsfaktors $H(j\omega)$ in Real- und Imaginärteil kann man die Zeitfunktion $u(t)$ mit Hilfe der Definition von \odot in (4.55) explizit darstellen.

Noch weniger systematisch als die Rechenmethoden zur Lösung von Wechselstromaufgaben werden in der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly die verschiedenen, obengenannten Leistungsgrößen begründet. Wir wollen an dieser Stelle auf eine ausführliche Darstellung verzichten und diesbezüglich auf die Literatur verweisen (z. B. Bosse [38]). Grundsätzlich ergibt sich folgendes: Sind \hat{u} und \hat{i} die komplexen und zeitunabhängigen Anteile der komplexe erweiterten Zeitfunktionen $\tilde{u}(t)$ und $\tilde{i}(t)$, dann entspricht die komplexe Leistung P dem folgenden Produkt

$$S = P + jQ = \frac{1}{2} \hat{u} \hat{i}^*. \quad (4.79)$$

Den Faktor $1/2$ kann man eliminieren, indem man durch Multiplikation von \hat{u} und \hat{i} mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$ auf Effektivwerte anstatt der Scheitelwerte übergeht; vgl. (4.69) beim AC-Kalkül.

Weiter oben haben wir bei der Einführung der komplexen Leistung im AC-Kalkül mit Hilfe eines Hermiteschen inneren Produkts bereits eine Begründung dafür geliefert, weshalb die komplexe Leistung in der klassischen Darstellung der Wechselstromrechnung als Produkt UI^* eingeführt werden muss. In der Literatur findet man dazu meistens umständliche, manchmal sogar undurchsichtige Diskussionen, auf deren Wiedergabe oder Kritik hier verzichtet werden soll.

Beispiel: Zur Illustration des AC-Kalküls betrachten wir nun das in Abb. 4.6 gezeigte RCL-Netzwerk mit sinusförmigen Spannungsquellen $u_{01} = \hat{u}_c c_0$ und $u_{02} = \hat{u}_c c_{-\pi/4}$. Es soll der Strom i im Querzweig und die Leistungen im Widerstand R und in der Kapazität C ermittelt werden. Wir verwenden das oben erwähnte Impedanz-Admittanz-Konzept, so dass die Relationen für die Impedanzen der Induktivitäten L_1 und L_2 und der Kapazität C wie folgt notiert werden können

$$j\omega L_1 \odot i_1 = u_{L_1}, \quad j\omega L_2 \odot i_2 = u_{L_2}, \quad \frac{1}{j\omega C} \odot u_C = i. \quad (4.80)$$

Die Maschengleichungen für die linke und rechte Masche ergeben sich zu

$$\omega L_1 j \odot i_1 = u_{01} - u_C - Ri, \quad (4.81)$$

$$\omega L_2 j \odot i_2 = u_{02} - u_C - Ri. \quad (4.82)$$

Des Weiteren können wir die folgende Knotengleichung notieren

$$i = i_1 + i_2. \quad (4.83)$$

Wir weisen noch einmal darauf hin, dass alle Ströme und Spannungen im Gegensatz zur klassischen Darstellung der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly reellwertige Funktionen sind und nur die Differentialoperatoren in komplexer Form repräsentiert werden. Wenn man die beiden Gln.

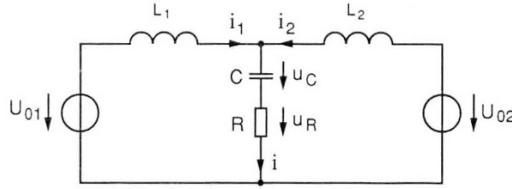


Abbildung 4.6. RCL-Netzwerk zur Illustration des AC-Kalküls

(4.81) und (4.82) addiert und Gl. (4.83) nutzt, dann lassen sich die Ströme i_1 und i_2 durch den Strom i ersetzen, wenn man sich auf den Fall $L := L_1 = L_2$ beschränkt. Verwendet man weiterhin die Relation $j\omega C \odot u_C = i$, erhält man nach einer Umformung die Gleichung

$$\left(R + j \left(-\frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L}{2} \right) \right) \odot i = \frac{1}{2} (u_{01} + u_{02}), \quad (4.84)$$

die anschließend nach dem Strom $i(t)$ aufgelöst werden kann

$$i = \frac{1}{2} \frac{R - j \left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \odot (u_{01} + u_{02}). \quad (4.85)$$

Der komplexe skalare Faktor zeigt nun an, wie sich die sinusförmige Funktion $u_{01} + u_{02}$ in Bezug auf die „Ausgangsgröße“ i nach Betrag und Phase ändert, wobei an dieser Stelle noch nicht festgelegt werden muss, auf welche Basisfunktion u_{01} und u_{02} bezogen werden. Im Gegensatz dazu beziehen sich die Rechnungen in der klassischen Darstellung der Wechselstromrechnung nach Konstruktion grundsätzlich auf $\cos \omega t$, während man im AC-Kalkül die Möglichkeit hat, die Eigenschaften des Netzwerkes auf irgendeine Funktion aus \mathcal{F}_ω zu beziehen. Vom Standpunkt der linearen Algebra muss man in dem 1-dimensionalen komplexen Vektorraum \mathcal{F}_ω einen *problemangepassten* Basisvektor auswählen. Dieser Schritt ist immer dann erforderlich, wenn man in Vektorräumen arbeitet (lineare Algebra, lineare gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, usw.), da keine *ausgezeichnete Basis* existiert. Eine sinnvolle Basisauswahl kann erst in Bezug auf eine konkrete Problemstellung erfolgen. Das ist zumindest vom Standpunkt der Systemtheorie ein sinnvoller Standpunkt, aber der neue Freiheitsgrad bietet auch für die praktische Rechnung Vorteile.

Um die klassische Darstellung der Wechselstromrechnung zu rekonstruieren, beziehen wir in diesem Beispiel die Spannungsquellen u_{01} und u_{02} auf $c_0(t) = \cos \omega t \in \mathcal{F}_\omega$ und erhalten wir mit Gl. (4.73)

$$u_{01} = \hat{u} c_0, \quad u_{02} = \hat{u} c_{-\pi/4} = \hat{u} e^{-j\pi/4} \odot c_0 = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} (1 - j) \odot c_0. \quad (4.86)$$

Daraus ergibt sich die Summe

$$u_{01} + u_{02} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \left((\sqrt{2} + 1) - j \right) \odot c_0. \quad (4.87)$$

Zusammen mit Gl. (4.85) kann man nun einen komplexen Faktor definieren, der die Übertragungseigenschaften des RLC-Netzwerkes und die spezielle Wahl der Basis in \mathcal{F}_ω zusammenfasst

$$i = \frac{\hat{u}}{2\sqrt{2}} \frac{R - j \left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{\omega C} \right) ((\sqrt{2} + 1) - j)}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \odot c_0 =: I(j\omega) \odot c_0. \quad (4.88)$$

Die explizite Darstellung von $i(t)$ kann mit Hilfe des komplexen Vorfaktors $I(j\omega)$ durch Betrags- und Phasenbildung ermittelt werden. Es ergibt sich

$$i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad (4.89)$$

mit

$$\hat{i}(\omega) = |I(j\omega)| = \hat{u} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4R^2 + \left(\frac{2}{\omega C} - \omega L \right)^2}}, \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arctan \frac{\Im\{I(j\omega)\}}{\Re\{I(j\omega)\}} \\ &= -\arctan \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right) - \arctan \left(\frac{\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Die Spannungen über dem Widerstand und über der Kapazität können mit Hilfe von $i(t)$ ermittelt werden zu

$$u_R = Ri = R \cdot I(j\omega) \odot c_0, \quad (4.92)$$

$$u_C = -\frac{1}{\omega C} j \odot i = -\frac{jI(j\omega)}{\omega C} \odot c_0. \quad (4.93)$$

Zur Berechnung der komplexen Leistungen des Widerstandes und der Kapazität sind die Hermiteschen inneren Produkte $\langle u_R | i \rangle$ und $\langle u_C | i \rangle$ auszuwerten, wobei $\langle c_0 | c_0 \rangle = 1/2$ zu berücksichtigen ist. Für die komplexe Leistung des Widerstandes ergibt sich

$$\begin{aligned} S_R &= \langle u_R | i \rangle = \langle RI(j\omega) \odot c_0 | I(j\omega) \odot c_0 \rangle \\ &= RI(j\omega)I^*(j\omega)\langle c_0 | c_0 \rangle = \frac{R}{2}|I(j\omega)|^2, \end{aligned} \quad (4.94)$$

während man für die komplexe Leistung der Kapazität

$$\begin{aligned} S_C &= \langle u_C | i \rangle = \left\langle -\frac{1}{\omega C} jI(j\omega) \odot c_0 | I(j\omega) \odot c_0 \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\omega C} jI(j\omega)I^*(j\omega)\langle c_0 | c_0 \rangle = -j\frac{1}{2\omega C}|I(j\omega)|^2 \end{aligned} \quad (4.95)$$

erhält. Die entsprechenden Wirkleistungen bzw. Blindleistungen ergeben sich durch Bildung des Real- bzw. Imaginärteilebildung. Man erhält

$$P_R = \frac{R}{2} |I(j\omega)|^2, \quad P_C = 0, \quad (4.96)$$

bzw.

$$Q_R = 0, \quad Q_C = -\frac{1}{2\omega C} |I(j\omega)|^2. \quad (4.97)$$

Die 90° -Phasenverschiebung von Strom und Spannung an einer Kapazität führt dazu, dass diese Größen bezüglich des (reellen) inneren Produkts ($u|i$) orthogonal sind und damit die Wirkleistung der Kapazität gleich null ist.

Trotz der ohne weiteres erkennbaren begrifflichen Vorteile des AC-Kalküls werden wir in den folgenden Abschnitten des Buches und damit auch bei den in Abschnitt 5 behandelten Beispielen zur Wechselstromrechnung fast ausschließlich die Darstellung nach Steinmetz und Kennelly verwenden.

Mit dem AC-Kalkül wurde eine neue Methode zur Analyse von Wechselstromnetzwerken ausführlich vorgestellt, die mit Hilfe einiger Kenntnisse aus der linearen Algebra in systematischer Weise entwickelt und angewendet werden kann. Damit erfüllt diese Methode alle Bedingungen, die Quade von Lösungsverfahren für beschreibende Differentialgleichungen von Wechselstromnetzwerken schon vor vielen Jahren gefordert hat. Weiterhin wurde gezeigt, wie sich die Methode der komplexen Amplituden – die Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Heaviside – in das Konzept des AC-Kalküls einordnet, so dass sich auch ein grundlegendes Verständnis für das klassische Konzept eröffnet. Im folgenden Abschnitt 4.4 wird gezeigt, dass wichtige Techniken der klassischen Wechselstromrechnung – wie Zeigerdiagramme und Ortskurven – im Rahmen des AC-Kalküls ihren Wert zumindest behalten. Da sich jedoch die zu berechnenden komplexen Größen $H(j\omega)$, $Z(j\omega)$, $Y(j\omega)$ usw. auf das Übertragungsverhalten eines Netzwerkes oder Systems beziehen und die Größen im Sinne \odot -Produkts direkt auf Zeitfunktionen wirken, wird ihre Bedeutung noch klarer herausgearbeitet. Das ist aus unserer Sicht ein durchaus interessanter Gesichtspunkt, der ebenfalls begriffliche Vorteile bringt.

4.4 Darstellungen von Übertragungsfunktionen

Bei den bereits erwähnten Übertragungsfunktionen $H(j\omega)$ handelt es sich um Abbildungen der Form $H : j\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $H : j\omega \mapsto H(j\omega)$. Da es sich um gebrochen rationale Funktionen in $j\omega$ handelt, kann man $H(j\omega)$ unter Berücksichtigung der Pole in die *geschlossene* komplexe Ebene $\overline{\mathbb{C}}$ fortzusetzen und man erhält eine komplexwertige Funktion $H : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ($\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) mit $H : s \mapsto H(s)$, deren Funktion mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet wird; vgl. z. B. Behnke und Sommer [22]. Benutzt man die Laplace-Transformation

zur Lösung der Beschreibungsgleichungen elektrischer Netzwerke, wird $H(s)$ direkt ermittelt; vgl. z. B. Wunsch [308].

Für graphische Darstellungen von $H(s)$ ist offensichtlich eine Dimensionsreduktion um mindestens eine Dimension notwendig. Im Rahmen der komplexen Wechselstromrechnung hatte man das schon früh erkannt und sogenannte *Ortskurven* eingeführt. Bei dieser Art der graphischen Darstellung von Übertragungsfunktionen $H(j\omega)$ beschränkt man sich auf die Abbildung der imaginären Achse $j\mathbb{R}$ in \mathbb{C} . Das Bild ist natürlich ebenfalls eine Kurve in \mathbb{C} . Da der Definitionsbereich der Funktionen $H(j\omega)$ klar ist, kann man auf seine graphische Darstellung verzichten und stellt nur die mit der Frequenz bezifferten Kurven in der komplexen Ebene \mathbb{C} dar. Auf einige wichtige Aspekte solcher Ortskurven soll im folgenden eingegangen werden.

In Verallgemeinerung dazu kann man auch weitere Abhängigkeiten einer Wechselstromgröße von einer reellen Veränderlichen – Widerstand R , Kapazität C , etc. – als *Ortskurve* dargestellt werden. Eine Ortskurve gibt den geometrischen Ort der Zahlen – im folgenden auch Zeiger genannt – in der komplexen Ebene an. Insbesondere kann man auch $j\omega$ als komplexen (imaginären) Parameter wählen.

Die Impedanz einer Kapazität – ein Modell für einen Kondensator mit sehr kleinen Verlusten – wurde bereits weiter oben in der Form

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \quad (4.98)$$

angegeben. Diese Impedanz lässt sich für eine feste Frequenz ω in der komple-

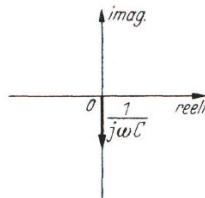


Abbildung 4.7. Ortskurve der Impedanz einer Kapazität

xen Z-Ebene durch einen Zeiger darstellen, der auf der negativen imaginären Achse liegt, Abb. 4.7, und die Länge $1/\omega C$ hat. Beim Verändern der Frequenz oder des Kapazitätswertes wandert die Spitze des Zeigers auf dieser Achse, so dass die imaginäre Achse die Ortskurve für die Impedanz der Kapazität bildet. Die Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität, die zur Modellierung eines verlustbehafteten Kondensators verwendet werden kann, besitzt die Impedanz

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}. \quad (4.99)$$

Die Ortskurve bezüglich der variablen Frequenz ω ist eine Parallele zur imaginären Achse, Abb. 4.8, mit dem Abstand R . Auf dieser Linie kann eine Skala der Frequenzen angebracht werden, welche man auch *Bezifferung* nennt.

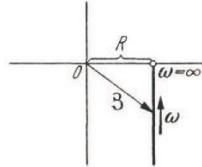


Abbildung 4.8. Ortskurve der Impedanz einer Kapazität mit Reihenwiderstand

Aus der Impedanz ergibt sich die Admittanz

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}. \quad (4.100)$$

Zerlegt man Z in Betrag und Phase

$$Z(j\omega) = r(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (4.101)$$

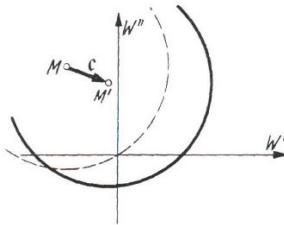
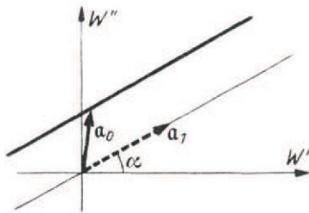
so erkennt man, dass

$$Y(j\omega) = \frac{1}{r(\omega)}e^{-j\varphi(\omega)} = r'(\omega)e^{j\varphi'(\omega)}; \quad (4.102)$$

Länge und Phase des zugehörigen Zeigers ergeben sich also aus

$$r'(\omega) = \frac{1}{r(\omega)}, ; \quad \varphi'(\omega) = -\varphi(\omega). \quad (4.103)$$

Sollen Admittanz und Impedanz in das gleiche Bild eingezzeichnet werden, so kann man die Richtung der imaginären Achse für die Admittanzen umkehren. Dann bleibt beim Übergang von der Impedanz zur Admittanz der Winkel gegen die reelle Achse der gleiche, und es ändert sich lediglich die Länge des Zeigers entsprechend dem Kehrwert. Man nennt die Bildung des Admittanzzeigers aus dem Impedanzzeiger in dieser Form auch *Spiegelung am Einheitskreis* oder *Inversion*. Beim Rechnen mit Ortskurven ist nun der Satz wichtig, dass durch Spiegelung eines Kreises wieder ein Kreis entsteht. Auf eine Ableitung dieses Satzes soll hier verzichtet werden. Wir verweisen den interessierten Leser stattdessen auf die mathematische Literatur über komplexwertiger Funktionen, die auch auch Funktionentheorie genannt wird, und die dort behandelten *Möbiustransformationen*; vgl. z. B. Jänich [132], Henrici [115], Behnke und Sommer [22], Jänich [132]. Wie dort gezeigt wird, bildet jede Möbiustransformation eine in der komplexen Ebene liegende Kreislinie wie in Abb. 4.9 wieder auf einen solche Kreislinie ab. Dabei werden Geraden wie in Abb. 4.10 als Kreislinien mit unendlichem Radius interpretiert.

Abbildung 4.9. Allgemeiner Kreis in \mathbb{C} Abbildung 4.10. Allgemeine Gerade in \mathbb{C}

Die Elemente einer (gleichfalls dort beschriebenen, für die Anwendungen in der Netzwerktheorie und der Theorie ebener Felder) wichtigen Klasse von Möbiustransformationen lassen sich außerdem als Drehungen der *Riemannschen Zahlenkugel* interpretieren. Eines dieser Beispiele ist die für die Ortskurventheorie wichtige Inversion, d.h. die durch die Zuordnung $z \mapsto 1/z$ mit $z \in C$ ($z \neq 0$), $0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 0$ definierte bijektive Abbildung der geschlossenen komplexen Ebene in sich. Zur Veranschaulichung ihrer Eigenschaften ist es zweckmäßig, die komplexe Ebene mit der auf den „Nordpol“ der Riemannschen Zahlenkugel bezogenen *stereographischen Projektion* auf die Oberfläche der Riemannsche Zahlenkugel abzubilden. Dabei werden Kreislinien aus der Zahlenebene auf geschlossene Kurven abgebildet, die auf der Zahlenkugel liegen. Danach wird die Zahlenkugel um eine Achse, die durch ihren Mittelpunkt geht, parallel zur reellen Achse der komplexen Ebene gerichtet ist und gleichgerichtet zur reellen Achse der Zahlenebene orientiert ist, im Rechtsschraubensinn um 180° gedreht. Dabei werden „Nordpol“ und „Südpol“ der Zahlenkugel miteinander vertauscht und die Oberfläche der Zahlenkugel von dem „neuen Nordpol“ mit der stereographischen Projektion auf die Zahlenebene abgebildet.

Beispiele: 1. Die in Abb. 4.11 dargestellten Ortskurven für veränderliche Kreisfrequenz ω können aufgrund einer einfachen Netzwerkanalyse und teilweise sogar mit Hilfe graphischer Methoden der Funktionentheorie – also ohne Rechnung – ermittelt werden.

2. Es werde die Parallelschaltung von Widerstand R mit Kapazität C und Induktivität L betrachtet. Die Admittanz dieses Schwingkreises ist

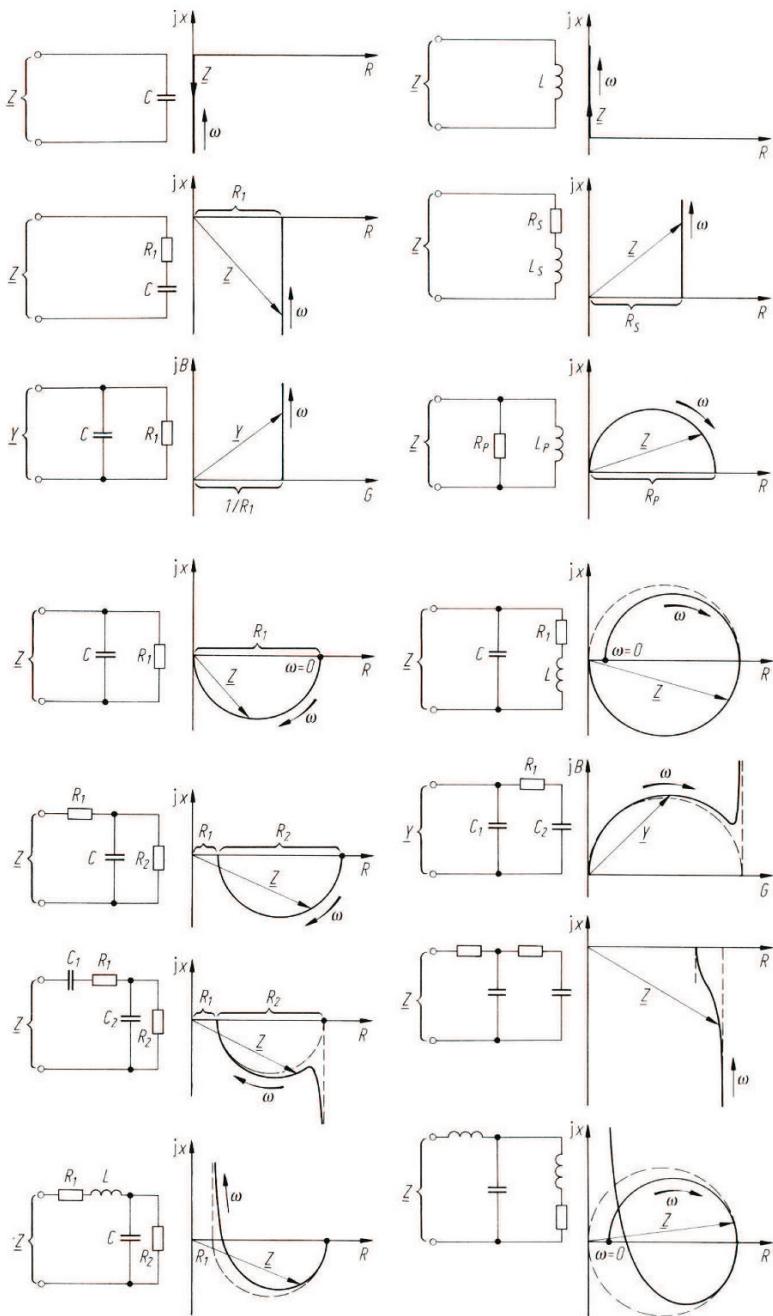


Abbildung 4.11. Beispiele von Ortskurven

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}. \quad (4.104)$$

Bei Änderung der Frequenz ergibt sich als Ortskurve eine Gerade mit dem

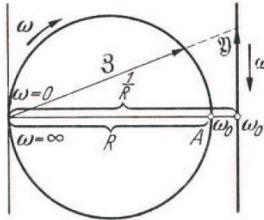


Abbildung 4.12. Ortskurve der Impedanz eines Schwingkreises

Abstand $1/R$ von der imaginären Achse, Abb. 4.12 Die Frequenzen können auf dieser Ortskurve angegeben werden. Die Impedanz Z entsteht hieraus durch Spiegelung; seine Ortskurve ist nach dem obengenannten Satz ein Kreis, der durch den Nullpunkt geht und dessen Durchmesser R ist. Im Punkt A hat die Impedanz seinen Maximalwert R (Resonanz). Die zugehörige Frequenz ist die Resonanzfrequenz ω , für die $\omega C = 1/\omega L$ ist.

3. In Abb. 4.13 seien L_1, L_2, L_3 und die sinusförmige Spannungsquelle u_0 mit Frequenz ω bekannt. Gesucht ist die Admittanz Y mit $i = Y \odot u_0$, wobei i der Strom durch den veränderlichen Widerstand R ist. Die Rechnung ergibt

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega L_3}{j\omega(L_1 + L_3)R - \omega^2(L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3)}. \quad (4.105)$$

Wir beziehen nun i und u_0 auf $c_0(t) = \cos \omega t$, d. h. es gilt $i = \Im \odot c_0$ und $u_0 = U_0 \odot c_0$, wobei U_0 der Effektivwert der sinusförmigen Spannung u_0 ist. Dann erhält man $i = \Im \odot c_0 = Y \odot u_0 = Y U_0 \odot c_0$ oder $\Im(j\omega) = Y(j\omega) U_0$.

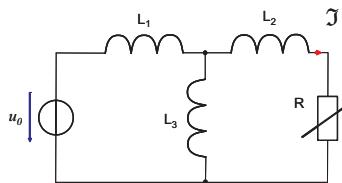
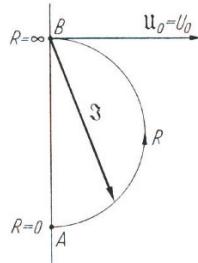


Abbildung 4.13. Netzwerk mit einer kreisförmigen Ortskurve

\Im ist nach Gl. (4.105) in Bezug auf den Widerstand R eine lineare gebrochene Funktion in der Form

$$\mathcal{W} = \frac{1}{a_0 + a_1 f(x)} + c, \quad (4.106)$$

Abbildung 4.14. Ortskurve für den Strom \mathfrak{J} bei variablem R

oder

$$\mathcal{W} = \frac{b_0 + b_1 f(x)}{a_0 + a_1 f(x)}. \quad (4.107)$$

Die Ortskurve von $\mathfrak{J}(R)$ für veränderliches R ist daher immer ein Kreis. Legt man U_0 in die reelle Achse, so ergibt sich die Abb. 4.14. Der Kreis wird leicht gefunden, wenn man zunächst die Punkte A und B für $R = 0$ und $R = \infty$ einzeichnet und beachtet, dass \mathfrak{J} – nach einer kleinen Umformung – die Form $b/(R + ja)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt. Die Ortskurve für $R + ja$ ist bei variablem R eine waagrechte Gerade im Abstand a von der reellen Achse. Der Kehrwert ist daher ein Halbkreis über der Strecke \overline{AB} .

4. Die Impedanz $Z_1(j\omega)$ mit $u_1 = Z_1 \odot i_1$ einer Induktionsmaschine nach Abb. 4.15 kann bestimmt werden zu

$$Z_1(j\omega) = R_1 + j\omega L_{\sigma 1} + \frac{j\omega L_{h1} \left(j\omega \ddot{u}^2 L_{\sigma 2} + \frac{\ddot{u}^2 R_2}{s} \right)}{j\omega (L_{h1} + \ddot{u}^2 L_{\sigma 2}) + \frac{\ddot{u}^2 R_2}{s}}, \quad (4.108)$$

wobei \ddot{u} das Übersetzungsverhältnis ist.

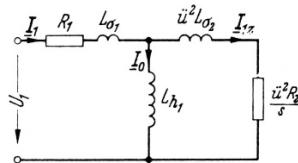


Abbildung 4.15. Ersatzbild der Induktionsmaschine

Man kann zeigen, dass die Ortskurve der Impedanz Z_1 bei variablem *Schlupf* s ein Kreis ist. Die Ortskurve für Y_1 und damit für den Ständerstrom I_1 bei konstanter sinusförmiger Ständerspannung ist das Spiegelbild davon, also ebenfalls ein Kreis. So ergibt sich die Ortskurve – das *Kreisdiagramm* – der Induktionsmaschine; vgl. auch Abschnitt 29.4.5.

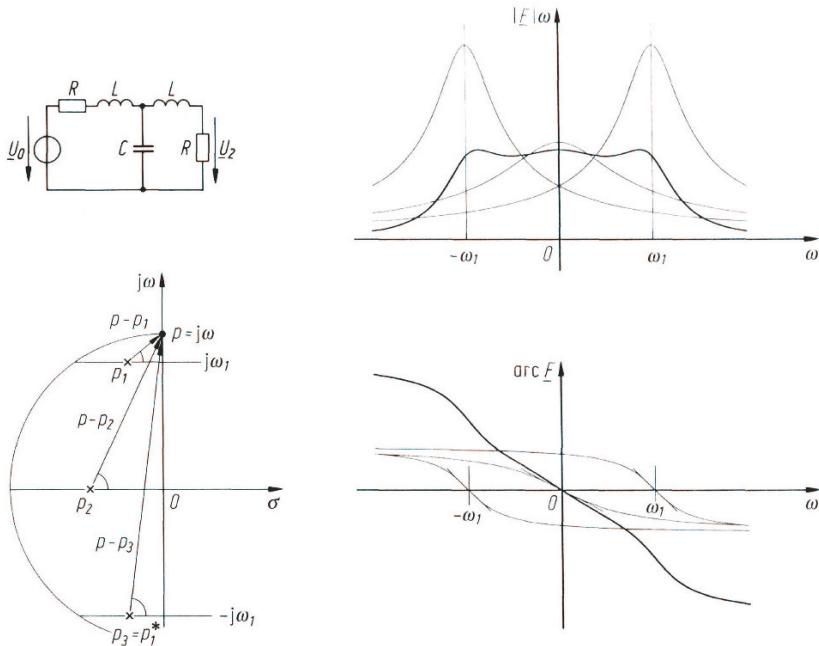


Abbildung 4.16. Bodediagramm eines Tiefpasses

Eine weitere wichtige Darstellungsform komplexer Übertragungsfunktionen $H(j\omega)$ ist das sogenannte *Bodediagramm*, bei dem Betrag $|H(j\omega)|$ und Phase $\arg(H(j\omega))$ von $H(j\omega)$ über der Frequenz ω mit logarithmischem Maßstab aufgetragen werden. Beispielhaft wird in Abbildung 4.16 das Bodediagramm der Übertragungsfunktion des dort abgebildeten Tiefpasses gezeigt.

Schließlich soll auch noch auf die *Betragssfläche* von $|H(s)|$ hingewiesen werden, wobei s die *komplexe Frequenz* ist. Die Betragssfläche kann qualitativ sehr einfach konstruiert werden, wenn man die Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion kennt. Mit Hilfe der Vorstellung eines „Gummituches“¹² erhält man eine qualitative Vorstellung von der zugehörigen Betragssfläche $|H(s)|$, wenn man die Pole und Nullstellen von H in \mathbb{C} kennt und das „Gummituch“ an den Nullstellen auf der \mathbb{C} -Ebene „festheftet“ und an den Polstellen an sehr hohen Masten befestigt.

Kennt man die Betragssfläche, so kann man qualitativ auf den Betrag einer Übertragungsfunktion schließen. In Abbildung 4.17 wird die Betragssfläche der Übertragungsfunktion

¹² Diese sehr suggestive Vorstellung über Betragssflächen wurde von Eduard Schwarz – Professor an der TU Braunschweig bis zu seinem frühen Tod 1984 und Lehrer des Autors W.M. – gebraucht und soll hier auch zum Andenken an ihn wiedergegeben werden

$$H(s) = \frac{H_0}{1 + sT}, \quad H_0, T \in \mathbb{R}^+ \quad (4.109)$$

illustriert.

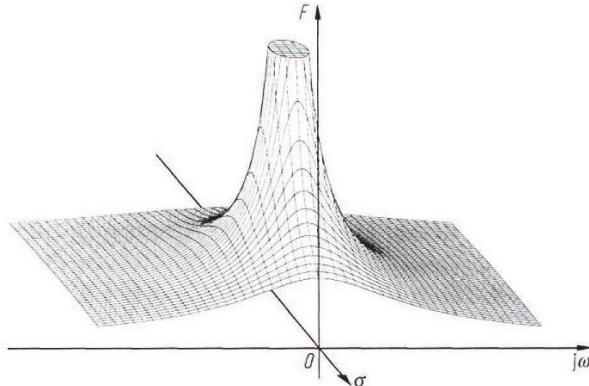


Abbildung 4.17. Betragsfläche einer Übertragungsfunktion mit einem reellen Pol

4.5 Zweitore und Vierpole

Unter einem „Zweitor“, in der älteren Literatur meistens als „Vierpol“ bezeichnet, versteht man ein Netzwerk, das zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen besitzt und zur Übertragung von Energie und/oder Signalen dient. Die Klemmenpaare werden jeweils durch hinein- und herausfließende Ströme und eine Spannung beschrieben. Die Torbedingung ist erfüllt, wenn die beiden Ströme eines Tores einander gleich sind. Bei „echten“ Vierpolen werden diese Einschränkungen nicht verlangt, so dass man Vierpole und Zweitore tatsächlich unterscheiden sollte. Die Bezeichnung „Vierpol“ stammt übrigens von Breisig. In seiner 1921 erschienenen Arbeit charakterisierte er erstmals bestimmte nachrichtentechnische Übertragungssysteme mit zwei Klemmenpaaren am Eingang und Ausgang in dieser Weise; vgl. Wunsch [309]. Kurze Zeit später benutzen Strecker und Feldtkeller [271] die damals noch neue Matrizenrechnung, um Vierpole (eigentlich Zweitore) mathematisch zu kennzeichnen und die Vierpolmatrizen verschiedener Zusammenschaltungen von Vierpolen wie bei Zweipolwiderständen mit Hilfe von Matrizenoperationen (z. B. Zurmühl, Falk [79]) zu ermitteln.

Will man besonders kennzeichnen, dass in einem Zweitor keine Energiequellen vorhanden sind, so spricht man von einem passiven Zweitor. Ist das Zweitor aus linearen Elementen aufgebaut, so nennt man es ein lineares Zweitor. Bei linearen Zweitoren gelten eine Reihe allgemeiner Beziehungen, die im

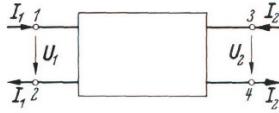


Abbildung 4.18. Bezeichnung von Spannungen und Strömen bei einem Zweitor

Rahmen der Zweitortheorie (früher: Vierpoltheorie) behandelt werden. Abb. 4.18 stelle ein beliebiges lineares Zweitor mit den Eingangsklemmen 1, 2 und den Ausgangsklemmen 3, 4 dar. Diese Klemmen stehen im Innern des Zweitors miteinander durch beliebige Anordnungen von linearen Elementen, z.B. Widerständen, Leitungen, Spulen, Kondensatoren, Übertrager in Verbindung. Da die Energieübertragung durch das Zweitor vor sich gehen soll, so muss der bei 2 austretende Strom gleich dem bei 1 eintretenden und der bei 3 austretende Strom gleich dem bei 4 eintretenden Strom sein. Dies ist die bereits erwähnte Torbedingung, die eine wesentliche Voraussetzung der Zweitortheorie ist.

Die Bezugsrichtungen der Spannungen und Ströme seien durch Abb. 4.18 festgelegt (symmetrische Bepfeilung). Alle Größen sind komplex, der Übersichtlichkeit wegen nicht unterstrichen.

Die Beziehungen zwischen den Eingangs- und Ausgangsströmen I_1 und I_2 und den Eingangs- und Ausgangsspannungen U_1 und U_2 findet man, wenn man die Maschengleichungen anschreibt; vgl. Abschnitt 4.1. Bei n voneinander unabhängigen Maschen sind dies n Gleichungen

$$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \cdots + Z_{1n}I_n = U_1, \quad (4.110)$$

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \cdots + Z_{2n}I_n = U_2, \quad (4.111)$$

$$Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 + \cdots + Z_{3n}I_n = 0, \quad (4.112)$$

$$\vdots = \vdots \quad (4.113)$$

$$Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + Z_{n3}I_3 + \cdots + Z_{nn}I_n = 0. \quad (4.114)$$

Die beiden ersten Maschen schließen die Spannungsquellen U_1 und U_2 ein¹³. Mit Hilfe der Cramerschen Regel (z.B. Zurmühl, Falk [79]) können wir die Lösungen für I_1 und I_2 formulieren

$$I_1 = \frac{D_{11}}{D}U_1 + \frac{D_{21}}{D}U_2, \quad (4.115)$$

$$I_2 = \frac{D_{12}}{D}U_1 + \frac{D_{22}}{D}U_2, \quad (4.116)$$

wobei D die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems und die D_{ij} die folgenden Unterdeterminanten sind

¹³ Das bedeutet, es wird ausdrücklich ausgeschlossen, dass die Spannungsquellen U_1 und U_2 selbst eine Masche bilden.

$$D_{11} = + \begin{vmatrix} Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_{21} = - \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \quad (4.117)$$

$$D_{12} = - \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_{22} = + \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{31} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \quad (4.118)$$

Die Beziehungen zwischen Spannungen und Strömen an dem passiven Zweitor haben also entsprechend den Gln. (4.115) und (4.116) allgemein die Form

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2, \quad (4.119)$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2. \quad (4.120)$$

In Matrzenschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{U}. \quad (4.121)$$

Die y_{ij} haben die Dimension von Leitwerten und daher nennt man diese Gleichungen auch die *Zweitorgleichungen in Leitwertform*, wenn das Zweitor nur Ohmsche Widerstände enthält und *Admittanzform* oder *Y-Matrixform*, wenn das Zweitor allgemeine Admittanzen enthält. Es sind zwei lineare Gleichungen mit vier Koeffizienten. Sie gelten für beliebige lineare Zweitore. Unter der eingangs gemachten Voraussetzung über den Aufbau des Zweitors aus Zweipol-Elementen reduzieren sich nun diese Koeffizienten auf drei wegen der Gleichheit der Kopplungswiderstände

$$z_{ik} = z_{ki}. \quad (4.122)$$

Es ist nämlich

$$D_{12} = D_{21}. \quad (4.123)$$

Dies erkennt man, wenn man die eine dieser beiden Determinanten nach der ersten Zeile, die andere nach der ersten Spalte in die Unterdeterminanten entwickelt und dieses Verfahren bei den Unterdeterminanten fortsetzt. Es gilt daher

$$y_{12} = y_{21}. \quad (4.124)$$

Ein Zweitor, bei dem diese Beziehung gilt, nennt man kopplungssymmetrisch oder *reziprok*. Beim Anlegen einer Spannung an das eine Klemmenpaar und Kurzschluss des anderen Klemmenpaars ergibt sich dort ein Strom, der unabhängig davon ist, welches Klemmenpaar als Eingang gewählt wird, Abb. 4.19. Aus den Gln. (4.119) und (4.120) folgt

$$\left(\frac{I_1}{U_2} \right)_{U_1=0} = + \left(\frac{I_2}{U_1} \right)_{U_2=0}. \quad (4.125)$$

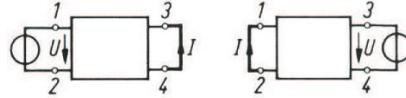


Abbildung 4.19. Umkehrungssatz

Die symmetrische Bepfeilung hat den Vorteil, dass bezüglich der Vorzeichen beide Tore gleich behandelt sind. Sie führt allerdings dazu, dass z. B. bei einem Zweitor, das eine kurze Leitung repräsentiert, der Ausgangsstrom dem Eingangsstrom entgegengesetzt gleich wird. Deswegen wird manchmal auch eine *Kettenbepfeilung* mit umgekehrter Zählrichtung von I_2 benutzt. Wegen der Vorteile der symmetrischen Bepfeilung, insbesondere bei Schaltungen mit mehr als zwei Toren, empfehlen die Normen nur noch diese.

Die Bedeutung der Größe y_{11} erkennt man, wenn man $U_2 = 0$ setzt: y_{11} ist der *Eingangskapazität* des Zweitors bei Kurzschluss am Ausgang. Setzt man $U_1 = 0$, so folgt

$$y_{22} = \frac{I_2}{U_2}. \quad (4.126)$$

y_{22} ist die Admittanz an den Ausgangsklemmen und daher die *Ausgangskapazität*, wenn die Eingangsklemmen kurzgeschlossen sind.

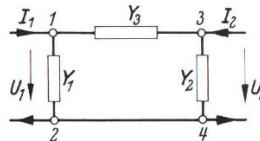


Abbildung 4.20. Darstellung des Zweitors durch eine Dreiecksschaltung

Die Vierpolgleichungen in der Admittanzform können bei der betrachteten Gruppe von passiven Zweitoren durch eine Dreieckschaltung (eine sogenannte Π -Schaltung) mit drei Admittanzen veranschaulicht werden, Abb. 4.20. Nach dem oben Ausgeföhrten gilt

$$Y_1 + y_3 = y_{11}, \quad Y_2 + Y_3 = y_{22}, \quad Y_3 = -y_{21}, \quad (4.127)$$

also

$$Y_1 = y_{11} + y_{21}, \quad Y_2 = y_{22} + y_{21}, \quad Y_3 = -y_{21}. \quad (4.128)$$

Beispiel: Bei einer Π -Schaltung aus drei Ohmschen Widerständen R_1, R_2, R_3 wird

$$y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}, \quad y_{21} = y_{12} = -\frac{1}{R_3}, \quad y_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (4.129)$$

Man beachte, dass bei allgemeinen Admittanzen die Dreieckschaltung das Zweitör nur für eine feste Frequenz nachbildet.

Grundsätzlich gibt es auch andere Möglichkeiten der Darstellung von Zweitör-Gleichungen. Das wird besonders deutlich, wenn man nach Belevitch [19] (wir nennen diese Form auch *Belevitch-Form für Zweitore*) die Gln. (4.119) und (4.120) in folgender Weise umformt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_{11} & -y_{12} \\ 0 & 1 & -y_{21} & -y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

Im Rahmen der Darstellungstheorie von Zweitoren nach Belevitch wird deutlich, dass es sich bei den verschiedenen Darstellungen von Zweitoren um spezielle Koordinatendarstellungen handelt. Insgesamt gibt es 6 verschiedene Möglichkeiten der Auflösung nach zwei der vier Variablen eines Zweitors. Dabei muss beachtet werden, dass diese Umrechnungen gewissen Einschränkungen unterliegen. So kann man nicht jede *Y-Matrixform* eines Zweitors in eine *Z-Matrixform* umgewandelt werden, die man nach Inversion der Y-Matrix in Gl. (4.121) erhält

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{U} = \mathbf{ZI}. \quad (4.131)$$

Dabei können die Koeffizienten z_{ij} in folgender Weise berechnet werden

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}, \quad z_{12} = \frac{-y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}, \quad (4.132)$$

$$z_{21} = \frac{-y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}, \quad z_{22} = \frac{y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}. \quad (4.133)$$

Anhand des Nenners $y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$, d. h. der Determinante der Y-Matrix, lassen sich sofort Beispiele finden, wo die Y-Matrix nicht verschwindet aber die Z-Koeffizienten nicht existieren; in diesen Punkten ist die Y-Matrix nicht invertierbar. Ein einfaches Beispiel ist der Fall eines Zweitors, bei dem die Klemmen 1,3 in Abb. 4.18 mit der Admittanz Y verbunden und die Klemmen 2,4 kurzgeschlossen sind. Die Koeffizientenmatrix ist offensichtlich singulär. Entsprechendes gilt auch für einige andere Darstellungen von Zweitoren; solche Koordinatenwechsel sind im Rahmen der klassischen Zweitortheorie unzulässig. Die Eigenschaften von Zweitoren und Mehrtoren werden in einem Beitrag von Mathis und Pauli [189] ausführlich diskutiert, wobei auch Koordinatenwechsel bzw. Darstellungswechsel berücksichtigt werden.

Von einem allgemeineren mathematischen Standpunkt hat Pauli [221] das Problem der Darstellungen von Zweitoren aufgegriffen. In weiteren Arbeiten (vgl. z. B. [222]) zeigt Pauli, dass die angesprochenen Schwierigkeiten mit

„singulären“ Koordinatenwechseln vermieden werden können, wenn man allgemeinere mathematische Konzepte für Beschreibungsräume von Zweitoren – er spricht von Betriebsräumen – verwendet. Diese Überlegungen gehen allerdings über diese einführende Darstellung hinaus.

Die Kopplungssymmetrie oder Reziprozität überträgt sich sinngemäß auf die Z-Koeffizienten

$$z_{12} = z_{21}. \quad (4.134)$$

Die Z-Darstellung lässt sich am besten durch eine Stern- oder T-Schaltung veranschaulichen. Auch das gilt nur für eine feste Frequenz. Im Zusammenhang mit der H-Matrix-Darstellung zeigen wir, wie man eine allgemeinere 2-Tor-Darstellung auf der Basis von Netzwerkelementen mit Hilfe gesteuerter Quellen durchführen kann.

Zweitore sind im allgemeinen Fall *längsunsymmetrisch*. Ein *längssymmetrisches Zweitörer* ist dadurch definiert, dass man Eingang und Ausgang vertauschen darf, ohne dass sich an den Spannungen und Strömen etwas ändert. Vertauscht man in Gl. (4.131) U_1 und U_2 sowie I_1 und I_2 , so erkennt man, dass für das (längs-)symmetrische allgemeine Zweitörer folgende Beziehungen gelten

$$z_{22} = z_{11}, \quad z_{21} = z_{12}. \quad (4.135)$$

Das *symmetrische Zweitörer* ist durch zwei Koeffizienten vollständig bestimmt.

Löst man die Belevitch-Form (4.130) nach U_1 und I_1 auf, so erhält man die *Kettenform der Zweitorgleichungen* oder *A-Matrixform*. In dieser Form wird üblicherweise die Stromrichtung von I_2 umgekehrt, d. h. man verwendet $(-I_2)$ als Variable; es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ (-I_2) \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{V}_1 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2, \quad (4.136)$$

wobei $\mathbf{V}_1 = (U_1, I_1)^T$ und $\mathbf{V}_2 = (U_2, -I_2)^T$. Während die äußere Form der Reziprozitätsbedingung bei der Y- und Z-Matrixform von Zweitoren gleich sind, transformiert sie sich beim Übergang auf die A-Matrixform in eine andersartige Bedingungsgleichung

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \quad (4.137)$$

Eine detaillierte Diskussion über einen Reziprozitätsbegriff, der unabhängig von der Darstellung eines Zweitors ist, findet man bei Mathis [180].

Bemerkung: Die Bezeichnung Kettenform röhrt daher, dass diese Darstellung für Zweitore zweckmäßig verwendet wird, wenn mehrere Zweitore kettenartig aneinander geschaltet werden, so dass die Ausgangsgrößen des einen Zweitors identisch sind mit den Eingangsgrößen des folgenden Zweitors. Deswegen steht in den Kettengleichungen (4.136) auch $(-I_2)$, denn dieser Strom ist bei der Kettenschaltung gleich dem Eingangsstrom des nachfolgenden Zweitors.

Eine weitere wichtige Darstellung für Zweitore ist die *Hybridform* oder *H-Matrixform*

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{W}_1 = \mathbf{H} \mathbf{W}_2, \quad (4.138)$$

mit $\mathbf{W}_1 = (U_1, I_2)^T$ und $\mathbf{W}_2 = (I_1, U_2)^T$, die insbesondere bei der Beschreibung von Transistor-Ersatzschaltungen eingesetzt werden. Die H-Matrix-Darstellung lässt sich nach Abschnitt 4.1 mit Hilfe gesteuerter Quellen als Ersatznetzwerk repräsentieren; vgl. Abb. 4.21.

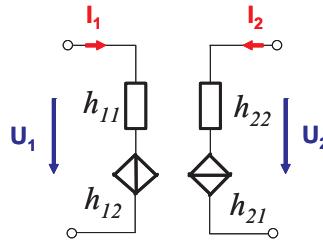


Abbildung 4.21. Ersatznetzwerk für die H-Matrix-Darstellung

Neben den Zweitordarstellungen, die sich durch eine passende Permutation aus den Netzwerkvariablen U_1, I_1, U_2, I_2 ergeben, kann man durch Superposition dieser Größen noch weitere Darstellungen ableiten. Die wichtigste Darstellung aus dieser Gruppe ist die sogenannte *S-Matrix-Darstellung*. Sie wurde im Jahre 1943 von Heisenberg in die Quantenfeldtheorie eingeführt. Am Ende des 2. Weltkrieges wurde die S-Matrixbeschreibung von Kernphysikern (C. G. Montgomery, R. H. Dicke, und E. M. Purcell) auch in der Mikrowellentechnik verwendet; siehe Davis und Overstreet [62]. In der Netzwerktheorie hatte Campbell eine bestimmte Form der S-Matrix bereits in einer Arbeit aus dem Jahre 1922 benutzt. In allgemeiner Form wurde sie aber erst von Belevitch um 1946 in die Netzwerktheorie eingeführt und sehr erfolgreich bei der damals sehr wichtigen Synthese klassischer LC-Filter angewendet. Für die Mikrowellentechnik ist die S-Matrix nach wie vor eine wichtiges Verfahren zur Beschreibung von Mikrowellenschaltungen, da Spannungen und Ströme zwar definiert werden können, vgl. Brand [41], aber messtechnisch nur Leistungsgrößen bestimmt werden können; vgl. z. B. Schiek [255], Pozar [227].

Zur Motivation alternativer physikalischer Größen, mit denen man das Klemmenverhalten von Ein-, Zwei- oder Mehrtoren beschreiben kann, betrachten wir zunächst Zweipole bzw. 1-Tore. Versucht man z. B. Kurzschluss und Leerlauf mit Hilfe von Strom und Spannung zu beschreiben, dann ist man offensichtlich bei einer funktionalen Charakterisierung an bestimmte Art der Beschreibung gebunden. Ein Kurzschluß kann nur durch die Nullfunktion im u-i-Koordinatensystem beschrieben werden, während ein Leerlauf durch eine

Nullfunktion im i-u-Koordinatensystem repräsentiert werden muss. Soll ein idealer Schalter mathematisch charakterisiert werden, dann ist weder das eine noch das andere Koordinatensystem zu Beschreibung geeignet. Ein Ausweg bietet sich an, wenn man zu einer Leistungsbetrachtung übergeht.

Grundsätzlich kann man die Größen u und i durch geeignete Linearkombinationen ersetzen, wobei unter Umständen zusätzliche Normierungen vorgenommen werden können. Ein typisches Beispiel dieser Art ist die insbesondere in der HF-Technik gebräuchliche Streuparameter-Darstellung; vgl. z. B. Heuermann [117], Hoffmann [123], Davis und Overstreet [62].

Dabei geht man von der Definition der Wirkleistung aus

$$P = u \cdot i, \quad (4.139)$$

wobei P positive oder negative Werte annehmen kann. Da sich jede reelle Zahl auch als Differenz zweier positiver Größen ausgedrücken lässt, kann man P in folgender Weise darstellen

$$u \cdot i = P = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \quad (4.140)$$

wobei a und b ebenfalls reelle Größen sind. Gl. (4.140) ist mit $K \neq 0$ äquivalent zu

$$u \cdot i = (a + b)(K K^{-1})(a - b) = \{K(a + b)\}\{K^{-1}(a - b)\}. \quad (4.141)$$

Daraus erhält man folgende Beziehungen

$$K^{-1} u = a + b, \quad (4.142)$$

$$K i = a - b, \quad (4.143)$$

die auch nach den Größen a und b aufgelöst werden können

$$a = \frac{u + K^2 i}{2K}, \quad (4.144)$$

$$b = \frac{u - K^2 i}{2K}. \quad (4.145)$$

Nach Einführung des sogenannten *Bezugswiderstands* $Z_0 := K^2 > 0$ erhält man schließlich

$$a = \frac{u + Z_0 i}{2\sqrt{Z_0}}, \quad b = \frac{u - Z_0 i}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (4.146)$$

Diese Variablentransformation wird *Heaviside-Transformation* genannt.

Ein idealer Schalter kann damit durch $b = S a$ mit $S := \mp 1$ charakterisiert werden, wobei -1 für den offenen Schalter und $+1$ für den geschlossenen Schalter steht.

Eine solche Variablentransformation kann auch bei Mehrtoren durchgeführt werden. Im Fall eines 2-Tores werden von den Variablen U_1, I_1, U_2, I_2

ausgehend die Eingangs- und Ausgangsvariablen jeweils einer Heaviside-Transformation unterzogen; man erhält die neuen Netzwerkvariablen

$$a_1 := \frac{U_1 + Z_0^1 I_1}{2\sqrt{Z_0^1}}, \quad b_1 := \frac{U_1 - Z_0^1 I_1}{2\sqrt{Z_0^1}}, \quad (4.147)$$

$$a_2 := \frac{U_2 + Z_0^2 I_2}{2\sqrt{Z_0^2}}, \quad b_2 := \frac{U_2 - Z_0^2 I_2}{2\sqrt{Z_0^2}}, \quad (4.148)$$

wobei $Z_0^{1,2}$ die frei wählbare reelle Konstanten der beiden Tore sind. Die Größen a_1, b_1, a_2, b_2 , die man traditionell mit Hilfe kleiner Buchstaben bezeichnet, werden im Hinblick auf ihre ursprüngliche Verwendung *Wellengrößen* oder *Streuvariablen* genannt. Mit Hilfe dieser Größen kann man die alternative *S-Matrixform* für Zweitore formulieren

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{b} = \mathbf{S} \mathbf{a}. \quad (4.149)$$

Die S-Matrix – auch Streumatrix genannt – setzt die in das Zweitort eingestreuten und die vom Zweitort reflektierten Wellengrößen \mathbf{a} bzw. \mathbf{b} miteinander in Beziehung. Dementsprechend lassen sich die Elemente der S-Matrix interpretieren. Insbesondere die s_{11} und s_{22} sind unter bestimmten Voraussetzungen als *Reflexionskoeffizienten* interpretierbar; z. B.

$$s_{11} = \left(\frac{b_1}{a_1} \right)_{a_2=0} \quad (4.150)$$

als Eingangsreflexionskoeffizient, wenn das Ausgangstor mit $Z_L = Z_0$ abgeschlossen wird (folgt direkt aus $a_2 = 0$ und der Definition von a_2).

Die S-Matrix-Koeffizienten können auch mit Hilfe der Koeffizienten anderer Darstellungen ermittelt werden. Beispielsweise kann \mathbf{S} aus \mathbf{Z} in folgender Weise bestimmt werden

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{Z}_0^{-1/2} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_0^{-1/2} - \mathbf{1} \right) \left(\mathbf{Z}_0^{-1/2} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_0^{-1/2} + \mathbf{1} \right)^{-1} \quad (4.151)$$

mit

$$\mathbf{Z}_0^{1/2} := \begin{pmatrix} \sqrt{Z_0^1} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_0^2} \end{pmatrix}. \quad (4.152)$$

Sind die beiden Tor-Konstanten gleich Z_0 , dann kann man die S-Matrix-Koeffizienten aus den Koeffizienten der *normierten* Z-Matrix $\tilde{\mathbf{Z}} := [\tilde{z}_{ij}] := \mathbf{Z}/Z_0 = [z_{ij}/Z_0]$ mit folgenden Formeln berechnen

$$s_{11} = \frac{(\tilde{z}_{11} - 1)(\tilde{z}_{22} + 1) - \tilde{z}_{12}\tilde{z}_{21}}{(\tilde{z}_{11} + 1)(\tilde{z}_{22} + 1) - \tilde{z}_{12}\tilde{z}_{21}}, \quad (4.153)$$

$$s_{12} = \frac{2\tilde{z}_{12}}{(\tilde{z}_{11} + 1)(\tilde{z}_{22} + 1) - \tilde{z}_{12}\tilde{z}_{21}}, \quad (4.154)$$

$$s_{21} = \frac{2\tilde{z}_{21}}{(\tilde{z}_{11} + 1)(\tilde{z}_{22} + 1) - \tilde{z}_{12}\tilde{z}_{21}}, \quad (4.155)$$

$$s_{22} = \frac{(\tilde{z}_{11} + 1)(\tilde{z}_{22} - 1) - \tilde{z}_{12}\tilde{z}_{21}}{(\tilde{z}_{11} + 1)(\tilde{z}_{22} + 1) - \tilde{z}_{12}\tilde{z}_{21}}. \quad (4.156)$$

Umgekehrt kann man die normierte Z-Matrix $\tilde{\mathbf{Z}} := \mathbf{Z}_0^{-1/2} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_0^{-1/2}$ falls sie existiert, auch bei bekannter S-Matrix \mathbf{S} ermitteln

$$\tilde{\mathbf{Z}} = (\mathbf{1} - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{1} + \mathbf{S}). \quad (4.157)$$

Die S-Matrixform von Zweitoren ist besonders interessant, weil sie in engem Zusammenhang mit Leistungsbegriffen von Zweitoren steht. Weiterhin kann man Stabilitätseigenschaften von Zweitoren mit den S-Parametern besonders gut ausdrücken. Weitere Einzelheiten dazu findet man z. B. bei Pozar [227]. Verlustlose Zweitore werden beispielsweise durch unitäre Matrizen mit der Eigenschaft $\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{1}$ beschrieben, wobei \mathbf{S}^\dagger die konjugiert-komplexe und transponierte Matrix von \mathbf{S} ist.

Die Hintereinanderschaltung von 2-Toren lässt sich nicht direkt mit S-Matrizen beschreiben, da die Streuvariablen nach hinaus und heraus gestreuten Größen \mathbf{a} und \mathbf{b} und nicht torweise sortiert sind. Mit Hilfe einer einfachen Permutationstransformation lassen sich die Streuvariablen so umordnen, dass sich eine Matrixbeschreibung ergibt, bei der die Streuvariablen die gewünschte Ordnung besitzen und damit auch eine Beschreibung einer Kaskadierung möglich wird; vgl. z. B. Heuermann [117], Hoffmann [123] (dort wird eine andere Art der Permutationstransformation verwendet). Die entsprechenden Gleichungen können mit der sogenannten *Transmissionsmatrix* \mathbf{T} formuliert werden

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder } \mathbf{t}_1 = \mathbf{T} \mathbf{t}_2. \quad (4.158)$$

mit $\mathbf{t}_1 = (a_1, b_1)^T$ und $\mathbf{t}_2 = (b_2, a_2)^T$. Die Umrechnungsvorschriften von \mathbf{S} in \mathbf{T} und umgekehrt lauten

$$\mathbf{T} = \frac{1}{S_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -s_{22} \\ s_{11} - \det \mathbf{S} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{t_{11}} \begin{pmatrix} t_{21} \det \mathbf{T} \\ 1 & -t_{12} \end{pmatrix} \quad (4.159)$$

mit $\det \mathbf{T} = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}$. Die Transmissionsmatrix \mathbf{T} einer Hintereinanderschaltung aus den 2-Toren \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 ergibt sich dann mit Hilfe des Matrixprodukts

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2. \quad (4.160)$$

Wir wollen nun auf wichtige Anwendungen der verschiedenen Darstellungen von Zweitoren hinweisen. Schon in der ersten Arbeit über Zweitormatrizen

haben Strecker und Feldtkeller [271] gezeigt, dass man die verschiedenen Arten der Zusammenschaltungen von Zweitoren mit Verknüpfungen bestimmter Matrizen in Verbindung bringen kann. So eignet sich die Y-Matrix, um am Eingang und Ausgang parallel geschaltete Zweitore zu beschreiben; man addiert die entsprechenden Y-Matrizen. Die Reihenschaltung von Zweitoren wird durch die Addition der Z-Matrizen beschrieben und auch bei den Mischformen Reihen-Parallelschaltungen sowie Parallel-Reihenschaltung kann man geeignete Matrizen addieren. Diese Möglichkeiten der Zusammenschaltung werden in der elektronischen Schaltungstechnik sehr häufig verwendet; vgl. u. a. Davidse [61] und Tietze, Schenk [276] und Abschnitt 40.

Leider wird nur selten darauf hingewiesen, dass dabei auch nach der Zusammenschaltung die Torbedingung („jedes Klemmenpaar wird durch eine Spannung und einen Strom festgelegt“) für jedes Tor (Klemmenpaar) erfüllt sein müssen. Das ist insbesondere bei sehr einfachen Zweitoren nicht immer der Fall und dann kann man die Zweitormatrix der zusammengeschalteten Zweitore auch nicht mehr mit Hilfe der obengenannten Matrizenoperationen berechnen. Es sind zwar schon seit langer Zeit Kriterien bekannt, mit denen man überprüfen kann, ob die Matrizenoperationen für die Berechnung der zusammengesetzten Zweitore eingesetzt werden können, aber sie werden nur selten angegeben; Ausnahmen sind Baerwald [12], Cauer [47], Bosse [38]. Die einzige Art der Zusammenschaltung, die uneingeschränkt mit einer Matrizenoperation in Verbindung gebracht werden kann, ist die Kettenbeschaltung. In diesem Fall sind die Torbedingungen offensichtlich immer erfüllt und die gesamte A-Matrix erhält man durch Multiplikation der A-Matrizen der einzelnen Zweitore. Entsprechendes gilt auch für die S-Matrix.

Einfache elektrische Grundschaltungen

5.1 Einführende Überlegungen

Im Rahmen dieses Abschnittes soll auf einige grundlegende elektrische Schaltungen eingegangen werden. Zunächst behandeln wir Schaltungen aus Kondensatoren bzw. Spulen und Widerständen, wobei wir deren Verhalten nicht nur mit den Methoden der Theorie elektrischer Netzwerke aus dem letzten Abschnitt 4 analysieren wollen, sondern auch das zugrundeliegende physikalische Verhalten im Sinne der Theorie elektromagnetischer Felder betrachten. Man beachte, dass die im Rahmen der Netzwerktheorie verwendeten Begriffe Strom, Spannungen, elektrische Leistung, usw. eine solche physikalische Interpretation nicht benötigen, sondern sie werden dort axiomatisch eingeführt werden. Das führt zu einer abgeschlossenen mathematischen Theorie für elektrische Schaltungen, die aber die räumliche Ausdehnung der Bauelemente und der gesamten Schaltung vernachlässigt. Auch wenn die Netzwerktheorie in vielen Situationen sehr erfolgreich angewendet werden kann, handelt es sich um eine Näherungstheorie, deren Grenzen für den Anwender sichtbar bleiben müssen, um keine unnötig großen Fehler zu machen. Insbesondere bei der Modellierung integrierter Schaltungen, die im GHz-Bereich arbeiten und bei denen nanostrukturierte Bauelemente eingesetzt werden, ist inzwischen die räumliche Dimension der Teilschaltungen und Leitbahnen nicht mehr zu vernachlässigen; vgl. Mathis [187]. Wenn größere Fehler zu erwarten sind, muss man bei der Modellierung auf die umfassenderen Theoriekonzepte für elektromagnetische Felder zurückgreifen, die Hauptgegenstand der weiteren Abschnitte dieses Buches sind.

Auf der anderen Seite ist es für diejenigen, die sich mit dem Studium elektrischer Schaltungen erstmals auseinandersetzen, recht ungewohnt, die räumliche Dimension der Bauelemente und Schaltungen außer acht zu lassen, so dass eine allgemeinere Sichtweise angemessen ist. Man sollte sich ohnehin von vornherein darüber klar sein, dass physikalisch-technische Systeme meistens mit Hilfe einer Hierarchie theoretischer Konzepte betrachtet werden müssen, um eine vollständige Übersicht über deren Verhalten zu gewinnen. Beim Er-

lernen dieses Theoriegebäudes muss irgendwo begonnen werden, wobei man sich i. a. zunächst derjenigen Theorie widmet, die begrifflich am einfachsten ist oder historisch am Anfang der Theorieentwicklung gestanden hat. Beide zuletzt genannten Gründe sprechen dafür, mit der Netzwerktheorie zu beginnen, die in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts von Ohm und Kirchhoff sowie später von Helmholtz und Maxwell aufgebaut wurde. Wenn wir die Vorgänge in einfachen elektrischen Schaltungen auch vom Standpunkt der Theorie elektromagnetischer Felder betrachten, dann greifen wir zunächst auf die elementaren Vorstellungen über elektromagnetische Felder zurück, wie man sie in einem Grundkurs der Physik dargelegt bekommt. Im Rahmen des vorliegenden Buches wird auf solche Betrachtungsweisen noch einmal in den Abschnitten 7 (Elektrostatik), 16.1 (elektrisches Strömungsfeld) und 19 (stationäres Magnetfeld) eingegangen.

In diesem Abschnitt reicht es aus, wenn man davon ausgeht, dass sich in der Umgebung zweier idealer Leiter, zwischen denen ein Potenzialunterschied (elektrische Spannung) besteht, ein elektrisches Feld ausbildet. Dieses Feld kann auch Energie speichern. Andererseits umgibt sich ein elektrischer Strom, der beispielsweise in einem leitenden Draht geführt wird, mit einem stationären Magnetfeld, das ebenfalls Energie speichern kann. Ein elektrischer Strom kann sich in jedem Material ausbilden, in dem eine von null verschiedene Leitfähigkeit vorliegt. Bei den Rechnungen werden i. a. die grundlegenden Beziehungen aus der Netzwerktheorie aus Abschnitt 4 verwendet. Nur bei der Berechnung der Energie wird auf Formeln aus späteren Abschnitten zurückgegriffen. Es sollte noch darauf hingewiesen werden, dass wir, wie bereits im Abschnitt 4 erwähnt, Bauelemente und Netzwerkmodelle unterscheiden. So wird das Bauelement „Spule“, deren Verhalten vom Standpunkt des magnetischen Feldes interpretiert werden kann, im Rahmen der Netzwerktheorie im einfachsten Fall mit Hilfe des Netzwerkelements „Induktivität“ modelliert, während die Modellierung des Bauelementes „Kondensator“ mit einer Kapazität erfolgen kann. Bezüglich des Widerstandes kann eine solche Unterscheidung verbal nicht gemacht werden, da Bauelement als auch Netzwerkmodell als „Widerstand“ bezeichnet werden. Insbesondere in den folgenden Unterabschnitten ist diese Unterscheidung wichtig, damit man erkennt, wenn man vom netzwerktheoretischen auf den feldtheoretischen Standpunkt wechselt (und umgekehrt).

In den Unterabschnitten 5.2 und 5.3 werden einfache Schaltungen aus einem Widerstand, einem Kondensator bzw. einer Spule und deren Modellierung behandelt. Im Unterabschnitt 5.4 wird auf Dreiphasennetzwerke vom Standpunkt der Netzwerktheorie eingegangen, während der sogenannte Gyrorator in Unterabschnitt 5.5 physikalisch als auch netzwerktheoretisch diskutiert wird.

5.2 Einfache Schaltungen aus Spulen und Widerständen

5.2.1 Lade- und Entladevorgang eines RC-Gliedes

Im folgenden soll das zeitliche Verhalten einer einfachen Schaltung behandelt werden, die aus einem Kondensator und einem *Ohmschen Widerstand* besteht; wir sprechen auch von einem RC-Glied. In ersten Fall wird in einem bestimmten Zeitpunkt ($t = 0$) eine ideale Spannungsquelle und ein dazu in Reihe geschalteter Widerstand über einen Schalter parallel mit der ungeladenen Kondensator verbunden. Im zweiten Fall ist der Kondensator elektrisch geladen und im Zeitpunkt $t = 0$ wird ein Widerstand parallel geschaltet.

Infolge der im elektrischen Feld des Kondensators gespeicherten Energie (vgl. Abschnitt 13) ist zu dessen Aufbau mit endlicher Stromstärke Zeit erforderlich. Man kann diese Verzögerung des Feldaufbaues auch so deuten, dass der Zufluss von Ladungen einem Strom entspricht, der in den Widerständen des Stromkreises einen Spannungsabfall zur Folge hat. Dieser Spannungsabfall kann höchstens bis zum Betrag der Quellenspannung im Stromkreis wachsen, da sonst die treibende Spannung fehlen würde; dadurch ist die Stromstärke und damit die Schnelligkeit des Feldaufbaues begrenzt.

Dieser Strom tritt an der einen Elektrode in den Kondensator ein und verlässt ihn an der anderen wieder. Im Sinne der Theorie des quasistationären Feldes in Abschnitt 30 kann er als „Verschiebungsstrom“ durch das nichtleitende Dielektrikum interpretiert werden. In einem Stromkreis, Abb. 5.1, der aus einer Kapazität C , einem Widerstand R und einer abhängigen Spannungsquelle U_0 besteht, fließt der Strom dann bei der *Aufladung der Kapazität* auf einem geschlossenen wie in einem metallischen Stromkreis. Feldtheoretisch gesehen kann daher die Ladung des Kondensators nur so rasch zunehmen wie es die Spannung am Kondensator erlaubt. Die größte Ladungszunahme tritt unmittelbar nach dem Einlegen des Schalters auf. Die Quellenspannung U_0 deckt die Spannung u an der Kapazität und den Spannungsabfall iR an dem Widerstand R , in dem auch der Innenwiderstand der Quelle enthalten sei. In jedem Zeitpunkt ist damit die für den Spannungsabfall im Widerstand R zur Verfügung stehende Spannung $U_0 - u$.

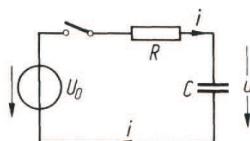


Abbildung 5.1. Stromkreis mit Kapazität

Eine netzwerktheoretische Analyse dieses Vorganges geht von der konstitutiven Relation einer Kapazität in Gl. (4.33) aus, die als Modellbeschreibung

für den Kondensator verwendet wird. Der entsprechende Strom und die Ableitung der Spannung können in folgender Weise in Beziehung gesetzt werden

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (5.1)$$

Mit Hilfe einer Maschengleichung kann damit die folgende Differentialgleichung abgeleitet werden

$$U_0 = u + iR = u + CR \frac{du}{dt}. \quad (5.2)$$

War der Kondensator im Zeitpunkt $t = 0$ ungeladen, so gilt für das Kapazitätsmodell $u = 0$ (für $t = 0$) und Gl. (5.2) vereinfacht sich für kleine Zeiten

$$CR \frac{du}{dt} \approx U_0 \quad \text{oder} \quad u(t) \approx \frac{U_0}{RC} t. \quad (5.3)$$

Die Spannung nimmt also anfangs proportional mit der Zeit t zu, und zwar um so rascher, je kleiner das Produkt aus Widerstand und Kapazität ist. Man bezeichnet dieses Produkt als *Zeitkonstante* oder *Abklingzeit*

$$RC =: \tau. \quad (5.4)$$

Man kann in der Netzwerktheorie auch eine „Ladungsvariable“ $q := Cu$ für das Kapazitätsmodell einführen, die nur formal mit der Formel für die Ladung eines Kondensators überein stimmt. Unmittelbar nach dem Einschalten gilt somit

$$q(t) \approx \frac{U_0 C}{\tau} t = \frac{U_0}{R} t. \quad (5.5)$$

Auch wenn eine physikalische Interpretation von q im Rahmen der Netzwerktheorie nicht benötigt wird, kann man das Verhalten dieser Größe im Sinne einer Ladungsveränderung im Kondensator physikalisch deuten. In dem Maße nämlich, in dem infolge der Ladungszunahme die Spannung u am Kondensator wächst, wird die für den Spannungsabfall am Widerstand zur Verfügung stehende Spannung kleiner und die Ladung nimmt langsamer zu.

Die Gl. (5.2) lässt sich mit der sogenannten *Methode der Trennung der Veränderlichen* schreiben

$$\frac{du}{U_0 - u} = \frac{dt}{\tau}. \quad (5.6)$$

Durch Integration ergibt sich hieraus

$$-\ln \frac{U_0 - u}{k} = \frac{t}{\tau}, \quad (5.7)$$

wobei k eine Integrationskonstante ist, und schließlich

$$u(t) = U_0 - ke^{-t/\tau}. \quad (5.8)$$

Soll $u = 0$ für $t = 0$ sein, so gilt $0 = U_0 - ke^0$ oder $k = U_0$, und es wird

$$u(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right). \quad (5.9)$$

Für den Strom folgt

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}. \quad (5.10)$$

Er hat im ersten Augenblick nach dem Einschalten den gleichen Wert $I = U_0/R$, als ob die Kapazität kurzgeschlossen wäre; man sagt daher, die Kapazität verhalte sich im ersten Augenblick nach dem Einschalten so wie ein Kurzschluss. Für den Wert der Ladungsvariablen q ergibt sich

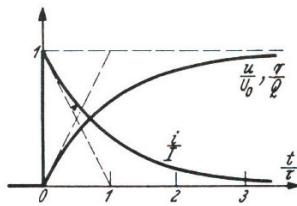


Abbildung 5.2. Aufladung einer Kapazität

$$q(t) = U_0 C \left(1 - e^{-t/\tau} \right) = Q \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (5.11)$$

mit $Q := U_0 C$. Der zeitliche Verlauf dieser Größen ist in Abb. 5.2 dargestellt. Die Spannung nähert sich allmählich ihrem Endwert U_0 , der Strom nimmt im gleichen Maße allmählich ab. Der Vorgang der Aufladung dauert streng genommen unendlich lang; praktisch ist aber schon nach einer bestimmten endlichen Zeit kein Unterschied mehr gegenüber dem Endzustand wahrzunehmen. Mit Hilfe eines Taschenrechners lassen sich rasch einige Zahlenwerte der beiden Zeitfunktionen bestimmen. Je nach der Genauigkeit, mit der die Spannungen und Ströme gemessen werden können, wird man im allgemeinen als Dauer des Aufladungsvorganges eine Zeit zwischen 4τ und 8τ anzusehen haben.

Unter der Voraussetzung von verhältnismäßig langsamem zeitlichen Änderungen, die im Abschnitt 33 noch genauer definiert wird, ändern sich feldtheoretisch gesehen die Feldgrößen, also z. B. die elektrische Feldstärke, überall im ganzen Feld *gleichzeitig* mit der Spannung u ; ihr zeitlicher Verlauf stimmt also mit dem Verlauf von u überein. Die bei der Aufladung aufgewendete Energie ist

$$\int_0^\infty U_0 i(t) dt = U_0 \int_0^\infty i(t) dt = U_0 Q = CU_0^2. \quad (5.12)$$

Sie ist zur Hälfte $(1/2)CU_0^2$ im elektrischen Feld gespeichert; vgl. Abschnitt 13. Die andere Hälfte wird bei der Aufladung im Widerstand R in Wärme umgesetzt.

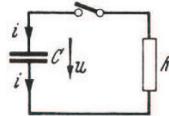


Abbildung 5.3. Entladung einer Kapazität

Ganz ähnliche Überlegungen gelten auch für die Entladung eines Kondensators. Ein Kondensator wird entladen, indem man seine Elektroden über einen angeschalteten Widerstand miteinander verbindet. In einem praktischen Experiment stellt der Isolationswiderstand des Kondensators bereits bei offenen Klemmen eine Verbindung mit geringer Leitfähigkeit her.

Auch in diesem Fall wird ein Netzwerkmodell aus Kapazität und Widerstand zur mathematischen Beschreibung des Entladevorganges verwendet. Im Modell wird die Kapazität mit einem idealen Schalter an einen Ohmschen Widerstand geschaltet (Abb. 5.3). Der Spannungsabfall iR am Widerstand muss hier in jedem Augenblick die Spannung u an der Kapazität zu Null ergänzen; es gilt gemäß Gl. (5.2)

$$u + \tau \frac{du}{dt} = 0. \quad (5.13)$$

Durch Integration ergibt sich

$$u(t) = U e^{-t/\tau}, \quad (5.14)$$

wobei der Anfangswert für $t = 0$ mit U bezeichnet ist. Der Strom wird nach Gl. (5.1) und (5.4)

$$i(t) = -\frac{U}{R} e^{-t/\tau}. \quad (5.15)$$

Er hat die entgegengesetzte Richtung und den gleichen zeitlichen Verlauf wie bei der Aufladung.

Die bei der Entladung durch den Widerstand R fließende Ladungsmenge Q kann im Rahmen des stationären Strömungsfeldes mit Hilfe des Integrals über den Strom ermittelt werden. Nehmen wir den mit dem Netzwerkmodell errechneten Strom $i(t)$, dann erhalten wir

$$Q = \int_0^\infty i(t) dt = UC. \quad (5.16)$$

Nach den Formeln (5.10) und (5.15) würde der Strom im ersten Augenblick nach dem Einschalten unendlich groß werden, wenn der Widerstand Null wäre. Abgesehen davon, dass dieser Fall nicht realisierbar ist, ergibt sich in Wirklichkeit immer ein endlicher Wert der Stromstärke wegen der Wirkung der gleichzeitig mit dem Strom auftretenden magnetischen Felder, die hier nicht berücksichtigt worden sind (siehe Abschnitt 17).

Zwischen dem Isolationswiderstand R_i und der Kapazität C eines Kondensators besteht nach Gl. (16.29) die Beziehung

$$R_i C = \frac{\varepsilon}{\kappa}, \quad (5.17)$$

wenn mit κ die Leitfähigkeit des Isolierstoffes bezeichnet wird. Die Zeitkonstante für die Selbstentladung eines Kondensators ist daher

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\kappa}, \quad (5.18)$$

Zahlenbeispiele:

1. Wird eine Kapazität $C = 1\mu F$ über einen Widerstand von $R = 1000\Omega$ durch eine Spannung von $220V$ aufgeladen, so hat die Stromstärke im ersten Augenblick nach dem Einlegen des Schalters den Wert $I = U_0/R = 220V/1000\Omega = 0,22A$. die Zeitkonstante beträgt $\tau = CR = 10^{-6} \cdot 1000F\Omega 10^{-3} = 1ms$. Nach einer Zeit von $3ms$ hat daher die Ladung 95% , nach $4ms$ 98% ihres Endwertes $Q = U_0C = 220 \cdot 10^4VF = 2,2 \cdot 10^{-4}As$ erreicht. Der Strom ist nach $4ms$ auf $i = 0,22 \cdot 0,0183A = 4mA$ abgeklungen.
2. Hat der Kondensator einen Isolationswiderstand von $100M\Omega$, so entlädt er sich nach Unterbrechen des Stromkreises mit einer Zeitkonstante von $\tau = 10^{-6} \cdot 10^8F = 100s$. Die Spannung ist nach einer Zeit von $400s = 6,7min$ auf $1,83\%$ ihres Anfangswertes, also auf $4V$ gesunken. Nach der doppelten Zeit beträgt die Spannung noch $0,000335 \cdot 220V = 0,074V$.
3. Die Möglichkeit, bei der Entladung eines Kondensators die ganze ihm zugeführte Elektrizitätsmenge wieder zu gewinnen, kann z. B. zur *Messung der Frequenz von Wechselströmen* benutzt werden. Dazu wird über ein von dem Wechselstrom gespeistes Relais A , Abb. 5.4, ein Kondensator C in jeder Periode des Wechselstromes einmal auf eine bestimmte Spannung U aufgeladen und über ein Gleichstrommessinstrument entladen. Ist f die „Frequenz“ (Zahl der Perioden geteilt durch Zeit), dann ist die durch das Instrument *pro Zeiteinheit* fließende Ladungsmenge nach Gl. (5.16) bestimmt durch fCU , wobei die Zeiteinheit T durch die Frequenz $f = 1/T$ bestimmt wird. Die Ladungsänderung pro Zeiteinheit fCU ist gleich der Stromstärke I im Instrument. Sie ist proportional der Frequenz f . Voraussetzung für diesen einfachen Zusammenhang ist, dass während der Schließungszeiten T der Kontakte die Ladungen bzw. die Entladungen praktisch völlig beendet sind.

Ist z. B. $C = 1\mu F$, $U = 100V$, so ergibt sich bei $50Hz$ ein Strom

$$I = fUC = 50 \cdot 10^{-6} 100s^{-1} FV = 5mA. \quad (5.19)$$

Der Widerstand R des Instrumentes muss so klein sein, dass die Zeitkonstante CR kleiner als etwa $1/6$ der Periodendauer $1/f$ wird, d. h. $R < 1/(6fC)$. Der Instrumentenwiderstand darf danach in dem Zahlenbeispiel nicht größer als 3000Ω sein. Auch der Vorwiderstand im Ladestromkreis darf diesen Betrag nicht überschreiten.

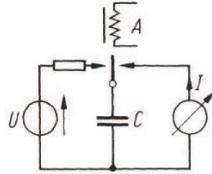


Abbildung 5.4. Frequenzmesser

4. Die Schnelligkeit, mit der die Selbstentladung vor sich geht, ist nach Gl. (5.17) unabhängig von Form und Größe des Kondensators und nur durch die Eigenschaften des Isolierstoffs bestimmt, gute Isolierung der Zuleitungen vorausgesetzt. Ist z. B. $\epsilon_r = 4$, $\kappa = 10^{-13} S/m$, so wird

$$\tau = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\kappa} = \frac{4 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} Fm}{10^{-13} Sm} = 354 s \approx 6 min. \quad (5.20)$$

5.2.2 Ein einfacher Wechselstromkreis mit Kondensator

Praktisch besonders wichtig ist das Verhalten der Nichtleiter in elektrischen Feldern, wenn sich die Feldgrößen zeitlich sinusförmig ändern. Das elektrische Feld kann der Einfachheit halber durch zwei Platten (Plattenkondensator) erzeugt werden, die auf unterschiedlichem, sinusförmig sich änderndem Potenzial liegen. Diese Anordnung kann nach Abschnitt 12.1 durch den Kapazitätswert C charakterisiert werden. Um die zugehörigen Wechselspannungen und -ströme mathematisch darzustellen, ist es erforderlich, positive Richtungen willkürlich festzulegen. Wir kennzeichnen die positive Richtung des Stromes in einem Leiter durch einen Stromzählpfeil auf dem Leiter und setzen fest, dass die Spannung zwischen zwei Punkten des Leiters als positiv bezeichnet werden soll. Wenn der Spannungszählpfeil vom höheren zum niedrigeren Potenzial weist, Abb. 5.5. Gibt man beiden Zählpfeilen die gleiche Richtung (*Verbraucherzählpfeilsystem*), so gilt für den Ladestrom i_C in einem Kondensator mit der Kapazität C die Beziehung

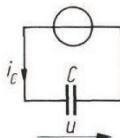


Abbildung 5.5. Wechselstromkreis mit Kapazität

$$i_C = C \frac{du}{dt}. \quad (5.21)$$

Eine zeitlich sinusförmige Spannung stellen wir dar durch

$$u(t) = U\sqrt{2} \sin \omega t = \hat{u} \sin \omega t, \quad (5.22)$$

wobei U den *Effektivwert*, $U\sqrt{2} = \hat{u}$ den Scheitelwert, ω die Kreisfrequenz,

$$\omega = 2\pi f, \quad (5.23)$$

und f die *Frequenz* der Wechselspannung bezeichnen; f ist die Zahl der Perioden geteilt durch die Zeit; als Einheit der Frequenz wird 1 Hertz = 1 Hz = 1 Per/s gebraucht. Die Periodendauer ist

$$T = \frac{1}{f}. \quad (5.24)$$

Ändert sich die Spannung zwischen den beiden Elektroden einer Kapazität gemäß (5.22), so wird der Ladestrom nach Gl. (5.21)

$$i_C(t) = \omega C U \sqrt{2} \cos \omega t = \omega C \hat{u} \sin \omega \left(t + \frac{1}{4} T \right) = \omega C \hat{u} \sin \omega \left(t + \frac{1}{4} T \right). \quad (5.25)$$

Das elektrische Feld in einem Kondensator ist ein Wechselfeld, für das die

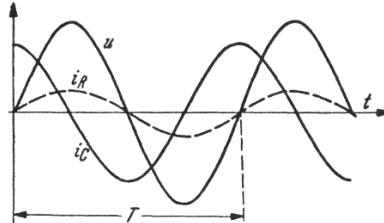


Abbildung 5.6. Zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom bei einer Kapazität

gleichen Gesetze gelten wie für ein elektrostatisches Feld. Der Ladestrom des Kapazitätsmodells erreicht entsprechende Werte um 1/4 Periode früher als die Spannung, Abb. 5.6; er eilt also der Spannung um 1/4 Periode voraus. Sein Effektivwert ist

$$I_C = U \omega C. \quad (5.26)$$

Indem man die Periode T in 360 Grad einteilt, sagt man auch: „Der Strom i_C eilt der Spannung u um 90° voraus“. Diese Aussage hat nur dann einen Sinn, wenn die positiven Richtungen so wie oben definiert werden.

Hat der Nichtleiter zwischen den Platten des Kondensators eine endliche Leitfähigkeit σ , so entsteht an jeder Stelle unter der Einwirkung der elektrischen E-Feldstärke ein Strom von der Dichte $\kappa \|\mathbf{E}\|$. Da die elektrische

Feldstärke in jedem Augenblick proportional der Spannung zwischen den Elektroden ist, also mit ihr „in Phase“ schwingt, so ist auch der Leistungsstrom Phase mit der Spannung. Bezeichnen wir diesen Strom mit i_R , so gilt daher

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin \omega t, \quad (5.27)$$

wobei R den Isolationswiderstand für Wechselstrom von der Frequenz f darstellt. Der gesamte Strom ist in jedem Augenblick

$$i = i_C + i_R. \quad (5.28)$$

Er eilt der Spannung um einen Phasenwinkel zwischen 0° und 90° vor, und

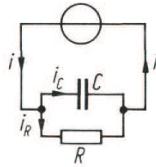


Abbildung 5.7. Ersatzbild eines verlustbehafteten Kondensators

man kann auf Grund dieses Zusammenhangs für den Kondensator das in Abb. 5.7 dargestellte Ersatzschema aufstellen, in dem man sich den Kondensator zerlegt denkt in einen Kondensator mit vollkommener Isolierung, der durch eine Kapazität modelliert werden kann, und in einen Widerstand, der den Isolationsstrom führt.

Die elektrische Arbeit, die dieses Zweipol-Netzwerk während einer Periode aufnimmt, ist nach Gl. (4.68)

$$PT = W_1 = \int_0^T u(t)i(t)dt. \quad (5.29)$$

Durch Einsetzen von u und i und Ausführen der Integration erhält man

$$W_1 = \frac{U^2}{R}. \quad (5.30)$$

Diese Arbeit ist unabhängig vom Kapazitätswert und nur bestimmt durch den Widerstand R . Der Strom zeigt lediglich ein Hin- und Herpendeln von Ladungen an, wobei in jeder Periode die während der Zeitabschnitte mit gleichen Vorzeichen von u und i aufgenommene Arbeit während der anderen Zeitabschnitte vom Kondensator wieder abgegeben wird. Die elektrische Arbeit wird während der ersten Zeitabschnitte im elektrischen Feld als elektrische Energie aufgespeichert. Im Sinne einer elektrostatischen Betrachtung (vgl. Abschnitt 13) gilt in jedem Zeitpunkt t

$$W = \frac{1}{2}Cu^2. \quad (5.31)$$

Die aufgespeicherte Energie erreicht den Maximalwert

$$W_m = \frac{1}{2}C\hat{u}^2 = CU^2, \quad (5.32)$$

wenn die Spannung ihren positiven oder negativen Maximalwert hat. Nimmt dann die Spannung ab, so verringert sich die aufgespeicherte Energie entsprechend, und es wird Energie aus dem elektrischen Feld zur Stromquelle zurückgeliefert. Nur infolge des Leistungsstromes entstehen elektrische Verluste. Nach Abschnitt 16.2 zeigt die endliche Leitfähigkeit des Isolierstoffes eine Umsetzung elektrischer Energie in Wärme an. Die während einer Periode des Wechselstroms entwickelte Wärmemenge ist W_1 Gl. (5.30). Die Rate des Wärmeumsatzes ist daher

$$\frac{W_1}{T} = \frac{U^2}{R} = P. \quad (5.33)$$

Dies ist die elektrische *Leistung* P , die dem Kondensator im Mittel zufließt. Durch Messen dieser Leistung kann man die Größe R bestimmen. Derartige Messungen zeigen nun, dass bei wirklichen Isolierstoffen der so ermittelte Wert von R im allgemeinen nicht dem Isolationswiderstand entspricht, den man mit Gleichstrom feststellen kann; er ist vielmehr meist erheblich kleiner. Um auszudrücken, dass es sich hier nicht um den Gleichstromisolationswiderstand handelt, ist es üblich, den reziproken Wert von R , den Leitwert G , einzuführen und diese Größe zu definieren durch die vom Kondensator aufgenommene Leistung zur Deckung der *dielektrischen Verluste*,

$$P = U^2G. \quad (5.34)$$

G wird als die Ableitung des Kondensators bezeichnet. Für den Effektivwert des Leistungsstromes gilt

$$I_R = GU. \quad (5.35)$$

Zur Veranschaulichung von sinusförmigen Strömen und Spannungen kann man im Sinne der Darstellung der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly ein *Zeigerdiagramm* verwenden, ohne dass man komplexe Ströme und Spannungen explizit verwendet. Dazu benötigt man lediglich einige geometrische Regeln für Spannungs- und Stromzeiger, die aus der Wechselstromrechnung übernommen werden können. Die Konstruktion erfolgt dann mit Vektoren in der Ebene.

Ein solches Zeigerdiagramm ist für den hier betrachteten Fall des Netzwerkes in Abb. 5.8 aufgezeichnet. Die Wechselstromgrößen werden durch Zeiger dargestellt, deren Länge in einem willkürlich gewählten Maßstab gleich dem Effektivwert gemacht wird; sie bilden Winkel miteinander, die gleich den in Graden ausgedrückten zeitlichen Verschiebungen sind, wobei eine Voreilung einer Drehung links herum entsprechen soll. Die Projektionen dieser Zeiger

auf eine im Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende „Zeitlinie“ Z geben, mit $\sqrt{2}$ multipliziert, die Augenblickswerte der Spannungen und Ströme an. Oft wird für die Zeigerlänge auch der Scheitelwert benutzt, so dass die Zeigerprojektionen auf die Zeitlinie direkt die Augenblickswerte ergeben. Die Zeitlinie wird ebenfalls mit einem Pfeil versehen und dadurch in eine positive und negative Hälfte geteilt. Die Augenblickswerte gelten als positiv, wenn die Projektionen auf der positiven Hälfte der Zeitlinie liegen, im anderen Falle als negativ. Der Ladestrom $I_C = U\omega G$ eilt der Spannung U um 90° vor, während der Leistungsstrom $I_R = UG$ in Phase mit U liegt.

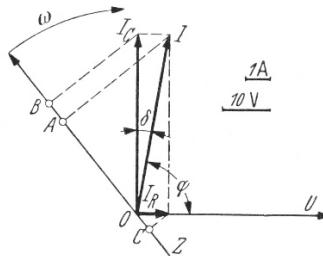


Abbildung 5.8. Zeigerdiagramm für den verlustbehafteten Kondensator

Für die Wechselstromzeiger gelten die geometrischen Additionsgesetze der Vektoren; man bezeichnet sie daher manchmal – vor allem in der älteren Literatur – als Vektoren. Wie aus Abb. 5.8 ersichtlich ist, gilt bei geometrischer Addition von I_R und I_C für die Projektionen auf die Zeitlinie

$$\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC} \quad \text{oder} \quad i = i_C + i_R, \quad (5.36)$$

wie es nach Gl. (5.30) sein soll. Der Zeiger des Gesamtstromes ergibt sich also durch geometrische Addition der die Teilströme darstellenden Zeiger.

Die Winkel zwischen den Zeigern bilden ein Maß für die zeitliche Verschiebung der Wechselgrößen. Man bezeichnet sie auch als *Phasenwinkel*.

Als Maß für die dielektrischen Verluste kann man den Winkel δ benutzen, um den der Gesamtstrom dem Ladestrom nacheilt. Man bezeichnet diesen Winkel als den Verlustwinkel des Kondensators, da sich durch ihn die Verlustleistung ausdrücken lässt. Es ist

$$\tan \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{G}{\omega C}. \quad (5.37)$$

Der Verlustwinkel stellt eine Stoffkonstante dar, da das Verhältnis G/C nach Gl. (16.29) unabhängig von den Abmessungen ist. Häufig wird auch der *Verlustfaktor* $\tan \delta$ als Maß für die Verluste benutzt; bei kleinen Verlustwinkeln ist $\tan \delta \approx \delta$.

Die in Wärme umgesetzte Leistung wird

$$P = U^2 G = UI_R = UI \sin \delta = UI \cos \varphi. \quad (5.38)$$

Für den Gesamtstrom lässt sich aus Abb. 5.8 die Beziehung ablesen

$$I = U \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}. \quad (5.39)$$

Statt die Zeitlinie im Uhrzeigersinn rotieren zu lassen, kann man auch eine festliegende Zeitlinie annehmen und das ganze Zeigerdiagramm entgegengesetzt umlaufen lassen.

Im Sinne der Darstellung der Wechselstromrechnung nach Steinmetz und Kennelly („Methode der komplexen Amplitude“) – vgl. Abschn. 4.3 – kann die obenstehende Rechnung im Fall sinusförmiger Anregungen mit komplexen Größen ausgeführt werden. Wird der AC-Kalkül – vgl. Abschn. 4.3 – verwendet, dann kann man nach Abschnitt 4.4 ein Zeigerdiagramm *direkt* für das Übertragungsverhalten der Schaltung zwischen zwei ausgewählten Größen (z. B. u und i) angeben, wobei auf die Einführung komplexer Amplituden für die Spannungen und Ströme verzichtet wird. Das Zeigerdiagramm charakterisiert demnach die Antwortfunktion der Schaltung auf eine vorgegebene Größe, die im Zeigerdiagramm der komplexen Amplituden von Spannungen und Strömen in Abb. 5.8 *indirekt* auch enthalten ist.

5.3 Netzwerke aus Spulen und Widerständen

5.3.1 Aufladevorgang eines LR-Gliedes

Die Spannung der Selbstinduktion sucht nach dem oben besagten den Stromänderungen entgegenzuwirken. Wird an eine Spule eine Gleichspannung gelegt, so bildet sich daher mit dem Anwachsen des Stromes eine der treibenden Spannung entgegenwirkende Spannung. Der Strom kann nur so rasch ansteigen wie es die zur Verfügung stehende Spannung zulässt. In dem Stromkreis Abb. 5.9 gilt nach dem Einlegen des Schalters

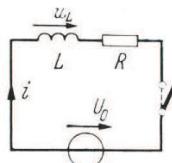


Abbildung 5.9. Schalten einer Spule

$$U_0 = Ri + u_L, \quad (5.40)$$

oder

$$U_0 = Ri + L \frac{di}{dt}; \quad (5.41)$$

hieraus folgt (nach Trennung der Veränderlichen)

$$dt = \frac{L di}{U_0 - iR}, \quad (5.42)$$

und man findet durch Integration

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + ke^{-(R/L)t}. \quad (5.43)$$

War die Spule vor dem Einschalten stromlos, so muss $i = 0$ für $t = 0$ sein, also $k = -U_0/R$. Führt man noch die Zeitkonstante

$$\tau := \frac{L}{R} \quad (5.44)$$

ein, so wird

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right). \quad (5.45)$$

Ähnlich wie die Spannung bei der Aufladung eines Kondensators nähert sich

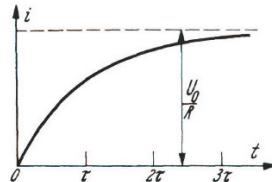


Abbildung 5.10. Stromanstieg in der Spule

der Strom in der Spule allmählich seinem durch das Ohmsche Gesetz bestimmten Endwert, Abb. 5.10. Die Zeit, die verstreicht, bis der stationäre Gleichstrom erreicht ist, beträgt etwa $4 \cdots 8\tau$. Als Ursache für die Verzögerung des Stromanstieges kann wie im elektrischen Feld die Speicherung von Feldenergie angesehen werden. Multipliziert man auf beiden Seiten der Gl. (5.41) mit idt , so wird

$$U_0 idt = i^2 R dt + Lidi. \quad (5.46)$$

Links steht die in irgendeinem Zeitpunkt während des Zeitabschnittes dt von der Stromquelle gelieferte Arbeit. Das erste Glied rechts gibt die während dieses Zeitabschnittes entwickelte Wärmemenge an. Der Rest der gelieferten Arbeit wird in der Spule gespeichert, und zwar kann man ähnlich wie beim elektrischen Feld das ganze magnetische Feld selbst als Sitz der gespeicherten Energie ansehen; vgl. Abschnitt 24. Die während des Zeitabschnittes dt aufgenommene Energie ist nach Gl. (5.46)

$$dW = Lidi. \quad (5.47)$$

Die zu einem beliebigen Zeitpunkt im Feld gespeicherte Energie, die man als die *magnetische Energie* des Feldes bezeichnet, ergibt sich durch Integration:

$$W = \frac{1}{2}Li^2. \quad (5.48)$$

Abb. 5.11 zeigt den zeitlichen Verlauf der von der Stromquelle gelieferten

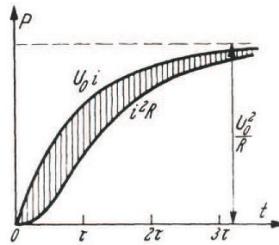


Abbildung 5.11. Energieaufnahme der Spule

Leistung U_0i sowie der in Wärme umgewandelten Leistung i^2R . Die schraffierte Fläche zwischen den beiden Kurven gibt die gespeicherte Energie an. Diese kann beim Abbau des Feldes wiedergewonnen werden. Verbindet man die beiden Enden der Spule miteinander, so gilt

$$0 = iR + L \frac{di}{dt}; \quad (5.49)$$

daraus folgt

$$i(t) = I_a e^{-t/\tau}, \quad (5.50)$$

wenn mit I_a der Strom im Moment des Kurzschlusses bezeichnet wird. Während der Strom gemäß dieser Funktion allmählich auf Null abfällt, wird die im Feld gespeicherte Energie an den Stromkreis abgegeben und in Wärme umgewandelt.

Bei einer plötzlichen Unterbrechung eines Stromkreises, der eine Spule mit hoher Induktivität enthält, muss sich die in der Spule aufgespeicherte Energie in sehr kurzer Zeit umsetzen; es ergibt sich daher eine sehr hohe Selbstinduktionsspannung, die einen Funken oder Lichtbogen an der Unterbrechungsstelle zur Folge hat, wobei die magnetische Energie in Wärme umgewandelt wird. Um derartig hohe Spannungen, die für die Isolation der Wicklung gefährlich werden können, zu vermeiden, verbindet man bei großen Spulen vor dem Abschalten der Stromquelle die beiden Wicklungsenden durch einen Widerstand R_1 . Die Spannung an der Spule wird dann nach dem Abschalten der Stromquelle

$$u(t) = i(t)R_1 = I_a R_1 e^{-t/\tau}, \quad (5.51)$$

wobei

$$\tau = \frac{L}{R + R_1}; \quad (5.52)$$

sie springt also beim Abschalten auf den Wert

$$U_a = I_a R_1 = U_0 \frac{R_1}{R}. \quad (5.53)$$

Zahlenbeispiel: Es sei $L = 0,2H$, $R = 10\Omega$, $U_0 = 100V$. Die Zeitkonstante wird

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,2H}{10\Omega} = 0,02s. \quad (5.54)$$

Der Aufbau des magnetischen Feldes ist in etwa 0,1 Sekunden beendet. Dann ist die Stromstärke

$$I = \frac{100V}{10\Omega} = 10A. \quad (5.55)$$

die in der Spule aufgespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}0,2 \cdot 100HA^2 = 10Ws. \quad (5.56)$$

Bei gegebenem Wickelraum, Füllfaktor und magnetischem Widerstand ist die Zeitkonstante einer Spule unabhängig von der Windungszahl, da nach Gl. (23.25) und (22.31) sowohl der Widerstand als auch die Induktivität proportional dem Quadrat der Windungszahl ist.

5.3.2 Ein einfacher Wechselstromkreis mit Spule

Magnetische Wechselfelder werden durch Wechselstrom erzeugt. Fließt in einer Spule mit der Induktivität L ein Strom

$$i(t) = I\sqrt{2} \sin \omega t = I_m \sin \omega t, \quad (5.57)$$

so entsteht nach Gl. (4.34) eine Selbstinduktionsspannung

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \omega LI_m \cos \omega t. \quad (5.58)$$

Dabei gilt die Spannung dann als positiv, wenn sie einem Potenzialgefälle in Richtung des Stromzählspitzenwinkels entspricht. Aus Gl. (5.58) geht hervor, dass die Selbstinduktionsspannung dem Strom um 90° voreilt. Ferner ist ersichtlich, dass der *Effektivwert der Selbstinduktionsspannung*

$$U_L = \omega LI \quad (5.59)$$

beträgt.

Infolge des Widerstandes R der Spule entsteht nach dem Ohmschen Gesetz eine Spannung

$$u_R(t) = Ri(t) = RI_m \sin \omega t, \quad (5.60)$$

die in Phase mit dem Strom schwwingt und deren Effektivwert

$$U_R = RI \quad (5.61)$$

beträgt. Man bezeichnet U_R auch als *Ohmschen Spannungsabfall*, U_L als *induktiven Spannungsabfall*. Die gesamte Spannung u an der Spule ergibt sich in jedem Zeitpunkt als Summe der beiden Spannungen u_R und u_L

$$u = u_R + u_L. \quad (5.62)$$

Im Zeigerdiagramm, Abb. 5.12, müssen daher die beiden Zeiger U_R und U_L

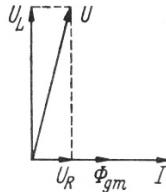


Abbildung 5.12. Zeigerdiagramm einer Spule

geometrisch addiert werden. Aus dem rechtwinkligen Dreieck folgt für den Effektivwert der Gesamtspannung an der Spule

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (5.63)$$

$$Z_s(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (5.64)$$

ist die *Impedanz* der Spule.

Umgekehrt folgt bei gegebener Spannung die Stromstärke aus der Gl. (5.63). Der Strom in der Spule eilen der Spannung an der Spule um einen Winkel φ nach, der zwischen 0° und 90° liegt, und der berechnet werden kann aus

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (5.65)$$

Die Spule nimmt in jedem Zeitelement dt die elektrische Arbeit $uidt$ auf. Die der Spule zufließende Leistung ist daher in jedem Zeitpunkt t

$$P_t = ui = u_R i + u_L i. \quad (5.66)$$

Setzt man hier u_R , u_L und i nach Gl. (5.57), (5.58) und (5.60) ein und berücksichtigt, dass

$$2 \sin^2 \omega t = 1 - \cos 2\omega t; \quad 2 \sin \omega t \cos \omega t = \sin 2\omega t, \quad (5.67)$$

so ergibt sich unter Verwendung von Effektivwerten

$$P_t(t) = I^2 R - I^2 R \cos 2\omega t + I^2 \omega L \sin 2\omega t. \quad (5.68)$$

Die Leistung schwankt zeitlich mit der doppelten Frequenz des Wechselstromes. Der Mittelwert zeigt die in der Spule entstehenden Verluste durch Stromwärme an. Er beträgt

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = I^2 R. \quad (5.69)$$

Dies ist der erste Summand in Gl. (5.68). Der zweite Summand stellt eine

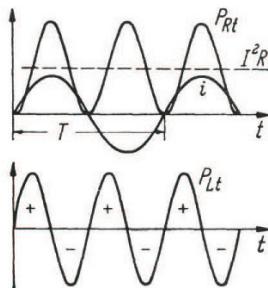


Abbildung 5.13. Augenblicksleistung P_t bei einer Spule

Schwankung mit dem gleich großen Scheitelwert dar. Der Augenblickswert der Leistung in dem ohmschen Widerstand R ist immer dann Null, wenn der Strom durch Null geht, er hat den Maximalwert $2I^2 R$, wenn der Strom ein positives oder negatives Maximum durchläuft. Abb. 5.13 zeigt den zeitlichen Verlauf der vom ohmschen Widerstand R aufgenommenen Leistung P_{Rt} . Der dritte Summand in Gl. (5.68) stellt ebenfalls eine Leistungsschwankung mit der doppelten Frequenz des Wechselstromes dar, aber mit dem Mittelwert Null. Der Scheitelwert der Schwankung ist $I^2 \omega L$, Abb. 5.68. Diese Leistung P_{Lt} ist immer dann Null, wenn der Strom i oder die Spannung u_L durch Null gehen. Dazwischen liegen die Maximal- und Minimalwerte. Diese schwankende Leistung zeigt die im magnetischen Feld gespeicherte Energie an. Jeweils während einer Viertelperiode des Stromes (+) wird Energie in das magnetische Feld geliefert und während der darauffolgenden Viertelperiode (-) fließt diese Energie wieder zur Stromquelle zurück. Der Scheitelwert dieser Leistung ist auch

$$I^2 \omega L = I U_L. \quad (5.70)$$

Die maximal im magnetischen Feld gespeicherte Energie ergibt sich durch Integration über eine Viertelperiode

$$W_m = \int_0^{T/4} P_{Lt}(t) dt = I^2 \omega L \int_0^{T/4} \sin 2\omega t dt = I^2 L. \quad (5.71)$$

Dies stimmt überein mit Gl. (5.47), wenn dort der Scheitelwert des Stromes $I\sqrt{2}$ für den betrachteten Zeitpunkt $T/4$ eingesetzt wird.

Der aus der gemessenen Verlustleistung nach Gl. (5.69) berechnete Wert von R ist im allgemeinen größer als der mit Gleichstrom gemessene Widerstand. Man bezeichnet daher den aus Gl. (5.69) definierten Widerstand als den *Wirkwiderstand* der Spule; der Unterschied gegenüber dem Gleichstromwiderstand ist bedingt durch die im magnetischen Wechselfeld auftretenden Verluste, die sich aus verschiedenen Anteilen zusammensetzen (siehe Abschnitt 29.1 und 29.3).

ωL wird auch als *Blindwiderstand* bezeichnet, da die mittlere Leistung nur durch den Spannungsabfall IR bestimmt ist und der Spannungsabfall $I\omega L$ zur mittleren Leistung nichts beträgt.

Bemerkung: Auch wenn Induktivitäten erst im Rahmen der Theorie des stationären Magnetfeldes näher betrachtet werden, fügen wir schon hier einige Bemerkungen an. Die verwendeten Begriffe des magnetischen Feldes muss der Leser gegebenenfalls in Abschnitt 18 nachlesen. Wenn nämlich der magnetische Kreis im wesentlichen aus Eisen besteht und hohe B-Feldstärken vorkommen, so dass die nichtlinearen Effekte eine wesentliche Rolle spielen, vermeidet man den Begriff der Induktivität und berechnet die Selbstinduktionsspannung unmittelbar aus dem durch die Wicklung mit N Windungen hindurchgehenden Bündelfluss Φ . Ist Φ_m der Scheitelwert dieses Flusses, so ist der Augenblickswert

$$\Phi(t) = \Phi_m \sin \omega t. \quad (5.72)$$

Die Selbstinduktionsspannung wird nach dem Induktionsgesetz

$$u_L(t) = N \frac{d\Phi(t)}{dt} = N \omega \Phi_m \cos \omega t. \quad (5.73)$$

Sie eilt gegenüber dem Fluss danach um 90° vor. Der Effektivwert der Selbstinduktionsspannung wird

$$U_L = \frac{1}{\sqrt{2}} N \omega \Phi_m = 4,44 N f \Phi_m \quad (5.74)$$

In manchen Fällen ist die hierin enthaltene Voraussetzung, dass der Bündelfluss Φ_m in voller Größe mit allen Windungen verkettet ist, nicht zulässig. Der Gesamtfluss Φ_{gm} ist verschieden von $N\Phi_m$. Man drückt dies durch die Beziehung aus

$$\Phi_{gm} = \xi N \Phi_m \quad (5.75)$$

und nennt ξ den *Wicklungsfaktor*. Dann gilt also allgemein

$$U_L = 4,44 \xi N f \Phi_{gm}. \quad (5.76)$$

Häufig ist bei Spulen mit Eisenkern der ohmsche Spannungsabfall klein gegen den induktiven Spannungsabfall. Dann stimmt die Selbstinduktionsspannung U_L , angenähert mit der Gesamtspannung U an der Spule überein. Durch eine an der Spule wirkende Wechselspannung U ist nach Gl. (5.76) der Scheitelwert des magnetischen Flusses Φ_m im Eisenkern zwangsläufig und unabhängig von den Eigenschaften des Eisenkerns bestimmt

$$\Phi_{gm} \approx \frac{U}{4,44\xi N_f}. \quad (5.77)$$

Er eilt gegenüber der Spannung U angenähert um 90° nach. Aus dem Scheitelwert Φ_m des Induktionsflusses folgt der Scheitelwert die magnetische B-Feldstärke B_m durch Division mit dem wirksamen Eisenquerschnitt. Auch die magnetische Induktion verläuft zeitlich sinusförmig und eilt gegenüber der Spannung U um 90° nach. Die magnetische Induktion bestimmt nun in jedem Zeitpunkt gemäß der Magnetisierungskurve des Eisens die magnetische Feldstärke und damit Durchflutung und Strom in der Spule. Wegen der Krümmung der Magnetisierungskurve verläuft der Strom bei sinusförmiger Spannung daher nicht sinusförmig (siehe Abschnitt 33).

Zahlenbeispiel: An einer Spule mit der Induktivität $1H$ und dem Wirkwiderstand 10Ω liegt eine Wechselspannung mit dem Effektivwert $U = 220V$ und der Frequenz $f = 50Hz$.

Der Blindwiderstand der Spule wird

$$\omega L = 314 \Omega. \quad (5.78)$$

Der Scheinwiderstand der Spule wird

$$Z_s = \sqrt{10^2 + 314^2} \Omega \approx 314 \Omega. \quad (5.79)$$

Der Effektivwert der Stromstärke wird

$$I = \frac{U}{Z_s} = \frac{220V}{314\Omega} = 0,7A. \quad (5.80)$$

Die von der Spule aufgenommene Leistung ist

$$P = I^2 R = 490W. \quad (5.81)$$

Die *komplexe Wechselstromrechnung* lässt sich nur anwenden, wenn die Induktivität als konstant angesehen werden kann. Dabei werden U_L, I, U_R und Z als komplexe Größen angenommen, ohne sie besonders zu kennzeichnen. Dann gilt für die Selbstinduktionsspannung

$$U_L = I j \omega L. \quad (5.82)$$

Man kann

$$Z = j\omega L \quad (5.83)$$

als die der Induktivität L entsprechende *komplexe Impedanz* auffassen. Der Ohmsche Spannungsabfall ist

$$U_R = IR, \quad (5.84)$$

und es gilt

$$U = U_R + U_L = I(R + j\omega L). \quad (5.85)$$

Die Größe $R + j\omega L$ stellt den komplexen Widerstand oder Impedanz der Induktivität mit Verlustwiderstand dar, wobei R ist der Widerstand und ωL der Blindwiderstand ist. Näheres über die komplexe Wechselstromrechnung siehe in Abschnitt 4.3.

5.4 Dreiphasennetzwerke

Beim *symmetrischen Dreiphasensystem* haben die drei Sternspannungen (Spannung zwischen Außenleiter und Sternpunkt) untereinander gleiche Effektivwerte und Phasenverschiebungen von je $2\pi/3 = 120^\circ$, Abb. 5.14. Ohne weitere Kennzeichnung werden sämtliche Spannungen, Ströme, Impedanzen, und Faktoren als komplex angenommen. Nennt man die drei Sternspannungen U_1, U_2, U_3 , die drei Dreiecksspannungen U_{12}, U_{23}, U_{31} , so gilt

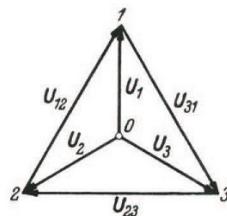


Abbildung 5.14. Zeigerdiagramm der Dreiphasenspannungen

$$U_2 = kU_1, \quad U_3 = kU_2 = k^2U_1, \quad (5.86)$$

wobei

$$k = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -0,5 + j0,866, \quad (5.87)$$

$$k^2 = e^{j240^\circ} = -0,5 - j0,866, \quad (5.88)$$

$$k^3 = e^{j360^\circ} = 1 \quad (5.89)$$

bedeuten. Ferner ist

$$U_{12} = U_1 - U_2 = U_1(1 - k) = U_1(1,5 - j0,866) = \sqrt{3}e^{-j30^\circ}U_1, \quad (5.90)$$

$$U_{23} = U_2 - U_3 = kU_1 - k^2U_1 = kU_{12}, \quad (5.91)$$

$$U_{31} = U_3 - U_1 = k^2U_1 - U_1 = k^2U_{12}. \quad (5.92)$$

Bei beliebiger *unsymmetrischer Belastung* des Netzes erhält man die Ströme durch Anwenden der Kirchhoffschen Gesetze.

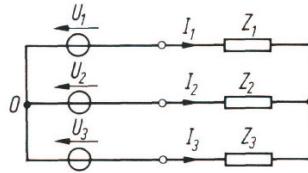


Abbildung 5.15. Dreiphasensystem ohne Sternpunktleiter

Mit Hilfe der Dreiecksternumwandlung kann bei *Systemen ohne Sternpunktleiter* jeder Belastungsfall auf das Schema der Abb. 5.15 zurückgeführt werden.

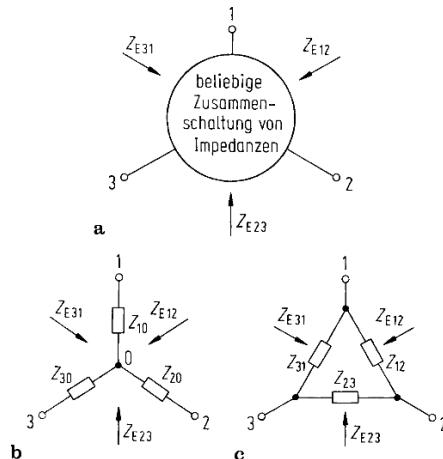


Abbildung 5.16. Stern-Dreieck-Transformation

Dazu betrachten wir den in Abb. 5.16 a gezeigten 3-Pol mit den Klemmen 1, 2, und 3, der speziell einmal aus sternförmig geschalteten Widerständen und dann aus in Dreiecksform geschalteten Widerständen besteht. Wir nehmen an, dass sich von den Klemmen der jeweiligen 3-Pole aus gesehen, die Eigenschaften der sternförmig geschalteten Widerstände nicht von denen der dreiecksförmig geschalteten Widerstände unterscheiden. In Abb. 5.16 a werden

diese Eigenschaften durch die Impedanzen Z_{E12} , Z_{E23} und Z_{E31} repräsentiert. Dann kann man die Widerstände Z_{10} , Z_{20} und Z_{30} (bezogen auf den Sternpunkt 0) der Sternschaltung in die Widerstände Z_{12} , Z_{23} und Z_{31} der Dreieckschaltung umrechnen und umgekehrt, wozu lediglich die Kirchhoffsschen Gesetze und die Ohmschen Strom-Spannungsrelationen benötigt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_{10} &= \frac{Z_{12}Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \\ Z_{20} &= \frac{Z_{23}Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}, \\ Z_{30} &= \frac{Z_{31}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}. \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned} Z_{12} &= \frac{Z_{10}Z_{20} + Z_{20}Z_{30} + Z_{30}Z_{10}}{Z_{30}}, \\ Z_{23} &= \frac{Z_{10}Z_{20} + Z_{20}Z_{30} + Z_{30}Z_{10}}{Z_{10}}, \\ Z_{31} &= \frac{Z_{10}Z_{20} + Z_{20}Z_{30} + Z_{30}Z_{10}}{Z_{20}}. \end{aligned}$$

Nach diesen Hinweisen zur Transformation von Widerstands-3-Polen kommen wir zurück zum Dreiphasensystem in Abb. 5.15. Der Sternpunkt des Verbrauchers nimmt hier im allgemeinen Falle eine Spannung U_0 gegenüber dem Sternpunkt des Netzes an. Für die drei Ströme gilt

$$I_1 = \frac{U_1 - U_0}{Z_1}, \quad (5.93)$$

$$I_2 = \frac{U_2 - U_0}{Z_2}, \quad (5.94)$$

$$I_3 = \frac{U_3 - U_0}{Z_3}. \quad (5.95)$$

Da die Summe dieser drei Ströme gleich 0 sein muss, folgt

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U_1 - U_0}{Z_1} + \frac{U_2 - U_0}{Z_2} + \frac{U_3 - U_0}{Z_3} = 0 \quad (5.96)$$

und hieraus ergibt sich

$$U_0 = Z_p \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} + \frac{U_3}{Z_3} \right), \quad (5.97)$$

wobei zur Abkürzung Z_p den Ersatzwiderstand der drei parallel geschalteten Verbraucherwiderstände bezeichnet

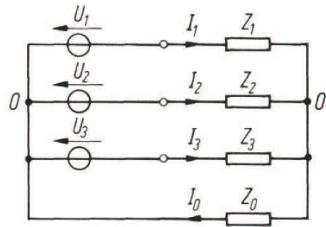


Abbildung 5.17. Dreiphasensystem mit Sternpunktleiter

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}. \quad (5.98)$$

Damit können die drei Außenleiterströme berechnet werden.

Für *Systeme mit Sternpunktleiter* ist das allgemeine Schema durch Abb. 5.17 gegeben. Hier ist

$$U_0 = I_0 Z_0 \quad (5.99)$$

und die Summe der drei Leiterströme gleich dem *Sternpunktleiterstrom* I_0 also

$$\frac{U_1 - U_0}{Z_1} + \frac{U_2 - U_0}{Z_2} + \frac{U_3 - U_0}{Z_3} = \frac{U_0}{Z_0}. \quad (5.100)$$

Daraus ergibt sich

$$U_0 = \frac{Z_0 Z_p}{Z_0 + Z_p} \left(\frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} + \frac{U_3}{Z_3} \right). \quad (5.101)$$

Das Zeigerdiagramm ist für den Fall von symmetrischen Dreiphasenspannun-

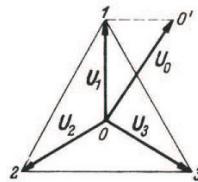
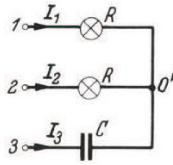


Abbildung 5.18. Symmetrisches Dreiphasennetz mit unsymmetrischer Belastung

gen in Abb. 5.18 gezeigt. Die Lage des Sternpunktes O' der Verbraucher unterscheidet sich im allgemeinen um die Spannung U_0 von 0. Die Verbindungsstrecken zwischen O' und den drei Eckpunkten des Dreiecks geben die Zeiger der Spannungen an den drei Verbrauchersträngen; z. B. ist $\overline{O'1} = U_1 - U_0 = I_1 Z_1$ die Spannung am Verbraucherwiderstand Z_1 .

Beispiele: 1. Bei der in Abb. 5.19 dargestellten *Anordnung zur Feststellung der Phasenfolge* bei Dreiphasenspannungen, bestehend aus den beiden Glühlampenwiderständen R und dem Kondensator mit der Kapazität C , ist

**Abbildung 5.19.** Phasenfolgezeiger

$$Z_1 = Z_2 = R, \quad Z_3 = \frac{1}{j\omega C}. \quad (5.102)$$

Hieraus

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{2}{R} + j\omega C \quad (5.103)$$

und

$$U_0 = U_1 \frac{1 + k + k^2 j\omega CR}{2 + j\omega CR}. \quad (5.104)$$

Daher wird

$$I_1 = \frac{U_1 - U_0}{R} = \frac{U_1}{R(2 + j\omega CR)} (1 + j\omega RC - k - k^2 j\omega RC) \quad (5.105)$$

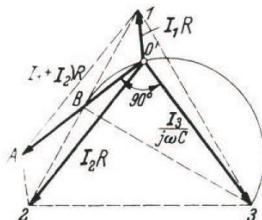
und

$$I_2 = \frac{kU_1 - U_0}{R} = \frac{U_1}{R(2 + j\omega CR)} (k + kj\omega RC - 1 - k^2 j\omega RC) \quad (5.106)$$

Durch Einsetzen von k und k^2 ergibt sich

$$\left| \frac{I_1}{I_2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}\omega RC + (\omega RC)^2}{1 + \sqrt{3}\omega RC + (\omega RC)^2}} \quad (5.107)$$

Dieser Quotient ist für alle Werte von $\omega CR > 0$ kleiner als 1. Die heller brennende Lampe zeigt daher die der dunklen Lampe zeitlich folgende Spannung an.

**Abbildung 5.20.** Zeigerdiagramm für Beispiel 1.

Für die Anordnung der Abb. 5.19 gilt das Zeigerdiagramm Abb. 5.20. Die Summe der beiden Zeiger 0'1 und 0'2 ist $\overline{O'A} = (I_1 + I_2)R$ und somit ein Maß für die Summe der beiden Ströme, die entgegengesetzt gleich I_3 sein muss. Der Zeiger der Spannung 0'3 am Kondensator muss daher gegen $\overline{O'A}$ um 90° voreilen. Daraus folgt die in der Abb. 5.20 angedeutete Konstruktion. B halbiert die Strecke $\overline{T2}$. Der Punkt 0' liegt auf dem Halbkreis über $\overline{B3}$.

2. Wenn in einem Dreiphasennetz ohne Sternpunktleiter *Erdschluss* eines Außenleiters z. B. des Leiters 3, eintritt, so fließt zwischen diesem Außenleiter und Erde ein Strom, der sich über die Erdkapazität der anderen Leiter schließt. Bezeichnet man die Teil-Erdkapazität eines Leiters mit C , so ist im Erdschlussfall

$$Z_1 = Z_2 = \frac{1}{j\omega C}, \quad \frac{1}{Z_3} = j\omega C + \frac{1}{R_3}, \quad (5.108)$$

wenn mit R_3 der als klein angenommene Erdübergangswiderstand bezeichnet wird. Daraus folgt

$$\frac{1}{Z_p} = j3\omega C + \frac{1}{R_3}, \quad (5.109)$$

und nach Gl. (5.97)

$$U_0 = \frac{1}{3j\omega C + 1/R_3} \left(U_1 j\omega C + U_2 j\omega C + \frac{U_3}{R_3} + U_3 j\omega C \right) = \frac{U_3}{1 + 3j\omega R_3}. \quad (5.110)$$

Der Strom in Z_3 wird also

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{U_3 - U_0}{R_3} (1 + j\omega CR_3) = \frac{U_3}{R_3} + U_3 j\omega C - \frac{U_3 (1 + j\omega CR_3)}{(1 + 3j\omega CR_3) R_3} = \\ &= 3j\omega CR_3 \frac{1 + j\omega CR_3}{1 + 3j\omega CR_3}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Angenähert folgt hieraus $I_3 = 3j\omega CU_3$, also für den Effektivwert $|I_3| = 3\omega C|U_3| = 3\omega C|U_1|$.

Ist z.B. $|U_1| = 100kV$, $\omega = 314s^{-1}$ und bei $100km$ Leitungslänge $C = 0,7\mu F$, so wird $|I_3| = 66A$. Ein Lichtbogen zwischen Leiter und Erde kann also einen Strom bis zu dieser Stärke führen.

3. Man senkt die bei Erdschluss einer Leitung entstehende Stromstärke durch die *Erdschlussspule* (W. Petersen 1913). Diese Spule wird zwischen den Sternpunkt der Stromquelle und Erde eingeschaltet. Bei Erdschluss der Leitung 3 ergibt sich dann ein Stromkreis wie in Abb. 5.17 mit

$$Z_1 = Z_2 = \frac{1}{j\omega C}, \quad \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R_3} + j\omega C, \quad Z_0 = j\omega L, \quad (5.112)$$

wenn L die Induktivität der Erdschlussspule bezeichnet. Damit folgt

$$\frac{1}{Z_p} = 3j\omega C + \frac{1}{R_3} \quad (5.113)$$

und nach Gl. (5.101)

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + 3j\omega C + \frac{1}{R_3}} \left(U_1 j\omega C + U_2 j\omega C + \frac{U_3}{R_3} + U_3 j\omega C \right) = \\ &= \frac{U_3}{1 + R_3 \left(\frac{1}{j\omega L} + 3j\omega C \right)}. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Nach Gl. (5.94) ergibt sich

$$I_3 = \frac{U_3 - U_0}{Z_3} \approx U_3 \left(\frac{1}{j\omega L} + 3j\omega C \right) \quad (5.115)$$

und für den Effektivwert angenähert

$$|I_3| = |U_1| 3\omega C \left(1 - \frac{1}{3\omega^2 LC} \right). \quad (5.116)$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn die Induktivität so gewählt wird, dass $3\omega LC = 1$. Im Zahlenbeispiel 2. muss also

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{3 \cdot 9,83 \cdot 10^4 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6}} H = 4,84 H \quad (5.117)$$

gemacht werden. In diesem Fall ist $|U_0| = |U_3|$, und der über die Erdschlussspule fließende Strom $|U_3|/(\omega L)$ hat die gleiche Stärke wie der gesamte kapazitive Strom des Netzes, aber entgegengesetzte Phase, so dass der Erdschlussstrom kompensiert wird.

Im unsymmetrischen Dreiphasensystem, bei dem die drei Sternspannungen U_1, U_2, U_3 beliebige Werte und Phasen sowie einen von Null verschiedenen Summenwert haben können, sind auch die Dreiecksspannungen

$$U_{12} = U_1 - U_2, \quad U_{23} = U_2 - U_3, \quad U_{31} = U_3 - U_1 \quad (5.118)$$

im allgemeinen voneinander verschieden und ungleich gegeneinander phasenverschoben; ihre Summe ist jedoch immer Null. Für die Berechnung der Leiterströme gilt grundsätzlich das gleiche wie im symmetrischen Dreiphasensystem; es gelten also auch hier die Gl. (5.94), (5.97) und (5.101), durch die alle Fälle beliebiger Unsymmetrien und Belastungen erfasst sind. Ein besonderes Verfahren, das häufig mit Vorteil anwendbar ist, bildet die Zerlegung in *symmetrische Komponenten*. Dieses Verfahren zerlegt ein beliebiges System von drei unsymmetrischen Sternspannungen in eine Summe aus

1. einem System von drei symmetrischen Sternspannungen mit positivem Umlaufsinn („Hauptsystem“ oder „Mitsystem“)

$$U_1^{(1)}, \quad U_2^{(1)} = k U_1^{(1)}, \quad U_3^{(1)} = k^2 U_1^{(1)}, \quad (5.119)$$

2. einem System von drei symmetrischen Sternspannungen mit negativem Umlaufsinn („Nebensystem“ oder „Gegensystem“)

$$U_1^{(2)}, \quad U_2^{(2)} = kU_1^{(2)}, \quad U_3^{(2)} = k^2U_1^{(2)}, \quad (5.120)$$

3. einem System von drei gleichphasigen Sternspannungen („Gleichphasensystem“ oder „Nullsystem“)

$$U_1^{(0)} = U_2^{(0)} = U_3^{(0)}. \quad (5.121)$$

Man setzt also

$$U_1 = U_1^{(1)} + U_1^{(2)} + U_1^{(3)}, \quad (5.122)$$

$$U_2 = U_2^{(1)} + U_2^{(2)} + U_2^{(3)}, \quad (5.123)$$

$$U_3 = U_3^{(1)} + U_3^{(2)} + U_3^{(3)}. \quad (5.124)$$

Durch Auflösen nach den drei Komponenten erhält man

$$U_1^{(0)} = \frac{1}{3} (U_1 + U_2 + U_3), \quad (5.125)$$

$$U_1^{(1)} = \frac{1}{3} (U_1 + k^2U_2 + kU_3), \quad (5.126)$$

$$U_1^{(2)} = \frac{1}{3} (U_1 + kU_2 + k^2U_3). \quad (5.127)$$

Mit diesen Gleichungen können die Komponenten leicht berechnet oder grafisch bestimmt werden. Die Berechnung der Leiterströme lässt sich dann für die drei Komponenten einzeln durchführen wie bei den symmetrischen Spannungssystemen. Die wirklichen Ströme ergeben sich durch Summieren der drei Komponenten.

5.5 Der Gyrator

Ein interessantes Beispiel für ein Zweitor ist der *Gyrator*. Wir haben in Abschnitt 4.5 ausführlich erläutert, dass der Umkehrungssatz gemäß der obigen Ableitung bei jedem passiven linearen Zweitor gilt, das beliebig aus Widerständen, Kondensatoren, Spulen mit und ohne magnetische Kopplungen und aus Leitungen zusammengesetzt ist. Solche Zweitore nennt man auch kopplungssymmetrische oder reziproke Zweitore. Es gibt jedoch eine Gruppe von passiven linearen Zweitoren, für die der Umkehrungssatz nicht gilt. Ein Beispiel bildet ein elektrodynamischer Lautsprecher, der auf ein Kondensatormikrofon einwirkt. Werden die Klemmen des Lautsprechers als Eingangsklemmen, die Klemmen des Mikrofons als Ausgangsklemmen betrachtet, so liegt ein lineares Zweitor vor, für den z. B. die Z-Matrixform existiert. Es lässt sich aber zeigen, dass die Reziprozitätsbedingung hier nicht gilt, sondern

$$Z_{21} = -Z_{12}. \quad (5.128)$$

Gegenüber dem kopplungssymmetrischen Zweitor kehrt sich die Richtung der Spannung am leerlaufenden Ende beim Vertauschen von Eingang und Ausgang um. Einen solches Zweitor nennt man einen Gyrator; er lässt sich nicht durch eine Stern- oder Dreieckschaltung von Widerständen darstellen.

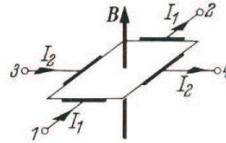


Abbildung 5.21. Feldberechnung bei einem Dipol

Ein anderes Beispiel liefert der Hall-Effekt; siehe Abschnitt 27. In Abb. 5.21 seien 1 - 2 und 3 - 4 die vier Anschlussklemmen eines dünnen Plättchens aus einem geeigneten Hall-Effekt-Leiter; es befindet sich entsprechend Abb. 27.5 in einem konstanten \mathbf{B} -Feld \mathbf{B} . Die Klemmen 1 - 2 seien nun die Eingangsklemmen, die Klemmen 3 - 4 die Ausgangsklemmen eines Zweitors mit den Bezugsrichtungen für die Spannungen wie in Abb. 4.18. Die Zweitor-Gleichungen lassen sich dann in der Z-Matrixform (vgl. (4.131)) schreiben

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & -r \\ r & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \quad (5.129)$$

Dabei bezeichnen R_1 und R_2 die zwischen den Klemmen 1 - 2 bzw. 3 - 4 gemessenen Ohmschen Widerstände (für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$), r ergibt sich aus den auf in Abschnitt 27 erläuterten Beziehungen zu R_h/d . Es zeigt sich also, dass auch hier die Gl. (5.128) gilt und nicht der Umkehrungssatz. Der ideale Gyrator entsteht, wenn die Widerstände R_1 und R_2 vernachlässigbar klein gegen den „Gyratorwiderstand“ r sind. Er wurde im Jahre 1948 von Tellegen [273] eingeführt. Die Zweitor-Gleichungen des idealen Gyrators lauten in der Z-Matrixform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \quad (5.130)$$

Die Kettenmatrix oder A-Matrix des idealen Gyrators ist nach Gl. (29.221)

$$\mathbf{A}_{\text{Gyrator}} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1/r & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.131)$$

Der ideale Gyrator bildet danach ein Gegenstück zum idealen Übertrager, dessen Kettenform oder A-Matrixform lautet

$$\mathbf{A}_{\text{idealerÜ}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}; \quad (5.132)$$

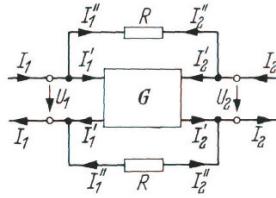


Abbildung 5.22. Gyrator mit Überbrückung

vgl. auch (4.136). Die Vorzeichenumkehr im Kopplungswiderstand nach Gl. (5.128) hat merkwürdige und praktisch wichtige Konsequenzen:

- Wird der Ausgang eines *idealen Übertragers* mit einer beliebigen komplexen Impedanz Z_2 abgeschlossen, so erscheint zwischen den Eingangsklemmen die damit proportionale transformierte Impedanz $\dot{U}^2 Z_2$, was mit Hilfe der Kettenmatrix (5.132) leicht ermittelt werden kann. Wird dagegen der Ausgang des idealen Gyrators mit Z_2 abgeschlossen, so folgt aus der Kettenmatrix für den Eingangswiderstand

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{r^2}{Z_2}. \quad (5.133)$$

D. h. der Scheinwiderstand zwischen den Eingangsklemmen ist umgekehrt proportional dem Abschlusswiderstand. Wird der ideale Gyrator mit einer Kapazität abgeschlossen, so wirkt er am Eingang wie eine Induktivität. Der ideale Gyrator transformiert eine Impedanz in seine „widerstandsreziproke“ oder duale Impedanz; siehe z. B. Feldtkeller [80].

- Besondere Effekte ergeben sich ferner, wenn der Ausgang des Gyrators über irgendwelche Widerstände mit dem Eingang verbunden wird. Die Abb. 5.22 soll ein einfaches Beispiel veranschaulichen. Nach Gl. (5.130) gilt für den idealen Gyrator G

$$U_1 = -rI'_2, \quad U_2 = rI'_1; \quad (5.134)$$

ferner ist

$$I_1 = I'_1 + I''_1, \quad I_2 = I'_2 + I''_2, \quad (5.135)$$

sowie

$$I''_1 = -I''_2 = \frac{1}{2R}(U_1 - U_2). \quad (5.136)$$

Daraus folgt für das gesamte Zweitor

$$I_1 = \frac{1}{2R}U_1 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right)U_2, \quad (5.137)$$

$$-I_2 = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2R}\right) - \frac{1}{2R}U_2. \quad (5.138)$$

In dieser Leitwertform der Zweitor-Gleichungen kann man $Y_{12} = 0$ erhalten, indem man $2R = r$ wählt. Dann wird aus Gln. (5.137), (5.138)

$$U_1 = rI_1, \quad (5.139)$$

$$U_2 = 2U_1 - rI_2. \quad (5.140)$$

Der Eingangswiderstand wird also gleich r , unabhängig vom Abschlusswiderstand des Ausgangs; das Zweitor sperrt in der Richtung vom Ausgang zum Eingang. Die Ausgangsspannung U_2 ergibt sich, indem von der doppelten Eingangsspannung $2U_1$ ein Spannungsabfall rI_2 abgezogen wird. Für das Zweitor gilt also das in Abb. 5.23 gezeigte Ersatzbild, wobei eine gesteuerte Spannungsquelle auftritt. Das Zweitor liefert in einen Abschlusswiderstand $Z_2 = r$ die volle, dem Eingang zufließende Leistung. Ein solches Zweitor bezeichnet man als ideales Trennzweitor. Praktisch verwendete Trennzweitore benützen die Drehung der Polarisationsebene in Ferritmaterial (Faraday-Effekt, siehe Abschnitt 20.1). Diese Drehung führt ähnlich wie die Ablenkung der Ladungsträger beim Hall-Effekt zu einer Gyrorator-Wirkung.

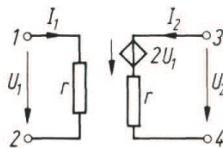


Abbildung 5.23. Ersatzbild des idealen Trennzweitors

Teil III

Das elektrostatische Feld

6

Die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes

Elektrostatische Anziehungskräfte eines mit einem Wolltuch geriebenen Bernsteins (griech. *electron*) waren bereits den Griechen bekannt waren (Thales von Milet; 626 - 547 v. Chr.), aber erst Benjamin Franklin schlug die Bezeichnungen „negativ“ und „positiv“ für die beiden elektrischen „Fluida“ vor, mit denen Körper bestimmter Art – beispielsweise auch Metalle – beaufschlagt werden können. Man wusste auch, dass sich Körper mit unterschiedlichen elektrischen Fluida anziehen, während sie sich bei gleichartigen Fluida abstoßen. Zwischen 1771 und 1789 entdeckten Henry Cavendish und Charles Augustin de Coulomb (vgl. Spektrum der Wissenschaft-Biographie von Maxwell [266]) die Gesetzmäßigkeit dieser Anziehungs- und Abstoßungskräfte. Einzelheiten zur Frühgeschichte der Elektrizität findet man in dem 1772 erschienenen Werk von Priestley [231] und u. a. auch bei Simonyi [262].

Sie fanden heraus, dass der Betrag der Kraft umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstands abnimmt und proportional zu den Ladungen der beiden Körper ansteigt. Die Richtung der Kraft liegt auf der Verbindungsgeraden der Schwerpunkte der beiden Körper. Es zeigte sich also, dass die Form des elektrischen Kraftgesetzes dem des Gravitationsgesetzes von Newton entspricht. Das elektrische Kraftfeld kann also im Rahmen der Experimente von Cavendish und Coulomb mit Hilfe des folgenden (mathematischen) Vektorfeldes modelliert werden

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}, \quad (6.1)$$

wobei Q_1, Q_2 die Ladungen der Körper 1 und 2 sind, die ihren zugehörigen Schwerpunkten zugeordnet sind. Dieses nach Coulomb benannte Kraftfeld hat bei $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ zwar eine Singularität, aber es verschwindet im Unendlichen zusammen mit seinen Ableitungen. Damit kann \mathbf{F}_{12} in einfach zusammenhängenden Gebieten, die den Ursprung $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ nicht enthalten, mit Hilfe seiner Rotation und Divergenz (bis auf eine Konstante) eindeutig festgelegt werden. Das besagt der Satz von Helmholtz, auf den wir weiter unten eingehen. Man kann

leicht zeigen, dass der rotationsfreie Anteil von \mathbf{F}_{12} verschwindet, d.h. es gilt¹ $\text{rot } \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}$.

Die Kraft hängt nur vom Ort ab, so dass nach Abschnitt 3.2 die Newtonsche Relation gilt und somit für die beiden geladenen Körper die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}, \quad (6.2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_2 q_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}. \quad (6.3)$$

aufgestellt werden können. Bereits die Lösung dieses einfachen dynamischen Problems für das elektrische Kraftfeld kann nicht analytisch ermittelt werden, da die Bewegungsgleichungen nichtlinear sind. Man kann jedoch auf die Lösung des Zwei-Körper-Problems der Gravitationstheorie zurückgreifen und die entsprechende Lösung anpassen (vgl. Goldstein [89]); diese Lösung kann nur bis auf ein elliptisches Integral bestimmt werden. Daher ist es offensichtlich, dass es auch für allgemeinere Probleme keine analytische Lösung gibt. An dieser Stelle wollen wir noch darauf hinweisen, dass Ladungen zwar immer an massebehaftete Körper gebunden sind, aber die Gravitationskraft gegenüber der elektrostatischen Kraft vernachlässigt werden kann, da die Gravitationskraft um viele Zehnerpotenzen schwächer ist als die elektrostatische Kraft.

Anstatt die dynamischen Gleichungen mit der Coulomb-Wechselwirkung zu lösen, stellt man sich in der statischen Theorie des elektrischen Feldes – kurz auch Elektrostatik genannt – zunächst einmal die Aufgabe, das Kraftfeld für beliebig vorgegebene Ladungsverteilungen zu ermitteln. Das berechnete Kraftfeld könnte dann auch Ausgangspunkt für dynamische Betrachtungen sein, die ggf. numerisch durchgeführt werden müssen.

Wir wollen an dieser Stelle noch einmal darauf hinweisen, dass mathematische Vektorfelder als Modelle für physikalische Felder genutzt werden. Wie in anderen Fällen dürfen Modell und Realität keinesfalls verwechselt werden. Wir kommen im folgenden auf diesen wichtigen Punkt immer wieder einmal zurück.

Da sich das elektrische Kraftfeld beim Einbringen einer ausgedehnten Ladungsverteilungen in ein vorhandenes Kraftfeld verändert, gehen wir davon aus, dass der geladene Körper mit der Ladung q „wenig“ ausgedehnt ist und die Ladung q „klein“ ist, so dass das elektrische Kraftfeld des anderen Körpers mit der Ladung Q „kaum“ gestört wird; den kleinen Körper nennt man *Probekörper*. Daher wird das Kraftfeld auf die Ladung des Probekörpers normiert und definieren wir auf diese Weise das elektrische Feld oder E-Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q}, \quad (6.4)$$

¹ \mathbf{F}_{12} wird somit nur seine Divergenz bestimmt, die jedoch ebenfalls verschwindet wie man anhand der Beziehung $\text{div}U(\|\mathbf{r}\|)\mathbf{r} = 3U(\|\mathbf{r}\|) + \|\mathbf{r}\|U'(\|\mathbf{r}\|)$ leicht ermittelt.

wobei es sich natürlich um das mathematische Modell des physikalischen elektrischen Feldes handelt. Das als elektrisches Feld eingeführte physikalische Feld repräsentiert im Sinne der Grundexperimente von Cavendish und Coulomb die Kraftwirkung, die von einem Körper mit der Ladung Q auf einen geladenen Probekörper ausgeübt wird. Da das E-Feld proportional zur Coulombschen Kraft \mathbf{F} ist, „erbt“ das E-Feld auch einige Eigenschaften von \mathbf{F} . Insbesondere gilt rot $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Das Coulombsche Kraftgesetz wirkt wie das Gravitationsfeld im Sinne einer Fernwirkung. Der dazwischenliegende Raum sowie die Art und Geschwindigkeit der Ausbreitung der Kraftwirkung wird in diesem Modell nicht berücksichtigt. Da die Zeit in das Kraftgesetz nicht eingeht, breitet sich die Kraftwirkung mit unendlich großer Geschwindigkeit aus. Wir werden später sehen, dass das nur näherungsweise gültig ist. Daher sollte man das physikalische elektrische Feld und sein mathematisches Modell klar unterscheiden.

Obwohl in der Folge des Newtonschen Gravitationsgesetzes alle Kraftfelder im Sinne einer Fernwirkung formuliert worden sind, stellte sich diese Auffassung beim Aufbau der Theorie des elektromagnetischen Feldes als bedeutendes Hindernis heraus. Maxwell ging davon aus, dass Ursache und Wirkung am gleichen Ort stattfinden sollten. Grundsätzlich handelt es sich allerdings um ein philosophisches Prinzip, das seit Maxwell und Einstein beim Aufbau sämtlicher physikalischer Theorien beachtet wird. Eigentlich ist es im Fall statischer oder stationärer Theorien, in denen keine explizite Zeitabhängigkeit auftritt, entbehrlich. Dennoch werden wir das Nahwirkungsprinzip schon beim Aufbau der Theorie des elektrostatischen Feldes beachten und auch beim Ausbau der Theorie wird dieses Prinzip beachtet.

Um die Fernwirkung des mit der Ladung Q geladenen Körpers auf den Probekörper zu eliminieren, wird zunächst die Ladung durch ein gerichtetes Feld in äquivalenter Weise ersetzt. Mathematisch gehen wir dabei vom Helmholtzschen Satz aus, der besagt, dass ein Vektorfeld, das im Unendlichen mitsamt seinen Ableitungen verschwindet, bis auf ein konstantes Feld durch den divergenzfreien und rotationsfreien Anteil festgelegt ist; vgl. Anhang A.2.

Ausgehend von der Erfahrungstatsache, dass sich gleichnamige Ladungen aufsummieren lassen und ungleichnamige Ladungen subtrahieren, können verteilte Ladungen mit Hilfe einer Ladungsverteilungsdichte feldmäßig repräsentiert werden

$$Q = \iiint_V \varrho(\mathbf{r}) dV, \quad (6.5)$$

wobei $\varrho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Die elektrische Erregung in der Umgebung des Körpers mit der Ladung Q wird durch ein weiteres (mathematisches) Vektorfeld $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ repräsentiert, dass im Unendlichen verschwinden soll. Da die Ladungsverteilungsdichte ϱ ein skalares Feld ist, liegt es nahe, die Divergenz von \mathbf{D} mit ϱ in Zusammenhang zu bringen; man setzt

$$\operatorname{div} \mathbf{D} := \varrho. \quad (6.6)$$

Die elektrische Erregung wird auch dielektrische Verschiebungsdichte oder einfach D-Feld genannt.

Um die Rotation dieses D-Feldes \mathbf{D} festzulegen, wird nunmehr ein Materialgesetz $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{r})$ herangezogen. Bei vielen Materialien ist die Materialbeziehung nicht richtungsabhängig (*isotrop*) und häufig genügt ein linearer Ansatz $\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$ für das Materialgesetz. Ist das Material auch noch homogen, dann ist ε konstant und die Eigenschaft $\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$ kann auf das D-Feld übertragen werden.

Wir wollen ausdrücklich noch einmal darauf hinweisen, dass die Begriffe Ladung und D-Feld nur alternativ verwendet werden dürfen. Eine Formulierung etwa wie „die Ladung Q erzeugt das D-Feld“ würde wiederum eine Interpretation im Sinne der Fernwirkungstheorie sein und keine neue begriffliche Grundlage im Sinne der Nahwirkungstheorie schaffen. Somit gehört der Ladungsbegriff zum Fernwirkungsprinzip, während das D-Feld dem Nahwirkungsprinzip zugeordnet werden muss. Bei dieser Einführung der beiden mathematischen Felder in der elektrostatischen Theorie des elektrischen Feldes wird auch deutlich, dass das E-Feld und das D-Feld physikalisch gesehen völlig unterschiedliche Eigenschaften dieses physikalischen Systems repräsentieren. Vielfach wird in der Literatur diese Problematik unklar oder sogar falsch dargelegt.

Auf dieser Basis können nun die Grundgleichungen der Elektrostatik mit Hilfe des E- und des D-Feldes für den Fall linearer, isotroper, homogener Materialien formuliert werden

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \varrho. \quad (6.7)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich zusammen mit den vorgegebenen Randbedingungen die Felder \mathbf{E} und \mathbf{D} bei vorgegebener Ladungsverteilung ϱ berechnen. Allerdings handelt es sich um gemischte algebraische und partielle Differentialgleichungen, die für eine direkte Lösung etwas unbequem sind. Man kann jedoch aus diesen Beziehungen in einfacher Weise eine mathematisch handlichere Grundgleichung ableiten, wenn man sich auf einfach zusammenhängende Raumgebiete beschränken². Dazu nutzt man die bekannte Vektoridentität $\text{rot}\text{grad} = \mathbf{0}$. Die homogene partielle Differentialgleichung für das E-Feld in Gl. (6.7) kann mit Hilfe dieser Identität explizit gelöst werden, wenn man ein (zweimal differenzierbares) Skalarfeld φ verwendet. Wenn man den Gradienten dieses Skalarfeldes, das elektrisches Potenzial φ genannt wird, zur Darstellung des E-Feldes verwendet

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi, \quad (6.8)$$

dann erhält man offensichtlich eine Lösung der homogenen Gleichung $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$, die natürlich nicht eindeutig sein kann, da φ noch nicht festgelegt ist.

Setzt man die Beziehung (6.8) unter Verwendung des (linearen) Materialgesetzes in die Divergenz des D-Feldes ein, so erhält man schließlich mit Gl.

² der Fall mehrfach zusammenhängender Gebiete muss gesondert betrachtet werden

(6.7) die folgende partielle Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (6.9)$$

wobei der Laplaceoperator $\Delta := \text{divgrad}$ verwendet wird. Im Fall linearer inhomogener Materialien erhält man eine allgemeinere partielle Differentialgleichungen (PDgln.), die in Abschnitt 8 abgeleitet wird.

Die Gleichung (6.9) ist vom Typ einer sogenannten Poisson-PDgl., die zur Klasse der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung gehört. In kartesischen x, y, z -Koordinaten kann der Laplaceoperator Δ folgendermaßen notiert werden

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \quad (6.10)$$

Auch in allgemeineren Koordinatensystemen bleibt die Ordnung der Differentialgleichung erhalten, wobei die Koeffizienten der Differentialoperatoren bezüglich der einzelnen Koordinaten nicht notwendigerweise konstant sein müssen. In Anhang B.1 findet man Darstellungen des Laplaceoperators in den wichtigsten Koordinatensystemen.

Im Sinne der Theorie der Zustandsgleichungen nach Abschnitt 2

$$\left(\mathbf{1} \frac{d}{dt} - \mathbf{A} \right) \mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (6.11)$$

kann man die Gleichung (6.9) als Zustandsgleichung des elektrischen Feldes interpretieren, wobei (6.8) und die Materialgleichung als Beobachtungsgleichungen erscheinen, mit denen ggf. die beobachtbaren E- und D-Felder ermittelt werden können.

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon}\rho, \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\varphi. \quad (6.12)$$

Im Mittelpunkt der Analysen im Rahmen der Elektrostatik steht aber die Poisson-PDgl. (6.9). Im Abschnitt 11 wird auf einige grundlegenden analytische und numerische Lösungsverfahren eingegangen.

Neben der differentiellen Form der Grundgleichungen der Elektrostatik (6.7) gibt es noch eine integrale Formulierung, die mit Hilfe der Vektoranalysis und den dort zur Verfügung stehenden Integral-Sätzen leicht ermittelt werden kann; siehe Anhang A. Mit dem Integralsatz von Stokes erhält man

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (6.13)$$

für rot $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, während der Gaußsche Satz angewendet werden muss, um die Integraldarstellung für $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ zu erhalten

$$\oint\!\oint\limits_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \rho dV. \quad (6.14)$$

Schließlich kann man auch eine integrale Formulierung für die Definitionsgleichung des elektrischen Potenzials (6.8) angeben

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} + \varphi(\mathbf{r}_0), \quad (6.15)$$

wenn $\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ irgendein Weg von \mathbf{r} nach \mathbf{r}_0 ist. Die *elektrische Spannung* U_{12} wird als Potenzialdifferenz definiert

$$U_{12} := \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2) = \int_{\mathcal{C}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}, \quad (6.16)$$

wenn $\mathcal{C}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ irgendein Weg von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 ist.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die in den integralen Formulierungen auftretenden Linien- und Flächenintegrale nur symbolischen Charakter haben. Zur Ausführung konkreter Rechnungen müssen einige Vorbereitungen (z. B. die Parametrisierung der entsprechenden Flächen und Kurven) getroffen werden, auf die z. B. in dem sehr empfehlenswerten Repetitorium von Merziger und Wirths [198] ausführlich eingegangen wird; eine umfassende Darstellung der mathematischen Theorie findet man in dem Monographie von Jänich [134].

Elementare Betrachtungen zur Elektrostatik

Eine wesentliche Grundlage für den Aufbau einer Theorie des statischen elektrischen Feldes war die in Abschnitt 6 näher betrachtete elektrostatische Kraftwirkung, die man schon seit langer Zeit kannte. Wir sagen demnach, dass die Umgebung einer Ladung mit einem elektrischen Feld erfüllt ist. Die auf eine Punktladung im elektrischen Feld ausgeübte Kraft ist nach Gl. (6.1) und (6.4)

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}. \quad (7.1)$$

Dabei bedeutet \mathbf{E} das ursprünglich am Ort der Punktladung vorhandene E-Feld. Die Kraft, die zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand a auftritt, lässt sich danach in folgender Weise berechnen. Wäre nur die Punktladung Q_1 vorhanden, so würde sich am Ort der anderen Punktladung nach Gl. (6.4) ein E-Feld mit dem Betrag

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon a^2} \quad (7.2)$$

einstellen. Für den Betrag der Kraft gilt daher (Coulomb 1785)

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon a^2}; \quad (7.3)$$

die Coulomb-Kraft sucht Ladungen gleichen Vorzeichens voneinander zu entfernen, Ladungen entgegengesetztes Vorzeichens einander zu nähern. Von diesem durch Coulomb experimentell entdeckten Gesetz hat die Elektrizitätslehre ihren Ausgang genommen; ihre geschichtliche Entwicklung ging gegenüber dem hier Dargestellten den umgekehrten Weg. Das Coulombsche Gesetz gab die Möglichkeit, Elektrizitätsmengen zu messen; damit konnte man aufgrund der Gl.(6.16) das E-Feld und die elektrische Spannung definieren.

Weiterhin wurden im letzten Abschnitt darauf basierend die Grundlagen der Theorie des statischen elektrischen Feldes entwickelt. Setzt man die Gültigkeit des Nahwirkungsprinzips voraus, dann werden zwei mathematische

Vektorfelder, nämlich das E-Feld und das D-Feld benötigt, um alle physikalischen Aspekte des elektrischen Feldes zu beschreiben. Auch wenn sich diese Vektorfelder zur Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge gut eignen, ist es für die Analyse komplexer Probleme der Elektrostatik zweckmäßig, bei der Ableitung entsprechender Verfahren von der Poisson-PDgl. auszugehen. Diese Differentialgleichung für das elektrische Potenzial kann als Zustandsgleichung der Elektrostatik aufgefasst werden. Zuvor wollen wir anhand einiger elementarer Überlegungen über die Vektorfelder \mathbf{E} und \mathbf{D} und das elektrische Potenzial φ zur Veranschaulichung dieser Größen beitragen.

Dazu geht man besser vom elektrischen Potenzial aus; das E-Feld kann dann nach (6.8) durch Bildung des Gradienten ermittelt werden. Das Potenzial ist ein Skalarfeld und kann durch Niveaumassen veranschaulicht werden, die Richtung des E-Feldes durch Feldlinien oder „Kraftlinien“. Sie gehen vom Leiter mit dem höheren Potenzial zum Leiter mit dem niedrigeren Potenzial und geben überall die Richtung der Kräfte an, die im elektrischen Feld auf positive elektrische Ladungen (Elektrizitätsmengen) ausgeübt werden. Geometrisch zeigt das E-Feld die Abnahme des Potenzials längs einer „kleinen“ Strecke mit der stärksten Abnahme geteilt durch diese Strecke an. Das E-Feld ist punktweise also ein Vektor, der senkrecht auf der Niveaumasse steht und in die Richtung abnehmenden Potenzials zeigt. Um für einen beliebigen Punkt eines Potenzialfeldes das E-Feld zu bestimmen, denke man sich durch den betrachteten Punkt die Niveaumasse gelegt, Abb. 7.1, und erichte die Sen-

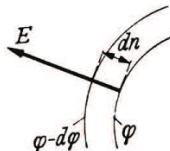


Abbildung 7.1. Berechnung des E-Feldes

rechte auf dieser Niveaumasse. Man schreite dann längs dieser Senkrechten um ein kleines Stück dn^1 in Richtung abnehmenden Potenzials fort und bestimme die Abnahme $d\varphi$ des Potenzials auf diesem Weg. Dann ist der Betrag des E-Feldes

$$\|\mathbf{E}\| = \left| \frac{d\varphi}{dn} \right|. \quad (7.4)$$

Diese Ableitung ist gerade der Betrag des Gradienten des Potenzials, wobei noch eine Richtung für das vektorielle E-Feld ausgezeichnet werden muss.

¹ wir benutzen hin und wieder die Bezeichnung ds oder $d\mathbf{s}$ etc. als skalare oder vektorielle „differenzielle“ Wegelemente, die man sich im Sinne des linearen Terms einer Taylorreihe von f als endliche Differenzen denken kann. Im skalaren Fall gilt: $\Delta_{x_0} f(x) := f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\Delta_{x_0} x =: dx_0 f(x)$; Die Indizes x_0 werden üblicherweise weggelassen und die Größe $\Delta_{x_0} x$ wird mit dx bezeichnet.

Entsprechend (6.8) verwendet man im Sinne einer Konvention den negativen Gradienten.

Zeichnet man das Niveaulinienbild so, dass benachbarten Niveaulinien immer die gleiche Potenzialdifferenz entspricht, so liegen die Niveaulinien um so dichter nebeneinander, je größer der Betrag des E-Feldes ist.

Die Potenzialdifferenz zwischen zwei beliebigen Punkten a und b im Potenzialfeld lässt sich mit Hilfe des Wegintegrals in (6.13) berechnen, wobei statt geschlossenen Weges irgendein Weg von a nach b in Abb. 7.2 verwendet

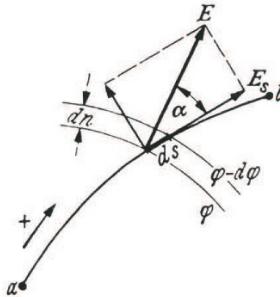


Abbildung 7.2. Berechnung der Spannung aus dem E-Feld

wird; vgl. (6.16). Wir betrachten einen kleinen Abschnitt ds des Weges. Die Potenziale der Endpunkte des Wegelements ds seien φ und $\varphi - d\varphi$. Das E-Feld steht senkrecht zu den Niveaulinien; sie bilden einen Winkel α mit dem Wegelement ds . Der Abstand dn der beiden Niveaulinien ist daher

$$dn = ds \cos \alpha, \quad (7.5)$$

und nach Gl. (7.4) gilt ($E := \|\mathbf{E}\|$)

$$d\varphi = Edn = Eds \cos \alpha. \quad (7.6)$$

Zerlegt man andererseits den Vektor des E-Feldes in die Komponenten in Richtung des Wegelements ds und senkrecht dazu, so ist der Betrag der erstgenannten Komponenten

$$E_s = E \cos \alpha. \quad (7.7)$$

Es gilt daher für die Potenzialunterschied der Endpunkte des Wegelementes auch

$$d\varphi = E_s ds. \quad (7.8)$$

Die ganze Potenzialdifferenz zwischen den Punkten a und b ergibt sich durch Summierung dieser einzelnen Beiträge über den ganzen Weg

$$\int_a^b E_s ds = \varphi_a - \varphi_b. \quad (7.9)$$

E_s ist positiv einzusetzen, wenn E_s in die Integrationsrichtung fällt, negativ bei entgegengesetzter Richtung. Es gilt daher

$$\int_a^b E_s ds = - \int_b^a E_s ds. \quad (7.10)$$

Das nach Gl. (7.9) gebildete Integral ist das Linienintegral des E-Feldes. *In einem Potenzialfeld der betrachteten Art ist das Linienintegral des E-Feldes unabhängig vom Weg gleich der Differenz der Potenziale zwischen Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges.*

Im Sinne der Vektoranalysis kann man auch das Wegelement ds als Vektor $d\mathbf{s}$ auffassen, dessen Richtung durch eine willkürlich als positiv angenommene Wegrichtung, z.B. die Richtung des +Pfeils in Abb. 5.8, bestimmt ist. Die Potenzialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt des Wegelements ist dann das skalare Produkt der beiden Vektoren \mathbf{E} und $d\mathbf{s}$, also

$$d\varphi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (7.11)$$

Für die Potenzialdifferenz zwischen einem Ausgangspunkt und einem auf der positiven Wegrichtung zu erreichenden Endpunkt eines beliebigen Weges gilt daher

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (7.12)$$

Führt man hier die Darstellung des E-Feldes durch den Gradienten ein, Gl. (6.8), so folgt noch (negatives Vorzeichen des Gradienten wird auf der rechten Seite berücksichtigt)

$$\int_a^b \text{grad}\varphi \cdot d\mathbf{s} = \varphi_b - \varphi_a. \quad (7.13)$$

Im Rahmen dieses Buches soll die Theorie elektromagnetischer Felder im wesentlichen als Kontinuumstheorie entwickelt werden; das gilt auch für die Ladungen und Ladungsverteilungen. Allerdings wird es gelegentlich nötig sein, auch auf den atomistischen Hintergrund der Ladungen hinzuweisen. In der Festkörperphysik wird gezeigt, dass elektrische Ladungen in bestimmten Materialien – sogenannten Leitern – eine gewisse Beweglichkeit besitzen. In metallischen Leitern sind das hauptsächlich negativ geladene Elektronen. In der statischen Näherung des elektrischen Feldes ist innerhalb des leitenden Elektrodenmaterials das E-Feld null, da sonst aufgrund der Kraftwirkung des Feldes auf die Ladungen eine Verschiebung stattfinden würde; es würde ein Strom fließen. Daher gilt: *Die Oberflächen leitender Elektroden sind im elektrischen Feld Niveauplatten.* Die elektrischen Feldlinien münden senkrecht auf den Leiteroberflächen; sie entspringen oder endigen dort; es gilt also für die tangentiale Komponente des E-Feldes

$$E_{tang} = 0. \quad (7.14)$$

Während bei den elektrischen Leitern einzelne Elektronen eine gewisse Bewegungsfreiheit haben, werden in den Nichtleitern alle Elektronen durch die Atomkräfte im Atomverband oder im Molekül festgehalten. Befindet sich daher in dem Raum zwischen den Elektroden ein nichtleitender Stoff, so entsteht unter der Einwirkung der elektrischen Feldkräfte auf die positiv und negativ elektrischen Bestandteile der Atome und Moleküle lediglich eine elastische Verschiebung dieser Bestandteile; im Gleichgewichtszustand halten die äußeren Feldkräfte den inneren Atomkräften die Waage. Man nennt diese Erscheinung die *Polarisation* des Nichtleiters. Die Herstellung des Gleichgewichtszustandes geht mit einer Verschiebung von Elektrizitätsmengen längs der Feldlinien einher, d.h. mit dem Auftreten eines kurzzeitigen elektrischen Stromes in dieser Richtung. Dieser Strom wird bei der Herstellung des elektrischen Feldes als Ladestrom beobachtet, der der einen Elektrode zufließt und von der anderen abgenommen wird. Die Ladung einer Elektrode ist gleich der gesamten Elektrizitätsmenge, die durch den Ladestrom transportiert wird.

Wird das elektrische Feld so hergestellt, dass an zwei isolierten Elektroden die beiden Pole einer Spannungsquelle gelegt werden, so müssen die beiden Ladungen wegen der Kontinuität des elektrischen Stromes entgegengesetzt gleich sein. Entfernt man die Spannungsquelle von den Elektroden, so bleibt der hergestellte Zustand erhalten, da die aufgebrachten Ladungen sich nicht über den isolierten Raum ausgleichen können. Die Elektroden behalten ihre Ladung und damit auch ihren Potenzialunterschied bei.

Da im Innern der leitenden Elektroden kein Potenzialgefälle besteht und die äußeren Feldkräfte nur an der Oberfläche der Elektroden angreifen, so ist die Oberfläche der Leiter als Sitz der Ladungen aufzufassen. Die Ladung Q einer Elektrode verteilt sich in bestimmter Weise über die Oberfläche. Man kann daher eine *Ladungsdichte* definieren als die in einem Flächenelement der Leiteroberfläche vorhandene Ladung geteilt durch das Flächenelement. Befindet sich in einem kleinen Flächenelement ΔA der Leiteroberfläche eine Ladung ΔQ , so ist $\sigma := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta Q / \Delta A$ die Flächenladungsdichte (z.B. $0,1 \text{ As/cm}^2$).

Veranschaulicht man die Richtung des E-Feldes an jeder Stelle des Raumes durch die Feldlinien, die von der positiv geladenen Elektrode zur negativ geladenen übergeht, so kann man die Menge der Ladungen dadurch darstellen, dass man die Feldlinien an den Leiteroberflächen um so dichter zeichnet, je größer die Ladungsdichte an der betreffenden Stelle ist (M. Faraday 1831). Die Anzahl der Linien, die von der Fläche einer Elektrode ausgehen, gibt dann ein Maß für die gesamte Ladung der Elektrode an. Wir nennen diese Gesamtheit der Linien dieser Elektrodenfläche den *elektrischen Fluss* und bestimmen: *Der von einer Elektrode ausgehende elektrische Fluss ist gleich der Ladung der Elektrode.* Die Dichte der D-Feldlinien entspricht der *elektrische Erregung*. Der Betrag des D-Feldes ist gleich dem elektrischen Fluss geteilt durch die Querschnittsfläche und dessen Richtung ist durch die Richtung der D-Feldlinien gegeben. Bezeichnet ΔA das Flächenelement einer Niveaumöglichkeit, so ist ΔQ der elektrische Fluss, der durch das Flächenelement hindurchgeht,

so gilt also für den Betrag des D-Feldes an der betrachteten Stelle

$$D = \|\mathbf{D}\| = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta Q / \Delta A. \quad (7.15)$$

Der *elektrische Fluss*, der durch eine beliebige Fläche A hindurchgeht, ergibt sich, wenn man das D-Feld in jedem Flächenelement in die normale und die tangentiale Komponente zerlegt, wobei die letztere nicht zum Fluss beiträgt. Der elektrische Fluss kann man in folgender Weise definiert werden

$$\iint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}, \quad (7.16)$$

wobei nur der Anteil des D-Feldes berücksichtigt wird, der die Fläche A senkrecht durchdringt. Anschaulich kann man den Fluss durch ein Bündel von Flusslinien darstellen, das definitionsgemäß gleich der Ladung ist, von der das Bündel ausgeht oder auf der das Bündel endigt.

Legt man in das elektrische Feld, das eine leitende, endlich ausgedehnte Elektrode umgibt, eine beliebige Hüllfläche \mathcal{O} , welche die leitende Elektrode vollständig umgibt, so ist das durch die Hüllfläche tretende D-Feld gleich der Ladung Q auf der Elektrode. Mit (7.16) kann man diesen Sachverhalt in folgender Weise ausdrücken

$$\oint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q. \quad (7.17)$$

Legt man die Hüllfläche \mathcal{O} so, dass sie keine Ladungen umschließt, so gilt

$$\oint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (7.18)$$

In Gl.(6.14) haben wir gesehen, dass man die integrale Beziehung zwischen D-Feld und Ladungsdichte auch mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung formulieren kann. Dazu wird der Divergenz-Operator benötigt, der mit Hilfe einer Grenzwertbildung in folgender Weise gebildet werden kann. Es werde ein beliebiges elektrisches Feld betrachtet mit einer Anzahl von Elektroden, deren Zwischenraum durch nichtleitende Stoffe ausgefüllt ist. In einem nichtleitenden Raum können im allgemeinen freie Elektrizitätsmengen, Elektronen oder Ionen, vorhanden sein; man spricht in diesem Fall von einer *Raumladung* des Nichtleiters. Grenzen wir irgendeinen kleinen Raumteil V beliebiger Form, z.B. einen Würfel, in dem Nichtleiter ab, so kann daher in diesem Raumteil im allgemeinen Fall eine bestimmte Raumladung $Q(V)$ enthalten sein. Durch Division mit dem Volumen V des Raumteiles erhält man die auf das Volumen bezogene Ladung. Dieser Quotient nähert sich einem Grenzwert, wenn man den Raumausschnitt kleiner und kleiner werden lässt, vorausgesetzt, dass seine Abmessungen noch groß sind gegen die Abstände der Elektronen oder

Ionen. Es sei darauf hingewiesen, dass man die Existenz eines Grenzwertes in physikalischer Weise motiviert anstatt durch bestimmte Eigenschaften der mathematischen Funktion $Q(V)/V$. Den auf diese Weise erhaltenen Grenzwert nennen wir die *Raumladungsdichte*

$$\varrho := \lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q(V)}{V}, \quad (7.19)$$

die in Abschnitt 6 bei der feldmäßigen Darstellung von Ladungen Q eingeführt wurde. Es ist dies eine positive oder negative Größe, die man z.B. in As/m^3 messen kann. Bei gegebener (konstanter) Raumladungsdichte folgt für die Ladung des sehr kleinen Raumteiles

$$Q(V) = \varrho V. \quad (7.20)$$

Nach (7.17) kann man nun diese Ladung auch darstellen durch das Flächenintegral des D-Feldes über die Oberfläche \mathcal{O} des Raumausschnittes V und der Grenzwert (7.19)

$$\varrho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}. \quad (7.21)$$

Diese Beziehung kann folgendermaßen gedeutet werden. Ist an jeder Stelle des elektrischen Feldes das D-Feld gegeben und bildet man das Flächenintegral des D-Feldes über die Oberfläche eines kleinen Raumteiles, so nähert sich der Quotient des Integrals zum Volumen des Raumteiles bei abnehmendem Volumen einer festen Grenze, nämlich der Raumladungsdichte. Man bezeichnet die Operation, mit der man aus dem Vektor des D-Feldes diesen Grenzwert erhält, als die Bildung der Divergenz des D-Feldes

$$div \mathbf{D} := \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}. \quad (7.22)$$

Die Existenz dieses Grenzwertes fordert man nicht nur beim D-Feld, sondern auch für mathematische vektorielle Felder, die verwandte physikalische Eigenschaften beschreiben wie z.B. die elektrische Stromdichte oder das B-Feld oder die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsströmung. *Die Divergenz bestimmt den je Raumeinheit entspringenden Fluss.* Insgesamt erhält man mit Gl. (7.19) und Gl. (7.22) die Beziehung

$$div \mathbf{D} = \varrho. \quad (7.23)$$

Die Divergenz des D-Feldes ist gleich der Raumladungsdichte. Wenn keine Raumladungen vorhanden sind, dann gilt

$$div \mathbf{D} = 0. \quad (7.24)$$

Die in einem beliebigen Raum vorhandene Gesamtladung Q ist

$$Q = \iiint_V \varrho dV = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV, \quad (7.25)$$

wobei das Integral über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Andererseits gilt

$$Q = \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}, \quad (7.26)$$

wobei das Flächenintegral über die den Raumteil begrenzende Fläche zu bilden ist. Durch Vergleich dieser beiden Beziehungen erhält man die bereits in (6.14) angegebene Integraldarstellung von $\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho$

$$\iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \varrho dV. \quad (7.27)$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes sollte noch einmal darauf hingewiesen werden, dass diese Überlegungen zur Illustration der mathematischen Felder des elektrischen Feldes in elektrostatischer Näherung dienen sollen. Besonders bei der anschaulichen Einführung des D-Feldes wurde deutlich, dass eine wirkliche Begründung für ein zusätzliches Feld in der Elektrostatik nicht gegeben werden kann. Erst mit der Unterscheidung von Fernwirkungs- und Nahwirkungskonzept kann die Einführung des D-Feldes sinnvoll gerechtfertigt werden. Dennoch sind diese Überlegungen für eine begriffliche Diskussion auch in der Elektrostatik durchaus nützlich.

Materialgesetze in der Elektrostatik

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, dass der Fluss des D-Feldes gleich der Ladung der Elektroden ist. Somit kann das Verhältnis des D-Feldes zum E-Feld experimentell untersucht werden. Hierzu kann z.B. eine Anordnung nach Abb. 8.1 dienen. Zwei ebene parallele Metallplatten stehen sich mit der Fläche A in einem kleinen Abstand d gegenüber. Im Zwischenraum befindet sich der zu untersuchende Nichtleiter. An die beiden Elektroden kann mit Hilfe eines Schalters S eine Spannungsquelle gelegt werden; sie erzeugt an den Elektroden eine Potenzialdifferenz U , die durch das Voltmeter V angezeigt wird. Der Strom fließt dabei durch ein ballistisches Galvanometer G , dessen Maximalausschlag anzeigt, wie groß die Elektrizitätsmenge Q ist, die die Platten aufgenommen haben. Diese Elektrizitätsmenge ist gleich dem Fluss des D-Feldes zwischen den Platten. Wenn der Abstand d der beiden Platten sehr

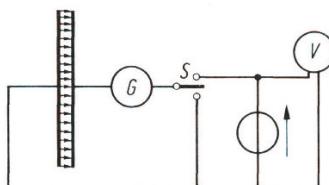


Abbildung 8.1. Experimentelle Untersuchung des Zusammenhangs zwischen E- und D-Feld

klein gegen die gegen die Flächenabmessungen ist, so geht der Fluss des D-Feldes praktisch vollständig in dem Zwischenraum von einer Platte zu anderen über. Das Feld zwischen den beiden Platten ist homogen. Alle Niveauplatten sind parallele Ebenen. Das E-Feld steht senkrecht auf diesen Ebenen; es hat überall den Betrag

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{U}{d}. \quad (8.1)$$

Der Verschiebungsfluss mit dem Wert Q verteilt sich gleichmäßig auf die ganze Fläche A . Das D-Feld hat daher überall den Betrag

$$\|\mathbf{D}\| = \frac{Q}{A}. \quad (8.2)$$

Die Messung der Potenzialdifferenz liefert also bezogen auf den Plattenabstand d den Betrag des E-Feldes, während man aus der Ablesung am ballistischen Galvanometer den Betrag des D-Feldes berechnen kann. Führt man derartige Messungen bei verschiedenen Potenzialdifferenzen aus, so findet man, dass bei den üblichen Isolierstoffen in einem weiten Bereich des E-Feldes das *D-Feld proportional zum E-Feld* ist, so dass man unter Berücksichtigung der Richtung dieser Größen schreiben kann

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (8.3)$$

Man spricht von einem linearen Materialgesetz in der Elektrostatik. Die Größe ε ist eine Materialkonstante; sie wird *Dielektrizitätskonstante* oder *Permittivität* des betreffenden Stoffes genannt. Es ist

$$\varepsilon = \frac{\|\mathbf{D}\|}{\|\mathbf{E}\|} = \frac{Qd}{UA}. \quad (8.4)$$

Setzt man Q in As , U in V , d in m und die Fläche in m^2 ein, d.h. arbeitet man mit SI-Einheiten, so erhält man als Einheit für ε

$$1 \frac{As}{Vm} =: 1 \frac{F}{m}, \quad (8.5)$$

wenn man die Abkürzung Farad $F := As/V$ verwendet.

Auch wenn sich kein materieller Nichtleiter zwischen den beiden Platten befindet, zeigt das Galvanometer G eine Aufladung der Elektroden an, die proportional der Potenzialdifferenz U ist. Natürlich kann auch im leeren Raum die Ladung Q im Sinne einer Nahwirkungstheorie feldmäßig durch ein D-Feld beschrieben werden und man erhält eine entsprechende Dielektrizitätskonstante, die mit ε_0 bezeichnet wird. In anderen Einheitensystemen als dem internationalen System (SI) kann diese Größe auf den Wert Eins normiert werden, was hinsichtlich der Unterscheidung von E- und D-Feld gelegentlich zu Problemen führt. An dieser Stelle soll noch einmal auf die ganz unterschiedlichen Gründe der Einführung dieser beiden Felder hingewiesen werden.

Der Wert von ε_0 kann messtechnisch ermittelt werden oder – wie man später in Abschnitt 34.1 sehen wird – mit anderen Naturkonstanten in Zusammenhang gebracht werden. Es gilt nach Gl.(34.12) $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2)$, wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante oder Permeabilität des freien Raumes (vgl. Abschnitt 20). Es ergibt sich folgender Wert

$$\varepsilon_0 = 8,85418782 \frac{pF}{m}. \quad (8.6)$$

Es ist zweckmäßig die Dielektrizitätskonstante anderer Materialien mit ε_0 ins Verhältnis zu setzen; man erhält dann die relative Dielektrizitätskonstante (auch Permittivitätszahl genannt) der betreffenden Materialien

$$\varepsilon_r := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \quad (8.7)$$

Diese Zahl ist für Luft und gasförmige Stoffe fast genau gleich Eins. Für weitere Isolierstoffe der Elektrotechnik sind die entsprechenden Werte der Dielektrizitätskonstante in der Literatur zu finden; z. B. in der Hütte [126].

Auch wenn wir die Theorie des elektrischen Feldes grundsätzlich als Kontinuumstheorie auffassen, ist es gelegentlich nützlich, die Verhältnisse mit Hilfe einer mikroskopischen Deutung zu illustrieren. Daher soll auf einige, teilweise auf Maxwell zurückgehende Überlegungen hinzugefügt werden. Allerdings soll eine Ausweitung auf aktuelle festkörperphysikalischen Vorstellungen nicht vorgenommen werden, da sonst der gesteckte Rahmen dieses Lehrbuches überschritten wird. Die interessierten Leserinnen und Leser werden auf die entsprechende Literatur verwiesen (vgl. z.B. Wijn, Dullenkopf [305]).

Der Fluss des D-Feldes bzw. Verschiebungsfluss besteht also gemäß den obenstehenden Ausführungen aus zwei Anteilen, einem Anteil, der durch die „Verschiebung“ von Elektrizitätsmengen im Inneren der Moleküle des Nichtleiters infolge der Polarisation entsteht, und einem zweiten, der bereits im leeren Raum auftritt.

Die Unterteilung des Flusses des D-Feldes in den im Vakuum entstehenden Teil und den durch den Isolierstoff bedingten Teil bringt man dadurch zum Ausdruck, dass man setzt

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = (\varepsilon_0 + \chi_e \varepsilon_0) \mathbf{E}, \quad (8.8)$$

wobei $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$ gilt. Man bezeichnet \mathbf{P} als „elektrische Polarisation“ des Dielektrikums, χ_e als *dielektrische Suszeptibilität*; es gilt

$$\chi_e = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} = \varepsilon_r - 1. \quad (8.9)$$

Der zweite Teil des Flusses des D-Feldes kann formal in gleicher Weise gedeutet werden wie der erste, wenn man die Existenz eines ruhenden „Äthers“ annimmt, der alle Materie durchsetzt, und der ähnliche Eigenschaften besitzt wie die Materie, nur mit dem Unterschied, dass er viel feiner unterteilt ist. Man kann dann den Fluss des D-Feldes im leeren Raum als die *Polarisation des Äthers* auffassen. Die Folgerungen, die man auf Grund dieser von Maxwell herrührenden Vorstellungen ziehen kann, decken sich auf das Beste mit der Erfahrung, solange es sich um Vorgänge handelt, bei denen sich die materiellen Körper mit Geschwindigkeiten gegeneinander bewegen, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Die Vorstellung des ruhenden Äthers kann nicht aufrechterhalten werden, wenn man zu einer einheitlichen Darstellung auch bei sehr rasch ablaufenden Bewegungsvorgängen gelangen

will; man müsste auf Grund der Erfahrungstatsachen dem Äther komplizierte Eigenschaften zuschreiben, z.B. die, dass der Äther auf jedem gleichförmig gegen das Fixsternsystem bewegten Körper in Ruhe zu sein, d.h. sich mit dem betreffenden Körper zu bewegen scheint, auch bei beliebigen Bewegungen verschiedener Körper gegeneinander. Obwohl daher die Annahme eines ruhenden Äthers im leeren Raum streng genommen nicht zulässig ist, ist doch die Zusammenfassung der beiden Anteile des Flusses des D-Feldes zu einem einzigen außerordentlich zweckmäßig, solange eben die vorkommenden Relativgeschwindigkeiten der materiellen Körper genügend klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit (vgl. Abschnitt 33). Eine kurze und leicht verständliche Einführung in die spezielle Relativitätstheorie findet man bei Lehner ([162], A.6); dort findet man auch weiterführende Literatur.

Das D-Feld wurde in Abschnitt 6 im Rahmen der Nahwirkungsvorstellung als der Ladungsverteilung äquivalentes (mathematisches) Feld in die Elektrostatik eingeführt und ist bei gegebenem – nicht notwendigerweise linearem – Materialgesetz an jeder Stelle des Raumes durch das dort herrschende E-Feld bestimmt. Bei der *Herstellung* des elektrischen Feldes fließt im Sinne der obenstehenden Vorstellungen an jeder Stelle des Nichtleiters längs der D-Feldlinien ein Strom (Verschiebung von Ladungen, den man als „Verschiebungsstrom“ bezeichnen kann), dessen Gesamtstärke gleich dem in den Leitungen zu den Elektroden fließenden Strom ist; dieser „Verschiebungsstrom“ verschwindet im Nichtleiter und daher auch in den Zuleitungen wieder, wenn der Vorgang der Aufladung beendet ist. Dadurch kann auch für zeitlich veränderliche Vorgänge die Vorstellung des in sich geschlossenen Stromkreises beibehalten werden; der Strom in den Zuleitungen setzt sich im Nichtleiter als „Verschiebungsstrom“ fort. Auf diese Vorstellungen werden wir in Abschnitt 26 über das quasi-stationäre elektromagnetische Feld näher eingehen. Das Resultat dieses „Verschiebungsstromes“ ist der Fluss des D-Feldes zwischen den Elektroden im Nichtleiter.

Die relative Dielektrizitätskonstanten (Permittivitätszahlen) von elektrisch leitenden Stoffen kann man nicht in der angegebenen Weise bestimmen; man findet sie durch Wechselspannungsmessungen. Da in den metallischen Leitern nur ein kleiner Teil der Elektronen frei ist, so muss auch in den Metallen dem Leistungsstrom ein Verschiebungsstrom bzw. eine zeitliche Veränderung des Verschiebungsflusses überlagert sein. Die relative Dielektrizitätskonstante der Metalle ist jedoch im Bereich der technischen Wechselströme nicht messbar und wahrscheinlich kleiner als 10; bei Germanium ist $\epsilon_r \approx 16$, bei Silizium $\epsilon_r \approx 12$.

Nicht für jedes elektrostatisch wirksame Material gilt ein linearen Materialgesetz mit konstanter Dielektrizitätskonstante. Beispielsweise ist ϵ_r von Bariumtitannat nicht konstant, sondern hängt vom E-Feld ab.

Grundsätzlich kann man die folgenden Fälle unterscheiden:

- Lineare, isotrope, homogene Materialien: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ($\epsilon = \text{konst.}$)
- Lineare, isotrope inhomogene Materialien: $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ($\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$)

- Lineare, anisotrope Materialien mit Symmetrien: $\mathbf{D} = \mathbb{E}\mathbf{E}$. Die lineare Abbildung \mathbb{E} ist symmetrisch, d. h. es gilt $\mathbb{E} = \mathbb{E}^T$, und sie wird in der Literatur häufig auch Dielektrizitätstensor genannt, deren Eigenvektoren die Symmetrieeachsen des Materials kennzeichnen; vgl. z. B. Lehner [162]. Bei einer Hauptachsentransformation geht \mathbb{E} in eine Diagonalform $\text{diag}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$ über und im einfachsten Fall $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} =: \varepsilon$ ergibt sich der lineare, isotrope, homogene Fall.
- Nichtlineare Materialien¹: $\mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{E})$ oder $\mathbf{F}(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = \mathbf{0}$.

Ein Sonderfall sind die linearen inhomogenen Materialien, bei den die Dielektrizitätskonstante ε stückweise konstant ist, d.h. das interessierende Raumgebiet V kann in Teilgebiete V_k zerlegt werden, in denen ε jeweils konstant ist. Um das Verhalten des E- und des D-Feldes an den Rändern dieser Teilgebiete zu verstehen, betrachten wir zunächst den allgemeinen linearen, inhomogenen Fall $\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass wegen des Satzes von Helmholtz die Rotation des D-Feldes bzw. die Divergenz des E-Feldes noch festgelegt werden müssen, da auf physikalischer Grundlage (elektrostatische Kräfte, feldmäßige Darstellung von Ladungen) zunächst nur die Divergenz bzw. Rotation dieser mathematischen Felder begründbar sind. Die noch fehlenden Beziehungen lassen sich für den Spezialfall eines linearen, isotropen, homogenen Materialgesetzes $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ($\varepsilon = \text{konst.}$) sehr einfach festlegen. Wir untersuchen nun, wie man die gesuchten Eigenschaften des D- und E-Feldes im Fall linearer inhomogener Materialien ($\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$) findet; diese Überlegungen findet man bei Weizel [300]. Dazu geht man von zwei vektoranalytischen Identitäten aus

$$\begin{aligned}\text{rot}(f \mathbf{F}) &= f \text{rot}\mathbf{F} + \text{grad}(f) \times \mathbf{F}, \\ \text{div}(f \mathbf{F}) &= f \text{div}\mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \text{grad}f,\end{aligned}$$

wobei f ein skalares Feld und \mathbf{F} ein vektorielles Feld ist. Davon ausgehend erhält man die entsprechenden Beziehung für die Rotation des D-Feldes und die Divergenz des E-Feldes in linearen inhomogenen Materialien

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{D} &= \text{rot}(\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \text{rot}\mathbf{E} + \text{grad}(\varepsilon) \times \mathbf{E} = \text{grad}(\varepsilon) \times \mathbf{E}, \\ \text{div}\mathbf{E} &= \text{div}(\varepsilon^{-1} \mathbf{D}) = \varepsilon^{-1} \text{div}\mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \text{grad}\varepsilon^{-1} = \mathbf{D} \cdot \text{grad}\varepsilon^{-1}.\end{aligned}$$

Dabei wurde ein rotationsfreies E-Feld und verschwindende Raumladungsdichte vorausgesetzt. Die entsprechende partielle Differentialgleichung für das elektrische Potenzial, welche die Poisson-PDgl. im Fall eines linearen, isotropen, homogenen Materials ersetzt, lautet nunmehr

$$\text{div}(\varepsilon(\mathbf{r}) \text{grad}\varphi) = \varepsilon \Delta \varphi + \text{grad}\varepsilon \cdot \text{grad}\varphi = -\varrho. \quad (8.10)$$

¹ Materialien mit Hystereseffekten besitzen dynamische Eigenschaften und müssen gesondert behandelt werden; vgl. Mayergoz [192] und in Hinweise in Abschnitt 20.3.

Im Fall eines konstanten ϵ reduziert sich diese Gleichung auf die Poissonsche Differentialgleichung.

Verwendet man für lineare inhomogene Materialien eine weiter oben beschriebene stückweise konstante Modellierung, dann kann man die Grenzbedingungen für das E- und D-

, die an den Rändern gelten, durch Diskretisierung der für ortsveränderliche Dielektrizitätskonstanten geltenden Beziehungen

$$E_1^t - E_2^t = 0, \quad E_1^n - E_2^n = D^n(\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1}), \quad (8.11)$$

$$D_1^t - D_2^t = E^t(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad D_1^n - D_2^n = 0 \quad (8.12)$$

erhalten, wobei die Indizes „t“ und „n“ die Transversal- bzw. Normalkomponente kennzeichnen. Diese Beziehungen berücksichtigen die Ladungseffekte an der Grenzschicht, welche im Zusammenhang mit der oben beschriebenen elektrischen Polarisation diskutiert wurden.

Wenn in der Grenzfläche *zusätzliche* Flächenladungen enthalten sind, gelten die folgenden Beziehungen

$$E_1^t - E_2^t = 0, \quad E_1^n - E_2^n = D_{(1,2)}^n(\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1}) + \varepsilon_{(1,2)}^{-1} \sigma, \quad (8.13)$$

$$D_1^t - D_2^t = E^t(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad D_1^n - D_2^n = \sigma, \quad (8.14)$$

wobei σ die in Abschnitt 7 eingeführte Flächenladungsdichte ist.

Üblicherweise finden man in der Literatur eher heuristische Überlegungen, um diese Beziehungen zu rechtfertigen. Ausgangspunkt ist die Gleichung (7.18). Danach treten in ein beliebiges Raumgebiet, das keine Ladungen enthält und mit einem elektrischen Feld durchsetzt ist, genau so viele Feldlinien des D-Feldes ein, wie aus ihm herauskommen. Die Feldlinien des D-Feldes sind in solchen Raumgebieten stetig; sie endigen oder entspringen nur auf elektrischen Ladungen. Daraus folgt für die *Grenzfläche zwischen zwei Nichtleitern* verschiedener Dielektrizitätskonstanten, dass die Normalkomponenten des D-Feldes zu beiden Seiten der Grenzfläche, Abb. 8.2, einander gleich sein müssen

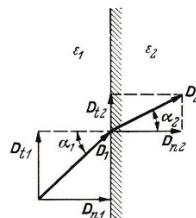


Abbildung 8.2. Grenzfläche zwischen zwei Nichtleitern

$$D_1^n - D_2^n = 0. \quad (8.15)$$

Die Tangentialkomponenten E_t des E-Feldes sind maßgebend für das Potenzialgefälle längs der Grenzfläche. Schreitet man in Richtung der Tangentialkomponenten längs der Grenzfläche um ein kleines Stück ds fort, so ergeben sich die Potenzialunterschiede

$$d\varphi_1 = E_1^t ds \quad \text{und} \quad d\varphi_2 = E_2^t ds \quad (8.16)$$

auf beiden Seiten der Grenzfläche. Aufgrund von $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ müssen die Potenzialunterschiede auf beiden Seiten der Grenzfläche einander gleich sein, d.h. $d\varphi_1 = d\varphi_2$. Hieraus geht hervor, dass

$$E_1^t - E_2^t = 0. \quad (8.17)$$

Für die Tangentialkomponenten des D-Feldes gilt daher

$$\frac{D_1^t}{D_2^t} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (8.18)$$

Die Feldlinien des D-Feldes werden an der Grenzfläche gebrochen, und zwar wird der Winkel mit der Normalen zur Grenzfläche beim Übergang der Feldlinien von einem Stoff höherer zu einem Stoff niedrigerer Dielektrizitätskonstante kleiner; in Abb. 8.2 ist ε_1 größer als ε_2 . Diese Beziehungen entsprechen einem Teil der bereits von einem allgemeineren Standpunkt abgeleiteten Beziehungen.

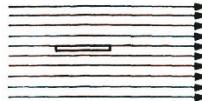


Abbildung 8.3. Längsschlitz zur Messung des E-Feldes

Aus diesen Überlegungen ergibt sich noch folgender Schluss. Bringt man in einen materiellen Nichtleiter einen engen, langgestreckten zylindrischen Schlitz an, dessen Richtung übereinstimmt mit der Richtung der Feldlinien, Abb. 8.3, und der von Materie frei ist, so muss im Inneren des Schlitzes das E-Feld den gleichen Wert haben wie außerhalb, da an der zylindrischen Grenzfläche das E-Feld stetig übergehen muss. Es gilt daher für das E-Feld im Inneren des Schlitzes

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_a, \quad (8.19)$$

wenn mit \mathbf{E}_a das E-Feld in dem Nichtleiter bezeichnet wird.

Wird dagegen ein kleiner dosenförmiger Hohlraum von sehr geringer Höhe, dessen Grundfläche senkrecht zu den Feldlinien stehen, im Innern des Nichtleiters angebracht, Abb. 8.4, so müssen die Feldlinien des D-Feldes stetig durch den Hohlraum hindurchgehen, d.h. es wird das D-Feld in dem Hohlraum, \mathbf{D}_i gleich dem D-Feld in dem Nichtleiter

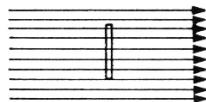


Abbildung 8.4. Querschlitz zur Messung des D-Feldes

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_a. \quad (8.20)$$

Man kann also in einem Längsschlitz das E-Feld und in einem Querschlitz das D-Feld innerhalb eines Nichtleiters messen.

9

Influenzwirkungen

Bringt man in ein elektrisches Feld, z. B. das Feld zwischen den beiden Elektroden A und B, Abb. 9.1, einen isolierten Leiter C, so entsteht in diesem Leiter unter der Einwirkung der elektrischen Feldkräfte eine Wanderung der Elektronenwolke, bis im Inneren

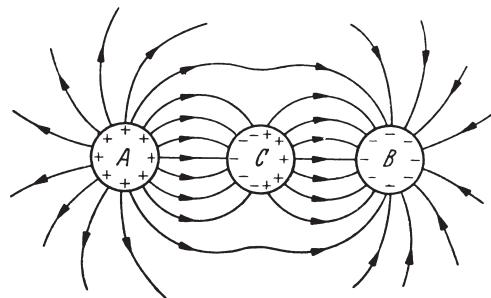


Abbildung 9.1. Influenzwirkung

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (9.1)$$

ist. Als Resultat dieser Wanderung von Elektronen befinden sich auf der Oberfläche des Leiters elektrische Ladungen. Auf der Leiteroberfläche steht das E-Feld senkrecht, denn eine tangentiale zur Oberfläche auftretende Komponente des E-Feldes \mathbf{E}_{tang} könnte Ladungen verschieben. Da in der Elektrostatisik keine Ladungsbewegungen auftreten, muss gelten

$$\mathbf{E}_{tang} = \mathbf{0}. \quad (9.2)$$

Die Summe der Ladungen des Leiters ist Null, wenn der Leiter vorher ungeladen war. Es münden ebenso viele Linien des D-Feldes auf dem Leiter, wie von ihm ausgehen. Diese Einwirkung des elektrischen Feldes auf Leiter bezeichnet

man als *Influenz*. Sie hat zur Folge, dass die Leiter die Linien des D-Feldes zu sich hinziehen; man benutzt diese Erscheinung zur *Abschirmung elektrischer Felder* (Faraday 1837). Stellt z.B. C, Abb. 9.1, eine Hohlkugel dar, so ergibt sich außerhalb der Kugel die gleiche Feldverteilung wie bei einer Vollkugel, im Innern der Hohlkugel ist jedoch das E-Feld Null. Als weiteres Beispiel ist in Abb. 9.2 schematisch die Abschirmung des Bedienungsraumes A eines Hochspannungslaboratoriums durch ein geerdetes Metallgitter G veranschaulicht. T stellt einen Transformator dar, K die Hochspannungselektrode. Durch das Gitter werden die Verschiebungslinien zwischen der Hochspannungselektrode und den Wänden des Raumes aufgefangen; infolgedessen wird der Raum hinter dem Gitter nahezu feldfrei.

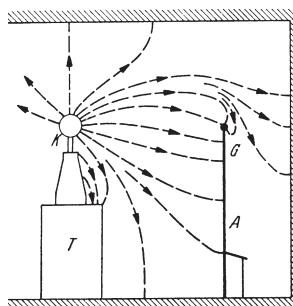


Abbildung 9.2. Schirmwirkung

Auf der Oberfläche eines influenzierten Leiters entsteht teils ein Überschuss, teils ein Mangel an Elektronen; bestimmte Teile der Oberfläche nehmen eine positive Ladung an, andere Teile eine negative. Wenn man dafür sorgt, dass die eine dieser beiden Ladungen abfließen kann, so ergibt sich eine Aufladung des betreffenden Leiters durch Influenz. Ein Beispiel dafür ist durch Abb. 9.3 veranschaulicht. Es ist hier zunächst, Abb. 9.3, Teil a, das elektrische Feld in der Umgebung eines Hochspannungsgenerators T schematisch dargestellt, der einpolig geerdet und am anderen Pol mit einer Kugel K₁ versehen ist. Abb. 9.3, Teil b zeigt die Veränderung, die das Feld erfährt, wenn in die Nähe des Generators eine Metallkugel K₂ gebracht wird. Hat die Kugel K₁ in dem betrachteten Zeitpunkt eine positive Ladung, so ergeben sich auf der dieser Kugel zugewandten Seite von K₂ negative Ladungen, auf der anderen positive Ladungen. Durch einen Draht, Abb. 9.3, Teil c, werde die Kugel K₂ mit der Erde verbunden; dadurch nimmt K₂ das Potenzial der Erde an, die positiven Ladungen fließen ab, die D-Feldlinien zwischen K₂ und Erde verschwinden. Entfernt man nun den Draht, so ergibt sich die Abb. 9.3, Teil d. Die Kugel K₂ hat eine negative Ladung, die bei hinreichend guter Isolierung dieser Kugel erhalten bleibt, auch wenn K₁ auf Erdpotenzial gebracht wird, Abb. 9.3, Teil e. Die zunächst ungeladene Kugel K₂ hat damit eine Potenzialdifferenz gegen Erde angenommen, ohne dass sie mit dem Generator

in Verbindung gebracht wurde, eine Erscheinung die in Hochspannungsanlagen beachtet werden muss. Sie kann bei Blitzenladungen in der Nähe von Freileitungen auftreten. Befindet sich eine Leitung im elektrischen Feld einer geladenen Gewitterwolke, so fließen Ladungen über die Isolationswiderstände der Leitungen ab, Verschiebungslinien spannen sich zwischen Wolke und Leitung. Entlädt sich die Wolke durch einen Blitz, so bleibt zunächst die Ladung der Leitung erhalten (K₂ der Abb. 9.3); ihr entspricht eine bestimmte Potenzialdifferenz zwischen der Leitung und Erde, die zum Auftreten einer von der betreffenden Stelle längs der Leitung nach beiden Richtungen hin fortlaufende Wanderwellen führt, vgl. Abschnitt 35.4.

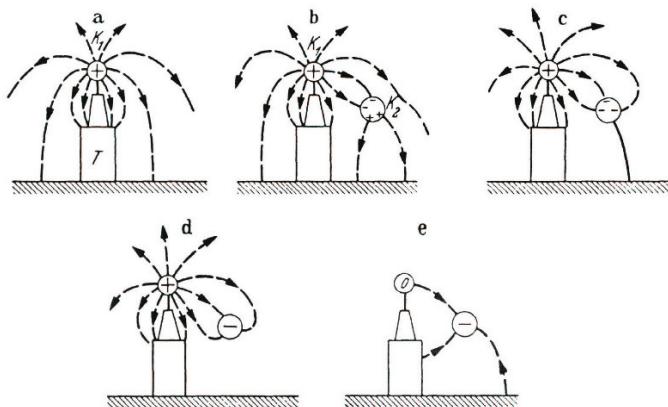


Abbildung 9.3. Aufladung eines Leiters durch Influenz

Einfache Beispiele für elektrostatische Felder

Zur Bestimmung eines E-Feldes müssen die Grundgleichungen der Elektrostatik gelöst werden, die in Form von Algebro-Differentialgleichungen (6.7) formuliert werden können. Alternativ lassen sich die Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen (6.13), (6.14) angeben, so dass Algebro-Integralgleichungen zu lösen sind. Da sich diese Gleichungen nur selten direkt lösen lassen, wird zunächst die Differentialgleichung für das elektrische Potenzial φ abgeleitet und unter Hinzunahme von Randwerten eine entsprechende Lösung analytische oder numerisch ermittelt. Anschließend lassen sich daraus E-Feld und D-Feld durch Gradientenbildung bzw. Multiplikation mit ϵ bestimmen. In sehr einfachen Anordnungen von idealen Leitern lässt sich das E-Feld zumindest näherungsweise erraten, in dem man die Randbedingung für ideale Leiter nutzt und zusätzlich Symmetrieverlegungen anstellt. Ein Beispiel dafür ist der Plattenkondensator, wenn man bei ausgedehnten ebenen und parallelen Platten das E-Feld in Punkten wissen möchte, die von den Plattenrändern weit entfernt sind. Die Feldlinien des E-Feldes sind dann orthogonale, auf den Platten stehende Linien. In grober Näherung wird diese Vorstellung auf sämtliche Punkte der Platten angewendet. Auf dieser Grundlage lassen sich eine Reihe von Feldproblemen in guter Näherung zumindest qualitativ diskutieren. Ein schönes Beispiel ist die Elektronenoptik, wie sie bei der Braunschen Röhre verwendet wird; Anwendungen findet man bei Fernsehgeräten und Oszilloskopen. Wir gehen darauf in Abschnitt 14.6 näher ein.

Weiterhin soll anhand einiger Beispiele gezeigt werden, dass auch im Fall anderer einfacher geometrischer Situationen eine direkte Lösung der Algebro-Integralgleichungen möglich ist. Dabei beschränken wir uns auf das Materialgesetz für lineare, isotrope, homogene Materialien, so dass nur eine der beiden Integralgleichungen zu lösen ist.

10.1 Das elektrische Feld von Punktladungen

10.1.1 Die homogen geladene Kugel und die Punktladung

Betrachtet man beispielsweise eine ideal leitende, homogen geladene Kugel mit dem Radius R , dann kann die Gesamtladung Q der Kugel mit Hilfe des D-Feldes berechnet werden (siehe Gl.(7.26))

$$Q = \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}. \quad (10.1)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Kugel mit einer positiven Ladung belegt ist. Gibt man die Ladung Q vor, dann ist das entsprechende D-Feld aus der Integralgleichung zu bestimmen, was bei der Wahl einer beliebigen Oberfläche \mathcal{O} nicht ohne weiteres möglich ist. Man kann aufgrund der Kugelsymmetrie des Problem voraussetzen, dass die D-Feldlinien der Ladungsverteilung von der Kugeloberfläche nach allen Seiten hin strahlenförmig ausgehen. Das D-Feld kann demnach mit Hilfe des Einheitsvektors \mathbf{r}_e von \mathbf{r} ausgedrückt werden zu $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = D_r \mathbf{r}_e$, wobei D_r der Betrag von \mathbf{D} im Punkt \mathbf{r} ist und $\mathbf{r}_e := \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Sie münden auf der Gegenelektrode, die ebenfalls als kugelförmig und mit gleichen Mittelpunkt wie die betrachtete Kugel vorausgesetzt wird und deren Radius R_∞ im Vergleich zu R sehr groß ist. Wählt man für al Integrationsfläche \mathcal{O} des Oberflächenintegrals in Gl. (10.1) ebenfalls ein Kugeloberfläche mit gleichem Kugelmittelpunkt und dem Radiusvektor \mathbf{r} , dann sind deren Normalenvektor $d\mathbf{A}$ und der Vektor des D-Feldes in jedem Punkt von \mathcal{O} kollinear. Damit kann die Integralgleichung stark vereinfacht werden, da bei fest gewählter Kugeloberfläche \mathcal{O} mit dem Radius \mathbf{r} der Betrag von \mathbf{D} aus dem Integral herausgezogen werden kann

$$Q = \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{\mathcal{O}} D_r \mathbf{r}_e \cdot d\mathbf{A} = D_r \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{r}_e \cdot d\mathbf{A}. \quad (10.2)$$

Das Integral ist nur ein Faktor, der gleich der Kugeloberfläche $4\pi\|\mathbf{r}\|^2$ ist. Insgesamt erhält man also für D_r

$$D_r = \frac{Q}{4\pi\|\mathbf{r}\|^2}. \quad (10.3)$$

Der Fluss des D-Feldes verteilt sich also gleichmäßig auf konzentrischen Kugelflächen.

Mit Hilfe des Materialgesetzes und des Richtungsvektors \mathbf{r}_e ergibt sich schließlich für des E-Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\|\mathbf{r}\|^3}. \quad (10.4)$$

Das E-Feld zeigt radial von der Kugel weg, wenn Q – wie vorausgesetzt – positiv ist. In Bezug auf den Raum außerhalb der Kugelelektrode kann man

diese ersetzen durch eine *Punktquelle* oder *Punktladung* Q im Mittelpunkt der Kugel. Im Zusammenhang mit der Multipolentwicklung (siehe Abschnitt 11.5) werden wir eine mathematische Definition der Punktladung angeben.

Das E-Feld in der Umgebung einer Punktladung ist durch konzentrische Kugelflächen als Potenzialflächen gekennzeichnet. Im Abstand $r = \|\mathbf{r}\|$ von der Punktladung wird das elektrische Potenzial

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \int_r^\infty \frac{Q \tilde{\mathbf{r}} \cdot d\tilde{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}^3} = \int_r^\infty \frac{Q d\tilde{r}}{4\pi\epsilon_0 \tilde{r}^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (10.5)$$

wenn man beachtet, dass \mathbf{E} und somit \mathbf{r} längs einer E-Feldlinie kollinear mit $d\mathbf{r}$ sind und wenn als Bezugspunkt der unendlich ferne Punkt gewählt wird.

An der Oberfläche der Kugel vom Radius r_0 ist das Potenzial gleich der Potenzialdifferenz (Spannung) zwischen der Kugel und einem sehr weit entfernten Punkt, also

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}. \quad (10.6)$$

Das E-Feld hat in der Umgebung einer Kugelelektrode vom Radius r_0 den Betrag

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = U \frac{r_0}{r^2}. \quad (10.7)$$

Es nimmt umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstandes vom Mittelpunkt der Kugel ab und beträgt an der Oberfläche der Kugelelektrode

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{U}{r_0}. \quad (10.8)$$

Der gleiche Wert ergibt sich in einem Plattenkondensator mit dem Plattenabstand r_0 bei einer Spannung U zwischen den beiden Platten. Das E-Feld wird um so größer, je kleiner der Radius der Kugel ist. Hohe Beträge des E-Feldes entstehen daher immer dort, wo die Krümmungsradien klein sind. Auf die Berechnung der Kapazitätswerte gehen wir in Abschnitt 12.3 ein.

10.1.2 Endlich viele Punktladungen

Allgemeine elektrostatische Felder entstehen, wenn mehrere Punktladungen vorhanden sind. Die von den einzelnen Punktladungen herrührenden Potenziale, Gl.(10.5), überlagern sich dann wegen der linearen Abhängigkeit zwischen Ladung und Potenzial, so dass das Gesamtpotenzial in einem beliebigen Raumpunkt

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\nu} \frac{Q_{\nu}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\nu}\|} \quad (10.9)$$

wird, wobei Q_{ν} die Ladungen der Punktquellen, $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\nu}\|$ die Abstände des betrachteten Raumpunktes von den Punktquellen bezeichnen. Ist die Verteilung der Elektrizitätsmengen im Raum bekannt, so ist damit also eindeutig

das Potenzial bestimmt. Im folgenden soll zunächst nur der durchaus interessante Spezialfall zweier Punktladungen behandelt werden. Danach werden in Abschnitt 10.1.6 sogenannte Linienladungen diskutiert, die man sich aus Punktladungen zusammengesetzt denken kann.

10.1.3 Das Potenzial zweier Punktladungen

In Abb. 10.1 ist ein Ausschnitt aus dem elektrischen Feld in der Umgebung zweier Punktladungen, deren Ladungen sich wie $(-1) : 2$ verhalten, dargestellt. Die Potenziallinien lassen sich hier in ähnlicher Weise ermitteln, wie es in Abschnitt 17 beschrieben wird.

Von besonderem Interesse ist, dass bei einer solchen Anordnung von zwei Punktladungen mit Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens immer eine Potenzialfläche zu finden ist, die eine Kugelfläche bildet; sie ist in Abbildung 10.1 mit 0 gekennzeichnet und stärker ausgeführt. Dies lässt sich folgendermaßen nachweisen. Das elektrische Potenzial im Punkte P mit dem Abstandsvektor \mathbf{r} , Abb. 10.2, ist nach Gl. (10.9)

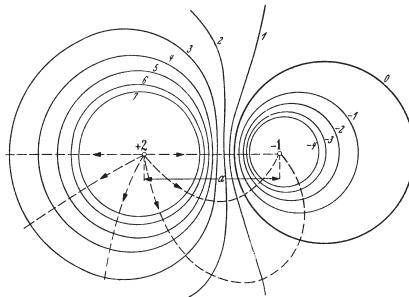


Abbildung 10.1. Potenziallinien des elektrostatischen Feldes von zwei Punktquellen verschiedener Ladung (Ausschnitt)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right), \quad (10.10)$$

wenn man mit $r_1 := \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|$ und $r_2 := \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\|$ die Abstände der jeweiligen Ladungen vom Punkt P bezeichnet. Wir suchen nun die Potenzialfläche mit dem Potenzial Null. Für alle Punkte dieser Potenzialfläche muss gelten

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = 0 \quad (10.11)$$

oder

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{Q_1}{Q_2}. \quad (10.12)$$

Bei gleichem Vorzeichen von Q_1 und Q_2 hat diese Beziehung keine geometrische Bedeutung; Punkte der gesuchten Art sind nicht vorhanden, wenn man von den unendlich fernen Punkten absieht. Bei entgegengesetzten Vorzeichen wird jedoch das Radienverhältnis positiv; die Niveaufläche mit dem Potenzial Null ist bestimmt durch

$$\frac{r_1}{r_2} = k, \quad (10.13)$$

wobei k das Verhältnis der Beträge der beiden Ladungen bezeichnet. Der

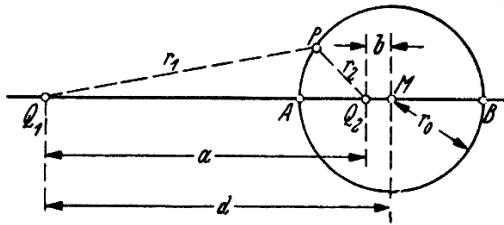


Abbildung 10.2. Kugelförmige Potenzialfläche

geometrische Ort der Punkte einer Ebene mit konstantem Abstandsverhältnis von zwei festen Punkten in dieser Ebene ist nach einem Satz der Geometrie (Apollonius) ein Kreis, der die Verbindungsgerade zwischen den beiden Punkten harmonisch teilt, Abb. 10.2. Es ist

$$\frac{\overline{Q_1A}}{\overline{Q_2A}} = \frac{\overline{Q_1B}}{\overline{Q_2B}} = k. \quad (10.14)$$

Da diese Folgerung für alle Ebenen gilt, die die Verbindungsgerade der beiden Punkte enthalten, so ist die gesuchte Potenzialfläche eine Kugelfläche, die durch Drehen des gekennzeichneten Kreises um die Verbindungsgerade $\overline{Q_1Q_2}$ entsteht. Die Kugelfläche umschließt die schwächere Punktladung. Nennt man ihren Radius r_0 und kennzeichnet man die Lage ihres Mittelpunktes M durch den Abstand b von Q_2 , so findet man durch Anwendung der Gl. (10.13) auf die Punkte A und B (Gl.(10.14))

$$\frac{a + b - r_0}{r_0 - b} = \frac{a + b + r_0}{r_0 + b} = k. \quad (10.15)$$

Hieraus folgt

$$r_0^2 = b(a + b). \quad (10.16)$$

Setzt man dies in Gl.(10.15) ein, so ergibt sich

$$\frac{r_0}{b} = k = -\frac{Q_1}{Q_2}. \quad (10.17)$$

Ferner findet man aus den beiden Gl.(10.16) und (10.17)

$$r_0 = a \frac{k}{k^2 - 1}, \quad (10.18)$$

$$b = a \frac{1}{k^2 - 1}. \quad (10.19)$$

Damit können die Bestimmungsstücke des Kreises berechnet werden. Für $k = 1$ artet der Kreis zur Mittelsenkrechten der Verbindungsgeraden $\overline{Q_1 Q_2}$ aus, die Mittelebene wird Niveaumöglichkeit, Abb. 17.6.

Bringt man im Mittelpunkt M noch eine dritte Punktladung Q_3 an, so bleibt die betrachtete Kugel eine Potenzialfläche; es wird lediglich zu allen Punkten der Kugel das Potenzial

$$\varphi_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (10.20)$$

hinzugefügt.

Das Potenzial zweier Punktladungen kann auch Begründung der sogenannten Spiegelungsmethode verwendet werden, die in Abschnitt 11.6 behandelt wird.

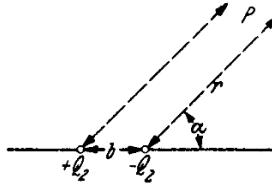
10.1.4 Der elektrische Dipol

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass man die Potenziale zweier Punktladungen überlagern kann und damit das Gesamtpotenzial der Ladungsanordnung erhält. Das ist möglich aufgrund der Linearität der Poissongleichung bezüglich der rechten Seite.

Ein interessanter und für die Anwendungen wichtiger Grenzfall entsteht, wenn man den Abstand d immer größer und größer werden lässt, den Punkt Q_1 also immer weiter hinausrücken lässt und gleichzeitig die Ladung Q_1 in Abb. 10.2 so vergrößert, dass $\|\mathbf{E}_0\|$ konstant bleibt. Mathematische gesehen handelt es sich dabei um einen Doppellimes, bei dem die Reihenfolge der Grenzübergänge durchaus beachtet werden sollte; außerdem hängt der so entstehende Grenzwert nur noch von einem Ort ab. Dann ergibt sich schließlich die Potenzialverteilung in der Umgebung einer ungeladenen Metallkugel, die in ein ursprünglich homogenes E-Feld gebracht wird. Die Punktladung Q_1 muss dabei gemäß Gl.(10.7) den Wert erhalten:

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 d^2 \|\mathbf{E}_0\|. \quad (10.21)$$

Ihr elektrisches „Bild“ Q_2 wandert mit wachsendem d immer näher an den Kugelmittelpunkt heran. Da wir dort eine Ladung $-Q_2$ anbringen müssen, so rücken also im Kugelmittelpunkt zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen näher und näher zusammen; es entsteht ein sogenannter *elektrischer Dipol*, Abb. 10.3. Bezeichnet man den Abstand eines Aufpunkts P von dem Dipol mit r , den Winkel mit der Verbindungsgeraden der beiden Ladungen mit α , so gilt im Fall verschwindend kleinen Abstandes b der beiden Ladungen für das durch den Dipol hervorgerufene Potenzial ($r := \|\mathbf{r}\|$)

**Abbildung 10.3.** Feldberechnung bei einem Dipol

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(-\frac{Q_2}{r} + \frac{Q_2}{r + b \cos \alpha} \right) = \frac{-bQ_2 \cos \alpha}{4\pi\varepsilon r^2}. \quad (10.22)$$

Auf einen Dipol wird im elektrischen Feld ein Drehmoment ausgeübt. Wir denken uns ein kurzes isoliertes Stäbchen von der Länge b an den beiden Enden mit den Ladungen $-Q$ und $+Q$ versehen und kennzeichnen die Richtung von $-Q$ nach $+Q$ durch die Koordinate x . Das Stäbchen liege in einem homogenen E -Feld \mathbf{E} . Wir legen durch die Richtung von x und \mathbf{E} eine Ebene und bezeichnen die in die Richtung von x fallende Komponente \mathbf{E} mit \mathbf{E}_x , die dazu senkrecht stehende, in die y -Richtung fallende Komponente von \mathbf{E} mit \mathbf{E}_y . \mathbf{E}_x übt auf das Stäbchen keine Wirkung aus, da sich die beiden Kräfte $+QE_x$ und $-QE_x$ aufheben. \mathbf{E}_y dagegen verursacht ein Kräftepaar mit dem Drehmoment

$$M_d = bQ\|\mathbf{E}_y\| = bQ\|\mathbf{E}\| \sin \beta, \quad (10.23)$$

wenn mit β der Winkel zwischen x und \mathbf{E} bezeichnet wird.

Für das Drehmoment kommt es also nur auf das Produkt bQ an. Dieses bezeichnet man als *elektrisches Dipolmoment* $p := bQ$ des Dipols. Es gilt

$$M_d = p\|\mathbf{E}\| \sin \beta. \quad (10.24)$$

In unserem Fall ist zu setzen

$$p := -bQ_2. \quad (10.25)$$

Damit wird aus Gl.(10.22) die *allgemeine Beziehung für das Potenzialfeld eines Dipols*

$$\varphi(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon} \frac{\cos \alpha}{r^2}. \quad (10.26)$$

Obwohl also ein Dipol im ganzen die Ladung 0 aufweist, so ergeben sich doch in seiner Umgebung Feldkräfte, die allerdings rascher abnehmen als in der Umgebung einer Punktladung.

Die durch das Vorhandensein einer *ungeladenen Kugel in einem ursprünglich homogenen E-Feld* entstehende Potenzialverteilung lässt sich nach dem oben Ausgeföhrten darstellen durch die gleichzeitige Wirkung einer sehr weit entfernten Punktquelle und eines Dipols

$$\varphi(r) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon(d + r \cos \alpha)} - \frac{bQ_2 \cos \alpha}{4\pi\varepsilon r^2}. \quad (10.27)$$

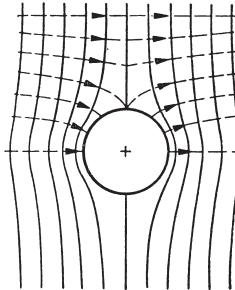


Abbildung 10.4. Ungeladene Metallkugel in einem homogenen E-Feld

Führt man hier die Beziehungen (11.37) und (11.38) aus Abschnitt 11.6 sowie (10.21) ein und berücksichtigt, dass d über alle Grenzen wachsen soll, so folgt

$$\varphi(r) = d^2 \|\mathbf{E}_0\| \left(\frac{1}{d} - \frac{r \cos \alpha}{d^2} + \frac{r_0^3 \cos \alpha}{d^2 r^2} \right). \quad (10.28)$$

Wird schließlich als willkürliche Konstante $-d\|\mathbf{E}_0\|$ hinzugefügt, so ergibt sich

$$\varphi(r) = \|\mathbf{E}_0\| \left(-r + \frac{r_0^3}{r^2} \right) \cos \alpha = -\|\mathbf{E}_0\| r \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \cos \alpha. \quad (10.29)$$

Die Abb. 10.4 zeigt das nach Gl.(10.29) berechnete Feldbild, das man sich rotationssymmetrisch zur waagerechten Achse zu denken hat. Das E-Feld an der Oberfläche der Kugel beträgt

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)\| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r_0} = \|\mathbf{E}_0\| \left(1 + \frac{2r_0^3}{r_0^3} \right) \cos \alpha = 3\|\mathbf{E}_0\| \cos \alpha. \quad (10.30)$$

Sie wird für $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^\circ$ dreimal so groß wie der ursprüngliche Betrag des homogenen E-Feldes, die D-Feldlinien drängen sich dort zusammen. Kleine metallische Einschlüsse in Isolierstoffen ergeben also eine örtliche Erhöhung des E-Feldes. Die Dichte der influenzierenden Ladungen auf der Kugeloberfläche ist gleich dem Betrag des D-Feldes

$$\|\mathbf{D}\| = 3\epsilon_0 \|\mathbf{E}_0\| \cos \alpha; \quad (10.31)$$

sie ist ebenfalls in der Achse des Feldes am größten; es befinden sich auf der einen Halbkugel negative Ladungen, deren Summe Null ist.

Ersetzt man die zur Achse senkrecht stehende Hauptebene der Kugel, die gleichzeitig Potenzialfläche ist, durch eine Metallschicht, so ergibt sich der Fall eines *halbkugelförmigen Buckels auf einer leitenden Ebene*, z.B. auf der Elektrode eines Plattenkondensators. An einem solchen Buckel ist demnach das E-Feld im Maximum dreimal so groß wie auf der Ebene.

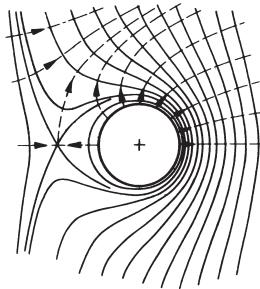


Abbildung 10.5. Geladene Metallkugel in einem homogenen E-Feld

Ist die *Ladung der Kugel* nicht Null, so hat man zu dem gefundenen Potenzial noch das einer Punktladung Q im Mittelpunkt der Kugel hinzuzufügen. Dann wird

$$\varphi(r) = \|\mathbf{E}_0\| \left(-r + \frac{r_0^3}{r^2} \right) \cos \alpha + \frac{Q}{4\pi\epsilon r}. \quad (10.32)$$

Das Feldbild verändert sich in der durch Abb. 10.5 dargestellten Weise. Entsprechend der Ladung gehen von der Kugel mehr D-Feldlinien aus, als auf ihr einmünden; bei negativer Ladung der Kugel gilt das Umgekehrte.

10.1.5 Das elektrische Feld zweier Kugeln

Als weiteres Anwendungsbeispiel der Methode der elektrischen Bilder (Spiegelungsmethode) werde die Berechnung des *elektrischen Feldes zwischen zwei geladenen Kugeln* kurz besprochen, das für die Theorie der in der Hochspannungstechnik verwendeten Kugelfunkenstrecken von Interesse ist; siehe z. B. [230]. Die beiden Kugeln, Abb. 10.6, sollen den Mittelpunktsabstand c und die Radien r_0 haben. Ihre Potenziale seien $(1/2)U$ und $-(1/2)U$. Wäre nur die erste Kugel vorhanden, so könnte das E-Feld außerhalb der Kugel dargestellt werden durch eine Punktladung Q_1 im Mittelpunkt A , die aus Gl.(10.5) berechnet werden kann:

$$\frac{1}{2} U = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_0}. \quad (10.33)$$

Diese Punktladung würde auf der zweiten Kugelfläche ein zusätzliches Potenzial erzeugen.

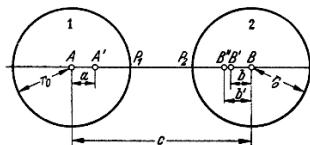


Abbildung 10.6. E-Feldberechnung zwischen zwei Kugeln

zial ergeben; um dieses aufzuheben, muss auf der Verbindungsgeraden AB das elektrische Bild B' von A in bezug auf die Kugel 2 angebracht werden. Die Ladung in B' muss den Wert haben:

$$Q'_1 = -\frac{r_0}{c} Q_1. \quad (10.34)$$

Ihr Abstand b vom Kugelmittelpunkt B beträgt

$$b = \frac{r_0^2}{c}. \quad (10.35)$$

Diese Punktladung würde nun wieder ein Zusatzpotenzial auf der Kugeloberfläche 1 ergeben; zum Ausgleich muss ein Bild in A' angebracht werden mit der Ladung

$$Q''_1 = -\frac{r_0}{c-b} Q'_1 \quad (10.36)$$

und dem Abstand

$$a = \frac{r_0^2}{c-b} \quad (10.37)$$

vom Mittelpunkt A . Um die Wirkung dieser Ladung auf der Kugel 2 aufzuheben, muss das Bild B'' angebracht werden mit der Ladung

$$Q'''_1 = -\frac{r_0}{c-a} Q''_1 \quad (10.38)$$

und dem Abstand

$$b' = \frac{r_0^2}{c-a}. \quad (10.39)$$

Wenn dieses Verfahren fortgesetzt angewendet wird, so ergibt sich eine unendliche Reihe von Bildpunkten, die alle innerhalb der beiden Kugeln liegen, wobei die Abstände von den Kugelmittelpunkten sich festen Grenzwerten nähern und die Ladungen mehr und mehr abnehmen (Murphy 1833). Diese Punktladungen liefern das elektrostatische Feld für den Fall, dass die Kugel 1 das Potenzial $(1/2)U$ und die Kugel 2 das Potenzial Null hat. Man muss nun eine zweite gleichartige Reihe von Punktladungen anbringen, indem man von der Kugel 2 mit dem Potenzial $-(1/2)U$ ausgeht. Das Gesamtfeld ergibt sich durch Überlagern der von den einzelnen Punktladungen herrührenden E-Felder.

Mit Hilfe eines Taschenrechners sollte man die Folgen von Ladung und Abstand vom Kugelmittelpunkt für beide Kugeln bestimmen, um näheren Einblick in das Verfahren zu erhalten (z. B. für den Fall $r_0 = 0,2 c$).

Das E-Feld hat seinen größten Wert in den beiden Punkten P_1 und P_2 der Kugeloberfläche. Sie kann für diese Punkte berechnet werden durch Summieren der E-Felder, die von den einzelnen Punktladungen herrühren. Es ist daher im Punkt P_1

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{E}\| &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{Q_1}{(r_0^2)} + \frac{0,2Q_1}{(0,8r_0)^2} + \frac{0,0417Q_1}{(0,7917r_0)^2} + \frac{0,00870Q_1}{(0,7913r_0)^2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{Q_1}{(0,8c)^2} + \frac{0,2Q_1}{(0,76c)^2} + \frac{0,0417Q_1}{(0,758c)^2} + \frac{0,00870Q_1}{(0,758c)^2} + \dots \right) = \\
&= 3,68 \frac{U}{c} = 0,736 \frac{U}{r_0}.
\end{aligned} \tag{10.40}$$

Als Vergleich dazu werde bemerkt, dass das E-Feld an der Kugeloberfläche bei gleichem Potenzial und unendlich großer Entfernung der Kugeln nach Gl.(10.8)

$$\|\mathbf{E}\| = 0,5 \frac{U}{r_0} \tag{10.41}$$

sein würde; zwischen zwei Platten mit dem gleichen Abstand wie die beiden Punkte P_1 und P_2 , nämlich $0,6c$, würde ferner die Potenzialdifferenz U einen Betrag des E-Feldes

$$\|\mathbf{E}\| = 1,67 \frac{U}{c} = 0,333 \frac{U}{c} \tag{10.42}$$

hervorrufen.

In der Mitte zwischen den beiden Kugeln ergibt sich auf dem gleichen Weg wie oben der Betrag des E-Feldes

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{E}\| &= \frac{2}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{Q_1}{(0,5c)^2} + \frac{0,2Q_1}{(0,46c)^2} + \frac{0,0417Q_1}{(0,458c)^2} + \frac{0,00870Q_1}{(0,458c)^2} + \dots \right) = \\
&= 1,038 \frac{U}{c}.
\end{aligned} \tag{10.43}$$

10.1.6 Endlich ausgedehnte Linienladungen

Denkt man sich eine Reihe von einander gleichen Punktladungen längs einer gerade Linie mit gleichmäßigen Abständen aufgereiht und verringert man die Abstände mehr und mehr, so entsteht eine *Linienquelle*. Dabei wird die Linienquelle symmetrisch auf die x -Achse der x, y -Ebene gelegt. Zunächst soll die Linienladung mit endlicher Länge behandelt werden, da die unendlich lange Linienladung zusätzliche Schwierigkeit mit sich bringt, auf die wir erst im folgenden Abschnitt 10.2.1 eingehen wollen.

Eine solche Linienladung kann man sich in Längenelemente $d\zeta$ zerlegt denken, die alle als Punktladungen aufgefasst werden können; sie führen dem E-Feld eine Ladung zu, die gleich $Q d\zeta / l$ ist, wenn mit l die Länge der Linie, mit Q die gesamte Ladung der Linie ist. Es ist zweckmäßig, entsprechend der Volumen- oder Oberflächenladungsdichte auch eine Linienladungsdichte λ einzuführen. Man definiert diese Größe als $\lambda := \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \Delta Q / \Delta l$ und erhält somit die genannte Ladung auf der Linie zu $\lambda d\zeta$.

In irgendeinem Punkt P mit den Koordinaten x und y ergibt nach Gl.(10.5) die Punktquelle $d\zeta$ zum Potenzial einen Betrag

$$d\varphi = \lambda d\zeta \frac{1}{4\pi\varepsilon r} = \lambda \frac{d\zeta}{4\pi\sigma \sqrt{y^2 + (x - \zeta)^2}}, \quad (10.44)$$

wobei ζ den Abstand des Längenelementes vom Mittelpunkt der Linie bezeichnet. Das gesamte Potenzial der Linienladungsquelle ist daher

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{d\zeta}{\sqrt{y^2 + (x - \zeta)^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{x + \frac{1}{2}l + \sqrt{y^2 + (x + \frac{1}{2}l)^2}}{x - \frac{1}{2}l + \sqrt{y^2 + (x - \frac{1}{2}l)^2}}. \quad (10.45)$$

Ähnliche Überlegungen führen übrigens auch zu den Linienquellen des elekt-

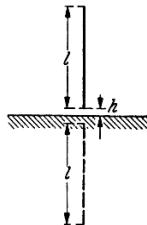


Abbildung 10.7. Linienquelle senkrecht zur Leiteroberfläche

trischen Strömungsfeldes (siehe Abschnitt 17.3). Die Potenzialflächen sind Rotationsellipsoide, die D-Feldlinien Hyperbeln mit den gleichen Brennpunkten. Füllt man den von einer Potenzialfläche eingeschlossenen Raum mit einem leitenden Stoff aus, dem das betreffende Potenzial erteilt wird, so ändert sich an dem elektrischen außerhalb nichts. Die Gl.(10.45) gibt daher zugleich das Potenzial in der Umgebung einer mit der Ladung Q versehenen Elektrode von der Form eines langgestreckten Rotationsellipsoides an. Ein solches Ellipsoid kann als Ersatz einer zylindrischen Elektrode benutzt werden.

Es lassen sich auf diese Weise z. B. die in den Abb. 10.7 und 10.8 dargestellten Fälle untersuchen. In Abb. 10.7 befindet sich ein Draht von der Länge l und dem Durchmesser d senkrecht über dem Erdboden; in Abb. 10.8 ist der Draht parallel zum Erdboden im Abstand h angebracht. Die in beiden Fällen geltenden Bedingung, dass das Potenzial an der Erdoberfläche konstant (gleich Null) sein soll, kann dadurch erfüllt werden, dass unter der Erdoberfläche ein Spiegelbild des Leiters mit entgegengesetzt gleicher Ladung angebracht wird; vgl. Spiegelungsmethode in Abschnitt 11.6. Dann setzt sich das Potenzial in einem beliebigen Punkt P zusammen aus den Beiträgen, die von dem geladenen Leiter und seinem Spiegelbild herrühren, wobei für diese Rechnung die leitende Halbebene unberücksichtigt bleibt. Längs der Erdoberfläche sind diese Beiträge einander entgegengesetzt gleich, so dass dort, wie es sein soll, das Potenzial Null wird. Die Potenzialflächen sind dann keine Rotationsellipsoide mehr; sie werden um so mehr verformt, je mehr sie sich der Erdoberfläche nähern. In unmittelbarer Nähe der Linienquelle ist die Verformung gering. Für

einen Punkt, der um den kleinen Abstand $(1/2)d$ horizontal vom Mittelpunkt der Linienquelle entfernt ist, gilt bei Abb. 10.7

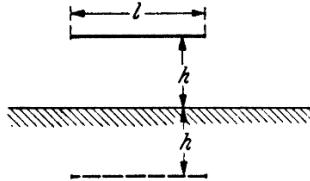


Abbildung 10.8. Linienquelle parallel zur Leiteroberfläche

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{l + \sqrt{d^2 + l^2}}{-l + \sqrt{d^2 + l^2}} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{4h + 3l + \sqrt{d^2 + (4h + 3l)^2}}{4h + l + \sqrt{d^2 + (4h + l)^2}}. \quad (10.46)$$

Erweitert man das Argument des ersten Logarithmus-Terms mit $(l + \sqrt{d^2 + l^2})$ nähert im Sinne von $d \ll l$, dann ergibt sich die folgende Näherungsformel für das Potenzial φ

$$\varphi \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{4h + l}{4h + 3l}}. \quad (10.47)$$

Im Fall der Abb. 10.8 gilt mit der gleichen Näherung

$$\varphi \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{\sqrt{l^2 + (4h)^2} - l}{\sqrt{l^2 + (4h)^2} + l}}. \quad (10.48)$$

In Abschnitt 12.3 findet der Leser die Kapazitätswerte der untersuchten Anordnungen.

10.2 Ebene elektrostatische Felder

10.2.1 Unendlich lange Linienleiter

In analoger Weise wie die in Abschnitt 10.1.6 behandelten endlich langen Linienladungen kann man das elektrische Feld von unbegrenzten Linienladungen bestimmen. Allerdings treffen wir an dieser Stelle erstmals auf eine grundsätzliche Schwierigkeit bei der Modellbildung im Sinne der Elektrostatik, auf die man im gesamten Abschnitt 10.2 aber auch in anderen Teilgebieten der Theorie elektromagnetischer Felder trifft, wenn man zu einer starken Idealisierung einer physikalischen Anordnung übergeht. Bei den zur Modellbildung verwendeten mathematischen vektoriellen Feldern – hier das E- und das D-Feld – geht man von der Gültigkeit des Satzes von Helmholtz aus, da nur in solchen Situationen die E-Felder (bis auf ein konstantes E-Feld) durch Rotation

und Divergenz eindeutig festgelegt sind. Es ist leicht einsichtig, dass im Fall einer unbegrenzten Linienladung weder das D- noch das E-Feld im Unendlichen verschwinden kann. Im Sinne der Grundgleichungen der Elektrostatik ist ein solches Problem also überhaupt nicht definiert. In der Literatur behilft man sich, ohne diese Schwierigkeit zu erwähnen, mit einem Symmetrieargument, welches das eigentlich *dreidimensionale* Problem in ein zweidimensionales Problem überführt. In der Ebene verschwinden dann E- und D-Feld im Unendlichen und die Schwierigkeit erscheint gar nicht mehr. Damit wird das Symmetrieargument in einer völlig anderen Weise, nämlich zur Erzeugung eines sinnvollen mathematischen Problems benutzt. Bei anderen physikalischen Problemen wird eine vorhandene Symmetrie lediglich zur Abkürzung des Rechenganges verwendet. Anhand des obengenannten Beispiels „unbegrenzte Linienladung“, bei dem die entsprechende Integralgleichung für das D-Feld ebenfalls gelöst werden kann, soll die Problematik noch einmal illustriert werden.

Wenn die Linienladung sehr lang (unendlich lang) ist, so bilden die D-Feldlinien radiale Strahlen; der von einem Abschnitt mit der Länge l ausgehende Fluss des D-Feldes verteilt sich auf konzentrische Zylinder mit der Länge l . Daher ist der Betrag des D-Feldes im Abstand $\|\mathbf{r}\|$ von der Linienladung

$$D = \frac{Q_l}{2\pi\|\mathbf{r}\|l}, \quad (10.49)$$

wenn mit λ die Linienladungsdichte des Abschnittes von der Länge l ist. An dieser Stelle wird das Symmetrieargument für eine unendlich ausgedehnte Linienladung benutzt, denn diese Beziehung gilt für eine endlich ausgedehnte Linienladung nur näherungsweise, wenn man sich in Punkten befindet, die von den Randpunkten weit entfernt sind.

Das E-Feld ist radial gerichtet und zeigt von der Linie weg, wenn die Ladung positiv ist, wobei eine Einbettung der Linienquelle in ein lineares, isotropes, homogenes Material vorausgesetzt wird. Der Betrag E des E-Feldes im Abstand $\|\mathbf{r}\|$ folgt aus (10.49)

$$E := \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\|\mathbf{r}\|}. \quad (10.50)$$

Das E-Feld nimmt also hier umgekehrt proportional mit dem Abstand $\|\mathbf{r}\|$ ab und verschwindet – wie gewünscht – im Unendlichen. Üblicherweise fügt man hinzu, dass das Feldbild in allen Ebenen, die von der Linienladung senkrecht durchstoßen werden, das gleiche ist, und nennt daher ein solches E-Feld ein „ebenes“ oder „zweidimensionales“ E-Feld, welches aber erst nach Anwendung des Symmetrieargumentes wohldefiniert ist. In analoger Weise wie bei der Kugelladung kann man auch das elektrische Potenzial im Abstand $r := \|\mathbf{r}\|$ durch Vereinfachung des entsprechenden Linienintegrals bestimmen

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_r^\infty \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \int_r^\infty \frac{\lambda d\tilde{r}}{2\pi\varepsilon\tilde{r}} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r}{b}\right). \quad (10.51)$$

Als Bezugspunkt für das elektrische Potenzial ist hier ein Punkt auf einem beliebigen Kreiszylinder mit dem Radius b genommen. Man bezeichnet auf Grund der Gl. (10.51) das Potenzial in der Umgebung einer Linienladung auch als logarithmisches Potenzial.

Dieses Potenzial hat konzentrische Zylinderflächen ($\|\mathbf{r}\|=\text{konst.}$) als Potenzialflächen und kann daher zur Berechnung des elektrischen Feldes zwischen zwei koaxialen Zylinderelektroden (*koaxiales Kabel, Zylinderkondensator*) benutzt werden. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt näher ein.

Es ist offensichtlich, dass im Fall einer unendlich ausgedehnten, ebenen Ladungsverteilung eine ähnlich kritische Bewertung der üblichen Vorgehensweise gilt, wie bei der unendlich ausgedehnten Linienladung. Im Fall der Ebene sind jedoch in zwei Richtungen Symmetrieargumente anzuwenden, um zu einem sinnvollen mathematischen Problem zu kommen. Die Überlegungen sind einfach und sollen an dieser Stelle nicht ausgeführt werden. Im Zusammenhang mit der Dimensionsreduktion der Potenzialgleichung werden wir darauf in Abschnitt 11 zurückkommen.

10.2.2 Koaxialkabel, Zylinderkondensator

Sind r_1 und r_2 die Radien der inneren und äußeren Elektrode, und bezeichnet Q die Ladung der inneren, so ist die Potenzialdifferenz oder Spannung U zwischen den Elektroden nach Gl.(10.51)

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.52)$$

Hieraus ergibt sich die Formel für die Kapazität der Anordnung; vgl. Gl. (16.31).

Das E-Feldbild in einem Querabschnitt des Zylinderkondensators zeigt konzentrische Kreise als Niveaulinien und Radien als D-Feldlinien. Der Betrag des E-Feldes im Innern berechnet sich nach Gl.(10.50); drückt man die Ladung durch die Spannung U zwischen den Elektroden aus, Gl.(10.52), so ergibt sich

$$E := \frac{U}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (10.53)$$

Der Betrag des E-Feldes nimmt, wie in Abb. 10.9 veranschaulicht, von einem Höchstwert E_m an der inneren Zylinderoberfläche nach außen hin umgekehrt proportional mit dem Radius ab. Der Höchstwert beträgt

$$E_m = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (10.54)$$

Er ist maßgebend für die elektrische Beanspruchung des Isolierstoffes zwischen den beiden Elektroden. Bei gegebenem Außendurchmesser und konstanter Spannung U hängt die Höchstfeldstärke E_m in der durch Abb. 10.10 dargestellten Weise von dem Innenradius r_1 ab. Wenn r_1 sehr klein ist, so ergibt

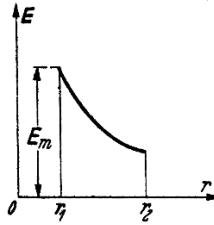


Abbildung 10.9. E-Feld im Inneren eines Zylinderkondensators

sich ein großes E-Feld E_m wegen der großen Krümmung; nähert sich andererseits r_1 dem Wert r_2 , so wird der Abstand zwischen den beiden Elektroden immer kleiner, womit sich ebenfalls ein wachsendes E-Feld ergibt wie bei einem Plattenkondensator. Bei einem bestimmten Radius r_{10} des Innenleiters wird die Beanspruchung des Isolierstoffes am kleinsten. Durch Differenzieren findet man aus Gl.(10.54) für dieses Minimum die Bedingung

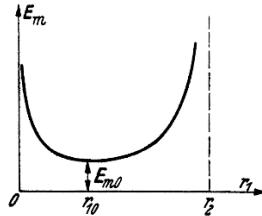


Abbildung 10.10. Abhängigkeit der Höchstfeldstärke E_m vom inneren Radius

$$e r_{10} = 2,718 r_{10} = r_2. \quad (10.55)$$

Das E -Feld am Innenleiter wird dabei

$$E_{m0} \approx 2,718 \frac{U}{r_2}. \quad (10.56)$$

Bei einem Plattenkondensator mit demselben Plattenabstand $r_2 - r_{10}$ wäre dagegen

$$E = \frac{U}{r_2 - r_{10}} \approx \frac{2,718}{1,718} \frac{U}{r_2}. \quad (10.57)$$

Das E-Feld ist also in Wirklichkeit noch fast doppelt so groß wie im Fall gleichmäßiger Verteilung der Spannung.

Das Minimum der Höchstfeldstärke in einem Zylinderkondensator hat noch folgende Bedeutung. Entsteht infolge Überschreitens der Durchbruchfeldstärke der Luft am inneren Zylinder eine Glimmentladung, so wird der Radius dadurch scheinbar vergrößert, da der Entladungsraum als elektrisch

leitend anzusehen ist. Ist nun r_1 größer als r_{10} , so wächst damit die Beanspruchung des Isolierstoffes entsprechend Abb. 10.10; die Glimmentladung pflanzt sich weiter fort, bis der Isolierstoff durchbrochen ist. Wenn dagegen r_1 kleiner als r_{10} ist, so verkleinert die Glimmentladung die Höchstfeldstärke, es ergibt sich eine stabile Glimmerscheinung (Korona).

Zahlenbeispiel: Schreibt man die Gl.(10.54) in der Form

$$E_m = \frac{U}{r_2 - r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (10.58)$$

so stellt der erste Faktor des E-Feldes dar, die sich bei gleichmäßiger Verteilung der Spannung U im Isolierstoff ergeben würde. Dieses E-Feld muss wegen der Krümmung der Elektroden mit einem Faktor

$$f = \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (10.59)$$

multipliziert werden. In der folgenden Tabelle 10.1 ist dieser Faktor für verschiedene Verhältnisse von r_2/r_1 angegeben:

$r_2/r_1 =$	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
$f =$	1,28	1,36	1,44	1,64	1,82	1,96	2,17	2,49

Tabelle 10.1. Feldstärcefaktor f in Abhängigkeit von r_2/r_1

Ist z. B. $U = 3 \text{ kV}$, $r_1 = 5 \text{ mm}$, $r_2 = 10 \text{ mm}$, so wird

$$\frac{r_2}{r_1} = 2, \quad f = 1,44, \quad \text{und} \quad E_m = 1,44 \frac{3 \text{ kV}}{0,5 \text{ cm}} = 8,6 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}. \quad (10.60)$$

Bemerkung: Die Beanspruchung des Isolierstoffes hat ein Minimum für ein bestimmtes Radienverhältnis. Daraus darf nicht gefolgert werden, dass dieses Radienverhältnis das „günstigste“ ist. Bei der Festlegung der Abmessungen eines Apparates oder einer Maschine sind außer der inneren physikalischen Wirkungsweise immer äußere Gesichtspunkte zu berücksichtigen, insbesondere Herstellungskosten, Materialaufwand, Betriebskosten, Betriebssicherheit, Bedienungsmöglichkeiten usw. Die Gesamtheit dieser Faktoren bestimmt die „günstigsten“ Abmessungen. Meist kann man diese äußeren Einflüsse nicht mathematisch formulieren; dann erhält man die günstigsten Abmessungen durch Probieren. In vielen Fällen können auch Simulatoren eingesetzt werden, um diese „Probierarbeit“ in effizienter Weise durchzuführen. In jedem

Fall nimmt man bestimmte, wahrscheinlich günstige Abmessungen an, prüft (ggf. anhand der Simulationsergebnisse), wieweit die Anforderungen erfüllt sind, und ändert danach die Abmessungen. Bei der Handanalyse liefert die Theorie Anhaltspunkte für die Richtung der Entwicklung. Dabei sollte man beachten, dass auch noch heute geschickte analytische Näherungen zu schnellen Ergebnissen führen können und die Verwendung eines Feldsimulators einen großen Aufwand erfordert. Als Beispiel dafür, dass sich bei Berücksichtigung veränderter Forderungen andere „günstigste“ Verhältnisse ergeben, soll der folgende Fall in analytischer Form betrachtet werden.

Es seien die Abmessungen eines Koaxialkabels zu berechnen für eine gegebene Spannung, wobei die Höchstfeldstärke einen bestimmten Wert nicht überschreiten soll; das Kabel sei so zu bemessen, dass das Gewicht des Isolierstoffes möglichst klein wird.

Für die Masse des Isolierstoffes gilt

$$m = (r_2^2 - r_1^2) \pi l \varrho_m, \quad (10.61)$$

wenn mit ϱ_m die Massendichte bezeichnet wird. Führt man als Abkürzung für das Verhältnis der beiden Radien

$$\frac{r_2}{r_1} = x \quad (10.62)$$

ein, so wird

$$m = r_2^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \pi l \varrho_m. \quad (10.63)$$

Andererseits ist das maximale E-Feld

$$\|\mathbf{E}_m\| = \frac{U}{r_2} \frac{x}{\ln x}. \quad (10.64)$$

Berechnet man hieraus r_2 und setzt diese Größe in den Ausdruck (10.63) für die Masse ein, so folgt

$$m = \frac{U^2(x^2 - 1)}{\|\mathbf{E}_m\|^2 \ln^2 x} \pi l \varrho_m. \quad (10.65)$$

Diese Funktion des Radienverhältnisses x wird unendlich für $x = 1$ und $x = \infty$. Sie hat ein Minimum bei

$$x = \frac{r_2}{r_1} = 2,22 \quad (10.66)$$

gegenüber $x = 2,718$ in dem oben betrachteten Fall kleinsten E-Feldes bei gegebenem Außendurchmesser.

Wenn der Zwischenraum zwischen den beiden koaxialen Zylinderelektroden durch coaxiale Schichten von Stoffen mit verschiedener relative Dielektrizitätskonstante ε_r ausgefüllt ist, so gilt für das E-Feld in jeder Schicht die

Gl.(10.50). Die Spannung zwischen den beiden Elektroden wird durch Addition der Spannungen an den einzelnen Schichten erhalten:

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 lr} dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 lr} dr + \int_{r_3}^{r_4} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_3 lr} dr + \dots \\ &= \frac{Q}{2\pi l} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \ln \frac{r_4}{r_3} + \dots \right). \end{aligned} \quad (10.67)$$

Daraus kann die Kapazität berechnet werden oder bei gegebener Spannung der Verschiebungsfluss. Aus diesem ergibt sich das E-Feld in irgendeinem Abschnitt

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_\nu lr}. \quad (10.68)$$

Stuft man die relative Dielektrizitätskonstante so ab, dass die Schichten mit kleinerem Radius eine entsprechend höhere relative Dielektrizitätskonstante haben, so kann eine angenähert gleichmäßige Verteilung des Potenzials zwischen den beiden Elektroden erzielt werden. Ein anderes Verfahren zur Herstellung der gleichmäßigen Potenzialverteilung besteht darin, dass man bei gleicher relative Dielektrizitätskonstante die Länge l mit Hilfe von Metalleinlagen umgekehrt proportional mit r abstuft (*Kondensatordurchführung*).

10.2.3 Zweidrahtleitung, parallele Zylinder

Einen anderen wichtigen Fall stellt das elektrische Feld in der Umgebung von zwei parallelen und im Vergleich zu ihrem Abstand sehr langen Linienquellen mit entgegengesetzt gleicher Ladung dar (*zweiadrig Leitung*). Die beiden Quellen sollen den Abstand a , Abb. 10.11, und auf einem Abschnitt von der Länge l die Ladungen $+Q$ und $-Q$ haben. Das Potenzial in irgendeinem Punkt P mit den Abständen c_1 und c_2 von den Linienquellen ergibt sich als Summe der beiden Einzelpotenziale; es ist nach Gl.(10.51)

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{c_2}{c_1} + k_1. \quad (10.69)$$

Für weit entfernte Punkte nähert sich c_2/c_1 dem Wert 1. Daher stellt k_1 das Potenzial unendlich weit entfernter Punkte dar. Wählt man einen solchen Punkt als Bezugspunkt für das Potenzial, so wird

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{c_2}{c_1}. \quad (10.70)$$

Die Potenzialflächen sind durch die Bedingung $\varphi = \text{konst.}$ bestimmt. Daraus folgt für die Potenziallinien in der Zeichenebene die der Gl.(10.13) entsprechende Bedingung

$$\frac{c_2}{c_1} = \text{konst.} = k, \quad (10.71)$$

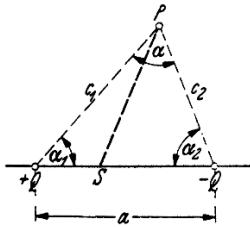


Abbildung 10.11. Zur Berechnung des E-Feldes zweier paralleler Linienquellen

die aussagt, dass die Potenziallinien Kreise sind, für deren Bestimmungsstücke die Gl.(10.18) und (10.19) gelten, Abb. 10.2. Bezeichnet man die Spuren der beiden Linienquellen mit C und D , so ergibt sich die Abb. 10.12, in die außerdem noch der Halbierungspunkt O der Strecke $CD = a$ eingetragen ist. Für den Abstand des Kreismittelpunktes M von O gilt nach Gl.(10.19)

$$x_0 = \frac{a}{2} + b = \frac{a}{2} + \frac{a}{k^2 - 1} = \frac{a k^2 + 1}{2 k^2 - 1}. \quad (10.72)$$

Daraus folgt mit Hilfe von Gl.(10.18)

$$x_0^2 - r_0^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (10.73)$$

Auf Grund dieser Beziehung können die Potenziallinien durch die in Abb.

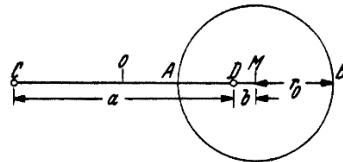


Abbildung 10.12. Potenziallinie des Feldes

10.13 dargestellte Konstruktion gefunden werden. Man schlage um O mit dem Radius $(1/2)a$ einen Kreis. Um dann zu einem beliebigen Punkt P dieses Kreises die Potenziallinie zu erhalten, lege man in P die Tangente an den Kreis. Sie schneidet auf der Verlängerung von CD den Mittelpunkt M des gesuchten Potenzialkreises aus. Denn im Dreieck OPM ist

$$\overline{OM}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{PO}^2, \quad (10.74)$$

wie es nach Gl.(10.73) sein muss.

Je kleiner der Radius r_0 des Potenzialkreises ist, um so enger rückt M an D heran. Um den Potenzialkreis für einen vorgegebenen Wert von k zu zeichnen,

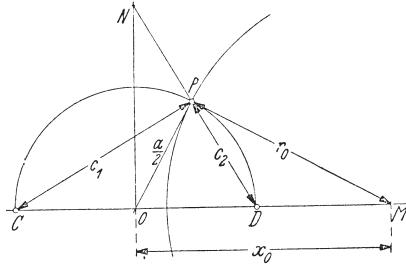


Abbildung 10.13. Konstruktion der Potenziallinien

also für ein bestimmtes Potenzial, errichtet man in O die Senkrechte auf CD . zieht man dann von P aus die beiden Strahlen c_1 und c_2 und verlängert DP bis zum Schnitt N mit der Senkrechten, so entstehen die beiden einander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke:

$$\Delta CDP \sim \Delta DNO. \quad (10.75)$$

Daher gilt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OD}} \quad (10.76)$$

oder

$$\overline{ON} = k \frac{a}{2}. \quad (10.77)$$

Die Senkrechte \overline{ON} kann also als Skala für k eingeteilt werden. Für $k = 1$ rückt M ins Unendliche, der Kreis wird zur Mittelsenkrechten \overline{ON} . Für Werte von k , die kleiner als 1 sind, sind der Mittelpunkt des Kreises links von C , für Werte von k größer als 1 rechts von D . Das Potenziallinienbild wird symmetrisch zu der Mittelsenkrechten, Abb. 10.14.

Die D-Feldlinien ergeben sich aus der folgenden Überlegung. Ebenso wie sich die Potenziale der beiden Linienquellen ungestört zum Gesamtpotenzial überlagern, so setzen sich auch die von den Quellen ausgehenden einzelnen Verschiebungsflüsse ohne gegenseitige Störung zusammen. Wir denken uns über a , c_1 und c_2 , Abb. 10.11, drei auf der Zeichenebene senkrechte Ebenen errichtet. Zwischen den beiden Ebenen über a und c_1 , die den Winkel α_1 einschließen, geht von der linken Linienquelle ein Verschiebungsfluss aus

$$Q_a = \frac{\alpha_1}{2\pi} Q. \quad (10.78)$$

Dieser Fluss geht durch eine über der beliebigen Linie \overline{PS} errichtete Fläche von links nach rechts hindurch. Zwischen den beiden Ebenen über a und c_2 ist ferner der Teil

$$Q_b = \frac{\alpha_2}{2\pi} Q \quad (10.79)$$

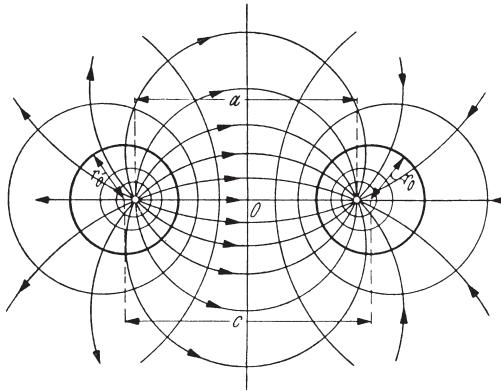


Abbildung 10.14. Potenziallinien und D-Feldlinien der parallelen Linienquellen entgegengesetzt gleicher Ladungen

des auf der rechten Linienquelle mündenden Verschiebungsflusses eingeschlossen. Es tritt durch die Fläche über \overline{PS} ebenfalls von links nach rechts hindurch. Insgesamt ist also der Verschiebungsfluss, der durch die über \overline{PS} errichtete Fläche hindurchgeht,

$$\frac{Q}{2\pi}(\alpha_1 + \alpha_2) = Q \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \quad (10.80)$$

Bewegt sich der Punkt P auf einer D-Feldlinie, dann bleibt dieser Fluss konstant. Die Gleichung der D-Feldlinie ist also gegeben durch

$$\alpha = \text{konst.} \quad (10.81)$$

Die D-Feldlinien sind danach Kreise mit dem Peripheriewinkel α , deren Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten über \overline{CD} liegen, Abb. 10.14. D-Feldlinien-Bündel gleichen Verschiebungsflusses erhält man, wenn man Werte einer arithmetischen Reihe für α wählt (in Abb. 10.14 ist $\alpha = 0^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$ usw.; der ganze Verschiebungsfluss Q ist dann in 16 gleiche Teile geteilt; die D-Feldlinien bilden in der Nähe der Linienquellen Winkel von $22,5^\circ$ miteinander).

Da die Niveauplatten Zylinder sind, so gilt das Feldbild auch für zwei parallele zylindrische Elektroden. Die D-Feldlinien endigen dann auf diesen Zylindern. Haben die Zylinder die Radien r_0 und den Achsenabstand c , Abb. 10.14, so findet man die Lage der Linienquellen, durch die das elektrische Feld außerhalb der beiden Zylinder dargestellt werden kann, aus Gl.(10.73) mit $x_0 = c/2$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - r_0^2}. \quad (10.82)$$

Das Potenzial auf der Verbindungslinie \overline{CD} ist im Abstand x von dem Punkt O nach Gl.(10.70)

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2} + x}. \quad (10.83)$$

Das E-Feld auf dieser Verbindungsleitung hat daher den Betrag

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{\frac{a}{2} - x} + \frac{1}{\frac{a}{2} + x} \right) \quad (10.84)$$

und die Richtung der Verbindungsleitung. Potenzial und E-Feld sind in Abb. 10.15 aufgezeichnet. Die Spannung zwischen den beiden Elektroden ist

$$U = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \ln \frac{\frac{a}{2} + \frac{c}{2} - r_0}{\frac{a}{2} - \frac{c}{2} + r_0}; \quad (10.85)$$

hieraus kann man die Kapazität ermitteln (vgl. Gl.(12.42)).

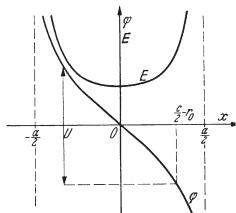


Abbildung 10.15. Potenzial und E-Feld zwischen den Linienquellen

Das E-Feld hat seinen größten Wert an der Zylinderoberfläche, nämlich

$$E_m = U \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{2r_0}\right)^2 - 1}}{(c - 2r_0) \ln \left(\frac{c}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{c}{2r_0}\right)^2 - 1} \right)}. \quad (10.86)$$

Wenn der Radius der beiden Zylinder nahezu gleich dem halben Achsenabstand ist, so ergibt sich ein hohes E-Feld, die mit zunehmender Annäherung der beiden Zylinderoberflächen dauernd anwächst. Ebenso wird das E-Feld groß, wenn die Zylindrerradien sehr klein gemacht werden. Für ein bestimmtes Verhältnis von Achsenabstand zu Radius ergibt sich ein Minimum des E-Feldes, nämlich für

$$\frac{c}{r_0} = 5,85. \quad (10.87)$$

Ist das Verhältnis von Achsenabstand zu Radius größer als dieser Wert, dann kann bei entsprechender Spannung eine stabile Glimmentladung der Luft (Korona) auftreten; das ist bei den Hochspannungsleitungen der Fall, bei denen c/r_0 gewöhnlich größer als 20 ist.

Zahlenbeispiele: Gl.(10.86) lässt sich schreiben

$$E_m = \frac{U}{c - 2r_0} f. \quad (10.88)$$

Hier stellt der erste Faktor das E-Feld dar, das sich bei gleichmäßiger Verteilung des Potenzials zwischen den beiden Zylindern ergeben würde. Der Faktor f hat die Form

$$f = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}; \quad x = \frac{c}{2r_0}. \quad (10.89)$$

Für verschiedene Verhältnisse von c/r_0 ergeben sich für diesen Faktor die in der Tabelle 10.2 angegebenen Werte

$c/r_0 =$	2,0	2,4	3,0	4,0	6,0	10,0	20,0
$f =$	1,0	1,065	1,161	1,315	1,604	2,138	3,325

Tabelle 10.2. E-Feldfaktor f in Abhängigkeit von c/r_0

Bei relativ großen Abständen der beiden Zylinder, wie sie bei Freileitungen vorkommen, kann man die Zahl l unter der Wurzel vernachlässigen und erhält

$$f = \frac{c}{2r_0 \ln \frac{c}{r_0}}. \quad (10.90)$$

Für $c/r_0 = 20$ ergibt dies den Wert f bereits auf 0,4% genau. Wie der Vergleich mit Gl.(10.54) zeigt, ist das E-Feld dann ungefähr halb so groß wie zwischen zwei konzentrischen Zylindern mit den Radien r_0 und c . Den entsprechenden Kapazitätswert findet man in Gl.(12.43) in Abschnitt 12.3.

10.2.4 Zylinder und Platte

In dem Feldbild, Abb. 10.14, ist die Mittelebene eine Potenzialfläche. Wird sie durch eine leitende Elektrode ersetzt, so ergibt sich das Feld zwischen dieser ebenen Platte und einem parallelen Zylinder. Bei gleicher Ladung des Zylinders ist die Spannung zwischen Platte und Zylinder halb so groß wie die zwischen den beiden Zylindern. Bezeichnet man den Achsenabstand des Zylinders von der Platte mit h , so ist das E-Feld an der Oberfläche einer solchen Leitung angenähert

$$E_m = \frac{U}{h - r_0} \frac{h}{r_0 \ln \frac{2h}{r_0}} \approx \frac{U}{r_0 \ln \frac{2h}{r_0}}, \quad (10.91)$$

wenn mit U die Spannung zwischen Leitung und Erde bezeichnet wird. Den entsprechenden Kapazitätswert findet man in Gl.(12.45) in Abschnitt 12.3.

10.2.5 Liniendipol

Werden die beiden Linienquellen einander mehr und mehr genähert, so ergibt sich ein Gebilde, das in Analogie zu dem bereits betrachteten Dipol der beiden Punktquellen steht (*Liniendipol*). Das Potenzial ist

$$\varphi(r) = -\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{b}{r} \cos \alpha \right) \quad (10.92)$$

bei gleichen Bezeichnungen wie in Abb. 10.3; λ_2 ist die zugehörige Linienladungsdichte. Es folgt hieraus für verschwindend kleinen Abstand b

$$\varphi(r) = -\frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon} \frac{\cos \alpha}{r}. \quad (10.93)$$

Bezeichnet man das durch l dividierte Dipolmoment mit p'

$$p' := -\lambda_2 b, \quad (10.94)$$

so gilt

$$\varphi(r) = \frac{p'}{2\pi\varepsilon} \frac{\cos \alpha}{r}. \quad (10.95)$$

Die Potenzialflächen sind Zylinder, deren Achsen in der Dipolebene liegen und die die Mittelebene des Dipols berühren. Man kann, ähnlich wie bei der Kugel, diese Potenzialfunktion benutzen zur Berechnung des E-Feldes in der Umgebung eines leitenden Zylinders, der sich in einem ursprünglich homogenen Feld senkrecht zu dessen E-Feldlinien befindet. Man muss dann zu dem Potenzial des Dipols das Potenzial des homogenen E-Feldes

$$\varphi(r) = -\|\mathbf{E}_0\| r \cos \alpha \quad (10.96)$$

addieren Das Moment p' des Dipols erhält man durch die gleiche Grenzwertbetrachtung wie bei der Kugel nach Gl.(10.94), (11.37) und (10.50) mit $Q_2 = -Q$. Es ergibt sich für das Gesamtpotenzial

$$\varphi(r) = \|\mathbf{E}_0\| \left(-r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \alpha. \quad (10.97)$$

Das E-Feld an der Zylinderoberfläche wird

$$\|\mathbf{E}\| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r_0} = 2\|\mathbf{E}_0\| \cos \alpha. \quad (10.98)$$

Sie ist also hier maximal nur doppelt so groß wie das ursprüngliche E-Feld. Ganz entsprechend wie im Fall der Kugel lässt sich auch der Fall behandeln, dass der Zylinder geladen ist; dann muss in seiner Achse noch eine Linienquelle mit entsprechender Ladungsbewegung angebracht werden.

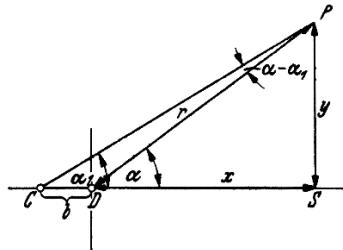


Abbildung 10.16. Zur Berechnung der D-Feldlinien eines Liniendipols

Der Verlauf der D-Feldlinien ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung wie bei den parallelen Zylindern. Bezeichnet man den Abstand eines beliebigen Punktes P von der Ebene des Dipols mit y , Abb. 10.16, die Abszisse mit x , so gilt

$$y = r \sin \alpha; \quad x = r \cos \alpha. \quad (10.99)$$

Durch die Ebene mit der Spur PS geht, vom homogenen Feld herrührend, ein Verschiebungsfluss

$$Q_a = \|E_0\| \varepsilon l y \quad (10.100)$$

von links nach rechts hindurch, wenn diese Richtung der D-Feldlinien des homogenen Feldes vorausgesetzt wird. In C befindet sich dann eine negative, in D eine positive Ladung. Die durch \overline{PS} hindurchgehenden Verschiebungsflüsse dieser Ladungen sind

$$Q_b = -Q_2 \frac{\alpha_1}{2\pi} \quad (10.101)$$

und

$$Q_c = Q_2 \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (10.102)$$

Der gesamte Verschiebungsfluss in der Fläche über \overline{PS} ist also

$$Q_P = \|E_0\| \varepsilon l y + Q_2 \frac{\alpha - \alpha_1}{2\pi}. \quad (10.103)$$

Nun gilt bei verschwindenden kleinem Abstand b

$$\alpha - \alpha_1 = \angle CPD = \frac{b \sin \alpha}{r}. \quad (10.104)$$

Das Dipolmoment wird nach Gl.(10.94), (11.37) und (10.50)

$$p' = 2\pi \|E_0\| \varepsilon r_0^2. \quad (10.105)$$

Daher ergibt sich

$$Q_P = \|E_0\| \varepsilon l \left(r \sin \alpha + \frac{r_0^2}{r} \sin \alpha \right). \quad (10.106)$$

Die Gleichungen der D-Feldlinien lautet $Q_P = \text{konst.}$, die der Potenziallinie $\varphi = \text{konst.}$ Potenziallinien und Verschiebungslinien sind in Abb. 10.17 dargestellt (D-Feldlinien gestrichelt).

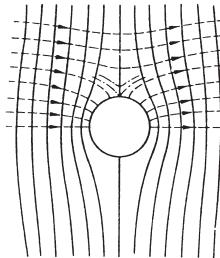


Abbildung 10.17. Ungeladener Metallzyylinder im homogenen Feld; D-Feldlinien gestrichelt

10.2.6 Erdseil

Als letztes Beispiel der Berechnung eines elektrostatischen Feldes werde die Wirkung des *Erdseils einer Hochspannungsleitung* betrachtet. Das über der Hochspannungsleitung angebrachte Erdseil wird an den Masten geerdet und schirmt den darunter liegenden Raum gegen das elektrische Luftfeld ab, indem es einen Teil der Verschiebungslinien dieses Feldes aufnimmt entsprechend der durch Influenz auf ihm entstehenden Ladung Q , Abb. 10.18.

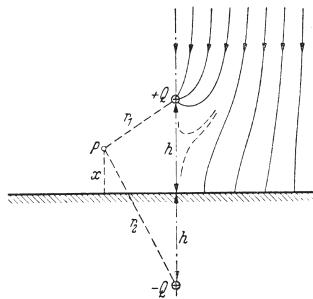


Abbildung 10.18. Schutzwirkung eines Erdseils

Wird angenommen, dass das ursprüngliche Luftfeld ein mit der Höhe proportional wachsendes Potenzial φ_1 besitzt, so gilt

$$\varphi_1 = \|\mathbf{E}_0\| x, \quad (10.107)$$

wobei $\|\mathbf{E}_0\|$ die konstante E-Feldstärke dieses homogenen Luftfeldes im ungestörten Zustand bezeichnet und der Nullpunkt für das Potenzial in die Erdoberfläche verlegt ist.

Das Erdseil mit seiner Ladung Q erzeugt in irgendeinem Punkt P ein Zusatzfeld mit dem Potenzial (siehe Gl.(10.70))

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.108)$$

Das Gesamtpotenzial wird daher

$$\varphi = \|\mathbf{E}_0\| x + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.109)$$

Da nun dieses Potenzial an der Oberfläche des Erdseils mit dem Radius r_0 Null sein muss, so ergibt sich die Bedingung

$$0 = \|\mathbf{E}_0\| h + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (10.110)$$

Daraus folgt mit $Q = \lambda l$

$$Q = -2\pi\varepsilon l \frac{\|\mathbf{E}_0\| h}{\ln \frac{2h}{r_0}}, \quad (10.111)$$

und das Potenzial wird

$$\varphi = \|\mathbf{E}_0\| \left(x - h \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{2h}{r_0}} \right). \quad (10.112)$$

Damit kann berechnet werden, um wieviel das Luftpotenzial unter dem Erdseil durch Anwesenheit des Erdseils erniedrigt wird.

Zahlenbeispiel: Auf der durch die Erdseilachse gehenden senkrechten Ebene ist $r_1 = h - x$ und $r_2 = h + x$, also

$$\varphi = \|\mathbf{E}_0\| \left(x - h \frac{\ln \frac{h+x}{h-x}}{\ln \frac{2h}{r_0}} \right). \quad (10.113)$$

Das Verhältnis $\eta = \varphi/\varphi_1$ gibt an, auf welchen Bruchteil das Potenzial durch das Erdseil herabgesetzt wird:

$$\eta = 1 - \frac{h}{x} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{h} \right) - \ln \left(1 - \frac{x}{h} \right)}{\ln \frac{2h}{r_0}}. \quad (10.114)$$

Schreibt man dieses Schutzverhältnis in der Form

$$\eta = 1 - f k, \quad (10.115)$$

so ist

$$f = \frac{h}{x} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{h} \right) - \ln \left(1 - \frac{x}{h} \right) \right) = \frac{h}{x} \ln \left(\frac{1 + \frac{x}{h}}{1 - \frac{x}{h}} \right) \quad (10.116)$$

eine Funktion von x/h und

x/h	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95
f	2	2,02	2,12	2,32	2,75	3,28	3,85

Tabelle 10.3. Werte von f

$$k = \frac{1}{\ln \frac{2h}{r_0}} \quad (10.117)$$

eine Funktion von h/r_0 .

Für beide Faktoren sind in den folgenden beiden Tabellen 10.3 und 10.4 einige Zahlenwerte angegeben.

Die beiden Größen f und k sind also in dem praktisch interessierenden Bereich nur verhältnismäßig wenig veränderlich: f liegt in der Größenordnung von 3, k in der Größenordnung von 0,13; daher wird in dem praktisch interessierenden Bereich das Schutzverhältnis η ungefähr gleich 60 %. Die Schirmwirkung eines Erdseils ist also gering.

h/r_0	200	500	1000	2000	5000
k	0,167	0,145	0,131	0,121	0,117

Tabelle 10.4. Werte von k

Die praktisch wichtigere Wirkung besteht darin, dass an der Oberfläche des Erdseils selbst ein hohes E-Feld auftritt, nämlich

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi r_0 l} = \frac{\|\mathbf{E}_0\| h}{r_0 \ln \frac{2h}{r_0}} = \|\mathbf{E}_0\| \frac{h}{r_0} k. \quad (10.118)$$

Dies führt etwa zu dem Betrag des E-Feldes $\|\mathbf{E}\| = (70 \dots 240) \|\mathbf{E}_0\|$. Daher ergeben sich dort bei hohen Luftfeldstärken (Gewitter) Sprüherscheinungen, die eine sich der Leitung nährende Blitzbahn auf das Erdseil hinlenken und so die Hochspannungsleitungen vor dem unmittelbaren Blitzschlag schützen.

11

Lösungsverfahren der Poisson- und Laplace-Gleichung

11.1 Grundlagen

Die Feldberechnungsmethoden in Abschnitt 10 beruhten wesentlich auf der Anwendung der feldmäßigen Darstellung der elektrischen Ladungsdichte ϱ mit Hilfe des D-Feldes „Das Oberflächenintegral des D-Feldes über eine geschlossene Fläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung“, der *Wirbelfreiheit* des E-Feldes, was in differentieller Form durch die Einführung des elektrischen Potenzials berücksichtigt wird „Das E-Feld kann als negativer Gradient des elektrischen Potenzials notiert werden“ und dem linearen Materialgesetz „Das D-Feld ist proportional zum E-Feld“.

In Abschnitt 6 wurde ein diesen Aussagen entsprechendes System von Algebro-Differentialgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (11.1)$$

angegeben und daraus eine Poisson-PDG. abgeleitet

$$\Delta \varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad (11.2)$$

die man zusammen mit den entsprechenden Randbedingungen zur Bestimmung des elektrischen Potenzials φ heranziehen kann. Wenn keine Raumladungen vorhanden sind, dann erhält man die Laplace-PDG. für das elektrische Potenzial (Laplace 1782)

$$\Delta \varphi = 0. \quad (11.3)$$

Wie alle Differentialgleichungen so besitzen auch die Poissonsche und die Laplacesche partielle Differentialgleichung unendlich viele Lösungen, aus denen man erst nach Vorgabe von Bedingungen (Randwerte oder Grenzbedingungen) eine eindeutige Lösung auswählt. Man muss allerdings erst die Existenz einer Lösung aus der Menge aller Lösungen nachweisen, die zu den vorgegebenen Bedingungen passt, was i. a. sehr schwierig ist.

11.1.1 Poisson- und Laplace-Gleichung und ihre Lösungsmengen

Bevor wir in den folgenden Abschnitten auf die verschiedenen Lösungsverfahren für die Poisson- und Laplace-PDgl. eingehen, sollen einige allgemeine Überlegungen zur Klassifikation dieser Differentialgleichungen und die Eigenschaften der zugehörigen Mengen aller Lösungen – im folgenden auch Lösungsräume genannt – vorangestellt werden. Das ist aus zweierlei Gründen sinnvoll:

1. Es wird sich zeigen, dass die Lösungsräume der beiden Grundgleichungen der Elektrostatik von einfacher Bauart sind (lineare Mannigfaltigkeiten bzw. Vektorräume), die man auch schon bei der Lösung linearer algebraischer Gleichungen bzw. linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen der linearen Netzwerk- und Systemtheorie antrifft.
2. Aufgrund der unter 1) genannten Eigenschaften der Lösungsräume kann man auch auf Lösungskonzepte zurückgreifen, die man bereits aus der linearen Netzwerk- und Systemtheorie kennt.

Die beiden, im folgenden zu belegenden Aussagen können dazu beitragen, dass man die begrifflichen Schwierigkeiten der Theorie elektromagnetischer Felder und insbesondere auch der Elektrostatik dadurch vermindert, indem man bereits bekanntes Wissen aus vorherigen Gebieten der Elektrotechnik nutzt. Auf diese Weise kann man sich stärker auf die neuartigen Aspekte der Theorie elektromagnetischer Felder konzentrieren. Deutlicher als in den meisten anderen Darstellungen dieser Theorie soll dabei ein enger Zusammenhang mit der maßgeblich von Küpfmüller aufgebauten linearen Systemtheorie, die wesentlichen Gebrauch von den Konzepten der linearen Netzwerktheorie macht, sowie der daraus entstandenen Regelungstheorie gesucht werden. Insbesondere für die Leserinnen und Leser aus dem Bereich der Elektrotechnik und Informationstechnik, bei denen man zumindest Grundkenntnisse der genannten Theorien erwarten kann, wird sich ein denkökonomischer Effekt einstellen. Andererseits können sich Leserinnen und Leser mit anderen Vorerfahrungen vom Nutzen der linearen Netzwerk- und Systemtheorie sowie der Regelungstheorie überzeugen.

Die grundlegende Beschreibungsgleichung der Elektrostatik ist die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (11.4)$$

bei der es sich um eine lineare partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten handelt. Die Menge aller Lösungen ist eine Teilmenge der zweimal differenzierbaren skalaren Felder über dem \mathbb{R}^n , wobei $n = 1, 2, 3$ sein kann. Die wesentlichen Eigenschaften der Differentialgleichung ergeben sich aus der Linearität des Laplace-Operators

$$\Delta(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha\Delta\varphi_1 + \beta\Delta\varphi_2 \quad (11.5)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass die Lösungen bezüglich verschiedener rechter Seiten, z. B. verschiedener Ladungsdichten ϱ_1 und ϱ_2 überlagert werden können

$$\Delta\varphi_i = -\frac{\varrho_i}{\varepsilon} \quad (i = 1, 2) \Rightarrow \Delta(\varphi_1 + \varphi_2) = -\frac{(\varrho_1 + \varrho_2)}{\varepsilon}. \quad (11.6)$$

Dabei ist zu beachten, dass zwei verschiedene Lösungen mit gleicher Ladungsdichte nicht überlagert werden können. Allerdings ist die Differenz zweier solcher Lösungen der Poisson-Gleichung eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi_i = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \quad (i = 1, 2) \Rightarrow \Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{(\varrho - \varrho)}{\varepsilon} = 0. \quad (11.7)$$

Setzt man $\varrho = 0$, dann sieht man sofort, dass im Gegensatz zur Poisson-PDgl. irgendzwei Lösungen der Laplace-PDgl. überlagert werden können.

Im Sinne der bereits in der linearen Algebra behandelten Theorie linearer algebraischer inhomogener Gleichungssysteme sowie der Theorie linearer gewöhnlicher inhomogener Differentialgleichungen

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad (11.8)$$

ist folgende Klassifikation der Poisson- und Laplace-Gleichung möglich:

- Die Poisson-PDGl. ist eine lineare inhomogene partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösungsraum die Struktur einer linearen Mannigfaltigkeit (affiner Raum) besitzt.
- Die Laplace-PDGl. ist eine lineare homogene partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösungsraum die Struktur eines linearen Raumes (Vektorraum) besitzt.

Im Fall eines linearen algebraischen Gleichungssystems mit $n = 2$ lassen sich die Verhältnisse sehr gut anhand von Geraden in allgemeiner Lage (affiner) und einer Geraden durch den Nullpunkt (Vektorraum) illustrieren.

Wie in der linearen Algebra und der Theorie der linearen Differentialgleichungen folgt daraus, dass sich die allgemeine Lösung der Poisson-PDGl. additiv aus der allgemeinen Lösung der homogenen Laplace-Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Poisson-Gleichung zusammen setzt

$$\Delta(\varphi_h + \varphi_s) = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad (11.9)$$

$$\Delta\varphi_s = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad \Delta\varphi_h = 0, \quad (11.10)$$

wobei die allgemeine Lösung φ_h der homogenen Laplace-Gleichung noch von „freien“ Parametern abhängt. Daher handelt es sich bei $\varphi_h + \varphi_s$ um eine parametrisierte Schar von Lösungen, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Um aus dieser Menge von Lösungen eine eindeutige Lösung auszuwählen, müssen zusätzliche Randbedingungen gestellt werden (vgl. Abschnitt 11.1.2).

Aufgrund der gerade geschilderten, speziellen Eigenschaften der Poisson- und Laplace-Gleichung kann die Aufgabe der Lösung der Poisson-Gleichung

in zwei Teilprobleme zerlegen: 1) Bestimmung einer speziellen Lösung der Poisson-Gleichung und 2) Bestimmung der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung. In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Methoden für diese Teilprobleme vorgestellt. Da man es in der linearen Netzwerk- und Systemtheorie sowie der linearen Regelungstheorie mit dem gleichen Grundproblem zu tun hat, kann man sich, wie bereits erwähnt, zumindest teilweise an den dort behandelten Vorgehensweisen orientieren.

11.1.2 Rand- und Grenzbedingungen, Eindeutigkeit des Potenzials

Die gesuchte Lösung sowohl der Poisson- als auch der Laplace-PDgl. ist das elektrische Potenzial φ , bei dem es sich um ein skalares mathematisches Feld handelt. Daher ist es naheliegend, das Potenzial in gewissen Teilmengen des betrachteten Raumgebietes vorzugeben. Andererseits haben wir in Abschnitt 9 gesehen, dass das E-Feld im Inneren idealer Leiter gleich null sein muss, auf den Rändern konstant ist und dort eine verschwindende Tangentialkomponente besitzt. Drückt man diese Vorgaben mit Hilfe des elektrischen Potenzials aus, dann sind auch Vorgaben möglich, bei denen der Gradient von φ vorgegeben ist. Der Eindeutigkeitssatz für die das elektrische Potenzial bestimmenden Differentialgleichungen zeigt, dass man die Randwerte nicht in beliebiger Weise vorgeben kann.

Eindeutigkeitssatz für die Poisson- und Laplace-PDgl.:

(vgl. z.B. Wunsch, Schulz [310], S. 121f)

Ist φ eine Lösung der Poisson-PDgl. $\Delta\varphi = -\rho/\epsilon$ im Gebiet V und nimmt φ auf der geschlossenen Randfläche A von V

1. die Randwerte $\varphi(\tilde{\mathbf{r}})$ ($\tilde{\mathbf{r}} \in A$) an, so ist φ auch die einzige Lösung auf V mit diesen Randwerten.
2. Besitzt andererseits $-(\text{grad } \varphi)(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}})$ auf dem Rand A die Randwerte $n \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\tilde{\mathbf{r}}} = (\partial \varphi / \partial \mathbf{n})|_{\mathbf{r}=\tilde{\mathbf{r}}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$, so unterscheidet sich jede weitere Lösung mit denselben Randwerten nur durch eine Konstante, d. h. es gilt für zwei Lösungen $\varphi_{1,2}$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \text{konst.} \quad (11.11)$$

Für die Laplace-PDgl. $\Delta\varphi = 0$ gilt

Jede Lösung φ , die auf dem Rand verschwindet, ist überall gleich null.

Die genannten partiellen Differentialgleichungen und deren Verallgemeinerungen werden in der Mathematik im Rahmen der sogenannten Potenzialtheorie untersucht; siehe z. B. Sigl [260]. Bei der Laplace-PDgl. unterscheidet man zwei Randwertprobleme, deren Lösungen als *harmonische Funktionen* bezeichnet werden:

(vgl. z.B. Wunsch, Schulz [310], S. 128f oder Lehner [162], S. 131f)

1. *Randwertproblem nach Dirichlet:*

Gesucht ist eine im Gebiet V harmonische Funktion φ , die bei Annäherung an den Rand von V vorgegebene Werte φ_A annimmt.

Das Dirichletsche Randwertproblem ist nach dem oben aufgeführten Eindeutigkeitssatz – wenn überhaupt – eindeutig lösbar.

2. *Randwertproblem nach Neumann:*

Gesucht ist eine im Gebiet V harmonische Funktion φ , die bei Annäherung an den Rand von V eine vorgegebene Normalableitung $(\partial\varphi/\partial\mathbf{n})|_A$ besitzt.

Das Neumannsche Randwertproblem ist bis auf eine Konstante nach dem oben aufgeführten Eindeutigkeitssatz – wenn überhaupt – eindeutig lösbar.

Grundsätzlich sind natürlich auch gemischte Randwerte möglich, bei denen auf einem Teil des Randes Dirichletsche und auf dem anderen Neumannsche Randwerte vorgegeben sind; vgl. z. B. Lehner [162].

Neben den zuvor diskutierten Randbedingungen gibt es auch sogenannte Grenzbedingungen innerhalb eines Gebietes V , in dem die Lösung ermittelt werden soll. In solchen Fällen ist das Materialgesetz, d.h. die Beziehung zwischen D- und E-Feld, zwar noch linear aber die Dielektrizitätskonstante ε ist eine ortsabhängige Funktion $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$. Vielfach ist es aber zweckmäßig, diese Funktion durch eine stückweise konstante Funktion zu approximieren, so dass das Gebiet V in Teilgebiete V_k mit konstanter Dielektrizitätskonstanten zerlegt werden kann. Für die Teilgebiete gelten natürlich die Randbedingungen, aber die Teillösungen φ_k müssen an den inneren Rändern von V mit Hilfe von Grenzbedingungen aneinander angepasst werden. Diese Grenzbedingungen lassen sich auf der Grundlage der Eigenschaften bezüglich der Rotation des D-Feldes bzw. Divergenz des E-Feldes ableiten, die sich im Fall einer ortsabhängigen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ ergeben; eine entsprechende Ableitung findet man in Abschnitt 8.

11.2 Elementare Methoden

11.2.1 Die graphische Methode

In vielen Fällen gelangt man durch die Anwendung von graphischen Methoden rasch zur Auffindung der Potenzialverteilung, aus der man dann die interessierenden Größen berechnen kann. Die graphische Feldberechnung ist am einfachsten beim *zweidimensionalen Feld*. Sie beruht darauf, dass man gefühlsmäßig Potenziallinien und Feldlinien des D-Feldes (kurz D-Feldlinien) aufzeichnet und das Feldbild mit Hilfe der Grundgesetze des elektrostatischen Feldes korrigiert. Aus der Formulierung der Gesamtladung mit Hilfe des Flächenintegrals des D-Feldes (10.1) folgt, dass die Feldlinien des D-Feldes stetig von einer zur anderen Leiteroberfläche übergehen. Die Proportionalität zwischen D- und E-Feld lässt sich auf folgende Weise einhalten. Es werden die

Potenziallinien so gezeichnet, dass sie gleichen Potenzialunterschieden entsprechen. Dann ist das E-Feld überall umgekehrt proportional dem Abstand a zweier benachbarter Potenziallinien. Man denke sich ferner den von einem Leiter ausgehenden „Fluss“ des D-Feldes, d.h. das Flächenintegral über das D-Feld, in eine Anzahl gleicher Teile geteilt und zeichne die diese Teile abgrenzenden D-Feldlinien. Dort, wo der Abstand b von zwei nebeneinander liegenden D-Feldlinien groß ist, verteilt sich der „Fluss“ des D-Feldes auf eine entsprechende große Fläche; das D-Feld ist also überall umgekehrt proportional dem Abstand b der beiden benachbarten D-Feldlinien. Die Forderung, dass D-Feld und E-Feld einander proportional sein sollen, lässt sich daher so erfüllen, dass man den Abstand b zwischen je zwei benachbarten D-Feldlinien überall proportional oder am einfachsten gleich dem Abstand a zwischen zwei benachbarten Potenziallinien macht; das ganze Feld ist dann in kleine Quadrate eingeteilt, Abb. 11.1 Insgesamt hat man folgende Regeln beim Aufzeichnen ebener Felder zu beachten:

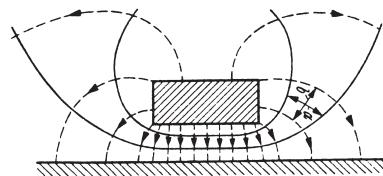


Abbildung 11.1. Graphische Bestimmung eines zweidimensionalen Feldes

1. Die Randlinien der Leiter sind Potenziallinien.
2. Die D-Feldlinien stehen senkrecht auf den Randlinien der Leiter.
3. Die Potenziallinien müssen überall die D-Feldlinien senkrecht schneiden.
4. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Potenziallinien muss an jeder Stelle des Feldes gleich dem Abstand zwischen zwei benachbarten D-Feldlinien sein.
5. Wenn Stoffe verschiedener relativer Dielektrizitätskonstante vorhanden sind, so muss an den Grenzflächen das Brechungsgesetz der D-Feldlinien gelten. An die Stelle von 4) tritt dann die allgemeinere Bedingung $\epsilon_r(a/b) = k$, wobei die Konstante k willkürlich gewählt werden kann.

Man geht so vor, dass man erst nach Gefühl einige Potenziallinien einzeichnet. Dann bringt man D-Feldlinien an, die möglichst gut die Regel 4 erfüllen, und korrigiert danach das Potenziallinienbild usw. Ist so durch abwechselndes Zeichnen von Potenzial- und D-Feldlinien bei immer feinerer Unterteilung das Feldbild gefunden, und bezeichnet U_1 die Potenzialdifferenz zwischen je zwei benachbarten Niveaulinien, a ihren Abstand an irgendeiner Stelle, so gilt für den Betrag des E-Feldes an dieser Stelle angenähert

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{U_1}{a}. \quad (11.12)$$

Damit kann auch das D-Feld berechnet werden. Der Fluss des D-Feldes, der von zwei benachbarten D-Feldlinien begrenzt wird, beträgt bei einer Länge l der Elektroden $\|D\|bl$. Gehen in dem Feldbild von einem Leiter n D-Feldlinien zu einem anderen über, so ist daher der gesamte Fluss des D-Feldes zwischen diesen beiden Leitern

$$Q = \varepsilon_0 nlk \frac{b}{b} U_1 = \varepsilon_0 nlk U_1. \quad (11.13)$$

In Abschnitt 12.2 behandeln wir ausgehend von diesem Beispiel auch die graphische Berechnung des zugehörigen Kapazitätskoeffizienten.

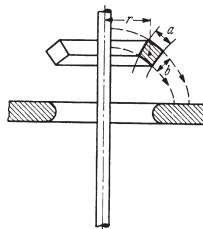


Abbildung 11.2. Zur graphischen Bestimmung eines rotationssymmetrischen Feldes

Etwas schwieriger ist die Ermittlung von *rotationssymmetrischen Feldern*. Man denke sich hier den gesamten von einem Leiter ausgehenden Fluss des D-Feldes durch Rotationsflächen, die durch D-Feldlinien gebildet werden, in gleiche Teile zerlegt, Abb. 11.2. Bezeichnet man mit b den Abstand zwischen zwei benachbarten Rotationsflächen an irgendeiner Stelle mit dem Abstand r von der Achse, so ist der Querschnitt des durch diese Flächen begrenzten Bündels von D-Feldlinien $2\pi rb$. Das D-Feld ist umgekehrt proportional diesem Querschnitt. Damit das D-Feld proportional zum E-Feld wird, muss daher hier rb proportional dem Abstand a der benachbarten Potenziallinien sein, oder

$$r \frac{a}{b} = \text{konst.} \quad (11.14)$$

Diese Bedingung tritt also an die Stelle von 4) beim ebenen Feld. Sind Stoffe verschiedener relativer Dielektrizitätskonstante vorhanden, so hat die Konstante in ihnen verschiedene Werte, da in diesem Fall

$$\varepsilon_r r \frac{a}{b} = \text{konst.} = k \quad (11.15)$$

sein muss. Um das Feldbild aufzuzeichnen, wählt man für k irgendeinen Wert und geht genau so vor wie oben beschrieben. Das E-Feld wird aus dem gefundenen Feldbild wieder nach der Gl.(11.12) berechnet.

Diese Methode der Feldermittlung kann z.B. bei Isolatoren der Hochspannungstechnik angewendet werden, bei denen wegen der komplizierten geometrischen Formen die mathematischen Methoden versagen. Allerdings wird man in diesen Fällen auf einen der vielen Simulatoren für elektrostatische Felder zurückgreifen (siehe Lehner für eine kurze Zusammenfassung und z. B. Humphries [128]), mit denen man auch komplizierte geometrische Situationen behandeln kann. Allerdings ist zumindest bei einem unbekannten Simulator nicht klar, ob man den berechneten Ergebnissen trauen kann, da bei einem ungenauen oder sogar falschen Ergebnis vielfach keine Warnung ausgegeben wird. Eine Kenntnis der graphischen Methoden kann den Benutzer wenigstens in einfacheren Fällen auf Probleme hinweisen, so dass diese Kenntnisse auch dann nicht nutzlos sind, wenn man über einen Feldsimulator verfügt.

11.2.2 Eindimensionale Potenzialprobleme

Die einfachste Form des elektrischen Potenzials ist das *eindimensionale* skalare Feld, bei dem die Feldgrößen sich nur nach einer Richtung hin im Raum ändern. Legt man die x-Achse in diese Richtung, so liefern die Differentialoperatoren nach der y- und z-Richtung keine Beiträge, und die Laplace-PDgl. lautet

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \quad (11.16)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi(x) = k_1 + k_2 x \quad (11.17)$$

mit den zunächst unbestimmten Konstanten k_1 und k_2 . Das E-Feld hat die x-Richtung, ihr Betrag ist

$$\|\mathbf{E}\| = k_2. \quad (11.18)$$

Die Potenzialflächen $\varphi = \text{konst.}$ sind die Ebenen senkrecht zur x-Achse. Es handelt sich also um das homogene E-Feld, wie wir es im Idealfall zwischen zwei unendlich ausgedehnten ebenen und ideal leitenden Platten (Plattenkondensator) finden.

An dieser Stelle soll noch einmal auf die Problematik von Symmetrieargumenten hingewiesen werden, auf die wir in Abschnitt 10.2.1 bereits ausführlicher eingegangen sind. Auch im Zusammenhang mit den parallelen ebenen Platten ist das Ausgangsproblem mathematisch nicht sinnvoll, wenn man davon ausgeht, dass das elektrische Potenzial im Unendlichen verschwinden soll. Da, wie wir in Abschnitt 13 sehen werden, das elektrische Potenzial eine energetische Deutung besitzt, erscheint diese Annahme physikalisch sinnvoll zu sein. Erst die Verwendung von Symmetrieargumenten ergibt unter diesen Umständen ein wohldefiniertes mathematisches Problem. Das gilt weitgehend auch für viele andere Beispiele der Elektrostatisik, sobald sich die Ladungsverteilungen oder Potenzialvorgaben in der ursprünglichen Problemstellung ins Unendliche ausdehnen.

Aber auch andere Anordnungen lassen sich auf den eindimensionalen Fall reduzieren, wenn sich die Laplace-PDgl. in geeigneten Koordinaten auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzieren lässt. Ein solcher Fall tritt bei der Berechnung des elektrischen Potenzials einer ideal leitenden Kugel mit dem Radius R_0 auf. In diesem Fall hängt das Potenzial in Kugelkoordinaten nur vom Radius r und nicht von den Winkeln ϑ und α ab und der Laplace-Operator reduziert sich auf den Radius-Anteil; siehe Anhang B.1. Es ergibt sich eine eindimensionale Potenzialgleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0. \quad (11.19)$$

Für $r > 0$, was bei einem Kugelradius immer erfüllt ist, erhält man eine gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung

$$r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \text{konst.}, \quad (11.20)$$

die sich elementar lösen lässt

$$\varphi(r) = \frac{k}{r}, \quad r > R_0 \quad (11.21)$$

mit einer Konstante k . Das ist das bereits in Abschnitt 10.1 berechnete elektrische Potenzial.

Ein anderes Beispiel ist eine Anordnung zweier voneinander isolierter, ideal leitender ebener Platten, die sich unter dem Winkel α schneiden und von der Schnittlinie aus unendlich ausgedehnt sind. In diesem Fall reduziert sich die Laplace-PDgl. in Zylinderkoordinaten (siehe Anhang B.1) auf den Winkelanteil

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (11.22)$$

die man für $r > 0$ ebenfalls elementar lösen kann.

11.2.3 Überlagerung von Punktladungen

In Abschnitt 10.1.1 wurde auf der Grundlage des elektrischen Potenzials einer leitenden Kugel das Potenzial der Punktladung eingeführt, das wir im vorhergehenden Abschnitt zumindest für einen nicht verschwindenden Kugelradius als Lösung der Laplace-PDgl. erhalten haben. Allgemeinere elektrostatische Felder entstehen, wenn mehrere Punktladungen vorhanden sind. Die von den einzelnen Punktladungen herrührenden Potenziale, Gl.(10.9), überlagern sich dann wegen der linearen Abhängigkeit zwischen Ladung und Potenzial, so dass das Gesamtpotenzial in einem beliebigen Raumpunkt

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{\nu} \frac{Q_{\nu}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\nu}\|} \quad (11.23)$$

wird, wobei Q_ν die Ladungen der Punktladungen und \mathbf{r}_ν die Ortsvektoren der Punktladungen bezeichnen. Ist die Verteilung der Elektrizitätsmengen im Raum bekannt, so ist damit eindeutig das elektrische Potenzial bestimmt. Besonders hilfreich ist eine Anordnung aus zwei Punktladungen, die man für Näherungsbetrachtungen komplizierterer Ladungsverteilungen (z. B. das Coulombsche Experiment oder sogar atomare Anordnungen) verwenden kann. Das Verhalten des Potenzials wird ausführlich in Abschnitt 10.1.3 diskutiert. In Abschnitt 11.6 werden wir diese Ergebnisse nutzen, um die sogenannte Spiegelungsmethode anhand eines einfachen Beispiels zu demonstrieren.

11.3 Das Kirchhoff-Integral

In Abschnitt 11.1.1 haben wir gezeigt, dass die Bestimmung der allgemeinen Lösung der Poisson-PDgl. auf die Ermittlung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Laplace-PDgl. und irgendeiner speziellen Lösung der Lösung der Poisson-PDgl. zurückgeführt werden kann. Dabei werden die Randwerte bei der Lösung der Laplace-PDgl. berücksichtigt. In diesem Abschnitt wollen wir eine allgemeine Darstellung für eine spezielle Lösung der Poisson-PDgl. ableiten. Dazu kann man von den sogenannten Greenschen Sätzen der Vektoranalysis ausgehen. Hinsichtlich der Einzelheiten und Beweise müssen wir auf die Literatur verweisen (siehe z.B. Wunsch, Schulz [310]).

Sei $\rho, \psi, \phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalare mathematische Felder, dann gilt unter bestimmten Voraussetzungen an diese Felder folgende Beziehung, die als 3. Greensche Formel bezeichnet wird

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{O}} (\xi(\tilde{\mathbf{r}})\psi(\tilde{\mathbf{r}})\operatorname{grad}\phi(\tilde{\mathbf{r}}) - \xi(\tilde{\mathbf{r}})\phi(\tilde{\mathbf{r}})\operatorname{grad}\psi(\tilde{\mathbf{r}})) d\tilde{\mathbf{A}} \\ &= \iiint_V (\psi(\tilde{\mathbf{r}})\Omega(\xi, \phi)(\tilde{\mathbf{r}}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}})\Omega(\xi, \psi)(\tilde{\mathbf{r}})) d\tilde{V}, \end{aligned} \quad (11.24)$$

wobei $\Omega(\xi, \cdot) := \operatorname{div}\{\xi \operatorname{grad}(\cdot)\}$, ist. Weiterhin kann man zeigen, dass für

$$\psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) := \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} + \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \quad (11.25)$$

mit $\Delta\tilde{\psi} = 0$ und konstante Funktionen ξ jedes skalare Feld ϕ in folgender Weise notiert werden kann

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ - \iiint_V \psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})(\Delta\phi)(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V} \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\mathcal{O}} (\psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})\operatorname{grad}\phi(\tilde{\mathbf{r}}) - \phi(\tilde{\mathbf{r}})\operatorname{grad}_{\tilde{\mathbf{r}}}\psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \right\}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Sei schließlich $\phi := \varphi$ eine Lösung der Poisson-PDgl., d.h. $\Delta\varphi = -\varrho/\varepsilon$, so erhält man eine Integraldarstellung für Lösungen der Poisson-PDgl.

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) = & + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V} \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{O}} (\psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \operatorname{grad} \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) - \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) \operatorname{grad}_{\tilde{\mathbf{r}}} \psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})) \cdot d\tilde{\mathbf{A}}.\end{aligned}\quad (11.27)$$

Als Folgerung des Eindeutigkeitssatzes für die Poisson-PDgl. (siehe Abschnitt 11.1.2) ergibt sich, dass das Oberflächenintegral überbestimmt ist, da eine Vorgabe des elektrischen Potenzials und dessen Gradient auf dem gleichen Randbereich A_V nicht möglich ist. Das skalare Feld ψ enthält noch ein Feld $\tilde{\psi}$, das Lösung der Laplace-PDgl. ist und so gewählt werden kann, dass die vollständige Lösung der Poisson-PDgl. auch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt. Einzelheiten dazu werden im folgenden Abschnitt behandelt. Das ist aber nur möglich, wenn eine Lösung der Poisson-PDgl. überhaupt existiert. Sollte das der Fall sein, ist diese Lösung unter den genannten Bedingungen eindeutig.

Betrachten wir nur solche Anordnungen, bei denen außer der Bedingung, dass das elektrische Potenzial im Unendlichen verschwindet (die sogenannten natürlichen Randbedingungen), keine weiteren Randbedingungen gestellt werden, dann entfällt der Anteil $\tilde{\psi}$ und wir erhalten die – auch als Kirchhoffintegral bezeichnete – spezielle Lösung der Poisson-PDgl., die dann bereits die allgemeine Lösung des Problems ist

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \frac{\varrho(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}.\quad (11.28)$$

Damit ist die Lösung der Poisson-PDgl. in diesen Fällen auf die Berechnung des Kirchhoffintegrals zurückgeführt. Diese Lösung der Poisson-PDgl. kann analytisch ermittelt werden, wenn der Integrand des Kirchhoffintegrals und insbesondere die vorgegebenen Ladungsverteilungsdichte ϱ einfach ist. Andernfalls muss man numerische Verfahren zu Hilfe nehmen oder geeignete analytische Näherungsverfahren anwenden. Ein solches Näherungsverfahren ist die *Multipolmethode*, die wir in Abschnitt 11.5 behandeln werden.

11.4 Die Greensche und Neumannsche Funktionen

Im vorherigen Abschnitt haben wir in Gl. (11.27) eine Integraldarstellung für die Lösungen der Poisson-Gleichung angegeben. Die in dieser Darstellung auftretende Funktion $\psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ ist nicht eindeutig, sondern hängt von der ausgewählten Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta \tilde{\psi} = 0$ ab. Mit Hilfe geeigneter Lösungen der homogenen Laplace-Gleichung kann man das Gewicht der Lösungsanteile von Volumen- und Oberflächenintegral verschieben. Die beiden wichtigsten Fälle sollen nun aufgeführt werden.

1. Kann die Funktion $\tilde{\psi}$ in Gl. (11.25) so gewählt werden, dass ψ für alle Werte auf dem Rand A des betrachteten Gebiet (auch ∞ ist möglich) verschwindet, dann wird diese so modifizierte Funktion ψ *Greensche Funktion*

$G(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) := \psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ genannt. Die Lösung der Poisson-PDGl. kann dann in folgender Weise dargestellt werden

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V G(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V} - \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{O}} \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) \operatorname{grad}_{\tilde{\mathbf{r}}} G(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}}. \quad (11.29)$$

2. Kann die Funktion $\tilde{\psi}$ in Gl. (11.25) so gewählt werden, dass $\partial\psi/\partial\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}_{\tilde{\mathbf{r}}}\psi$ für alle Werte auf dem Rand A des betrachteten Gebiet (auch ∞ ist möglich) verschwindet, dann wird diese so modifizierte Funktion ψ *Neumannsche Funktion* $N(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) := \psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ genannt. Die Lösung der Poisson-PDGl. kann dann in folgender Weise dargestellt werden

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V N(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{O}} N(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) \operatorname{grad}_{\tilde{\mathbf{r}}} \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}}. \quad (11.30)$$

Die Greensche als auch die Neumannsche Funktion werden allein durch die geometrische Form des betrachteten Bereiches festgelegt. Die Greenschen Funktionen einiger wichtiger Gebiete findet man beispielsweise bei Wunsch und Schulz [310]. Die partiellen Differentialgleichungen für $G(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ und $N(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ sind vom Typ einer Poissonschen PDGl. mit einer Deltafunktion $\delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})$ auf der rechten Seite, d. h. es sind „Impulsantworten“ der Gebiete V , wobei G bzw. die Normalenableitung von N auf dem Rand \mathcal{O} verschwindet.

Betrachtet man den unendlich ausgedehnten Raum, dann kann für die Funktion $\tilde{\psi}$ nach Gl.(11.25) die Nullfunktion gewählt werden und das Oberflächenintegral verschwindet; man erhält dann das Kirchhoff-Integral aus Gl. (11.28), bei dem es sich wie in der Systemtheorie (vgl. Abschnitt 2) um ein Faltungsintegral handelt. Die „Impulsantwort“ oder Greensche Funktion des unendlich ausgedehnten Raumes ist nach Gl.(11.25) gerade das Potenzial der Punktladung, womit man neben der Punktladung als Monopol einer Multipolentwicklung noch eine weitere Interpretation besitzt.

11.5 Die Multipolmethode

In Abschnitt 11.3 wurde das Kirchhoffintegral abgeleitet, bei dem es sich um die allgemeine Lösung der Poisson-PDGl. bei Vorliegen natürlicher Randbedingungen handelt. Andernfalls hat man es mit komplizierteren Darstellungen zu tun, auf die wir in Abschnitt 11.4 eingegangen sind.

Ist eine analytische Auswertung des Kirchhoffintegrals nicht möglich, weil der Integrand zu kompliziert ist, kann man auf numerische oder analytische Näherungsverfahren zurückgreifen. In diesem Abschnitt wollen wir die Grundidee der sogenannten Multipolmethode anhand des Kirchhoffintegrals darstellen. Eine allgemeinere Einführung in die Multipolmethode und numerische Varianten findet man bei z. B. Klinkenbusch [144] zusammen mit weiteren Literaturhinweisen.

Die Grundvoraussetzung der Multipolmethode ist, dass die Raumpunkte, in denen das elektrische Potenzial φ berechnet werden soll, von der Ladungsverteilungsdichte ϱ „weit“ entfernt sind. In anderen Worten, es gilt $\nu := \|\tilde{\mathbf{r}}\|/\|\mathbf{r}\|$ ist „klein“. Die Idee besteht darin, den Nenner des Kirchhoffintegrals zu vereinfachen, wobei eine Taylorreihen-Entwicklung von $\psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$ nach ν verwendet wird. Allerdings kann nur der Term 1. Ordnung in einfacher Weise ermittelt werden ($\tilde{\mathbf{r}}$ wird weggelassen). Die anderen Terme ermittelt man zweckmäßigerweise auf der Basis einer Legendre-Polynomentwicklung (vgl. z. B. Wunsch, Schulz [310]); man erhält damit

$$\psi(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \nu^n \quad (11.31)$$

mit $u := (\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{r}})/(\|\mathbf{r}\| \|\tilde{\mathbf{r}}\|)$ und $P_n(u) := 1/(2^n n!) d^n((u^2 - 1)^n)/du^n$.

Setzt man diese Entwicklung in das Kirchhoffintegral ein, dann erhält man eine additive Zerlegung des elektrischen Potenzials

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\mathbf{r}), \quad (11.32)$$

deren Teilpotenziale bis auf eine Integration bestimmt sind

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon \|\mathbf{r}\|^{n+1}} \iiint_V P_n \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\| \|\tilde{\mathbf{r}}\|} \right) \|\tilde{\mathbf{r}}\|^n \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V}. \quad (11.33)$$

Die ersten beiden Terme heißen *Monopol* und *Dipol* und lassen sich folgendermaßen bestimmen

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon \|\mathbf{r}\|} \iiint_V \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V}, \quad (11.34)$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon \|\mathbf{r}\|^3} \cdot \iiint_V \tilde{\mathbf{r}} \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V}; \quad (11.35)$$

die beiden Integrale

$$Q := \iiint_V \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V}, \quad \mathbf{P}_1 := \iiint_V \tilde{\mathbf{r}} \varrho(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V} \quad (11.36)$$

werden Monopol-Moment Q und Dipolmoment \mathbf{P}_1 der Ladungsverteilungsdichte ϱ genannt. Die Bestimmung der höheren Momente (Quadrupolmoment usw.) führt zu aufwendigeren Rechnungen und daher werden sie seltener verwendet (vgl. Schnackenberg [256], Eder [71]).

Wie haben bereits darauf hingewiesen, dass im Rahmen der Multipolmethode das Potenzial der Punktladung formal gerechtfertigt werden kann. Das ist notwendig, da Punktladungen streng genommen physikalisch nicht existieren. Im Rahmen der Multipolmethode kann der Monopolterm einer beliebigen,

endlich ausgedehnten Ladungsverteilungsdichte ϱ als elektrisches Potenzial einer Punktladung Q interpretiert werden, wobei Q das Monopol-Moment von ϱ ist.

Dementsprechend gibt es keine elementare Rechtfertigung für einen elektrischen Dipol. Das Potenzial der häufig verwendeten Anordnung zweier Punktladungen, die gleiche Ladung verschiedenen Vorzeichens besitzen und in „kleinem“ Abstand platziert sind, hängt streng genommen noch von den Beträgen der Abstände zum Aufpunkt ab. Erst mit Hilfe eines geeigneten Grenzüberganges kann man diese Abhängigkeit auf einen Raumpunkt reduzieren. Es ergibt sich dann das Potenzial φ_1 , das durch das Dipolmoment festgelegt ist. Da diese Vorgehensweise zur Illustration des elektrischen Dipols gut geeignet ist, soll auf die Darstellung dieses Grenzüberganges nicht verzichtet werden; man findet ihn in Abschnitt 10.1.4.

11.6 Die Spiegelungsmethode

In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Lösung der Poisson-PDgl. behandelt, wobei im 2- oder 3-dimensionalen Raum eine „natürliche“ Raumladung ϱ enthalten ist und das Lösungsgebiet durch einen eingebetteten idealen Leiter eingeschränkt ist. Bei der sogenannten Spiegelungsmethode geht es darum, den idealen Leiter durch eine zusätzliche Raumladung – die „Spiegelladung“ – zu ersetzen, so dass dort, wo der Leiter war, welcher Rand des Lösungsgebietes ist und mit den Randbedingungen des idealen Leiters versehen wird, dasselbe Potenzial herrscht. Nach dieser Ersetzung entsteht ein *Ersatzproblem*, bei dem nur noch natürliche Randbedingungen auftreten, d. h. das im Unendlichen verschwindende Potenzial stellt die einzige Randbedingung dar. Wenn man das Potenzialproblem für die natürliche Ladung bzw. die „Spiegelladung“ unter natürlichen Randbedingungen lösen kann, lässt sich das Potenzial in irgendeinem Punkt durch Überlagerung (vgl. Abschnitt 11.2.3) der entsprechenden Werte der Potenziale in diesem Punkt ermitteln. Schließlich kann das Potenzial des Ersatzproblems für das Ausgangsproblem verwendet werden, um auf dem Rand des idealen Leiters die Oberflächenladung zu bestimmen. Die Spiegelungsmethode ist letztlich ein Verfahren, mit dem man die Greensche Funktion (vgl. Abschnitt 11.4) eines Problems mit ideal leitendem Rand ermitteln kann; vgl. Wunsch, Schulz ([310], S. 173ff).

Ein einfaches Beispiel, bei dem die Spiegelmethode angewendet werden kann, ist die Punktladung vor einer unendlich ausgedehnten und ideal leitenden Ebene. Dabei wird die leitende Ebene durch eine punktförmige „Spiegelladung“ mit umgekehrten Vorzeichen (in Bezug auf die natürliche Punktladung) ersetzt, die von der Ebene den gleichen Abstand hat wie die natürliche Punktladung; vgl. auch Abschnitt 17.2. Dabei gehen wir von dem in Abschnitt 10.1.3 diskutierten elektrischen Feld zweier entgegengesetzt geladenen Punktladungen aus, wo u. a. gezeigt werden konnte, dass eine kugelförmige Äquipotenzialfläche mit dem Potentialwert null existiert.

Ein elektrostatisches Feld ändert sich nicht, wenn man eine beliebige Potenzialfläche durch eine „dünne“ Metallschicht ersetzt, der das gleiche elektrische Potenzial erteilt wird. Diese Metallschicht verbindet nur Punkte ohne Potenzialunterschied; da die E-Feldlinien auf den Potenzialflächen senkrecht stehen, so stehen sie auch senkrecht auf der so gebildeten Metallelektrode. Außerhalb der betrachteten Potenzialfläche bleibt daher das Feldbild erhalten, wenn man den von ihr eingeschlossenen Raum mit einem leitenden Stoff auffüllt, dem das betreffende Potenzial erteilt wird.

Grundsätzlich kann die Methode auch dann angewendet werden, wenn die Leiterfläche keine Ebene ist. Allerdings ist die praktische Durchführung der rechentechnischen Schritte nur selten durchführbar. Eine der Ausnahmen ist das Problem einer Punktladung vor einer ideal leitenden Kugel („Spiegelung an der Kugel“), das in engem Zusammenhang mit dem Problem der Punktladungen unterschiedlichen Vorzeichens steht. Wendet man nämlich die vorherigen Überlegung auf die Kugelfläche an, die in Abschnitt 10.1.3 ermittelt wurde, so ergibt sich das Feldbild zwischen einer Punktladung Q_1 und einer leitenden Kugel vom Radius r_0 und der Ladung $Q_2 + Q_3$, deren Mittelpunktsabstand von der Punktladung $a + b = d$ beträgt. Ist dieser Abstand d gegeben, so wird nach Gl.(10.16)

$$b = \frac{r_0^2}{d}, \quad (11.37)$$

nach Gl.(10.12), (10.12) und (10.17)

$$Q_2 = -\frac{Q_1}{k} = -Q_1 \frac{b}{r_0} = -Q_1 \frac{r_0}{d}. \quad (11.38)$$

Die Punktladung Q_2 wird in diesem Fall wegen der Analogie zu dem Spiegelungsverfahren bei ebenen Oberflächen als *elektrisches Bild* (W. Thomson 1845) der Punktladung Q_1 in bezug auf die Kugeloberfläche bezeichnet. Sind im Außenraum der Kugel mehrere Punktladungen vorhanden, so kann man zu jeder dieser Ladungen ein Bild im Inneren der Kugel angeben; der ganze Außenraum lässt sich mit Hilfe der Beziehungen (11.37) und (11.38) auf das Innere der Kugel abbilden. Diese Beziehungen stellen das „Gesetz der reziproken Radien“ dar; je weiter ein Punkt im Außenraumes vom Kugelmittelpunkt entfernt ist, um so dichter rückt sein Bild an den Kugelmittelpunkt heran.

Das elektrische Feld im Außenraum der Kugel lässt sich durch das der drei Punktladungen Q_1 , Q_2 und Q_3 ersetzen. Die Gesamtladung der Kugel ist $Q_2 + Q_3$. Soll die Kugel keine Ladung haben, so muss

$$Q_3 = -Q_2 = \frac{r_0}{d} Q_1 \quad (11.39)$$

gemacht werden. Das elektrische Potenzial ist dann für beliebige Punkte des Außenraumes im Abstand r_3 vom Mittelpunkt der Kugel und damit von Q_3 und den Abständen r_1 und r_2 von Q_1 und Q_2

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_0}{d} \frac{1}{r_2} + \frac{r_0}{d} \frac{1}{r_3} \right). \quad (11.40)$$

Diese Beziehung kann zur Lösung der folgenden Aufgabe angewendet werden: Es befindet sich im isolierten Raum eine Punktladung Q_1 . Ihr elektrisches Feld ist bekannt und wird durch das elektrische Potenzial beschrieben

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|}; \quad (11.41)$$

der Betrag des E-Feldes beträgt demnach

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|^2}. \quad (11.42)$$

Es werde nun eine ungeladene Metallkugel mit dem Radius r_0 in dieses elektrische Feld gebracht mit dem Abstand d zwischen Kugelmittelpunkt und der Punktladung. Das E-Feld war im Kugelmittelpunkt vor Einbringen der Kugel

$$\|\mathbf{E}_0\| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{d^2}. \quad (11.43)$$

Gefragt ist, in welcher Weise das primäre elektrische Feld durch das Vorhandensein der Kugel verändert wird. Die Antwort ergibt sich durch Gl.(11.40) mit (11.37); es ist z.B. das Potenzial, das die Kugel annimmt ($r_1 = d - r_0$; $r_2 = r_0 - b$; $r_3 = r_0$),

$$\varphi_{Kugel} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{d}. \quad (11.44)$$

Dies ist das vor dem Einbringen der Kugel am Orte des Kugelmittelpunktes bestehende Potenzial. Da sich jedes elektrische Feld nach Gl.(10.9) durch eine geeignete Verteilung von Punktladungen darstellen lässt, folgt: *Eine ungeladene Kugel nimmt im elektrischen Feld das Potenzial an, das am Ort ihres Mittelpunktes vor dem Hineinbringen in das Feld bestand.*

11.7 Konforme Abbildungen

Wir befassen uns nun mit einer auf den *zweidimensionalen* Fall beschränkten analytischen Lösungsmethode für die Laplace-PDgl., die sehr ausführlich in der Monographie von Henrici [115] beschrieben wird. Im Rahmen dieses Abschnitts sollen einige grundlegende Aspekte geschildert werden. Wir kommen am Ende dieses Abschnitts noch einmal auf Henrici zurück. Das zweidimensionale elektrische Feld, bei dem die Feldgrößen nach zwei Richtungen hin veränderlich sind, tritt bei Idealisierung sehr häufig auf. Ein solches E-Feld liegt immer vor, wenn es sich um langgestreckte parallele Elektroden handelt, z.B. bei Leitungen. Dabei sollten jedoch die Diskussion beachtet werden, die wir in Abschnitt 10.2.1 über unendlich ausgedehnte Anordnungen und die Anwendung von Symmetrieargumenten geführt haben. Treten keine Raumladungen auf, dann gilt in solchen Fällen die zweidimensionale Laplace-PDgl.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (11.45)$$

Von den Lösungen dieser Gleichungen lässt sich eine bestimmte Teilmenge in allgemeiner Form angeben. Es befriedigt nämlich jede beliebige komplex differenzierbare (holomorphe) Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f : \zeta \mapsto f(\zeta)$ die Laplace-Gleichung. Zum Nachweis zerlegen wir ζ in Real- und Imaginärteil $\zeta := x + jy$ und betrachten die zweiten Ableitungen von f bezüglich der reellen Argumente x und y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x + jy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -f''(x + jy). \quad (11.46)$$

Die Summe der beiden Differentialquotienten ist gleich null, so dass die komplexwertige Funktion f die zweidimensionale Laplace-PDgl. (11.45) erfüllt. Die komplexwertige Funktion f kann ihrerseits in Real- und Imaginärteil zerlegt werden

$$f(x + jy) =: u(x, y) + jv(x, y), \quad (11.47)$$

wobei u und v reellwertige Funktionen in x und y sind. Geht man mit diesem Ansatz in die Laplace-PDgl. ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + j \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (11.48)$$

Reeller und imaginärer Teil der linken Seite müssen für sich Null sein, so dass sowohl u als auch v mögliche Lösungen der Laplace-PDgl. darstellen. Man erhält also mit jeder beliebigen komplex differenzierbaren Funktion f sogleich zwei Lösungen der Laplace-PDgl.

Beispiel: Es werde

$$f(x + jy) = (x + jy)^2 \quad (11.49)$$

gesetzt; dann wird

$$U = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (11.50)$$

u und v sind mögliche Potenzialfunktionen. Die Kurven $u = \text{konst.}$ bilden gleichseitige Hyperbeln mit den Halbierungsgeraden der Quadranten als Asymptoten. Die Kurven $v = \text{konst.}$ sind gleichseitige Hyperbeln mit den Achsen als Asymptoten (siehe Abb. 11.6).

Die reellwertigen Funktionen u und v sind nun in einer eigentümlichen Weise einander zugeordnet. Man erkennt diese Zuordnung, wenn man von der Darstellung der komplexen Größen in der Gaußschen Zahlenebene ausgeht. Zu jedem Wertepaar x, y , also zu jedem Punkt der x, y -Ebene, Abb. 11.3, liefert die Funktion f einen Punkt in der u, v -Ebene, wenn wir unsere Betrachtungen auf eindeutige Funktionen beschränken. Man kann also mit Hilfe der Funktion f die reelle x, y -Ebene auf die reelle u, v -Ebene abbilden. Es lässt sich

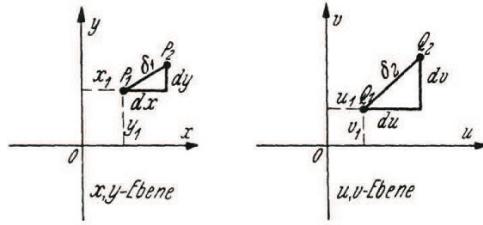


Abbildung 11.3. Darstellung der komplexen Funktionen in der Zahlenebene

zeigen, dass diese Abbildung winkeltreu, d. h. eine in kleinsten Teilen ähnliche Abbildung ist. Wir gehen von einem Punkt P_1 der x, y -Ebene aus nach einer beliebigen Richtung um ein sehr kleines Stück $\delta_1 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ weiter zum Punkt P_2 . Der Punkt P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 entspricht in der u, v -Ebene der Punkt Q_1 mit den Koordinaten u_1, v_1 . Ebenso entspricht dem Punkt P_2 der Punkt Q_2 , und es gilt $\delta_2 = \sqrt{(du)^2 + (dv)^2}$ für den Abstand zwischen Q_1 und Q_2 .

Nun ist für den Punkt Q_1

$$u_1 + j v_1 = f(x_1 + j y_1), \quad (11.51)$$

für den Punkt Q_2

$$u_1 + j v_1 + (du + j dv) = f(x_1 + j y_1 + (dx + j dy)). \quad (11.52)$$

Durch Potenzreihenentwicklung der rechten Seite folgt hieraus:

$$u_1 + j v_1 + (du + j dv) = f(x_1 + j y_1) + (dx + j dy)f'(x_1 + j y_1) \quad (11.53)$$

und durch Zusammenfassung mit Gl.(11.51)

$$du + j dv = (dx + j dy)f'(x_1 + j y_1). \quad (11.54)$$

Bildet man auf beiden Seiten die absoluten Beträge und setzt zur Abkürzung

$$|f'(x_1 + j y_1)| = \left| \frac{\partial f(x_1 + j y_1)}{\partial x_1} \right| =: k_1 \quad (11.55)$$

so folgt

$$\delta_2 = \delta_1 k_1. \quad (11.56)$$

k_1 ist für den Punkt P_1 eine Konstante, gleichgültig nach welcher Richtung man von P_1 aus fortschreitet. Geht man nach zwei verschiedenen Richtungen um kleine Strecken weiter, so verhalten sich diese Strecken daher wie ihre Abbildungen in der u, v -Ebene. Wir zeichnen nun in der x, y -Ebene ein kleines Dreieck $P_1P_2P_3$, Abb. 11.4; dann stellt die Abbildung in der u, v -Ebene wieder ein Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ dar. Nun stimmen nach Gl.(11.56) die folgenden Streckenverhältnisse überein:



Abbildung 11.4. Konforme Abbildung

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_1P_3}} = \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{Q_1Q_3}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_2P_1}} = \frac{\overline{Q_2Q_3}}{\overline{Q_2Q_1}} \quad (11.57)$$

Daraus geht hervor, dass die beiden Dreiecke einander ähnlich sind. Das gleiche gilt auch für beliebige andere, unendlich kleine Figuren. Die durch die Funktion f vermittelte Abbildung ist also eine in kleinsten Flächenteilchen ähnliche („konforme“) Abbildung. Schneiden sich zwei Linien in der x, y -Ebene unter irgendeinem Winkel, so schneiden sich auch ihre Abbildungen in der u, v -Ebene unter dem gleichen Winkel.

Wir denken uns nun in der u, v -Ebene die zu den Achsen parallelen geraden Linien

$$u = \text{konst.} \quad \text{und} \quad v = \text{konst.} \quad (11.58)$$

gezogen. Diese geraden Linien stehen aufeinander senkrecht. Ihre Abbildungen in der x, y -Ebene sind irgendwelche Kurven, die aber nach dem oben Gesagten überall senkrecht aufeinander stehen. Wenn wir daher u als Potenzial betrachten, die Kurven $u = \text{konst.}$ in der x, y -Ebene entsprechend als Niveaulinien, so stehen die Kurven $v = \text{konst.}$ überall senkrecht auf den Niveaulinien, d.h. diese Kurven sind die D-Feldlinien. Ebenso gilt das Umgekehrte. Stellt u bzw. v die Potenzialfunktion dar, so ergeben sich die Gleichungen der D-Feldlinien $v = \text{konst.}$ bzw. $u = \text{konst.}$ Diese beiden beiden Kurvenscharen sind „orthogonal“.

Fassen wir die Funktion u als Potenzialfunktion auf, so gehört zu einer Vergrößerung von u um du eine bestimmte Strecke $dn := dx + jdy$ in der x, y -Ebene, die die Richtung einer D-Feldlinie hat, und es gilt nach Gl.(11.54)

$$\frac{du}{dn} = f'(x_1 + jy_1). \quad (11.59)$$

Bewegen wir uns andererseits vom gleichen Ausgangspunkt längs einer Niveaulinie um eine Strecke ds , so bleibt u konstant, und v ändert sich um einen Betrag dv . Die Strecke ds sei gegen dn um 90° links herum gedreht und gleich lang; wir setzen daher

$$ds := j(dx + jdy), \quad (11.60)$$

da eine Multiplikation mit j eine solche Drehung ergibt, und es gilt nach Gl.(11.54)

$$dv = -ds f'(x_1 + jy_1), \quad \frac{dv}{ds} = -f'(x_1 + jy_1); \quad (11.61)$$

Hieraus folgt

$$\frac{du}{dn} = -\frac{dv}{ds}. \quad (11.62)$$

Diese Beziehung gilt auch für irgendeinen Punkt P_1 einer Leiteroberfläche,

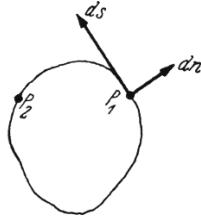


Abbildung 11.5. Zur Berechnung des Verschiebungsflusses bei zylindrischen Elektroden

Abb. 11.5. Dort ist

$$\left| \frac{du}{dn} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dn} \right| = \|\mathbf{E}\|. \quad (11.63)$$

Das D-Feld hat daher auf der Leiteroberfläche den Betrag

$$\|\mathbf{D}\| = \varepsilon \|\mathbf{E}\| = \varepsilon \left| \frac{d\varphi}{dn} \right| = \varepsilon \left| \frac{dv}{ds} \right|. \quad (11.64)$$

Daraus kann man den Verschiebungsfluss Q_{12} berechnen, der zwischen zwei Mantellinien des Leiters mit den Spuren P_1 und P_2 von der Leiteroberfläche ausgeht. Er ist für einen Abschnitt von der Länge l

$$Q_{12} = l \int_{P_1}^{P_2} \|\mathbf{D}\| ds = \varepsilon l \left| \int_{v_1}^{v_2} dv \right| = \varepsilon l |v_1 - v_2|. \quad (11.65)$$

Aus den beiden Funktionswerten v_1 und v_2 in den beiden Punkten P_1 und P_2 lässt sich also sofort der Verschiebungsfluss finden.

Nur für wenige Fälle von Elektrodenanordnungen gibt es mathematische Verfahren, durch die zu der gegebenen Anordnung die Funktion f ermittelt werden kann. Der einfacherer Weg zur Berechnung von Potenzialfeldern ist der umgekehrte, nämlich irgendwelche Funktionen f anzunehmen und zu untersuchen, bei welchen Elektrodenformen diese Funktionen die Grenzbedingungen erfüllen. Im folgenden werden einige Beispiele dafür betrachtet.

1. Die Funktion $f(\zeta) = c\zeta^2$

Es wird mit Gl.(11.47)

$$u(x, y) = c(x^2 - y^2), \quad v(x, y) = 2cxy. \quad (11.66)$$

Wählt man v als Potenzialfunktion, so ergeben sich die Niveaulinien

$$x \cdot y = \text{konst.} \quad (11.67)$$

als gleichseitige Hyperbeln, Abb. 11.6. Die Kurven $u = \text{konst.}$ stellen die D-Feldlinien dar, es sind ebenfalls Hyperbeln, die auf der Schar der Niveaulinien überall senkrecht stehen. Das E-Feld in einem einspringenden rechten Winkel hat diese Form. Das E-Feld ist in der Ecke Null und nimmt mit wachsendem Abstand von der Ecke proportional zu.

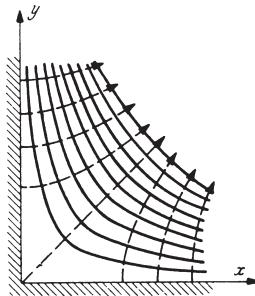


Abbildung 11.6. E-Feld in einer einspringenden Ecke

2. Die Funktion $f(\zeta) = \frac{c}{\zeta}$

Es wird

$$f(\zeta) = \frac{c}{x + iy} = \frac{c(x - iy)}{x^2 + y^2}, \quad (11.68)$$

also

$$u(x, y) = \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{cy}{x^2 + y^2}. \quad (11.69)$$

Die Kurven $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ stellen Scharen von Kreisen dar, und zwar ergibt sich das Feldebild eines Liniendipols (vgl. Abschnitt 10.2.5).

3. Die Funktion $f(\zeta) = c \ln \zeta$

Setzt man $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\alpha := \arctan(y/x)$, Abb. 11.7, so wird

$$\zeta = \frac{r}{r_0} e^{j\alpha}, \quad (11.70)$$

wobei r_0 die Koordinate des Potenzial-Nullpunktes ist, so folgt daraus

$$u(x, y) = c \ln \frac{r}{r_0}, \quad v(x, y) = c \alpha. \quad (11.71)$$

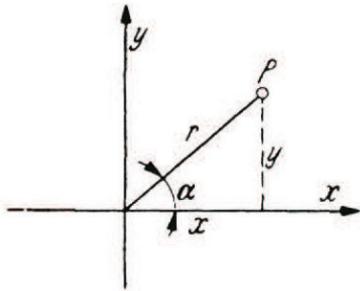


Abbildung 11.7. Polarkoordinaten

Mit $u = \varphi$ ergibt sich das E-Feld in der Umgebung einer Linienquelle; die Niveaulinien sind konzentrische Kreise, die D-Feldlinien $\alpha = \text{konst.}$ sind Strahlen durch den Nullpunkt.

Setzt man umgekehrt $v = \varphi$, so erhält man das E-Feld in der Umgebung einer ebenen Metallplatte, die durch einen geradlinigen, unendlich dünnen Schnitt senkrecht zur Plattenoberfläche geteilt ist und deren beide Teile verschiedene Potenziale haben.

Das E-Feld zwischen zwei parallelen Linienquellen mit dem Abstand a und entgegengesetzte gleicher Ladung ergibt sich durch den Ansatz

$$f(\zeta) = c \ln \left(\zeta - \frac{a}{2r_0} \right) - c \ln \left(\zeta + \frac{a}{2r_0} \right). \quad (11.72)$$

Es ist in Abb. 10.14 dargestellt.

In entsprechender Weise kann das E-Feld eines *Bündelleiters für Hochspannungsübertragung* oder einer *Reusenantenne* berechnet werden. n Leiter bilden mit gleichen Abständen voneinander Mantellinien eines Kreiszylinders vom Radius R , z.B. $n = 6$ in Abbildung 11.8. Die Leiter sind elektrisch miteinander verbunden, so dass sie alle gleiches Potenzial und gleiche Ladung Q_1 haben. Die Potenzialfunktion für irgendeinen Punkt P des Raumes erhält man durch Überlagern der von den einzelnen Leitern herrührenden Potenziale. Legt man den Nullpunkt des in die Mitte des Bündels setzt also $r_0 = R$, so ergibt die Addition

$$f(\zeta) = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon l} \left[\ln(\zeta - 1) + \ln \left(\zeta - e^{j\frac{2\pi}{n}} \right) + \ln \left(\zeta - e^{2j\frac{2\pi}{n}} \right) + \dots + \ln \left(\zeta - e^{(n-1)j\frac{2\pi}{n}} \right) \right] \quad (11.73)$$

oder in anderer Schreibweise

$$f(\zeta) = -\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon l} \sum_{v=0}^{n-1} \ln \left(\zeta - e^{vj\frac{2\pi}{n}} \right). \quad (11.74)$$

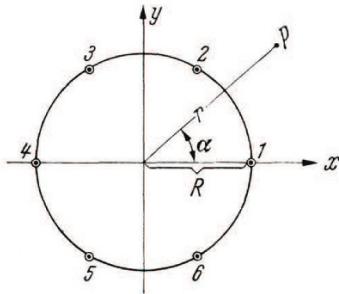


Abbildung 11.8. Bündelleiter

Schreibt man die Summe der Logarithmen als Logarithmus des Produktes und multipliziert dieses aus, so findet man

$$f(\zeta) = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon l} \ln(\zeta^n - 1). \quad (11.75)$$

Setzt man hier $\zeta = e^{j\alpha}r/R$, so stellt der reelle Teil von $f(\zeta)$ das Potenzial in Polarkoordinaten dar. In unmittelbarer Nähe der Linienquelle bilden die Potenzialflächen angenähert Kreiszylinder. Wenn der Radius r_0 der Leiter klein gegen R ist, so fällt die Leiteroberfläche mit einer solchen Potenzialfläche zusammen. Um das Potenzial des Leiters 1 zu finden, muss man ζ für irgend einen Punkt der Oberfläche dieses Leiters einsetzen, z.B.

$$\zeta = 1 + \frac{r_0}{R}. \quad (11.76)$$

Da gemäß Voraussetzung r_0 klein gegen R sein soll, so kann man die Binomialentwicklung von ζ^n nach dem zweiten Glied abbrechen:

$$\zeta^n = \left(1 + \frac{r_0}{R}\right)^n = 1 + \frac{nr_0}{R}. \quad (11.77)$$

Man findet so für das Leiterpotenzial

$$\varphi = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{nr_0}{R}\right). \quad (11.78)$$

Die Ladung Q_1 des Leiters ist $1/n$ der Ladung Q des Leitersystems; daher gilt auch

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{nr_0}{R}\right) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\sqrt{\frac{nr_0}{R}}\right). \quad (11.79)$$

Vergleicht man dies mit dem Potenzial eines einzelnen zylindrischen Leiters mit der gleichen Ladung Q und mit dem Radius R' , Gl.(10.51),

$$\varphi = -\frac{Q_1}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{R'}{R}\right), \quad (11.80)$$

so erkennt man, dass der Bündelleiter hinsichtlich der Ladungen, also auch hinsichtlich der Kapazität, einem einzelnen zylindrischen Leiter vom Radius

$$R' = R \sqrt[n]{\frac{nr_0}{R}} \quad (11.81)$$

gleichwertig ist.

Den Betrag des E-Feldes an der Leiteroberfläche erhält man mit Gl.(11.79) und Gl.(11.80):

$$\|\mathbf{E}\| = \left| \frac{d\varphi}{dr_0} \right| = \frac{Q}{2\pi\epsilon lr_0 n}. \quad (11.82)$$

Um das E-Feld an den Oberflächen der Drähte zu berechnen, ermittelt man zunächst den Radius R' des für die Kapazität der Bündelanordnung und hieraus die Ladung Q für eine gegebene Spannung berechnen.

Das E-Feld an der Leiteroberfläche erhält man mit Gl.(11.79) und (11.80)

$$\|\mathbf{E}\| = \left| \frac{d\varphi}{dr_0} \right|_{r_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon lr_0 n}. \quad (11.83)$$

In Abschnitt 12.3 erhält man daraus die Kapazität C .

Eine Spannung U zwischen den beiden Bündelleitern führt daher mit Gl.(12.47) zur Ladung

$$Q = C U = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{a}{R'}} U, \quad (11.84)$$

und damit folgt für das E-Feld an der Oberfläche der Leiter

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{U}{2r_0 n \ln \frac{a}{R'}}. \quad (11.85)$$

Zwei massive Leiter mit dem Radius r_0 und gleichem Achsenabstand a würden nach Gl.(10.86) (wieder unter der Voraussetzung kleiner Leiterdurchmesser gegen den Abstand) zu einem E-Feld

$$\|\mathbf{E}'\| = \frac{U}{2r_0 \ln \frac{a}{r_0}} \quad (11.86)$$

führen. Das E-Feld wird also auf den Bruchteil

$$\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{E}'\|} = \frac{\ln \frac{a}{r_0}}{n \ln \frac{a}{R'}} \quad (11.87)$$

herabgesetzt.

Zahlenbeispiel: Die Bündelleiter einer Hochspannungsleitung besteht aus je 4 Einzeldrähten von 10 mm Durchmesser. Sie seien in den Ecken eines Quadrates von 20 cm Seitenlänge angeordnet. Der Abstand zweier Bündelleiter sein 10 m .

$$\text{Es ist also: } n = 4, \quad R = 10\text{cm}\sqrt{2} = 14,1\text{ cm}, \quad (11.88)$$

$$r_0 = 0,5\text{ cm}; \quad a = 10\text{ m}. \quad (11.89)$$

Die Gl.(11.81) liefert

$$R' = 14,1\text{ cm} \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 0,5}{14,1}} = 8,65\text{ cm}. \quad (11.90)$$

Die Bündelleitung hat also die gleiche Kapazität wie eine Leitung aus massiven Leitern von $8,65\text{ cm}$ Radius. Das E-Feld auf den Leiteroberflächen wird nach Gl.(11.87) auf den Bruchteil

$$\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{E}'\|} = \frac{\ln \frac{1000}{0,5}}{4 \ln \frac{1000}{8,65}} = 0,4 \quad (11.91)$$

gegenüber einer Leitung aus Drähten von 1 cm Durchmesser im Abstand von 10 m herabgesetzt.

4. Die Funktion $f(\zeta) = c_1 \operatorname{arcosh}(\zeta/c_2)$

Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$\zeta = c_2 \cosh \frac{f(\zeta)}{c_1} \quad (11.92)$$

und benutzen die Formel

$$\cosh(a + jb) = \cosh a \cos b + j \sinh a \sin b; \quad (11.93)$$

dann ergibt sich

$$x = c_2 \cosh \frac{u}{c_1} \cos \frac{v}{c_1}, \quad y = c_2 \sinh \frac{u}{c_1} \sin \frac{v}{c_1}. \quad (11.94)$$

Eliminiert man hieraus v bzw. u , so erhält man die beiden Gleichungen

$$\frac{x^2}{c_2^2 \cosh^2 \frac{u}{c_1}} + \frac{y^2}{c_2^2 \sinh^2 \frac{u}{c_1}} = 1, \quad \frac{x^2}{c_2^2 \cos^2 \frac{v}{c_1}} + \frac{y^2}{c_2^2 \sin^2 \frac{v}{c_1}} = 1. \quad (11.95)$$

Die erste Gleichung stellt für $u = \text{konst.}$ Ellipsen dar, deren Mittelpunkte im Koordinatenursprung liegen und deren Halbachsen

$$a = c_2 \cosh \frac{u}{c_1}, \quad b = c_2 \sinh \frac{u}{c_1} \quad (11.96)$$

betrugen. Der halbe Brennpunktabstand einer jeden dieser Ellipsen ist daher

$$\sqrt{a^2 - b^2} = c_2. \quad (11.97)$$

Die Ellipsen haben gemeinsame Brennpunkte (konfokale Ellipsen).

Die zweite Gleichung liefert für $v = \text{konst.}$ eine Hyperbelsschar mit den Halbachsen

$$a = c_2 \cos \frac{v}{c_1}, \quad b = c_2 \sin \frac{v}{c_1}. \quad (11.98)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c_2. \quad (11.99)$$

Die Hyperbeln haben die gleichen Brennpunkte wie die Ellipsen, Abb. 17.13.

Setzt man $u = \varphi$, so ergibt sich das Potenzialfeld in der Umgebung eines elliptischen Zylinders; für $v = \varphi$ erhält man das Feld zwischen zwei Zylindern mit hyperbolischer Spur.

Daraus lassen sich die entsprechenden Kapazitätswerte bestimmen; vgl. Abschnitt 12.3 (8. Beispiel).

Der Betrag des E-Feldes des elliptischen Zylinders kann allgemein nach Gl.(11.64) berechnet werden. Für irgendeine elliptische Niveaulinie mit den Halbachsen a und b ist nach Gl.(11.94) und Gl.(11.96)

$$x = a \cos \frac{v}{c_1}, \quad y = b \sin \frac{v}{c_1}. \quad (11.100)$$

Daraus folgt

$$dx = -\frac{a}{c_1} \sin \frac{v}{c_1} dv, \quad dy = \frac{b}{c_1} \cos \frac{v}{c_1} dv, \quad (11.101)$$

und es wird das Längenelement der Ellipse

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{dv}{c_1} \sqrt{a^2 \sin^2 \frac{v}{c_1} + b^2 \cos^2 \frac{v}{c_1}}; \quad (11.102)$$

also der Betrag des E-Feldes ist nach Gl.(11.64)

$$\|\mathbf{E}\| = \left| \frac{dv}{ds} \right| = c_1 \left(a^2 \sin^2 \frac{v}{c_1} + b^2 \cos^2 \frac{v}{c_1} \right)^{-1/2}. \quad (11.103)$$

Sie ist auf der Oberfläche des Zylinders ungleichmäßig verteilt und hat ihren größten Wert für $v = 0$, also in der x -Achse, nämlich

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{|c_1|}{b}, \quad (11.104)$$

den kleinsten Wert für $v = \pi c_1 / 2$, also in der y -Achse:

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{|c_1|}{a}. \quad (11.105)$$

Die Konstante c_1 lässt sich bestimmen, sobald die Spannung zwischen den Elektroden gegeben ist, z.B. durch (vgl. Abschnitt 12.3, Gl.(12.52))

$$U = c_1 \ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}. \quad (11.106)$$

5. Die Funktion $f(\zeta) = c_1 \ln(2 \sin c_2 \zeta)$.

Unter Benutzung der Beziehung

$$\sin c_2 \zeta = \sin c_2(x + jy) = \sin c_2 x \cosh c_2 y + j \cos c_2 x \sinh c_2 y; \quad (11.107)$$

ergeben sich

$$u(x, y) = c_1 \ln 2 \sqrt{\cosh^2 c_2 y - \cos^2 c_2 x}, \quad v(x, y) = c_1 \arctan \frac{\tanh c_2 y}{\tan c_2 x}. \quad (11.108)$$

Für große Werte von y ist

$$\cosh c_2 y \approx \frac{1}{2} e^{c_2 y}, \quad (11.109)$$

und es ist $\cosh^2 c_2 x$ gegen $\cosh^2 c_2 y$ zu vernachlässigen. Dann wird $u = c_1 c_2 y$. Fassen wir u als Potenzialfunktion auf, $u = \varphi$, so geht demnach das durch f dargestellte E-Feld in großer Entfernung von der x -Achse in ein homogenes E-Feld über, dessen Feldlinien parallel zur y -Achse und dessen Niveaulinien parallel zur x -Achse verlaufen.

Andererseits lassen sich für sehr kleine x und y die Näherungsformeln

$$\cosh c_2 y \approx 1 + \frac{1}{2}(c_2 y)^2, \quad \text{und} \quad \cos c_2 x \approx 1 - \frac{1}{2}(c_2 x)^2 \quad (11.110)$$

anwenden. Damit folgt

$$\varphi(x, y) = c_1 \ln(2c_2 \sqrt{x^2 + y^2}) = c_1 \ln(2c_2 r), \quad (11.111)$$

wenn mit r der Abstand des Aufpunktes vom Koordinatenanfangspunkt bezeichnet wird. Diese Beziehung zeigt, dass in der Nähe des Anfangspunktes das Potenzial in das einer Linienquelle, Gl.(10.51), übergeht.

Schließlich können wir noch eine dritte Feststellung machen, wenn wir

$$x = x' + k \frac{\pi}{c_2} \quad (11.112)$$

setzen, wobei k eine ganze Zahl bedeuten soll. Mit diesem Ansatz geht die Formel für das Potenzial in sich selbst über, d.h. das E-Feld ist in der x -Achse periodisch mit der Periode π/c_2 ; es ist das E-Feld einer *Gitters paralleler Linienquellen*. Die Linienquellen haben den Abstand $a = \pi/c_2$; sie befinden sich in der x -Achse und haben alle die gleiche Ladung, die sich durch die Konstante c_1 ausdrücken lässt.

Wir benutzen nun die dadurch bestimmte Potenzialfunktion zur Berechnung der *Wirkung des Schirmgitters einer Elektronenröhre* aus parallelen

Drähten, Abb. 11.9, das mit dem Abstand h parallel zu einer leitenden Ebene liegt. Legen wir die x -Achse in diese Ebene, so lautet die Potenzialfunktion für das Gitter

$$\varphi(x, y) = c_1 \ln(2\sqrt{\cosh^2 c_2(y - h) - \cos^2 c_2 x}). \quad (11.113)$$

Damit das Potenzial auf der leitenden Ebene Null wird, muss bei $y = -h$ ein Spiegelbild des ersten Gitters mit entgegengesetzt gleicher Ladung angebracht werden. Das Potenzial beider Gitter wird daher

$$\varphi_g(x, y) = c_1 \ln(2\sqrt{\cosh^2 c_2(y - h) - \cos^2 c_2 x}) \quad (11.114)$$

$$-c_1 \ln(2\sqrt{\cosh^2 c_2(y + h) - \cos^2 c_2 x}). \quad (11.115)$$

Unter Einführung von $a = \pi/c_2$ kann man schließlich hierfür schreiben

$$\varphi_g(x, y) = \frac{c_1}{2} \ln \left(\frac{\cosh^2 \frac{\pi}{a}(y - h) - \cos^2 \frac{\pi}{a} x}{\cosh^2 \frac{\pi}{a}(y + h) - \cos^2 \frac{\pi}{a} x} \right). \quad (11.116)$$

In großem Abstand von der x -Achse wird dieser Ausdruck Null. Wenn daher der Betrag des homogenen E-Feldes dort einen bestimmten Wert E_0 haben soll, so muss man noch das Potenzial des entsprechenden homogenen elektrischen Feldes hinzufügen. Legen wir den Nullpunkt in die leitende Ebene, so ist das Zusatzpotenzial

$$\varphi_0(x, y) = E_0 y. \quad (11.117)$$

Damit wird schließlich das gesuchte Potenzial

$$\varphi = \varphi_g + \varphi_0. \quad (11.118)$$

Die Konstante c_1 hängt von der Vorschrift ab, die wir bezüglich des Potenzials des Gitters machen. Es kann z.B. der folgende Fall auf diese Weise untersucht werden. Das Drahtgitter sei ebenfalls geerdet und zu dem Zweck angebracht, den Raum zwischen Gitter und Wand gegen das elektrische Feld abzuschirmen. Auf der Oberfläche der Drähte des Gitters muss dann ebenfalls $\varphi = 0$ sein. Dies liefert unter der Voraussetzung, dass es sich um im Vergleich zu a und h sehr dünne Drähte mit dem Radius r_0 handelt,

$$0 = E_0 h + \frac{c_1}{2} \ln \frac{\frac{\pi^2}{a^2} r_0^2}{\cosh^2 2\pi \frac{h}{a} - 1} \quad (11.119)$$

oder

$$c_1 = E_0 \frac{h}{\ln \sinh 2\pi \frac{h}{a} - \ln \pi \frac{r_0}{a}}. \quad (11.120)$$

Der Verlauf der Feldlinien ist in Abb. 11.9 links dargestellt. Das abzuschirmende Feld greift zum Teil durch die Stäbe des Gitters hindurch. Die größte

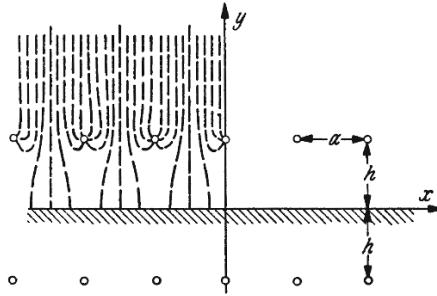


Abbildung 11.9. Schirmgitter

Dichte der hindurch greifenden D-Feldlinien ergibt sich jeweils in der Mitte zwischen zwei Stäben des Gitters. Dort ist zu setzen

$$x = \frac{a}{2} + ka, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.121)$$

so dass das Potenzial längs dieser D-Feldlinien

$$\varphi(x, y) = E_0 y + E_0 h \frac{\ln \cosh \frac{\pi}{a}(y - h) - \ln \cosh \frac{\pi}{a}(y + h)}{\ln \sinh \frac{2\pi}{a}h - \ln \pi \frac{r_0}{a}} \quad (11.122)$$

wird. Für den Betrag des E-Feldes ergibt sich hieraus

$$\|\mathbf{E}\| = E_0 + E_0 \pi \frac{h}{a} \frac{\tanh \frac{\pi}{a}(y - h) - \tanh \frac{\pi}{a}(y + h)}{\ln \sinh \frac{2\pi}{a}h - \ln \pi \frac{r_0}{a}}. \quad (11.123)$$

Sie wird am größten in der Höhe des Gitters, $y = h$, und am kleinsten an der leitenden Wand, $y = 0$. Die beiden Werte seien dort E_1 und E_2 . Wäre das Gitter nicht vorhanden, so wäre

$$E_1 = E_2 = E_0. \quad (11.124)$$

Man kann daher das Verhältnis der Beträge E_1 und E_2 der entsprechenden E-Felder zum Betrag E_0 im homogenen E-Feld als ein Maß für die *Schutzwirkung des Gitters* ansehen. Dieses Verhältnis ist

$$\eta_1 = \frac{E_1}{E_0} = 1 - \pi \frac{h}{a} \frac{\tanh \frac{2\pi}{a}h}{\ln \sinh \frac{2\pi}{a}h + \ln \frac{a}{\pi r_0}} \quad (11.125)$$

bzw.

$$\eta_2 = \frac{E_2}{E_0} = 1 - \pi \frac{h}{a} \frac{2 \tanh \frac{\pi}{a}h}{\ln \sinh \frac{2\pi}{a}h + \ln \frac{a}{\pi r_0}}. \quad (11.126)$$

Die hier vorkommenden hyperbolischen Funktionen kann man entweder aus Tabellen entnehmen (z.B. Bronstein et al. [44]) oder nach den Definitionsformeln

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad (11.127)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad (11.128)$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (11.129)$$

berechnen; sie sind in Abb. 11.10 graphisch dargestellt.

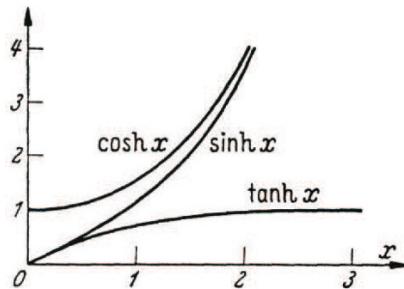


Abbildung 11.10. Die Hyperbelfunktionen

Gewöhnlich wird der Abstand h des Gitters von der Wand groß gegen die Gitteröffnung a sein. Dann kann man näherungsweise schreiben

$$\tanh \pi \frac{h}{a} = 1, \quad \sinh \frac{2\pi h}{a} = \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi h}{a}}; \quad (11.130)$$

dies ergibt mit $a > 2\pi r_0$

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{2\pi h} \ln \frac{a}{2\pi r_0} \right), \quad (11.131)$$

$$\eta_2 = \frac{a}{2\pi h} \ln \frac{a}{2\pi r_0}. \quad (11.132)$$

Das E-Feld an der Wand (η_2) wird also um so kleiner, je kleiner man den Drahtabstand gegenüber dem Abstand zwischen Gitter und Wand macht. Dagegen nähert sich das E-Feld in der Gitterebene (η_1) bei Verkleinerung des Drahtabstandes dem Wert $(1/2)E_0$. Außerdem kann das E-Feld größere Werte annehmen. Die Schutzwirkung ist also auf einen Raum beschränkt, der nicht ganz an das Gitter selbst heranreicht.

Als weitere Anwendung werde die Wirkung des *Steuergitters einer Elektronenröhre* mit parallelen ebenen Elektroden betrachtet. Das Gitter bestehe aus Drähten, deren Radius r_0 im Vergleich zu ihren Abständen a sehr klein ist, $r_0 \ll a$; ferner sei das Gitter feinmaschig im Vergleich zu dem Abstand h von der leitenden Wand, $a \ll 2\pi h$.

Das Gitter werde nun auf eine bestimmte Spannung U_g („Gitterspannung“) gegen die leitende Wand (Kathode, siehe Abschnitt 38.4) gebracht. Dann ist

$$\varphi = U_g, \quad \text{für } y = h, \quad x = r_0. \quad (11.133)$$

Dies liefert an Stelle von Gl.(11.120)

$$c_1 = \frac{E_0 h - U_g}{\ln \sinh 2\pi \frac{h}{a} - \ln \pi \frac{r_0}{a}}, \quad (11.134)$$

und an Stelle von Gl.(11.126)

$$E_2 = E_0 - \frac{2\pi}{a} \frac{E_0 h - U_g}{\ln \sinh 2\pi \frac{h}{a} + \ln \frac{a}{\pi r_0}} \tanh \pi \frac{h}{a}. \quad (11.135)$$

Hieraus folgt, wieder unter Berücksichtigung, dass $a \ll 2\pi h$,

$$E_2 = \frac{U_g}{h} + \frac{a}{2\pi h} E_0 \ln \frac{a}{2\pi r_0}. \quad (11.136)$$

Denkt man sich nun das E-Feld an der Wand erzeugt durch eine einzige Elektrode am Orte des Gitters, also im Abstand h von der Wand, so muss dieser Ersatzelektrode eine Spannung $U_s = hE_2$ erteilt werden. Führt man dies ein und ersetzt man außerdem noch das äußere E-Feld E_0 durch eine Elektrode im Abstand H von der Wand mit einer Spannung $U_a = HE_0$ („Anodenspannung“), so folgt für die Ersatzspannung in der Gitterebene („Steuerspannung“)

$$U_s = U_g + DU_a, \quad \text{wobei } D = \frac{a}{2\pi H} \ln \frac{a}{2\pi r_0}. \quad (11.137)$$

Man kann also das Gitter durch eine Platte im gleichen Abstand h von der Wand ersetzen mit einer Spannung, die um den Betrag DU_a gegenüber der eigentlichen Gitterspannung vergrößert ist. Die Größe D wird *Durchgriff* genannt. Sie gibt an, mit welchem Bruchteil das äußere E-Feld durch das Gitter hindurch an der Oberfläche der leitenden Wand wirksam ist (siehe Abschnitt 38.4).

Zahlenbeispiel: In einer Elektronenröhre sei der Abstand zwischen Steuer-gitter und Kathode $h = 2 \text{ mm}$, der Abstand zwischen Anode und Kathode $H = 10 \text{ mm}$, der Radius der Gitterdrähte $r_0 = 0,05 \text{ mm}$. Dann wird der Durchgriff

$$D = \frac{2}{2\pi 10} \ln \frac{2}{2\pi 0,05} = 0,0318 \ln 6,37 = 0,059 = 5,9 \%. \quad (11.138)$$

□

Wegen weiterer Einzelheiten zur Anwendung funktionentheoretischer Methoden zur Lösung elektrostatischer Randwertaufgaben für ebene E-Felder sei

auf Henrici [115], Behnke/Sommer [22], Wunsch/Schulz [310], Lehner [162], Simony [261], u. a. verwiesen. Insbesondere wird bei Henrici [115] gezeigt, dass man unter bestimmten Voraussetzungen mit Hilfe einer konformen Abbildung Lösungen der Laplace-Gleichung, die auf einem gewissen Gebiet von \mathbb{C} definiert sind, auf andere Gebiete „verpflanzen“ kann.

11.8 Die Separationsmethode

Eine der wichtigsten Methoden zur analytischen Behandlung von partiellen Differentialgleichungen ist die sogenannte Separationsmethode. Grundsätzlich geht man dabei so vor, dass man in den gewählten Koordinaten einen Produktansatz macht und versucht, die partielle Differentialgleichung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu überführen. Die Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen müssen dann die Randbedingungen erfüllen, so dass man mit Hilfe des Produktansatzes eine Familie von Lösungen des Gesamtproblems erhält, aus denen man dann bei linearen partiellen Differentialgleichungen weitere Lösungen durch Superposition dieser Lösungen ermitteln kann. Hat es beispielsweise mit einer zweidimensionalen Laplace-Gleichung für das skalare Feld $u(x, y)$ in x, y -Koordinaten zu tun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (11.139)$$

die in dem Quadrat $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ gelöst werden soll, wobei die Randbedingungen $u(x, 0) = 0$ und $u(x, 1) = 1$ sowie geeignete Vorgaben der partiellen Ableitungen an den verbleibenden Rändern vorgegeben sind, dann bietet sich ein Produktansatz

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (11.140)$$

an, d. h. man sucht zunächst einmal Lösungen der Produktform $X(x) \cdot Y(y)$. Setzt man diesen Ansatz (11.140) in die Differentialgleichung (11.139) ein, dann erhält man nach kurzer Umformung folgende Gleichung ($(\cdot)'$ entspricht der Ableitung nach dem Argument)

$$\frac{1}{X} X'' = -\frac{1}{Y} Y'' =: E. \quad (11.141)$$

Da E nicht gleichzeitig nur von x bzw. nur von y abhängen kann, muss E eine Konstante sein, die man als *Separationskonstante* bezeichnet. Somit kann diese Beziehung separiert werden und man erhält zwei gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' - EX = 0, \quad Y'' + EY = 0, \quad (11.142)$$

deren allgemeine Lösungen von der Separationskonstante E abhängen. Die Lösungen $X(x)$ müssen den vorgegebenen Randbedingungen genügen, so dass

sich in diesem Fall nur für diskrete Werte von E brauchbare Lösungen ergeben. Entsprechend ergeben sich Lösungen $Y(y)$, die von den diskreten Werten E_n abhängen. Überlagert man die Produkte dieser Lösungen und passt sie an Vorgaben der Ableitungen nach x und y an, dann ergeben sich schließlich die gesuchten Lösungen.

11.9 Bemerkungen über numerische Verfahren

Wenn die in den letzten Abschnitten angesprochenen Methoden zur Berechnung exakter oder genähert analytischer Lösungen der Laplace- und Poisson-Gleichung aufgrund komplizierter Geometrien nicht einsetzbar sind, kann man auf numerische Verfahren zurückgreifen. Dabei zerlegt man das Gebiet, in dem die partielle Differentialgleichungen gelöst werden soll, in kleinere Teilgebiete, in denen die Gleichung leicht lösbar ist. Da man es üblicherweise mit sehr vielen Teilgebieten zu tun hat, um eine hinreichende Genauigkeit zu erzielen, kann man solche Verfahren nur computergestützt anwenden. Es gibt zahlreiche kommerzielle und frei verfügbare Programme zur Feldsimulation; Hinweise dazu kann man leicht im Internet finden. Die grundsätzliche Vorgehensweise soll nun anhand eines sehr einfachen Beispiels erläutert werden.

Soll beispielsweise die zweidimensionale Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (11.143)$$

auf einem rechteckigen Gebiet $B \subset \mathbb{R}^2$ mit $B := \{(x, y) | 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 4\}$ gelöst werden, wobei folgende Randbedingungen vorgegeben sind: $u(x, 0) = 0$ und $u(x, 4) = 0$ für alle $0 \leq x \leq 5$ sowie $(\partial u / \partial x)(0, y) = 0$ und $(\partial u / \partial x)(5, y) = 0$ für alle $0 \leq y \leq 4$.

Es ist naheliegend, das Gebiet B mit Hilfe eines quadratischen Gitters mit der Schrittweite $h = 1$ zu zerlegen. Der Einfachheit halber zerlegen wir die x -Achse in 5 und die y -Achse in 4 Teilintervalle, so dass die folgenden Gitterpunkte $(0, 0), (1, 0), \dots, (5, 0)$ und weiter $(0, 1), (1, 1), \dots, (5, 4)$ entstehen; vgl. Abb. 11.11.

Auf den „inneren“ Gitterpunkten $(0, 1), (1, 1), \dots, (5, 1)$ und weiter $(0, 3), (1, 3), \dots, (5, 3)$ müssen nun die zweiten partiellen Ableitungen und die Funktion f ermittelt werden, so dass mit Hilfe der linearen Poisson-Gl. (11.143) ein lineares Gleichungssystem aufgebaut werden kann.

Zur numerischen Bestimmung der zweiten Ableitungen eines „inneren“ Punktes kann man die Differenzenformel für die erste Ableitung verwenden. Nummeriert man die „inneren“ Punkte ausgehend von $(0, 3)$ von links nach rechts und zeilenweise nach unten bis zum Punkt $(5, 1)$ mit den Ziffern 1 bis 18, dann kann man zwei Differenzenformeln für die ersten partiellen Ableitungen an den angegebenen Zwischengitterpunkten angeben

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1.5, 1)} \approx \frac{u_9 - u_8}{h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(2.5, 1)} \approx \frac{u_{10} - u_9}{h}. \quad (11.144)$$

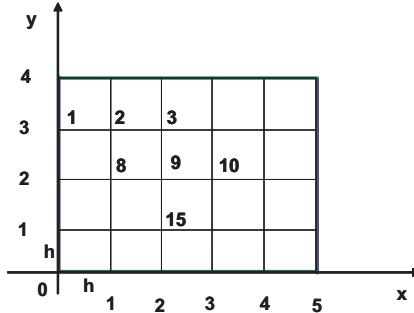


Abbildung 11.11. Numerische Integration auf einem Rechteckgitter

Die zweite partielle Ableitung im Punkt 9 – das entspricht dem Punkt $(2, 2)$ – kann mit der Differenz dieser Differenzenformeln bestimmt werden; es ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(2,2)} \approx \frac{u_{10} - 2u_9 + u_8}{h^2}. \quad (11.145)$$

In entsprechender Weise lassen sich die zweiten genäherten Ableitungen nach x für alle Gitterpunkte x_i berechnen, für die $x_i \pm h$ gültige Gitterpunkte sind; das gilt auch für die genäherten partiellen Ableitungen nach y . Setzt man diese Näherungsformeln in die Poisson-Gl. ein, dann ergibt sich beispielsweise für den Punkt 9 folgende Beziehung

$$4u_9 - u_{10} - u_3 - u_8 - u_{15} + h^2 f_9 = 0. \quad (11.146)$$

Insgesamt ergeben sich 12 Gleichungen, die linear bezüglich der Werte von u in den Gitterpunkten sind. Weitere 6 Gleichungen ergeben sich aus den genäherten ersten Ableitungen am linken und rechten Rand, wo diese nach Vorgabe verschwinden sollen. Somit erhält man zusammengenommen ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit 18 Gleichungen für die 18 unbekannten Werte von u in den Gitterpunkten die nicht am unteren oder oberen Rand liegen. Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} ist – insbesondere bei stärkerer Diskretisierung der Achsen – offensichtlich schwach besetzt, so dass man spezielle numerische Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen einsetzen kann. Nachteilig an dieser Diskretisierungsmethode ist, dass die Koeffizientenmatrix nicht tridiagonal oder wenigstens Bandstruktur besitzt. Da gelingt jedoch mit alternativen Diskretisierungsverfahren, wie etwa der FEM-Methode. Da hier nur die Grundidee numerischer Verfahren zur Lösung von Laplace- und Poisson-Gleichungen geschildert werden soll, müssen wir den interessierten Leser auf die Literatur verweisen; vgl. z. B. Lehner [162], Kost [149], Fetzer, Haas und Kurz [81], [316], Chari und Salon [54].

12

Kapazitätskoeffizienten

12.1 Der elementare Kapazitätsbegriff

Im Abschnitt 11 haben wir uns mit der Berechnung des elektrischen Potenzials φ befasst, wobei neben der Poisson-PDgl. und der dazu notwendigen Vorgabe einer Ladungsverteilung – ggf. gleich Null – auch Randbedingungen in Form von Potenzialwerten oder Ableitungen des Potenzials, idealer Leiter oder sonstiger Grenzflächen vorzugeben sind. Wenn wir das Potenzial bestimmt haben, lassen sich alle anderen Feldgrößen, wie das E- oder D-Feld in einfacher Weise berechnen. In diesem Sinne spielt das elektrische Potenzial die Rolle einer Zustandsgröße, mit der das elektrostatische Verhalten solcher Systeme ableiten lässt. Allerdings ist diese skalare Feldgröße φ nicht eindeutig bestimmt, da sich dieselben physikalisch messbaren Feldgrößen – im Fall der Elektrostatik handelt es sich um das E- und das D-Feld – auch aus einem Potenzial ableiten lassen, dem eine additive Konstante hinzugefügt wurde.

Beschränkt man sich auf Anordnungen, in denen keine Raumladung ϱ vorhanden ist und die sich nur aus idealen Leitern zusammensetzen, dann kann man solche Anordnungen im wesentlichen mit Hilfe einer bestimmten Anzahl positiver Zahlen charakterisieren, welche durch die geometrische Form der idealen Leiter und gegebenenfalls durch die Eigenschaften des dielektrischen Materials zwischen den Leitern bestimmt sind. Bevor wir auf die allgemeinen Zusammenhänge eingehen, wollen wir uns zunächst mit einer Anordnung aus zwei idealen Leitern beschäftigen.

Unter einem kapazitiven Modell oder kurz *Kapazität* versteht man eine Anordnung, die aus zwei voneinander isolierten, ideal leitenden Elektroden besteht. Reale Anordnungen, die sich auf diese Weise modellieren lassen, bestehen beispielsweise aus zwei isolierten Metallelektronen und werden häufig als *Kondensatoren* bezeichnet. Legt man an die Elektroden eine Spannung U , so nehmen sie Ladungen auf. Auf dieser Fähigkeit, Elektrizitätsmengen aufzuspeichern, beruhen die Anwendungen der Kondensatoren. Beim Anlegen der Spannung an die Elektroden entsteht im Nichtleiter ein elektrisches Feld; das E-Feld wird an jeder Stelle um so größer, je größer die Spannung zwischen den

Elektroden ist. Das D-Feld ist bei konstantem ϵ proportional zum E-Feld und daher ebenfalls proportional der Spannung. Daher ist auch der gesamte Fluss des D-Feldes der Größe Q , welcher von der einen zur anderen Elektrode übergeht und gleich den Ladungen der Elektroden ist, proportional der Spannung U zwischen den Elektroden:

$$Q = CU. \quad (12.1)$$

Der Proportionalitätsfaktor C wird *Kapazität* der kapazitiven Anordnung genannt, der als Parameter in dieses einfache Modell eines Kondensators eingeht. C ist bei konstantem ϵ unabhängig von der angelegten Spannung, also nur bestimmt durch die geometrische Form der Anordnung und die Materialeigenschaften (Dielektrizitätskonstante) des Nichtleiters. Es gilt also

$$\text{Kapazität} := \frac{\text{Fluss des D-Feldes zwischen den Elektroden}}{\text{Spannung zwischen den Elektroden}} \quad (12.2)$$

oder

$$C := \frac{\iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}}{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}. \quad (12.3)$$

Die einfachste Ausführungsform bildet der *Plattenkondensator*, bei dem zwei ebene Elektroden durch einen Nichtleiter von sehr geringer Dicke d voneinander getrennt sind, Abb. 8.1. Dabei betrachten wir den Kondensator unter Vernachlässigung der Randeffekte. Die Niveauplatten sind dann zu den Plattenoberflächen parallele Ebenen. Der Fluss des D-Feldes $\|\mathbf{D}\| A = Q$ geht senkrecht von der einen Elektrodenfläche zur anderen über, um so vollständiger, je größer die Abmessungen der Platten im Vergleich zur Dicke d des Nichtleiters sind. Das Bündel der D-Feldlinien hat einen Querschnitt, der gleich der Plattenfläche A ist. Der Fluss des D-Feldes Q verteilt sich gleichmäßig auf dieser Fläche, so dass das D-Feld im Inneren des Nichtleiters wie bei Abb. 8.1, Gl.(7.15)

$$\|\mathbf{D}\| = \frac{Q}{A} \quad (12.4)$$

ist. Das Potenzial geht im Inneren des Nichtleiters linear von dem Potenzial der einen Elektrode mit U , so ist daher das E-Feld im Nichtleiter

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{U}{d}. \quad (12.5)$$

Verwendet man die lineare Materialbeziehung der Elektrostatisik $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, so ergibt sich nach Betragbildung aus den beiden vorherigen Gleichungen

$$Q = \frac{\epsilon A}{d} U, \quad (12.6)$$

und es folgt für die Kapazität nach Gl. (12.1)

$$C = \frac{\epsilon A}{d}. \quad (12.7)$$

Diese Beziehung gilt angenähert auch bei gekrümmten Elektroden, wenn nur der Abstand zwischen den Elektroden klein ist gegen den Krümmungsradius, so dass man das elektrische Feld zwischen den Elektroden als homogen ansehen kann. Dies trifft z.B. bei den viel verwendeten Wickel- oder Drehkondensatoren (vgl. Böhmer [34]) zu; den Drehkondensator behandeln wir im Abschnitt 12.3.

Da Farad/m die Einheit der Dielektrizitätskonstante ϵ ist, so dient als Einheit der Kapazität nach Gl.(12.7) das Farad; *die Einheit der Kapazität 1 Farad liegt vor, wenn die Elektroden bei 1 V Potenzialunterschied Ladungen von 1 As aufnehmen.*

Berechnungsbeispiel: Plattenkondensator

In der folgenden Tabelle 12.1 ist für verschiedene Verhältnisse von A/d und für $\epsilon = \epsilon_0$ die nach Formel (12.7) berechnete Kapazität angegeben.

$A/d(cm)$ =	100	200	500	1000	2000	5000	10000
$C(pF)$ =	8,86	17,7	44,3	88,6	177	443	886

Tabelle 12.1. Kapazität C und Verhältnis A/d

12.2 Graphische Berechnung von Kapazitätskoeffizienten

Im Fall ebener Probleme kann man auch eine graphische Berechnung von Kapazitätskoeffizienten durchführen. Wir illustrieren das anhand des Beispiels in Abschnitt 11.2.1. Um die Kapazität der in Abb. 11.1 gezeichneten beiden Elektroden zu berechnen, hat man den Fluss des D-Feldes $\|\mathbf{D}\| A = Q$ durch die Potenzialdifferenz zwischen den beiden Elektroden zu dividieren. Sind m Potenziallinien zwischen den beiden Leitern gezeichnet, so ist die Spannung $(m + 1)U_1$, und es gilt für die Kapazitäten

$$C = \epsilon \frac{n}{m + 1} lk, \quad (12.8)$$

wobei k die oben eingeführte willkürliche Konstante bezeichnet. In Abb. 11.1 sind z.B. $n = 17$ D-Feldlinien und $m = 2$ Niveaulinien des Potenzials zwischen den beiden Elektroden vorhanden. Es ist ferner $k = 1$, wenn der Nichtleiter aus Luft besteht. Daher wird der Kapazitätsbelag

$$\frac{C}{l} = \epsilon_0 \frac{n}{m + 1} = 0,502 \frac{pF}{cm}. \quad (12.9)$$

Da die Bedingungen 1 bis 5 erfüllt bleiben, wenn man alle Abmessungen des Feldbildes proportional vergrößert oder verkleinert, so folgt aus Gl.(12.8), dass

die Kapazität geometrisch ähnlicher Elektrodenanordnungen für gleiche Länge l die gleiche ist.

In Abschnitt 11.2.1 wurde auch eine rotationssymmetrische Anordnung betrachtet. Für die entsprechende Kapazität ergibt sich mit den gleichen Bezeichnungen wie oben

$$C = 2\pi\varepsilon \frac{n}{m+1} k. \quad (12.10)$$

12.3 Kapazität einfacher Anordnungen

1. Kapazität eines Drehkondensators:

Es soll ein Drehkondensator mit der Kapazität von 1000pF mit Platten von $r_0 = 5\text{cm}$ Radius bei einem Plattenabstand von $d = 1\text{mm}$ hergestellt werden.

Der größte Querschnitt des elektrischen Flusses beträgt $(1/2)r_0^2\pi = 39,3 \text{ cm}^2$. Daher gilt nach Gl.(12.7)

$$1000 \text{ pF} = n \frac{0,0886 \cdot 39,3 \text{ cm}^2}{0,1 \text{ cm}} \frac{\text{pF}}{\text{cm}}, \quad (12.11)$$

wenn im ganzen n Zwischenräume zwischen den zwei Platten vorhanden sind; hieraus $n = 29$.

Es müssen also 29 Zwischenräume zwischen den Platten vorhanden sein, d.h. 15 feste und 15 drehbare Platten verwendet werden.

Bei halbkreisförmigen Platten, wie in Abb. 12.1, wächst die Kapazität von einem Anfangswert („Anfangskapazität“ bei ganz herausgedrehten Platten) ungefähr linear mit dem Drehwinkel α auf den Endwert an. Für manche Zwecke (z.B. Funkgerät) ist ein anderer Zusammenhang zwischen Kapazität und Drehwinkel erwünscht; man ändert dann die Form der Platten entsprechend ab, so dass ihr Radius r eine bestimmte Funktion des Winkels α wird. Die Fläche A zwischen den Elektroden wird dann

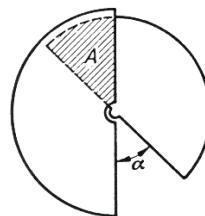


Abbildung 12.1. Zur Berechnung der Kapazität eines Drehkondensators

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\alpha r^2 d\alpha, \quad (12.12)$$

wenn das bewegliche Platten system mit dem Winkel α in das feststehende eintaucht.

Soll die Kapazität C eine bestimmte Funktion $f(\alpha)$ des Winkels α sein, so gilt

$$f(\alpha) = \frac{n\epsilon_0}{2d} \int_0^\alpha r^2 d\alpha. \quad (12.13)$$

Hieraus erhält man durch Differenzieren nach α und Auflösen nach r

$$r = \sqrt{\frac{2dn}{\epsilon_0}} \sqrt{\frac{df(\alpha)}{d\alpha}}. \quad (12.14)$$

Bei anderen Anwendungen ist es zweckmäßig, für $1/C$ eine bestimmte Abhängigkeit $g(\alpha)$ vorzuschreiben. Dann gilt

$$r = \sqrt{\frac{2dn}{\epsilon_0}} \frac{1}{g(\alpha)} \sqrt{-\frac{dg(\alpha)}{d\alpha}}. \quad (12.15)$$

Wenn z.B. der Kondensator eines Schwingkreises eine Teilung erhalten soll, die linear von der Resonanzfrequenz $(1/2)\pi\sqrt{LC}$ abhängt, so muss mit den beiden Konstanten c_1 und c_2 gelten

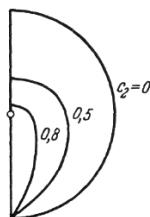


Abbildung 12.2. Plattenformen eines Drehkondensators mit linearer Frequenzteilung

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = c_1 \left(1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi}\right) \quad (12.16)$$

oder

$$g(\alpha) = c_1^2 \left(1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi}\right)^2. \quad (12.17)$$

Damit ergibt sich, wenn alle Konstanten in c zusammengefasst werden, aus Gl.(12.15)

$$r = \frac{c}{\left(1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.18)$$

Der Radius r hat seinen größten Wert für $\alpha = \pi$, nämlich

$$r_m = \frac{c}{(1 - c_2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (12.19)$$

Führt man diesen Wert an Stelle von c ein, so folgt

$$r = r_m \left(\frac{1 - c_2}{1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (12.20)$$

In Abb. 12.2 sind hieraus hervorgehende Formen der Platten für verschiedene Werte von c_2 bei gleichem r_m aufgezeichnet.

2. Kapazität einer Kugel:

In Abschnitt 10.6 wurde das Potenzial einer Punktladung Q ermittelt. Daraus lässt sich nun der Kapazitätswert einer Kugel mit dem Radius r_0 (gegen den unendlich fernen Punkt) bestimmen. An der Oberfläche der Kugel ist nämlich das Potenzial gleich der Potenzialdifferenz (Spannung) U zwischen der Kugel und einem sehr weit entfernten oder besser dem unendlich fernen Punkt, also

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}. \quad (12.21)$$

Die *Kapazität der Kugel* wird daher

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 r_0. \quad (12.22)$$

Zahlenbeispiel: Eine Kugel von 1 cm Radius, die sich in Luft befindet mit einem gegen ihren Radius sehr großen Abstand von anderen Leitern oder Nichtleitern, hat danach die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_0 = 4\pi \cdot 0,0886 \cdot 1 \frac{pF}{cm} \text{cm} = 1,11 \text{ pF}. \quad (12.23)$$

3. Kapazität eines Kugelkondensators:

Der gleiche radiale Verlauf der D-Feldlinien liegt in einem *Kugelkondensator* vor; das ist eine Anordnung aus zwei konzentrischen Kugelelektroden. Aus der Potenzialverteilung einer Punktladung lassen sich die Potenziale auf den Kugelelektroden im Abstand r_1 und r_2 bestimmen und daraus die Kapazität des Kugelkondensators

$$C = \frac{Q}{U_{21}} = 4\pi\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (12.24)$$

Der Betrag des E-Feldes zwischen den beiden Elektroden wird im Abstand r vom Mittelpunkt

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{UC}{4\pi\varepsilon r^2} = U_{12} \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)r^2}, \quad (12.25)$$

wenn U_{12} die Spannung zwischen den beiden Elektroden bezeichnet.

In Abschnitt 10.1.5 haben wir das E-Feld zwischen zwei geladenen Kugeln betrachtet. Die Gesamtladung einer jeden Kugel ergibt sich durch Summieren der Einzelladungen; sie ist mit einem kleineren Fehler als 1 %

$$Q = 1,25 Q_1 = 1,25 \cdot 2\pi\varepsilon r_0 U. \quad (12.26)$$

Der nur von der Geometrie und dem umgebenden Material abhängige Quotient von Ladung und der Potenzialdifferenz U zwischen den Kugel wird in Kapazität genannt und in Abschnitt 10.1.5 näher betrachtet. In diesem Fall ergibt er sich zu

$$C = \frac{Q}{U} = 2,50\pi\varepsilon r_0. \quad (12.27)$$

Wären die beiden Kugeln in sehr großer Entfernung voneinander angebracht, so wäre die Kapazität nach Gl.(12.22) und der Beziehung parallelgeschalteter Kapazitäten in Abschnitt 12.4

$$C = 2\pi\varepsilon r_0. \quad (12.28)$$

4. Kapazität eines Linienleiters über einer Ebene:

In Abschnitt 10.1.6 haben wir eine Linienquelle senkrecht über einer Leiteroberfläche betrachtet. Dabei errechneten wir eine Potenzialverteilung für Fall, dass d^2 sehr klein gegen l^2 ist

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{4h+l}{4h+3l}}. \quad (12.29)$$

Die Kapazität zwischen Draht und Erde ergibt sich daraus mit $Q = \lambda l$

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{4h+l}{4h+3l}}}. \quad (12.30)$$

Im Fall einer parallel über einer Leiteroberfläche angeordneten Linienquelle ergibt sich in gleicher Näherung das folgende Potenzial

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon} \ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{\sqrt{l^2 + (4h)^2} - l}{\sqrt{l^2 + (4h)^2} + l}}. \quad (12.31)$$

Wenn $(4h^2)$ klein ist gegen l^2 , so ergibt sich hieraus die Näherungsformel für die Kapazität einer solchen Leitung gegen Erde

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{4h}{d}}. \quad (12.32)$$

Zahlenbeispiel: Die *Kapazität einer Vertikalantenne* ist nach Gl.(12.30), wenn der Abstand h des einen Endes über dem Erdboden sehr gering ist,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{l}{d}} = \frac{24,2 l}{\lg 1,154 \frac{l}{d}} \frac{pF}{m}. \quad (12.33)$$

Für eine Länge der Antenne von $l = 10m$ und verschiedene Verhältnisse von Länge l zu Durchmesser d des Drahtes sind in der folgenden Tabelle 12.2 die nach Gl.(12.33) berechneten Kapazitätswerte angegeben: Die *Kapazität eines*

l/d	=	100	500	1000	2000	5000	10000
$C(pF)$	=	102	87	79	72	64	59

Tabelle 12.2. Kapazität einer Vertikalantenne

zur Erdoberfläche parallelen Drahtes mit im Vergleich zur Länge kleiner Höhe h ist nach Gl.(12.32) proportional der Leitungslänge. Der „Kapazitätsbelag“ C/l ist daher unabhängig von der Drahtlänge. Kann jedoch die Länge des Drahtes nicht als groß gegen die Höhe angesehen werden, so hängt der Kapazitätsbelag sowohl von dem Verhältnis $\alpha = h/d$ als auch von dem Verhältnis $\beta = h/l$ ab; es gilt nach Gl.(12.31):

$$\frac{C}{l} = \frac{24,2}{\lg 4\alpha - \frac{1}{2} \lg \frac{4\beta^2(\sqrt{1+16\beta^2}+1)}{\sqrt{1+16\beta^2}-1}} \frac{nF}{km}. \quad (12.34)$$

In den folgenden Tabellen 12.3, 12.4 sind die beiden Summanden im Nenner

$$k_1 = \lg 4\alpha, \quad (12.35)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \lg \frac{4\beta^2(\sqrt{1+16\beta^2}+1)}{\sqrt{1+16\beta^2}-1} = \lg \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+16\beta^2}) \quad (12.36)$$

für praktisch vorkommende Verhältnisse α und β angegeben. Es ist dann

$$\frac{C}{l} = \frac{24,2}{k_1 - k_2} \frac{nF}{km}. \quad (12.37)$$

α	=	100	500	1000	2000	5000	10000
k_1	=	2,60	3,30	3,60	3,90	4,30	4,60

Tabelle 12.3. Parameter k_1 des Kapazitätsbelags

Solange also die Länge der Leitung größer ist als die Höhe, spielt die Größe k_2 nur die Rolle einer Korrektur. Bei einer Leitung mit dem Durchmesser $d = 5\text{mm}$ und der Länge $l = 1\text{km}$, die sich in einer Höhe von $h = 10\text{m}$ über dem Erdboden befindet, ist $\alpha = 2000$, $\beta = 0,01$. Die Kapazität wird daher

$$C = \frac{24,2}{3,9} nF = 6,2 nF. \quad (12.38)$$

Bei einer horizontalen Rundfunkantenne von der Länge $l = 30\text{m}$, der Höhe

$$\begin{array}{cccccccc} \beta & = & 0,1 & 0,2 & 0,5 & 1,0 & 2,0 & 5,0 & 10 \\ k_2 & = & 0,017 & 0,057 & 0,21 & 0,41 & 0,66 & 1,02 & 1,31 \end{array}$$

Tabelle 12.4. Parameter k_2 des Kapazitätsbelags

$h = 15\text{m}$ und dem Drahtdurchmesser $d = 3\text{mm}$ ist $\alpha = 5000$, $\beta = 0,5$, also $k_1 = 4,3$, $k_2 = 0,21$. Die Kapazität wird $C = 177\text{pF}$.

Bei *dünnen langen Drähten* liegt der Hauptteil des Feldes in der näheren Umgebung des Drahtes, da dort die Feldliniendichte am größten ist. Die Kapazität verändert sich daher nur wenig, wenn der Draht verbogen wird, so lange die Krümmungsradien groß gegen den Drahtdurchmesser sind. Die Gl.(12.31) gilt also auch für solche gebogenen Drähte. Die Kapazität eines langen dünnen Drahtes mit großem Abstand von der Erdoberfläche ($4h^2 \gg l^2$) ist

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{2l}{d}}. \quad (12.39)$$

Bei kleinem Abstand von der Erde gilt die Gl.(12.32). Nach Gl.(12.39) hängt der Kapazitätsbelag C/l eines Drahtes etwas von der Drahtlänge ab. Ein Draht von 1mm Durchmesser und 1m Länge hat bei großem Abstand von anderen Leitern die Kapazität $C = 7,3\text{pF}$, bei 2m Länge die Kapazität $13,4\text{pF}$.

5. Parallele Zylinder:

In Abschnitt 10.2.3 haben wir das E-Feld von zwei parallelen zylindrischen Elektroden untersucht. Wenn die Zylinder die Radien r_0 und den Achsenabstand c besitzen, dann kann das E-Feld außerhalb der beiden Zylinder mit Hilfe des E-Feldes zweier Linienquellen im Abstand

$$a = 2\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right) - r_0^2} \quad (12.40)$$

dargestellt werden. Daraus ergibt sich eine Spannung zwischen den zylindrischen Elektrode von

$$U = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon} \ln \frac{\frac{a}{2} + \frac{c}{2} - r_0}{\frac{a}{2} - \frac{c}{2} + r_0}. \quad (12.41)$$

Hieraus folgt für die Kapazität unter Benutzung von (12.40)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \varepsilon l}{\ln \left(\frac{c}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{c}{2r_0} \right)^2 - 1} \right)}. \quad (12.42)$$

Für die Kapazität zwischen den beiden parallelen Zylindern ergibt sich nach Gl.(12.42), wenn ε_0 eingesetzt wird,

$$\frac{C}{l} = \frac{27,8}{\ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)} \frac{nF}{km}; \quad x = \frac{c}{2r_0}. \quad (12.43)$$

Der Nenner N hat für die verschiedenen Verhältnisse von c/r_0 die in der folgenden Tabelle 12.5 angegebenen Werte Bei größeren Werten von c/r_0 kann

$c/r_0 =$	2,4	3,0	4,0	6,0	10,0	20
$N =$	0,622	0,963	1,317	1,763	2,292	2,993

Tabelle 12.5. Kapazitätsbelag paralleler Zylinder

wieder die gleiche Vernachlässigung eingeführt werden wie oben; dann gilt

$$\frac{C}{l} = \frac{27,8}{\ln \frac{c}{r_0}} \frac{nF}{km}. \quad (12.44)$$

Die nachfolgende Tabelle 12.6 gibt einige hiernach berechnete Werte des Kapazitätsbelages

$c/r_0 =$	20	50	100	200	500	1000
$\frac{C}{l} \frac{nF}{km} =$	9,29	7,11	6,04	5,25	4,77	4,03

Tabelle 12.6. Kapazitätsbelag und Kapazität paralleler Zylinder

6. Kapazität von Zylinder und Platte:

In dem Feldbild, Abb. 10.14, ist die Mittelebene eine Potenzialfläche. Wird sie durch eine leitende Elektrode ersetzt, so ergibt sich das Feld zwischen dieser ebenen Platte und einem parallelen Zylinder. Bei gleicher Ladung des

Zylinders ist die Spannung zwischen Platte und Zylinder halb so groß wie die zwischen den beiden Zylindern. Bezeichnet man daher den Achsenabstand des Zylinders von der Platte mit h , so gilt für die Kapazität

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{h}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - 1}\right)}, \quad (12.45)$$

eine Formel, die auf eine *Einfachleitung mit der Höhe h über dem Erdboden* angewendet werden kann. Wenn man, wie es meist der Fall ist, h/r_0 als groß gegen 1 ansehen kann, so geht diese Formel über in die Gl.(12.32) , deren Gültigkeit, wie früher gezeigt wurde, noch davon abhängt, ob h/l genügend klein ist.

7. Bündelleiter und elliptische Zylinderkondensator:

In Abschnitt 11.7 wurde gezeigt, dass die E-Feldstärke an der Leiteroberfläche von Bündelleitern zu

$$\|\mathbf{E}\| = \left| \frac{d\varphi}{dr_0} \right| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r_0 n} \quad (12.46)$$

mit $\lambda = Q/l$ bestimmt werden kann. Sind zwei solche Bündelleiter im Abstand a voneinander in Luft geführt, so ist die Kapazität nach Gl.(12.43)

$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln\frac{a}{R}}. \quad (12.47)$$

Die *Kapazität eines elliptischen Zylinderkondensators* kann nach Abschnitt 11.7 (Unterpunkt 4.) auf folgende Weise berechnen. Es seien die Halbachsen der beiden Zylinder a_1, b_1, a_2, b_2 . Dann gilt nach Gl.(11.96) und (11.97) für das Potenzial auf dem ersten Zylinder

$$\varphi_1 = c_1 \operatorname{arsinh} \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}, \quad (12.48)$$

auf dem zweiten Zylinder

$$\varphi_2 = c_1 \operatorname{arsinh} \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}. \quad (12.49)$$

Es ist also die Spannung zwischen den beiden Zylindern

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = c_1 \left(\operatorname{arsinh} \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} - \operatorname{arsinh} \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \right). \quad (12.50)$$

Unter Benutzung der Formel

$$\operatorname{arsinh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad (12.51)$$

ergibt sich hieraus

$$U = c_1 \ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}. \quad (12.52)$$

Zur Berechnung der Ladung des inneren Zylinders dient Gl.(11.65). Es ist nach Gl.(11.94) auf der x -Achse ($y = 0$) $v = v_1 = 0$, auf der y -Achse ($x = 0$) $v = v_2 = (\pi/2)c_1$, also der vom inneren Zylinder in einem Quadranten ausgehende elektrische Fluss

$$Q_{12} = -\varepsilon \frac{\pi}{2} l c_1. \quad (12.53)$$

Der ganze elektrische Fluss ist daher

$$Q = -2\pi c_1 \varepsilon l, \quad (12.54)$$

und es ergibt sich die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}}. \quad (12.55)$$

Der Kreiszylinderkondensator stellt einen Grenzfall dar, in dem $a_1 = b_1 = r_1$ und $a_2 = b_2 = r_2$ wird, Gl.(16.31).

Ein anderer Grenzfall ergibt sich, wenn die kurze Halbachse b der Ellipse unendlich klein wird; er liefert das E-Feld eines geladenen Blechstreifens von der Breite $2c_2 = 2a$.

Zahlenbeispiel: In der Achse eines Hohlzylinders vom Radius $r_0 = 5\text{ cm}$ befindet sich ein dünner Blechstreifen von der Breite 2 cm . Wie groß ist die Kapazität zwischen Blechstreifen und Zylinder für 1 cm Länge?

Der Blechstreifen wird als elliptischer Zylinder mit den Halbachsen $a_1 = 1\text{ cm}$ und $b_1 = 0$ aufgefasst, der Brennpunktabstand ist dann $2c_2 = 2\text{ cm}$. Eine Ellipse mit der großen Halbachse $a_2 = 5\text{ cm}$ und den gleichen Brennpunkten hat eine kleine Halbachse von $b_2 = \sqrt{5^2 - 1^2}\text{ cm} = 4,9\text{ cm}$; sie weicht also nur noch wenig von der Kreisform ab, und es ergibt sich eine gute Annäherung, wenn man den Kreiszylinder durch einen elliptischen Zylinder mit $a_2 + b_2 = 2r_0 = 10\text{ cm}$ ersetzt. Die Kapazität wird dann nach Gl.(12.55)

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln 10}, \quad \text{und es folgt } \frac{C}{l} = \frac{2\pi \varepsilon}{2,30} = 0,242 \frac{\text{pF}}{\text{cm}}. \quad (12.56)$$

Würde man den Blechstreifen durch einen Kreiszylinder von gleicher Oberfläche ersetzen, also mit dem Radius $4\text{ cm}/(2\pi)$, so würde man nach Gl.(16.31) erhalten

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln 2,5\pi} = 0,270 \frac{\text{pF}}{\text{cm}}. \quad (12.57)$$

12.4 Parallel- und Reihenschaltung von Kapazitäten

Werden mehrere Kapazitäten mit den Kapazitätswerten C_1, C_2, C_3 usw. *parallel* an eine Stromquelle gelegt, so verzweigen sich die Ladungen im Sinne der Ladungserhaltung auf die einzelnen Kapazitäten. Die gesamte Ladung Q ist nach Abschnitt 7.26 und nach Gl.(7.16) einem elektrischen Fluss, d.h. dem Oberflächenintegral des D-Feldes, äquivalent. Somit setzt sich Q aus der Summe der elektrischen Flüsse Q_1, Q_2, Q_3 usw. in den einzelnen Kapazitäten zusammen. Dabei ist zu beachten, dass auf Grund der Parallelschaltung der Kapazitäten die Potenzialdifferenz – d.h. die Spannung U – zwischen den Platten der Kapazitäten gleich ist, so dass entsprechend der Ladungs-Spannungsbeziehung die elektrischen Flüsse nur durch die geometrischen bedingten Kapazitätswerte C_1, C_2, C_3 usw. unterscheiden. Ersetzt man die ganze Anordnung durch eine einzige Kapazität mit einer einem Kapazitätswert C_0 , dass bei der gleichen Spannung U der gleiche elektrische Fluss aufgenommen wird, so gilt daher

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots \quad (12.58)$$

$$U C_0 = U C_1 + U C_2 + U C_3 + \dots \quad (12.59)$$

oder

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (12.60)$$

Bei *Reihenschaltung* der Kapazitäten hat der Verschiebungsstrom in jeder Kapazität den gleichen Wert. Die Ladungen Q der einzelnen Kapazitäten sind daher einander gleich. Die Spannungen an den einzelnen Kapazitäten sind bestimmt durch diese Ladung und den Kapazitätswert; ihre Summe ist gleich der Gesamtspannung U . Ersetzt man auch hier die Anordnung durch eine einzige Kapazität C_0 , so dass sich bei der gleichen Spannung U die gleiche Ladung ergibt, so gilt

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots \quad (12.61)$$

$$\frac{Q}{C_0} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots \quad (12.62)$$

oder

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (12.63)$$

Die Teilspannungen sind

$$U_n = U \frac{C_0}{C_n}. \quad (12.64)$$

Sie verhalten sich umgekehrt wie die Kapazitätswerte; an der kleineren Kapazität liegt die höhere Spannung.

Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Überlegung ist, dass der Isolationswiderstand der jeweils modellierten Kapazität unendlich groß ist. Bei Gleichstrom stellt sich bei Reihenschaltung in Wirklichkeit eine Spannungsverteilung

ein, die ausschließlich durch die Isolationswiderstände der einzelnen Kapazitäten bestimmt ist; vgl. Abschnitt 5.2 Nur wenn ε/κ für alle in Reihe geschalteten Kapazitäten den gleichen Wert hätte, würde diese Spannungsverteilung übereinstimmen mit der hier berechneten. Praktisch schwankt die Leitfähigkeit der Nichteileiter in ziemlich weiten Grenzen, so dass sich bei Gleichstrom große Unterschiede zwischen der wirklichen Verteilung der Spannung und der nach Gl.(12.64) berechneten ergeben können. Dagegen gelten die abgeleiteten Beziehungen sehr genau, wenn es sich um Wechselspannung handelt, da hier der Verschiebungsstrom den Leistungsstrom meist erheblich überwiegt (siehe Abschnitt 30).

Wenn man eine Anzahl n Kapazitäten parallel geschaltet mit einer Spannung U auflädt und dann hintereinander schaltet, so ergibt sich eine Addition der Einzelspannungen; die Gesamtspannung wird $n U$. Die ganze Anordnung wirkt dann wie eine Kapazität mit dem n -ten Teil der Kapazität einer Einzelkapazität, der auf die n -fache Spannung aufgeladen ist. Man kann dieses Verfahren zur Herstellung von hohen Spannungen für Versuchszwecke benutzen.

12.5 Kapazitäten in Mehrleitersystemen

12.5.1 Maxwellsche Potenzial- und Kapazitätskoeffizienten

In den bisherigen Abschnitten haben wir uns bei der Bestimmung der Kapazitätswerte auf Systeme aus zwei Leitern beschränkt, die sich unter Umständen durch Parallel- oder Reihenschaltung (vgl. Abschnitt 12.4) zu komplizierteren Anordnungen erweitern lassen. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man den Kapazitätsbegriff auf Systeme übertragen kann, die aus mehreren voneinander isolierten Leitern bestehen und wie man mit Hilfe dieser Begriffe die Zusammenhänge zwischen den Potenzialen der einzelnen Leiter und den auf ihren Oberflächen gespeicherten Ladungen beschreiben kann.

Im Folgenden bezeichnen wir mit A ein Mehrleitersystem, das aus den auch als *Elektroden* bezeichneten Leitern A_0, \dots, A_n besteht. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass diese Leiter in ein homogenes, isotropes, raumladungsfreies Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante ε eingebettet sind. Die Flächen A_0, \dots, A_n seien die als glatt und disjunkt vorausgesetzten Ränder dieser Leiter. Die Vereinigung der Flächen A_0, \dots, A_n werde mit A bezeichnet. V bezeichne die Vereinigung des mit dem Dielektrikum ausgefüllten Raums zwischen den Leitern mit der Fläche A .

Modelle für Mehrgitter-Elektronenröhren und Mehrelektrodenkondensatoren sind typische Beispiele solcher Mehrleitersysteme.

Sollen die Leiter A_1, \dots, A_n Modelle für reale Elektroden sein, die von einem leitenden Schirm umgeben sind, wird für A_0 eine geschlossene Fläche gewählt, die die Flächen A_1, \dots, A_n umhüllt (vgl. Abb. 12.3). Sollen die Leiter A_1, \dots, A_n dabei Modelle für reale Elektroden sein, die über der als eben und

leitend angesehenen Erdoberfläche angebracht sind, wird für A_0 eine unendlich ausgedehnte Ebene gewählt (vgl. Abb. 12.4).

Modelle für mehradrige Verbindungsleitungen oder Mehrfachkabel sind weitere wichtige Beispiele für ein Mehrleitersysteme. Im einfachsten Fall werden solche Verbindungsleitungen oder Kabel durch unendlich lange parallele zylindrische Leiter $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ nachgebildet, die von einer unendlich langen zylindrischen Fläche A_0 umhüllt werden bzw. über der unendlich ausgedehnten Ebene A_0 angeordnet sind. Die Abb. 12.3 und 12.4 sind dann als Querschnitte solcher Leitungssysteme zu interpretieren. Selbstverständlich können dann an Stelle von Kapazitätskoeffizienten und Ladungen nur die entsprechenden längenbezogenen Größen berechnet werden (vgl. Abschnitt 12.5.2).

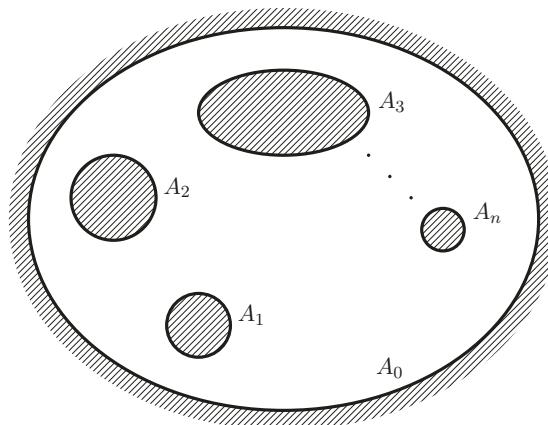


Abbildung 12.3. Beispiel eines Mehrleitersystems, bei dem die Fläche A_0 ein geschlossener Schirm ist, der die Flächen A_1, \dots, A_n umhüllt

Die Potenziale der Leiter $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$ sollen mit $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ bezeichnet werden. φ_0 wird auch als *Bezugspotential* bezeichnet. Entsprechend wird die Elektrode Λ_0 als *Bezugselektrode* bezeichnet. Die Ladungen auf den Oberflächen der Elektroden $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$ sollen der Reihe nach mit Q_0, \dots, Q_n bezeichnet werden. Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit gelte $\varphi_0 = 0$.

Bei gegebenen Potenzialen $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}V := \{\alpha V | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ¹ der Leiter lässt sich die Bestimmung der auf den Oberflächen dieser Leiter verteilten Ladungen auf die Lösung einer Dirichletschen Randwertaufgabe zurückführen. Aus dem auf diese Weise berechneten Potenzial φ bestimmt man das E-Feld \mathbf{E} und das D-Feld $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Oberflächenintegrale der Normalkomponente von \mathbf{D} über die Flächen A_0, \dots, A_n liefern dann die gesuchten Ladungen Q_0, \dots, Q_n .

¹ $\mathbb{R}V$ bezeichne die Menge $\mathbb{R}V := \{\alpha V | \alpha \in \mathbb{R}\}$ aller Produkte einer reellen Maßzahl α mit der Maßeinheit V .

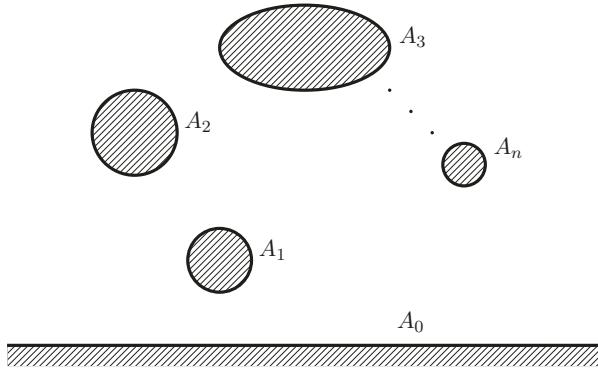


Abbildung 12.4. Beispiel eines Mehrleitersystems, bei dem A_0 eine unendliche ausgedehnte leitende Ebene ist, die keine der Flächen A_1, \dots, A_n schneidet

Die Normalenvektoren der Flächen A_0, \dots, A_n sind dabei so zu orientieren, dass sie in das Innere des Gebiets V zeigen.

Obgleich sich schon für Mehrleitersysteme mit nur zwei Elektroden A_0 und A_1 die Lösungen einer solchen Randwertaufgabe in der Regel nicht in geschlossener Form angeben lassen, kann man auch ohne solche Lösungen bereits mit einfachen Mitteln der Potenzialtheorie, im wesentlichen handelt es sich um Schlussfolgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz, eine Vielzahl wichtiger Aussagen über das Verhalten von Mehrleitersystemen gewinnen. Diese Schlussfolgerungen liefern u.a. Hinweise für eine messtechnische Bestimmung der elektrisch relevanten Eigenschaften von Mehrleitersystemen, sie liefern aber auch Hinweise für die Entwicklung von Schaltkreissimulatoren und die entsprechender Bauelementemodelle.

Eine erste wichtige Beobachtung dieser Art ist die Tatsache, dass die Menge aller Lösungen φ der Dirichletschen Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \\ \varphi|_{A_i} &= \varphi_i, \quad (i = 1, \dots, n), \\ \varphi|_{A_0} &= 0 \end{aligned} \tag{12.65}$$

zu beliebig vorgegebenen Familien $(\varphi_i)_{i=0, \dots, n}$ von Randwerten, die der Bedingung $\varphi_0 = 0$ genügen, ein n -dimensionaler linearer Raum ist. (Die Gleichungen $\varphi|_{A_i} = \varphi_i$ und $\varphi|_{A_0} = 0$ bezeichnen hier – und sinngemäß auch im Folgenden – eine Kurzschreibweise für die Bedingungen „für alle $\mathbf{r} \in A_i$ gilt $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_i$ “ bzw. „für alle $\mathbf{r} \in A_0$ gilt $\varphi(\mathbf{r}) = 0$ “.)

Der Beweis dieser Behauptung beruht auf der Tatsache, dass man unter der Voraussetzung, dass die Flächen A_0, \dots, A_n gewissen Glattheitsvoraussetzungen und einer sogenannten Kegelbedingung [40] genügen, für den Raum aller Lösungen dieser Randwertaufgabe die Existenz einer aus n Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_n : V \rightarrow \mathbb{R}$ bestehenden Basis zeigen kann.

Zu diesem Zweck bezeichne δ_{ij} das durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (12.66)$$

definierte Kronecker-Symbol.

$(\psi_i)_{i=1,\dots,n}$ sei die Familie der Lösungen der n speziellen Dirichletschen Randwertaufgaben

$$\begin{aligned} \Delta\psi_i &= 0, \\ \psi_i|A_j &= \delta_{ij}, \quad (j = 1, \dots, n), \\ \psi_i|A_0 &= 0. \end{aligned} \quad (12.67)$$

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ hat die Funktion ψ_i an allen Punkten der Fläche A_i den Funktionswert 1 und auf den übrigen Flächen den Funktionswert 0. Folglich kann keine der Funktionen ψ_i ($i = 1, \dots, n$) als eine Linearkombination der Funktionen ψ_j ($j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$) dargestellt werden. Demzufolge sind die Funktionen ψ_i ($i = 1, \dots, n$) linear unabhängig.

Ist φ die durch die Linearkombination

$$\varphi := \sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i \quad (12.68)$$

definierte Funktion, so ist φ eine Lösung der Laplace-Gleichung, die den Randbedingungen $\varphi|A_0 = 0$ und $\varphi|A_i = \varphi_i$ ($i = 1, \dots, n$) genügt.

Weil die Lösungen einer Dirichletschen Randwertaufgabe durch ihre Randwerte eindeutig festgelegt werden, sind die Funktionen ψ_i nicht nur linear unabhängig, sondern auch eine Basis für die Menge der Lösungen aller durch die Familien $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n} \in (\mathbb{RV})^{\{1,\dots,n\}}$ festgelegten Randwertaufgaben für Λ . (Das Symbol $(\mathbb{RV})^{\{1,\dots,n\}}$ bezeichnet hier die Menge aller Abbildungen der Indexmenge $\{1, \dots, n\}$ in die Menge \mathbb{RV} , d.h., die Menge aller Familien $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$ mit $\varphi_i \in \mathbb{RV}$).

Aus der Existenz der Lösungen für die im vorangehenden formulierten Randwertaufgaben folgt wegen

$$\begin{aligned} Q_i &= \oint_{A_i} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \varepsilon \oint_{A_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\varepsilon \oint_{A_i} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{A} \\ &= -\varepsilon \sum_{j=1}^n \left(\oint_{A_i} \operatorname{grad} \psi_j \cdot d\mathbf{A} \right) \varphi_j = \sum_{j=1}^n (-\varepsilon \oint_{A_i} \operatorname{grad} \psi_j \cdot d\mathbf{A}) \varphi_j \end{aligned} \quad (12.69)$$

mit

$$c_{ij} := -\varepsilon \oint_{A_i} \operatorname{grad} \psi_j \cdot d\mathbf{A} \quad (12.70)$$

die Existenz einer Matrix $\mathbf{C} := (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, mit der man die durch die Potenziale φ_i festgelegten Ladungen Q_i der Flächen A_i für alle $i = 1, \dots, n$ mit Hilfe des Matrizenprodukts

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad (12.71)$$

berechnen kann.

Die Elemente der Matrix $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ sind die von Maxwell [193] eingeführten *Kapazitätskoeffizienten* von Λ .

Hätte man für das Potenzial φ_0 einen von Null verschiedenen festen Wert vorgegeben, so wäre die Menge aller Lösungen der in (12.65) definierten Randwertaufgaben kein n -dimensionaler linearer Raum, sondern die durch den Wert von $\varphi_0 \in \mathbb{R}V$ und die Funktionen ψ_i ($i = 1, \dots, n$) festgelegte n -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit $\{\sum_{j=1}^n \varphi_i \psi_i + \varphi_0 | \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}V\}$.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, Gleichung (12.70) noch etwas umzuformen. Weil die Funktion ψ_i an allen Punkten der Fläche A_i den Wert 1 hat, kann diese Gleichung auch in der Form

$$c_{ij} := -\varepsilon \oint_{A_i} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j \cdot d\mathbf{A} \quad (12.72)$$

geschrieben werden. Weil die Funktion ψ_i auf den Flächen A_j ($j \neq i$) verschwindet, kann in diesem Oberflächenintegral die Fläche A_i auch durch $A = \bigcup_{j=0,\dots,n} A_j$ ersetzt werden. Mithin gilt

$$c_{ij} := -\varepsilon \oint_A \psi_i \operatorname{grad} \psi_j \cdot d\mathbf{A}, \quad (12.73)$$

woraus für Mehrleitersysteme, bei denen A_0 eine geschlossene Fläche ist, die die übrigen Leiter umhüllt, mit Hilfe einer der Greenschen Integralformeln [151] über

$$c_{ij} := \varepsilon \iiint_V (\psi_i \Delta \psi_j + \operatorname{grad} \psi_i \cdot \operatorname{grad} \psi_j) dV, \quad (12.74)$$

wegen $\Delta \psi_j = 0$ die Beziehung

$$c_{ij} := \varepsilon \iiint_V \operatorname{grad} \psi_i \cdot \operatorname{grad} \psi_j dV, \quad (12.75)$$

folgt, wenn man zusätzlich beachtet, dass wegen der üblichen Konventionen zur Orientierung der Flächen bei der Anwendung der Greenschen Integralformel das vektorielle Flächenelement $d\mathbf{A}$ durch $-d\mathbf{A}$ ersetzt werden muss.

Durch einen Grenzübergang kann man die Beziehung (12.75) auch für Mehrleitersysteme beweisen, bei denen A_0 eine unendlich ausgedehnte leitende Ebene ist und jede der Elektroden A_1, \dots, A_n einen endlichen Durchmesser hat. Zu diesem Zweck wird zunächst eine Familie „oberer“ Halbkugelflächen H^R und eine Familie von Kreisscheiben $A^R \subset A_0$ eingeführt, deren Mittelpunkt ein festgewählter Punkt \mathbf{r}_0 der Fläche A_0 ist, wobei R den Radius von H^R bzw. A^R bezeichnet und die geschlossenen Flächen $H^R \cup A^R$ für

hinreichend große Werte von R die Leiter $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ enthalten. Mit Hilfe des Spiegelungsprinzips der Elektrostatik und einer Multipolentwicklung [151] der Felder ψ_i und $\text{grad } \psi_i$ ($i = 1, \dots, n$) kann man zeigen, dass für $R \rightarrow +\infty$ das Flächenintegral $\int_{H^R} \psi_i \text{grad } \psi_j \cdot d\mathbf{A}$ gegen 0, das Flächenintegral $\int_{A^R} \psi_i \text{grad } \psi_j \cdot d\mathbf{A}$ und das Volumenintegral $\int_{V^R} \text{grad } \psi_i \cdot \text{grad } \psi_j dV$ gegen beschränkte Werte konvergieren, wobei V^R das in der „oberen“ Halbkugel H^R liegende Teilgebiet von V bezeichnet.

Auch für Mehrleitersysteme, deren Elektroden $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ parallele zylindrische Leiter sind, die über einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene liegen, kann die Existenz dieser Integrale mit entsprechenden Grenzwertbeobachtungen bewiesen werden.

Aus Gleichung (12.75) folgt sofort die Symmetrie der Matrix der Kapazitätskoeffizienten, d.h. die Gültigkeit von

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (12.76)$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$ mit $i \neq j$.

Für $i = j$ gilt wegen

$$c_{ii} := \varepsilon \iiint_V (\text{grad } \psi_i)^2 dV, \quad (12.77)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ die Ungleichung

$$c_{ii} > 0. \quad (12.78)$$

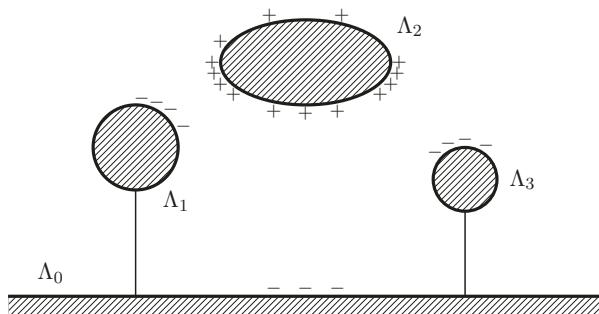


Abbildung 12.5. Spezialfall eines Mehrleitersystems mit vier Elektroden, Elektrode Λ_2 positiv geladen, Elektroden Λ_1 und Λ_3 geerdet und zusammen mit Λ_0 negativ geladen

Es sei nun j ein Element von $\{1, \dots, n\}$. Gibt man für das Potenzial der Elektrode Λ_j einen positiven Wert $\varphi_j > 0$ vor, während die übrigen Elektroden „geerdet“ sind, d.h., ihre Potenziale genügen der Beziehung $\varphi_i = 0$ ($i \in \{0, \dots, n\} \setminus \{j\}$) genügen, dann trägt die Elektrode Λ_j wegen $c_{jj}\varphi_j > 0$

eine positive Ladung, während die „geerdeten“ Gegenelektroden negativ geladen sind (vgl. Abb. 12.5). Also gilt für alle $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$ die Beziehung

$$c_{ij} < 0. \quad (12.79)$$

Zusammen mit diesen Überlegungen erhält man aus der Matrizengleichung (12.71) den folgenden Algorithmus zur Messung der Kapazitätskoeffizienten.

Algorithmus

- (1°) $j := 1$.
- (2°) Elektroden Λ_k ($k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$) „erden“.
- (3°) an Elektrode Λ_j Spannung φ_j gegenüber Elektrode Λ_0 anlegen.
- (4°) Spannungsquelle abklemmen, für $i = 1, \dots, n$ die Ladungen Q_i messen und die Quotienten $c_{ij} := Q_i / \varphi_j$ berechnen.
- (5°) $j := j + 1$.
- (6°) Test: $j = n + 1$? Wenn ja gehe zu (7°), andernfalls zu (2°).
- (7°) Stop.

Die in Schritt (4°) geforderte Messung der Ladungen Q_i lassen sich z.B. mit einem ballistischen Galvanometer durchführen.

Aus der Symmetrie der Matrix der Kapazitätskoeffizienten folgt eine als *Reziprozität* bezeichnete Eigenschaft von Mehrleitersystemen. Angenommen, i und j sind zwei verschiedene Elemente der Indexmenge $\{1, \dots, n\}$ und $U^e \in \mathbb{R}V$ ist ein beliebiger von Null verschiedener Spannungswert. Gibt man nun für die Elektrode Λ_j den Potenzialwert $\varphi_j := U^e$ vor, während die übrigen Elektroden „geerdet“ sind, dann enthält die Oberfläche der Elektrode Λ_i die Ladung $Q_i = c_{ij}U^e$. Gibt man umgekehrt für die Elektrode Λ_i den Potenzialwert $\varphi_i := U^e$ vor, während die übrigen Elektroden „geerdet“ sind, dann enthält die Oberfläche der Elektrode Λ_j die Ladung $Q_j = c_{ji}U^e$. Und wegen $c_{ij} = c_{ji}$ gilt $Q_i = Q_j$.

Es sei nun Λ ein Mehrleitersystem, bei dem die Leiter $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ von der Fläche A_0 umhüllt werden.

Aus der Raumladungsfreiheit des Dielektrikums zwischen den Leitern von Λ erhält man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die Beziehung

$$\sum_{i=1}^n Q_i = -Q_0. \quad (12.80)$$

Die in einem solchen Mehrleitersystem Λ gespeicherte Energie erhält man aus (vgl. Abschnitt 13)

$$W_\Lambda = \frac{1}{2} \iint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \frac{1}{2}\varepsilon \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (12.81)$$

Mit den weiter oben eingeführten Bezeichnungen, der Beziehung $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, den Bedingungen $\varphi_0 = 0$, $\Delta \varphi = 0$ und der bereits weiter oben benutzten Greenschen Integralformel folgt

$$\begin{aligned}
 W_A &= \frac{\varepsilon}{2} \int_V \operatorname{grad}^2 \varphi \, dV &= \frac{\varepsilon}{2} \int_V (\varphi \Delta \varphi + \operatorname{grad}^2 \varphi) \, dV \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} \oint_A \varphi \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{A} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varepsilon \oint_{A_i} \varphi \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{A} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\varepsilon \oint_{A_i} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{A}) \varphi_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\varepsilon \oint_{A_i} \operatorname{grad} \psi_j \cdot d\mathbf{A}) \varphi_i \varphi_j \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_i \varphi_j.
 \end{aligned} \tag{12.82}$$

Auch für Mehrleitersysteme, bei denen A_0 eine unendlich ausgedehnte Ebene ist, lassen sich die Beziehungen (12.80) – (12.81) durch entsprechende Grenzübergänge beweisen.

Wie aus der rechten Seite von Gleichung (12.81) folgt, gilt für jedes nicht-triviale E-Feld von A die Beziehung $W_A > 0$.

Also ist $W_A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_i \varphi_j$ eine positiv definite quadratische Form. Damit ist die Matrix der Kapazitätskoeffizienten regulär, und es existiert ihre Inverse.

Mit $\mathbf{P} := (p_{ij})_{i,j=1,\dots,n} := \mathbf{C}^{-1}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}. \tag{12.83}$$

Die Elemente der Matrix \mathbf{P} sind die gleichfalls in [193] von Maxwell eingeführten *Potenzialkoeffizienten* von A .

Mit \mathbf{C} ist auch \mathbf{P} eine symmetrische Matrix. Daraus folgt auch für diese Matrix eine entsprechende Reziprozitätsbeziehung.

Mit Algorithmen der linearen Algebra kann die Gleichungen (12.71) und (12.83) in Hybriddarstellungen transformieren. Auf diese Weise erhält man beispielsweise aus (12.71) die Beziehung

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}. \tag{12.84}$$

Nehmen wir an, dass alle Elektroden eines Mehrleitersystems durch eine kurzzeitige Erdung entladen sind. Wenn nun der Elektrode A_1 durch Anschluss an eine Spannungsquelle ein von 0 verschiedenes Potential φ_1 aufgeprägt wird,

während die Elektroden $\Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ isoliert und ladungsfrei im Raum „schweben“, dann folgt aus Gleichung (12.84), dass die Potentiale $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ durchaus von 0 verschiedene Werte annehmen können. Eine Tatsache, die für den Unfallschutz in Hochspannungsanlagen von großer Bedeutung ist.

Aus der Bedingung $Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n = 0$ folgt zwar, dass auf jeder der Elektroden $\Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ jeweils die Gesamtladung verschwindet, nicht aber, dass sich auf ihren Oberflächen geeignete verteilte positive und negative Influenzladungen befinden.

Die Erfahrung zeigt, dass die mit den Mitteln der Theorie statischer Felder bestimmten Lösungen der Dirichletschen Randwertaufgabe (12.65) für Λ auch für quasistatische (also für hinreichend langsam veränderliche) Felder eine brauchbare Näherung liefert, die als *quasistationäre Näherung* bezeichnet wird. Ersetzt man die Potentiale φ_i ($i = 1, \dots, n$) durch Spannungen u_i , die sich im Sinne einer quasistationären Näherung entsprechend langsam ändern, so müssen auch die zeitlich konstanten Ladungen Q_i durch langsam zeitlich veränderliche Ladungen q_i ersetzt werden.

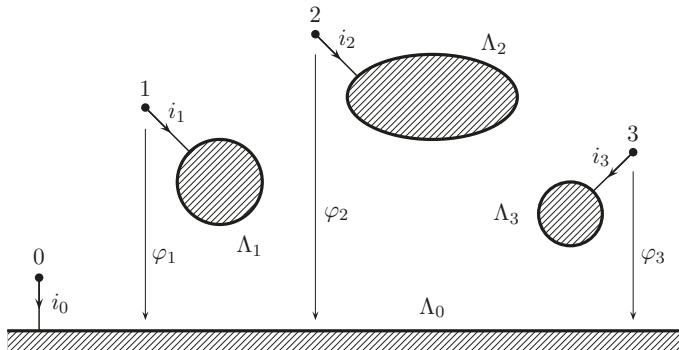


Abbildung 12.6. Allgemeines Mehrleiterystem, Elektroden $\Lambda_0, \dots, \Lambda_3$ mit Anschlussklemmen versehen

Wenn sich die Ladungen der (ursprünglich isoliert eingebetteten) Leiter von Λ zeitlich ändern sollen, müssen diese Leiter, wie in Abb. 12.6 dargestellt, mit Anschlüssen versehen sein, in denen die sich aus den Ladungsänderungen ergebenden Ströme

$$i_i = \dot{q}_i \quad (12.85)$$

zu- oder abfließen können. Dabei sind die in Richtung zu diesen Leitern fließenden Ströme positiv zu zählen.

Aus $q_0 = -(q_1 + \dots + q_n)$ folgt für den Strom i_0 die Beziehung

$$i_0 = -(i_1 + \dots + i_n). \quad (12.86)$$

Wenn man nur noch an der Beziehung zwischen diesen Spannungen und Strömen interessiert ist, kann man das Verhalten des Mehrleitersystems Λ durch ein Netzwerkmodell beschreiben.

Ein Netzwerk wird durch einen orientierten Graphen und eine konstitutive Relation festgelegt. Sein Graph beschreibt die Zweig-Knoten-Struktur einschließlich der Bezugsrichtungen seiner Zweigspannungen und Zweigströme. Seine konstitutive Relation beschreibt die der Zweigmenge seines Graphen zugeordneten physikalischen Eigenschaften. Die Lösungen eines Netzwerks sind diejenigen Familien von Zweigspannungen und Zweigströmen, die den durch den Graphen festgelegten Maschen- und Knotengleichungen und der konstitutiven Relation genügen. Die konstitutive Relation eines Netzwerks wird bei den Anwendungen in der Regel mit Hilfe konstitutiver Gleichungen beschrieben.

Aus der in Gleichung (12.71) angegebenen Beziehung zwischen den Ladungen der Elektroden $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ und den Spannungen zwischen diesen Elektroden und der Bezugselektrode Λ_0 , den Gleichungen $i_i = \dot{q}_i$ ($i = 1, \dots, n$) und $i_0 = -(i_1 + \dots + i_n)$ ergibt sich, dass man das Klemmenverhalten von Λ durch ein Netzwerk \mathcal{N}_{GK} darstellen kann, das aus n gekoppelten Kapazitäten besteht und dessen Graph ein sternförmiger Baum mit $n+1$ Knoten ist, der die als Klemmen dienenden Knoten dieses Netzwerks verbindet.

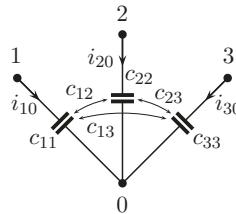


Abbildung 12.7. Netzwerkmodell \mathcal{N}_{GK} eines Mehrleitersystems mit vier Elektroden, die Doppelpfeile symbolisieren die Kopplung der Kapazitäten

Der Einfachheit halber wählen wir für die Zweig- bzw. Knotenmenge von \mathcal{N}_{GK} die Mengen $\mathcal{Z}_{\text{GK}} := \{(i, 0) | i = 1, \dots, n\}$ bzw. $\mathcal{K}_{\text{GK}} := \{1, \dots, n\}$, wobei für alle $i = 1, \dots, n$ der Zweig $(i, 0)$ den Knoten i mit dem Knoten 0 verbindet und von i nach 0 orientiert ist (vgl. Abb. 12.7). Die konstitutive Relation von \mathcal{N}_{GK} ist gleich der Menge aller geordneten Paare von Familien von Zweigspannungen und Zweigströmen, die der Bedingung

$$\begin{pmatrix} i_{10} \\ \vdots \\ i_{n0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_{10} \\ \vdots \\ \dot{u}_{n0} \end{pmatrix} \quad (12.87)$$

genügen, wenn u_{i0} bzw. i_{i0} die Zweigspannung bzw. den Zweigstrom des Zweigs $(i, 0)$ bezeichnet.

Neben dem Netzwerk \mathcal{N}_{GK} gibt es unendlich viele kapazitive Netzwerke, die das gleiche Klemmenverhalten haben. Nachfolgend soll das in diesem Zusammenhang in der Literatur bevorzugte Netzwerkmodell für Mehrleiter-systeme eingeführt werden.

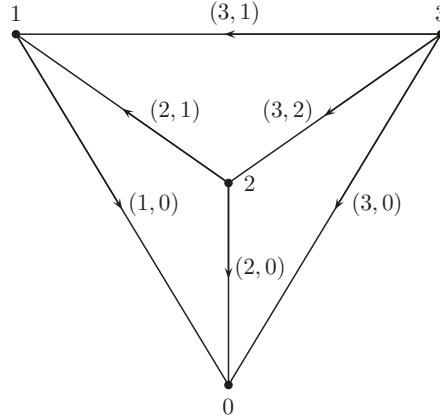


Abbildung 12.8. Graph von \mathcal{N}_{TK} für den Spezialfall $n = 3$

Dieses Netzwerkmodell soll mit \mathcal{N}_{TK} bezeichnet werden.

Für die Zweig- bzw. Knotenmenge dieses Netzwerks werden die Mengen $\mathcal{Z}_{\text{TK}} := \{(i, j) | i, j = 0, 1, \dots, n \wedge i > j\}$ bzw. $\mathcal{K}_{\text{TK}} := \{0, 1, \dots, n\}$ gewählt, wobei der Zweig (i, j) den Knoten i mit dem Knoten j verbindet und von i nach j orientiert ist.

Die konstitutive Relation von \mathcal{N}_{TK} wird mit den Koeffizienten

$$C_{i0} := c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{in}, \quad i = 1, \dots, n \quad (12.88)$$

und

$$C_{ij} := -c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n; i > j \quad (12.89)$$

durch die Gleichungen

$$i_{ij} = C_{ij} u_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n; i > j \quad (12.90)$$

eindeutig festgelegt.

Die Koeffizienten C_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots, n; i > j$) werden als *Teilkapazitäten* bezeichnet.

Im Unterschied zu \mathcal{N}_{GK} ist das Netzwerk \mathcal{N}_{TK} ein kopplungsfreies kapazitives Netzwerk.

Die Netzwerke \mathcal{N}_{GK} und \mathcal{N}_{TK} haben in Bezug auf ihre Knotenmengen $\mathcal{K}_{\text{GK}} = \mathcal{K}_{\text{TK}}$ das gleiche Klemmenverhalten. Mit anderen Worten, sie sind aus Sicht der Netzwerktheorie gleichwertige Modelle zur Beschreibung des

Verhaltens eines Mehrleitersystems Λ mit Hilfe der Begriffe Spannung und Strom.

Der nachfolgende Beweis dieser Behauptung basiert auf Ergebnissen der Theorie des Klemmenverhaltens von Netzwerken [237].

Um die Gleichheit des Klemmenverhaltens der Netzwerke \mathcal{N}_{GK} und \mathcal{N}_{TK} zu zeigen, wird in beiden Netzwerken jeder der Knoten $1, \dots, n$ mit dem Knoten 0 durch eine unabhängige Stromquelle verbunden. Dabei soll der Zweig der Stromquelle, die den Knoten i mit dem Knoten 0 verbindet, mit (i, q) bezeichnet werden. Außerdem soll dieser Zweig in Richtung vom Knoten i zum Knoten 0 orientiert sein. Dementsprechend bezeichnet u_{iq} bzw. i_{iq} die Zweigspannung bzw. den Zweigstrom der Stromquelle des Zweigs (i, q) und i_{iq}^e den eingeprägten Strom dieser Quelle. Die so erweiterten Netzwerke sollen mit $\mathcal{N}_{\text{GK}}^{i^e}$ bzw. $\mathcal{N}_{\text{TK}}^{i^e}$ bezeichnet werden.

Mit der SI-Einheit s für die Zeit sei $T := \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$. Für jede Familie $(i_{iq}^e)_{i=1, \dots, n}$ von Zeitfunktionen $i_{iq}^e : T \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne $\mathcal{U}_{\text{GK}}^{i^e}$ bzw. $\mathcal{U}_{\text{TK}}^{i^e}$ die Menge aller der Familien $(u_{iq})_{i=1, \dots, n}$, die man aus der Menge der Lösungen des Netzwerks $\mathcal{N}_{\text{GK}}^{i^e}$ bzw. $\mathcal{N}_{\text{TK}}^{i^e}$ erhält.

Gilt für alle diese Familien $i^e = (i_{iq}^e)_{i=1, \dots, n}$ die Beziehung $\mathcal{U}_{\text{GK}}^{i^e} = \mathcal{U}_{\text{TK}}^{i^e}$, dann haben diese Netzwerke das gleiche Klemmenverhalten.

Diese Identität lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Knotenspannungsanalyse nachweisen. Wählt man den Knoten 0 als Bezugsknoten und die Zweigspannungen der unabhängigen Stromquellen als Knotenspannungen, so erhält man für das Netzwerk $\mathcal{N}_{\text{GK}}^{i^e}$ folgendes System

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_{1q} \\ \vdots \\ \dot{u}_{nq} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} i_{1q}^e \\ \vdots \\ i_{nq}^e \end{pmatrix} \quad (12.91)$$

von Knotenspannungsgleichungen.

Nach dem oben Gesagten ist die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems regulär. Ihre Inverse ist die Matrix der Potenzialkoeffizienten. Damit gilt

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_{1q} \\ \vdots \\ \dot{u}_{nq} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{1q}^e \\ \vdots \\ i_{nq}^e \end{pmatrix}. \quad (12.92)$$

Mit willkürlich gewählten Anfangswerten erhält man aus $\dot{u}_{1q}, \dots, \dot{u}_{nq}$ durch Integration zu jeder Familie $(i_{iq}^e)_{i=1, \dots, n}$ eingeprägter Ströme die zugeordnete Familie $(u_{iq})_{i=1, \dots, n}$ von Knotenspannungen. Die Menge aller dieser Familien ist die Menge $\mathcal{U}_{\text{GK}}^{i^e}$.

Wählt man für das Netzwerk $\mathcal{N}_{\text{TK}}^{i^e}$ wiederum den Knoten 0 als Bezugsknoten und die Zweigspannungen der unabhängigen Stromquellen als Knotenspannungen, so erhält man, wie eine elementare Rechnung zeigt, für das Netzwerk $\mathcal{N}_{\text{TK}}^{i^e}$ das gleiche System der Knotenspannungsgleichungen wie für das Netzwerk $\mathcal{N}_{\text{GK}}^{i^e}$. Daraus folgt die Gleichheit der Mengen $\mathcal{U}_{\text{GK}}^{i^e}$ und $\mathcal{U}_{\text{TK}}^{i^e}$.

Zur Berechnung der Knotenspannungen des Netzwerks $\mathcal{N}_{\text{TK}}^{i^e}$ kann man zwar die Anfangswerte der Knotenspannungen willkürlich festlegen, nicht aber die Anfangswerte aller Zweigspannungen. Diese Beobachtung folgt aus der Tatsache, dass die Anfangswerte für die Zweispannungen einer Lösung von $\mathcal{N}_{\text{TK}}^{i^e}$ den Kirchhoffschen Maschengleichungen genügen müssen. Aus der Struktur des Graphen dieses Netzwerks wiederum folgt, dass man genau die Anfangswerte der Zweigspannungen von $\mathcal{N}_{\text{TK}}^{i^e}$ willkürlich vorschreiben kann, die zu den Zweigen eines vollständigen Baums gehören. Offensichtlich korrespondiert das unseren Überlegungen zugrunde gelegte System der Knotenspannungen zu den Zweigen eines solchen Baums.

Der Graph von \mathcal{N}_{TK} ist ein vollständiges $(n+1)$ -Eck mit $n(n+1)/2$ Zweigen und enthält für $n = 2$ eine und für alle $n \geq 3$ stets mehrere Maschen (vgl. Abbildung 12.8). Diese Tatsache erschwert die Aufstellung von Zustandsgleichungen für die Analyse eines Netzwerks erheblich, wenn das zu analysierende Netzwerk Teilnetzwerke enthält, die für geeignete Werte von n isomorph zu Netzwerken vom Typ des Netzwerks \mathcal{N}_{TK} sind.

Ausgefilterte Algorithmen zur Aufstellung von Zustandsgleichungen zur Netzwerkanalyse transformieren deshalb kapazitive Unternetzwerke, die Maschen aus Kondensatoren enthalten, zunächst in maschenfreie Netzwerke mit gekoppelten Kapazitäten (vgl. [269, 250, 56]).

Bei der Entwicklung von Rechenprogrammen zur Analyse großer nichtlinearer Netzwerke verzichtet man seit über 30 Jahren auf die Aufstellung von Zustandsgleichungen, sondern verwendet Algorithmen zur numerischen Integration von Algebro-Differentialgleichungen. Dieser Schritt hat seinerzeit den Durchbruch bei der Entwicklung leistungsfähiger Programme zur Netzwerkanalyse gebracht. Es kann aber gezeigt werden, dass die numerischen Eigenschaften dieser Algorithmen sich verschlechtern, wenn Netzwerke analysiert werden sollen, die Maschen aus Kapazitäten (und Schnitte aus Induktivitäten) enthalten [56, 246, 102, 244].

Aus dieser Sicht hat sich die Verwendung von Netzwerkmodellen für Mehrleitersysteme auf der Basis des Begriffs der Teilkapazitäten in gewissem Sinn als Sackgasse erwiesen.

Um so merkwürdiger erscheint es, dass der Begriff der gekoppelten Kapazitäten von wenigen Ausnahmen abgesehen (s. z.B. [57]) bisher praktisch keinen Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden hat. Noch dazu, wo W. Cauer schon im Jahre 1932 gekoppelte Kapazitäten bei der Synthese von Reaktanz-Zwei- und Mehrtoren eingesetzt hat [45, 48] und gezeigt hat, wie man gekoppelte Kapazitäten durch eine Zusammenschaltung aus idealen Übertragern und „gewöhnlichen“ nichtgekoppelten Kapazitäten realisieren kann.

Mit Hilfe der Teilkapazitäten lassen sich die Ladungen Q_i der Elektroden von Λ in der Form

$$Q_i = \sum_{j=0, \dots, n; i > j} C_{ij} U_{ij} - \sum_{j=0, \dots, n; j > i} C_{ji} U_{ji} \quad (12.93)$$

durch die Elektrodenpaarspannungen $U_{ij} := \varphi_i - \varphi_j$ ausdrücken.

$Q_i = \oint_{A_i} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$ ist der von der Elektrode A_i ausgehende elektrische Fluss. Dementsprechend beschreiben die Summanden in der obigen Darstellung, wie sich dieser Fluss auf die übrigen Elektroden aufteilt (vgl. hierzu auch Abb. 139 in [261]).

12.5.2 Berechnung von Teilkapazitäten

Trotz des komplizierten Verlaufs der D-Feldlinien ist gerade in dem praktisch wichtigsten Fall der Leitungen die Berechnung der Teilkapazitäten sehr einfach. Man benutzt dabei den Satz von der ungestörten Überlagerung der Einzelpotenziale. In Abb. 12.9 seien drei parallel zur Erdoberfläche verlaufende Leitungen 1, 2, 3 dargestellt. Die Wirkung der Erdoberfläche kann dadurch berücksichtigt werden, dass Spiegelbilder $1', 2'$ und $3'$ mit entgegengesetzten gleichen Ladungen angebracht werden. Nach Abschnitt 10.2 kann man ferner die Leitungsdrähte durch Linienquellen in den Drahtachsen ersetzen. Dann gilt für das Potenzial in einem beliebigen Punkt P , wenn die Abstände dieses Punktes von den Drahtachsen in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise bezeichnet werden und Q_1, Q_2, Q_3 die Ladungen der Drähte bedeuten, nach Gl.(10.70)

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left(Q_1 \ln \frac{r'_1}{r_1} + Q_2 \ln \frac{r'_2}{r_2} + Q_3 \ln \frac{r'_3}{r_3} \right). \quad (12.94)$$

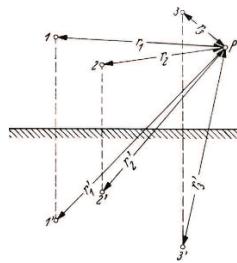


Abbildung 12.9. Berechnung der Teilkapazitäten von Leitungen

Der Nullpunkt des Potenzials ist dabei in die Erdoberfläche verlegt. Die Niveauflächen sind Zylinder, deren Spuren aber nur in der unmittelbaren Nähe der Drahtachsen Kreisform annehmen. Unter der Voraussetzung, dass die Drähte hinreichend dünn gegen ihre Abstände sind, erhält man daher das Potenzial eines Drahtes, wenn man den Punkt P bis auf einen Abstand an die Drahtachse heranrücken lässt, der gleich dem Radius des betreffenden Drahtes ist. Es ergeben sich so ebenso viele Gleichungen für die Drahtspannungen als Drähte vorhanden sind. Zur Berechnung der Teilkapazitäten hat man diese

Gleichungen nach den Ladungen aufzulösen und in die Form der Gl.(12.83) zu bringen.

Als Beispiel werde die Berechnung der Teilkapazitäten einer Doppelleitung betrachtet, Abb. 12.10. Die beiden Drähte sollen die Abstände h_1 und h_2 vom Erdboden haben, der gegenseitige Abstand sei mit a , der Abstand eines Drahtes von dem Spiegelbild des anderen sei mit b bezeichnet. Die Drahtdurchmesser seien d_1 und d_2 . Dann gilt nach Gl.(12.94)

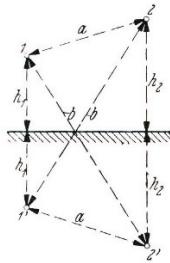


Abbildung 12.10. Doppelleitung

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \left(Q_1 \ln \frac{4h_1}{d_1} + Q_2 \ln \frac{b}{a} \right); \quad (12.95)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \left(Q_1 \ln \frac{b}{a} + Q_2 \ln \frac{4h_2}{d_2} \right). \quad (12.96)$$

Auflösen nach Q_1 und Q_2 ergibt

$$Q_1 \left(\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right) = 2\pi\epsilon_0 l \left(\varphi_1 \ln \frac{4h_2}{d_2} - \varphi_2 \ln \frac{b}{a} \right); \quad (12.97)$$

$$Q_2 \left(\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right) = 2\pi\epsilon_0 l \left(\varphi_2 \ln \frac{4h_1}{d_1} - \varphi_1 \ln \frac{b}{a} \right). \quad (12.98)$$

Wir bringen diese Gleichungen in die Form der Gl.(12.83) ($\varphi_3 = 0$ für die Erdoberfläche):

$$\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right] = \varphi_1 \left[\ln \frac{4h_2 a}{d_2 b} \right] + (\varphi_1 - \varphi_2) \ln \frac{b}{a}; \quad (12.99)$$

$$\frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 l} \left[\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right] = \varphi_2 \left[\ln \frac{4h_1 a}{d_1 b} \right] + (\varphi_2 - \varphi_1) \ln \frac{b}{a}. \quad (12.100)$$

Damit folgt für die Teilkapazitäten, die durch die Kapazitäten in Abb. 12.11 dargestellt sind,

$$C_{10} = 2\pi\varepsilon_0 l \frac{\ln \frac{4h_2 a}{d_2 b}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}, \quad (12.101)$$

$$C_{20} = 2\pi\varepsilon_0 l \frac{\ln \frac{4h_1 a}{d_1 b}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}, \quad (12.102)$$

$$C_{12} = 2\pi\varepsilon_0 l \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}. \quad (12.103)$$

Wenn die beiden Drähte in einer Horizontalebene liegen und gleiche Durch-

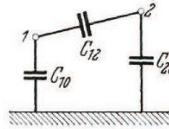


Abbildung 12.11. Teilkapazitäten einer Doppelleitung

messer haben, dann ist

$$h_1 = h_2 = h, \quad d_1 = d_2 = d, \quad b = \sqrt{4h^2 + a^2}, \quad (12.104)$$

und es wird

$$C_{10} = C_{20} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln \frac{4h}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}}; \quad (12.105)$$

$$C_{12} = 2\pi\varepsilon_0 l \frac{\ln \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}}{\ln \frac{4h}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2} \ln \frac{4h}{d} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}\right)^{-1}}. \quad (12.106)$$

Liegen die beiden Drähte in einer Vertikalebene, so ist in Gl.(12.101) bis (12.103) zu setzen

$$a = h_2 - h_1, \quad b = h_2 + h_1. \quad (12.107)$$

Die Teilkapazität liefert eine schärfere Formulierung des Begriffes der Kapazität. Bei den meisten Anwendungen sind mehr als zwei Leiter vorhanden; dann kann nicht ohne weiteres ein einziger Kapazitätswert für die betreffende Anordnung angegeben werden; definiert sind dann nur die Teilkapazitäten. In vielen Fällen kann man jedoch die Darstellung vereinfachen durch die Einführung der sogenannten *Betriebskapazität des Mehrleitersystems*. Man

versteht darunter die *Ersatzkapazität* für eine bestimmte Betriebsart. Z. B. ist die normale Betriebsart einer Doppelleitung die dass ein Draht als Hinleitung, der andere als Rückleitung des Stromes verwendet wird. In dem Schema der Teilkapazitäten, Abb. 12.7, liegen dann die beiden Kapazitäten C_{10} und C_{20} in Reihe miteinander zwischen den Klemmen der Stromquelle und parallel zu C_{12} . Die Leitung wirkt daher für die Stromquelle wo wie eine Kapazität mit dem Kapazitätswert (vgl. Abschnitt 12.4)

$$C_{b12} = C_{12} + \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10} + C_{20}}. \quad (12.108)$$

Das ist die Betriebskapazität der Doppelleitung für diese Betriebsart. Im Fall der beiden in gleicher Höhe liegenden Drähte ergibt sich daraus mit Hilfe der Formeln (12.105) und (12.106):

$$C_{b12} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{4h}{d} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{d} \right)^2} \right)^{-1}} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{2a}{d} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2h} \right)^2} \right)^{-1}}. \quad (12.109)$$

Diese Beziehung unterscheidet sich von der früher für die beiden frei im Raum befindlichen Drähte abgeleiteten Gl.(12.44) durch die Wurzel im Nenner. Diese Wurzel berücksichtigt also die auf der Erdoberfläche influenzierten Ladungen. Bei sehr großer Höhe über dem Erdboden wird sie 1. Wenn andererseits die Höhe h über dem Erdboden klein gegen den Drahtabstand a ist, dann wird die Betriebskapazität halb so groß wie die Kapazität einer Einfachleitung, Gl. (12.32). Bei den praktisch vorkommenden Freileitungen unterscheidet sich die Wurzel um weniger als ein Tausendstel von 1. Die Betriebskapazität kann daher fast immer nach der Formel (12.44) berechnet werden, um so eher als in Wirklichkeit immer andere Einflüsse vorhanden sind, die die Kapazität mindestens in gleicher Größenordnung verändern, z. B. Unebenheiten des Erdbodens, Bäume und dgl., ferner die Isolatoren und die Maste.

Eine andere Betriebsart der Doppelleitung stellt der sogenannte Einfachbetrieb der Telegraphie dar, bei dem ein Draht als Hinleitung und die Erde als Rückleitung des Stromes benutzt werden. Die Betriebskapazität ist dann die Ersatzkapazität zwischen Draht und Erde. Ihr Wert hängt davon ab, ob der andere Leiter isoliert oder geerdet ist. Im ersten Fall ergibt sich keine Beeinflussung des Potenzialfeldes durch den anderen Leiter, abgesehen von der engsten Umgebung dieses Leiters (vgl. Abb. 10.17); die Betriebskapazität ist daher gleich der Kapazität der Einfachleitung gegen Erde;

$$C_{b10} = C_{10} + \frac{C_{12}C_{20}}{C_{12} + C_{20}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{4h_1}{d_1}}. \quad (12.110)$$

Im zweiten Fall dagegen liegen die Teilkapazitäten C_{10} und C_{12} einander parallel; die Betriebskapazität ist

$$C_{b10} = C_{10} + C_{12} = 2\pi\epsilon_0 l \frac{\ln \frac{4h_2}{d_2}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}. \quad (12.111)$$

Sie wird um so genauer gleich der Kapazität einer Einfachleitung, je mehr sich das Verhältnis b/a dem Wert 1 nähert, je weiter also der zweite Leiter entfernt ist. Im übrigen vergrößert die Anwesenheit des zweiten Leiters die Kapazität.

Zu beachten ist, dass die Teilkapazitäten immer von der Gesamtanordnung aller Elektroden mitbestimmt sind. *Die Teilkapazitäten zwischen zwei Leitern ändern sich also, wenn noch weitere Leiter in dem betreffenden Raum hinzugefügt werden.*

Von besonderer Bedeutung sind Teilkapazitäten bei der Analyse der gegenseitigen Beeinflussung von Leitungen auf integrierten Schaltungen, die bei der zunehmenden Verringerung der Abstände moderner Technologien und den immer höheren Taktraten eine zentrale Rolle spielen; vgl. [92] und Abschnitt 35. Eine weitere Anwendung finden die Teilkapazitäten bei der Berechnung der Beeinflussung von Fernsprech- oder Datenleitungen durch parallellaufende Starkstromleitungen. Das elektrische Feld der Starkstromleitung erzeugt Potenzialdifferenzen zwischen den Drähten der Signalleitung, die zwar klein sind gegen die Spannungen in der Starkstromleitung, aber doch merkliche Störungen in den Fernsprechleitungen wegen der dort verwendeten niedrigen Betriebsspannungen hervorrufen können. Das Schema der Teilkapazitäten für die Beeinflussung zwischen einer einzelnen Starkstromleitung (Fahrdräht einer elektrischen Bahn) und einer eindrähtigen Fernsprechleitung ist in Abb. 12.12 dargestellt. Bezeichnet man den horizontalen Abstand zwischen den beiden Leitungen mit c , so ist nach Abb. 12.10

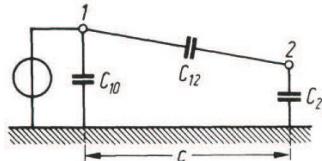


Abbildung 12.12. Kapazitive Beeinflussung einer Fernsprechleitung durch eine Starkstromleitung

$$a = \sqrt{c^2 + (h_1 - h_2)^2}, \quad (12.112)$$

$$b = \sqrt{c^2 + (h_1 + h_2)^2}, \quad (12.113)$$

und die Kopplungskapazität C_{12} ist aus Gl. (12.106) zu berechnen. Bei großem Abstand c der Leitungen gegen die Höhen ergibt sich so die Näherungsformel

$$C_{12} = 2\pi\epsilon_0 l \frac{2h_1 h_2}{c^2 \ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2}}. \quad (12.114)$$

Die Kopplungskapazität nimmt also umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung zwischen den beiden Leitungen ab, so dass die Vergrößerung des Abstandes zwischen den Leitungen ein wirksames Mittel zur Verminderung der Kopplung ist.

α	5	10	20	50	100
$C_{12}/l \text{ (pF/km)}$	124	31	7,8	1,24	0,31

Tabelle 12.7. Kopplungskapazität C_{12}/l als Funktion von α

Zahlenbeispiel: Nennt man das Verhältnis des Leitungsabstandes zur mittleren Höhe der Leitungen α mit

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{h_1 h_2}}, \quad (12.115)$$

so ergeben sich für ein Verhältnis von

$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{h_2}{d_2} = 100 \quad (12.116)$$

die in Tabelle 12.7 aufgeführten Werte der Kopplungskapazität geteilt durch die Länge l ; für

$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{h_2}{d_2} = 500 \quad (12.117)$$

ergeben sich aus α die in Tabelle 12.8 aufgeführten Werte für C_{12}/l . Mit Hilfe

α	5	10	20	50	100
$C_{12}/l \text{ (pF/km)}$	78	19,5	4,9	0,78	0,195

Tabelle 12.8. Kopplungskapazität C_{12}/l als Funktion von α

der Teilkapazitäten werden die Berechnungen über die gegenseitigen Beeinflus- sungen von Leitungen zurückgeführt auf die Berechnung von linearen Netzen. Die Abb. 12.13 veranschaulicht die Teilkapazitäten zwischen einer Drehstromleitung und einer Fernsprechleitung, die grundsätzlich auf dem gleichen Weg wie in dem eben betrachteten Beispiel berechnet werden können.

Als weiteres Beispiel für die Berechnung von Teilkapazitäten werde ein *symmetrisches Dreileiterkabel* betrachtet, Abb. 12.14. Die drei zylindrischen Leiter 1, 2, 3 befinden sich im Innern eines zylindrischen Metallmantels. Für die angenäherte Berechnung der Potenzialverteilung bildet man zunächst die drei Leiter durch Linienquellen in ihren Achsen ab. Bezeichnet man deren Ladungen mit Q_1, Q_2, Q_3 , so kann die Wirkung des Metallmantels auf die Potenzialverteilung durch drei Linienquellen 1', 2', 3' mit den Ladungen $-Q_1, -Q_2, -Q_3$ berücksichtigt werden. Für die Abstände b der Spiegelbilder gilt nach dem Gesetz der reziproken Radien Gl. (11.37)

$$b = \frac{D^2}{4a}. \quad (12.118)$$

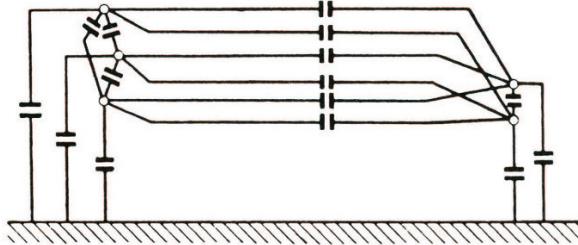


Abbildung 12.13. Teilkapazitäten zwischen Drehstromleitungen und Einphasenleitung

Dadurch wird die Innenfläche des Mantels mit dem Durchmesser D eine Niveaumantelfläche. Die die Linienquellen umgebenden Niveaumantelflächen sind ebenfalls Zylinder, deren Grundflächen aber um so mehr von der Kreisform abweichen, je mehr sie sich dem Mantel nähern. Bei nicht zu großem Leiterdurchmesser ergibt sich angenähert Kreisform. Dann gilt für die Potenziale der drei Leiter unter Berücksichtigung, dass die mittleren Abstände der Leiteroberflächen von den Linienquellen $d/2, b - a, a\sqrt{3}$ und $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ sind,

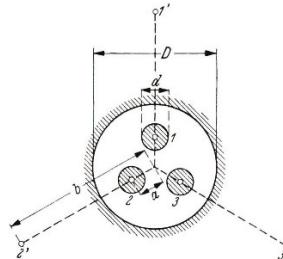


Abbildung 12.14. Berechnung der Teilkapazitäten eines Drehstromkabels

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \begin{pmatrix} \ln 2\frac{b-a}{d} & \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} & \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \\ \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} & \ln 2\frac{b-a}{d} & \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \\ \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} & \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} & \ln 2\frac{b-a}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}. \quad (12.119)$$

Das Potenzial der Kabelmantelfläche wird

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} (Q_1 + Q_2 + Q_3) \ln \frac{D}{2a} \quad (12.120)$$

mit dem Abstandsverhältnis von den Linienquellen:

$$\frac{b - \frac{1}{2}D}{\frac{1}{2}D - a} = \frac{D}{2a}. \quad (12.121)$$

Aus Symmetriegründen sind die drei Teilkapazitäten zwischen den drei Leitern einander gleich, ebenso die drei Teilkapazitäten zwischen den Leitern und dem Mantel (Erdkapazitäten), Abb. 12.15. Es genügt daher, einen der drei Leiter zu betrachten. Die Spannung U_1 zwischen dem Leiter 1 und dem Mantel ist

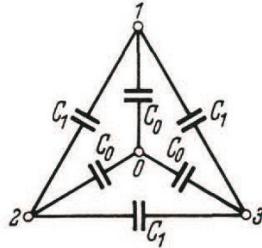


Abbildung 12.15. Teilkapazitäten eines Drehstromkabels

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left(Q_1 \ln \frac{4a(b-a)}{Dd} + (Q_2 + Q_3) \ln \frac{2a\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{aD\sqrt{3}} \right). \quad (12.122)$$

Andererseits folgt aus dem Ersatzbild mit den drei Spannungen U_1 , U_2 und U_3 gegen den Mantel

$$Q_1 = U_1 C_0 + (U_1 - U_2) C_1 + (U_1 - U_3) C_1, \quad (12.123)$$

$$Q_2 = U_2 C_0 + (U_2 - U_1) C_1 + (U_2 - U_3) C_1, \quad (12.124)$$

$$Q_3 = U_3 C_0 + (U_3 - U_1) C_1 + (U_3 - U_2) C_1. \quad (12.125)$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach U_1 erhält man

$$U_1 = \frac{C_0 + C_1}{C_0(C_0 + 3C_1)} Q_1 + \frac{C_1}{C_0(C_0 + 3C_1)} (Q_2 + Q_3). \quad (12.126)$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von Q_1 , Q_2 und Q_3 mit Gl. (12.122) ergibt sich

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{16a(b^3 - a^3)}{3D^3 d}}, \quad (12.127)$$

$$C_1 = \frac{\frac{2\pi\epsilon l}{2\sqrt{3}a(b-a)}}{3 \ln \frac{2\sqrt{3}a(b-a)}{d\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}} - \frac{1}{3} C_0. \quad (12.128)$$

Für den Grenzfall, dass sich die drei Leitungen frei im Raum befinden, ergibt sich hieraus ($D = \infty$)

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{2\pi\epsilon l}{3 \ln \frac{2a\sqrt{3}}{d}}. \quad (12.129)$$

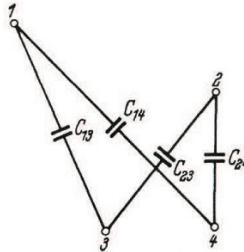


Abbildung 12.16. Bedingung für die kapazitive Entkopplung zweier Leitungen

In den Kabeln der Fernsprechtechnik ist häufig eine große Zahl von Leitungen untergebracht. Die Teilkapazitäten zwischen den einzelnen Leitungen haben hier eine elektrische Kopplung zwischen den mit den Leitungen gebildeten Stromkreisen („Nebensprechen“) zur Folge, die natürlich unerwünscht ist. Eine Bedingung dafür, dass die Kopplung zwischen zwei Leitungen verschwindet, lässt sich allgemein folgendermaßen formulieren. Es seien in Abb. 12.16 1 und 2 die beiden Adern der einen Leitung, 3 und 4 die beiden Adern einer beliebigen anderen Leitung. Wenn dann

$$C_{13} = C_{23} \quad \text{und} \quad C_{14} = C_{24}, \quad (12.130)$$

dann halbieren die Leiter 3 und 4 das Potenzialgefälle zwischen 1 und 2, d. h. sie haben gegeneinander keine Spannung. Man vermeidet als die Kopplung, wenn die Teilkapazitäten von jeder Ader zu den beiden Adern einer jeden anderen Leitung einander gleichgemacht werden. Dies wird mit einer gewissen Annäherung durch das sogenannte *Verdrillen der Leitungen* erreicht, wobei die beiden Adern einer jeden Leitung schraubenlinienförmig umeinander herumgeführt werden.

13

Energie in der Elektrostatik

Bringt man einen kleinen geladenen Körper, z.B. eine kleine Metallkugel, die mit der Ladung Q versehen ist, in ein elektrostatisches Feld, so wird auf diesen geladenen Körper eine mechanische Kraft in der Richtung der E-Feldlinien ausgeübt. Die Kraft ist bestimmt durch das E-Feld, das *vor dem Einbringen* des geladenen Körpers in das elektrische Feld an der betreffenden Stelle vorhanden war; sie hat den durch Gl.(7.1) gegebenen Wert. Voraussetzungen für die Gültigkeit dieser Beziehung ist, dass die Abmessungen des geladenen Körpers so klein sind, dass das ursprüngliche Feld in seiner Umgebung als homogen angesehen werden kann. Bewegt man den geladenen Körper, so bleibt die Kraft durch das gleiche Gesetz bestimmt. Man erhält dann eine mechanische Arbeit, die positiv oder negativ sein kann, je nach der Richtung der Bewegung gegenüber der Richtung der E-Feldlinien. Die Arbeit, die beim Durchlaufen eines kleinen Längenelementes ds des Weges auf die geladene Kugel übertragen wird, ergibt sich, wenn die in die Wegrichtung fallende Komponente F_s der Kraft \mathbf{F} , Abb. 13.1, mit der Länge des Wegelementes multipliziert wird. Unter Wegrichtung ist dabei die Richtung der Bewegung des geladenen Körpers zu verstehen. Die gesamte Arbeit, die auf einem beliebigen Weg von a nach b erhalten wird, ist

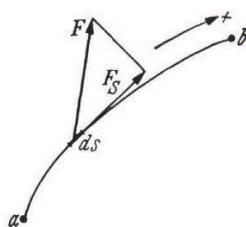


Abbildung 13.1. Zur Berechnung der Arbeit beim Bewegen von Elektrizitätsmen gen

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (13.1)$$

oder mit Gl.(7.1)

$$W = Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (13.2)$$

Führt man schließlich noch Gl.(6.16) ein, so ergibt sich

$$W = Q(\varphi_a - \varphi_b). \quad (13.3)$$

An dieser Stelle bietet es sich an, für die Potenzialdifferenz $(\varphi_a - \varphi_b)$ den Begriff *elektrische Spannung* einzuführen, die nach dem obenstehenden Ausführungen proportional zur Arbeit ist. Man definiert (vgl. Gl. (6.16))

$$U_{ab} := \varphi_a - \varphi_b. \quad (13.4)$$

Der Index ab wird üblicherweise weggelassen, wenn klar ist, welche Potenzialdifferenz gemeint ist. Die Arbeit, die die elektrischen Feldkräfte beim Transport eines geladenen Körpers von einem Punkt a nach einem Punkt b des Feldes leisten, hängt nur von der Potenzialdifferenz oder Spannung zwischen den beiden Punkten und von der Ladung des Körpers ab; sie ist unabhängig von dem Weg und wird positiv, wenn eine positive Ladung von höherem zu niedrigerem Potenzial oder eine negative Ladung von niedrigerem zu höherem Potenzial gebracht wird, während bei umgekehrter Bewegungsrichtung eine mechanische Arbeit aufgewendet werden muss.

Diese Überlegungen können genutzt werden, um den Energieinhalt eines elektrischen Feldes zu bestimmen. Dazu werden nacheinander Punktladungen aus dem Unendlichen herangeführt und die jeweils notwendige Arbeit als Feldenergie interpretiert. Bevor wir entsprechende qualitative Rechnungen ausführen, überlegen wir auf die gleiche Art und Weise, welche Energie das elektrostatische Feld eines Kondensators besitzt.

Wenn ein Kondensator mit der Kapazität C auf die Spannung U aufgeladen wird, so nimmt er nach Gl. (12.1) eine Ladung

$$Q = CU \quad (13.5)$$

auf. Die Stromquelle muss also während der Aufladung eine bestimmte elektrische Arbeit liefern, die auf den Kondensator übergeht, wenn sonst keine Energieverluste vorhanden sind. Da nun ein endlicher Betrag von Energie bei endlichen Kräften nur in endlichen Zeiten übertragen werden kann, so erfordert der Vorgang der Aufladung, also der Vorgang der Herstellung eines elektrischen Feldes, Zeit. Bezeichnet man die Spannung in irgendeinem Zeitpunkt während des Aufladungsvorganges mit u , so ist die entsprechende Ladung in diesem Zeitpunkt („Augenblickswert“)

$$q = Cu. \quad (13.6)$$

Der positiven Elektrode fließen während der Aufladung positive Ladungen zu; von der negativen Elektrode fließen positive Ladungen ab. Es besteht also in dem betrachteten Zeitpunkt eine bestimmte Stromstärke i . Der Strom vermehrt die Ladung der positiven Elektrode in einem Zeitelement dt um den Betrag

$$dq = idt. \quad (13.7)$$

Dadurch wächst die Spannung um einen Betrag du , und es gilt

$$dq = Cdu. \quad (13.8)$$

Daraus folgt

$$idt = Cdu. \quad (13.9)$$

Die elektrische Arbeit, die der Kondensator während des Zeitelements dt aufnimmt, ist

$$dW = u i dt = C u du. \quad (13.10)$$

War der Kondensator zunächst umgeladen, und wächst seine Spannung auf irgendeinen Wert U , so ist die gesamte vom Kondensator aufgenommene elektrische Energie $\int_0^U C u du$, also

$$W = \frac{1}{2} CU^2. \quad (13.11)$$

Diese Energie ist im Kondensator gespeichert wie die potentielle Energie in einer gespannten Feder. Man kann sie bei der Entladung des Kondensators wiedergewinnen. Die Energiebeträge, die auf diese Weise gespeichert werden können, sind freilich verhältnismäßig gering. Wird z.B. ein Kondensator mit der Kapazität $C = 2 \mu F$ auf eine Spannung von 1000 Volt aufgeladen, so enthält er die Energie

$$W = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \cdot FV^2 = 1 Ws. \quad (13.12)$$

Als Sitz der Energie kann das elektrische Feld selbst angesehen werden. Wir denken uns durch zwei benachbarte Niveauplatten mit dem Abstand Δn und durch D-Feldlinien ein Prisma mit den Grundflächen ΔA im elektrischen Feld abgegrenzt, Abb. 16.5. An dem Feldbild ändert sich nichts, wenn man die Grundflächen durch dünne Metallfolien mit den entsprechenden Potenzialen ersetzt. Dann entsteht ein kleiner Plattenkondensator mit der Kapazität

$$C = \varepsilon \frac{\Delta A}{\Delta n}, \quad (13.13)$$

der auf die Spannung $\Delta\varphi$ aufgeladen ist. Die in ihm gespeicherte Energie hat den Betrag

$$\Delta W = \frac{1}{2} C(\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 \Delta V, \quad (13.14)$$

wobei das Volumen des Prismas $\Delta n \Delta A = \Delta V$ gesetzt ist. Daraus geht hervor, dass in dem elektrischen Feld Energie gespeichert ist mit der Dichte

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2} \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{D}\|. \quad (13.15)$$

Die Energiedichte ist im allgemeinen ungleichmäßig über das Feld verteilt, wobei die Richtung der elektrischen Größen berücksichtigt werden kann. Die größte Energie sitzt dort, wo die Feldstärke am größten ist. Die insgesamt im elektrischen Feld gespeicherte Energie kann mit einer Integration von $(1/2)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{r})$ ermittelt werden

$$W = \frac{1}{2} \iint \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV, \quad (13.16)$$

wobei über das Volumen V integriert wird, in dem sich das Feld befindet. Die Gültigkeit dieser Formel zumindest in einem Spezialfall kann man dadurch begründen, dass man N Punktladungen q_i aus dem Unendlichen an eine Ort \mathbf{r}_i bringt und die dabei aufzubringende Arbeit aufsummieren. Im Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ erhält man (siehe auch Behnke, Muschik und Päsler [23])

$$W = \frac{1}{2} \iint \varrho \phi dV. \quad (13.17)$$

Mit Hilfe der Poisson-PDG1. und einigen Umformungen lassen sich die Darstellungen der Energie Gl. (13.16) und (13.17) ineinander überführen.

Man muss diese Energie unbedingt von der Wechselwirkungsenergie zwischen zwei elektrischen Feldern unterscheiden, obwohl sich die beiden Ausdrücke zahlenmäßig nur um den Faktor 1/2 unterscheiden. Man erhält

$$W^{ww} = \frac{1}{2} \iint \varrho_{\text{äuss}} \phi dV, \quad (13.18)$$

wobei $\varrho_{\text{äuss}}$ das Potenzial des äußeren und u. U. vorgegebenen elektrischen Feldes ist. Ein schwaches äußeres elektrisches Feld kann mit Hilfe einer Multipolentwicklung dargestellt werden (vgl. 11.5); es ergibt sich folgende Näherungsformel für die Wechselwirkungsenergie

$$\begin{aligned} W^{ww} &= \frac{1}{2} \iint \varrho_{\text{äuss}} \phi dV \approx \\ &\approx Q\varphi(\mathbf{0}) - \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{0}) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(\mathbf{0}), \end{aligned} \quad (13.19)$$

wobei Q das Monopol-, P_1 das Dipolmoment und die Q_{ij} die Quadrupol-Momente sind. Während das E-Feld mit dem Dipolmoment wechselwirkt, zeigt die Formel für W^{ww} , dass die Quadrupol-Momente mit der Ableitung des E-Feldes wechselwirken. Auf diesen Eigenschaften kann man Messverfahren für diese Momente aufbauen.

Mechanische Kräfte in der Elektrostatik

14.1 Kräfte an Leiteroberflächen

In Abschnitt 6 wurden die Coulombschen Kräfte als Ausgangspunkt für die Einführung des elektrischen Feldes gewählt. Die auf eine Punktladung im elektrischen Feld ausgeübte Kraft ist nach Gl. (6.4)

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}. \quad (14.1)$$

Dabei bedeutet \mathbf{E} das ursprüngliche E-Feld am Orte der Punktladung. Die Kraft, die zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand a auftritt, lässt sich danach in folgender Weise berechnen. Wäre nur die Punktladung Q_1 vorhanden, so würde sich das E-Feld am Ort der anderen Punktladung nach Gl. (7.2) betragsmäßig ergeben zu

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon a^2}. \quad (14.2)$$

Für die Kraft gilt daher nach Coulomb (1785)

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon a^2}; \quad (14.3)$$

diese Coulombsche Kraft sucht Ladungen gleichen Vorzeichens voneinander zu entfernen, Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens einander zu nähern. Von diesem durch Coulomb experimentell entdeckten Gesetz hat die Elektrizitätslehre ihren Ausgangspunkt genommen; ihre geschichtliche Entwicklung ging gegenüber dem hier Dargestellten den umgekehrten Weg. Das Coulombsche Gesetz gab die Möglichkeit, Elektrizitätsmengen zu messen; damit konnte man auf Grund der Gl.(6.16) das E-Feld und Spannung definieren.

Die Formel (6.4) gilt streng nur für Punktladungen; bei räumlich ausgedehnten Elektroden ist sie näherungsweise gültig, wenn die Elektrodenabmessungen klein gegen den Abstand sind.

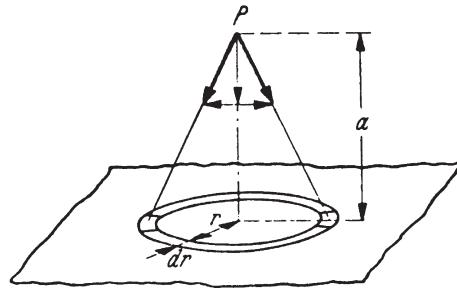


Abbildung 14.1. Berechnung der Kräfte in einem Plattenkondensator

Die zwischen Elektroden beliebiger Größe und beliebigen Abstandes wirkenden Feldkräfte können berechnet werden, wenn man sich die Ladungen so fein unterteilt denkt, dass sie als Punktladungen aufgefasst werden können. Die auf die Elektroden wirkenden Kräfte sind die Resultierenden aller an den Punktladungen angreifenden Kräfte. Als Beispiel sollen die Kräfte zwischen zwei parallelen Platten sehr großer Ausdehnung mit dem Abstand a berechnet werden. Bezeichnet man das überall zwischen den Platten konstante D-Feld \mathbf{D} , so hat ein Flächenelement¹ ΔA der einen Platte die Ladung $Q_A = \|\mathbf{D}\| \Delta A$. Um die auf das Flächenelement ausgeübte Kraft zu berechnen, fällen wir von diesem Flächenelement ein Lot auf die andere Platte, Abb. 14.1, und zerlegen deren Oberfläche in schmale Kreisringe, die den Fußpunkt dieses Lotes konzentrisch umgeben. Die auf die Ladung Q_A im Punkt P von einem Flächenelement eines solchen Kreisringes mit der Ladung ΔQ ausgeübte Anziehungskraft ist nach dem Coulombschen Gesetz

$$\frac{Q_A \Delta Q}{4\pi\epsilon(r^2 + a^2)} = \frac{\|\mathbf{D}\| \Delta A \Delta Q}{4\pi\epsilon(r^2 + a^2)}. \quad (14.4)$$

Die horizontalen Komponenten der Kräfte, die von je zwei einander gegenüberliegenden Flächenelementen des Kreisringes herrühren, heben sich auf, während sich die vertikalen Komponenten addieren. Die vertikale Komponente ist $a/\sqrt{r^2 + a^2}$ mal so groß wie die Kraft selbst; die gesamte Ladung eines Kreisringes mit der Fläche $2r\pi dr$ ruft daher im Punkt P eine Kraft hervor vom Betrag

$$\frac{\|\mathbf{D}\| \Delta A \cdot \|\mathbf{D}\| 2r\pi dr}{4\pi\epsilon(r^2 + a^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}. \quad (14.5)$$

Die von der Gesamtladung der unteren Platte auf das Flächenelement ΔA der anderen Platte ausgeübte Kraft wird durch Integration über alle Kreisringe erhalten zu

¹ Im folgenden verwenden wir Differenzengrößen, so dass die entsprechenden Beziehungen teilweise nur näherungsweise gelten. Dennoch verzichten wir darauf, statt des Gleichungszeichens = ein Näherungszeichen \approx zu verwenden.

$$\frac{a\|\mathbf{D}\|^2\Delta A}{2\varepsilon} \int_0^{r_0} \frac{rdr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{a\|\mathbf{D}\|^2\Delta A}{2\varepsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + a^2}} \right). \quad (14.6)$$

Lassen wir nun den Radius r_0 sehr groß werden gegen den Plattenabstand a , so verschwindet das zweite Glied in der Klammer gegen das erste; der Plattenabstand a fällt heraus, und die gesamte Zugkraft, die auf das Flächenelement ΔA einwirkt, wird

$$\frac{\|\mathbf{D}\|^2\Delta A}{2\varepsilon}. \quad (14.7)$$

Die auf die Platte wirkende Zugspannung ergibt sich durch Division mit ΔA ; sie beträgt also

$$\sigma_z = \frac{\|\mathbf{D}\|^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}\|\mathbf{E}\|\|\mathbf{D}\| = \frac{1}{2}\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2. \quad (14.8)$$

14.2 Mechanische Spannungen im elektrischen Feld

Die Gl.(14.8) gilt auch bei beliebig gekrümmten Leiteroberflächen, da das elektrische Feld in hinreichend kleinen Ausschnitten an der Elektrodenoberfläche als homogen angenommen werden kann. Die an der Elektrodenoberfläche als homogen angreifenden Zugspannungen haben also allgemein den durch Gl.(14.8) gegebenen Betrag auch bei beliebiger Krümmung der Elektrodenoberfläche. Die Kräfte greifen senkrecht an der Elektrodenoberfläche an. Man kann sie dadurch veranschaulichen, dass man sagt, es bestehe längs der D-Feldlinien eine Zugspannung gemäß Gl.(14.8) (Faraday, Maxwell), ähnlich wie in einem Bündel gespannter Gummifäden.

Daraus geht nicht hervor, dass tatsächlich derartige Spannungen im leeren Raum vorhanden sind. Diese Vorstellung der Nahwirkungstheorie, die insbesondere durch die mechanischen Spannungen im Nichtleiter gekennzeichnet ist, erlaubt jedoch eine anschauliche Darstellung der Vorgänge des elektrischen Feldes, die bei den für die Elektrotechnik in Betracht kommenden Erscheinungen nicht in Widerspruch mit der Erfahrung steht. Nach heutigem Wissen ist jedoch die Anschaugung zutreffender, dass die Elektroden mittels des elektrischen Feldes durch den leeren Raum aufeinander einwirken.

Die längs der D-Feldlinien wirkenden Zugspannungen haben einen Querdruck zur Folge, mit dem sich die D-Feldlinien scheinbar abzustoßen suchen; er kann auf folgende Weise berechnet werden. Durch zwei benachbarte Niveauflächen und durch Verschiebungslinien lässt sich an jeder Stelle des elektrischen Feldes ein kleiner Kegelstumpf nach Abb. 14.2 abgrenzen, wobei die Grundflächen durch die Niveauflächen gebildet werden. Wir denken uns diesen Kegelstumpf zu einem Kegel vervollständigt. Das E-Feld innerhalb des Kegelstumpfes ist eine Funktion des Abstandes x von der Spitze des Kegels; für den Radius r , der ebenso wie die Höhe Δx des Kegelstumpfes im Grenzfall verschwindend klein sein soll, gilt $r = x \tan \alpha$. Bezeichnet man die E-Feldstärke

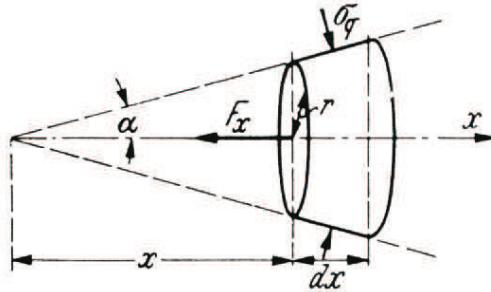


Abbildung 14.2. Berechnung des Querdruckes der D-Feldlinien

auf der linken Seitenfläche mit $\|\mathbf{E}\|$, so hat sie auf der rechten entsprechend der Zunahme der Fläche den Wert

$$\|\mathbf{E}\| \frac{\frac{r^2 \pi}{\left(r \frac{x+\Delta x}{x}\right)^2 \pi}}{\pi} = \|\mathbf{E}\| \left(1 - 2 \frac{\Delta x}{x}\right). \quad (14.9)$$

Die auf die linke Seitenfläche wirkende Zugkraft ist

$$\pi \frac{1}{2} \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 x^2 \tan^2 x, \quad (14.10)$$

die auf die rechte Seitenfläche wirkende Kraft ist

$$\pi \frac{1}{2} \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 \left(1 - 4 \frac{\Delta x}{x}\right) (x + \Delta x)^2 \tan^2 x, \quad (14.11)$$

der Kegelstumpf wird daher mit einer Kraft

$$F_x = \pi \frac{1}{2} \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 \frac{\Delta x}{x} x^2 \tan^2 x \quad (14.12)$$

nach links gezogen. Soll ein Gleichgewichtszustand bestehen, so muss diese Kraft durch einen auf den Kegelmantel wirkenden Flächendruck σ_q aufgehoben werden. Es ist also zu setzen

$$F_x = 2r\pi \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \sigma_q \sin \alpha; \quad (14.13)$$

daraus folgt die Dichte

$$\sigma_q = \frac{1}{2} \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{D}\|. \quad (14.14)$$

Dieser Querdruck ist also ebenso groß wie der Längszug σ_z .

Obwohl die von elektrischen Feldern hervorgerufenen mechanischen Spannungen lange Zeit nur bei makroskopischen Betrachtungen eine Rolle gespielt haben, werden solche Kräfte auch bei Mikrosystemen untersucht, wobei man den allgemeinen Maxwellschen Spannungstensor verwendet. Einzelheiten dazu findet man z. B. Hui, Yen, Tien [127].

14.3 Kräfte an Grenzflächen zwischen Nichtleitern

Auch an den Grenzflächen zwischen zwei *Nichtleitern* entstehen Kräfte. In Abb. 14.3 ist ein Flächenelement der beliebig geformten Grenzfläche mit ΔA bezeichnet; sie trenne einen Raum 1 mit der Dielektrizitätskonstante ε_1 von einem Raum 2 mit ε_2 . Das elektrische Feld greife in dem ersten Raum unter dem Winkel α gegen die Senkrechte zu ΔA an diesem Flächenelement an.

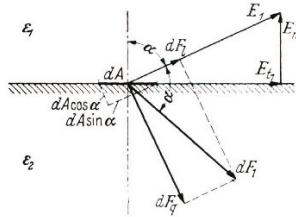


Abbildung 14.3. Kräfte an Grenzflächen

Auf das Flächenelement wirken nun aus dem Raum 1 zwei Kräfte ein, eine Kraft $d\mathbf{F}_l$, die durch die Zugspannung längs der Feldlinien bedingt ist und den Betrag hat

$$\Delta F_l = \frac{1}{2} E_1 D_1 \Delta A \cos \alpha = \sigma_1 \Delta A \cos \alpha, \quad (14.15)$$

und eine zweite $d\mathbf{F}_q$, die senkrecht zu den Feldlinien steht und durch den Querdruck der Feldlinien hervorgerufen wird; sie hat den Betrag

$$\Delta F_q = \sigma_1 \Delta A \sin \alpha. \quad (14.16)$$

Beide Kräfte setzen sich zu einer Resultierenden $\Delta\mathbf{F}_1$ zusammen. Die Tangentialkomponente dieser Resultierenden ist nach rechts gerichtet und beträgt

$$\Delta F_{t1} = 2\sigma_1 \Delta A \cos \alpha \sin \alpha = \sigma_1 \Delta A \sin 2\alpha. \quad (14.17)$$

Die nach oben zeigende Normalkomponente beträgt

$$\Delta F_{n1} = \sigma_1 \Delta A (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sigma_1 \Delta A \cos 2\alpha. \quad (14.18)$$

Hieraus geht hervor, dass die Gesamtkraft $\Delta\mathbf{F}_1$ den Winkel 2α mit der Normalen zur Grenzfläche bildet und den Betrag $\sigma_1 \Delta A$ hat. Man kann sich also die an der Grenzfläche von der einen Seite her angreifenden Kräfte hervorgerufen denken durch eine Flächenkraft („Maxwellsche Spannung“ \mathbf{T}_1) vom Betrag

$$T_1 = \frac{1}{2} E_1 D_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 E_1^2, \quad (14.19)$$

deren Winkel mit der Normalen durch die Richtung von \mathbf{E}_1 halbiert wird.

Führt man die Normal- und Tangentialkomponenten von \mathbf{E}_1 und \mathbf{D}_1 ein, so folgt aus den Gl. (14.17) und (14.18)

$$\Delta F_{t1} = \varepsilon E_{n1} E_{t1} \Delta A, \quad (14.20)$$

$$\Delta F_{n1} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 (E_{n1}^2 - E_{t1}^2) \Delta A. \quad (14.21)$$

Ganz entsprechende Kräfte wirken nun auch von der anderen Seite der Grenzfläche her. Dort ist wegen der Stetigkeit des D-Feldes

$$E_{n2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1} \quad \text{und} \quad E_{t2} = E_{t1}. \quad (14.22)$$

Die Tangentialkraft ist dort nach links gerichtet und beträgt

$$\Delta F_{t2} = \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1} E_{t1} \Delta A = \varepsilon_1 E_{n1} E_{t1} \Delta A. \quad (14.23)$$

Sie ist also genau entgegengesetzt gleich ΔF_{t1} , so dass sich die beiden Kräfte aufheben. *Die gesamte auf die Grenzfläche wirkende Kraft greift immer senkrecht zur Grenzfläche an*, gleichgültig wie groß der Einfallsinkel der elektrischen Kraftlinien ist.

Die aus dem Raum 2 herrührende nach diesem Raum hin gerichtete Normalkomponente der Kraft hat den Betrag

$$\Delta F_{n2} = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \left(\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 E_{n1}^2 - E_{t1}^2 \right) \Delta A. \quad (14.24)$$

Insgesamt ergibt sich also an der Grenzfläche eine nach dem Raum 1 hin gerichtete Zugspannung vom Betrag

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{n1} - \Delta F_{n2}}{\Delta A}, \quad (14.25)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(E_{t1}^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1}^2 \right). \quad (14.26)$$

Sonderfälle:

1. Feldlinien senkrecht zur Grenzfläche:

$$E_{t1} = 0, \quad \mathbf{E}_{n1} = \mathbf{E}_1; \quad (14.27)$$

es ergibt sich

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \|\mathbf{E}_1\|^2. \quad (14.28)$$

Ist ε_2 groß gegen ε_1 , so gilt angenähert

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{E}_1\|^2. \quad (14.29)$$

wie an einer Leiteroberfläche.

2. Feldlinien parallel zur Grenzfläche:

$$E_{n1} = 0, \quad \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_1; \quad (14.30)$$

es ergibt sich

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\|\mathbf{E}_1\|^2. \quad (14.31)$$

Wird eine Glasplatte parallel zu den Platten in einen Plattenkondensator gebracht, so heben sich die Zugkräfte auf beiden Seitenflächen der Glasplatte auf; dagegen wird die Platte in den Kondensator hineingezogen, wenn sie nur zum Teil in den Kondensator hineintaucht, Gl. (14.31). Bei flüssigen Isolierstoffen wirken die elektrischen Feldkräfte wie ein hydrostatischer Druck; sie suchen das Volumen des Isolierstoffes zu vergrößern.

14.4 Berechnung der Feldkräfte aus der Kapazität

Die praktisch vorkommenden elektrischen Feldkräfte sind durchweg sehr klein. Sie haben beispielsweise eine grundlegende Bedeutung bei den *elektrostatischen Messinstrumenten*, bei denen sie die Triebkräfte bilden. Aber auch in der Mikro- und Nanoelektronik spielen sie als Wechselwirkungskräfte bei Atomkraftmikroskopien und sogenannten MEMS (vgl. Jacobs et al. [131]) eine wichtige Rolle. Zur Berechnung der Feldkräfte in diesen Fällen und bei allgemeinen Elektrodenformen kann man eine andere Methode anwenden, die von der im *elektrischen Feld aufgespeicherten Energie* ausgeht. In Abschnitt 13 wurde gezeigt, dass die in einer Kapazität gespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \quad (14.32)$$

ist. Damit lässt sich die im elektrischen Feld wirkenden mechanischen Kräfte mit Hilfe des folgenden Gedankenexperimentes berechnen. Wir denken uns die Spannungsquelle, die den Kondensator auf eine Spannung U aufgeladen hat, entfernt, und nehmen ideale Isolation an, so dass die Ladung Q zeitlich konstant bleibt. Die gespeicherte Energie ist

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{Q^2}{2C}. \quad (14.33)$$

Es werde nun verfolgt, wie sich die elektrische Energie bei einer gedachten Verschiebung einer Elektrode ändert. Wirkt auf eine Elektrode die Feldkraft F_x in einer Richtung x , und bewegt sich die Elektrode unter der Einwirkung dieser Kraft um ein kleines Stück Δx in dieser Richtung zu der Gegenelektrode hin, so wird die Arbeit geleistet

$$F_x \Delta x. \quad (14.34)$$

Diese kann nur der Energie des elektrischen Feldes entzogen worden sein. Die Kapazität $C(x)$ nimmt zu um $(\partial C / \partial x) \Delta x$, also nimmt nach Gl.(14.33) die Energie ab um den Betrag

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x; \quad (14.35)$$

daher gilt

$$F_x = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (14.36)$$

Die *Richtung* der Kraft lässt sich immer durch die Regel bestimmen, dass die Feldkräfte infolge des Längszuges und Querdruckes der Feldlinien die Kapazitäten zu vergrößern suchen.

Beispiel: Bei einem Plattenkondensator mit der Fläche A und dem Abstand a der Platten ist

$$C = \epsilon \frac{A}{a}. \quad (14.37)$$

Die auf die Elektroden ausgeübte Zugkraft weist in Richtung der Abstandsabnahme $-\Delta a = \Delta x$ und beträgt somit

$$\|\mathbf{F}\| = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon A}{a^2} U^2. \quad (14.38)$$

Als Anwendungsbeispiel werde das *Nadelelektrometer* betrachtet. Eine Blech-

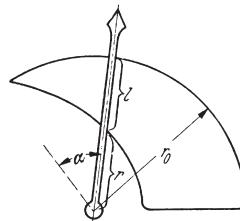


Abbildung 14.4. Prinzip des Nadelelektrometers

nadel taucht in einen Plattenkondensator derart, dass sich mit zunehmendem Ausschlag der Nadel die Kapazität zwischen Nadel und Platte vergrößert, Abb. 14.4. Die Kapazität zwischen Nadel und den festen Platten ist angenähert proportional der eintauchenden Länge l der Nadel: $C = cl$. Legt man eine Spannung zwischen die Nadel und die miteinander verbundenen festen Platten, so sucht sich die Kapazität zu vergrößern, die Nadel erfährt ein Triebmoment im Sinne des Uhrzeigers, dem durch das Richtmoment einer Feder die Waage gehalten wird. Bezeichnet man das Triebmoment mit M_d , so gilt auf Grund der gleichen Überlegung wie oben für eine kleine Winkeländerung $\Delta\alpha$

$$M_d \Delta\alpha = \frac{1}{2} U^2 \Delta C \quad \text{oder im Grenzfall} \quad M_d = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{d\alpha}. \quad (14.39)$$

Nun ist bei kreisförmiger äußerer Begrenzung der festen Platten

$$l = r_0 - r; \quad (14.40)$$

also wird

$$M_d = -\frac{c}{2} U^2 \frac{dr}{d\alpha}. \quad (14.41)$$

Die Abhängigkeit des Triebmomentes von dem Drehwinkel α des Zeigers lässt sich danach durch die Berandungskurve der festen Platten beeinflussen.

Für das Gleichgewicht zwischen dem Triebmoment M_d und dem Richtmoment $s \alpha$ der Feder gilt

$$s \alpha = -\frac{c}{2} U^2 \frac{dr}{d\alpha}. \quad (14.42)$$

Verlangt man, dass die Skala einen proportionalen Verlauf haben soll, so muss sein

$$U = c_1 \alpha \quad (14.43)$$

oder

$$dr = -\frac{2s}{c c_1^2} \frac{d\alpha}{\alpha} \quad (14.44)$$

und mit α_0 für $r = 0$

$$r = \frac{2s}{c c_1^2} \ln \frac{\alpha_0}{\alpha}. \quad (14.45)$$

Diese Bedingung lässt sich praktisch in einem gewissen Winkelbereich verwirklichen.

Die Umwandlung von elektrischer Energie in mechanische Arbeit bei der Bewegung einer Elektrode ist ein umkehrbarer Vorgang. Dies lässt sich durch den folgenden Versuch zeigen. Ein Drehkondensator werde mit einer Spannung von 220 V bei voller Kapazität aufgeladen. Seine beiden Klemmen sind mit einer kleinen Funkenstrecke versehen, die bei der niedrigen Ladespannung nicht anspricht. Entfernt man aber die Verbindung mit der Spannungsquelle und dreht den beweglichen Teil des Kondensators rasch in die Nullstellung, so springt ein Funke über. Der Vorgang ist der folgende. Der Kondensator hat bei der vollen Kapazität die Ladung $Q = CU$ aufgenommen. Schaltet man ihn von der Spannungsquelle ab und verringert die Kapazität auf den Wert der Anfangskapazität, der $(1/n)C$ betrage, so sorgt die Isolierung der Elektroden dafür, dass während dieser Änderung die Ladung nahezu konstant bleibt. Es muss also die Spannung auf den n -fachen Wert wachsen. Die Ladung drängt sich auf eine kleine Fläche der Platten zusammen, das D-Feld wächst und damit wachsen E-Feld und Spannung. Die gespeicherte elektrische Energie war zu Anfang

$$W_a = \frac{1}{2} CU^2; \quad (14.46)$$

am Ende des Vorganges dagegen beträgt sie

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{n} C(n U)^2 = n \frac{1}{2} C U^2 = n W_a. \quad (14.47)$$

Sie ist also n mal so groß geworden. Der Differenzbetrag ist also dem Kondensator bei der Drehung der Platte als mechanische Arbeit zugeführt worden. Die Anordnung stellt einen Generator dar, der mechanische in elektrische Energie umwandelt (Influenz-Elektrisiermaschine, s.a. parametrische Verstärker). Da die im elektrischen Feld aufgespeicherten Energien sehr klein sind, so lassen sich jedoch auf diese Weise keine großen elektrischen Leistungen herstellen.

14.5 Einwirkung elektrischer Felder auf Elektronenbahnen: Elektronenoptik (Internet)

Anmerkung: Dieser Unterabschnitt kann aus dem Internet als PDF-File geladen werden; Einzelheiten dazu findet man im Vorwort zu diesem Buch. Die Hinweise auf Abschnitte, Gleichungen und Abbildungen beziehen sich auf den vorliegenden Text. Die Seitennummern entsprechen der Vollversion des Buchmanuskripts, die sämtliche im Internet vorhandenen Unterabschnitten einbezieht und können somit leider nicht mit den Seitennummern der vorliegenden gedruckten Version des Buchmanuskriptes in Zusammenhang gebracht werden.

14.6 Einwirkung elektrischer Felder auf Elektronenbahnen: Elektronenoptik (Internet)

Anmerkung: Dieser Abschnitt kann aus dem Internet als PDF-File geladen werden; Einzelheiten dazu findet man im Vorwort zu diesem Buch. Die Hinweise auf Abschnitte, Gleichungen und Abbildungen beziehen sich auf den vorliegenden Text. Die Seitennummern entsprechen der Vollversion des Buchmanuskripts, die sämtliche im Internet vorhandenen Unterabschnitten einbezieht und können somit leider nicht mit den Seitennummern der vorliegenden gedruckten Version des Buchmanuskriptes in Zusammenhang gebracht werden.

Teil IV

Das elektrische Strömungsfeld

Grundgleichungen des elektrischen Strömungsfeldes

In den Abschnitten über die statische Näherung des elektrischen Feldes wurde angenommen, dass sich die Ladungen und Ladungsdichten ortsfest im Raum befinden und somit keine zeitabhängige Verschiebung erfahren. Im Rahmen der Näherung des stationären elektrischen Strömungsfeldes werden solche zeitlichen Veränderungen der Ladungen und Ladungsdichten in die Betrachtungen einbezogen, die zu einer zeitlich konstanten „Strömung“ der elektrischen Ladungen führen. Diese Strömung wird mit Hilfe der elektrischen Stromdichte \mathbf{J} charakterisiert, die man in Analogie zur laminaren Strömung von Flüssigkeiten lokal – d.h. für einen Raumpunkt \mathbf{r} – einführen kann

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) := \varrho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (15.1)$$

wobei $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ die Geschwindigkeit der Strömung im Punkt \mathbf{r} ist. Der elektrische Strom I wird dann als eine auf die gerichtete Fläche A bezogene integrale Größe definiert

$$I := \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}. \quad (15.2)$$

Auf diese Weise wird der in Abschnitt 4.1 über elektrische Netzwerke in axiomatischer Weise eingeführte Strom feldtheoretisch rekonstruiert. Daher können die Grundgesetze der elektrischen Strömung und insbesondere der elektrischen Stromdichte auch mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen in linearen Widerstandsnetzwerken motiviert werden. Im folgenden wollen wir jedoch eine feldtheoretische Einführung in das stationäre elektrische Strömungsfeld geben.

Bereits in Abschnitt 6 über das elektrostatische Feld haben wir gesehen, dass der Satz von Helmholtz (vgl. Anhang A.2) zur Charakterisierung von Vektorfeldern, die zusammen mit ihren Ableitungen im Unendlichen verschwinden, von zentraler Bedeutung ist. Danach muss die Divergenz und die Rotation eines Feldes vorgeschrieben werden, um das Feld (bis auf ein unwichtiges konstantes Feld) eindeutig festzulegen. Da im elektrischen Strömungsfeld

bewegte Ladungen im Mittelpunkt der Überlegungen stehen, müssen elektrische Kraftwirkungen und damit das E-Feld eine wesentliche Rolle spielen. Im Rahmen des elektrischen Strömungsfeldes wird angenommen, dass das E-Feld weiterhin die in der Elektrostatischen Feldtheorie gültige Eigenschaft $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ erfüllt, d.h. es wirken weiterhin Coulombsche Kräfte zur Erzeugung der Bewegung der Ladungen. Von einer Wechselwirkung der bewegten Ladungen untereinander wird – im Sinne einer „laminaren“ elektrischen Strömung – absehen. Schließlich bleiben magnetische Wirkungen der elektrischen Strömung unberücksichtigt. Darauf wird erst im Rahmen der Theorie des stationären Magnetfeldes näher eingegangen; vgl. Abschnitt 18.

Wie bereits gesagt, ist die elektrische Stromdichte \mathbf{J} neben dem E-Feld die andere wichtige Größe im stationären Strömungsfeld. Da nach aller Erfahrung das Prinzip der Ladungserhaltung gilt, muss auf ein bestimmtes Volumen bezogen die Kontinuitätsgleichung für Ladungen gelten

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (15.3)$$

Die physikalische Interpretation ist einfach und bedeutet nichts anderes, als dass die zeitliche Änderung der Ladungsdichte $\varrho(\mathbf{r}, t)$ im Raumpunkt \mathbf{r} gleich der durch $\operatorname{div} \mathbf{J}$ charakterisierten erzeugten oder vernichteten Ladung ist. Da im stationären Strömungsfeld die Ladungsdichte ϱ nicht zeitabhängig sein soll, ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung (15.3) eine Bedingung für die elektrische Stromdichte \mathbf{J}

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (15.4)$$

Um nun die im Sinne des Satzes von Helmholtz noch fehlenden Bedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{J} zu erhalten, wird wie im elektrostatischen Feld eine Materialbeziehung benötigt. In Abschnitt 16.2 wird anhand elementarer Betrachtungen motiviert, dass zumindest in einfachen Fällen das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz gilt, d.h.

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \quad (15.5)$$

wobei die Proportionalitätskonstante κ die *Leitfähigkeit* ist, die auch in Form des *spezifischen Widerstandes* $\rho = 1/\kappa$ notiert werden kann. Aufgrund der Linearität von Gl.(15.5) können die Rotation von \mathbf{J} und die Divergenz von \mathbf{E} mit Hilfe von $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ bzw. $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ festgelegt werden.

Wie im elektrostatischen Fall lassen sich die Grundgleichungen des stationären elektrischen Strömungsfeldes

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (15.6)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (15.7)$$

nach Einführung des elektrischen Potenzials durch $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ (d.h. eine Lösung von $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$) im Fall konstanter Leitfähigkeit κ auf die Laplacesche PDgl. reduzieren

$$\Delta \varphi = 0. \quad (15.8)$$

Die Richtungen von \mathbf{J} und \mathbf{E} stimmen nur in isotropen Leitern überein, also solchen, bei denen die Leitfähigkeit für alle Stromrichtungen den gleichen Wert besitzt. Bei Kristallen ist diese Bedingung im allgemeinen nicht genau erfüllt, so dass \mathbf{J} und \mathbf{E} verschiedene Richtungen haben können. Dann ersetzt ein *Leitfähigkeitstensor* (2. Stufe), bei dem es sich in einer Koordinatendarstellung um eine lineare Abbildung handelt, die Konstante κ . Weiterhin kann die Leitfähigkeit vom Ort abhängen oder \mathbf{J} und \mathbf{E} können sogar in einem nichtlinearen Zusammenhang stehen. In diesen Fällen kann die Laplacesche PDgl. nicht mehr zur Analyse des elektrischen Strömungsfeldes herangezogen werden, sondern es muss wie im elektrostatischen Feld eine verallgemeinerte Form verwendet werden.

Um konkrete elektrische Strömungsfelder mit Hilfe von Gl.(15.8) analysieren zu können, müssen noch Randbedingungen hinzugefügt werden. Grundsätzlich können wie im elektrostatischen Feld das elektrische Potenzial und/oder das E-Feld, d.h. die Ableitung des elektrischen Potenzials, auf dem Rand vorgegeben werden; im ersten Fall handelt es sich im *Dirichletsche* im zweiten um *Neumannsche Randbedingungen*. Physikalisch gesehen wird man in das Gebiet, in dem man die elektrische Strömung berechnen will, einen Strom oder eine Stromdichte einleiten. Nimmt man die Gültigkeit des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes an, dann handelt es sich in diesem Randbereich letztlich um die Vorgabe des elektrischen Feldes und damit um die Ableitung des elektrischen Potenzials. Anders als im elektrostatischen Fall sind somit im stationären elektrischen Strömungsfeld auch Neumannsche Randbedingungen von größerer Bedeutung.

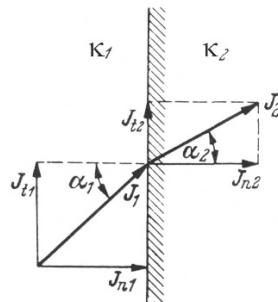


Abbildung 15.1. Grenzflächen zwischen Stoffen verschiedener Leitfähigkeit

Neben den Randbedingungen sind im elektrischen Strömungsfeld auch Grenzbedingungen zu berücksichtigen, wenn sich die Leitfähigkeit κ in dem betrachteten Gebiet sprunghaft ändert, d.h. κ dort stückweise konstant ist. Durchfließt etwa ein elektrischer Strom Stoffe mit verschiedener Leitfähigkeit, so ergibt sich an den Grenzflächen eine Brechung der Stromlinien. Tritt der Strom in eine Grenzfläche zwischen zwei Stoffen mit den Leitfähigkeiten κ_1 und κ_2 unter einem beliebigen Winkel α_1 zur Senkrechten auf der Grenz-

fläche ein, Abb. 15.1, so tritt er unter einem Winkel α_2 aus, der im allgemeinen nicht gleich α_1 ist. Die Winkel α_1 und α_2 geben die Richtung der Vektoren der Stromdichte \mathbf{J}_1 und \mathbf{J}_2 zu beiden Seiten der Grenzfläche an. Zerlegt man jeden dieser beiden Vektoren in die Normalkomponente \mathbf{J}_n und die Tangentialkomponente \mathbf{J}_t , so geben die Normalkomponenten an, wie groß der Strom ist, der durch irgendein kleines Flächenelement $d\mathbf{A}$ der Grenzfläche hindurchtritt. Da wegen der Quellenfreiheit der elektrischen Stromdichte in die Grenzfläche von der einen Seite her genau so viel Strom eintreten muss, wie auf der anderen Seite herauskommt, so muss

$$\mathbf{J}_{n1} = \mathbf{J}_{n2} \quad (15.9)$$

sein. *Die Normalkomponente der Stromdichte ist an Grenzflächen stetig.*

Eine Aussage über die Tangentialkomponenten ergibt sich, wenn man das E-Feld einführt, deren Richtung zu beiden Seiten der Grenzfläche mit der Richtung der Stromdichte zusammenfällt. Die Tangentialkomponenten E_t des E-Feldes sind maßgebend für das Potenzialgefälle längs der Grenzfläche. Schreitet man in Richtung der Tangentialkomponenten längs der Grenzfläche um ein kleines Stück ds fort, so ergeben sich die Potenzialunterschiede

$$d\varphi_1 = \|\mathbf{E}_{t1}\| ds \quad \text{und} \quad d\varphi_2 = \|\mathbf{E}_{t2}\| ds \quad (15.10)$$

auf beiden Seiten der Grenzfläche. Auf Grund des zweiten Kirchhoffsschen Satzes müssen die Potenzialunterschiede auf beiden Seiten der Grenzfläche einander gleich sein.

Anmerkung: Dies gilt selbst dann, wenn zwischen den beiden Stoffen eine Quellenspannung (Kontaktspannung) besteht. Auf einem geschlossenen Weg, der an einer Seite der Grenzfläche beginnt, den Abschnitt ds durchläuft, durch die Grenzfläche hindurchtritt, auf der anderen Seite längs der Grenzfläche um das Stück ds zurückgeht und die Grenzfläche zum zweiten Male durchstößt, um zum Ausgangspunkt zurückzukehren, ist nämlich die Summe der Kontaktspannungen Null, so dass auch hier

$$d\varphi_1 = d\varphi_2 \quad (15.11)$$

sein muss.

Hieraus geht hervor, dass

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \quad (15.12)$$

oder

$$\frac{\|\mathbf{J}_{t1}\|}{\|\mathbf{J}_{t2}\|} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \quad (15.13)$$

Tangentialkomponenten der Stromdichte verhalten sich an Grenzflächen wie die Leitfähigkeiten der aneinandergrenzenden Stoffe.

Beim Übergang des Stromes von einem Stoff mit größerer Leitfähigkeit zu einem Stoff geringerer Leitfähigkeit wird also der Winkel mit der Normalen zur Grenzfläche kleiner; in dem Beispiel Abb. 15.1 ist κ_1 größer als κ_2 . Wenn das

Verhältnis der Leitfähigkeit extrem groß ist, so gelten hiernach die folgenden Sätze:

Aus einem Stoff mit sehr großer Leitfähigkeit treten die Stromlinien nahezu senkrecht aus. An der Grenzfläche zwischen einem Leiter und einem Nichtleiter ist die Normalkomponente der Stromdichte Null.

Im letzten Fall verläuft der Strom im Leiter an der Grenzfläche tangential. Die Potenzialflächen stehen daher auf der Grenzfläche senkrecht, siehe z.B. Abb. 16.2 in Abschnitt 16.1.

Auf die verschiedenen Möglichkeiten zur Lösung des Laplaceschen Randwertproblem für das stationäre Strömungsfeld wird in Abschnitt 17 eingegangen. Dabei werden nur beispielhafte Lösungen diskutiert, da grundsätzlich die Methoden verwendet werden können, die wir bereits aus der Elektrostatik kennen (vgl. Abschnitt 10).

Abschließend wollen wir noch auf das Joulesche Gesetz in feldmäßiger Darstellungen eingehen. Auf eine Veranschaulichung auf der Grundlage von diskreten Widerstandsnetswerken gehen wir in Abschnitt 16.1 ein. Dort wird die räumliche Leistungsdichte p in folgender Weise in Gebieten mit konstanter Leitfähigkeit κ motiviert

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{\kappa} \|\mathbf{J}(\mathbf{r})\|^2 = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho \|\mathbf{E}(\mathbf{r})\|^2. \quad (15.14)$$

Aus einer dieser Darstellungen der Leistungsdichte lässt sich die Leistung P , die einem Volumen V zugeordnet werden kann, in folgender Weise berechnen; beispielsweise gilt

$$P = \frac{1}{\kappa} \iiint_V \|\mathbf{J}(\mathbf{r})\|^2 dV. \quad (15.15)$$

Elementare Betrachtungen zum elektrischen Strömungsfeld

16.1 Experimentelle Betrachtungen

Nach der allgemeinen Einführung der Grundgesetze des elektrischen Strömungsfeldes im letzten Abschnitt wollen wir noch einige elementare Überlegungen anfügen, die der besseren Veranschaulichung des stationären elektrischen Strömungsfeldes dienen sollen. Dazu gehen wir von einem langgestreckten zylindrischen Leiter aus gleichförmigem Material aus. In diesem Leiter breitet sich ein konstanter elektrischer Strom um so genauer gleichmäßig über den ganzen Querschnitt aus, je größer die Leiterlänge im Vergleich zu den Abmessungen des Querschnitts ist. Denkt man sich den Querschnitt in kleine, unter sich gleiche Flächenelemente zerlegt, so fließt durch jedes dieser Flächenelemente in der Zeiteinheit die gleiche Elektrizitätsmenge. Die Stromstärke je Flächeneinheit ist überall im Querschnitt konstant; sie ist für beliebige Flächenelemente des Querschnitts gleich dem Gesamtstrom dividiert durch die Fläche des Leiterquerschnittes. Eine solche gleichmäßige Stromverteilung bildete die Voraussetzung der Gl. (4.1).

In der Elektrotechnik kommen nun auch Fälle einer komplizierteren räumlichen Verteilung des elektrischen Stromes vor. Beispiele dafür bilden die Erdungen, bei denen sich der Strom nach allen Richtungen hin im Erdboden ausbreitet, oder Übergangswiderstände an Kontakten. Derartige Fälle räumlicher elektrischer Strömungen sind der Gegenstand dieses Abschnittes. Auch die räumliche elektrische Strömung wird durch die Gesetze von Ohm und Kirchhoff¹. Während aber diese Gesetze in Widerstandsnetzwerken ohne weiteres auf die Ströme und Spannungen angewendet werden können, bedarf es im räumlichen Strömungsfeld der Einführung von einigen neuen Größen,

¹ Die Grundgesetze elektrischer Strömungen in drahtförmigen Leitern wurden bereits von Ohm in seinem Werk „Die Galvanische Kette – mathematisch bearbeitet“ [219] vollständig angegeben. Die Bezeichnung „Kirchhoff'sche Sätze“ hat also nicht mit dem Entdecker dieser physikalischen Gesetzmäßigkeiten zu tun. Das hat auch Kirchhoff bereits in seiner ersten Veröffentlichung [141] betont.

die aus Strom und Spannung abgeleitet werden und eine Kennzeichnung und Veranschaulichung des Strömungsfeldes vermitteln. Um zu diesen Größen zu gelangen, gehen wir von dem folgenden Versuch aus.

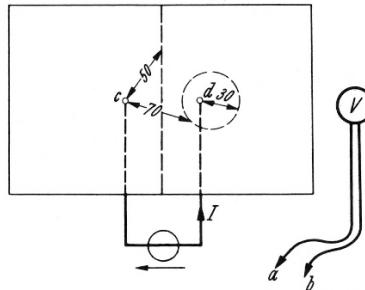


Abbildung 16.1. Experimentelle Bestimmung der Potenzialverteilung

Auf einer großen Tafel aus Eisenblech, die isoliert aufgestellt ist, sind zwei Klemmen c und d angebracht, Abb. 16.1; sie werden mit einer Gleichstromquelle verbunden. Es fließt dann Strom durch die Blechtafel von der einen Klemmen zur anderen; in der Tafel ergibt sich ein räumliches Strömungsfeld, das genauer untersucht werden soll. Zu diesem Zweck werden die Klemmen eines empfindlichen Spannungsmessers V mit zwei Metallspitzen (Sonden) a und b verbunden. Setzt man diese Spitzen auf zwei beliebige Punkte der Blechtafel, so zeigt der Spannungsmesser die Spannung zwischen diesen Punkten an. Die größte Spannung ergibt sich beim Aufsetzen auf die Elektroden c und d ; beispielsweise zeige das Instrument dabei einen Ausschlag von 100 Teilstrichen, die 100mV entsprechen mögen. Indem wir nun die Sonde a auf c setzen, suchen wir mit der Sonde b alle Punkte der Blechtafel auf, deren Spannung 50mV gegen die Elektrode c beträgt, die also die Spannung zwischen den Elektroden gerade halbiert. Der Versuch ergibt, dass diese Punkte, wie es aus Symmetriegründen zu erwarten war, auf der Mittelsenkrechten zur Strecke cd liegen. Setzt man die Sonde a irgendwo auf die Mittellinie und die Sonde b auf d , so ergibt sich der gleiche Ausschlag von 50mV. Wir können ferner in gleicher Weise die Punkte aufsuchen, deren Spannung gegen c einen beliebigen anderen Wert hat. Für die Spannung von 70mV erhält man z.B. die in Abb. 16.1 angedeutete Kurve, die die Elektrode d umgibt; andererseits zeigt sich, dass beliebige Punkte dieser Kurve gegen die Elektrode d eine Spannung von -30mV haben. Man kann so systematisch die Spannungsverteilung in der ganzen Tafel untersuchen, indem man die Linien gleicher Spannung gegen die eine Elektrode aufzeichnet. Es ergibt sich eine Anordnung von Kurven, wie sie durch Abb. 16.2 veranschaulicht ist. Wir nennen diese Kurven wie in der Elektrostatik die Linien gleichen Potenzials, *Potenziallinien* oder *Niveaulinien*. Setzt man die beiden Sonden auf ein und dieselbe Niveaulinie, so ergibt sich kein Ausschlag des Spannungsmessers V . Entsprechende Punkte gleichen

Potenzials kann man sich auch im Inneren des Eisenbleches aufgesucht denken. Sie bilden etwa zylindrische Flächen, deren Spuren an der Blechoberfläche die gezeichneten Niveaulinien sind. Diese Flächen nennen wir die *Potenzialflächen* oder *Niveaulinien*. *Potenzialflächen sind Flächen gleichen Potenzials*. Zwischen zwei beliebigen Punkten ein und derselben Potenzialfläche besteht daher keine Spannung.

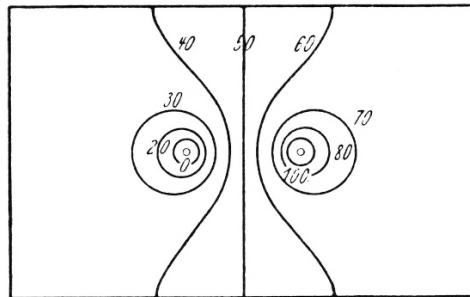


Abbildung 16.2. Experimentelle Bestimmung der Potenzialverteilung

Jede Potenzialfläche kennzeichnen wir durch den Wert des ihr entsprechenden Potenzials, also durch die Spannung gegen einen willkürlichen Bezugspunkt. Das Vorzeichen wird gemäß der Festsetzung über die Stromrichtung so gewählt, dass der Strom vom höheren Potenzial zum niedrigeren fließt. In Abb. 16.2 befindet sich als rechts der positive, links der negative Pol der Stromquelle, der Strom fließt von d nach c . Würde man die Anschlüsse der Stromquelle vertauschen, die Stromrichtung also umkehren, so würde sich zwar die gleiche Verteilung des Potenzials ergeben; die angeschriebenen Zahlen müssten dann jedoch mit negativen Vorzeichen versehen werden.

Der Bezugspunkt des Potenzials ist ganz willkürlich, da es für die Wirkungen nur auf die Potenzialunterschiede, also die Spannungen, ankommt. Bei Wahl eines anderen Bezugspunktes erhöhen sich sämtliche Potenziale um einen bestimmten, aber im ganzen Feld konstanten Betrag. Wählt man z.B. einen Punkt der Mittellinie als Bezugspunkt, so wird das Potenzial dieser Mittellinie Null. Alle Potenzialwerte der Abb. 16.2 erniedrigen sich um den gleichen Betrag von 50 mV , so dass die Elektrode c das Potenzial -50 mV erhält, die Elektrode d das Potenzial $+50\text{ mV}$. Für die Spannungen zwischen beliebigen Punkten ist eine solche Änderung belanglos. Es gelten die Sätze:

Das Potenzial eines Punktes ist gleich der Spannung zwischen diesem Punkt und einem Bezugspunkt. Die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten ist gleich der Differenz der Potenziale dieser Punkte.

Ein Feld, in dem diese Eigenschaften vorliegen, nennt man – wie in der Elektrostatisik bereits erwähnt – ein *Potenzialfeld*. Ist φ_a das Potenzial eines Punktes a , φ_b das Potenzial eines Punktes b , dann ist die Spannung zwischen den beiden Punkten (vgl. Gl.(4.1))

$$U_{ab} := \varphi_a - \varphi_b. \quad (16.1)$$

Aus der Festsetzung über die Stromrichtung folgt, dass der Strom außerhalb der Quelle von a nach b fließt, wenn U_{ab} positiv ist, und umgekehrt.

Sind die Potenzialflächen eines Strömungsfeldes im Raum gegeben, so ist damit zugleich auch die Stromrichtung an jeder Stelle des Raumes bestimmt. Da längs der Potenzialflächen kein Potenzialgefälle vorhanden ist, so muss die Richtung der Stromdichte überall senkrecht auf den Potenzialflächen stehen. Wir veranschaulichen die Stromrichtung durch sogenannte Stromlinien. Die Stromlinien müssen die Potenzialflächen überall senkrecht durchstoßen. In dem betrachteten Beispiel eines Strömungsfeldes haben daher die Stromlinien etwa die in Abb. 16.3 dargestellte Form.

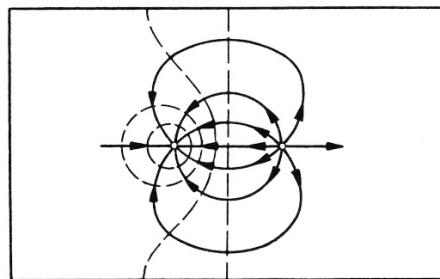


Abbildung 16.3. Stromlinien des Strömungsfeldes

Grenzt man auf einer Niveauplattform ein kleines Flächenelement ΔA ab, so findet man, dass durch dieses Flächenelement ein bestimmter Teil ΔI des Gesamtstromes hindurchtritt. Wir nennen den Grenzwert, dem das Verhältnis

$$J := \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} \quad (16.2)$$

mit abnehmender Größe des Flächenelementes zustrebt, die *Stromdichte*. Die Stromdichte gibt daher an, wie groß die Stromstärke je Fläche an irgendeiner Stelle des Raumes ist. Man kann die Stromdichte durch die Dichte der Stromlinien veranschaulichen, indem man willkürlich festsetzt, dass die Zahl der Stromlinien, die durch ein Flächenelement dA einer Niveauplattform hindurchgehen, proportional der Stromstärke in diesem Flächenelement sein soll. Man könnte z.B. $1 \text{ A} = 10^6$ Stromlinien setzen. Daher wäre die Einheit der Stromdichte z.B.

$$1 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} = 10^6 \frac{\text{Stromlinien}}{\text{cm}^2}. \quad (16.3)$$

Entfernen sich die Stromlinien voneinander, so wird in gleichem Maße die Stromdichte kleiner. Von dieser Möglichkeit der Darstellung einer „Fluss“-Dichte durch eine Liniendichte wird besonders beim magnetischen Feld Gebrauch gemacht (vgl. Abschnitt 26).

In einem langgestreckten zylindrischen Leiter breitet sich der Strom gleichmäßig über den ganzen Querschnitt A des Leiters aus. Jeder Querschnitt des Leiters stellt eine Potenzialfläche dar; die Stromrichtung steht senkrecht auf dem Leiterquerschnitt. Ist daher I die Stromstärke, so beträgt an jeder beliebigen Stelle innerhalb des Leiters

$$J := \frac{I}{A}. \quad (16.4)$$

Ein derartiges Strömungsfeld wird als ein *homogenes Feld* bezeichnet. Im allgemeinen Fall einer räumlichen Strömung hat dagegen die Stromdichte an verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Werte. Auf die zugehörige mathematische Darstellung des allgemeinen inhomogenen Fall sind wir bereits in dem vorherigen Abschnitt 15 eingegangen.

16.2 Das stationäre Strömungsfeld und Widerstandsnetzwerke

Die Stromverteilung wird in räumlicher Ausbreitung durch die gleichen Gesetze bestimmt wie in Widerstandsnetzwerken. Während dort jedoch die Bahnen des Stromes durch die Form der Leiter vorgeschrieben sind, stellen sich hier ganz bestimmte Strombahnen ein, die zunächst unbekannt sind. Man kann sich aber jeden räumlich ausgedehnten Leiter durch ein räumliches Gitterwerk aus sehr dünnen und kurzen leitenden Stäbchen ersetzt denken mit im Grenzfall unendlich feiner Unterteilung des Gitters; dadurch entsteht aus dem räumlichen Strömungsfeld ein Widerstandsnetzwerk. Da für die Stromverteilung in einem solchen Netz die Gesetze von Ohm und Kirchhoff gelten, so sind diese Gesetze auch für die Berechnung räumlicher Strömungen maßgebend; sie werden zunächst in eine für diesen Zweck brauchbare Form gebracht.

Das Ohmsche Gesetz im Strömungsfeld

Man denke sich in einer beliebigen Strömung ein kleines Prisma so abgegrenzt, dass die Grundflächen durch Stromlinien gebildet werden, also senkrecht auf den Grundflächen stehen, Abb. 16.4. Der Abstand der betrachteten Potenzialflächen sei an der betreffenden Stelle des Raumes² Δn , der Potenzialunterschied sei $\Delta\varphi$. Aus den Seitenflächen tritt infolge der gemachten Voraussetzungen kein Strom aus. Wenn die Grundflächen ΔA des Prismas klein genug gewählt werden, dann ist ferner der elektrische Strom gleichmäßig über die Grundflächen verteilt. Innerhalb des Prismas verläuft daher der elektrische Strom so wie in einem langgestreckten zylindrischen Leiter; es gilt für den Widerstand zwischen den beiden Grundflächen

² Im folgenden und auch im diesem gesamten Abschnitt verwenden wir Differenzengrößen, so dass die entsprechenden Beziehungen teilweise nur näherungsweise gelten. Dennoch verzichten wir darauf, statt des Gleichheitszeichens = ein Näherungszeichen \approx zu verwenden.

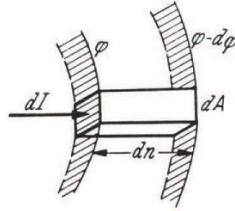


Abbildung 16.4. Anwendung des Ohmschen Gesetzes im Strömungsfeld

$$R = \frac{\Delta n}{\kappa \Delta A}, \quad (16.5)$$

wenn κ die Leitfähigkeit des Stoffes bezeichnet, in dem das Prisma abgegrenzt wurde. Ist ΔI der durch die Grundfläche hindurchtretende Strom, so lautet das Ohmsche Gesetz für das Prisma

$$\Delta \varphi = R \Delta I = \frac{\Delta n}{\kappa \Delta A} \Delta I; \quad (16.6)$$

hieraus folgt

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta n} = \frac{1}{\kappa} \frac{\Delta I}{\Delta A}. \quad (16.7)$$

Berücksichtigt man auch die Richtungen der Größen auf der linken und rechten Seite von Gl. (16.7) und bildet die Grenzwerte, so erhält man nach Einführung von E-Feld \mathbf{E} in Form der Normalenableitung $\partial \varphi / \partial \mathbf{n} = -\text{grad } \varphi = \mathbf{E}$ und der Definition der Stromdichte \mathbf{J} in vektorieller Form das Ohmsche Gesetz Gl.(15.5)

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \quad (16.8)$$

Diese Gleichung enthält zugleich die Aussage, dass die Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{J} gleiche Richtung haben. Benutzt man den spezifischen Widerstand $\rho = 1/\kappa$ an Stelle der Leitfähigkeit, so lautet das „Ohmsche Gesetz in differentieller Form“

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \quad (16.9)$$

Zahlenbeispiele: Hat z.B. das E-Feld an irgendeiner Stelle zwischen zwei Elektroden im Erdboden den Betrag $\|\mathbf{E}\| = 1 \text{ V/cm}$, und ist die Leitfähigkeit des Erdbodens $\kappa = 10^{-2} \text{ S/m}$, so beträgt die Stromdichte an dieser Stelle

$$\|\mathbf{J}\| = 10^{-2} \frac{S}{m} \frac{V}{cm} = 1 \frac{A}{m^2}. \quad (16.10)$$

Die Feldstärke ist in *metallischen* Leitern meist sehr klein. Wird eine Kupferschiene mit einer Stromdichte von 2 A/mm^2 belastet, so ergibt sich im Inneren der Schiene bei einer Leitfähigkeit des Kupfers von $\kappa = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ eine Feldstärke

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{2 \text{ A}}{5,7 \cdot 10^7 \text{ mm}^2} \frac{\text{m}}{\text{S}} = 3,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 350 \frac{\mu\text{V}}{\text{cm}} = 0,035 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (16.11)$$

In einem langgestreckten Leiter ist der Betrag des E-Feldes gleich dem Spannungsabfall bezogen auf die Längeneinheit des Leiters.

Nach Gl.(16.7) ist die Stromdichte proportional dem E-Feld. Da die Feldstärke um so größer ist, je dichter die Potenzialflächen gleichen Potenzialunterschiedes liegen, so kann man die Stromdichte dadurch veranschaulichen, dass man auch die Stromlinien um so dichter anordnet, je kleiner der Abstand zwischen den Potenzialflächen ist. Man kann in der zeichnerischen Darstellung des Feldes in Abb. 16.3 z. B. den Abstand der Stromlinien überall gleich dem Abstand der Niveaulinien machen. Auf diese Weise lässt sich zu dem experimentell bestimmten Bild der Niveaulinien leicht das Bild der Stromlinien hinzufügen (siehe auch Abschnitt 11.2.1).

Das Kirchhoffsche Stromgesetz im Strömungsfeld

Das Kirchhoffsche Stromgesetz sagt aus, dass sich der stationäre elektrische Strom bei Verzweigungen wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält, so dass der gesamte von einem Knoten wegfließende Strom Null sein muss. Diesen Satz kann man auch folgendermaßen ausdrücken. Man lege um den Knotenpunkt eine in sich geschlossene Fläche, die den Knotenpunkt umgibt (Hüllfläche), z. B. eine Kugelfläche mit dem Mittelpunkt im Knoten, Abb. 16.5. Die von dem Knotenpunkt ausgehenden Leiter durchstoßen dann diese Fläche, und nach dem Kirchhoffschen Stromgesetz muss die Summe aller aus der Fläche austretenden Ströme Null sein. Man kann eine solche Hüllfläche an beliebigen Stellen des Netzes anbringen; auch wenn sie keinen Knoten enthält, z. B. in Abb. 16.6, ist der ausgesprochene Satz, wie ohne weiteres einzusehen, gültig. Da man nun eine räumliche Strömung als Grenzfall der Strömung in einem Widerstandsnetzwerk auffassen kann, so gilt auch für das beliebige Strömungsfeld der Satz in gleicher Form. Er lautet also:

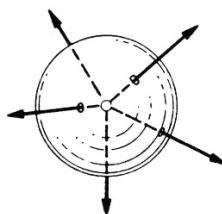


Abbildung 16.5. Hüllfläche eines Knotenpunktes

Grenzt man in einem Strömungsfeld eine beliebige in sich geschlossene Fläche (Hüllfläche) ab, so ist der aus der Fläche austretende Gesamtstrom Null.

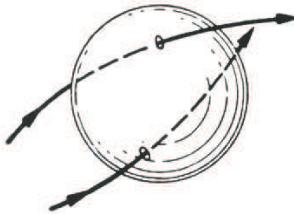


Abbildung 16.6. Hüllfläche ohne Knotenpunkt

Dieser Satz lässt sich mathematisch folgendermaßen formulieren. Man zerlege die betrachtete Hüllfläche in hinreichend kleine Flächenelemente dA , Abb. 16.7. In jedem dieser Flächenelementen kann der Vektor der Stromdichte \mathbf{J} als konstant angesehen werden. Der aus dem Flächenelement austretende Strom ist daher „infinitesimal“

$$dI = J_n dA = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}. \quad (16.12)$$

wobei J_n die zur Fläche A normale Stromdichte und der „infinitesimale“

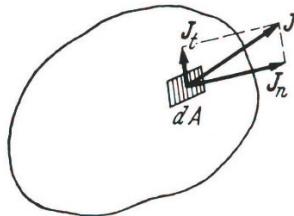


Abbildung 16.7. Berechnung des durch eine Fläche fließenden Stromes

Vektor $d\mathbf{A}$ nach außen zeigt. Um den Gesamtstrom zu erhalten, der aus der (beliebig geformten) geschlossenen Hüllfläche A austritt, hat man das Integral über die ganze Fläche zu bilden (vgl. auch Gl.(15.2))

$$I = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \quad (16.13)$$

wobei der Kreis am Integralzeichen andeuten soll, dass es sich um eine Hüllfläche handelt. Diese summenhafte Vorstellung zur Ermittlung des Gesamtstromes I ist zur Veranschaulichung ganz nützlich, aber in praktischen Rechnungen muss man die Fläche A zunächst parametrisieren und damit die symbolische Form des Oberflächen-Integrals in eine auswertbare Form überführen (siehe z. B. Merziger, Wirths [198]).

In dem gerade betrachteten Fall muss das Integral nicht ausgewertet werden, denn das Kirchhoffsche Stromgesetz sagt aus physikalischen Gründen,

dass

$$\oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (16.14)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes der Vektoranalysis kann man die mathematische Äquivalenz mit dem in Abschnitt 15 vorausgesetzten Spezialfall der Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ nachweisen. Man nennt daher ein Vektorfeld, in dem eine dieser Beziehungen gilt, *quellenfrei*; die Gl.(16.14) zeigt an, dass die Strömung nirgends entspringt oder endigt.

Das Kirchhoffsche Spannungsgesetz im Strömungsfeld

Sieht man von im Strömungsfeld verteilten Spannungsquellen ab, so ist das Kirchhoffsche Spannungsgesetz bei der Definition der Grundbegriffe des Strömungsfeldes bereits dadurch berücksichtigt worden, dass jedem Punkt des Raumes ein eindeutiges elektrisches Potenzial $\varphi(\mathbf{r})$ zugeschrieben wird und die Spannungen als Differenzen dieser Potenziale definiert werden. Die Summe der Spannungen auf einem beliebigen in sich geschlossenen Weg ist unter dieser Voraussetzung Null.

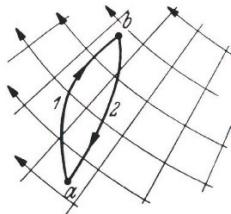


Abbildung 16.8. Linienintegral des E-Feldes auf einem geschlossenen Weg

Bildet man das Linienintegral des E-Feldes zwischen zwei beliebigen Punkten a und b des Strömungsfeldes auf dem Weg 1, Abb. 16.8, so ergibt sich die Differenz der Potenziale dieser beiden Punkte. Weg 2 hat den gleichen Betrag, aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Addiert man die beiden Integrale, so erhält man das Linienintegral des E-Feldes auf dem geschlossenen Weg $a1b2a$; es ist im stationären Strömungsfeld gleich Null:

Im stationären Strömungsfeld ist das Linienintegral des E-Feldes auf beliebig geschlossenen Wegen Null.

Dieser Satz lautet in der Schreibweise der Vektoranalysis

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (16.15)$$

wobei C einen geschlossenen Weg im \mathbb{R}^3 bezeichnet. Hier zeigt der Kreis am Integralzeichen an, dass über einen geschlossenen Weg zu integrierten ist.

Natürlich hat auch dieses Linienintegral wieder nur symbolische Bedeutung. Für eine praktische Berechnung ist wiederum eine Parametrisierung des Weges \mathcal{C} notwendig, so dass die symbolische Form des Linienintegrals in eine auswertbare Form überführt werden kann.

Mit dem Stokeschen Satz der Vektoranalysis kann man ein Linienintegral über einen geschlossenen Weg in ein Flächenintegral umwandeln und daraus in diesem Fall die bereits in Abschnitt 15 angegebene Beziehung $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ für das Strömungsfeld herleiten. Man nennt ein Vektorfeld, in dem diese Beziehungen erfüllt ist, *wirbelfrei*. In Gebieten, in denen sich keine Spannungsquellen befinden, stellt also die stationäre elektrische Strömung ein wirbelfreies Feld dar. In diesem Gebiet treten keine geschlossenen Stromlinien auf, diese müssen vielmehr die Quellen durchlaufen. Auf einem Integrationsweg, der Energiequellen enthält, ist das Linienintegral des \mathbf{E} -Feldes zuzüglich der Summe der Quellenspannungen gleich Null, wie es der zweite Kirchhoffsche Satz verlangt.

Das Joulesche Gesetz im Strömungsfeld

Nach Abschnitt 4.1 wird in einem Leiter mit dem Widerstand R , der vom Strom I durchflossen wird, die in Wärme umgesetzte Leistung gegeben durch

$$P = I^2 R. \quad (16.16)$$

Diese Beziehung kann ohne weiteres auf das bei der Umformung des Ohmschen Gesetzes betrachtete Prisma, Abb. 16.4, angewendet werden. Hier ist

$$\Delta I = \|\mathbf{J}\| \Delta A \quad \text{und} \quad R = \frac{\Delta n}{\kappa \Delta A}, \quad (16.17)$$

also die in dem Prisma umgesetzte Leistung

$$\Delta P = \frac{1}{\kappa} \|\mathbf{J}\|^2 \Delta A \Delta n. \quad (16.18)$$

Da $\Delta V := \Delta A \Delta n$ das Volumen des Prismas darstellt, können wir eine Leistungsdichte definieren durch

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}. \quad (16.19)$$

Für diese Leistungsdichte ergibt sich mit (15.14)

$$p = \frac{1}{\kappa} \|\mathbf{J}\|^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \kappa \|\mathbf{E}\|^2. \quad (16.20)$$

Zahlenbeispiel: Beträgt z. B. die Stromdichte an der Oberfläche einer in den Erdboden eingegrabenen Erdungsplatte $J = 100 A/m^2$, und ist die Leitfähigkeit des Erdbodens $\kappa = 10^{-2} S/m$, so wird

$$p = 10^2 \frac{m}{S} \cdot 10^4 \frac{A^2}{m^4} = 10^6 \frac{W}{m^3}. \quad (16.21)$$

Nun ist $1 W \cdot s = 0,239 \text{ cal}$ oder $1 W = 0,239 \text{ cal/s}$. Also wird die je Zeit- und Volumeneinheit entwickelte Wärme

$$p = 0,239 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3 \text{s}}. \quad (16.22)$$

Hat der Erdboden z. B. dieselbe volumenbezogene Wärmekapazität wie das Wasser ($4,19 \text{ J/(K} \cdot \text{cm}^3\text{)}$), so würde er sich mit der Geschwindigkeit $1 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-3} / (4,19 \text{ J/(K} \cdot \text{cm}^3\text{)}) = 0,239 \text{ K/s}$ erwärmen, wenn die Wärme nicht abgeleitet würde.

16.3 Zusammenhang zwischen Kapazität und Widerstand

Zwischen dem Fluss des elektrischen Feldes und dem Strom im elektrischen Strömungsfeld besteht eine formale Analogie. Die zur Kapazität analoge Größe des Strömungsfeldes ist der Leitwert zwischen den Elektroden, vorausgesetzt, dass deren Leitfähigkeit sehr groß gegen die des leitenden Mediums zwischen ihnen ist. Man kann diese Analogie zur Berechnung der Kapazität benutzen, wenn das entsprechende Strömungsfeld bekannt ist, oder zur Berechnung des Isolationswiderstandes von Kondensatoren, deren Kapazität man kennt.

Allgemein gilt für den Widerstand zwischen den Elektroden eines Strömungsfeldes

$$R = \frac{U_{ab}}{I}, \quad (16.23)$$

wobei U_{ab} die Spannung zwischen den Elektroden, I den von der einen zur anderen Elektrode übergehenden Strom bezeichnet. Nun ist für irgendeine Hüllfläche, die eine Elektrode enthält, wenn die Stromzuleitung von der Integration ausgeschlossen wird, nach Gl.(15.2)

$$I = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \quad (16.24)$$

wobei A die Hüllfläche abzüglich der Fläche der Zuleitung ist. Für den Fall, dass die Leitfähigkeit im ganzen Raum konstant ist, wird hieraus

$$I = \kappa \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (16.25)$$

also

$$R^{-1} = \kappa \frac{1}{U_{ab}} \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \quad (16.26)$$

Ist dagegen der Raum zwischen den Elektroden von einem homogenen Nichtleiter erfüllt, so wird der elektrische Fluss

$$Q = \iint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}, \quad (16.27)$$

so dass für die *Kapazität* zwischen den beiden Elektroden gilt

$$C = \frac{Q}{U_{ab}} = \varepsilon \frac{1}{U_{ab}} \iint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \quad (16.28)$$

Der Vergleich der beiden Beziehungen (16.26) und (16.27) zeigt, dass

$$RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}. \quad (16.29)$$

Daraus folgt auch, dass der Isolationswiderstand eines Kondensators beliebiger Form bei homogenem Dielektrikum umgekehrt proportional der Kapazität ist.

Die Leitfähigkeit der Isolierstoffe ist mikroskopisch im wesentlichen auf Ionen zurückzuführen, wie in Elektrolyten. Dichte und Beweglichkeit der Ionen in den Isolierstoffen sind aber immer sehr gering; daher ist auch die Leitfähigkeit entsprechend klein. Sie hängt bei festen Isolierstoffen in hohem Maße von Beimengungen, insbesondere Wasser, ab. In der Tabelle 16.1 ist die Größenordnung der Leitfähigkeit einiger Isolierstoffe angeführt; es ist ferner der sog. spezifische Widerstand je cm Länge der Schneiden. Der in Gl.(16.29) betrachtete Isolationswiderstand ist der *Durchgangswiderstand*. Er ist durch die Leitfähigkeit κ bestimmt. Bei den meisten Anordnungen liegt parallel zum Durchgangswiderstand noch ein Strompfad längs der Oberfläche des Isolierstoffes. Hierfür ist der spezifische Oberflächenwiderstand maßgebend. Vielfach übertrifft der Isolationsstrom infolge Oberflächenleitung bei weitem den Isolationsstrom infolge Durchgangsleitfähigkeit.

Widerstand und Oberflächenwiderstand hängen bei den Isolierstoffen stark von der Temperatur ab, und zwar nimmt die Leitfähigkeit mit der Temperatur zu. Bei feuchtigkeitshaltigen Isolierstoffen mit Faserstruktur, z.B. Papier und Baumwolle, zeigt sich ferner eine Zunahme der Leitfähigkeit mit der elektrischen Feldstärke; sie wird darauf zurückgeführt, dass infolge der Kraftwirkung des elektrischen Feldes die Flüssigkeitsteilchen in die Länge gezogen werden.

Im folgenden Abschnitt 17 wird gezeigt, dass sich für den Isolationswiderstand eines einadrigen Kabels von der Länge l und den Radien r_1 und r_2 von Innenleiter und Mantel folgender Isolationswiderstand ergibt (vgl. Gl.(17.50))

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (16.30)$$

Material	Leitfähigkeit κ in S/m	spez. Oberflächenwiderst. in Ω
Glas	$10^{-14} \dots 10^{-11}$	$10^6 \dots 10^{13}$
Porzellan	$10^{-13} \dots 10^{-12}$	$10^9 \dots 10^{12}$
Hartgummi	$10^{-16} \dots 10^{-13}$	$10^9 \dots 10^{15}$
Glimmer	$10^{-13} \dots 10^{-11}$	$10^9 \dots 10^{12}$
Quarz	10^{-17}	$10^8 \dots 10^{12}$
Transformatoröl	$10^{-11} \dots 10^{-10}$	-

Tabelle 16.1. Leitfähigkeit und spez. Oberflächenwiderstand verschiedener Materialien

Dabei wurde die Voraussetzung gemacht, dass der Zwischenraum zwischen Leiter und Kabelmantel von einem homogenen Stoff mit der Leitfähigkeit κ erfüllt sei. Hat dieser Stoff eine Dielektrizitätskonstante ε , so gilt daher auf Grund des soeben gefundenen Zusammenhangs (16.29) für die *Kapazität des Koaxialkabels* oder eines *Zylinderkondensators*

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (16.31)$$

Da praktisch die relative Dielektrizitätskonstante gegeben ist, so schreibt man zweckmäßigerweise diese Beziehung in der Form

$$\frac{C}{l} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{55,6 \varepsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{55,6 \varepsilon_r nF}{\ln \frac{r_2}{r_1} km} = \frac{24,1 \varepsilon_r nF}{\lg \frac{r_2}{r_1} km}. \quad (16.32)$$

Zahlenbeispiel: Für verschiedene Werte von r_2/r_1 und ε_r gibt die folgende Tabelle 16.2 die auf die Länge bezogene Kapazität an: Die Formel (16.31) gilt

r_2/r_1	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
C/l (nF/km)	118	94,6	80,2	60,7	50,6	44,4	40,1	34,6

Tabelle 16.2. Zusammenhang von R und C

nur, wenn die Zylinderelektroden so lang sind, dass die D-Feldlinien radial von der einen Elektrode zur anderen übergehen. Für Messzwecke werden in der Hochspannungstechnik zuweilen Zylinderkondensatoren verwendet, bei denen die Elektroden aus kurzen konzentrischen Zylindern bestehen. Hier erreicht man den radialen Verlauf der D-Feldlinien durch Verlängerung der Elektroden über den ausgenützten Teil hinaus, wie es in Abb. 16.9 dargestellt ist. Werden

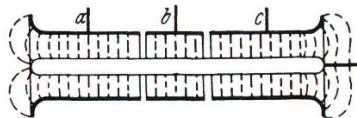


Abbildung 16.9. Luftkondensator mit Schutzring

die Verlängerungen a und c („Schutzring“) auf das gleiche Potenzial gebracht wie die mittlere Elektrode b , so ergibt sich zwischen dieser Elektrode und der inneren der gewünschten Verlauf der D-Feldlinien, so dass die Kapazität zwischen diesen beiden Elektroden nach der Formel (16.31) berechnet werden kann.

Beispiele von elektrischen Strömungsfeldern

Wir haben bereits im Abschnitt 11 darauf hingewiesen, dass man zur analytischen und numerischen Lösung der Potenzialgleichung des stationären Strömungsfeldes grundsätzlich alle Methoden verwenden kann, die wir im Fall des ladungsfreien elektrostatischen Feld kennengelernt haben. Im Unterschied zur Elektrostatik wird die Laplacesche Differentialgleichung „natürlicherweise“ als Neumannsches Randwertproblem gestellt, da man die Stromdichte \mathbf{J} (bzw. den Strom I) vorgibt. Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes zeigt man, dass das gerade einer Vorgabe der Ableitung des elektrischen Potenzials entspricht. Daher soll das elektrische Strömungsfeld nur anhand einiger ausgewählter Beispiele diskutiert werden. In der Monographie von Lehner ([162], S. 251ff) findet man ein ausführlich gerechnetes und illustriertes Beispiel, bei dem die Potenzialgleichung mit gemischten Randwerten mit Hilfe eines Separationsansatzes gelöst wird.

17.1 Punktquelle

Als einfachstes Beispiel für die Berechnung eines elektrischen Strömungsfeldes werde zunächst der folgende Fall behandelt. Eine Kugel vom Radius r_0 aus einem gut leitenden Material, z. B. Kupfer, sei in einen Stoff mit mäßiger Leitfähigkeit κ eingebettet, z.B. Erde. Der Kugel werde durch einen isolierten Draht Strom zugeführt, der in sehr großer Entfernung durch eine zweite Elektrode wieder abgenommen und zur Stromquelle zurückgeführt wird. In der näheren Umgebung der Kugelelektrode werden die Stromlinien aus Symmetriegründen radial von der Kugeloberfläche ausgehen, Abb. 17.1. Der gesamte der Kugel zugeführte Strom I verteilt sich gleichmäßig auf konzentrische Kugelflächen. Im Abstand $r := \|\mathbf{r}\|$ vom Kugelmittelpunkt hat daher die Stromdichte \mathbf{J} den Betrag

$$\|\mathbf{J}(\mathbf{r})\| = \frac{I}{4\pi r^2}. \quad (17.1)$$

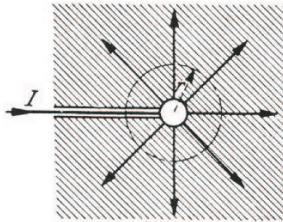


Abbildung 17.1. Strömungsfeld in der Umgebung einer Kugelelektrode

Diese Beziehung kann auch als der Ausdruck des ersten Kirchhoffsschen Satzes betrachtet werden. Eine Kugeloberfläche mit dem Radius r wird von dem Leiter durchstoßen, der den Strom I in das Innere dieser Kugel einführt. Damit die Summe aller aus der Kugeloberfläche austretenden Ströme Null ist, muss die Stromdichte den durch Gl.(17.1) gegebenen Wert besitzen.

Der Vektor \mathbf{J} der Stromdichte zeigt vom Mittelpunkt der Kugel weg, wenn der Kugelelektrode durch die Leitung Strom zugeführt wird, bei umgekehrter Stromrichtung zeigt er nach dem Kugelmittelpunkt. Auch die Oberfläche der Metallkugel ist eine Potenzialfläche, da infolge der vorausgesetzten großen Leitfähigkeit innerhalb der Kugel kein merklicher Spannungsabfall entsteht. Alle Punkte der Kugel und insbesondere ihrer Oberfläche haben daher gleiches Potenzial.

Nach dem Ohmschen Gesetz ist durch die Stromdichte auch das E-Feld bestimmt. Es gilt

$$E(r) := \|\mathbf{E}(\mathbf{r})\| = \frac{1}{\kappa} \|\mathbf{J}(\mathbf{r})\| = \frac{I}{4\pi\kappa r^2}. \quad (17.2)$$

Die Richtung ist die gleiche wie die der Stromdichte. Aus dem E-Feld ergibt sich auf Grund der Gl.(6.16) die Spannung zwischen der Kugeloberfläche und irgendeinem Punkt P des Raumes mit dem Abstand r vom Mittelpunkt 0 der Kugel:

$$U_{0P} = \int_{r_0}^r E(r) dr = \frac{I}{4\pi\kappa} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right). \quad (17.3)$$

Die Spannung zwischen der Metallkugel und dem beliebigen Punkt P nähert sich also mit wachsendem Abstand dieses Punktes einem Grenzwert, wie es Abb. 17.2 veranschaulicht. Der Grenzwert

$$U = \frac{I}{4\pi\kappa r_0} \quad (17.4)$$

wird mit einem Fehler von 1% erreicht, wenn der Abstand r des Punktes P 100mal so groß wie der Kugelradius ist; man bezeichnet ihn als den Spannungsabfall am Übergangswiderstand zwischen der Metallkugel und dem leitenden Stoff. Der *Übergangswiderstand* ist daher

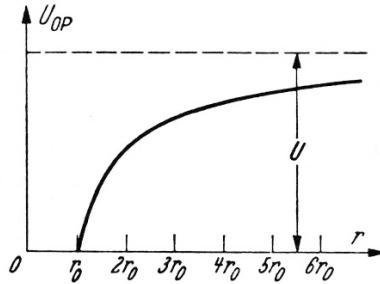


Abbildung 17.2. Spannung in der Umgebung einer Kugelelektrode

$$R = \frac{1}{4\pi\kappa r_0}; \quad (17.5)$$

er liegt praktisch innerhalb einer Kugel vom Radius $100r_0$. Die Kugel (17.5) kann zur Berechnung des Übergangswiderstandes zwischen einem kugelförmigen Erder und dem Erdboden benutzt werden. Es ist bemerkenswert, dass der Übergangswiderstand nicht umgekehrt proportional mit der Oberfläche der Metallkugel, sondern langsamer abnimmt.

Zahlenbeispiel: Für verschiedene Radien r_0 eines Kugelerders ergeben sich nach Gl.(17.5) die folgenden Übergangswiderstände im Erdboden mit der Leitfähigkeit $10^{-2} S/m$

r_0/cm	5	10	50	100
R/Ω	160	80	16	8

Tabelle 17.1. Übergangswiderstand in Abhängigkeit des Kugelerderradius

Teilt man den Raum in der Umgebung der Kugelelektrode durch eine dünne, isolierende, ebene Schicht, die durch den Mittelpunkt geht, Abb. 17.3, so kann man jedem der beiden so entstehenden Halbräume den Strom $(1/2) I$ entnehmen, ohne dass sich an dem Strömungsbild etwas ändert. Man kann auch noch die Metallkugel durch den gleichen Schnitt teilen und jeder Hälfte den Strom $(1/2) I$ zuführen. Es ergibt sich dann der Fall, dass an der Erdoberfläche eine Halbkugel vom Radius r_0 eingegraben ist, der der Strom $(1/2) I$ zugeführt wird. Das Potenzial ist überall das gleiche wie früher; auch der Spannungsabfall am Übergangswiderstand ist der gleiche geblieben. Der Übergangswiderstand ist daher doppelt so groß:

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa r_0}. \quad (17.6)$$

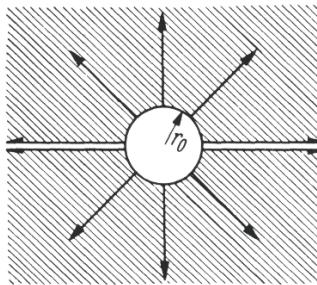


Abbildung 17.3. Halbkugelelektrode

Diese Formel kann in manchen Fällen zur Abschätzung des Übergangswiderstandes eines Erders verwendet werden, wenn man diesen angenähert durch eine solche Halbkugel ersetzen kann. Zwischen dem Erder und irgendwelchen Punkten der Erdoberfläche im Abstand r vom Mittelpunkt ergibt sich eine Spannung, die durch Gl.(17.3) dargestellt ist. Führt man dort den gesamten Spannungsabfall U des Erders ein, so folgt

$$U_{0P} = U \left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \quad (17.7)$$

Diese Funktion hat den in Abb. 17.2 gezeigten Verlauf. Man bezeichnet die dadurch gegebene Spannungsverteilung auch als den Spannungstrichter des Erders. Seine Kenntnis ist von Bedeutung im Hinblick auf Gefährdungen von Lebewesen, die in die Nähe des Erders gelangen.

Zahlenbeispiel: Lässt sich die Erdung eines *Leitungsmastes* durch eine Halbkugel vom Radius 1 m ersetzen, so ist nach Gl.(17.6) der Übergangswiderstand 16Ω für eine Bodenleitfähigkeit von $10^{-2} S/m$. Bei Berührung eines Leiters der Freileitung mit dem Mast ergebe sich ein Erdstrom von $100 A$. Dann ist die Übergangsspannung $1600 A$. Die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten, die um den Abstand der Schrittlänge des Menschen voneinander entfernt sind, nennt man die *Schrittspannung*. Für eine Schrittlänge von $80 cm$ beträgt sie im ungünstigsten Falle nach Gl.(17.7)

$$\Delta U = U \left(1 - \frac{100}{180}\right) = 711 V. \quad (17.8)$$

Die Spannung zwischen der Vollkugel und irgendeinem Punkt des Raumes, Gl.(17.3), lässt sich als Differenz der Potenziale der Kugeloberfläche, φ_0 , und des betrachteten Punktes, φ , darstellen; es gilt

$$U_{0P} = \varphi_0 - \varphi. \quad (17.9)$$

Hieraus folgt für das Potenzial des beliebigen Punktes im Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa r} + c, \quad (17.10)$$

wobei c eine willkürliche Konstante bezeichnet; deren Bedeutung geht daraus hervor, dass für sehr große Werte von r das Potenzial gleich c wird. Die Konstante c bezeichnet also das Potenzial weit entfernter Punkte. Bezieht man alle Potenziale auf einen solchen weit entfernten Punkt, so wird

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa r}. \quad (17.11)$$

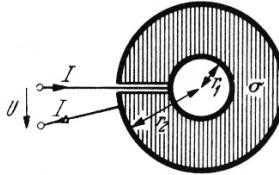


Abbildung 17.4. Strömung zwischen konzentrischen Kugelelektroden

Ein weiteres Beispiel dieser Potenzialverteilung bildet das durch Abb. 17.4 dargestellte Leitersystem, bei dem der Hohlraum zwischen zwei konzentrischen Kugelelektroden mit einem Stoff geringer Leitfähigkeit κ ausgefüllt ist. Bezeichnet man willkürlich das Potenzial der äußeren Elektrode mit φ_1 , so ist das der inneren $\varphi_1 + U$, wenn der Strom I von der inneren nach der äußeren Elektrode fließt und die Spannung zwischen den beiden Elektroden U betragen soll. Daher gelten die beiden Gleichungen

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\kappa r_2} \quad \text{und} \quad U + \varphi_1 = \frac{I}{4\pi\kappa r_1}, \quad (17.12)$$

aus denen hervorgeht, dass

$$U = I \frac{r_2 - r_1}{4\pi\kappa r_1 r_2}. \quad (17.13)$$

Der Übergangswiderstand zwischen den beiden Elektroden ist hiernach gleich dem Widerstand eines zylindrischen Leiters aus dem gleichen Material mit der Leitfähigkeit κ , der Länge $\delta := r_2 - r_1$ und dem Querschnitt $A = 4\pi r_2 r_1$, der gleich der Oberfläche einer Kugel mit Radius $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$ ist.

Die Spannungsverteilung in der Umgebung einer Kugel ist bei gegebenem Gesamtstrom unabhängig von der Größe der Kugelelektrode. Man würde das gleiche Potenzial auch bei einer Kugel von unendlich kleinem Radius erhalten. In bezug auf den außerhalb der Elektrode liegenden Raum lässt sich also für die Rechnung die Elektrode ersetzen durch eine Kugel von unendlich kleinem Radius, durch die der Strom I austritt. Eine solche unendlich kleine Elektrode

nennt man *Punktquelle*. Das Potenzial in der Umgebung einer Punktquelle ist durch Gl.(17.11) gegeben. Fließt der Strom in umgekehrter Richtung, wird er also durch die Elektrode dem Raum entnommen, so gilt entsprechend

$$\varphi = -\frac{I}{4\pi\kappa r}. \quad (17.14)$$

Bei Anwesenheit mehrerer Punktquellen überlagern sich die Einzelpotenzial

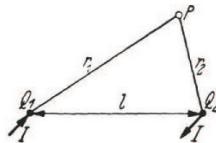


Abbildung 17.5. Zur Berechnung des Potenzials zweier Punktquellen

(*Überlagerungssatz*), da nach den Grundgesetzen des Strömungsfeldes zwischen den Strömen und Spannungen lineare Beziehungen bestehen. Sind z.B. in den leitenden Raum zwei Punktquellen Q_1 und Q_2 , Abb. 17.5, im Abstand l eingebettet, von denen die eine den Strom I zuführt, die anderen den Strom I entnimmt, so gilt für das Potenzial in einem beliebigen Punkt P

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (17.15)$$

Die Potenzialflächen sind durch die Bedingungen

$$\varphi = \text{konst.} \quad (17.16)$$

bestimmt. In Abb. 17.6 sind einige Potenziallinien dargestellt. Man kann sie auf

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{k}{l}. \quad (17.17)$$

Dann folgt

$$r_1 = \frac{r_2}{1 + k \frac{r_2}{l}}. \quad (17.18)$$

Erreicht man nun k Werte einer arithmetischen Reihe, z. B. $k = 0, 1, 2, 3$ usw., so ergeben sich aus dieser Gleichung die zu Potenziallinien gleicher Potenzialunterschiede gehörigen Radien.

Die Strömungslinien schneiden die Potenziallinien überall senkrecht, sie gehen von Q_1 nach Q_2 . Halbiert man den ganzen Raum durch eine isolierte Ebene, die durch die Verbindungslinie der beiden Punktquellen geht, so ergibt sich das Strömungsfeld für zwei Erder an der Erdoberfläche, das etwa die Rückleitung eines Stromkreises bilden kann, dessen Hinleitung aus einem

isolierten Draht besteht (Einfachleitung der Telegraphie). Auf der Verbindungsleitung der beiden Quellen hat das Potenzial den in Abb. 17.7 dargestellten Verlauf. Auf der Verbindungsleitung der beiden Quellen hat das Potenzial den in Abb. 17.7 dargestellten Verlauf. Die Potenziallinien in Abb. 17.6 kann man als Höhenlinien eines Gebirges auffassen, das nach Q_1 hin ansteigt und nach Q_2 hin trichterförmig abfällt.

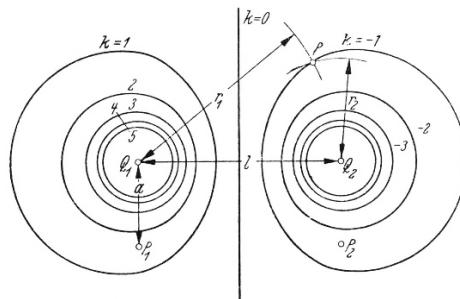


Abbildung 17.6. Potenziallinienbild zweier Punktquellen entgegengesetzten Vorzeichens

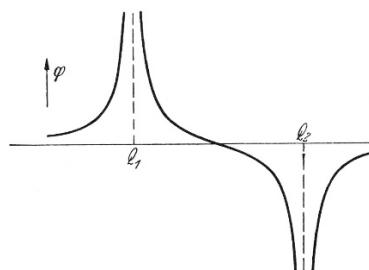


Abbildung 17.7. Potenzialverlauf auf der Verbindungsleitung der beiden Quellen

Anwendungsbeispiel: Es seien Q_1 und Q_2 die beiden Erder einer Einfachleitung. In irgendeinem Abstand a sei eine zweite Einfachleitung gleicher Länge mit den Erdungspunkten P_1 und P_2 vorhanden (Abb. 17.6). Fließt in der ersten Leitung ein Strom, dann ergibt sich ein Stromübergang in die zweite Leitung; es liegt eine *galvanische Kopplung* vor. Die in der zweiten Leitung auftretende Spannung, die nach dem Satz von der Zweipolquelle als eine Quellspannung U_0 aufgefasst werden kann, ergibt sich als Differenz der Potenziale der beiden Punkte P_1 und P_2 . Ist z.B.

$$\text{für Punkt } P_1 : r_1 = a, r_2 = \sqrt{a^2 + l^2}, \quad (17.19)$$

$$\text{für Punkt } P_2 : r_1 = \sqrt{a^2 + l^2}, r_2 = a, \quad (17.20)$$

so wird nach Gl.(17.15) unter Beachtung, dass jetzt der Strom I nur im Halbraum fließt,

$$U_0 = \frac{I}{\pi\kappa} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right). \quad (17.21)$$

Bei sehr großer Leitungslänge im Vergleich zum Abstand der Leitungen ist angenähert

$$U_0 = \frac{I}{\pi\kappa a}. \quad (17.22)$$

Ist die Erdung P_2 weit von den drei anderen Punkten P_1, Q_1 und Q_2 entfernt, so wird U_0 angenähert halb so groß.

Zahlenbeispiel: Elektrische Bahn mit einem Erderstrom $I = 500 A$; im Abstand $a = 100 m$ von dem Erder Q_1 befindet sich die Erdung P_1 einer Fernmeldeleitung; $\kappa = 10^{-2} S/m$. Nach Gl.(17.22) wird, wenn Q_2 wesentlich weiter von Q_1 entfernt ist als P_1

$$U_0 = \frac{I}{2\pi\kappa a} = \frac{500 Am}{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 Sm} = 80 V. \quad (17.23)$$

Die Abstände zwischen Starkstrom- und Fernmeldeerdungen müssen daher ausreichend groß gemacht werden.

Führt man mehreren nebeneinander liegenden Punkten Strom in gleicher Stärke zu, so ergeben sich die Potenzialflächen ebenfalls durch Übereinanderlagern der Einzelbilder. Das Potenzial in der Umgebung zweier derartiger Punktquellen im Abstand l

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (17.24)$$

Man findet in ähnlicher Weise wie oben die Potenzialflächen, wenn man aus

$$r_1 = \frac{r_2}{k \frac{r_2}{l} - 1}. \quad (17.25)$$

für Werte von k , die nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten, zusammengehörige Werte r_1 und r_2 berechnet. Die Potenziallinien sind in Abb. 17.8 dargestellt; in großem Abstand von den Punktquellen geht das Potenziallinienbild in das einer einzigen Punktquelle mit doppelter Stromstärke über.

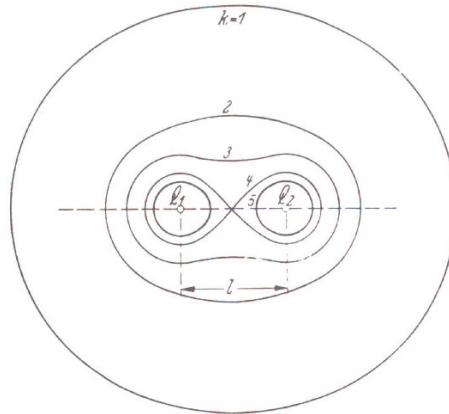


Abbildung 17.8. Potenziallinienbild der beiden Quellen gleichen Vorzeichens

17.2 Spiegelung

Als weiteres Beispiel soll das Strömungsfeld in einer Umgebung einer kleinen Kugelelektrode betrachtet werden, die sich in einer gewissen Tiefe h unter der ebenen Oberfläche des im übrigen unendlich ausgedehnten leitenden Raumes befindet, Abb. 17.9. Der Kugel werde durch eine isolierte Leitung der Strom I zugeführt, der in sehr großer Entfernung wieder aus dem leitenden Halbraum entnommen werden soll. Um hier die Grenzbedingung an der Erdoberfläche zu erfüllen, wendet man das *Prinzip der Spiegelung*, das wir bereits in der Elektrostatisik kennengelernt haben (vgl. Abschnitt 11.6). Es besteht darin, dass man sich den ganzen Halbraum mit seiner Elektrode an der Grenzfläche gespiegelt denkt, Abb. 17.10. Dann befindet sich in einem gleichmäßig leitenden Raum zwei Punktquellen im Abstand $2h$, die beide den gleichen Strom I zuführen. Auf diese Weise wird die Grenzbedingung an der Erdoberfläche äquivalent durch eine Punktquelle ersetzt, so dass im Endlichen keine Grenzbedingungen mehr auftreten. Eine solche Vorgehensweise ist bei der linearen Laplaceschen Differentialgleichung möglich.

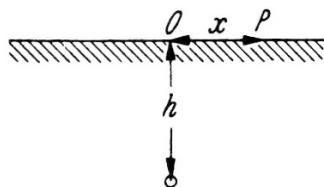


Abbildung 17.9. Tiefenerder

Das Potenzial in irgendeinem Punkt P ergibt sich durch Übereinanderlagern der Teilpotenziale; es gilt die Gl.(17.24). Die Potenziallinien sind durch Abb. 17.8 dargestellt, wobei $l = 2h$ zu setzen ist. Man erkennt, dass für die Mittelebene in der Tat die geforderten Grenzbedingungen, Gl.(15.9) und Gl.(15.13), erfüllt sind. Die Richtung der Stromlinien ergibt sich graphisch für jeden Punkt P , wenn man die Vektoren \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 des E-Feldes jeder der beiden Quellen geometrisch addiert, Abb. 17.10. Für die Punkte P_m der Mittelebene fällt die Richtung der Stromdichte in diese Ebene. Die Spannung U zwischen der Elektrode und weit entfernten Punkten ist gleich dem Potenzial der Kugeloberfläche. Ist der Radius r_0 der Elektrode klein gegen die Tiefe h , so gilt für Punkte der Kugeloberfläche $r_1 = r_0$ und angenähert $r_2 = 2h$; daher wird

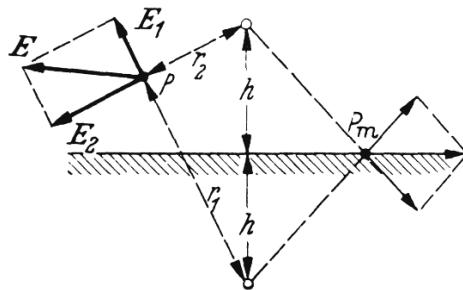


Abbildung 17.10. Berechnung des E-Feldes eines Tiefenerders

$$U = \frac{I}{4\pi\kappa} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right). \quad (17.26)$$

Der Übergangswiderstand ist

$$R = \frac{1}{4\pi\kappa r_0} \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right); \quad (17.27)$$

er ist größer als bei unbegrenztem Leiter, Gl.(17.5), da die Stromlinien im oberen Halbraum fehlen; der Unterschied ist jedoch praktisch gering. Schreibt man

$$R = p \frac{1}{4\pi\kappa r_0}, \quad (17.28)$$

so ist nach Gl.(17.27)

$$p = \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right); \quad (17.29)$$

unter der Voraussetzung, dass r_0 klein gegen $2h$ ist. Andererseits wird für $h = 0$ nach Gl.(17.6) $p = 2$. Für beliebige Eingrabtiefen liegt also p zwischen 1 und 2.

Das Potenzial an der Erdoberfläche wird nach Gl.(17.15)

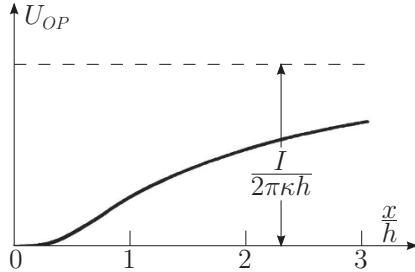


Abbildung 17.11. Spannungstrichter des Tiefenerder

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa} \frac{2}{\sqrt{h^2 + x^2}}, \quad (17.30)$$

wenn mit x der Abstand des betrachteten Punktes P von der Eingrabstelle 0 des Erders bezeichnet wird. Der Spannungstrichter ist durch Abb. 17.11 dargestellt. Das größte Potenzialgefälle tritt in einem Abstand

$$s = 0,707 h \quad (17.31)$$

vom Punkt 0 auf; dort ergibt sich die größte Schrittspannung. Das E-Feld hat an dieser Stelle den Wert

$$\|\mathbf{E}\| = 0,061 \frac{I}{\kappa h^2}. \quad (17.32)$$

Sie nimmt also mit wachsender Tiefe des Erders sehr rasch ab.

17.3 Linienquelle

Bringt man eine sehr große Anzahl von Punktquellen auf einer geraden Linie an, so ergibt sich bei unendlich feiner Verteilung eine *Linienquelle*. Eine solche Linienquelle, Abb. 17.12, kann man sich in Längenelemente $d\zeta$ zerlegt denken, die alle als Punktquellen aufgefasst werden können; sie führen dem Feld einen Strom zu, der gleich $I d\zeta / (2l)$ ist, wenn mit $2l$ die Länge der Linie, mit I der gesamte von der Linie ausgehende Strom bezeichnet wird. In irgendeinem Punkt P mit den Koordinaten x und y ergibt nach Gl.(17.11) die Punktquelle $d\zeta$ zum Potenzial einen Betrag

$$d\varphi = I \frac{d\zeta}{2l} \frac{1}{4\pi\kappa r} = I \frac{d\zeta}{8\pi\kappa l \sqrt{y^2 + (x - \zeta)^2}}, \quad (17.33)$$

wobei ζ den Abstand des Längenelementes vom Mittelpunkt der Linie bezeichnet. Das gesamte Potenzial der Linienquelle ist daher

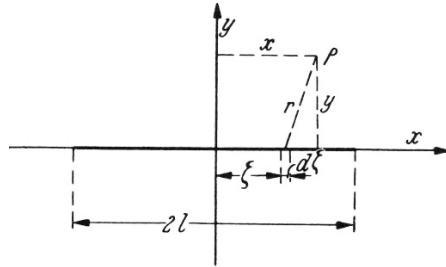


Abbildung 17.12. Linienquelle

$$\varphi = \frac{I}{8\pi\kappa l} \int_{-l}^{+l} \frac{d\zeta}{\sqrt{y^2 + (x - \zeta)^2}} = \frac{I}{8\pi\kappa l} \ln \frac{x + l + \sqrt{y^2 + (x + l)^2}}{x - l + \sqrt{y^2 + (x - l)^2}}. \quad (17.34)$$

Die Potenzialflächen sind hier Rotationsellipsoide, die Potenziallinien in der x, y -Ebene sind konfokale Ellipsen, deren Brennpunkte durch die Endpunkte der Strecke $2l$ gebildet werden, Abb. 17.13. Bezeichnet man nämlich die große Achse einer solchen Ellipse mit $2a$, so gilt auf Grund bekannter Eigenschaften der Kegelabschnitte für die Strahlen zu den beiden Brennpunkten

$$r_1 = a + x \frac{l}{a} = \sqrt{y^2 + (x + l)^2}; \quad (17.35)$$

$$r_2 = a - x \frac{l}{a} = \sqrt{y^2 + (x - l)^2}. \quad (17.36)$$

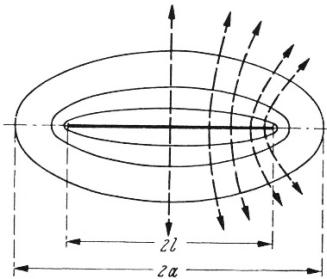
Setzt man diese Achse in Gl.(17.34) ein, so folgt

$$\varphi = \frac{I}{8\pi\kappa l} \ln \frac{a + l}{a - l}. \quad (17.37)$$

Für jeden beliebigen Wert von a ist also das Potenzial eine Konstante. Die Strömungslinien sind Hyperbeln mit den gleichen Brennpunkten, wie in Abb. 17.13 angedeutet.

Wenn die kleine Halbachse der Ellipsen sehr klein gegen die Länge ist, wenn also a angenähert gleich l ist, dann ergeben sich nahezu zylindrische Potenzialflächen, deren Enden abgerundet sind. Die von einer stabförmigen Elektrode mit dieser Form ausgehende Strömung hat daher die gleichen Potenzialflächen wie die Linienquelle. Bezeichnet man den Durchmesser des Stabes in der Mitte ($x = 0$) mit d , so wird die Spannung gegen weit entfernte Punkte, U , gleich dem Potenzial der Potenzialfläche, die durch den Punkt $x = 0, y = (1/2)d$ geht; für diesen Punkt ist nach Gl.(17.34)

$$\varphi = U = \frac{I}{8\pi\kappa l} \ln \frac{l + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l^2}}{-l + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l^2}}. \quad (17.38)$$

**Abbildung 17.13.** Feld- und Potenziallinienbild der Linienquelle

Berücksichtigt man, dass der Durchmesser d des Stabes sehr klein gegen seine Länge $2l$ sein soll, so wird angenähert

$$U = \frac{I}{4\pi\kappa l} \ln \frac{4l}{d}. \quad (17.39)$$

Die Potenzialverteilung in der Umgebung eines senkrecht in die Erdoberfläche eingegrabenen Stabes ergibt sich, wenn man das soeben betrachtete Feld durch die Mittelebene $x = 0$ teilt. Der Übergangswiderstand ist in diesem Fall

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln \frac{4l}{d}, \quad (17.40)$$

wobei l die Länge des Stabes oder Rohres innerhalb der Erde bezeichnet.

Zahlenbeispiel: Ein Rohrerder von der Länge $2m$ mit einem Durchmesser $d = 5cm$ hat bei einer Bodenleitfähigkeit von $10^{-2} S/m$ einen Übergangswiderstand

$$R = \frac{10^2 \Omega}{2\pi 2} \ln \frac{800}{5} \approx 40 \Omega. \quad (17.41)$$

Der Übergangswiderstand eines zylindrischen Rohres vom Durchmesser d ist in Wirklichkeit etwas kleiner als der berechnete Wert, da der mittlere Durchmesser des Ellipsoids kleiner ist als d (nämlich $0,785 d$).

Das Potenzial an der Erdoberfläche ergibt sich aus Gl.(17.34) für $x = 0$:

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa l} \ln \frac{l + \sqrt{y^2 + l^2}}{-l + \sqrt{y^2 + l^2}}. \quad (17.42)$$

Bezeichnet wieder U die Spannung des Erders gegen einen weit entfernten Punkt, so ist wegen Gl.(17.39)

$$I = 2\pi\kappa l \frac{U}{\ln \frac{4l}{d}}, \quad (17.43)$$

also

$$\varphi = \frac{U}{2 \ln \frac{4l}{d}} \ln \frac{l + \sqrt{y^2 + l^2}}{-l + \sqrt{y^2 + l^2}}. \quad (17.44)$$

Der *Spannungstrichter* kann danach berechnet werden. Es ergeben sich Kurven, wie sie in Abb. 17.14 dargestellt sind. Die Breite des Spannungstrichters hängt hier von dem Verhältnis d/l ab. Wenn y groß gegen l ist, so ergibt sich aus Gl.(17.42) die Näherungsformel

$$\varphi = \frac{I}{2\kappa\pi y}, \quad (17.45)$$

die zeigt, dass in großer Entfernung vom Erder die Potenzialverteilung sich der eines Kugelerders nähert.

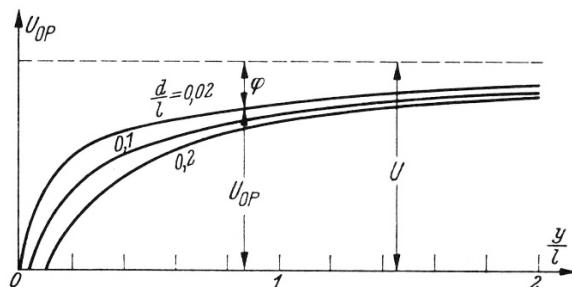


Abbildung 17.14. Spannungstrichter von Rohrerders

Die folgende Tabelle 17.2 gibt einige Werte des Übergangswiderstandes eines Rohres von 1m Länge, das senkrecht in den Erdboden eingegraben ist, bei verschiedenen Werten des Verhältnisses d/l und einer Bodenleitfähigkeit von $10^{-2} S/m$.

l/d	10	20	50	100
R/Ω	60	70	85	95

Tabelle 17.2. Übergangswiderstand R in Abhängigkeit von l/d

Es ist zur Erzielung eines kleinen Übergangswiderstandes vorteilhaft, mehrere kürzere Rohre parallel zu verwenden statt eines einzigen entsprechenden dickeren oder längeren Rohres, wenn nicht das längere Rohr in den Boden mit größerer Leitfähigkeit führt (Grundwasser).

Wenn die Linienquelle, Abb. 17.12, sehr lang ist im Vergleich zu den Koordinaten x und y des Punktes P , dann können die Potenzialflächen als koaxiale Kreiszylinder angesehen werden, und zwar um so genauer, je größer die Länge

der Linie ist. Der Strom tritt dann auf der ganzen Länge gleichmäßig in radialer Richtung aus. Begrenzt man in diesem Fall die Potenzialflächen durch zwei auf der Linie senkrecht stehende Ebenen, die voneinander einen relativ kleinen Abstand s haben, so tritt durch jede beliebige Potenzialfläche mit dem Radius r der gleiche Strom I . Er verteilt sich aus Symmetriegründen gleichmäßig auf jeder Potenzialfläche, so dass die Stromdichte

$$\|\mathbf{J}\| = \frac{I}{2\pi rs} \quad (17.46)$$

beträgt. Die Stromdichte zeigt nach außen, wenn der Strom aus der Linienquelle austritt. Die elektrische Feldstärke hat die gleiche Richtung und den Betrag

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{1}{\kappa} \|\mathbf{J}\| = \frac{I}{2\pi\kappa rs}. \quad (17.47)$$

Das Potenzial im Abstand r von der Achse ist gleich der Spannung zwischen diesem Punkt und dem Bezugspunkt mit dem Abstand b von der Achse; daraus kann das Potenzial mit Hilfe eines Wegintegrals ermittelt werden zu

$$\varphi(r) = \int_r^b \|\mathbf{E}\| dr = -\frac{I}{2\pi\kappa s} \ln \frac{r}{b}. \quad (17.48)$$

Eine derartige Strömung liegt in einem koaxialen Kabel vor, Abb. 17.15,

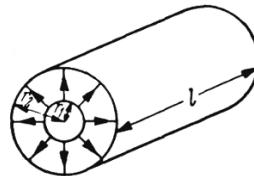


Abbildung 17.15. Koaxiale Zylinderelektrode

wenn es mit Gleichspannung betrieben wird. Der Isolationsstrom geht radial zwischen Innenleiter und Außenleiter (Bleimantel) über. Bezeichnet κ die Leitfähigkeit des Isoliermaterials (z.B. Papier, Öl) und I den gesamten Isolationsstrom, so gilt für das Potenzial im Inneren der Isolation die Gl.(17.48). Wird jetzt die Länge des Kabels mit l bezeichnet, so ist die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \|\mathbf{E}\| dr = \frac{I}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (17.49)$$

Der Isolationswiderstand wird daher

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (17.50)$$

Zahlenbeispiel: Für verschiedene Werte von r_2/r_1 und eine Leitfähigkeit von $\kappa = 10^{-12} \text{ S/m}$ (Ölpapier) ist in der folgenden Tabelle 17.3 der Isolationswiderstand einer Leitung von 1000 m Länge angegeben. Der Isolationswiderstand

r_2/r_1	2	5	10	20	50	100
$R/M\Omega$	1100	2600	3700	4800	6200	7300

Tabelle 17.3. Isolationswiderstand

hängt also nur verhältnismäßig wenig von den Abmessungen der Leiter ab; dagegen ist die Leitfähigkeit des Isolierstoffes, die praktisch in weiten Grenzen variieren kann, von großem Einfluss.

Die Ausbreitung des elektrischen Stromes in einem räumlich ausgedehnten Leiter wird zwar durch sehr einfache Gesetze geregelt; es ist jedoch nur bei verhältnismäßig einfachen geometrischen Formen der Elektroden und Leiteranordnungen, von denen hier einige Beispiele betrachtet wurden, einfach, die Stromverteilung auf mathematischem Wege zahlenmäßig zu bestimmen. Allgemeine Methoden zur graphischen und analytischen Ermittlung von Potenzialfeldern werden im Abschnitt 11 über das elektrische Feld und insbesondere bei der Lösung der Poissonschen Differentialgleichung besprochen.

Teil V

Das stationäre Magnetfeld

Grundgleichungen des stationären Magnetfeldes

Es ist bereits von griechischen Naturgelehrten berichtet worden, dass es Anziehungs- und Abstoßungskräfte zwischen bestimmten Materialien gibt. Man fand diese „Steine“ in der Nähe der griechischen Stadt Magnesia und daher wurden sie als „Magneteisensteine“ bezeichnet; wir nennen sie im folgenden kurz *Magnete*. In ihrer Umgebung werden Kräfte auf andere Magnete ausgeübt. Auch wenn derartige Experimente bis zum heutigen Tage zur Illustration dieser Kräfte verwendet werden, sind sie als Startpunkt für eine mathematische Modellierung magnetischer Felder nur wenig geeignet. Das hat vor allem zwei Gründe:

1. Wir wissen heute, dass ein volles Verständnis magnetischer Eigenschaften von Materialien nur mit Hilfe der Quantenmechanik erreicht werden kann; vgl. z. B. Wijn und Dullenkopf [305].
2. Die bei bestimmten Materialien in natürlicher Weise auftretenden magnetischen Felder sind meistens inhomogen und daher mathematisch nicht in einfacher Weise beherrschbar.

Es ist daher sinnvoll, einen anderen Startpunkt für die mathematische Modellierung der magnetischen Kräfte und das magnetische Feld zu wählen. Die folgenden Überlegungen wurden im Rahmen eines Lehrbuches von Falk und Ruppel [76] ausführlich dargelegt. Damit bietet sich erstmals die Möglichkeit, das stationäre Magnetfeld elementar aber dennoch theoretisch fundiert einzuführen, ohne dass auf verwickelte experimentelle Ergebnisse verwiesen werden muss. Die zugrunde gelegte experimentelle Erfahrung lässt sich z. B. problemlos mit Hilfe des Programmsystems „Albert“ [307] diskutieren, mit dem auch zahlreiche andere physikalische Experimente simuliert werden können.

Statt Kraftwirkungen zu betrachten, die mit dem Vorhandensein von Magneten zusammenhängen, gehen wir von der Wechselwirkung bewegter Ladungen mit dem magnetischen Feld aus. Wie sich experimentell belegen lässt, kann nur dann eine magnetische Kraftwirkung auf Ladungen auftreten, wenn sie sich im magnetischen Feld bewegen. Letztlich geht diese Erfahrung auf die Versuche von Ørsted zurück, obwohl er noch nicht wusste, dass es sich bei

elektrischen Strömen um bewegte Ladungen handelte. Untersucht man die Bewegung einer „kleinen“ ladungsbehafteten Masse in einem nahezu homogenen magnetischen Feld, dann zeigt sich, dass der Betrag der Geschwindigkeit des Massenpunktes nicht verändert wird. Gleichgültig wie das magnetische Feld aussieht, d. h. unabhängig davon gilt also

$$\|\mathbf{v}\| = \text{konst.}, \quad (18.1)$$

wobei $\mathbf{v} := d\mathbf{r}/dt$ die kinematische Geschwindigkeit der Masse ist. Daraus kann leicht abgeleitet werden, dass die *kinematische Geschwindigkeit* und deren Zeitableitung – die *Beschleunigung* – orthogonal zueinander sind

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|^2) = 0. \quad (18.2)$$

Es soll nun geprüft werden, ob die Newtonsche Relation $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ auch im magnetischen Feld gilt. Dazu setzt man die kinematische Geschwindigkeit gleich der dynamischen Geschwindigkeit \mathbf{v} , die sich als Gradient des Impulses \mathbf{p} aus der Gesamtenergie E des betrachteten Körper-Feld-Systems ergibt; vgl. Abschnitt 3.2. Dann folgt mit Gl. (18.2)

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0; \quad (18.3)$$

verwendet man die *dynamische Bewegungsgleichung*, dann erhalten wir außerdem

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (18.4)$$

Diese Beziehungen zeigen, dass entsprechend Gl.(18.3) weder Bewegungsenergie $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}$ noch entsprechend Gl.(18.4) die Verschiebungsenergie $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ zwischen dem mechanischen System und dem Magnetfeld ausgetauscht werden. In Abschnitt 3.2 wurde darauf hingewiesen, dass die Newtonsche Relation $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ nur dann gilt, wenn die Kraft allein vom Ort abhängt und nicht vom Impuls und damit von der Geschwindigkeit. Das widerspricht aber Gl.(18.4), denn dort wird verlangt, dass Kraft \mathbf{F} und Geschwindigkeit \mathbf{v} immer senkrecht aufeinander stehen müssen, so dass eine Abhängigkeit von \mathbf{F} und \mathbf{v} vorliegt. Die Annahme der Gültigkeit der Newtonschen Relation führt also zu einer widersprüchlichen Folgerung im Sinne Kraftdefinition und kann somit für das stationäre Magnetfeld nicht richtig sein. Demzufolge ist also die magnetische Kraft nicht von 1. Art.

Die Überlegungen von Falk und Ruppel setzen übrigens eine eindeutige Definition der Kraft \mathbf{F} – Gradient der Energie nach dem Ort – voraus, die man in den üblichen Darstellungen magnetischer Kräfte nicht findet. Es stellt sich die Frage, wie man zu einem Ausdruck für die magnetische Kraft kommt. Da die Kraft nach Abschnitt 3.2 aus einer Energiefunktion abgeleitet werden kann, ist es naheliegend, zunächst nach einem geeigneten Ausdruck für die Energie des Gesamtsystems zu suchen. Dazu machen wir die folgende plausible Annahme:

Bei jeder Bewegung eines Körpers in einem Feld muss die Energie E konstant bleiben.

Dabei wird natürlich kein Dissipationsmechanismus (z.B. Reibung) berücksichtigt. Da im magnetischen Feld erfahrungsgemäß der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist, machen wir folgenden Ansatz für die Energie (ohne Ruheenergie)

$$E := \frac{m}{2} \|\mathbf{v}\|^2; \quad (18.5)$$

dabei ist m die Masse des (Probe-)Körpers. Werden nun die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z nach Gl.(3.5) mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Energiefunktion E nach den entsprechenden (linearen) Impulsen p_x, p_y und p_z ausgedrückt, dann ergibt sich die folgende Beziehung

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p_z} \right)^2 = \frac{2}{m} E. \quad (18.6)$$

Es handelt sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für die Energie E . Eine Lösung für diese Gleichung ist bekannt

$$E(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2), \quad (18.7)$$

die sich als kinetische Energie des freien Teilchens interpretieren lässt. Offensichtlich gilt in diesem Fall die Newtonsche Relation $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, da die zugehörige Geschwindigkeit \mathbf{v} nur vom Impuls \mathbf{p} abhängt. Mit Hilfe der Kettenregel der Differentialrechnung erkennt man leicht, dass auch die modifizierte Energiefunktion

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} ((p_x + a_x(\mathbf{r}))^2 + (p_y + a_y(\mathbf{r}))^2 + (p_z + a_z(\mathbf{r}))^2), \quad (18.8)$$

wobei $\mathbf{a}(\mathbf{r}) := (a_x(\mathbf{r}), a_y(\mathbf{r}), a_z(\mathbf{r}))^T$ ein willkürliches vektorielles mathematisches Feld ist, eine Lösung der PDgl. (18.6) ist. Nach Falk und Ruppel kann man diese Freiheitsgrade ausnutzen, um das magnetische Feld und seinen Einfluss auf die Bewegung des geladenen Probekörpers zu beschreiben. Zuvor notieren wir noch die vektorielle Form der neuen Energiebeziehung (18.8)

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} + \mathbf{a}(\mathbf{r}))^2. \quad (18.9)$$

Differenziert man die Energie partiell nach den Impulskomponenten, so ergeben sich die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten, die man in einem Vektor zusammenfassen kann

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} (\mathbf{p} + \mathbf{a}(\mathbf{r})). \quad (18.10)$$

Daraus kann man die in stationären Magnetfeldern gültige Beziehung zwischen dem linearen Impuls \mathbf{p} und der Geschwindigkeit \mathbf{v} ermitteln

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} - \mathbf{a}(\mathbf{r}), \quad (18.11)$$

welche die Newtonsche Relation ersetzt. Weiterhin kann man die Kraft ableiten, in dem man den negativen Gradienten nach den Ortskoordinaten bildet

$$F_x = -\frac{\partial E}{\partial x} \quad (18.12)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{m} \left\{ (p_x + a_x) \frac{\partial a_x}{\partial x} + (p_y + a_y) \frac{\partial a_y}{\partial x} + (p_z + a_z) \frac{\partial a_z}{\partial x} \right\} \\ &= - \left\{ v_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial a_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial a_z}{\partial x} \right\}, \end{aligned}$$

$$F_y = - \left\{ v_x \frac{\partial a_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial a_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial a_z}{\partial y} \right\}, \quad (18.13)$$

$$F_z = - \left\{ v_x \frac{\partial a_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial a_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right\}. \quad (18.14)$$

Mit diesen Kraftkomponenten und mit der Beziehung (18.11) kann man die Bewegungsgleichung formulieren

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v} - \mathbf{a}(\mathbf{r})) = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (18.15)$$

die sich nach der Geschwindigkeit \mathbf{v} auflösen lässt

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{a}(\mathbf{r})}{dt}. \quad (18.16)$$

Verschwindet das Feld \mathbf{a} , das wir mit dem magnetischen Feld in Verbindung bringen wollen, dann geht die Bewegungsgleichung in die klassische Newtonsche Bewegungsgleichung über; aus Gl.(18.11) geht auch die Newtonsche Relation wieder hervor.

Mit Hilfe der expliziten Ausdrücke für die Kraftkomponenten kann man die rechte Seite der verallgemeinerten Bewegungsgleichung (18.16) in eine andere Form bringen, wenn man die totale Ableitung der Komponenten von \mathbf{a} benutzt. Beispielsweise erhält man für die x -Komponente der rechten Seite von Gl. (18.16) nach einigen Umformungen

$$F_x + \frac{da_x}{dt} = -v_y \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right). \quad (18.17)$$

Man kann leicht zeigen, dass dieser Ausdruck gerade der x -Komponente von $-\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{a}$ entspricht. In gleicher Weise kann man auch die anderen beiden Komponenten umformen und man erhält schließlich eine alternative Form der Bewegungsgleichung 18.16 eines geladenen, bewegten Probekörpers im magnetischen Feld

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{a}. \quad (18.18)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit \mathbf{v} , dann ist die rechte Seite von (18.18) gleich null und wie gewünscht stehen die Vektoren der Geschwindigkeit \mathbf{v} und der Beschleunigung $d\mathbf{v}/dt$ in jedem Zeitpunkt t senkrecht aufeinander. Weiterhin zeigt sich, dass im Gegensatz zu der Geschwindigkeits-Impuls-Relation nur die Rotation von \mathbf{a} in die Bewegungsgleichung eingeht. Da man die Bewegung des Probekörpers mit der Ladung q als beobachtbare physikalische Größe auffassen kann, ist es sinnvoll, die auf die Ladung des Probekörpers normierte Rotation von \mathbf{a} einschließlich des negativen Vorzeichens (Konvention!) als neue vektorielle Feldgröße des magnetischen Feldes – das B-Feld – zu definieren

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) := -\frac{1}{q} \operatorname{rot} \mathbf{a}. \quad (18.19)$$

In entsprechender Weise verwenden wir statt \mathbf{a} die auf q normierte Größe

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := -\frac{1}{q} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \quad (18.20)$$

und nennen sie das *Vektorpotenzial* des magnetischen Feldes. Es gilt $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ wegen $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$.

Die Bewegungsgleichung lautet somit

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad (18.21)$$

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung wird in der Literatur häufig als *Lorentz-Kraft* bezeichnet. Im Rahmen der auf Falk und Ruppel [76] zurückgehenden Betrachtungen handelt es sich jedoch nicht um eine Kraft, da sie nicht als Gradient der Energiefunktion E nach dem Ort abgeleitet werden kann. Daraus folgen auch verschiedene Unklarheiten in den klassischen Darstellungen, die mit der hier präsentierten Vorgehensweise entfallen.

Zusammenfassend kann gesagt werden: *Das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ beschreibt den Einfluss des magnetischen Feldes auf den Impuls eines geladenen Körpers und das B-Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ auf seine Beschleunigung.*

Nach der Einführung der magnetischen Feldgrößen \mathbf{A} und \mathbf{B} , die mit der Kraft auf geschwindigkeitsbehaftete und geladene Probekörper in Beziehung stehen, gehen wir auf die Erzeugung magnetischer Kraftwirkungen ein. Ausgehend von den vorherigen Überlegungen ist naheliegend, dass bewegte Ladungen ihrerseits ein magnetisches Feld erzeugen. Mit den Versuchen von Ørsted, die er im Jahre 1820 durchgeführt hat (vgl. Simonyi [262], Tricker [277]), konnte diese Vorstellung bestätigt werden. Ørsted zeigte nämlich, dass ein stromdurchflossener Leiter eine Kraftwirkung auf eine Magnetnadel ausübt. Das es sich bei den elektrischen Strömen um bewegte Ladungen handelte, konnte Ørsted allerdings nicht wissen, da eine atomistische Deutung des elektrischen Stromes auf der Grundlage bewegter Elektronen in metallischen Leitern noch nicht bekannt war. Die Elektronen als kleinste Ladungsträger wurden erst von Lenard und Thomson entdeckt. Die Bezeichnung „Elektron“ stammt von

Thomson. In Abschnitt 15 wurde die elektrische Stromdichte \mathbf{J} als feldmäßige Darstellung eines verteilten Stromes eingeführt.

Im Sinne einer Nahwirkungstheorie ist es notwendig, die magnetische „Erregung“ in der Umgebung einer Stromdichte \mathbf{J} durch eine weitere magnetische Feldgröße zu repräsentieren. Dieses vektorielle mathematische Feld bezeichnen wir mit \mathbf{H} und nennen es H-Feld. In der Literatur wird es üblicherweise *magnetisches Feld* oder *magnetische Erregung* genannt. Allerdings gibt es eine lang andauernde Kontroverse um diese Bezeichnung, auf die wir nicht weiter eingehen wollen; vgl. z. B. Bosse [37]. Das H-Feld wird im Sinne des Satzes von Helmholtz (vgl. Anhang A.2), dessen Gültigkeit wir für alle mathematischen vektoriellen Felder voraussetzen, i. w. durch Vorgabe seiner Divergenz und Rotation bestimmt. Da es sich bei der Rotation – im Gegensatz zur Divergenz – von \mathbf{H} um ein Vektorfeld handelt, so ist folgende Festlegung

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (18.22)$$

zu treffen. Damit ist nun neben der Divergenz des B-Feldes mit $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ auch die Rotation des H-Feldes bestimmt. Der Satz von Helmholtz fordert aber für eine (bis auf ein konstantes vektorielles Feld) eindeutige Festlegung der Felder noch eine Bestimmung der Divergenz des H-Feldes und die Rotation des B-Feldes. Wie in der Elektrostatisik werden wir in Abschnitt dazu die Materialgesetze nutzen. Im einfachsten Fall ergibt sich eine proportionale Relation $\mathbf{B} \sim \mathbf{H}$. Die Proportionalitätskonstante wird mit μ bezeichnet und *Permeabilität* genannt. Wir gehen darauf in Abschnitt 20 genauer ein.

Auf dieser Basis können nun die Grundgleichungen des stationären Magnetfeldes mit Hilfe des B- und des H-Feldes für den Fall linearer, isotroper, homogener Materialien formuliert werden

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (18.23)$$

mit denen sich bei vorgegebenen Randbedingungen die entsprechenden Felder im Fall einer vorgegebenen Stromdichte berechnen lassen. Allerdings handelt es sich um gemischte algebraische und partielle Differentialgleichungen, die für eine direkte Lösung etwas unhandlich sind. Man kann jedoch aus diesen Beziehungen in einfacher Weise eine mathematische Grundgleichung ableiten. Dazu nutzt man die bekannte Operatoridentität¹ $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ (oder mit Gl.(18.19) und Gl.(18.20)), um das divergenzfreie B-Feld mit Hilfe der Rotation des Vektorpotenzials \mathbf{A} darzustellen (Lösung der homogenen Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$)

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (18.24)$$

und setzt diese Beziehung unter Verwendung des Materialgesetzes in die Rotation des H-Feldes ein

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (18.25)$$

¹ Die Operatoren div und rot werden auf Elemente eines geeigneten Funktionenraumes angewendet, wobei 0 der Nulloperator ist.

Mit der Operatoridentität $\operatorname{rot}(\cdot)\operatorname{rot}(\cdot) = \operatorname{grad}(\cdot)\operatorname{div}(\cdot) - \Delta(\cdot)$ erhält man schließlich

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad (18.26)$$

wobei für den Laplaceoperator $\Delta(\cdot) := \operatorname{div}(\cdot)\operatorname{grad}(\cdot)$ gilt und die sogenannte *Coulomb-Eichung* verwendet wird. Dabei wird der im Sinne des Satzes von Helmholtz noch nicht festgelegte Divergenzanteil des Vektorpotenzials (willkürlich) gleich null gesetzt: $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Auf inhomogene Materialien wird in Abschnitt 20 eingegangen. Auf die verschiedenen Lösungsverfahren der Vektor-Poisson-Gleichung gehen wir in Abschnitt 21 näher ein.

Auf der Grundlage der mathematischen Felder \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{H} , mit denen wir das stationäre Magnetfeld beschreiben, wird noch eine wichtige integrale skalare Größe eingeführt: der *magnetische Fluss* Φ . Bekanntlich haben Faraday und Maxwell beim Aufbau einer feldmäßigen Beschreibung elektromagnetischer Phänomene auf das hydrodynamische Vorbild zurückgegriffen. In elementaren Darstellungen ist es gelegentlich durchaus sinnvoll, diese Analogie hervorzuheben; das gilt insbesondere für das elektrische Strömungsfeld (vgl. Abschnitt 15). Daraus erklären sich auch manche bis heute noch gebräuchlichen Bezeichnungen wie *magnetische Flussdichte* für das B-Feld. Wenn man das B-Feld in diesem Sinne interpretiert, ist es naheliegend, auch die folgende, auf eine Fläche A^2 bezogene integrale Größe einzuführen

$$\Phi(A) := \iint_A \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}}. \quad (18.27)$$

Eine weniger auf die Hydrodynamik bezogene Interpretation des magnetischen Flusses Φ ist die eines gerichteten Mittelungsprozesses des B-Feldes über die orientierte Fläche; in Gl.(18.27) wird das „lokal“ mit Hilfe eines Skalarprodukts ausgedrückt. Der magnetische Fluss Φ kann somit als Abbildung von der Menge „integrabler“ Flächen A in die reellen Zahlen interpretiert werden $\Phi : A \mapsto \Phi(A)$, die in der Mathematik als *Funktional* bezeichnet wird. Auf diese Interpretation werden wir allerdings nicht weiter eingehen.

Eine Reihe von Beziehungen in der Theorie des stationären und des quasi-stationären Magnetfeldes lassen sich mit Hilfe des „integralen“ magnetischen Flusses Φ in alternativer Weise darstellen. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass man die Eigenschaften des magnetischen bzw. elektromagnetischen Feldes nicht punktweise sondern nur flächenbezogen „ausmessen“ kann.

Setzen wir $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ aus Gl.(18.24) in Gl.(18.27) ein, dann erhält man

$$\Phi(A) = \iint_A \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} = \iint_A \operatorname{rot} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} = \oint_{C_A} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{s}}, \quad (18.28)$$

wobei der Stokessche Satz bei der letzten Umformung verwendet wurde.

² Es sollte beachtet werden, dass der Buchstabe A sowohl für die Fläche als auch für das Vektorpotenzial verwendet wird. Aus dem Zusammenhang sollte allerdings die jeweilige Bedeutung klar sein.

Elementare Betrachtungen zum stationären Magnetfeld

19.1 Magnetische Kraftwirkungen und das B-Feldes

Wie mit dem Vorhandensein elektrischer Ladungen immer ein elektrisches Feld verbunden ist, so tritt immer ein magnetisches Feld auf, wenn elektrische Ströme fließen, wenn sich also elektrische Ladungen bewegen. Ein *stationäres* magnetisches Feld entsteht, wenn es sich um Gleichstrom handelt, der also hinsichtlich der Stromdichte \mathbf{J} bzw. des Stromes I zeitkonstant ist. Daher sprechen wir in diesem Fall von Stationarität. Das magnetische Feld kann wie das elektrische durch Feldlinien veranschaulicht werden. Von dem Verlauf dieser Linien geben die bekannten, erstmals im Jahre 1821 von Seebeck [29] durchgeführten Versuche mit Eisenspänen eine Vorstellung. Auf langgestreckten Eisenspänen oder auf Magneten werden im magnetischen Feld mechanische Kräfte ausgeübt, die die Eisenspäne in eine bestimmte Richtung zu drehen versuchen. Dadurch wird die Feldlinienrichtung an jeder Stelle des B-Feldes definiert, das nach Abschnitt 18 die Kraftwirkungen des magnetischen Feldes charakterisiert. Diese Feldlinien bezeichnet man als *magnetische Induktionslinien*, *magnetische Feldlinien* oder hier als B-Feldlinien.

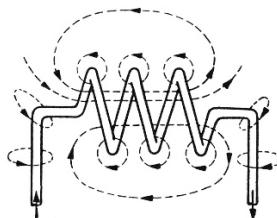


Abbildung 19.1. B-Feldlinien einer Drahtspule

Wichtige Anwendungen dieser Vorstellung sind magnetische Speichermedien wie Magnetbänder, bei denen man durch ein äußeres Magnetfeld die lang-

gestreckten Eisenteilchen auf dem entsprechenden Trägermaterial ausrichtet; vgl. z. B. Bhushan [30].

Den Verlauf der B-Feldlinien kann man untersuchen, wenn man eine kleine Magnetenadel, die sich nach allen Richtungen hin frei drehen kann, in das magnetische Feld bringt. Sie stellt sich in die Feldlinienrichtung ein, und man setzt willkürlich einen Richtungssinn der Feldlinien fest, indem man sagt, der Nordpol der Magnetenadel zeige in Richtung der Feldlinien. Denkt man sich die Magnetenadel in dieser Richtung ein kleines Stück weiter bewegt, so wird sie ihre Richtung ein wenig ändern. Bewegt man sie fortgesetzt in der neuen Richtung um ein kleines Stückchen weiter, so erhält man den räumlichen Verlauf einer Feldlinie. Es ergibt sich, dass *alle Feldlinien in sich geschlossene Kurven bilden, die mit dem elektrischen Stromkreis verkettet sind* wie die Glieder einer Kette (siehe jedoch hierzu Anm. in Abschnitt 22.1). Dabei wird im Sinne der Nahwirkungstheorie, im Rahmen derer nicht der Strom oder die Stromdichte sondern das H-Feld als Ursache der magnetischen Kraftwirkung angesehen werden muss, ein lineares Materialgesetz (z. B. Vakuum) vorausgesetzt.

Bei einer von Strom durchflossenen Drahtspule nach Abb. 19.1 findet man z.B. B-Feldlinien der gestrichelt eingezeichneten Formen. Ihre Richtung steht zur Stromrichtung im Leiter in der gleichen Beziehung wie die Drehrichtung einer Rechtsschraube zur axialen Bewegungsrichtung. Man beobachtet weiterhin, dass alle B-Feldlinien in sich *geschlossen* sind.

Das magnetische Feld ist ein besonderer Zustand des Raumes, der gekennzeichnet ist durch *mechanische Kraftwirkungen*. Wie im elektrischen Feld die mechanische Kraftwirkung zur Definition des E-Feldes dienen, so können hier Kraftwirkungen zur Festlegung eines Maßes für die Stärke des B-Feldes benutzt werden. Allerdings wird man die Geschwindigkeit der Ladungsträger ggf. indirekt über die Stromdichte oder den Strom zu berücksichtigen haben.

Im folgenden wollen wir diskutieren, wie man in klassischer Art und Weise das B-Feld einführt. In Abschnitt 18 hatten wir nach Falk und Ruppel [76] lediglich aus der Beobachtung, dass sich der Betrag der Geschwindigkeit eines (gleichförmig) bewegten und geladenen Probekörpers nicht ändert, auf die Art der Ankopplung des magnetischen Feldes an die mechanischen Bewegungsgleichungen und die Beschreibungsgrößen für die Kraftwirkungen des magnetischen Feldes geschlossen. Dabei ergab sich auch eine Größe mit der physikalischen Dimension einer Kraft, die üblicherweise als Lorentzkraft bezeichnet wird. Im Rahmen der systematischen Einführung des B-Feldes und des Vektorpotenzials nach Falk und Ruppel handelt es sich jedoch nicht um eine Kraft im Sinne der klassischen Mechanik, die mit einer räumlichen Verschiebung in Zusammenhang gebracht wird. Daraus ergeben sich immer wieder Missverständnisse bei der Diskussion von Kraftwirkungen im magnetischen Feld. Dennoch wollen wir auf die klassische Einführung des B-Feldes eingehen.

Bringt man in das magnetische Feld eines räumlich festliegenden Leiters einen zweiten von Strom durchflossenen Leiter, so wird auf diesen eine mecha-

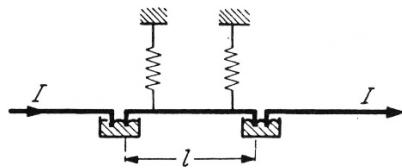


Abbildung 19.2. Messstab zur Bestimmung des B-Feldes

nische Kraft ausgeübt. Zur Messung dieser Kraft kann im Prinzip eine Einrichtung nach Abb. 19.2 dienen. Ein kurzer Kupferstab („Meßstab“) taucht in zwei Quecksilbernäpfe ein, die den Strom I zuführen. Die auf den Messstab von der Länge l ausgeübte Kraft kann mit einer Federwaage oder mit Gegengewichten bestimmt werden. Derartige Messungen zeigen nun:

1. Der Betrag $\|\mathbf{F}\|$ der Kraft hängt an jeder Stelle des Magnetfeldes von der Richtung des Messstabes gegenüber der Richtung der B-Feldlinien ab. Wenn der Stab mit einer B-Feldlinie zusammenfällt, so wird keine Kraft auf ihn ausgeübt. Die größte Kraft ergibt sich, wenn der Stab zu den B-Feldlinien senkrecht steht. Ändert man den Winkel α , den die Stromrichtung mit der B-Feldlinienrichtung bildet, so ändert sich der Betrag $\|\mathbf{F}\|$ der Kraft wie $\sin \alpha$.
2. Die Kraft ist proportional der Stromstärke I . Mit der Stromrichtung kehrt sich auch die Kraftwirkung um.
3. Die Kraft wirkt immer senkrecht zur Richtung des Stabes und zur Richtung der B-Feldlinien, und zwar so, dass Stromrichtung, B-Feldlinienrichtung und Kraftrichtung ein *Rechtssystem* bilden. Abb. 19.3. Dreht man die Richtung des Stromes auf dem kürzesten Wege in die Richtung der B-Feldlinien, so erhält man die Drehrichtung einer Rechtsschraube, die sich in der Kraftrichtung bewegt.
4. Die Kraft ist proportional der Länge l des Messstabes.

Aus diesen Beobachtungen kann man die Formel „ableiten“

$$\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{B}\| I l \sin \alpha, \quad (19.1)$$

wobei man $\|\mathbf{B}\|$ als einen Proportionalitätsfaktor auffassen kann, der als ein Maß für die Stärke der Kraftwirkung des magnetischen Feldes an der betreffenden Stelle benutzen kann. Entsprechend den oben eingeführten B-Feldlinien spricht man häufig von *magnetischer Flussdichte* oder *magnetischer Induktion*; in Abschnitt 18 haben wir die Bezeichnung B-Feld eingeführt.

Bestimmt man mit Hilfe des Messstabes an irgendeiner Stelle des magnetischen Feldes die auf das Stäbchen ausgeübte Kraft $\|\mathbf{F}\|_m$ (für $\alpha = 90^\circ$), so

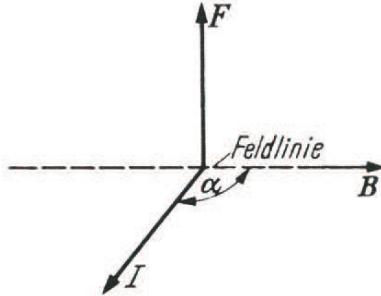


Abbildung 19.3. Richtung von Kraft, Strom und Magnetlinien

findet man den Betrag des B-Feldes aus

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\|\mathbf{F}\|_m}{Il}. \quad (19.2)$$

Dadurch ist die Größe $\|\mathbf{B}\|$ definiert; ihre Einheit kann willkürlich festgesetzt werden. Die heute verwendete und genormte Einheit der Kraft ergibt sich durch die Festlegung: *Die Einheit des B-Feldes liegt vor, wenn auf einen Messstab von der Länge 1 m, der von einem Strom mit der Stärke 1 A durchflossen wird, eine Kraft von 1 N (Newton) ausgeübt wird.* Diese Einheit ist also

$$1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \frac{Ws}{Am^2} = 1 \frac{Vs}{m^2}, \quad (19.3)$$

wofür gesetzt wird

$$1 T = 1 \text{ Tesla} := 1 \frac{Vs}{m^2}. \quad (19.4)$$

Eine ältere, heute nicht mehr benutzte Einheit ist das Gauß, abgekürzt G ,

$$1 G := 10^{-4} \frac{Vs}{m^2}. \quad (19.5)$$

Allerdings lässt sich auf diesem Wege nur der Betrag des B-Feldes festlegen, wobei man das B-Feld als einen Vektor auffassen kann, dessen Richtung durch die B-Feldlinienrichtung gegeben ist. Daraus ist jedoch eine Charakterisierung des B-Feldes im Sinne des Satzes von Helmholtz möglich. Da das B-Feld nach Gl.(19.4) auf die Fläche bezogen ist, hat man ganz ähnliche Vorteile wie die Auffassung des D-Feldes im elektrischen Feld als Vektor. Wenn man nämlich willkürlich festlegt, dass der Betrag von \mathbf{B} die Dichte der B-Feldlinien angeben soll, dann erhält man die gesamte Zahl der B-Feldlinien, die durch irgendeine Fläche hindurchgehen, als Oberflächenintegral des Vektorfeldes \mathbf{B} über diese Fläche. Es ist also der *magnetische Fluss*

$$\Phi = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (19.6)$$

ganz analog wie beim Fluss des D-Feldes im elektrischen Feld. Diese Größe, die bereits im vorherigen Abschnitt eingeführt wurde, wird *magnetischer Fluss* oder gelegentlich auch *magnetischer Induktionsfluss* genannt. Die Aussage, dass alle magnetischen B-Feldlinien in sich geschlossen sind, lässt sich damit in der Form schreiben

$$\iint_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (19.7)$$

Das Oberflächenintegral des B-Feldes über eine beliebige Hüllfläche ist null, da aus der Fläche genau so viele B-Feldlinien herauskommen, wie durch sie eintreten.

Diese Beziehung kann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (unter gewissen mathematischen Voraussetzungen) in die Beziehung $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ umgewandelt werden. Diese Beziehung ergab sich im Rahmen der Überlegungen von Falk und Ruppel als Folgerung, da das B-Feld als Rotationsanteil des Vektorpotenzials \mathbf{A} eingeführt wurde. Hinsichtlich der Interpretation dieser Beziehung kann gesagt werden, dass $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ als Quellenfreiheit gedeutet wird und damit das Vorhandensein von magnetischen Monopolen ausschließt. Im Rahmen der Multipolentwicklung in Abschnitt 21.4 lässt sich das noch einmal nachrechnen.

Die Einheit des magnetischen Flusses ϕ ergibt sich durch Multiplikation der Einheit des B-Feldes mit der Flächeneinheit. Die SI-Einheit des magnetischen Flusses ist

$$1Wb = 1\text{Weber} := 1Vs. \quad (19.8)$$

Danach gilt auch

$$1T = 1 \frac{Wb}{m^2}. \quad (19.9)$$

Es gilt also auch

$$1G = 10^{-8} \frac{Wb}{cm^2} = 10^{-4} \frac{Wb}{m^2} = 10^{-4}T. \quad (19.10)$$

In einem homogenen Feld ist das B-Feld überall gleich, die Feldlinien bilden parallele gerade Linien. Ein solches Feld ist bei Gl.(19.1) vorausgesetzt; die Länge l des Messstäbchens muss also bei einem beliebigen Feld so klein sein, dass das Feld in der Umgebung des Messstäbchens als hinreichend homogen angesehen werden kann.

Die Kraftwirkung des magnetischen Feldes auf stromdurchflossene Leiter besteht in einer Wirkung auf die im Leiter *bewegten* Elektrizitätsmengen. Fließt in dem Leiter ein Strom I , so ist dies gleichbedeutend mit der Bewegung einer Elektrizitätsmenge Q mit einer bestimmten Geschwindigkeit v , und es gilt

$$I l = Q v. \quad (19.11)$$

Daher kann man allgemein für die Kraft, die im magnetischen Feld auf eine bewegte Elektrizitätsmenge Q ausgeübt wird, Gl.(19.1), schreiben

$$\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{B}\|Q\|\mathbf{v}\| \sin \alpha. \quad (19.12)$$

Diese Beziehung gilt zunächst nur im homogenen magnetischen Feld; man kann sie aber auch bei beliebigen Feldern anwenden, wenn die räumliche Ausdehnung der Ladung Q so klein ist, dass das magnetische Feld in der Umgebung der Ladung als homogen angesehen werden kann.

Die Richtung der Kraft ist durch oben mit 3. bezeichnete Regel bestimmt. Man kann diese Regel in die Gleichung für den Betrag der Kraft aufnehmen, wenn man sie vektoriell formuliert; dazu verwendet man das in 3-dimensionalen Vektorräumen definierbare Kreuzprodukt und notiert

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (19.13)$$

Danach steht der Vektor der Kraft \mathbf{F} senkrecht auf der Ebene, die durch das B-Feld \mathbf{B} und den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} der bewegten Ladung Q aufgespannt wird.

Wir wollen noch einmal darauf hinweisen, dass diese Betrachtungen nur in sehr verwickelter und von vielen Annahmen geprägter Weise zu einer Kopplung von Mechanik und magnetischen Feld führen, was auch dadurch erkennbar ist, dass die „Lorentzkraft“ von der Geschwindigkeit abhängt. Daher ist die in Abschnitt 18 vorgestellte Vorgehensweise, die mit einem eindeutig definierten Kraftbegriff arbeitet, in jedem Falle vorzuziehen.

19.2 Beispiele für magnetische Kraftwirkungen

1. Die Kraftwirkungen des magnetischen Feldes auf elektrische Ladungen zeigen sich besonders deutlich bei Elektronenstrahlen in einem luftleeren Gefäß. Die Elektronen beschreiben infolge der magnetischen Feldkräfte im magnetischen Feld gekrümmte Bahnen. An jeder Stelle der Bahn erfährt ein geladenes Teilchen eine Beschleunigung, die senkrecht zur Bewegungsrichtung und zur Richtung der magnetischen Feldlinien steht. Handelt es sich um ein homogenes Feld, so gilt folgendes. Stimmt die Bewegungsrichtung des Teilchens überein mit der Feldlinienrichtung, dann ergibt sich eine geradlinige Bahn, da in diesem Falle nach Gl. (19.13) keine Kräfte auftreten. Steht dagegen die Richtung der Bewegung senkrecht auf der Feldlinienrichtung, so ergibt sich eine konstante Beschleunigung senkrecht zur Bahn. Die Bahn wird ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Feldlinienrichtung liegt. Bezeichnet man die Masse des geladenen Teilchens mit m , so ist die infolge der Kraft $\|\mathbf{F}\|$ entstehende radiale Beschleunigung

$$\|\mathbf{a}\| = \frac{\|\mathbf{F}\|}{m} = \frac{Q\|\mathbf{B}\|v}{m}. \quad (19.14)$$

Die zentrifugale Beschleunigung bei einer Kreisbewegung mit dem Radius r ist andererseits

$$\|\mathbf{a}\| = \frac{v^2}{r}. \quad (19.15)$$

Es stellt sich daher eine solche Bahn ein, dass

$$\frac{Q\|\mathbf{B}\|v}{m} = \frac{v^2}{r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{mv}{Q\|\mathbf{B}\|}. \quad (19.16)$$

Für die Zeitdauer eines Umlaufs auf der Kreisbahn folgt

$$\tau = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{Q\|\mathbf{B}\|}. \quad (19.17)$$

Die Umlaufdauer ist also unabhängig von der Geschwindigkeit, solange die Masse gleich der Ruhemasse gesetzt werden kann.

Die Umlauffrequenz ist

$$f_z = \frac{1}{\tau} = \frac{Q\|\mathbf{B}\|}{2\pi m}; \quad (19.18)$$

sie wird auch *Zyklotronfrequenz* genannt (siehe unter 4.).

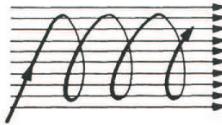


Abbildung 19.4. Bahn eines elektrisch geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld

Bildet die Bewegungsrichtung irgendeinen anderen Winkel mit der Feldlinienrichtung, so kann die Geschwindigkeit in zwei Komponenten zerlegt werden, von denen die eine mit der Feldlinienrichtung übereinstimmt, während die andere senkrecht dazu steht. Die erste bleibt ungeändert, die zweite liefert eine Kreisbewegung. Im ganzen ergibt sich daher eine Schraubenlinienbahn des geladenen Teilchens, Abb. 19.4.

Bei schweren Ladungsträgern werden die Umlaufzeiten und die Bahnradien größer. Die Umlaufzeiten werden z.B. bei Protonen entsprechend deren Masse 1836mal so groß wie in der Tabelle, die Bahnradien werden 43mal so groß.

2. Eine Anwendung der Ablenkung von Elektronen im magnetischen Feld bildet das Magnetron. Es ist eine Vakuumröhre mit Glühkathode und kalter Anode, die sich im magnetischen Feld einer stromdurchflossenen Spule befindet, Abb. 19.5. In dem axial gerichteten Magnetfeld der Spule bewegen sich die von der Kathode K ausgehenden Elektronen auf gekrümmten Bahnen zur Anode A . Überschreitet der Strom in der Spule S eine bestimmte Stärke, dann wird die Bahnkrümmung so groß, dass die Elektronen nicht mehr zur

Anode gelangen, sondern zur Kathode zurückkehren, so dass der Elektronenstrom unterbunden ist. Mit dem in der Spule S fließenden Strom kann man daher den zur Anode gehenden Elektronenstrom steuern und ähnlich wie mit der Gitterspannung einer Elektronenröhre eine Verstärkung erzielen. (Anwendung der umlaufenden Elektronenströmung im *Wanderfeldmagnetron* zur Erzeugung von Hochfrequenzschwingungen).

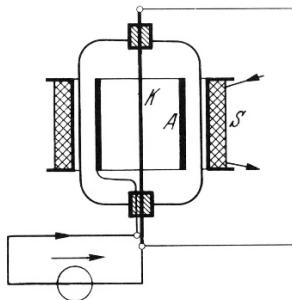


Abbildung 19.5. Prinzip des Magnetrons

3. Die Ablenkung von Ladungsträgern durch magnetische Felder findet ausgedehnte Anwendung bei Anordnungen der Elektronenoptik. Durchläuft in einer Braunschen Röhre der Elektronenstrahl ein Magnetfeld, das senkrecht zur Achse der Röhre gerichtet ist, so ergibt sich eine Ablenkung quer dazu, die proportional dem Strom in der das Magnetfeld erzeugenden Spule ist.

Ein Magnetfeld mit Feldlinien, die im wesentlichen parallel zur Strahlachse verlaufen, und das rotationssymmetrisch zu dieser Achse ist, stellt eine „magnetische Linse“ dar, das Gegenstück zur elektrischen Linse (H. Busch 1926). Auf Grund einer ähnlichen Betrachtung wie in Abschnitt 14.6 folgt durch Anwendung der Beziehung (vgl. Abschnitt 14.6) für die Brennweite der magnetischen Linse

$$f = 8 \frac{m}{e} U_a \frac{1}{\int_0^b B_x^2 dx}. \quad (19.19)$$

Die Brennweite kann also durch Ändern der Induktion B_x auf der Achse, d. h. durch Ändern des Stromes I in der Spule, eingestellt werden. Das Vergrößern des Stromes ergibt kleinere Brennweite. Bei der Abbildung entsteht hier wegen des schraubenlinienförmigen Verlaufs der Elektronenbahnen, Abb. 19.6, eine Drehung des Bildes, die mit wachsender Stromstärke I größer wird.

4. Im *Zyklotron* (Lawrence 1931) wird davon Gebrauch gemacht, dass die Umlauffrequenz f_z unabhängig von der Geschwindigkeit der Ladungsträger ist. Eine durch einen Radialschnitt geteilte Metalldose, Abb. 19.7, befindet sich in einem luftleeren Gefäß und wird von einem zeitlich konstantem \mathbf{B} -Feld $\|\mathbf{B}\|$ parallel zur Zylinderachse durchsetzt. An den beiden Halbdosen liegt eine

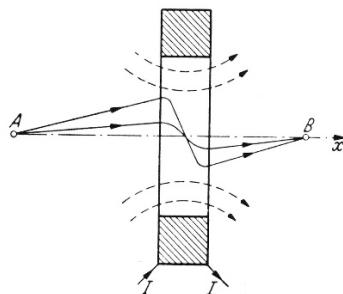


Abbildung 19.6. Magnetische Linse der Elektronenoptik

Wechselspannung, deren Periode mit der Umlaufdauer τ eines Strahles von Ladungsteilchen (Elektronen, Protonen, α -Teilchen usw.) im Feld $\|\mathbf{B}\|$ übereinstimmt. Ein Ladungsteilchen, das während eines positiven Maximums der Wechselspannung bei A in den Spalt eintritt, wird um die Scheitelspannung U_m beschleunigt. Nach einer halben Periode der Wechselspannung kommt es zu dem Spalt bei A' , wenn die Spannung gerade ihren negativen Höchstwert hat, so dass wieder eine Beschleunigung um U_m eintritt. Der Radius der Elektronenbahn erweitert sich dabei mit der wachsenden Geschwindigkeit nach Gl. (19.16). Die Endgeschwindigkeit der Ladungsteilchen entspricht nach n -maligem Durchlaufen des Spaltes einer Anlaufspannung von nU_m . Bei sehr hohen Geschwindigkeiten vergrößert die Massenzunahme der Ladungsteilchen die Umlaufdauer entsprechend Gl. (19.17). Dieser Effekt kann durch eine periodische Steuerung der Frequenz des elektrischen Beschleunigungsfeldes in gewissen Grenzen ausgeglichen werden.

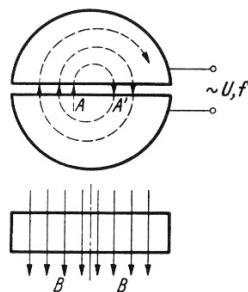


Abbildung 19.7. Prinzip des Zyklotrons

Die auf einen stromdurchflossenen metallischen Leiter im magnetischen Feld einwirkende Kraft ist als Resultierende der Impulse aufzufassen, die die Leitungselektronen auf die Atome übertragen. Diese Resultierende ist Null oder unmessbar klein, wenn kein magnetisches Feld vorhanden ist. Wirken

dagegen die magnetischen Feldkräfte auf die Elektronen ein, so erfahren diese infolge ihrer Driftbewegung, d. h. infolge ihrer in die Richtung der Leiterachse fallenden Geschwindigkeitskomponenten eine Beschleunigung, die im Mittel eine zur Leiterachse senkrechte Richtung hat.

Zahlenbeispiel: Bei der Berechnung der magnetischen Feldkräfte ergibt sich das Resultat in elektrischen Krafteinheiten Ws/m , wenn das B-Feld in Vs/m^2 eingesetzt wird. Es sei z. B. $\|\mathbf{B}\| = 1Vs/m^2$, $l = 0,1m$, $I = 100A$, $\alpha = 90^\circ$. Dann wird nach Gl. (19.1)

$$\|\mathbf{F}\| = 1 \cdot 0,1 \cdot 100 \frac{Vs}{m} = 10 N. \quad (19.20)$$

19.3 Das Durchflutungsgesetz

Das Durchflutungsgesetz kann mit Hilfe des Stokesschen Satzes aus Gl.(18.22) abgeleitet werden und stellt in klassischer Sichtweise die allgemeine Formulierung für den Zusammenhang zwischen der Stärke magnetischer Felder und dem erzeugenden Strom I dar (vgl. auch Abschnitt 22.3)

$$\oint \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{s}} = I. \quad (19.21)$$

Dabei kann es sich auch um eine Summe von Strömen handeln. Dieser Zusammenhang kann experimentell mit Hilfe des *magnetischen Spannungsmessers* nach Rogowski [249] nachgewiesen werden. Dieser besteht aus einer langgestreckten Spule von geringem Querschnitt, deren Drahtenden mit einem ballistischen Galvanometer verbunden sind. Die Spule ist gleichmäßig mit einem dünnen isolierten Draht in dicht nebeneinanderliegenden Windungen gewickelt. Die beiden Drahtenden liegen nebeneinander, so dass durch die Zuleitungen zum Galvanometer keine Schleife gebildet wird, in der störende Induktionswirkungen auftreten können.

An dieser Stelle sei noch einmal angemerkt, dass es sich bei der in Abschnitt 18 vorgestellten Deutung des Durchflutungsgesetzes um eine Definitionsgleichung für das H-Feld handelt. Der angesprochene Nachweis gelingt nur, wenn man über ein lineares Materialgesetz $\mathbf{B} \sim \mathbf{H}$ die magnetischen Kraftwirkungen und somit den Zusammenhang von B-Feld und Strom bestimmt. Das wird im folgenden beschrieben.

Damit durch den Spannungsmesser das auszumessende magnetische Feld nicht gestört wird, nehmen wir an, dass das Innere der Spule hohl ist oder aus dem gleichen Stoff besteht wie der Außenraum (bei der praktischen Ausführung solcher Spannungsmesser wickelt man die Spule auf einen biegsamen Lederriemen, einen Gummischlauch oder ähnliches; diese Stoffe beeinflussen praktisch das magnetische Feld in Luft nicht). Bezeichnet man die durch

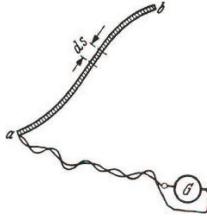


Abbildung 19.8. Magnetischer Spannungsmesser nach Rogowski

die Länge der Spule, Abb. 19.8, geteilte Windungszahl mit N_1 , so erhält ein kurzer Abschnitt von der Länge ds

$$N_1 ds \quad (19.22)$$

Windungen. In einem magnetischen Feld von beliebiger Beschaffenheit wird das B-Feld an jeder Stelle der Spule im allgemeinen einen anderen Wert und eine andere Richtung haben. Es soll aber der Querschnitt A der Spule so klein sein, dass man an jeder Stelle der Spule innerhalb dieses Querschnitts das B-Feld als konstant ansehen kann. Dann beträgt der magnetische Fluss, der mit den $N_1 ds$ Windungen des Abschnittes ds verkettet ist,

$$d\Phi_s = N_1 A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (19.23)$$

und der Gesamtfluss der Spule ergibt sich durch Integration über die ganze Länge

$$\Phi_s = N_1 A \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (19.24)$$

Dieser Gesamtfluss kann mit Hilfe des ballistischen Galvanometers G wie im vorherigen Abschnitt gemessen werden, wenn man die Spule rasch aus dem Feld entfernt. Führt man den Versuch aus, so ergibt sich, dass der Wert von Φ_s nur von der Lage der beiden Endpunkte a und b des Spannungsmessers abhängt. Für alle möglichen Wege zwischen a und b , Abb. 19.9, hat daher das Linienintegral des B-Feldes den gleichen Wert. Biegt man den Spannungsmesser zu einer geschlossenen Figur zusammen, so dass die beiden Punkte a und b zusammenfallen, so ergibt sich experimentell, dass $\Phi_s = 0$ wird, dass also auch das Linienintegral des B-Feldes verschwindet, gleichgültig in welcher Form man die Spule biegt, allerdings unter einer wichtigen Voraussetzung: Es darf mit der durch den Spannungsmesser gebildeten geschlossenen Figur kein stromführender Leiter verkettet sein.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, umschließt man also mit dem Spannungsmesser den Stromleiter, so ergibt sich ein ganz bestimmter Wert für Φ_s und damit für das Linienintegral des B-Feldes. Für diesen Wert gilt nun ein außerordentlich einfaches Gesetz. Es zeigt sich, dass das Linienintegral des B-Feldes proportional dem verketteten Strom ist. Den Strom, der mit



Abbildung 19.9. Wege gleicher magnetischer Spannung

irgendeinem in sich geschlossenen Weg verkettet ist, bezeichnet man als die *Durchflutung* Θ dieses Weges. Auf Grund der experimentellen Beobachtung gilt daher die Beziehung

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu \Theta, \quad (19.25)$$

in der μ eine Konstante bezeichnet. Die Gl.(19.25) berücksichtigt auch die Vorzeichen, wenn der Umlaufsinn des Linienintegrals mit der Richtung der Durchflutung eine Rechtsschraube bildet, wie es Abb. 19.10 zeigt. In dieser Abbildung ist für den gezeichneten geschlossenen Weg

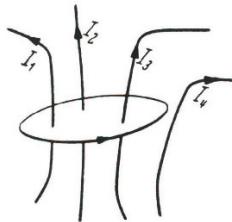


Abbildung 19.10. Durchflutung eines geschlossenen Weges

$$\Theta = I_1 + I_2 + I_3. \quad (19.26)$$

Wird das B-Feld in Vs/m^2 gemessen und setzt man die Länge in m die Stromstärke in A ein, so ergibt sich für die Größe μ als Einheit

$$1 \frac{Vs}{Am} = 1 \frac{\Omega s}{m}. \quad (19.27)$$

Die Einheit $1 \Omega s$ nennt man 1 *Henry*:

$$1 \text{ Henry} = 1 H = 1 \Omega s; \quad (19.28)$$

als Einheit für die Größe μ dient $1 H/m$. Weitere Einzelheiten über die Größe μ findet man in Abschnitt 20.1.

Die Gl.(19.25) kann unter der Voraussetzung, dass μ innerhalb des magnetischen Spannungsmessers eine Konstante ist, auch geschrieben werden

$$\oint \frac{\mathbf{B}}{\mu} \cdot d\mathbf{s} = \Theta. \quad (19.29)$$

Entsprechend Abschnitt 18 ist die Größe \mathbf{B}/μ ein Vektor, der für lineare magnetische Materialien mit dem *H-Feld* \mathbf{H} gleichgesetzt wird; also gilt

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (19.30)$$

Eine damit verbundene definitorische Einführung des H-Feldes, wie man sie in vielen Darstellungen des elektromagnetischen Feldes findet, entspricht nicht der Auffassung, wie wir sie in Abschnitt 18 entwickelt haben. Dort wurde im Sinne der Nahwirkungstheorie das H-Feld als „magnetische Erregung“ in der Umgebung einer Stromdichte aufgefasst. Demzufolge passt der Begriff „magnetische Erregung“ am besten. Entsprechend dieser Auffassung ist das *Linienintegral des H-Feldes auf irgendeinem geschlossenen Weg C gleich der Durchflutung des Weges*

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \Theta. \quad (19.31)$$

Dies wird *Durchflutungsgesetz* genannt. Es handelt sich im Sinne der Auffassung von Abschnitt 18 um die integrale Fassung der Definitionsgleichung $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, die unabhängig von μ ist. Das H-Feld ist eine Größe, deren Betrag, wie man aus Gl.(19.31) erkennt, in A/cm oder in A/m (Giorgi-System) gemessen werden kann.

Als Einheit für das H-Feld wurde früher

$$1 \text{ Ørsted} = 1 \text{ Oe} = \frac{10}{4\pi} \frac{A}{cm} \quad (19.32)$$

verwendet. Damit ergab sich im leeren Raum bei der Messung eines magnetischen Feldes in *Gauß* oder *Ørsted* der gleiche Zahlenwert. Beide Einheiten werden heute nicht mehr verwendet, aber man benötigt sie, wenn man ältere Arbeiten lesen will.

Das Durchflutungsgesetz ermöglicht die Berechnung der Durchflutung, die zur Herstellung eines bestimmten magnetischen Feldes erforderlich ist, wenn der Verlauf der magnetischen Feldlinien bekannt ist. Das magnetische Feld in der Umgebung eines geraden stromdurchflossenen Leiters z.B. wird durch Feldlinien dargestellt, die aus Symmetriegründen Kreise bilden. Längs eines jeden solchen Kreises ist die Flussdichte konstant, daher sind die Beträge der Vektoren \mathbf{B} und \mathbf{H} konstant. Ist r der Radius eines Kreises, I die Stromstärke im Leiter, so gilt

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} &= \|\mathbf{H}\| 2\pi r = I, \\ \|\mathbf{H}\| &= \frac{I}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (19.33)$$

Bezüglich der Richtung der H-Feldlinien sagt das Durchflutungsgesetz aus, dass sie mit der Stromrichtung im Sinne einer Rechtsschraube zusammenhängt.

Das H-Feld außerhalb des Leiters ist nach Gl.(19.33) unabhängig von dem Drahtdurchmesser; es hat die gleiche Beschaffenheit, als ob der ganze Strom I in einem „Stromfaden“ in der Achse des Leiters konzentriert wäre.

Zahlenbeispiel: Im Abstand $r = 10\text{cm}$ von der Achse eines Leiters, der den Strom $I = 100\text{A}$ führt, beträgt das H-Feld

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{100\text{A}}{2\pi 10\text{cm}} = 1,59 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 159 \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (19.34)$$

19.4 Der magnetische Dipol

Aus dem Stromkraftgesetz (19.1) folgt, dass auf einen geschlossenen Stromkreis ein Drehmoment ausgeübt wird. Wir denken uns ein schmales Drahtrechteck in die x, y -Ebene eines Koordinatensystems gelegt, Abb. 19.11, so dass die lange Seite b mit der x -Richtung übereinstimmt. Der Draht sei vom Strom I durchflossen. Das Rechteck befindet sich in einem *homogenen* magnetischen Feld und sei so orientiert, dass die in die x, y -Ebene fallende Komponente von \mathbf{B} in die x -Richtung zeigt. Sie hat den Betrag $\|\mathbf{B}\| \cos \beta$, wenn β den Winkel zwischen \mathbf{B} und der x, y -Ebene bezeichnet. Die zu dieser Ebene senkrecht stehende Komponente $\|\mathbf{B}\| \sin \beta$ ergibt für das Rechteck keine resultierende Stromkraft, da sich die auf die gegenüberliegenden Seiten ausübten Kräfte jeweils aufheben. Die x -Komponente des B-Feldes ist ebenfalls für die langen Rechteckseiten b ohne Wirkung, da sie die gleiche Richtung hat. Dagegen werden auf die kurzen Rechteckseiten nach Gl.(19.1) Kräfte $Ia\|\mathbf{B}\| \cos \beta$ nach oben bzw. unten ausgeübt; er ergibt sich also ein Kräftepaar mit der y -Richtung als Drehachse. Das Drehmoment ist

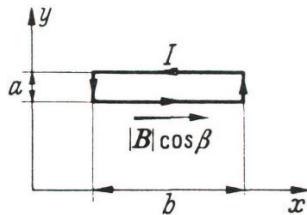


Abbildung 19.11. Drehmoment bei einem Drahtrechteck

$$M_d = Iab\|\mathbf{B}\| \cos \beta. \quad (19.35)$$

Da die Fläche des Rechtecks $A = ab$ ist, gilt auch

$$M_d = IA\|\mathbf{B}\| \cos \beta. \quad (19.36)$$

Diese Gleichung kann geschrieben werden

$$\mathbf{M}_d = I(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = I\mu_0(\mathbf{A} \times \mathbf{H}), \quad (19.37)$$

wobei \mathbf{A} den Vektor der Fläche A bezeichnet¹ mit einer solchen Richtung, dass die Umlaufrichtung des Stromes damit eine Rechtsschraube bildet. Man bezeichnet

$$\mathbf{m} = I \mathbf{A} \quad (19.38)$$

als das *magnetische Drehmoment* der Drahtschleife, indem man von der Vorstellung ausgeht, dass die Drahtschleife wie ein kleiner Magnet (Dipol) wirkt; das entspricht der Amperéschen Hypothese. In Abb. 19.11 liegt der Nordpol dieses Magneten oberhalb, der Südpol unterhalb der Zeichenebene. Die Richtung von \mathbf{m} zeigt aus der Zeichenebene heraus in die z -Richtung des Achsenystems.

Da man nun jede beliebige berandete Fläche aus solchen rechteckigen Streifen mit genügend kleinem a zusammensetzen kann, so gilt die Gl. (19.37) allgemein für eine beliebige ebene Drahtschleife, solange sie nur so klein ist, dass das H-Feld als homogen angesehen werden kann. Das Drehmoment ist allgemein

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{m} \times \mathbf{B}; \quad (19.39)$$

es sucht das Dipolmoment in die Feldrichtung zu drehen.

Zahlenbeispiel: Eine ebene Drahtschleife von $10cm^2$ Fläche, die von einem Strom von $1A$ durchflossen wird, hat ein magnetisches Moment vom Betrag

$$\|\mathbf{m}\| = 1A \cdot 10^{-3}m^2 = 10^{-3}Am^2. \quad (19.40)$$

In einem Magnetfeld mit $\|\mathbf{B}\| = 1T = 1Vs/m^2$ wird das maximale Drehmoment ($\beta = 0$)

$$\|\mathbf{M}_d\| = \|\mathbf{m}\| \|\mathbf{B}\| = 10^{-3}Am^2 \cdot 1 \frac{Vs}{m^2} = 10^{-3}Nm (= 100 dyn m). \quad (19.41)$$

Eine allgemeine Einordnung des magnetischen Dipols diskutieren wir in Abschnitt 21.4 über die Multipolentwicklung.

¹ Dieser Normalenvektor der Fläche darf nicht mit dem Vektorpotenzial verwechselt werden.

Materialgesetze im stationären Magnetfeld

20.1 Diamagnetismus und Paramagnetismus

Alle Stoffe haben Einfluss auf das magnetische Feld. Das lässt sich mit Hilfe eines Zusammenhangs der krafterzeugenden Größe \mathbf{B} des magnetischen Feldes und der magnetischen „Erregungsgröße“ \mathbf{H} ausdrücken. Wir haben bereits erwähnt, dass das B - und das H -Feld unter bestimmten Umständen proportional sein können. Versuche zeigen, dass der Proportionalitätsfaktor, der üblicherweise mit μ bezeichnet wird, von dem Stoff abhängt, in dem die Messungen ausgeführt werden. Man schreibt daher

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad (20.1)$$

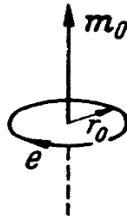
wobei μ_0 den Wert von μ im leeren Raum bezeichnet. Im leeren Raum ist also $\mu_r = 1$. Die Größe μ_0 wird *magnetische Feldkonstante*, *Induktionskonstante* oder *Permeabilität des leeren Raums* genannt. Die elektrischen Einheiten sind aus historischen Gründen so gewählt worden, dass genau

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \quad (20.2)$$

gilt. Mit der Widerstandseinheit *Ohm* bzw. der Einheit der Induktivität *Henry* kann man weitere Darstellungen für μ_0 angegeben.

Die Zahl μ_r gibt an, wieviel mal größer das B -Feld in dem betreffenden Stoff ist im Vergleich zum leeren Raum. Sie wird als *relative magnetische Permeabilität* oder als *Permeabilitätszahl* bezeichnet, während μ die *absolute Permeabilität* darstellt; μ_0 heißt auch Permeabilität des leeren Raumes.

Mikroskopisch kann die Proportionalität damit erklärt werden, dass die Elektronen innerhalb der Atome geschlossene Bahnen durchlaufen und um ihre Achse rotieren (*Elektronenspin* oder *Elektronendrall*). Jede derartige Elektronenbewegung kann entsprechend der Amperéschen Hypothese als ein elektrischer Ringstrom und damit als magnetischer Dipol aufgefasst werden. Abb. 20.1 veranschaulicht das magnetische Feld eines solchen Ringstromes.

**Abbildung 20.1.** Magnetischer Elementardipol

Durchläuft das Elektron mit einer Geschwindigkeit v die Bahn mit dem Radius r_0 , so ist dies einem Strom I_0 äquivalent, für den die Beziehung gilt

$$I_0 = \frac{ev}{2\pi r_0}. \quad (20.3)$$

Das magnetische Moment eines solchen *Elementardipols* beträgt daher nach Gl.(19.38)

$$m_0 = I_0 r_0^2 \pi = \frac{1}{2} evr_0. \quad (20.4)$$

Die magnetischen Dipolmomente können innerhalb der Atome entweder durch Dipolmomente entgegengesetzter Richtung aufgehoben werden, oder es kann ein Überschuss von Dipolen einer Richtung vorhanden sein. Im ersten Falle ist das Atom unmagnetisch, während es im zweiten Falle wie ein kleiner Magnet wirkt.

Betrachten wir zunächst Stoffe der ersten Art, bei denen die Bahn- und Spinnmomente im Inneren der Atome kompensiert sind. Auf die rotierenden Elektronen werden im magnetischen Feld Kräfte ausgeübt, und zwar werden nach dem Induktionsgesetz (vgl. Abschnitt 26.2) bei der Herstellung des äußeren magnetischen Feldes diejenigen Elektronen beschleunigt, die um die Feldlinienrichtung im Sinne einer Rechtsschraube rotieren, während die anderen verzögert werden. Es ergibt sich eine Überschusswirkung der Strombahnen mit rechtsläufig rotierenden Elektronen. Diese Elektronen wirken aber wie ein Strom, der die Feldlinien linksläufig umkreist, der also für sich allein ein magnetisches Feld in entgegengesetzter Richtung hervorrufen würde. Daher ergibt sich in dem betrachteten Fall eine Schwächung des magnetischen Feldes; das B -Feld ist bei Vorhandensein des betreffenden Stoffes kleiner als im leeren Raum; es ist ($B := \|\mathbf{B}\|$, $H := \|\mathbf{H}\|$)

$$B < \mu_0 H \quad \text{oder} \quad \mu_r < 1. \quad (20.5)$$

Man bezeichnet solche Stoffe als *diamagnetisch*; ein Beispiel dafür bildet *Wismut*.

Im anderen Fall, wenn die Atome nicht kompensierte Bahnen enthalten, also wie Magnete wirken, suchen sich diese im magnetischen Feld so einzustellen, dass sie gemäß Gl.(19.39) das äußere magnetische Feld unterstützen; das B -Feld wird größer als im leeren Raum:

$$B > \mu_0 H \quad \text{oder} \quad \mu_r > 1. \quad (20.6)$$

Derartige Stoffe nennt man *paramagnetisch* oder, wenn μ_r erheblich größer als 1 ist, *ferromagnetisch*, weil das wichtigste Beispiel eines solchen Stoffes das Eisen ist. Auch in paramagnetischen Stoffen tritt wegen der Beschleunigung der Elektronenbewegung immer bis zu einem gewissen Grade eine diamagnetische Wirkung auf. Paramagnetische Stoffe sind daher eigentlich solche, bei denen der zweite Effekt den diamagnetischen übertrifft.

Anmerkung: Genau genommen ergibt sich durch die Einwirkung der äußeren elektrischen Feldkräfte auf rotierende oder kreisende Elektronen wie bei einem Kreisel eine rotierende Bewegung der Kreiselachse (Präzession). Diese Rotation wirkt sich aber im Effekt so aus wie eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Winkelgeschwindigkeit der Ringströme. Man kann die Frequenz der Präzessionsbewegung daher auf folgende Weise berechnen. Die kinetische Energie einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegten Masse m ist $(1/2)mr^2\omega^2$. Trägt die Masse noch eine Ladung e , so erfährt sie außer Zentrifugalkräften und Kernanziehungskräften noch Beschleunigungskräfte in der Bahnrichtung, wenn diese ein zunehmendes oder abnehmendes magnetisches Feld umschließt. Diese Kräfte haben den Betrag

$$F := \|\mathbf{F}\| = e\|\mathbf{E}_i\| = e \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{er}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (20.7)$$

Die der Ladung e bei einer Änderung des B -Feldes um den Betrag B zugeführte Arbeit ist daher

$$\int F ds = \int Fr\omega dt = \frac{1}{2}er^2\omega \int dB = \frac{1}{2}er^2\omega B. \quad (20.8)$$

Sie vermehrt die kinetische Energie der kreisenden Ladung, so dass die Winkelgeschwindigkeit ω um den kleinen Betrag ω_L wächst. Daher gilt

$$\frac{1}{2}mr^2(\omega + \omega_L)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}er^2\omega B. \quad (20.9)$$

Hieraus folgt wegen der Kleinheit von ω_L gegen ω :

$$\omega_L = \frac{1}{2} \frac{e}{m} B. \quad (20.10)$$

Die Frequenz („Lamor-Frequenz“) ist also

$$f_L = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{m} B. \quad (20.11)$$

Für $B = 0,1 T$ ergibt sich z. B. nach Gl. (20.11) für Elektronen eine Frequenz

$$f_L = \frac{1}{4\pi} \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1}{9,11 \cdot 10^{-28}} \frac{AsVs}{gm^2} = 1,4 \cdot 10^9 Hz = 1,4 GHz. \quad (20.12)$$

Die Lamor-Präzession spielt eine Rolle bei der Anwendung von Ferriten in Höchstfrequenzfeldern. Bei Vormagnetisierung von Ferriten mit einem konstanten B-Feld B präzessieren die Elektronen-Dipole um die Feldrichtung. Wird senkrecht dazu ein Hochfrequenzfeld angelegt, so ergibt sich eine zu beiden Richtungen senkrechte zusätzliche Präzession, die eine Hochfrequenzfeldkomponente in dieser neuen Richtung erzeugt. Die Folge davon ist eine Drehung der Polarisationsebene der Welle (Faraday-Effekt oder Faraday-Rotation), die für verschiedene Anwendungen benutzt wird. (Gyrator, Trennzweitor siehe Abschnitt 5.5).

20.2 Messung der Permeabilität

Die absolute Permeabilität μ beliebiger Stoffe kann bestimmt werden, wenn man die Durchflutung Θ misst, aus der das H-Feld $\|\mathbf{H}\|$ berechnet werden kann, und außerdem das B-Feld $\|\mathbf{B}\|$. Dann gilt

$$\mu = \frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{H}\|}. \quad (20.13)$$

Die einfachste Methode besteht darin, dass man aus dem zu untersuchenden Stoff einen Ringkern herstellt und diesen mit zwei Wicklungen aus isoliertem Draht versieht. Die eine Wicklung wird an ein ballistisches Galvanometer G angeschlossen Abb. 20.2; sie dient zur Messung von $\|\mathbf{B}\|$. Durch die andere möglichst gleichmäßig über den Ring verteilte Wicklung kann ein Gleichstrom geschickt werden, der mit einem Strommesser gemessen wird und das H-Feld $\|\mathbf{H}\|$ zu berechnen gestattet.

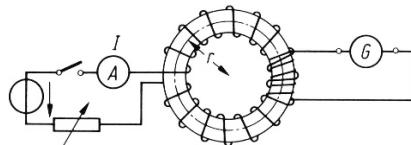


Abbildung 20.2. Aufnahme der Magnetisierungskurve

Die magnetischen Feldlinien sind hier aus Symmetriegründen konzentrische Kreise; sie verlaufen im Inneren des Ringes, da sie mit den Wicklungen verkettet sein müssen. Die Flussdichte ist daher längs einer Feldlinie konstant. Für irgendeine Feldlinie mit dem Radius r gilt nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \|\mathbf{H}\| \oint ds = \|\mathbf{H}\| 2\pi r = I N_1, \quad (20.14)$$

wobei N_1 die Windungszahl der Erregerwicklung bezeichnet. Daraus folgt

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{IN_1}{2\pi r}. \quad (20.15)$$

Ist der Querschnitt des Ringes genügend klein, so kann man mit einem mittleren Betrag des B-Feldes in dem Ring für einen mittleren Radius r_m rechnen. Die mittlere Flussdichte ergibt sich aus der Beziehung

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\Phi}{A}, \quad (20.16)$$

in der Φ den Bündelfluss im Ring und A den Ringquerschnitt bezeichnen. Wird der Strom im Erregerkreis plötzlich unterbrochen oder hergestellt, so entsteht nach dem Induktionsgesetz ein Stromstoß im Galvanometerkreis. Die vom Galvanometer angezeigte Ladungsmenge Q dient zur Berechnung der zu der Stromänderung gehörende Änderung des Induktionsflusses. Der magnetische Fluss ist

$$\Phi = \frac{R}{N_2} Q, \quad (20.17)$$

wobei N_2 die Windungszahl der zweiten Wicklung und R den Gesamtwiderstand im Sekundärkreis bezeichnen. Daraus folgt

$$\mu = \frac{\|\mathbf{B}\|}{\|\mathbf{H}\|} = \frac{2\pi r_m R Q}{N_1 N_2 A l}. \quad (20.18)$$

Im leeren Raum ergibt sich hieraus die absolute Permeabilitätskonstante (Feldkonstante) μ_0 .

In der folgenden Tabelle 20.1 sind die Werte der Permeabilitätszahl für einige diamagnetische und paramagnetische Stoffe angeführt:

Material:	Wismut	Kupfer	Wasser	Luft	Aluminium
$\mu_r :$	$1 - 160 \cdot 10^{-6}$	$1 - 10 \cdot 10^{-6}$	$1 - 9 \cdot 10^{-6}$	$1 + 0,4 \cdot 10^{-6}$	$1 + 22 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 20.1. Permeabilität verschiedener Stoffe

Die Permeabilität der nicht ferromagnetischen Stoffe kann man bei praktischen Anwendungen fast immer zu μ_0 annehmen; solche Stoffe nennen wir auch *magnetisch neutral*.

20.3 Ferromagnetismus

Bei den *ferromagnetischen Stoffen* ist die magnetische Induktion nicht proportional zum H-Feld und steht nicht in eindeutiger Beziehung zu ihr; sie

hängt davon ab, auf welche Weise der betreffende Wert des H-Feldes hergestellt wurde. Man veranschaulicht diesen Zusammenhang durch die *Magnetisierungskurven*, die das B-Feld in Abhängigkeit vom H-Feld darstellen. Vergrößert man das H-Feld stufenweise, indem man jeweils die Stromstärke in der Erregerwicklung um einen bestimmten Betrag vergrößert, so findet man das B-Feld durch Summieren der einzelnen Beiträge, die zu den einzelnen Sprüngen des Stromes gehören und aus den ballistischen Ausschlägen des Galvanometers nach Gl.(20.16) und (20.17) berechnet werden können. War der Eisenring noch nicht magnetisiert, so erhält man auf diese Weise die sogenannte *Neukurve* OA , Abb. 20.3. Verkleinert man nun das H-Feld von dem erreichten Wert H_m aus wieder stufenweise, so nimmt auch das B-Feld ab. Das Galvanometer gibt ballistische Ausschläge nach der entgegengesetzten Richtung. Aus diesen Ausschlägen kann wieder jeweils die zu der Verkleinerung von $\|\mathbf{H}\|$ gehörige Verminderung von $\|\mathbf{B}\|$ berechnet werden. Die Durchführung der Messung ergibt Werte für das B-Feld, AD Abb. 20.3, die größer sind als die der Neukurve. Selbst wenn der Erregerstrom ganz unterbrochen wird, also $\|\mathbf{H}\| = 0$ ist, enthält der Ring noch einen magnetischen Induktionsfluss. Man bezeichnet das Zurückbleiben des B-Feldes hinter dem H-Feld als *Hysterese*, die Erscheinung eines Rückstandes an Magnetismus als *Remanenz*. Der Abschnitt OD auf der Achse des B-Feldes stellt eine *remanente Induktion* dar.

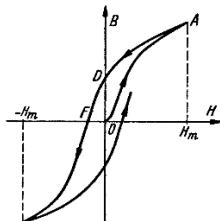


Abbildung 20.3. Magnetisierungskurve

Um den Induktionsfluss zum Verschwinden zu bringen, muss eine Erregung OF in entgegengesetzter Richtung aufgewendet werden. Geht man bis zum Wert $-H_m$ und lässt dann das H-Feld wieder zunehmen, so ergibt sich wieder ein Zurückbleiben des B-Feldes hinter dem H-Feld. Wiederholt man diesen Prozess mehrmals, so wird schließlich eine ganz bestimmte Schleife durchlaufen, die man als *Hystereseschleife* bezeichnet.

Obwohl bei Hystereseschleifen entsprechend Abb. 20.3 ein statischer Zusammenhang von B- und H-Feld vorzuliegen scheint, hat man es mit dynamischen Vorgängen zu tun; der Verlauf des B-Feldes hängt offensichtlich von der zeitlichen Vorgeschichte des H-Feldes ab. Ein mathematisches Modell für Übertragungssysteme mit Hysterese wurde erstmals von Preisach in einer Arbeit aus dem Jahre 1935 vorgestellt, wobei er sich mit magnetischen Hystereserscheinungen befasst hat. Seitdem sind zahlreiche Arbeiten über die

allgemeine mathematische Modellierung von Systemen mit Hysterese erschienen; einen Überblick über neuere Entwicklungen, weitergehende Literatur und verschiedene Anwendungen findet man in der Monographie von Mayergoyz [192].

Die drei wichtigsten ferromagnetischen Elemente sind Eisen, Nickel und Kobalt. Die magnetischen Eigenschaften zeigen sich in reiner Form bei *Kristallen* dieser Stoffe. Eisen kristallisiert kubisch, wobei die Eisenatome in den Ecken und im Mittelpunkt des Würfels angeordnet sind. Versucht man, einen solchen Eiseneinkristall zu magnetisieren, so findet man, dass er sich in den verschiedenen Richtungen verschieden verhält. Es gibt Richtungen leichter und schwerer Magnetisierbarkeit. Die ersten sind die Richtungen der Würfelkanten, die letzteren die Diagonalrichtungen; die Kristalle sind „magnetisch anisotrop“. Aus den Beobachtungen sind die folgenden Vorstellungen entwickelt worden.

Von den zwei möglichen Beiträgen zum Magnetismus des Eisenatoms, den Beiträgen der Elektronenumläufe und denen des Elektronendralls, kompensieren sich die ersten gegenseitig. Die Elektronendralle sind ebenfalls teils rechtsgläufig, teils linksgläufig, kompensieren sich jedoch nicht vollständig.

Auf die nicht kompensierten Elektronen, die als magnetische Elementardipole aufgefasst werden können, wirken nun in dem Kristall zweierlei Kräfte. Erstens wirken Kräfte, die die Dipole parallel zu einer Würfelkante ausrichten wollen; sie sind durch die Wirkung des ganzen Kristallgitters zu erklären und werden *Anisotropiekräfte* genannt. Zweitens wirken auf jeden Dipol Kräfte ein, die bei Eisen die Dipole einander parallel zu stellen suchen. Sie werden auf die Wirkung der benachbarten Dipole zurückgeführt und heißen *Austauschkräfte*.

Anisotropiekräfte und Austauschkräfte bewirken, dass sich in einem größeren Kristall Bezirke bestimmter gleicher Magnetisierungsrichtung ausbilden (Weissche Bezirke, Elementarbezirke). Diese sogenannte *spontane Magnetisierung* ist ein wesentliches Kennzeichen des Ferromagnetismus. Im Würfel gibt es sechs Richtungen parallel zu den Kanten. Daher können Bezirke in irgendeiner dieser sechs Lagen auftreten. Wenn der ganze Kristall unmagnetisch ist, so besitzt etwa 1/6 aller Elementarbezirke eine der sechs möglichen Ruhelagen der Elementarmagnete. Wird ein äußeres magnetisches Feld angelegt, so sind zwei Arten von Veränderungen möglich:

1. Die Bezirke verändern ihre Ausdehnung,
2. die Bezirke behalten ihre Ausdehnung, aber die Elementarmagnete drehen sich aus ihrer Ruhelage heraus.

Beide Arten von Veränderungen kommen vor; sie sind durch Abb. 20.4 schematisch veranschaulicht. Abb. 20.4, Bild a soll den unmagnetischen Zustand des Kristalls darstellen. Es sind 4 Bezirke mit 4 Ruherichtungen der Elementarmagnete gezeichnet. Bei Abb. 20.4, Bild b hat ein äußeres von rechts unten nach links oben gerichtetes Feld H zu einer Verschiebung der Wände zwischen den Bezirken geführt, derart, dass nun diese Magnetisierungsrichtung überwiegt. Bei noch größerem äußeren magnetischen Feld, Abb. 20.4, Bild c,

drehen sich die Elementarmagnete in die Richtung des äußeren Feldes. „Wandverschiebungen“ nach Abb. 20.4, Bild b ergeben sich im Eisen bei kleinem und mittlerem magnetischen Feld, „Drehprozesse“ nach Abb. 20.4, Bild c bei hoher magnetischen Feld.

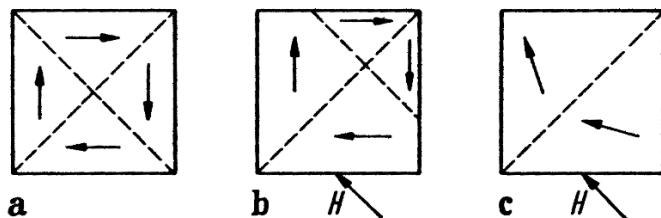


Abbildung 20.4. Feldberechnung bei einem Dipol

Dass sich Bezirke einer ganz bestimmten Größe (0,01 bis 1mm) ausbilden, ist dadurch bedingt, dass sich jeweils ein Zustand geringster Gesamtenergie einstellt. In den Grenzflächen selbst vollzieht sich aus dem gleichen Grunde ein stetiger Übergang von der einen zur anderen Magnetisierungsrichtung. Diese Grenzflächen haben also eine endliche „Dicke“ und werden daher Wände (*Blochwände*) genannt. Innerhalb der Wände sind die Elementardipole aus ihrer Richtung leichter Magnetisierbarkeit, in der sie durch die Anisotropiekräfte elastisch gehalten werden, herausgedreht. Je größer die Dicke der Wand ist, um so größer wird die Zahl der in eine schwere Richtung gedrehten Dipole, um so größer also der dazu notwendige Energieaufwand. Je geringer andererseits die Wanddicke ist, um so größer sind die Drehwinkel zwischen den Dipolen benachbarter Atome, um so größer daher der für die Überwindung der Austauschkräfte erforderliche Energieaufwand. Daher stellt sich eine ganz bestimmte Dicke der Wand ein, bei der der gesamte Energieinhalt der Wand ein Minimum wird. Diese Wanddicke hat die Größenordnung $10^7 m$ (ca. 1000 Atomabstände).

Schließlich sind für die Ausbildung der Wände noch *Inhomogenitäten* des magnetischen Stoffes, besonders auch kleinste Einschlüsse nichtmagnetischer Art (Gasbläschen, materielle Teilchen) von entscheidendem Einfluss. Die Wände stellen sich so ein, dass sie möglichst viele solcher Einschlüsse umfassen, weil hier die Bindungskräfte zwischen den Elementardipolen unterbrochen sind und damit der Energieinhalt der Wand verringert wird. Mit jeder Wandverschiebung sind daher Energieänderungen verbunden. Einerseits ändert sich die Wandenergie selbst, andererseits nehmen die bei der Verschiebung betroffenen Raumteile infolge der Inhomogenitäten verschieden große Energiebeträge auf. Die gesamte in dem betrachteten Körper gespeicherte Energie W hängt daher von der Lage der Blochwand ab, wie es Abb. 20.5 für eine Verschiebung in der x -Richtung veranschaulichen soll. Da sich immer ein Zustand niedrigster Energie einstellt, befinden sich die Blochwände im Ruhe-

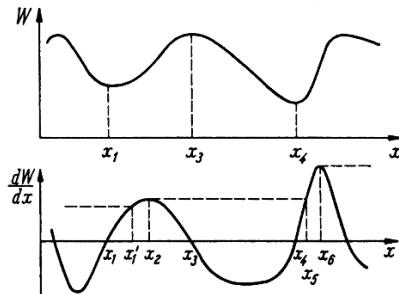


Abbildung 20.5. Abhängigkeit der gespeicherten Energie W von der Lage x einer Blochwand

zustand bei Minimalwerten von W , z.B. kann sich im Minimum bei x_1 eine Blochwand befinden. Die Wand trenne zwei Gebiete mit entgegengesetzter Magnetisierungsrichtung (180° -Blochwand). Wirkt nun ein äußeres Magnetfeld H in solcher Richtung auf die Dipole, dass es die Wand nach rechts zu verschieben versucht, so wirken damit auf die Wand Verschiebungskräfte F , die proportional H sind: $F = kH$. Bei einer kleinen Verschiebung der Wand um dx vermehren diese Kräfte die Energie W um dW und es gilt $F dx = dW$. Daraus folgt, dass das zur Verschiebung der Blochwand notwendige H-Feld proportional dem Differentialquotienten dW/dx ist:

$$H \sim \frac{dW}{dx}. \quad (20.19)$$

Der räumliche Verlauf dieses Differentialquotienten ist unter der Kurve des Energieinhaltes in Abb. 20.5 angegeben. Der Betrag des äußeren H-Feldes H schiebt die Wand aus dem Energieminimum bei x_1 heraus, z.B. bis zum Punkt x_1' . Wird die äußere Erregung jetzt wieder abgeschaltet, dann geht die Wand und damit die Magnetisierung zu dem Ausgangszustand x_1 zurück. Dies ist eine *reversible Änderung*. Erst wenn das äußere H-Feld zum Überschreiten des Punktes x_2 führt, in dem dW/dx ein Maximum hat, reicht das H-Feld aus, um die Wand über das nächste Energemaximum hinwegzubewegen und zwar bis zum Punkt x_5 , wo sich ein neuer stabiler Zustand einstellt. Wird jetzt das äußere H-Feld abgeschaltet, dann stellt sich die Wand auf das neue Minimum bei x_4 ein. Die Wand ist nun *irreversibel* verschoben worden. Nur durch ein entgegengesetzt gerichtetes äußeres H-Feld ausreichenden Betrages kann die Wand wieder nach links über x_2 hinweg zurückgebracht werden. Eine weitere Rechtsverschiebung erfordert dem hohen Maximum im Punkt x_6 entsprechend ein ausreichendes äußeres H-Feld H . Daraus erklären sich die Erscheinungen der Hysterese und der Remanenz. Haben schließlich bei hohem magnetischen Feld alle Raumteile eine entsprechende Richtung leichter Magnetisierung angenommen, dann kann bei weiterer Erhöhung des magnetischen Feldes der Drehungseffekt in Erscheinung treten, der wiederum reversibel ist, bis schließ-

lich alle Magnetisierungsrichtungen mit der äußeren Feldrichtung im Zustand der magnetischen Sättigung übereinstimmen.

Gewöhnliches Eisen ist polykristallin. Die einzelnen Kristalle haben völlig verschiedene Orientierungen, so dass Wandverschiebungen und Drehprozesse in großer Vielfältigkeit auftreten. Daraus erklärt sich die Abrundung der Magnetisierungskurve, wie sie die Messungen an wirklichen Stoffen zeigen.

Die Magnetisierungskurven ferromagnetischer Stoffe sind genau genommen keine glatten Kurven, sondern setzen sich aus einer außerordentlich großen Zahl von kleinen Sprüngen zusammen, die dem Umspringen der Blochwände entsprechen. Diese Folgerung wird durch die Beobachtung bestätigt: Ändert man den magnetischen Zustand eines Eisenstückes, das sich im Innern einer Spule befindet, z.B. durch Nähern eines Stahlmagneten, so wird in der Spule eine Spannung induziert. Die Spannung enthält kleine rasch aufeinanderfolgende Sprünge, die mit Hilfe von Verstärkern in einem Fernhörer als prasselndes Rauschen hörbar gemacht werden können „*Barkhausen-Effekt*“.

Im Gebiet der Sättigung unterscheidet sich das B-Feld wegen der durch die Molekularströme gegebenen zusätzlichen Durchflutung von dem B-Feld im leeren Raum, also von der Größe $\mu_0 H$, um einen bestimmten konstanten Betrag. Die Magnetisierungskurven gehen in gerade Linien mit der Steigung μ_0 über, Abb. 20.6. Die auf diese Weise bestimmte Hystereseschleife bezeichnet man als die *Grenzkurve*. Nur Punkte auf der von dieser Kurve eingeschlossenen Fläche können durch entsprechendes Variieren von H erreicht werden.

Der nach Sättigung und Abschalten der Erregung erzielte Wert der magnetischen Induktion heißt „*Remanenzinduktion*“ B_r . Das H-Feld, das nach Sättigung in der entgegengesetzten Richtung aufgebracht werden muss, damit das B-Feld verschwindet, heißt *Koerzitivfeldstärke* H_k . Diese beiden Werte beziehen sich also auf die Grenzkurve.

Allgemein nennt man die Differenz zwischen dem Betrag des B-Feldes B und dem Wert $\mu_0 H$ die *magnetische Polarisation* oder *innere Induktion*

$$J = B - \mu_0 H. \quad (20.20)$$

Die magnetische Polarisation ist also kennzeichnend für den Beitrag, den das magnetische Material zum B-Feld liefert.

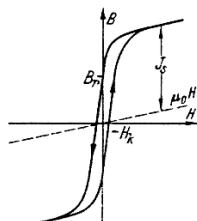


Abbildung 20.6. Hystereseschleife bei Sättigung

Trägt man statt der Induktion die magnetische Polarisation J in Abhängigkeit von der Erregung auf, so ergeben sich Kurven, die sich bei hoher Erregung einem konstanten Wert J_s , nähern, Abb. 20.6. Die *Remanenzpolarisation* J_r stimmt mit der *Remanenzinduktion* B , überein, wie aus der Definitionsgleichung (20.20) folgt. Dagegen ist das H-Feld H_{kj} , die nach Sättigung die Polarisation zum Verschwinden bringt, verschieden von der Koerzitivfeldstärke H_k .

Eine andere gebräuchliche Definition ergibt sich, wenn Gl. (20.20) auf beiden Seiten durch μ_0 dividiert wird:

$$M = \frac{J}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0} - H. \quad (20.21)$$

M heißt die *Magnetisierungsstärke* oder *Magnetisierung* oder *innere Feldstärke*. Es gilt

$$B = \mu_0(H + M). \quad (20.22)$$

M ist also die durch die innere Durchflutung der Elementardipole erzeugte magnetische Erregung oder H-Feld. Im Gebiet der Sättigung sind J und M konstant und heißen *Sättigungspolarisation* bzw. *Sättigungsmagnetisierung*:

$$J_s = \mu_0 M_s. \quad (20.23)$$

Zwischen der Magnetisierung M und dem magnetischen Moment m_0 der

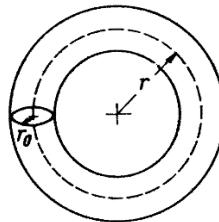


Abbildung 20.7. Innere Durchflutung einer Feldlinie mit dem Radius r

Elementardipole besteht ein einfacher Zusammenhang. Es seien je Volumen des magnetischen Materials n gerichtete Dipole vorhanden. In einem Ringkern nach Abb. 20.2 tragen zur Durchflutung einer Feldlinie mit dem Radius r alle in diese Feldrichtung zeigenden Elementardipole nach Abb. 20.1 bei, deren Mittelpunkte um nicht mehr als r_0 von der Feldlinie entfernt sind. Die Mittelpunkte aller zur Durchflutung beitragenden Dipole sind also in einer ringförmigen Röhre vom Radius r_0 , Abb. 20.7, enthalten. Die Länge dieser Röhre ist $l = 2\pi r$, ihr Querschnitt $r_0^2\pi$, das Volumen also $lr_0^2\pi$. Die Röhre enthält $nlr_0^2\pi$ gerichtete Dipole und der Beitrag dieser Dipole zur Durchflutung der Feldlinie mit dem Radius r ist $nlr_0^2\pi I_0$, wobei I_0 den der Elektronenbewegung gemäß Abb. 20.1 entsprechenden Elementarstrom bezeichnet.

Daher gilt $Ml = nlr_0^2\pi I_0$, und mit Gl. (20.4), wenn man \mathbf{m}_0 und \mathbf{M} als Vektoren schreibt,

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}_0. \quad (20.24)$$

Die Magnetisierung \mathbf{M} ist demnach analog \mathbf{P} die Summe der Dipolmomente je Volumen.

Die spontane Magnetisierung nimmt bei höheren Temperaturen ab und verschwindet bei Temperaturen oberhalb einer bestimmten Grenze (Curie-Temperatur), bei Eisen z.B. oberhalb $760^\circ C$, bei Nickel oberhalb $360^\circ C$.

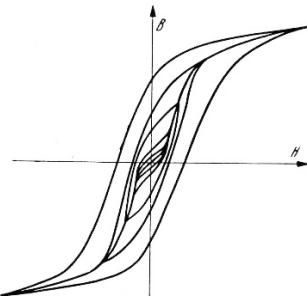


Abbildung 20.8. Definition der Kommutierungskurve

Für die Wechselstromtechnik ist das Verhalten der Stoffe bei wechselnder Magnetisierung von Interesse. Man erhält die sogenannte *Kommutierungskurve*, wenn man bei einer bestimmten Erregung die Stromrichtung mehrmals umkehrt und dann den zu einer Umkehrung gehörigen ballistischen Ausschlag des Galvanometers abliest; er liefert den doppelten Wert des zu dem betreffenden H -Feld gehörende B -Feld. Die Kommutierungskurve, Abb. 20.8, verbindet die Umkehrpunkte der Hystereseschleifen.

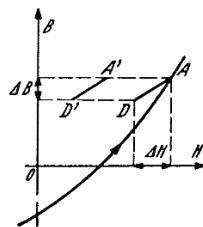


Abbildung 20.9. Reversible Permeabilität

In der Nachrichtentechnik handelt es sich häufig um sehr kleine magnetische Feldänderungen; dabei kann gleichzeitig eine Vormagnetisierung vorhanden sein, wenn nämlich durch die Erregerwicklung neben dem Wechselstrom

noch Gleichstrom fließt. Für solche kleinen magnetischen Feldänderungen an irgendeiner Stelle innerhalb der Grenzkurven gilt folgendes. Verkleinert man im Punkte A einer Magnetisierungskurve, Abb. 20.9, das H-Feld um den kleinen Betrag ΔH , so wird auch das B-Feld B um einen Betrag ΔB kleiner. Wenn die Änderung des H-Feldes sehr klein ist, so gelangt man von dem erreichten Punkt D aus bei einer Vergrößerung des H-Feldes um den gleichen Betrag wieder zum Punkt A zurück, der Vorgang ist umkehrbar. Man bezeichnet das Verhältnis

$$\mu_{rev} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (20.25)$$

als *reversible Permeabilität*. Die reversible Permeabilität ist im allgemeinen kleiner als die „totale Permeabilität“

$$\mu = \frac{B}{H} \quad (20.26)$$

und auch kleiner als die „differentielle Permeabilität“ dB/dH an der betreffenden Stelle der Magnetisierungskurve. Die reversible Permeabilität hängt nach den experimentellen Befunden nur von der magnetischen Induktion ab, nicht aber von der magnetischen Erregung; sie hat also bei A' den gleichen Wert wie bei A; Abb. 20.9. Den größten Betrag hat die reversible Permeabilität μ_{rev} bei $B = 0$; man bezeichnet diesen Wert als *Anfangspermeabilität* μ_a . Mit wachsendem B-Feld nimmt die reversible Permeabilität ab. Die aus der Kommutierungskurve nach Gl. (20.26) entnommene Permeabilität μ wird *Wechselpermeabilität* genannt; sie hat ihren größten Wert dort, wo eine gerade Linie vom Nullpunkt die Kommutierungskurve berührt.

20.4 Magnetische Werkstoffe

In Abb. 20.10 sind Kommutierungskurven für einige ferromagnetische Stoffe dargestellt, und zwar mit einem logarithmischen Maßstab für B und H . Die Kurven konstanter Permeabilität sind dann gerade Linien, die parallel zur Magnetisierungskurve für neutrale Stoffe ($\mu_r = 1$) verlaufen. Bei niedrigem magnetischen Feld nähern sich sämtliche Magnetisierungskurven solchen geraden Linien (Anfangspermeabilität). Die magnetischen Eigenschaften von Eisen und Eisenlegierungen hängen sehr stark von der Zusammensetzung und von der Wärmebehandlung ab. Bei den „*magnetisch weichen Stoffen*“ wird hohe Permeabilität und geringe Hysterese angestrebt. Eisen ist der gebräuchlichste magnetisch weiche Stoff. Durch Glühen mit langsamer Abkühlung werden innere mechanische Spannungen beseitigt und verhältnismäßig gute magnetische Eigenschaften erzielt. Schon geringe Beimengungen, besonders von Kohlenstoff, Stickstoff, Sauerstoff, Schwefel verschlechtern aber die magnetischen Eigenschaften erheblich. Durch Reinigen und Glühen in Wasserstoff sind Permeabilitätszahlen bis über 250000 erzielt worden. In Abb. 20.10 ist mit der Bezeichnung „geglühtes Eisenblech“ angegeben, welche Werte bei

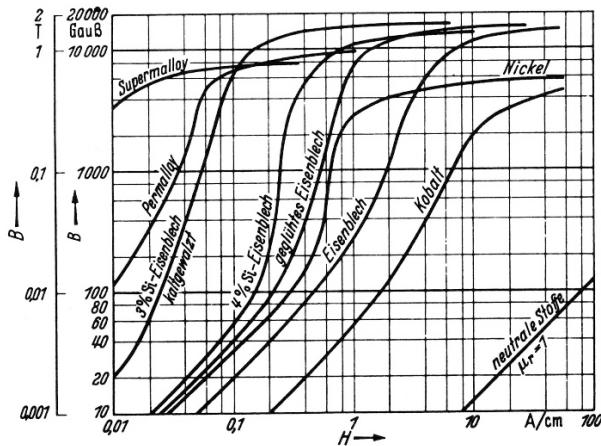


Abbildung 20.10. Gemessene Kommutierungskurven

handelsüblichem Eisen erreicht werden. Die Kurve mit der Bezeichnung, „Eisenblech“ ergab sich bei dem gleichen Material, wenn dieses kalt verformt wurde. Für die praktischen Anwendungen ist besonders Eisen mit bis zu etwa 4% Siliziumgehalt wichtig, weil es bei niedrigen Herstellungskosten verhältnismäßig hohe Permeabilität und geringe Hysterese ergibt. Als Beispiel ist in Abb. 20.10 die Magnetisierungskurve für ein Eisenblech mit 4% Silizium-Gehalt („Dynamoblech IV“) gezeigt. Bei solchen Blechen kann eine erhebliche Verbesserung durch Kaltwalzen und nachträgliches Glühen erzielt werden. Bei diesem Herstellungsprozess bilden sich Kristalle, die mit ihren magnetischen Vorzugsachsen vorwiegend in der Walzrichtung liegen („Walztextur“), so dass bei Magnetisierung in dieser Richtung besonders gute Eigenschaften erzielt werden. Die Abb. 20.10 zeigt als Beispiel die Magnetisierungskurve eines so hergestellten Eisenbleches mit 3% Si-Gehalt.

Bei sehr hohen Anforderungen an die Anfangspermeabilität werden besonders Legierungen von Eisen und Nickel verwendet. Bei etwa 80% Nickel und 20% Eisen ergeben sich Werte der Anfangspermeabilität von über 10000. Nickel-Eisen-Legierungen mit niedrigerem Nickelgehalt werden verwendet, wenn die Anfangspermeabilität in einem möglichst großen Bereich des magnetischen Feldes konstant sein soll. Eine magnetisch weiche Legierung mit besonders hoher Anfangspermeabilität ist das Supermalloy, das außer Nickel und Eisen noch Molybdän und Mangan enthält. Derartige Legierungen weichen zum Teil in ihrem magnetischen Verhalten wesentlich von Eisen ab; als Beispiel ist in Abb. 20.11 eine Hystereseschleife von „Perminvar“ (45% Ni, 30% Fe, 25% Co) dargestellt.

Extrem hohen spezifischen Widerstand, wie er zur Verminderung der Wirbelstromverluste bei hohen Frequenzen nützlich ist (Abschnitt 29.1), zeigen die Ferrite. Das sind Verbindungen von Eisenoxyd (Fe_2O_3) mit ande-

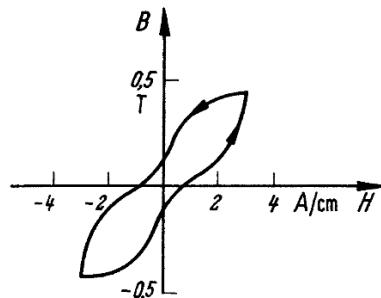


Abbildung 20.11. Hystereseschleife von Perminvar

ren Metalloxyden, die durch Sintern der feinpulvigen Ausgangsmaterialien bei bestimmten Temperaturen hergestellt werden. Verwendet wird insbesondere Mangan-Zink-Ferrit und Nickel-Zink-Ferrit verschiedener Zusammensetzung. Allerdings liegt bei diesen Stoffen die Curie-Temperatur niedrig ($130 \dots 200^\circ C$), so dass die Permeabilität stark von der Temperatur abhängt.

Auch die elektrische Leitfähigkeit der Ferrite hängt stark von der Temperatur ab; sie folgt der gleichen Gesetzmäßigkeit wie die Eigenleitfähigkeit von Halbleitern. Bei Mangan-Zink-Ferrit ist z.B. $T_a \approx 1000 K$.

Einige Besonderheiten im magnetischen Verhalten der Ferrite erklären sich durch die eigentümliche Anordnung der Elementardipole. Bei den ferromagnetischen Stoffen suchen die Austauschkräfte die magnetischen Elementardipole benachbarter Atome parallel zu stellen. In den Ferriten sind zwei oder mehrere Arten von Metallatomen (Metallionen), z.B. Eisen und Zink, abwechselnd in den Zellen des Kristallgitters angeordnet; damit sind die beiden Metallgitter ineinander verschachtelt. Die Austauschkräfte suchen hier die Elementardipole der beiden „Untergitter“ je für sich parallel, aber gegeneinander antiparallel auszurichten. Würden die beiden Arten von Metallatomen je die gleiche Anzahl unkomponierter Dipolmomente haben, so würden sich daher im ganzen Kristall alle Elementardipole kompensieren. Solche Stoffe sind paramagnetisch; man nennt sie auch *antiferromagnetisch*. Bei den Ferriten haben die Eisenatome und die anderen Metallatome ein verschiedenes Dipolmoment, so dass die Kristallzelle ein entsprechendes resultierendes Dipolmoment besitzt. Damit ergibt sich eine spontane Magnetisierung, nämlich als Differenz der spontanen Magnetisierungen der beiden zueinander antiparallelen Untergitter A und B , Abb. 20.12. Stoffe mit einer solchen Struktur werden *ferrimagnetisch* genannt. Sie verhalten sich im wesentlichen wie ferromagnetische Stoffe, zeigen aber Besonderheiten, wie z. B. niedrigere Remanenz und Sättigungsmagnetisierung, die sich aus dem Gegeneinanderwirken der beiden Gitter erklären. Ferner bilden sich in solchen Stoffen besonders leicht 180° -Wände aus. Ein zunächst in der einen Richtung magnetisierter Ringkern nach Abb. 20.2 wird z.B. nur bis zu einem bestimmten Radius r ummagnetisiert, wenn die

Durchflutung in der neuen Richtung nur bei Radien, die kleiner als r sind, ein ausreichendes magnetisches Feld oberhalb der Koerzitivfeldstärke erzeugt.

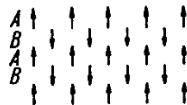


Abbildung 20.12. Dipolmomente im Kristallgitter eines Ferrits

Magnetisch harte Stoffe haben ausgeprägte Hysterese-Eigenschaften. Sie werden für die Herstellung von Dauermagneten benutzt und sollen daher möglichst hohe Koerzitivfeldstärke und hohe Remanenzinduktion besitzen. Ein bekanntes Beispiel ist Stahl mit etwa 1% Kohlenstoffgehalt. Hier bewirkt Glühen mit nachfolgendem raschen Abkühlen, dass die Kohlenstoffatome in fein verteilter Form die Gitter der Eisenkristalle verzerrn (Martensit), so dass sich starke innere mechanische Spannungen ergeben. Auch magnetisch harte Ferrite werden mit günstigen Eigenschaften hergestellt (insbesondere Barium-Ferrit). Nach Abb. 20.5 kann man die Koerzitivfeldstärke aus dem Energiediagramm der spontanmagnetisierten Bereiche erklären. Magnetisch harte Stoffe entstehen infolge starker Anisotropien, die zu steilen räumlichen Änderungen der Energie W führen. Bei magnetisch weichen Stoffen müssen solche Anisotropien (z.B. Anisotropien infolge innerer mechanischer Spannungen) vermieden werden. Sind die Schwankungsamplituden von dW/dx räumlich etwa konstant, dann genügt das Überschreiten eines bestimmten magnetischen Feldes zum völligen Ummagnetisieren großer Bezirke oder des ganzen Körpers. Die Hystereseschleife nähert sich einer Rechteckform. Stoffe mit nahezu „rechteckiger“ Hystereseschleife werden für Schaltkerne und Speicherkerne verwendet. Bei diesen Stoffen wird angestrebt, dass die Remanenzinduktion B_r möglichst gleich der Sättigungspolarisation J_s , und die Koerzitivfeldstärke H_k relativ gering ist.

Einige Zahlenwerte für verschiedene magnetisch weiche und magnetisch harte Stoffe sowie für Stoffe mit Rechteck-Hystereseschleife findet man bei Küpfmüller und Kohn ([155], S. 284f). Die Zahlen zeigen ungefähr die praktisch vorkommenden Werte; die Eigenschaften magnetischer Werkstoffe hängen immer stark von der genauen Zusammensetzung und von der thermischen und mechanischen Behandlung ab.

20.5 Magnetische Anisotropie

Die Permeabilität kann in verschiedenen Richtungen ein und desselben Körpers verschiedene Werte haben. Der Körper ist dann magnetisch anisotrop. Wie oben ausgeführt, ist bereits der einzelne Eisenkristall anisotrop. Ein praktisches Beispiel bilden die ebenfalls oben erwähnten Eisenbleche mit magneti-

scher Vorzugsrichtung. In solchen Fällen brauchen die Richtungen der Vektoren \mathbf{B} und \mathbf{H} sowie auch die Richtungen der Vektoren \mathbf{M} und \mathbf{H} nicht übereinzustimmen. Der Vektor \mathbf{M} gibt die resultierende Richtung der Elektronenspins an, und es gilt die Vektorgleichung

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}. \quad (20.27)$$

Als Beispiel für eine solche Anisotropie soll das Verhalten *dünner magnetischer Schichten mit Rechteck-Hystereseschleife* betrachtet werden. Solche magnetischen Filme werden durch Aufdampfen im Vakuum von ferromagnetischen Stoffen, z.B. von Nickel und Eisen, auf einen magnetisch neutralen Stoff erzeugt, wobei man gleichzeitig ein magnetisches Feld auf die wachsende Schicht parallel zur Schicht einwirken lässt. Bei Schichtdicken von der Größenordnung $0,1\mu m$. und Abmessungen von der Größenordnung einiger mm^2 kann so erreicht werden, dass der Film im Idealfall einen einzigen Weissschen Bezirk mit einer Vorzugsrichtung bildet, die durch die Richtung des bei der Herstellung aufgeprägten Magnetfeldes bestimmt ist. Die Magnetisierung hat zwei stabile Ruhelagen, eine in dieser Richtung, die andere entgegengesetzt dazu. Ein solcher Kern kann daher als ein binäres Speicherelement benutzt werden. In Abb. 20.13 sei x die Vorzugsrichtung des Filmes F. In der Ruhelage hat der Vektor \mathbf{M} diese Richtung oder die dazu entgegengesetzte Richtung. Ein äußeres H-Feld \mathbf{H} dreht die Dipole und damit die Magnetisierung \mathbf{M} um einen Winkel α aus dieser Ruhelage heraus. Der Winkel \mathbf{M} ist abhängig von den beiden Komponenten H_x und H_y von \mathbf{H} . Die Magnetisierung klappt um, wenn \mathbf{H} eine bestimmte negative Komponente H_x hat und der Winkel α eine bestimmte Grenze überschreitet. Der zum Umklappen erforderliche Betrag von H_x hängt in der durch Abb. 20.14, Kurvenstück AB , dargestellten Weise von H_y ab. Alle Werte des H-Feldes, die links von dieser Kurve liegen, führen zum Umklappen der Magnetisierung. Die Koerzitivfeldstärke H_k hat bei Nickel-Eisen die Größenordnung einiger A/cm . Zum Umklappen ist gemäß Abb. 20.14 ein geringeres H-Feld als H_k erforderlich, wenn gleichzeitig ein Feld in der y -Richtung erzeugt wird. Für das Zurückklappen gilt die Grenzkurve AC , und das Verhalten ist auch bei negativen Komponenten H_y symmetrisch zu dem für positive H_y beschriebenen. Bei der Verwendung als binäres Speicherelement werden zur magnetischen Erregung zwei Drahtschleifen verwendet, die den Film längs der x -Richtung bzw. längs der y -Richtung umschlingen. Die Zeit, die zum Umklappen der Magnetisierung erforderlich ist, ist bei dünnen Filmen sehr kurz (Größenordnung $1ns$). Weitere technisch interessante Eigenschaften zeigen anisotrope magnetische Stoffe mit nur einer *einigen leichten Magnetisierungsrichtung* und *extrem niedriger Koerzitivkraft*. Es sind dies sogenannten *Orthoferrite* (Verbindungen mit FeO_3) in Kristallform sowie bestimmte Granatkristalle (Verbindungen von der Form $A_3Fe_5O_{12}$, wobei A z. B. Yttrium sein kann). In einem dünnen Plättchen, das senkrecht zur leichten Magnetisierungsrichtung aus dem Kristall herausgeschnitten wird, verbleiben bei magnetischer Umerregung in dieser Richtung

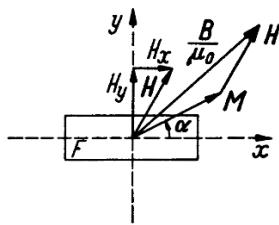


Abbildung 20.13. Anisotroper Magnetfilm unter der Einwirkung eines äußeren H-Feldes

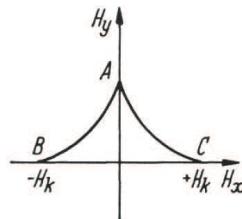


Abbildung 20.14. Grenzkurve für die Ummagnetisierung

kleine Bezirke entgegengesetzter Magnetisierung, Abb. 20.15; sie haben wegen der Übereinstimmung zwischen leichter Achse und Magnetisierungsrichtung Zylinderform („Blasen“). Diese Zylinderchen lassen sich wegen der sehr geringen Koerzitivkraft leicht durch äußere Magnetfelder oder Ströme räumlich verschieben und bleiben dann jeweils in ihrer Lage; weitere Einzelheiten findet man bei O'Dell [217].

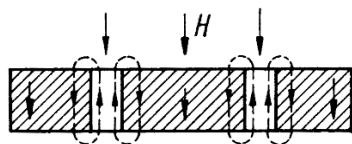


Abbildung 20.15. Ferrit mit verschiebbaren Magnetisierungszonen

21

Lösungsverfahren für die Vektor-Poissongleichung

21.1 Ableitung der Vektor-Poissongleichung

Wir wissen aus Abschnitt 18, dass sich das H-Feld unter Berücksichtigung des Nahwirkungsprinzips und des Helmholtzschen Satzes hinsichtlich seines divergenzfreien Anteils in folgender Weise ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (21.1)$$

Diese Beziehung wird nach Abschnitt 19.3 auch differentielle Form des Durchflutungsgesetzes genannt, das man aus (21.1) mit Hilfe des Stokesschen Satzes in die integrale Form bringen kann

$$\oint_{C_A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = I. \quad (21.2)$$

Beispiel: Für ein H-Feld mit geraden parallelen Feldlinien, wie es z. B. angenähert in den Eisenblechen einer Drosselspule vorliegt, sei

$$H_x = H, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0. \quad (21.3)$$

Die x -Achse hat also die Richtung des H-Feldes. Ferner sei die H-Feldliniendichte in allen Ebenen parallel zur x, z -Ebene konstant, $H = \|\mathbf{H}\|$ also nur von y abhängig. Dann gilt definitionsgemäß

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{H} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (21.4)$$

Nach Gl.(21.1) folgt nun, dass das vorausgesetzte Magnetfeld mit einem Strom verbunden sein muss, der parallel zur z -Achse fließt. Die Stromdichte beträgt nach Gl.(21.1)

$$J_z = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (21.5)$$

Wäre das Magnetfeld homogen, dann wäre also die Stromdichte Null. Nimmt die Flussdichte mit der y -Richtung ab, so fließt Strom in der z -Richtung, nimmt sie zu, in der entgegengesetzten Richtung. Ein konstante Stromdichte ist mit einer linearen Zunahme der Flussdichte verbunden.

Da das B-Feld nach Abschnitt 18.23 quellenfrei ist, so gilt unter der Voraussetzung, dass $\mu = \text{konst.}$ ist,

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (21.6)$$

Bemerkung: In ferromagnetischen Stoffen kann $\operatorname{div} \mathbf{H}$ wegen des feldstärke-abhängigen μ von Null verschieden sein.

Auf Grund der Gl. (21.6) kann man nun den Ansatz machen

$$\mathbf{H} =: \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (21.7)$$

wobei \mathbf{A} ein Vektorfeld darstellt, das durch diese Beziehung definiert ist¹.

Führt man dies in Gl. (21.1) ein, so folgt

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}, \quad (21.8)$$

oder mit einer Rechenregel für den Operator $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ (siehe A.1)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{J}. \quad (21.9)$$

Nach Gl. (21.7) ist nur die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ festgelegt, so dass über seine Divergenz noch verfügt werden kann. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Eichung des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Im Rahmen der Theorie des stationären Magnetfeldes verwendet man üblicherweise die sogenannte Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (21.10)$$

Damit folgt aus Gl. (21.9)

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad (21.11)$$

eine Gleichung, die der Laplaceschen PDgl. (6.9) der Elektrostatik ähnlich ist. Sie wird auch als Vektor-Poissongleichung bezeichnet, auf die bereits in Abschnitt 18 kurz eingegangen wurde. Auf einige Lösungsmethoden dieser

¹ Im folgenden wird der Buchstabe \mathbf{A} für das Vektorfeld \mathbf{A} als auch für das gerichtete Flächenelement in differentieller Form $d\mathbf{A}$ (z. B. in Flächenintegralen) verwendet. Dennoch sollte keine Verwechslung mit dem Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ auftreten, wenn der Kontext beachtet wird.

partiellen Differentialgleichung wird in den folgenden Abschnitten eingegangen.

Die Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ist natürlich konsistent mit der im statioären Magnetfeld gültigen Beziehung $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Das folgt nach Möller ([202], S. 257) daraus, dass man bei der Divergenzbildung des Vektorpotenzials \mathbf{A} das Stromsystem festhalten und den Aufpunkt verändern muss. Wenn aber der Integrationsbereich das Stromsystem völlig einschließt, kann man auch den Aufpunkt festhalten und das Stromsystem verschieben. Mathematisch kann man dieses Resultat durch eine partielle Integration erhalten. Mit der Lösung der Vektor-Poisson-Gleichung (21.21) aus dem folgenden Abschnitt ergibt sich nämlich

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \left(\frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V} \right), \quad (21.12)$$

wobei der Divergenzoperator auf Funktionen von \mathbf{r} wirkt. Das wird zusammen mit einer partiellen Integration ausgenutzt, um das folgende Ergebnis zu erhalten

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.13)$$

wobei der Divergenzoperator nunmehr auf Funktionen von $\tilde{\mathbf{r}}$ wirkt. Da die Integration über ein beliebiges Volumen durchzuführen ist, ergibt sich die gewünschte Äquivalenz der Beziehungen $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Eine detaillierte Ableitung dieses Ergebnisses findet man bei Lehner [162]. Dort findet man auch den Hinweis, dass dieses Ergebnis nicht bedeutet, dass man immer die Coulomb-Eichung zu wählen hat, sondern dass die bei der Ableitung der Vektor-Poisson-Gleichung gewählte Eichbedingung auch wieder reproduzierbar ist.

21.2 Das vektorielle Kirchhoff-Integral

21.2.1 Kirchhoff-Integral für Stromdichteverteilungen

Im vorherigen Abschnitt 21.1 haben wir eine partielle Differentialgleichung für ein Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ abgeleitet, aus dem man bei bekannter Materialgleichung auch das B- und das H-Feld ableiten kann. Die Größe kann somit wie im elektrostatischen Feld als Zustandsgröße angesehen werden, wobei die Beziehung (21.7) als Beobachtungsgleichung für dieses physikalische Feld \mathbf{H} aufgefasst werden kann.

Es wurde auch erwähnt, dass die Bestimmungsgleichung (21.11) vom Typ einer Vektor-Poisson-Gleichung ist. Ein Unterschied gegenüber der Poisson-Gleichung in der Elektrostatik scheint lediglich darin zu bestehen, dass \mathbf{A} und \mathbf{J} hier Vektorfelder sind. Im Sonderfall der x, y, z -Koordinaten kann sogar eine Lösungsformel abgeleitet werden, die in ihrer Form der Kirchhoffschen Lösungsformel für das skalare elektrostatische Potenzial entspricht. Im Anhang B.2 wird nämlich gezeigt, dass der Laplace-Operator Δ auf vektorielle

Felder im Sonderfall der x, y, z -Koordinaten komponentenweise angewendet werden kann. Somit zerfällt die Gl. (21.11) in xyz -Koordinaten in drei nicht gekoppelte Poisson-Gleichungen für die Komponenten des Vektorpotenzials

$$\Delta A_x = -\mu J_x, \quad (21.14)$$

$$\Delta A_y = -\mu J_y, \quad (21.15)$$

$$\Delta A_z = -\mu J_z. \quad (21.16)$$

Diese günstige Situation ergibt sich jedoch nur dann, wenn keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen. Sind Randbedingungen im Endlichen vorhanden, so erhält man Bedingungsgleichungen, die zu Kopplungen zwischen den Komponenten führen. Wird nämlich das physikalisch relevante B -Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ auf einem Rand im Endlichen vorgegeben, so wird dort $\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ vorgeschrieben, woraus sich nach Definition des Rotationsoperators offensichtlich Kopplungen der Ableitungen des Vektorpotenzials \mathbf{A} ergeben.

Wie im Anhang B.2 gezeigt wird, verkompliziert sich die Situation, wenn man ein Problem in allgemeineren Koordinatensystemen betrachtet. Bei der Anwendung des Laplaceoperators auf das Vektorpotential treten dann weitere Terme auf, die zu einer expliziten Kopplung der Poisson-Gleichungen für die Komponenten führen. Beispielsweise koppeln die radiale Komponente und die Winkelkomponente in Zylinderkoordinaten, während alle drei Komponenten in Kugelkoordinaten gekoppelt sind. Die Verwendung des Vektorpotenzials bei praktischen Rechnungen ist dann eher fraglich.

Auf Grund der Analogie zu den Verhältnissen im elektrischen Feld können wir für die Komponenten von \mathbf{A} sofort die Lösungen anschreiben, wenn wir in xyz -Koordinaten arbeiten und keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen. Ist im elektrischen Feld die Ladungsdichte an jeder Stelle des Raumes bekannt, so gilt für das Potential (vgl. Gl.(11.28))

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \frac{\varrho(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.17)$$

wobei $d\tilde{V}$ das Volumenelement ist, $\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|$ den Abstand des Aufpunktes von diesem Volumenelement bezeichnet und das Integral über den ganzen geladenen Raum zu erstrecken ist. An die Stelle von ϱ/ε in der skalaren Poisson-Gleichung der Elektrostatik tritt in der Theorie des stationären Magnetfeldes nach Gl. (21.11) $\mu \mathbf{J}$. Entsprechend gilt daher

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.18)$$

$$A_y(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.19)$$

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.20)$$

wobei sich die Integrationen auf den von der elektrischen Stromdichte \mathbf{J} erfüllten Raumbereich V bezieht. Diese drei Gleichungen kann man wieder zu einer einzigen Vektorgleichung zusammenfassen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \quad (21.21)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln der Vektoranalysis lässt sich zeigen, dass dieser Ansatz auch die Bedingung (21.10) erfüllt. Wenn die elektrische Strömung in jedem Punkt des Raumes gegeben ist, kann also mit der Formel (21.21) das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ berechnet werden.

Das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kann auch zur Berechnung des magnetischen Flusses Φ herangezogen werden. Nach den Abschnitten 18 und 19.1 ist der durch eine beliebige Fläche A gehende magnetische Fluss gleich dem Flächenintegral des \mathbf{B} -Feldes über diese Fläche

$$\Phi = \iint_A \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}}. \quad (21.22)$$

Wegen

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (21.23)$$

folgt somit

$$\Phi = \iint_A \text{rot } \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \quad (21.24)$$

und mit Hilfe des Stokesschen Satzes schließlich

$$\Phi = \oint_{C_A} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}. \quad (21.25)$$

Man erhält demnach den magnetischen Fluss Φ , der durch eine beliebig begrenzte Fläche A hindurchgeht, indem man das Linienintegral des Vektorpotenzials \mathbf{A} längs der Randlinie C_A der Fläche A bildet.

21.2.2 Kirchhoff-Integral für einen Linienleiter

Das Vektorpotenzial \mathbf{A} ist bei einer beliebigen Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ mit der Kirchhoffschen Formel aufgrund des komplizierten und möglicherweise singulären Integranden nur selten analytisch berechenbar. Wird jedoch der elektrische Strom in dünnen und sehr gut leitenden Drähten geführt, wobei außerhalb des Drahtes die Stromdichte gleich null ist, kann man eine Näherungsformel entwickeln. Im folgenden stellen wir uns den Draht als einen langen zylindrischen Leiter mit einem kreisförmigen Querschnitt vor, dessen Durchmesser überall konstant und klein gegenüber der Länge des Leiters ist. Weiterhin soll die Stromdichte \mathbf{J} über dem Querschnitt konstant sein und es soll gelten $\mathbf{J} \perp d\mathbf{A}$, wobei $d\mathbf{A}$ die Flächennormale der infinitesimalen Querschnittsfläche

ist. Unter diesen Voraussetzungen kann das Volumenintegral der Kirchhoff-schen Formel auf ein Linienintegral reduziert werden, wobei die Integration der Stromdichte über die Querschnittsfläche den Strom I durch den Leiter ergibt. Die Kurve \mathcal{C} , über die das Linienintegral berechnet wird, muss noch passend gewählt werden. Beispielsweise kann man die Mittellinie des zylindrischen Leiters wählen und konzentriert damit den elektrischen Strom auf diese Linie. Man erhält die Näherung des Vektorpotenzials für diesen Linienleiter

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{\mathbf{r}}, \quad (21.26)$$

die zur Berechnung des Vektorpotenzials einer beliebigen Drahtspule im Sinne der Linienleiter-Näherung verwendet werden kann. Für analytische oder numerische Rechnungen muss für die Kurve \mathcal{C} eine Parametrisierung vorhanden sein. Mit (21.25) ergibt sich dann der magnetische Fluss Φ eines Linienleiters durch eine beliebige Fläche A mit der Berandung \mathcal{C}_A zu

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_A} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\tilde{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}. \quad (21.27)$$

Eine ebene kreisförmige Stromschleife mit dem Radius R wird zweckmäßig in Zylinderkoordinaten parametrisiert; es ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \psi \\ R \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21.28)$$

Der beliebige Punkt \mathbf{r} im Raum, in dem das Vektorpotenzial bestimmt werden soll, wird in folgender Weise parametrisiert

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}. \quad (21.29)$$

$d\tilde{\mathbf{r}}$ berechnet sich über

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\psi} = \begin{pmatrix} -R \sin \psi \\ R \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21.30)$$

Das Vektorpotential wird damit zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R (-\sin \psi, \cos \psi, 0)^T d\psi}{\sqrt{(R \cos \psi - \rho \cos \phi)^2 + (R \sin \psi - \rho \sin \phi)^2 + z^2}}. \quad (21.31)$$

Mit den gelösten Binomen im Nenner und dem Additionstheorem

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \quad (21.32)$$

folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R(-\sin \psi, \cos \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos(\psi - \phi)}}. \quad (21.33)$$

Mit der Substitution $\psi \rightarrow \psi + \phi$ folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R(-\sin(\psi + \phi), \cos(\psi + \phi), 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (21.34)$$

Mit den Additionstheoremen

$$-\sin(\psi + \phi) = -\cos \phi \sin \psi - \cos \psi \sin \phi \quad (21.35)$$

$$\cos(\psi + \phi) = \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \quad (21.36)$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R \cos(\phi) (-\sin \psi, \cos \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}} \right. \\ &\quad \left. + \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R \sin(\phi) (-\cos \psi, -\sin \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}} \right). \end{aligned} \quad (21.37)$$

Integrale der folgende Form lassen sich exakt berechnen

$$\int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{a + b \cos \psi}} = -\frac{2\sqrt{a + b \cos \psi}}{b} \Big|_\phi^{2\pi+\phi} = 0. \quad (21.38)$$

Daraus lässt sich Gl. (21.37) vereinfachen zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R(-\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (21.39)$$

Diese Gleichung kann kompakter geschrieben werden, da durch Ableiten von \mathbf{r} nach ϕ folgt

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21.40)$$

Damit folgt für Gl. (21.39)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{\rho} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (21.41)$$

Integrale folgender Form sind elliptisch

$$\int \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{a - b \cos \psi}} = \frac{2}{b\sqrt{a - b}} \left(aF\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2b}{a - b}\right) - (a - b)E\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2b}{a - b}\right) \right), \quad (21.42)$$

Dabei ist $F(a, b)$ das elliptische Integral 1. Art und $E(a, b)$ das elliptische Integral 2. Art; vgl. z. B. [2]. Mit $k := R^2 + \rho^2 + z^2$, $\kappa := 2R\rho$ und $\lambda^2 := k - \kappa$ folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\rho^2} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} \left(\frac{k}{\lambda} F\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right) \Big|_{\phi}^{2\pi+\phi} \quad (21.43)$$

Für elliptische Integrale 1. Art gilt die Beziehung

$$F(2\pi + \phi, a) - F(\phi, a) = 2K(a) \quad (21.44)$$

dabei ist $K(a)$ das komplette elliptische Integral 1. Art. Für das Integral 2. Art gilt die Beziehung

$$E(2\pi + \phi, a) - E(\phi, a) = 2E(a) \quad (21.45)$$

dabei ist $E(a)$ das komplette elliptische Integral 2. Art. Mit dem Einsetzen der Grenzen folgt also aus Gl. (21.43)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho^2} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right). \quad (21.46)$$

Dies ist die exakte Lösung für das Vektorpotential einer Stromschleife in einem beliebigen Raumpunkt \mathbf{r} .

Daraus kann nach (21.25) der magnetische Fluss Φ durch eine mit der Kurve \mathcal{C}_A berandete Fläche A ermittelt werden

$$\Phi = \oint_{\mathcal{C}_A} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (21.47)$$

Wählt man beispielsweise eine ebene kreisförmige Fläche, die konzentrisch zur Stromschleife angeordnet ist und die Berandung

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ h \end{pmatrix}. \quad (21.48)$$

besitzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\tilde{R}^2} \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right) \oint_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} d\phi \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\tilde{R}^2} \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right) \oint_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \\ &= \mu_0 I \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (21.49)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Radien R und ρ sowie der konzentrische Abstand h noch nicht festgelegt wurden, denn k , κ und λ hängen von diesen Größen ab.

21.3 Das Biot-Savart-Integral

Eigentlich war das Gesetz von Biot, Savart und Amperè der Ausgangspunkt für die quantitative Behandlung des Magnetfeldes von stromführenden Leitern – der sogenannte *Elektromagnetismus* – und dessen Kraftwirkung Anfang des 19. Jahrhunderts. Einzelheiten der Entstehungsgeschichte der Theorie, die in überraschend kurzer Zeit ausgebaut wurde, findet man u. a. bei H. Ebert [70]. An dieser Stelle soll nur überblicksartig auf einige historische Aspekte eingegangen werden.

Grundsätzlich waren magnetische Erscheinungen schon seit den Griechen bekannt, aber dabei handelte es sich um magnetische Wirkungen sogenannter Magneteisensteine. Erste Beobachtungen über die Kraftwirkung von stromführenden Leitern gehen auf Romagnosi im Jahre 1802 zurück. Systematische Experimente über elektromagnetische Erscheinungen anhand eines stromdurchflossenen Drahtes und einer Magnetnadel (vgl. Abschnitt 22.3.4) wurden dann erstmals von Ørsted durchgeführt. Seine Ergebnisse teilte er am 21. Juli 1820 mit. Ørsteds Entdeckung teilte Arago am 4. September 1820 seinen französischen Kollegen mit; der Versuch wurde dort am 11. September 1820 demonstriert. Wenige Tage später, nämlich am 25. September 1820 zeigte Amperè die gegenseitige Beeinflussung zweier stromführender Drähte. Weitere vier Wochen später – 30. Oktober 1820 – präsentierten Biot und Savart erste quantitative Aussagen über die „magnetische Kraft“ auf einen Draht. Die bekannte Illustration der magnetischen Kraftwirkung mit Eisenspänen wurde übrigens erstmals von Seebeck im Jahre 1821 angegeben. Mit Hilfe eines „Schwingungsvariometers“ zeigten sie, dass folgende Proportionalitäten gelten

$$\|\mathbf{B}\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}, \quad \|\mathbf{B}\| \sim I, \quad (21.50)$$

wobei wir uns der modernen Bezeichnungsweise $\|\mathbf{B}\|$ für die Kraftwirkung bedienen.

Daraus ergibt sich dann insgesamt (C : Konstante)

$$\|\mathbf{B}\| = C \frac{I}{\|\mathbf{r}\|}. \quad (21.51)$$

Eine allgemeinere Form wurde 1823 von Amperè angegeben. Dieses Ergebnis war damals höchst ungewöhnlich und erregte die Gemüter, denn die Kraftwirkung fiel nicht wie beim Gravitationsgesetz und der elektrostatischen Coulombkraft mit $1/\|\mathbf{r}\|^2$ ab sondern mit $1/\|\mathbf{r}\|$. Laplace zeigte schließlich, dass es eine differentielle Form der Biot-Savartschen Gesetzmäßigkeit für die magnetische Kraftwirkung gibt, die wieder im Einklang mit dem $1/\|\mathbf{r}\|^2$ -Abfall der Kraftwirkung steht, obwohl Laplace dazu – in mathematisch nicht zwingender Weise – von der Summe auf die Summanden schließen musste; vgl. z. B. Behnke, Muschik, Päsler [23]. Man kann jedoch ein Experiment angeben, dass in einem gewissen Sinne die Vorgehensweise von Laplace rechtfertigt. Im folgenden gehen wir auf die Ableitung des Biot-Savart-Integrals auf der Grundlage

des Vektorpotenzials ein, das in dieser Form eigentlich von Laplace stammt und daher auch Biot-Savart-Laplace-Integral genannt werden sollte.

In Abschnitt 21.2.2 haben wir gezeigt, dass das B-Feld eines Linienleiters mit einem modifizierten Kirchhoffintegral für das Vektorpotenzials \mathbf{A} ermittelt werden kann. Oft braucht man jedoch das Vektorpotenzial selbst nicht zu berechnen. Wir leiten im folgenden aus dem Vektorpotenzial eine Formel zur Berechnung des H-Feldes ab, die es gestattet, eine entsprechende Formel für das B-Feld anzugeben.

Das H-Feld ist nach Gl. (21.7) und (21.21)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V} \right). \quad (21.52)$$

Diese Gleichung wenden wir nun auf einen „Stromfaden“ an, also auf einen stromdurchflossenen Leiter von sehr geringem Querschnitt, oder auf einen durch Strömungslinien begrenzten Ausschnitt aus einem drahtförmigen Leiter endlichen Querschnittes. Mit der Näherungsbeziehung in Gl. (21.26) ergibt sich

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\oint_{C_A} \frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right) = \frac{I}{4\pi} \oint_{C_A} \operatorname{rot} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right), \quad (21.53)$$

wobei der Operator rot auf Funktionen von \mathbf{r} wirkt. Verwenden wir die Be-

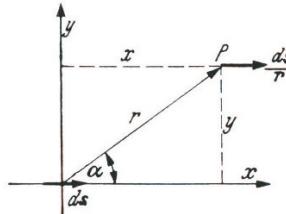


Abbildung 21.1. Zur Ableitung der Formel von Biot-Savart und Amperé

ziehung (z. B. Wunsch, Schulz [310], S. 328)

$$\operatorname{rot}(U(r) \mathbf{a}) = \frac{dU}{dr} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{a} \right) \quad (21.54)$$

mit $r := \|\mathbf{r}\|$, dann erhält man für den Integranden von (21.53)

$$\operatorname{rot} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right) = \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^2} \right) d\tilde{\mathbf{s}} \times \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}, \quad (21.55)$$

oder in Komponenten

$$\text{rot}_x \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r} \right) = 0, \quad (21.56)$$

$$\text{rot}_y \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r} \right) = 0, \quad (21.57)$$

$$\text{rot}_z \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r} \right) = \frac{\sin \alpha ds}{r^2}, \quad (21.58)$$

wobei $r := \|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|$ ist, unter $\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}$ ein Vektor verstanden wird, der durch den Abstand zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt P gegeben ist und nach dem Punkt P hinzeigt und α nach Abb. 21.1 der eingeschlossene Winkel zur x -Achse ist. Für das H-Feld ergibt sich damit schließlich die Laplacesche Formel

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\tilde{\mathbf{s}} \times (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3}, \quad (21.59)$$

welche meistens nach Biot und Savart benannt wird. Man kann diese Formel zur Berechnung magnetischer Felder von stromdurchflossenen linienförmigen Leitern folgendermaßen deuten. Das H-Feld setzt sich aus Anteilen zusammen, die von den einzelnen Längenelementen $d\mathbf{s}$ des Leiters herrühren, und die sich einfach summieren. Jeder Anteil ist gegeben durch

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \quad (21.60)$$

Er hat also den Betrag

$$dH := \|d\mathbf{H}\| = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \sin \alpha}{\|\mathbf{r}\|^2} \quad (21.61)$$

und eine Richtung, die senkrecht auf der durch $d\mathbf{s}$ und \mathbf{r} gebildeten Ebene steht. Das H-Feld selbst ergibt sich, wenn man alle Teilvektoren, die von den einzelnen Längenelementen des elektrischen Stromkreises herrühren, geometrisch addiert. Da der räumliche Verlauf des Stromes in den meisten Fällen durch die Stromleiter vorgeschrrieben ist, so kann man mit Hilfe der Laplaceschen Formel, Gl. (21.59), grundsätzlich die Aufgabe der Berechnung magnetischer Felder von elektrischen Stromkreisen lösen, wenn auch die zu diesem Zweck auszuführende Integration in vielen Fällen nicht zu einfachen Ausdrücken führt.

Weiterhin wird, wie bereits gesagt, bei der Laplaceschen Interpretation von (21.59) von der „Summe“ auf die Summanden geschlossen, was natürlich nicht korrekt ist. Außerdem ist zu beachten, dass die Laplacesche Formel nur unter der Voraussetzung gilt, dass μ im ganzen Raum konstant ist.

21.4 Die Multipolmethode

In Abschnitt 21.2.1 haben wir das Kirchhoff-Integral für die Vektor-Poisson-Gleichung $\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ diskutiert, wobei es sich um eine spezielle Lösung dieser partiellen Differentialgleichung handelt; man erhält nach Gl. (21.21)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \quad (21.62)$$

Dieses Integral lässt sich nur sehr selten analytisch behandeln. Daher haben wir in Abschnitt 21.2.2 ein Näherungsverfahren diskutiert, bei dem „dünne“ Stromfäden vorausgesetzt werden. Aus dem Volumenintegral in Gl. (21.62) wird dann ein Linienintegral, das man deutlich öfter in analytischer Weise bestimmen kann. In diesem Abschnitt wollen wir noch kurz auf eine andere Näherung eingehen, die wir schon in Zusammenhang mit der skalaren Poissonschen Gleichungen vorgestellt haben; es handelt sich um die Multipol-Entwicklung. Wie in Abschnitt 11.5 beschrieben, gehen wir dabei von einer vollständig im Endlichen gelegenen Stromverteilungsdichte \mathbf{J} aus und entwickeln den Nenner des Integranden des Kirchhoff-Integrals (21.62) $1/\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|$ in eine Reihe; im allgemeinen führt das nach Gl. (11.31) auf Legendre-Polynome. Man erhält dann eine Reihe von additiven Anteilen des Vektorpotenzials

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}), \quad (21.63)$$

wobei die Anteile \mathbf{A}_n in integraler Form vorliegen. Die ersten beiden Terme ergeben sich zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}\|} d\tilde{V} + \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} d\tilde{V}. \quad (21.64)$$

Der interessanteste Anteil ist der magnetische Monopolterm in Gl. (21.64). Das Verschwinden des Monopolterms folgt aus $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, wobei eine etwas verwickeltere Rechnung durchgeführt werden muss; vgl. z. B. Schnackenberg ([256], S. 137ff).

Der Dipolterm in Gl. (21.64) kann etwas umgeformt werden; man erhält (siehe auch Abschnitt 19.4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \quad (21.65)$$

mit

$$\mathbf{m} := \frac{1}{2} \iiint_V \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V}. \quad (21.66)$$

Man kann natürlich die Multipol-Entwicklung auch noch mit der in Abschnitt 21.2.2 behandelten Näherung mit Stromfäden kombinieren, so dass die Dipol- und sogar die Quadrupol-Näherung analytisch ausgewertet werden kann.

Allgemeinere Überlegungen zur magnetischen Multipol-Entwicklung findet man bei u. a. Eder [71] und Schnackenberg [256]. Verallgemeinerte Multipol-Entwicklungen mit sogenannten Debye-Potenzialen diskutiert Gray [93], wo man auch zahlreiche weitere Hinweise und Literatur zur Methode der Multipol-Entwicklung findet. In Abschnitt 21.1 wurde gezeigt, dass die Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ äquivalent sind. Somit ist die

bei der Ableitung der Vektor-Poisson-Gleichung (21.11) verwendete Coulomb-Eichung also auch die Ursache dafür, dass der Monopolterm des Vektorpotenzials \mathbf{A} verschwindet.

21.5 Das skalare magnetische Potenzial und konforme Abbildungen

Die Berechnung des *genauen* Verlaufes des H-Feldes, aus dem dann bei konstanter Permeabilität das B-Feld berechnet werden kann, stellt ein ähnliches Problem dar wie die Berechnung elektrischer Felder, und es gelten sogar außerhalb der stromdurchflossenen Leiter ganz ähnliche Gesetze wie dort.

Nach dem Durchflutungsgesetz hat das Linienintegral des H-Feldes den Wert Null, wenn der Integrationsweg nicht mit Strömen verkettet ist. In der äquivalenten differentiellen Form gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (21.67)$$

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung angeben

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi. \quad (21.68)$$

Aus der integralen Form geht hervor, dass das Linienintegral des H-Feldes für beliebige Wege zwischen zwei Punkten a und b denselben Wert hat, wenn die Wege ineinander übergeführt werden können, ohne dass stromdurchflossene Leiter geschnitten werden. Das Linienintegral hängt nur von der Lage der Endpunkte a und b im magnetischen Feld ab; man kann dies, wie im Falle des elektrischen Feldes mit Hilfe des skalaren Feldes ψ ausdrücken, das wir gerade eingeführt haben. Wir verwenden daher auf der Grundlage der Gleichung (21.68) die folgende Integraldarstellung des *magnetischen Potenzials*

$$\int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \psi_a - \psi_b. \quad (21.69)$$

Das H-Feld kann also außerhalb der Stromleiter durch den Gradienten eines skalaren Potenzials ausgedrückt werden.

Das Linienintegral des H-Feldes zwischen zwei Punkten bezeichnet man daher auch als *magnetische Spannung*. Es kann mit dem magnetischen Spannungsmesser nach Rogowski (vgl. Abschnitt 19) gemessen werden. Das Linienintegral über einen in sich geschlossenen Weg ist die *magnetische Umlaufspannung*, und das Durchflutungsgesetz kann daher auch in der Form ausgesprochen werden: „*Die magnetische Umlaufspannung längs eines beliebigen Weges ist gleich der Durchflutung des Weges.*“

Als Einheit der magnetischen Spannung dient wie für die Durchflutung $1A$; früher wurde auch die folgende Einheit benutzt:

$$1 \text{ Gilbert} = \frac{10}{4\pi} A = \frac{1}{1,257} A. \quad (21.70)$$

Führt man in Gl.(21.68) das B-Feld mit Hilfe der Gln. (18.23) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \psi) = 0. \quad (21.71)$$

Wenn die Permeabilität μ eine Konstante ist, wie insbesondere in Luft, so folgt daraus

$$\Delta \psi = 0. \quad (21.72)$$

Für das magnetische Potenzial außerhalb der Stromleiter gilt also die Laplace-Potenzialgleichung. Zur Berechnung solcher magnetischen Felder können daher die gleichen Methoden angewendet werden wie beim elektrischen Feld.

Um das magnetische Potenzial ψ explizit berechnen zu können, gehen wir von der Biot-Savart-Laplace-Formel (21.59) aus und verwenden eine Variante des Stokesschen Satzes (A.22), die im Anhang A.1 angegeben wird. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \oint_{C_A} \frac{d\tilde{\mathbf{s}} \times (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} = \frac{I}{4\pi} \iint_A (d\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\nabla}) \times \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \\ &= -\frac{I}{4\pi} \iint_A (d\tilde{\mathbf{A}} \times \nabla) \times \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \\ &= \nabla \left(\frac{I}{4\pi} \iint_A \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \right) - \frac{I}{4\pi} \iint_A \Delta \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{\mathbf{A}}, \end{aligned}$$

wobei eine Operatorbeziehung verwendet wurde, die auf der bekannten Vektorzerlegung $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ basiert. Da $1/(\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|)$ proportional zur Greenfunktion des Laplaceoperators ist, entartet der Integrand des zweiten Terms zu einer Deltafunktion. Dieser Term verschwindet, wenn wir die Fläche A durch die Leiterschleife so legen, dass der Aufpunkt \mathbf{r} nicht auf dieser Fläche liegt. Der erste Term kann offensichtlich aus der skalaren Funktion

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \iint_A \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \quad (21.73)$$

abgeleitet werden, die gerade dem magnetischen Potenzial in Gl. (21.68) entspricht.

Beispiel: Als Anwendungsbeispiel werde die magnetische Schirmwirkung einer Hohlkugel aus Eisen betrachtet. Die Hohlkugel mit den Radien r_1 und r_2 , Abb. 21.2, bestehe aus Material mit der konstanten Permeabilität μ und befnde sich in einem homogenen magnetischen Feld. Gefragt ist nach dem H-Feld H_i im Innern des Hohlraumes, wenn das H-Feld H_a des ursprünglichen homogenen Feldes gegeben ist.

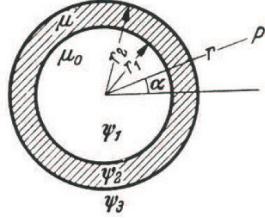


Abbildung 21.2. Zur Berechnung der magnetischen Schirmwirkung einer Hohlku gel

Wir wenden die in Abschnitt 10.1.4 behandelte Vorgehensweise an und versuchen, die Grenzbedingungen durch den Ansatz (10.28) zu erfüllen. Es gelte also

für den Innenraum

$$\psi_1 = \left(c_{11}r + \frac{c_{21}}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad (21.74)$$

für die Kugelwand

$$\psi_2 = \left(c_{12}r + \frac{c_{22}}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad (21.75)$$

für den Außenraum

$$\psi_3 = \left(c_{13}r + \frac{c_{23}}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad (21.76)$$

Die Grenzbedingungen sind

$$\text{für } r = r_1 : \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial r}; \quad (21.77)$$

$$\text{für } r = r_2 : \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial r}. \quad (21.78)$$

Ferner muss im Innenraum ψ_1 endlich bleiben, d. h. $c_{21} = 0$ sein, und das Potenzial im Außenraum muss für $r \rightarrow \infty$ in das Potenzial des homogenen Feldes übergehen, d. h. $c_{13} = H_a$. Durch Einführen der Ansätze (21.74)-(21.76) in die Grenzbedingungen findet man leicht, dass diese mit bestimmten Werten der Koeffizienten erfüllt werden können. Für das H-Feld H_i im Innenraum ($= c_{11}$) ergibt sich

$$H_i = 9H_a \left(2\mu_r + 5 + \frac{5}{\mu_r} - 2 \frac{(\mu_r - 1)^2}{\mu_r} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right)^{-1}. \quad (21.79)$$

Wenn die relative Permeabilität des Schirmmaterials μ groß gegen 1 ist, folgt aus Gl. (21.79) die Näherungsformel für den „Schirmfaktor“

$$\frac{H_i}{H_a} = \frac{4,5}{\mu_r} \frac{r_2^2}{r_2^3 - r_1^3}. \quad (21.80)$$

Im Innern der Hohlkugel entsteht also ebenfalls ein homogenes Feld mit einem H-Feld, das um so kleiner wird, je größer μ_r ist. In der folgenden Tabelle 21.1 sind einige Zahlenwerte angegeben für ein Abschirmgehäuse mit einem Radius $r_1 = 5\text{cm}$ aus gewöhnlichem Eisen mit $\mu_r = 200$ und verschiedener Wandstärke d . In gleicher Weise kann man untersuchen, wie eine Unterteilung

$d/\text{mm} =$	1	2	5	10
$H_i/H_a =$	0,40	0,20	0,090	0,053

Tabelle 21.1. Zusammenhang von Schirmfaktor und Wandstärke

der Kugelwand in mehrere Schichten die Schirmwirkung verbessert. Das hier berechnete Verhältnis der H-Felder gilt nur für stationäre magnetische Felder. Bei magnetischen Wechselfeldern wächst die Schirmwirkung infolge der im Eisen entstehenden Wirbelströme, die das erzeugende Feld noch weiter schwächen, siehe Abschnitt 29 und 34.1.

Das magnetische Potenzial ist keine eindeutige Größe, da das Linienintegral des H-Feldes, also die Spannung bei einem mit Strömen verketteten Weg, nicht Null ist, sondern Θ . Geht man n -mal um den Stromleiter herum, so vergrößert sich das Potenzial ψ um den Wert $n\Theta$. Da jedoch nur *Potenzialdifferenzen* gemessen werden können und die Wirkungen nur von dem H-Feld abhängen, so spielt diese Vieldeutigkeit praktisch keine andere Rolle als die Unbestimmtheit des Potenzials überhaupt.

An die Stelle der Grenzbedingungen des elektrischen Feldes treten hier die in Abschnitt 22.3 abgeleiteten analogen Bedingungen und das Durchflutungsgesetz.

Genau wie beim elektrischen Feld kann in 2-dimensionalen Situationen auch die *Methode der konformen Abbildung* (vgl. Abschnitt 11.7) benutzt werden. Z.B. liefert die Funktion

$$f(\zeta) = c \ln \zeta \quad (21.81)$$

das H-Feld in der Umgebung eines geraden langgestreckten (unendlich langen) Leiters, das konzentrische kreisförmige H-Feldlinien aufweist und ebene Potenzialflächen, die die Leiterachse enthalten. Das Potenzial ist

$$\psi = c \alpha; \quad (21.82)$$

die Potenzialflächen sind durch $\alpha = \text{konst.}$ gegeben. Für den Betrag des H-Feldes folgt daraus

$$\|\mathbf{H}\| = H_\alpha = -\frac{d\psi}{d(r\alpha)} = -\frac{c}{r}, \quad (21.83)$$

und die Konstante c ergibt sich aus dem Durchflutungsgesetz; man erhält

$$c = -\frac{I}{2\pi}, \quad (21.84)$$

wenn die positive Richtung von α und $\|\mathbf{H}\|$ rechtsläufig mit der positiven Richtung des Stromes I verknüpft ist.

Da die Potenzialgleichung eine lineare Differentialgleichung ist, so folgt, dass sich bei Vorhandensein mehrerer Leiter die Einzelfelder ungestört überlagern. Voraussetzung dafür ist lediglich, dass überall

$$\mu = \text{konst.} \quad (21.85)$$

ist. Mit Hilfe dieses Satzes kann man die magnetischen Felder in der Umge-

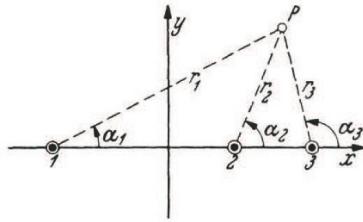


Abbildung 21.3. Berechnung des magnetischen Feldes

bung von *Mehrleitersystemen* berechnen. Bezeichnet 1, 2 und 3 in Abb. 21.3 drei parallele Leiter, die von den Strömen I_1, I_2, I_3 durchflossen werden (positive Richtung von hinten nach vorn), so gilt für das magnetische Potenzial in irgendeinem Punkt P

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}(I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2 + I_3\alpha_3). \quad (21.86)$$

Daraus leiten sich die Komponenten des H-Feldes in der x - und y -Richtung ab. Es ist z.B.

$$H_x = -(\text{grad}\psi)_x = \frac{1}{2\pi} \left(I_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + I_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \right). \quad (21.87)$$

Die partiellen Differentiale der Winkel α bei einer Änderung von x findet man aus der Beziehung

$$x = y \cot \alpha + k. \quad (21.88)$$

Hieraus ergibt sich durch partielle Differenzieren

$$1 = -\frac{y}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \quad (21.89)$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\sin^2 \alpha}{y} = -\frac{\sin \alpha}{r}. \quad (21.90)$$

Daher wird

$$H_x = -\frac{1}{2\pi} \left(I_1 \frac{\sin \alpha_1}{r_1} + I_2 \frac{\sin \alpha_2}{r_2} + I_3 \frac{\sin \alpha_3}{r_3} \right). \quad (21.91)$$

Genau so folgt für die Komponente von H in der y -Richtung

$$H_y = \frac{1}{2\pi} \left(I_1 \frac{\cos \alpha_1}{r_1} + I_2 \frac{\cos \alpha_2}{r_2} + I_3 \frac{\cos \alpha_3}{r_3} \right). \quad (21.92)$$

In großer Entfernung von den drei Leitern werden die Abstände und die Winkel einander gleich. Dann folgt

$$H_x = -\frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3) \sin \alpha, \quad (21.93)$$

$$H_y = +\frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3) \cos \alpha. \quad (21.94)$$

Der Betrag des H-Feldes ist in großer Entfernung

$$\|\mathbf{H}\| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3). \quad (21.95)$$

Das magnetische Feld ist also in großer Entfernung von einem System paralleler Leiter so beschaffen, als ob nur ein Leiter vorhanden wäre, der die Summe der Ströme führt.

Handelt es sich um Hin- und Rückleitung eines einzigen Stromkreises, dann ist zu setzen $I_1 = -I_2 = I$, und es wird

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} I (\alpha_1 - \alpha_2). \quad (21.96)$$

Die Potenziallinien sind daher Kreise, die durch die Spuren der Leiterachse hindurchgehen, und deren Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten zur Verbindungsgeraden dieser Spuren liegen; sie entsprechen den Verschiebungslinien des elektrischen Feldes. Da die magnetischen Induktionslinien die Potenziallinien senkrecht schneiden müssen, so sind sie durch die Appollonischen Kreise dargestellt wie die Potenziallinien des elektrischen Feldes (Abb. 10.14). Das H-Feld ist auf der Verbindungsgeraden der Leiterachsen

$$\|\mathbf{H}\| = H_y = \frac{1}{2\pi} I \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (21.97)$$

da $\cos \alpha_1 = +1$ und $\cos \alpha_2 = -1$. Sie setzt sich zusammen aus den von den beiden Leitern herrührenden Beiträgen kreisförmiger Leiter nach dem Durchflutungssatz. Bezeichnet a den Abstand zwischen den beiden Drahtachsen, so wird $r_2 = a - r_1$ und

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{1}{2\pi} I \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right). \quad (21.98)$$

Der magnetische Fluss Φ , der durch einen Streifen von der Breite dr_1 und der Länge l zwischen den beiden Leitern hindurchgeht, ist

$$d\Phi = Bl dr_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} Il \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right) dr_1. \quad (21.99)$$

Der gesamte Fluss im Luftraum zwischen den beiden Leitungen ergibt sich hieraus durch Integration von $r_1 = r_0$ bis $r_1 = a - r_0$, wenn r_0 den Leiterradius bezeichnet. Es wird

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} Il \int_{r_0}^{a-r_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right) dr_1 = \frac{\mu_0}{\pi} Il \ln \frac{a - r_0}{r_0}. \quad (21.100)$$

Von dem Prinzip der ungestörten Überlagerung der Einzelfelder kann man ferner Gebrauch machen zur Berechnung des magnetischen Feldes bei *stabförmigen Leitern beliebigen Querschnitts*. Man zerlegt den Querschnitt in Flächenelemente dA ; dann wird bei einer Stromdichte J die Stromstärke in einem solchen Querschnitt JdA . Die Komponenten des H-Feldfeldes in einem Punkt P sind dann nach den Gl. (21.91) und (21.92)

$$H_x = -\frac{1}{2\pi} J \iint \frac{\sin \alpha}{r} dA, \quad (21.101)$$

$$H_y = \frac{1}{2\pi} J \iint \frac{\cos \alpha}{r} dA, \quad (21.102)$$

wobei die Integrale über den ganzen Leiterquerschnitt zu bilden sind.

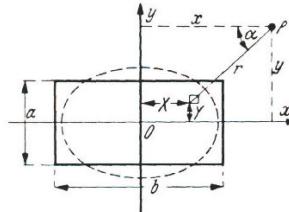


Abbildung 21.4. Berechnung des magnetischen Feldes eines Rechteckstabes

Beispiel: Für die in Abb. 21.4 gezeichnete Schiene mit rechteckigem Querschnitt stellt man das Flächenelement durch ein kleines Rechteck dar. Die Koordinaten des Rechtecks seien $x = X$, $y = Y$, die Seiten ΔX und ΔY . Dann wird

$$r = \sqrt{(y - Y)^2 + (x - X)^2}, \quad (21.103)$$

$$\sin \alpha = \frac{y - Y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x - X}{r}, \quad (21.104)$$

und es ergibt sich nach einem Grenzübergang ($\Delta X, \Delta Y \rightarrow 0$)

$$H_x = -\frac{1}{2\pi ab} \int_{-b/2}^{+b/2} dX \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{y - Y}{(y - Y)^2 + (x - X)^2} dY. \quad (21.105)$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$H_x = \frac{I}{2\pi ab} \left(\frac{1}{2} x_{+b/2} \ln \frac{y_{+a/2}^2 + x_{+b/2}^2}{y_{-a/2}^2 + x_{+b/2}^2} \right. \quad (21.106)$$

$$\left. - \frac{1}{2} x_{-b/2} \ln \frac{y_{+a/2}^2 + x_{-b/2}^2}{y_{-a/2}^2 + x_{-b/2}^2} \right) \quad (21.107)$$

$$+ y_{+a/2} \left(\arctan \frac{x_{+b/2}}{y_{+a/2}} - \arctan \frac{x_{-b/2}}{y_{+a/2}} \right) \quad (21.108)$$

$$- y_{-a/2} \left(\arctan \frac{x_{+b/2}}{y_{-a/2}} - \arctan \frac{x_{-b/2}}{y_{-a/2}} \right). \quad (21.109)$$

mit $x_{+b/2} := x + b/2$, $x_{-b/2} := x - b/2$, $y_{+a/2} := y + a/2$ und $y_{-a/2} := y - a/2$. Der Ausdruck für H_y ergibt sich hieraus, wenn überall x und y sowie a und b miteinander vertauscht werden. Die Feldlinien bilden ellipsenähnliche Kurven, wie in Abb. 21.4 gestrichelt angedeutet.

Die Beziehungen (21.101) und (21.102) gelten auch für das Feld innerhalb des Leiters, wenn der Leiter die gleiche Permeabilität besitzt wie die Umgebung. Genau so wie außerhalb des Leiters addieren sich auch im Innern in jedem Punkt des Leiterquerschnitts die Wirkungen der Ströme aus den übrigen Querschnittsteilen. Dagegen gilt im Innern der Leiter nicht die Laplacesche Potenzialgleichung, bei deren Ableitung vorausgesetzt wurde, dass der betrachtete Raumteil stromlos ist. Beim geraden Leiter mit Kreisquerschnitt

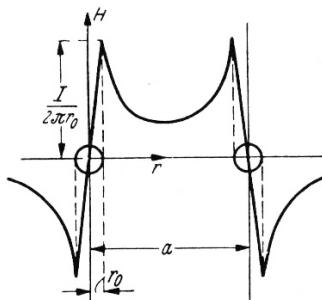


Abbildung 21.5. H-Feld bei einer Doppelleitung

muss wegen der Symmetrie das H-Feld im Innern des Leiters ebenso wie außerhalb für Punkte gleichen Abstandes von der Achse konstante Werte haben;

die Feldlinien sind konzentrische Kreise. Man kann daher das Durchflutungsgesetz unmittelbar anwenden. Bei gleichmäßiger Verteilung des Stromes über den Leiterquerschnitt ist die durch eine Feldlinie mit dem Radius r hindurchgeführte Stromstärke

$$I_r = \frac{r^2}{r_0^2} I, \quad (21.110)$$

wenn r_0 wieder den Leiterradius und I den Gesamtstrom bezeichnen. Daher wird nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \|\mathbf{H}\| \oint_C ds = \|\mathbf{H}\| 2r\pi = \frac{r^2}{r_0^2} I, \quad (21.111)$$

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{r}{2\pi r_0^2} I. \quad (21.112)$$

Auf der Verbindungsebene der beiden Drahtachsen ergibt sich damit ein Verlauf des H-Feldes, wie ihn Abb. 21.5 zeigt.

Das Feld im Leiterinnern genügt nicht der Laplaceschen Potenzialgleichung. Diese lautet im vorliegenden zylindrischen Fall aufgrund der Rotationssymmetrie (vgl. Anhang B.1)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (21.113)$$

Aus der Gl. (21.112) ergibt sich das Potenzial ($H := \|\mathbf{H}\|$)

$$\psi = - \int H r d\alpha = - \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{r_0^2} \alpha I + k. \quad (21.114)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{1}{\pi} \frac{r^2}{r_0^2} \alpha I; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = - \frac{1}{\pi} \frac{\alpha I}{r_0^2}. \quad (21.115)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (21.113) wird daher $-(2/\pi)(\alpha I/r_0^2)$, ist also von Null verschieden.

Beispiele für stationäre Magnetfelder

22.1 Anwendung der Laplaceschen Formel

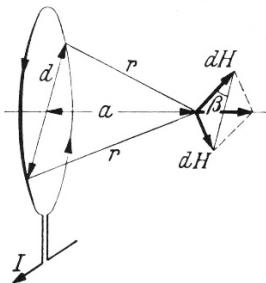


Abbildung 22.1. Magnetisches Feld eines Drahtringes

Es soll das B-Feld auf der im Mittelpunkt eines stromführenden Drahtringes, Abb. 22.1, senkrecht zur Ringebene stehenden Achse berechnet werden. Dazu könnte man vom Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nach Gl. (21.46) ausgehen und dessen Rotation bilden. Auf der Symmetriechse des Drahtringes kann man jedoch direkt von der Laplaceschen Formel ausgehen. In irgendeinem Punkt dieser Achse ruft nach Gl.(21.61) ein Leiterelement des Stromkreises ein H-Feld vom Betrag

$$dH = \frac{1}{4\pi} I \frac{ds}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{ds}{a^2 + \frac{1}{4}d^2} \quad (22.1)$$

hervor. Der entsprechende Vektor liegt in der durch die Achse und das Leiterelement gehende Ebene und steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden des Leiterelementes mit dem betrachteten Punkt. Je zwei einander gegenüberliegende Leiterelemente ergeben daher einen Beitrag zum H-Feld, der in die Richtung der Achse fällt, Abb. 22.1; er ist

$$2dH \sin \beta = \|d\mathbf{H}\| \frac{d}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}d^2}}, \quad (22.2)$$

da β auch als Winkel zwischen a und r vorkommt.

Man erhält das gesamte H-Feld in dem betrachteten Punkt, wenn man alle diese Beiträge integriert. Da hier

$$\int_0^\pi ds = \frac{\pi d}{2} \quad (22.3)$$

ist, so ergibt sich

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{Id^2}{8r^3} = \frac{I}{8} \frac{d^2}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}d^2}^3} = \frac{I}{d} \sin^3 \beta. \quad (22.4)$$

Bei großen Abständen nehmen H- und B-Feld also umgekehrt proportional zur dritten Potenz des Abstandes ab. Im Mittelpunkt des Ringes, $\alpha = 0, \beta = 90^\circ$, wird

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{I}{d}. \quad (22.5)$$

Die Formel (22.4) kann zur Berechnung des B-Feldes in der Achse einer Zylinderspule benutzt werden; man hat hier die von den einzelnen Windungen herrührenden Beiträge zum H-Feld zu summieren.

Ein magnetisches Feld von der hier betrachteten Art entsteht auch im Außenraum einer Ringspule (Toroid), wenn der Ring fortlaufend bewickelt ist. Bei gegenläufig gewickelten Lagen heben sich je zwei aufeinander folgende Lagen in ihrer Wirkung nach außen auf; ist die Anzahl der Lagen ungerade, so ergibt die übrig bleibende Lage ein magnetisches Feld außerhalb der Spule wie ein Drahtring vom Durchmesser des Toroids.

In unmittelbarer Nähe des Drahtringes, Abb. 22.1, bilden die Feldlinien ungefähr konzentrische Kreise in Ebenen, die die Ringachse a enthalten. Jede solche Achsenebene zeigt ein ähnliches Bild der magnetischen Feldlinien, wie es in der Querschnittsebene einer Doppelleitung (Abschnitt 21.5) vorliegt. Zu einer theoretisch interessanten Feststellung gelangt man, wenn man sich in die Achse a des Drahtringes einen zweiten stromführenden geraden Leiter gelegt denkt. Die von diesem Leiter allein herrührenden Feldlinien würden Kreise sein, die zum Drahtring koaxial verlaufen. Fließen in beiden Leitern Ströme, so überlagern sich die Felder; zu dem vom Drahtring herrührenden an jeder Stelle quer zum Drahtring gerichteten H-Feld addiert sich eine vom geraden Leiter herrührende Komponente in tangentialer Richtung. Das resultierende Feld hat daher in der Nähe des Drahtringes schraubenförmige Feldlinien, die sich um den Drahtring herumwinden. Die Ganghöhe hängt von dem Verhältnis der Stromstärken in den beiden Leitern ab, so dass sich die Schraubenlinien erst

nach einem oder mehreren Umläufen, gegebenenfalls sogar erst nach unendlich vielen Umläufen schließen.

Nun soll das B-Feld in einer langgestreckten Zylinderspule mit dem Radius $R = d/2$ ermittelt werden. Dazu gehen wir zunächst von einer Zylinderspule aus und berechnen das B-Feld auf deren Symmetrieachse im Inneren. In einem Punkt P , der im Abstand z von dieser Achse liegt, kann das B-Feld bestimmt werden, indem man von Gl. (22.4) ausgeht und ein Abschnitt dx der Spule mit n Windungen und der Länge l , durch die der Strom I fließt, einen Strom $Idx \cdot n/l$ führt. Mit dem linearen Materialgesetz $B = \mu H$ ergibt sich für den Betrag des B-Feldes

$$dB = \frac{\mu I R^2 n dx}{2\sqrt{x^2 + R^2}^3 l}. \quad (22.6)$$

Integriert man den Ausdruck von $x = -l/2 - z$ bis $x = +l/2 - z$ (Koordinatenursprung für x liegt in P), dann erhält man insgesamt (Substitution mit $\tan u := x/R$)

$$\|\mathbf{B}\| = \mu \frac{nI}{2l} \left(\frac{l/2 + z}{\sqrt{(\frac{l}{2} + z)^2 + R^2}} + \frac{l/2 - z}{\sqrt{(\frac{l}{2} + z)^2 + R^2}} \right). \quad (22.7)$$

Für langgestreckte Spulen erhält man für $l \gg R$ eine gute Näherung

$$\|\mathbf{B}\| = \mu \frac{nI}{l}. \quad (22.8)$$

22.2 Anwendung des magnetischen skalaren Potenzials

Die Amperèsche Formel gilt nicht, wenn ferromagnetische Stoffe im Raum vorhanden sind; denn sie bezieht sich auf sämtliche Ströme im Raum, also auch auf die Molekularströme in den magnetischen Stoffen, die aber von vornherein nicht bekannt sind. Bei der Ableitung wurde die Voraussetzung eingeführt, dass die Permeabilität μ im ganzen Raum eine Konstante sei. Wenn μ in verschiedenen Raumgebieten verschiedene Werte hat, innerhalb dieser Gebiete aber als konstant angesehen werden kann, dann lassen sich die Methoden der *Potenzialtheorie* anwenden, da nach Abschnitt 21 in diesen Gebieten die Potenzialgleichung gilt. Als Beispiel werde ein gerader Stromleiter betrachtet, der in einen Eisenkörper mit ebener Begrenzung eingebettet ist. Der Leiter soll in einer Bohrung im Eisenkörper parallel zur Begrenzungsebene liegen, Abb. 22.2 (z.B. Stromleiter im Anker einer elektrischen Maschine). Der Abstand der Leiterachse von der Begrenzungsebene sei h . Wir nehmen ferner an, dass die Permeabilität des Eisens konstant sei. Dies gilt nur angenähert für kleine magnetische Felder. Die Veränderlichkeit der Permeabilität mit dem magnetischen Feld führt zu Komplikationen, die theoretisch nur schwierig berücksichtigt werden können.

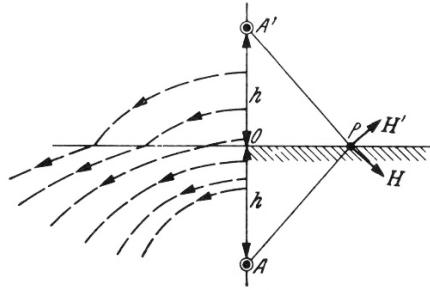


Abbildung 22.2. Stromleiter in einem Eisenkörper

In Analogie zu dem Verfahren der Spiegelung versuchen wir, die Grenzbedingungen an der Oberfläche des Eisenkörpers dadurch zu erfüllen, dass wir für die Berechnung des *Feldes im Innern* des Eisenkörpers einen zweiten Leiter A' mit dem Abstand h auf der anderen Seite der Grenzfläche anbringen und uns dann auch den Außenraum durch einen Stoff mit der gleichen Permeabilität ausgefüllt denken. Bezeichnet I die Stromstärke im Leiter A , I' die Stromstärke im Leiter A' , so hat die Tangentialkomponente des H -Feldes in irgendeinem Punkt P der Grenzfläche gemäß Gl.(21.92) den Betrag

$$H_t = \frac{1}{2\pi} \left(I \frac{\overline{OA}}{(AP)^2} - I' \frac{\overline{OA'}}{(A'P)^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\overline{OA}}{(AP)^2} (I - I'). \quad (22.9)$$

Für die Normalkomponente des B -Feldes ergibt sich dort nach Gl.(21.91) der Wert

$$B_n = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\overline{OP}}{(AP)^2} (I + I'). \quad (22.10)$$

Das *Feld im Außenraum* denken wir uns versuchsweise dargestellt durch einen Strom I'' im Leiter A , während das Eisen durch Luft ersetzt wird. Ein solcher Strom ruft in der Grenzfläche die Tangentialkomponente des H -Feldes

$$H_t = \frac{1}{2\pi} \frac{\overline{OA}}{(AP)^2} I'' \quad (22.11)$$

und die Normalkomponente des B -Feldes

$$B_n = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\overline{OP}}{(AP)^2} I'' \quad (22.12)$$

hervor.

Da beide Komponenten an der Grenzfläche stetig sein müssen, so folgt

$$I'' = I - I'; \quad I'' = \mu_r (I + I'). \quad (22.13)$$

Die Grenzbedingungen sind also erfüllt, wenn

$$I' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I; \quad (22.14)$$

$$I'' = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} I. \quad (22.15)$$

In Abb. 22.2 sind einige Feldlinien gestrichelt gezeichnet.

Das gleiche Verfahren kann man auch anwenden, wenn der Leiter außerhalb des Eisenkörpers liegt. In vielen Fällen ist die Permeabilität μ_r so groß, dass die B-Feldlinien praktisch senkrecht aus dem Eisen austreten. Dann wird die Eisenoberfläche eine Niveauplange. Um unter dieser Voraussetzung das Feld im Außenraum, Abb. 22.3, zu berechnen, hat man jenseits der Grenzfläche das Spiegelbild A' des Leiters A anzubringen, das den gleichen Strom I führt wie der Leiter A . Das magnetische Potenzial kann dann nach Gl. (21.86) berechnet werden; in der Abbildung sind einige Feldlinien eingezeichnet. Auf der durch den Leiter gelegten Normalebene hat das H-Feld den Wert

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{x-h} + \frac{1}{x+h} \right); \quad (22.16)$$

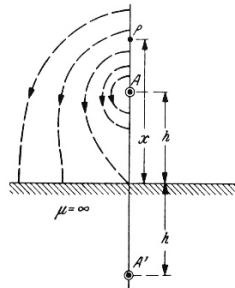


Abbildung 22.3. Stromleiter außerhalb des Eisenkörpers

sie erscheint gegenüber dem magnetischen Feld des im freien Raum befindlichen Leiter bei großen Abständen x verdoppelt infolge der Wirkung des Eisenkörpers.

Das Verfahren der Spiegelung führt auch bei zylindrischen Eisenkörpern zum Ziel. Nach Abb. 22.4 befindet sich bei A ein Leiter mit dem Strom I in einem Eisenzylinder mit dem Radius r_0 und der relativen Permeabilität μ_r . Hier kann man das *Feld im Innern* darstellen als Feld in einem Raum mit der Permeabilität μ_r , durch den bei A' ein Strom I' geführt wird, wobei

$$d = \frac{r_0^2}{b}. \quad (22.17)$$

Das *Feld im Luftraum* lässt sich darstellen als Feld zweier paralleler Stromleiter, M mit einem Strom I'' und A mit einem Strom I''' , die sich frei in Luft

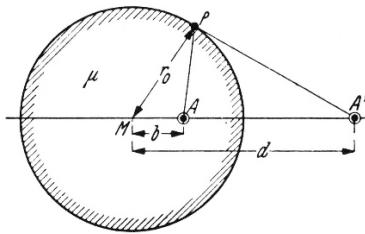


Abbildung 22.4. Stromleiter im Innern eines Eisenzylinders

befinden. Durch Einführen der Grenzbedingungen für die tangentialen und radialen Feldkomponenten an der Oberfläche des Eisenzylinders ergeben sich drei Bedingungsgleichungen für die unbekannten Ströme I' , I'' und I''' , aus denen diese berechnet werden können. Es folgt

$$I' = I'' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I \quad \text{und} \quad I''' = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} I. \quad (22.18)$$

Wird $\mu_r = \infty$ gesetzt, so folgt

$$I' = I'' = -I; \quad I''' = 2I. \quad (22.19)$$

In den meisten Fällen komplizierterer Formen der Eisenkörper, wie in elektrischen Maschinen und Apparaten, kann der Feldverlauf mit einem Feldsimulator bestimmt werden. Es ist auch möglich, den Feldverlauf auf graphischem Wege zu ermitteln. Es gelten dann außerhalb der Stromleiter sinngemäß die gleichen Regeln, wie sie in Abschnitt 11.2.1 für das elektrische Feld abgeleitet wurden; an die Stelle der Dielektrizitätskonstante tritt die Permeabilität. Meist kann man dabei zur Berechnung des Luftfeldes die Permeabilität des Eisens als unendlich groß annehmen, so dass die Begrenzungsflächen Niveaumäßigkeiten sind. Für den Feldverlauf innerhalb der Wicklung erhält man eine brauchbare Annäherung, wenn man sich den Strom gleichmäßig über den Wicklungsquerschnitt verteilt denkt; die Flussdichte muss dabei mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes kontrolliert werden.

Die Abb. 22.5 veranschaulicht z.B. das Luftfeld der in Abschnitt 22.3 berechneten Eisenkernspule, Abb. 22.9. Alle Feldlinien, die auf den Eisenkörper eimmünden, schließen sich innerhalb des Eisenkörpers und zwar so, dass sie mit der Wicklung oder mit einem Teil davon verkettet sind. Häufig kann man die magnetischen Streufelder mit einer genügenden Genauigkeit berechnen, wenn man den magnetischen Widerstand des Eisens vernachlässigt. Für die Flussdichte an der Stelle 1, Abb. 22.5, gilt z.B.

$$\|\mathbf{B}\| \cdot 7,2 \text{ cm} = \mu_0 (IN - 1960 A) \quad \text{oder} \quad (22.20)$$

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{1,257 \cdot 1660}{7,2} \frac{\mu Vs}{Am \text{ cm}} \frac{A}{0,029} \frac{Vs}{m^2} = 0,029 T. \quad (22.21)$$

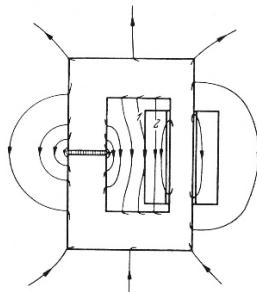


Abbildung 22.5. Streufeld einer Drosselsspule

In der Mitte des Wicklungsquerschnittes, etwa bei 2, hat das B-Feld einen noch kleineren Wert, weil die Durchflutung die Feldlinie 2 nur noch halb so groß ist.

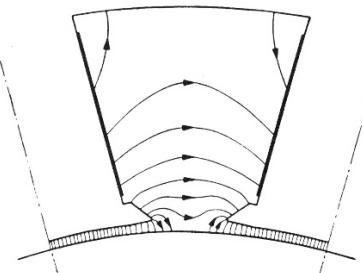


Abbildung 22.6. Feldbild einer Gleichstrommaschine

Eine für manche Zwecke zulässige Vereinfachung ergibt sich, wenn man die Wicklung durch unendlich dünne, stromführende Schicht ersetzt. Man versteht unter *Strombelag A* den Strom, der in dieser Schicht je Länge des Querschnittes geführt wird. In einer solchen Schicht erfahren die magnetischen Feldlinien eine Brechung, da die Normalkomponente des B-Feldes stetig hindurchgeht, während für die Tangentialkomponente des H-Feldes nach dem Durchflutungsgesetz gilt

$$H_{t1} - H_{t2} = A. \quad (22.22)$$

Die Abb. 22.6 zeigt als Beispiel das auf diese Weise ermittelte Feldbild einer Gleichstrommaschine bei Leerlauf¹. Durch einen solchen Strombelag kann nach Abschnitt 22.3 auch die innere Durchflutung bei permanenten Magneten dargestellt werden.

¹ siehe Richter [248]

22.3 Der magnetische Kreis: Elektro- und Dauermagnete

22.3.1 Grundgleichungen des magnetischen Kreises

Für den Übergang des B-Feldes von einem Stoff zu einem anderen gelten ähnliche Gesetze wie für den Übergang des D-Feldes zwischen zwei Isolierstoffen. Erfahrungsgemäß gibt es aber keine Quellen des B-Feldes. Das lässt sich mathematisch mit folgender Gleichung formulieren

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (22.23)$$

An der Grenzfläche zweier Stoffe muss daher die *Normalkomponente* B_n des B-Feldes stetig sein.

Ferner müssen die *Tangentialkomponenten* H_t des H-Feldes auf beiden Seiten der Grenzfläche den gleichen Wert haben. Man erkennt dies, wenn man das Durchflutungsgesetz auf einen Rechteckweg anwendet, dessen Längsseiten auf beiden Seiten der Grenzfläche liegen, und dessen hinreichend kurze Schmalseiten die Grenzfläche durchstoßen.

Es gilt also auch bei gekrümmter Magnetisierungskurve

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad H_{t1} = H_{t2}. \quad (22.24)$$

Durch eine ähnliche Überlegung wie bei dem elektrostatischen Feld findet man hieraus, dass das B-Feld in einem Querschlitz, das H-Feld in einem Längsschlitz den gleichen Wert hat wie im Inneren des Stoffes. Unter Einführung der Permeabilität (totale Permeabilität folgt ferner für die Winkel α_1 und α_2 , die B-Feldlinien mit der Normalen einer Grenzfläche bilden,

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (22.25)$$

Aus Stoffen hoher Permeabilität treten daher die B-Feldlinien nahezu senkrecht aus.

Für die Tangentialkomponenten des B-Feldes gilt

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (22.26)$$

In Stoffen hoher Permeabilität ist die Tangentialkomponente des B-Feldes groß im Vergleich zu der im Außenraum. Die B-Feldlinien werden also durch den Stoff hoher Permeabilität geführt, ähnlich wie der elektrische Strom durch die metallischen Leiter. Da ferner die B-Feldlinien in sich geschlossen sind, so bezeichnet man eine Anordnung, bei der die B-Feldlinien in der Hauptsache in ferromagnetischen Stoffen verlaufen, als *magnetischen Kreis*.

Bei einem *Elektromagneten* nach Abb. 22.7 besteht der magnetische Kreis aus dem Luftspalt 1, den beiden Polen 2 und 6, den Schenkeln 3 und 5, die

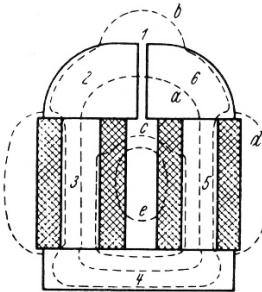


Abbildung 22.7. Feldlinien bei einem Elektromagneten

die Wicklungen tragen, und dem Verbindungstück 4. Durch gestrichelte Linien a, b, c, d und e ist der grundsätzliche Verlauf der B-Feldlinien angedeutet. Da der Elektromagnet zur Herstellung eines bestimmten magnetischen Flusses im Luftspalt 1 dient, so bezeichnet man den Teil des gesamten magnetischen Flusses, der aus B-Feldlinien nach der Art von a besteht, als den *Hauptfluss*, während die anderen B-Feldlinien den *Streufluss* darstellen. Wegen der hohen Permeabilität des Eisens ist das B-Feld im Eisen sehr viel höher als außerhalb, so dass der Hauptfluss den weitaus größten Teil der gesamten B-Feldlinien enthält. Darauf beruht das folgende *Näherungsverfahren zur Berechnung magnetischer Kreise*.

22.3.2 Angenäherte Berechnung von Elektromagneten

Man geht vom magnetischen Fluss Φ aus, der durch das Bündel der Feldlinien des Hauptflusses dargestellt wird, und berechnet hieraus das B-Feld in den einzelnen Abschnitten des magnetischen Kreises, wobei man den Streufluss vernachlässigt. Bezeichnet A_ν den Querschnitt des Flusses in den einzelnen Abschnitten ν , so gilt

$$\|\mathbf{B}_\nu\| = \frac{\Phi}{A_\nu}. \quad (22.27)$$

Aus dem B-Feld $\|\mathbf{B}_\nu\|$ erhält man das H-Feld $\|\mathbf{H}_\nu\|$ mit Hilfe der Magnetisierungskurve des betreffenden Stoffes. Für Luftspalte gilt

$$\|\mathbf{H}_1\| = \frac{\|\mathbf{B}_1\|}{\mu_0}. \quad (22.28)$$

Dann wird das Linienintegral des H-Feld angenähert berechnet durch

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \approx \sum_\nu \|\mathbf{H}_\nu\| l_\nu, \quad (22.29)$$

wobei l_ν die mittlere Länge der Feldlinien in den einzelnen Abschnitten bezeichnet. Die Summe ist über den ganzen Kreis zu bilden. Andererseits ist

die Durchflutung gegeben durch die Windungszahl der Wicklung und die Stromstärke. Trägt in dem Beispiel der Abb. 22.7 jeder Schenkel eine Wicklung aus je $N/2$ Windungen, und werden diese Windungen von einem Strom I derart durchflossen, dass sich die Wirkungen der beiden Wicklungen unterstützen, so gilt

$$\sum_{\nu} \|\mathbf{H}_{\nu}\| l_{\nu} = \Theta = N I. \quad (22.30)$$

Die umgekehrte Aufgabe, zu einer gegebenen Durchflutung Θ den magnetischen Fluss zu finden, kann nicht unmittelbar gelöst werden, da die Permeabilität der Eisenabschnitte selbst wieder vom B-Feld abhängt, das zunächst unbekannt ist. Man geht daher so vor, dass man für eine Reihe von willkürlich angenommenen Werten des magnetischen Fluxes die Durchflutung berechnet und damit die *magnetische Kennlinie* des Kreises aufzeichnet, die die Abhängigkeit der beiden Größen Φ und Θ voneinander darstellt, Abb. 22.8. Aus der magnetischen Kennlinie kann dann zu dem gegebenen Wert von Θ der Fluss entnommen werden. Zur Herstellung eines bestimmten Induktions-

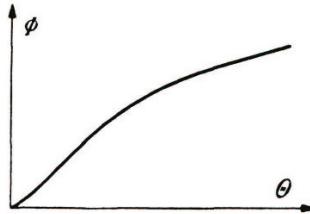


Abbildung 22.8. Magnetische Kennlinie

flusses ist eine bestimmte Durchflutung Θ nötig; es ist jedoch gleichgültig, ob diese Durchflutung mit kleiner Stromstärke und großer Windungszahl oder großer Stromstärke und entsprechend kleiner Windungszahl erzeugt wird.

Die Unbestimmtheit der Windungszahl verschwindet, wenn der durch den Wicklungswiderstand entstehende Spannungsabfall vorgegeben ist. Bezeichnet man den Wicklungsquerschnitt mit A und den Füllfaktor der Wicklung mit $k (< 1)$, ferner die mittlere Länge einer Windung mit l_m , so wird der Widerstand einer Wicklung von N Windungen

$$R = \rho \frac{N^2 l_m}{k A}. \quad (22.31)$$

Andererseits gilt das Ohmsche Gesetz $R = U/I$, oder unter Einführen der durch die Wicklung erzeugten Durchflutung

$$R = \frac{U N}{\Theta}. \quad (22.32)$$

Daher ergibt sich die *Windungszahl* aus

$$\varrho \frac{N^2 l_m}{kA} = \frac{UN}{\Theta} \text{ zu } N = U \frac{kA}{\varrho \Theta l_m}. \quad (22.33)$$

Die Windungszahl muss also um so größer gemacht werden, je höher die zur Verfügung stehende Spannung ist. Für den *Drahtquerschnitt* ergibt sich damit

$$A_1 = \frac{kA}{N} = \frac{\varrho \Theta l_m}{U}. \quad (22.34)$$

Er ist also unabhängig von der Größe des Wicklungsquerschnittes und vom Füllfaktor.

Zur Aufrechterhaltung des magnetischen Flusses ist theoretisch keine Leistung erforderlich. Wegen endlichen Wicklungswiderstandes ist jedoch bei wirklichen Elektromagneten immer eine bestimmte elektrische Leistung zur Aufrechterhaltung der Durchflutung notwendig. Diese Leistung, die also vollständig innerhalb der Wicklung in Wärme umgewandelt wird, hat den Betrag

$$P_v = I^2 R = \varrho \frac{l_m}{kA} \Theta^2; \quad (22.35)$$

sie wird um so kleiner, je größer der Wicklungsquerschnitt ist und je besser er ausgenutzt wird, dagegen ist sie unabhängig von der Windungszahl, also auch von der Spannung. Durch die Stromwärme wird die Durchflutung begrenzt, die man in einem Elektromagneten herstellen kann.

Zahlenbeispiel: In dem aus Dynamoblechen zusammengesetzten Eisenkern, Abb. 22.9 soll mit Hilfe der im Schnitt gezeichneten Wicklung ein Bündelfluss von $\Phi = 0,5mWb$ erzeugt werden. Die Höhe des Blechpakets beträgt 2cm; infolge der Isolierung der einzelnen Bleche sei mit einem Eisenfüllfaktor von 90% zu rechnen.

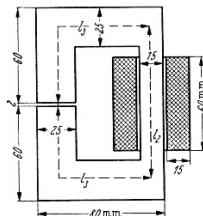


Abbildung 22.9. Berechnung einer Drosselspule

Nimmt man näherungsweise an, dass der ganze Fluss im Querschnitt des Luftspalts konzentriert bleibt, so wird die Induktion im Luftspalt

$$B_1 = \frac{5 \cdot 10^{-4} Wb}{5 cm^2} = 1 T. \quad (22.36)$$

Das zugehörige H-Feld ist

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{1Vs/m^2}{1,257 \cdot 10^{-6}Vs/Am} = 7960 \frac{Am}{cm}. \quad (22.37)$$

Da die Feldlinienlänge im Luftspalt $0,2cm$ beträgt, so wird also der auf den Luftspalt entfallende Anteil der Durchflutung

$$\Phi_1 = H_1 l_1 = 7960 \cdot 0,2 \frac{Am}{cm} cm = 1592A. \quad (22.38)$$

Die Induktion in dem die Wicklung tragenden Schenkel wird

$$B_2 = \frac{5 \cdot 10^{-4}Wb}{0,9 \cdot 3cm^2} = 1,85T. \quad (22.39)$$

Dazu ergebe sich aus der Magnetisierungskurve des Bleches ein H-Feld von

$$H_2 = 200 \frac{Am}{cm}. \quad (22.40)$$

Der Anteil dieses Schenkels an der Durchflutung wird, da die Länge $l_2 = 9,7cm$ beträgt, $\Theta_2 = H_2 l_2 = 200 \cdot 9,7A = 1940A$. Schließlich erhält man für die Induktion in den übrigen Abschnitten

$$B_3 = \frac{5 \cdot 10^{-4}Wb}{0,9 \cdot 5cm^2} = 1,11T, \quad (22.41)$$

Dazu gehöre das H-Feld $H_3 = 4A/cm$. Die gesamte Länge dieser Abschnitte ist $2l_3 = 21,5cm$ und der Anteil der Durchflutung

$$\Theta_2 = 2H_3 l_3 = 4 \cdot 21,5A = 86A. \quad (22.42)$$

Die gesamte Durchflutung muss also $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = 3618A$ betragen.

Das Beispiel zeigt, wie groß der Einfluss der Eisensättigung auf den Bedarf an Durchflutung ist. Infolge der Verkleinerung der Breite des Wicklungsschenkels auf $1,5cm$ gegenüber $2,5cm$ in den anderen Abschnitten wird die für diesen Abschnitt notwendige Durchflutung größer als der auf den Luftspalt treffende Anteil, während die viel längeren übrigen Abschnitte des Eisenkerns nur einen kleinen Bruchteil der Durchflutung beanspruchen.

Wird mit einem Kupferfüllfaktor von $k = 60\%$ gerechnet, so ist nach Gl. (22.35) zur Herstellung der Durchflutung eine, Leistung aufzuwenden von

$$P_v = \varrho \frac{l_m}{kA} \Theta^2 = 0,0175 \frac{14 \cdot 3620^2 \Omega mm^2 cm A^2}{0,6 \cdot 9 mcm^2} = 59,5W. \quad (22.43)$$

Dabei ist die mittlere Windungslänge $l_m = 14cm$ gesetzt. Um die infolge dieser Verlustleistung entstehende Temperaturerhöhung berechnen zu können, muss man den Wärmeübergangskoeffizienten kennen; dieser liegt bei derartigen Anordnungen in der Größenordnung von

$$h = 0,0015 \frac{W}{cm^2 K}. \quad (22.44)$$

Die Oberfläche der Wicklung ist rund $170cm^2$; dazu kommt für die Abkühlung noch ein Teil der Eisenkernoberfläche im Betrag von etwa $200cm^2$, so dass die gesamte wärmeableitende Oberfläche etwa $O = 370cm^2$ ausmacht. Es ergibt sich daher eine Temperaturerhöhung von

$$\Delta\Theta = \frac{P_v}{Oh} = \frac{59,5}{370 \cdot 0,0015} \frac{W cm^2 K}{cm^2 W} = 107K. \quad (22.45)$$

Soll die Erregung mit einer Spannung von $U = 110V$ hergestellt werden, so ergibt sich der Drahtquerschnitt nach Gl.(22.34):

$$A_1 = \frac{\varrho l_m \Theta}{U} = \frac{0,0175 \cdot 14 \cdot 3620}{110} \frac{\Omega mm^2 cm A}{Vm} = 0,0806 mm^2. \quad (22.46)$$

Die Windungszahl wird

$$N = \frac{kA}{A_1} = \frac{0,6 \cdot 9}{0,0806} \frac{cm^2}{mm^2} = 6700, \quad (22.47)$$

die gesamte Drahtlänge

$$l \approx Nl_m = 6700 \cdot 14cm = 938m, \quad (22.48)$$

der gesamte Widerstand

$$R = \varrho \frac{l}{A_1} = 0,0175 \frac{0,938}{0,0806} \frac{\Omega mm^2 km}{m mm^2} = 204\Omega \quad (22.49)$$

und die Stromstärke

$$I = \frac{U}{R} = \frac{110V}{204\Omega} = 0,54A. \quad (22.50)$$

In den Fällen, in denen μ , als konstant angesehen werden kann, ist der Begriff des magnetischen Widerstandes von Vorteil. Das Durchflutungsgesetz lässt sich bei einem magnetischen Kreis mit einer Anzahl einzelner Abschnitte mit etwa homogenem magnetischen Feld in der Form schreiben

$$\sum H_\nu l_\nu = \Theta. \quad (22.51)$$

Da nun

$$H_\nu = \frac{B_\nu}{\mu_\nu} \quad \text{und} \quad B_\nu = \frac{\Phi}{A_\nu} \quad (22.52)$$

so ergibt sich

$$\Phi \sum \frac{l_\nu}{\mu_\nu A_\nu} = \Theta. \quad (22.53)$$

Diese Gleichung hat eine ähnliche Form wie das Ohmsche Gesetz für einen elektrischen Stromkreis, wenn man den Induktionsfluss zum elektrischen Strom und die Durchflutung zur Quellenspannung in Analogie setzt („magnetomotorische Kraft“). Es entspricht dann die Größe

$$R_m = \frac{l_\nu}{\mu_\nu A_\nu} \quad (22.54)$$

dem elektrischen Widerstand, wobei an die Stelle der elektrischen Leitfähigkeit die absolute Permeabilität im magnetischen Kreis tritt. Man nennt R_m den magnetischen Widerstand des betreffenden Abschnitts; das Reziproke davon ist der magnetische Leitwert:

$$\Lambda = \frac{\mu_\nu A_\nu}{l_\nu}. \quad (22.55)$$

Der magnetische Leitwert kann, wie sich beim Einsetzen der einzelnen Größen zeigt, in Henry gemessen werden.

Zahlenbeispiel: Im vorigen Zahlenbeispiel ist der magnetische Leitwert

$$\Lambda = \frac{\Phi}{\Theta} = \frac{5 \cdot 10^{-4} Vs}{3620 A} = 1,38 \cdot 10^{-7} H. \quad (22.56)$$

Er nimmt mit wachsender Stromstärke ab, da die Permeabilität des Eisens abnimmt. Der magnetische Widerstand des *Luftspalts* ist

$$R_m = \frac{0,2 \text{ cm cm}}{1,257 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \text{ H cm}^2} = 3,18 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}. \quad (22.57)$$

22.3.3 Scherung

Durch einen Luftspalt im magnetischen Kreis eines Eisenkerns wird der gesamte magnetische Widerstand vergrößert, aber der Einfluss von Änderungen der Eisenpermeabilität, z. B. mit der Temperatur, wird dadurch gleichzeitig verringert. Ist A_1 der Querschnitt, l_1 die Länge des Eisenpfades und hat der Luftspalt die kleine Länge l_0 , so wird der gesamte magnetische Widerstand

$$R_m = \frac{l_1}{\mu A_1} + \frac{l_0}{\mu_0 A_1} = \frac{l_1}{\mu A_1} \left(1 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{l_0}{l_1} \right). \quad (22.58)$$

Der durch den Luftspalt unterbrochene Magnetkern wirkt also wie ein geschlossener Magnetkern mit der Länge l_1 und dem Querschnitt A_1 der aus einem Material mit der „effektiven Permeabilität“

$$\mu_{eff} = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{l_0}{l_1}} \quad (22.59)$$

hergestellt ist. Für sehr große μ nähert sich die effektive Permeabilität dem Grenzwert $\mu_{eff} = \mu_0(l_1/l_0)$, der *unabhängig von μ* ist. Von dieser Methode der „*Scherung*“ wird häufig Gebrauch gemacht, wenn hohe Anforderungen entweder an die Konstanz der Permeabilität bei Änderungen der Feldstärke oder an die Unabhängigkeit der Permeabilität von der Temperatur gestellt werden.

Zahlenbeispiel: $l_1 = 10\text{ cm}$, $L_0 = 1\text{ mm}$, $\mu = 1500\mu_0$ ergibt $\mu_{eff} = 93,7\mu_0$; $\mu = 2000\mu_0$ ergibt $\mu_{eff} = 95,2\mu_0$.

22.3.4 Berechnung von Dauermagneten

Bei der Berechnung von *Dauermagneten* kann grundsätzlich das gleiche Verfahren wie bei Elektromagneten angewendet werden. Es sei z.B. zu berechnen, wie groß die Induktion im Luftspalt 1 des in Abb. 22.10 dargestellten permanenten Magneten ist. 3 sei der Magnetstahl, 2 und 4 seien Polstücke

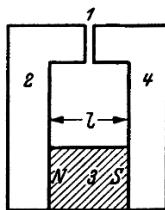


Abbildung 22.10. Zur Berechnung eines Dauermagneten

aus weichem Eisen. Wird der ganze magnetische Kreis einmal, z.B. mit Hilfe einer vorübergehend aufgebrachten stromdurchflossenen Wicklung, bis in das Gebiet der Sättigung magnetisiert, so geht das B-Feld nach dem Ausschalten des Magnetisierungstromes im B, H -Diagramm auf einer Kurve zurück, die dem absteigenden Ast der Grenzkurve entspricht, Abb. 22.11. Es stellt sich ein bestimmter Gleichgewichtszustand ein, z.B. Punkt P , in dem die innere Durchflutung des Magneten gerade den Durchflutungsbedarf des Kreises deckt. Die Wirkung der Inneren Durchflutung ist durch die Koerzitivfeldstärke H_k gekennzeichnet. Man denke sich nun auf den Stahlmagneten zwei gleichartige Wicklungen gebracht, die von konstanten Strömen gleicher Stärke aber entgegengesetzter Richtung durchflossen werden derart, dass die durch eine der beiden Wicklungen gelieferte Durchflutung gerade gleich ist der inneren Durchflutung

$$\Theta_k = H_k l, \quad (22.60)$$

wobei l die Länge des Stahlmagneten 3 bezeichnet. Da sich die beiden Zusatzdurchflutungen gegenseitig aufheben, so ändert sich dadurch nicht an

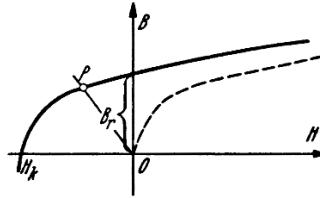


Abbildung 22.11. Magnetisierungskurve eines Dauermagneten

dem Gleichgewichtszustand im magnetischen Kreis. Die eine der beiden Zusatzdurchflutungen kompensiert jedoch gerade die innere Durchflutung des Magneten, sie verschiebt die Magnetisierungskurve um den Betrag H_k nach rechts, wie es in Abb. 22.11 gestrichelt angedeutet ist. Die Magnetisierungskurve hat dann einen Verlauf wie bei einem Stoff ohne Remanenz. Man kann sich daher den *Stahlabschnitt des magnetischen Kreises ersetzt durch einen Abschnitt aus weichem Eisen, dessen Magnetisierungskurve aus dem absteigenden Ast der Grenzkurve des Stahls durch Parallelverschiebung hervorgeht, und durch eine Wicklung, die eine Durchflutung Θ_k liefert*. Damit ist die Berechnung des Stahlmagneten auf die Berechnung eines Elektromagneten zurückgeführt. Da hier die Durchflutung gegeben ist, so muss die magnetische Kennlinie des Kreises berechnet werden, aus der man dann den Induktionsfluss zu dem Wert Θ_k entnehmen kann.

Für eine überschlägige Berechnung von Dauermagneten können häufig alle Abschnitte des magnetischen Kreises außer dem Luftspalt und dem Stahlabschnitt vernachlässigt werden. Bezeichnen A_0 und l_0 Querschnitt und Länge des Luftweges, A und l Querschnitt und Länge des Feldlinienbündels im Magnetstahl, ferner B_0 und B das B-Feld, H_0 und H das H-Feld im Luftspalt und im Stahl, so gilt nach dem Durchflutungsgesetz

$$\frac{B_0}{\mu_0} l_0 + H l = 0. \quad (22.61)$$

Der magnetische Fluss im Luftspalt, $B_0 A_0$, ergibt sich aus dem Fluss im Stahl, $B A$, durch Multiplizieren mit einem Faktor S , der die Streuung der Feldlinien berücksichtigt und kleiner als 1 ist:

$$B_0 A_0 = S B A. \quad (22.62)$$

Führt man hieraus B_0 in die oben angesetzte Form des Durchflutungsgesetzes ein und löst nach H auf, so folgt

$$H = -\eta \frac{B}{\mu_0}, \quad (22.63)$$

wobei zur Abkürzung

$$\eta = S \frac{l_0}{l} \frac{A}{A_0} \quad (22.64)$$

gesetzt ist.

Gl. (22.63) ist die Gleichung einer geraden Linie, die man in das Diagramm der Magnetisierungskurve einzeichnen kann; sie gibt den Durchflutungsbedarf des Luftspaltes für jedes vorgegebene B-Feld B im Stahlmagneten an. Ihr Schnittpunkt mit der Kurve liefert den Betriebspunkt P , Abb. 22.11, in dem der Durchflutungsbedarf gerade durch die innere Durchflutung des Magneten gedeckt wird.

Den Zahlenfaktor η , der meist kleiner als 1 ist, nennen wir den „Entmagnetisierungsfaktor“. Die Steigung der geraden Linie OP in Abb. 22.11 ist $-\mu_0/\eta$. Aus dem für den Betriebspunkt P abgelesenen Wert von B folgt die Induktion im Luftspalt nach Gl. (22.62)

$$B_0 = S \frac{A}{A_0} B. \quad (22.65)$$

Zahlenbeispiel: Die Magnetisierungskurve eines Aluminium-Nickelstahles sei im 2. Quadranten durch folgende Werte in der Tabelle 22.1 gegeben: Der Luftspalt des zu berechnenden Magneten habe die Abmessungen $A_0 =$

$H(A/cm)$	0	-50	-100	-150	-200	-250	-300	-350
$B(T)$	0,600	0,563	0,520	0,466	0,403	0,314	0,177	0

Tabelle 22.1. Magnetisierungskurve von Aluminium-Nickelstahl (2. Quadrant)

4cm^2 , $l_0 = 2\text{mm}$. Für den Streufaktor werde $S = 0,8$ angenommen.

Setzen wir zunächst den Querschnitt des Stahlmagneten A gleich dem des Luftspaltes A_0 , so wird der Entmagnetisierungsfaktor $\eta = 0,8l_0/l$ und das B-Feld im Luftspalt $B_0 = 0,8B$. Das Volumen des Stahlabschnittes ist gleich $V = Al$.

Anhand der obenstehenden Formeln kann man die Wertepaare der Kurven für die beiden folgenden Abbildungen mit Hilfe eines Taschenrechners leicht ermitteln. Die Abb. 22.12 zeigt, wie hiernach mit wachsendem Volumen des Stahlabschnittes das erreichte B-Feld im Luftspalt zunächst rasch ansteigt, schließlich aber durch eine Vergrößerung des Stahlvolumens nur noch wenig gesteigert werden kann. Wird auch der Querschnitt des Stahlmagneten verändert, wobei der Übergang vom Stahlquerschnitt zum Luftspaltquerschnitt durch entsprechende Polschuhe hergestellt werden muss, so gilt für das gleiche Zahlenbeispiel folgendes:

Aus irgendeinem angenommenen Stahlvolumen V erhält man den Stahlquerschnitt $A = V/l$, und es wird der Entmagnetisierungsfaktor

$$\eta = S \frac{l_0}{l^2} \frac{V}{A_0} \quad (22.66)$$

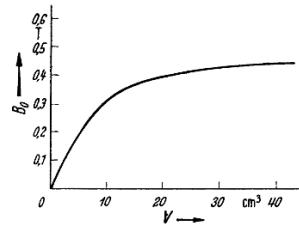


Abbildung 22.12. Abhängigkeit des B-Feldes im Luftspalt vom Volumen des Stahlmagneten bei konstantem Querschnitt

und das B-Feld im Luftspalt

$$B_0 = S \frac{V}{l A_0} B. \quad (22.67)$$

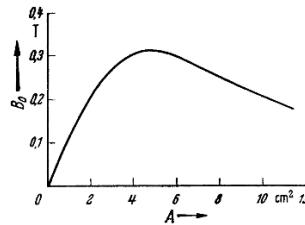


Abbildung 22.13. Abhängigkeit der B-Feldstärke im Luftspalt vom Stahlquerschnitt bei konstantem Volumen

Für $V = 10\text{cm}^3$ kann man wiederum mit einem Taschenrechner bei verschiedenen Längen l des Stahlabschnittes die Werte für η und B_0 bestimmen und graphisch darstellen. Wie aus Abb. 22.13 hervorgeht, ergibt sich mit einem Stahlquerschnitt von etwa $4,5\text{cm}^2$ die größte B-Feldstärke im Luftspalt, nämlich etwa $0,32\text{T}$. Das Maximum der Kurve erklärt sich daraus, dass eine weitere Vergrößerung des Stahlquerschnittes zwar durch die Einschniung des Flusses im Luftspalt eine Verdichtung der Feldlinien bewirkt, dass aber gleichzeitig wegen der Verkürzung des Stahlmagneten die innere Durchflutung verringert wird.

Eine einfache *Kennzeichnung der Wirksamkeit eines Magnetstoffes*, die auf den eben benutzten Voraussetzungen beruht, erhält man durch die folgende Betrachtung. Aus Gl. (22.61) folgt für den Betrag der Luftspaltinduktion

$$B_0 = \mu_0 H \frac{l}{l_0}, \quad (22.68)$$

und aus Gl. (22.62)

$$B_0 = SB \frac{A}{A_0}. \quad (22.69)$$

Bildet man das Produkt dieser beiden Ausdrücke, so ergibt sich

$$B_0^2 = S \frac{A}{A_0} \frac{l}{l_0} \mu_0 BH. \quad (22.70)$$

Durch Einführen des Magnetvolumens $V = Al$ und des Luftspaltvolumens $V_0 = A_0 l$ erhält man hieraus

$$B_0 = \sqrt{S \frac{V}{V_0} \mu_0 BH}. \quad (22.71)$$

Bei gegebenen Volumina hängt die Luftspaltinduktion also nur von dem Produkt BH ab. Dieses ist durch die Lage des Betriebspunktes P auf der Magnetisierungskurve bestimmt. Es hat in einem bestimmten Punkt P_0 ein Maximum, Abb. 22.14. Dies ist der günstigste Betriebspunkt; näherungsweise gilt, dass dieser Punkt auf der Diagonale des Rechtecks $B_r H_k$ liegt. Aus den zugehörigen Werten von B und H berechnet sich der günstigste Querschnitt des Magneten gemäß Gl. (22.62) und (22.71) zu

$$A = \sqrt{\frac{\mu_0 H}{B} \frac{VA_0}{l_0 S}}. \quad (22.72)$$

Zur überschlägigen Beurteilung eines Magnetmaterials kann also die Größe $(BH)_{max}$ dienen, die man der entsprechenden Literatur entnehmen kann.

Zahlenbeispiel: Mit der Magnetisierungskurve des vorigen Beispiels liefert die soeben beschriebene, durch Abb. 22.14 dargestellte Konstruktion $B = 0,375T, H = 220A/cm$; das Produkt BH hat also den Maximalwert $0,375Vs/m^2 \cdot 220A/cm = 8,25Ws/dm^3$. Für verschiedene Werte des Magnetvolumens V folgen damit die günstigsten Werte von A, l und B_0 aus den Gl. (22.72) und (22.71).

Dabei ist wieder $A_0 = 4cm^2$ und $l_0 = 2mm$ gesetzt. Durch Vergrößern des Magnetquerschnitts über den Luftquerschnitt hinaus lässt sich also eine Induktion im Luftspalt erzielen, die höher ist als die im Magnetstahl. Eine Voraussetzung dieser Betrachtungen war, dass der magnetische Kreis als Ganzes magnetisiert wird und dann sich selbst überlassen bleibt. Magnetisiert man dagegen den Magneten für sich und setzt ihn nachträglich erst in den magnetischen Kreis ein, so erhält man etwas andere Verhältnisse, und zwar wird dann im allgemeinen die im Luftspalt befindliche B-Feldstärke geringer. Abb. 22.15 soll diesen Fall veranschaulichen. Nach der Magnetisierung geht die B-Feldstärke im Magneten auf den durch P_1 gegebenen Wert zurück, der sich aus dem Schnitt mit der Linie $\overline{OP_1}$ des Durchflutungsbedarfs für den herausgenommenen Magneten ergibt; sie hat entsprechend dem größeren Luftweg des Magneten eine geringere Steigung als in dem oben betrachteten Fall. Schließt man nun den magnetischen Kreis nachträglich, so wächst

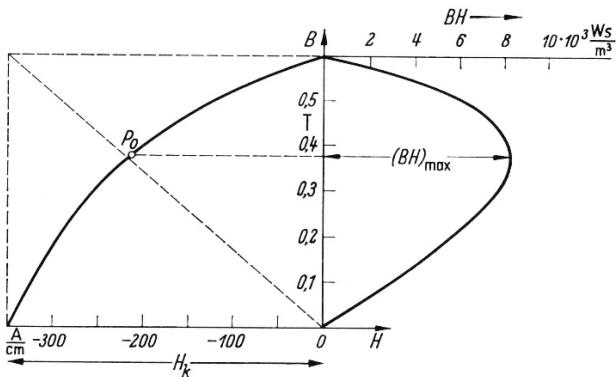


Abbildung 22.14. Konstruktion des günstigsten Betriebspunktes

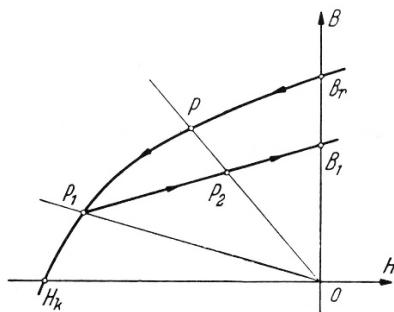


Abbildung 22.15. Magnetisierungskurve des Stahlmagneten bei nachträglichem Einsetzen in den magnetischen Kreis

die B-Feldstärke nicht mehr auf dem zuletzt durchlaufenen Ast der Magnetisierungskurve, sondern wegen der Hysterese auf einem aufsteigenden Ast $P_1 B_1$, der tiefer liegt. Ist \overline{OP} die Linie des Durchflutungsbedarfs für den magnetischen Kreis, dann ergibt sich also nicht, wie oben, die dem Punkte P entsprechende B-Feldstärke, sondern der Betriebspunkt wird P_2 .

22.3.5 Theorie der Kompassnadel

Wird ein Magnetstab in einem magnetischen Feld drehbar aufgehängt, so stellt er sich in die Richtung der magnetischen Feldlinien. Man erkennt hier die Wirkungsweise am einfachsten, wenn man sich den Dauermagneten durch einen magnetisch neutralen Stab mit einer stromdurchflossenen Wicklung („Strombelag“) ersetzt denkt. Ist Φ_m der gesamte Magnetfluss des Stabmagneten mit dem Querschnitt A , so ist $(1/\mu_0)\Phi_m/A$ die B-Feldstärke, die der gedachte Strom I in der Wicklung mit N Windungen im Innern der Spule erzeugen muss. Bei einem Stabmagneten von der Länge l gilt daher (angenähert)

$$\frac{IN}{l} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Phi_m}{A}. \quad (22.73)$$

Jede Windung der Wicklung erfährt nun in einem homogenen Feld mit der H-Feldstärke H nach Gl. (19.37) ein Drehmoment

$$I\mu_0 HA \sin \alpha, \quad (22.74)$$

wenn α den Winkel zwischen der Längsrichtung der Magnetnadel und der H-Feldrichtung bezeichnet. Das Drehmoment aller N Windungen ist

$$M_d = IN\mu_0 HA \sin \alpha = \Phi_m l H \sin \alpha. \quad (22.75)$$

Das magnetische Moment des Magnetstabes ist

$$m = \frac{1}{\mu_0} \Phi_m l. \quad (22.76)$$

Zahlenbeispiel: Eine Magnetnadel mit $\Phi_m = 0,6 \mu Wb$ und einer Länge $l = 5cm$ hat das magnetische Moment

$$m = \frac{0,6 \cdot 0,05 \mu Vs \cdot Am \cdot m}{1,257 \mu Vs} = 0,0239 Am^2. \quad (22.77)$$

Im Erdfeld mit der Horizontalkomponente der B-Feldstärke $B = 30 \mu T$ wird auf die Nadel ein Drehmoment ausgeübt

$$M_{dmax} = B \cdot m = 30 \cdot 0,0239 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{m^2} Am^2 = 0,717 \cdot 10^{-6} Nm, \quad (22.78)$$

$$M_d = 0,717 \mu Nm \sin \alpha. \quad (22.79)$$

Auch ein nichtmagnetisierter weicher Eisenstab sucht sich in die Feldrichtung zu drehen mit einem Moment, das umso höher ist, je mehr die Permeabilität des Stabes von μ_0 abweicht (siehe Abschnitt 25). Dieses Drehmoment addiert sich zu dem durch die Dauermagnetisierung bedingten, ist aber im allgemeinen gegen dieses vernachlässigbar.

Induktionskoeffizienten

23.1 Der Induktivitätsbegriff

In den letzten Abschnitten haben wir uns mit der Berechnung der Feldgrößen im stationären Magnetfeldes beschäftigt, wobei i. a. eine StromdichteVerteilung sowie bestimmte Randbedingungen vorgegeben sind. Dabei ist es in vielen Fällen zweckmäßig, wenn man dazu – zumindest im Prinzip – das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ mit Hilfe der zugehörigen Vektor-Poisson-Gleichung bestimmt und daraus sämtliche Felder des stationären Magnetfeldes bestimmt. Auf diese Weise kann man die Charakteristiken einer Problemstellung im Sinne der Theorie des stationären Magnetfeldes ermitteln, die eine Näherung der Theorie des elektromagnetischen Feldes darstellt. In Bezug auf die Integraldarstellung einer speziellen Lösung der Vektor-Poisson-Gleichung für das Vektorpotenzial (21.21) sind die Geometrie eines Problems und die elektrische Stromdichte untrennbar miteinander verknüpft. Daher ist man gezwungen, zumindest das Vektorpotenzial datenmäßig zu erfassen, um ein Problem vollständig zu erfassen. Eine solche Datenmengen ist in vielen Anwendungen kaum zweckmäßig und häufig auch gar nicht notwendig. Man versucht daher, die Datenmenge durch Einführung integraler Größen zu reduzieren. Hinsichtlich des B-Feldes haben wir bereits in Abschnitt 18 den magnetischen Fluss Φ als integrale Größe eingeführt, die auf eine vorgegebene Fläche A bezogen wird und somit eine Reduktion der Datenmenge darstellt. Der magnetische Fluss hängt wiederum von Geometrie und elektrischer Stromdichte ab.

Für spezielle Anordnungen kann man wie in der Elektrostatik Geometrie und elektrische Größen trennen. In diesem Sinne wurden in Abschnitt 12 Kapazitätskoeffizienten für Anordnungen aus idealen Leitern eingeführt. Im Rahmen des stationären Magnetfeldes führen wir sogenannte Induktivitätskoeffizienten ein, mit denen man insbesondere die Geometrie stromdurchflossener drahtförmiger Leiteranordnungen charakterisieren kann.

Wenn ausschließlich magnetisch neutrale Stoffe in der Umgebung des Stromkreises vorhanden sind, oder Stoffe mit konstanter Permeabilität, dann ist nach dem Durchflutungsgesetz die magnetische Erregung an jeder Stelle

des Raumes proportional der Stromstärke im Leiter. Daher ist auch der von dem Stromkreis insgesamt erzeugte magnetische Fluss Φ_g jederzeit proportional dem Strom I , so dass man schreiben kann

$$\Phi_g = L \cdot I, \quad (23.1)$$

was im folgenden Abschnitt für einige einfache Anordnungen gezeigt werden soll. Dabei ist unbedingt zu beachten, welche Bezugsfläche A insbesondere bei Anordnungen mit mehreren Windung zu verwenden ist, um den magnetischen Gesamtfluss Φ_g zu ermitteln; vgl. Lehner [162]. L ist also der Proportionalitätsfaktor zwischen dem magnetischen Fluss Φ_g und dem *diesen Fluss erzeugenden* und mit ihm im Rechtsschraubensinn verketteten Strom I ; er ist durch die Geometrie – die Abmessungen und die Form – des Stromkreises sowie durch die Permeabilitätswerte bestimmt und wird als die (*Selbst-*)*Induktivität* des Stromkreises bezeichnet. Als Einheit dient $1 \text{ Vs}/\text{A} = 1 \text{ H}$.

Bemerkung: In Abschnitt 26.2 wird später gezeigt, dass nach dem Induktionsgesetz in einem Stromkreis eine induzierte Umlaufspannung entsteht, wenn sich der magnetische Fluss, der mit dem Stromkreis verkettet ist, zeitlich verändert; sie ist durch Gl. (27.25) gegeben. Dabei ist es gleichgültig, wie die Flussänderung in der Schleife erzeugt wird, ob durch Bewegen des Stromkreises in einem stationären Magnetfeld oder durch Formänderung des Stromkreises, oder dadurch, dass sich das magnetische Feld selbst zeitlich verändert. Im Fall drahtförmiger Leiter kann man das Induktionsgesetz mit einem Induktionskoeffizienten formulieren, wobei (23.1) für den *Augenblickswert* des Stromes $i(t)$ gilt. Da nun jeder Strom in seiner Umgebung ein magnetisches Feld hervorruft, dessen Feldlinien mit den Stromlinien verkettet sind, so tritt induzierte Umlaufspannung auch auf, wenn sich die Stromstärke in einem Leiter ändert, eine Erscheinung, die man als *Selbstinduktion* bezeichnet. Aufgrund der Richtungsregeln findet man, dass bei einer Zunahme des Stromes diese Spannung der Selbstinduktion dem Strom entgegenwirkt.

Die Erfahrung zeigt, dass das Durchflutungsgesetz in der Form (18.22) auch gilt, wenn sich der Strom zeitlich ändert und keine Abstrahlung elektromagnetischer Energie auftritt. Streng genommen gilt dies also nur, wenn die Abmessungen der Räume, in denen das Durchflutungsgesetz angewendet wird, klein gegen die Wellenlänge der Feldänderungen im Raum. Da sich die Feldänderungen nahezu mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, ist diese Bedingung bei nicht zu großen Anordnungen für Wechselstromvorgänge mit Frequenzen bis in den MHz-Bereich erfüllt.

23.2 Induktivitäten einfacher Anordnungen

23.2.1 Induktivität einer Ringspule

Die Induktivität L einer Ringspule, durch die ein Strom I fließt, kann auf Grund der Definitionsgleichung (23.1) mit Hilfe der für die Berechnung ma-

gnetischer Felder abgeleiteten Regeln bestimmt werden. Bei einer Ringspule mit einem Ringkern der konstanten Permeabilität μ , Abb. 20.2, mit einem mittleren Radius r_0 , der Windungszahl N und dem Strom I ist z.B. nach Gl.(20.15)

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{IN}{2\pi r_0}, \quad (23.2)$$

und daher

$$\|\mathbf{B}\| = \mu \frac{IN}{2\pi r_0}. \quad (23.3)$$

Wenn der Stromleiter ein Bündel magnetischer Feldlinien mehrmals umschlingt, wie z. B. bei einer Spule, dann ist es meist einfacher, den mit dem Stromleiter verketteten Gesamtfluss durch Multiplikation des von einer Windung umschlungenen Induktionsflusses mit der Zahl der Windungen N zu berechnen. Man bezeichnet diesen als *Windungsfluss* oder *Bündelfluss* Φ . Wird dieses Flussbündel von den N Windungen einer Spule umschlungen, so ist der *Gesamtfluss*

$$\Phi_g = N \Phi. \quad (23.4)$$

Bezeichnet man den Querschnitt des Ringkerns der Ringspule mit A , so wird der mit der Wicklung verkettete Bündelfluss

$$\Phi = \mu A \frac{IN}{2\pi r_0}. \quad (23.5)$$

Der Gesamtfluss hat daher die Größe

$$\Phi_g = N^2 \frac{\mu A}{2\pi r_0} I, \quad (23.6)$$

wobei die Fläche sämtlicher Windungen – also $N A$ – zu berücksichtigen ist. Daraus folgt auf Grund der Gl.(23.1) für die *Induktivität der Ringspule*

$$L = N^2 \frac{\mu A}{2\pi r_0}. \quad (23.7)$$

Genau genommen muss die Abhängigkeit des H-Feldes $\|\mathbf{H}\|$ von dem Radius r berücksichtigt werden. Bei rechteckigem Kernquerschnitt mit der Breite b gilt

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} b \|\mathbf{B}\| dr = b \mu \frac{IN}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}; \quad (23.8)$$

hieraus folgt der verbesserte Induktivitätswert

$$L_v = N^2 \frac{\mu b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (23.9)$$

23.2.2 Induktivität einer Zylinderspule

Bei einer *zylindrischen Spule* mit N Windungen, deren Länge l groß gegen die Abmessungen ihres Querschnittes A ist und in welcher der Strom I fließt, liegt der magnetische Widerstand im wesentlichen im Innenraum der Spule. Vernachlässigt man den magnetischen Widerstand des Außenraumes, so gilt für das H-Feld (vgl. 22.1 in Gl. (22.7))

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{IN}{l}; \quad (23.10)$$

damit wird

$$\|\mathbf{B}\| = \mu \frac{IN}{l}, \quad \Phi = \mu A \frac{IN}{l} \quad (23.11)$$

und

$$\Phi_g = N^2 \frac{\mu A}{l} I, \quad (23.12)$$

wobei die Fläche sämtlicher Windungen – also $N A$ – zu berücksichtigen ist. Die Induktivität einer solchen Spule ist also

$$L = N^2 \frac{\mu A}{l}. \quad (23.13)$$

23.2.3 Induktivität einer Doppelleitung

Bei einer *Doppelleitung* von der Länge l mit dem Achsenabstand a und dem Leiterradius r_0 kann man den mit dem Strom verketteten Fluss im Luftraum am einfachsten durch Überlagerung der von den beiden Leitern herrührenden Flüsse berechnen. Wäre nur der eine Leiter vom Strom I durchflossen, so würde außerhalb dieses Leiters das H-Feld nach Gl.(19.33)

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{I}{2\pi r} \quad (23.14)$$

sein. In dem Zwischenraum zwischen der Oberfläche dieses Leiters und der Achse des zweiten Leiters ergibt sich der Fluss

$$\Phi_1 = \int_{r_0}^a \mu_0 \|\mathbf{H}\| l dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \int_{r_0}^a \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{a}{r_0}. \quad (23.15)$$

Genau so groß ist der Betrag des vom Strom I in entgegengesetzter Richtung durchflossenen zweiten Leiters. Der Gesamtfluss ist daher

$$\Phi_g = \frac{\mu_0 Il}{\pi} \ln \frac{a}{r_0} \quad (23.16)$$

und die *Induktivität der Doppelleitung*

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{a}{r_0}. \quad (23.17)$$

Diese Beziehung berücksichtigt nur das H-Feld im Luftraum und nicht das Feld innerhalb der Leitungsdrähte. Man bezeichnet die so berechnete Induktivität daher als *äußere Induktivität*. Dazu kommt noch die innere Induktivität, die von dem inneren H-Feld herrührt, und deren Berechnung in Abschnitt 24 besprochen wird.

23.2.4 Induktivität eines Drahtringes

Zur Berechnung der Selbstinduktivität eines Drahtringes würde man grundsätzlich von der allgemeinen Beziehung (21.27) und speziell von (21.49) ausgehen. Dazu muss $\mathcal{C}_A = \mathcal{C}$ gesetzt werden, was den folgenden Gleichsetzungen $h = 0$ und $R = \rho$ entspricht. Bei der Berechnung der Selbstinduktivität würde es jedoch wegen $h = 0$ zu einem singulären Integralwert kommen. Wählt man

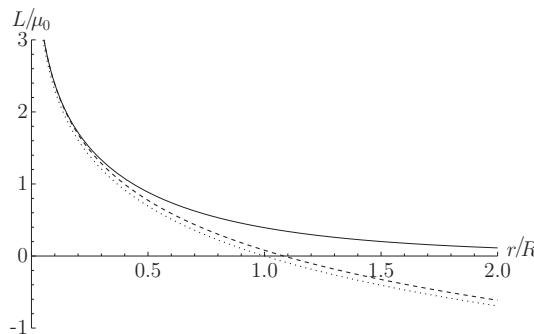


Abbildung 23.1. Vergleich der Selbstinduktivitätsformeln: 1) Exakte Berechnung (23.18): —, 2) Genäherte Berechnung (23.19): — —, 3) Genäherte Formel nach Küpfmüller (23.20): ···

$z = r$, wobei r der Drahtradius ist, dann ergeben sich $k := 2R^2 + r^2$, $\kappa := 2R^2$ und $\lambda^2 := r^2$ und es folgt eine auf diese Wahl von z bezogenen Selbstinduktivität

$$L(R, r) = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \left(\frac{2R^2 + r^2}{r} K \left(-\frac{4R^2}{r^2} \right) - r E \left(-\frac{4R^2}{r^2} \right) \right). \quad (23.18)$$

Natürlich ist eine alternative Wahl möglich, was zu einer geringfügigen Veränderung des Induktivitätswertes führt. In den früheren Auflagen von Küpfmüller, Mathis, Reibiger [156] wurde eine solche Variante angegeben. Mit dem Grenzwert $R \gg r$ folgt die (ansonsten exakte) Lösung

$$L(R, r) \approx \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right). \quad (23.19)$$

Die Induktivität des *Drahtringes* ergibt sich nach Küpfmüller [156] näherungsweise zu

$$L_K \approx \mu_0 R \ln \frac{R}{r}. \quad (23.20)$$

Anhand der Abb. 23.1 ist leicht erkennbar, dass die beiden Näherungsformeln für die Selbstinduktivität L im Gegensatz zu der exakten Formel nur bis etwa $r/R = 1$ gültig sind, da sonst negative Werte auftreten.

Beispiel: Es sei $d = 20\text{cm}$ (d.h. $R = 10\text{cm}$), $r = 1\text{mm}$ und $I = 2\text{A}$. Dann folgt für den magnetische Fluss gemäß $\Phi = LI$ für die Formel mit den elliptischen Integralen $\Phi = 1.1774\mu\text{Wb}$ und für die Formel mit dem Logarithmus $\Phi = 1.1774\mu\text{Wb}$. Dies ist eine Differenz von $\Delta\Phi = 30\mu\text{Wb}$. Nach Küpfmüller, Mathis, Reibiger [156] wäre der Fluss $\Phi = 1.1574\mu\text{Wb}$. Verdoppelt man den Durchmesser d , so wird $\Phi \approx 2.66\mu\text{Wb}$. Der magnetische Fluss wächst also nicht proportional mit der Fläche, wie man dies zunächst vermuten könnte, sondern eher proportional mit dem Durchmesser. Das magnetische Feld ist in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes so stark konzentriert, dass im wesentlichen die Drahtlänge maßgebend für den Fluss ist.

23.2.5 Induktivität von Drähten beliebiger Form

Die Induktivität von *Stromkreisen beliebiger Form*, die aus verhältnismäßig dünnen Drähten gebildet sind, lässt sich scheinbar mit Hilfe des magnetischen Fluxes in Gl. (21.27) berechnen. Diese Gleichung gilt unter der Voraussetzung, dass man die Stromleiter durch einen Stromfaden ersetzen kann (Linienleiter-Näherung). Dann ist die Induktivität eines derartigen Stromkreises, der in einen Stoff mit der Permeabilität μ eingebettet ist, mit der Neumann-Formel¹

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{ds \cdot d\tilde{s}}{\|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\|}, \quad (23.21)$$

wobei über die geschlossene Kurve C integriert werden muss, welche die Leiterschleife charakterisiert. Offensichtlich besitzt der Integrand eine Singularität, so dass diese Definition der Selbstinduktivität, die man in der Literatur sehr häufig findet, ohne weitere Erklärungen keinen Sinn hat. Eine Möglichkeit ist die in Abschnitt 23.2.4 verwendete Unterscheidung von Stromfaden und Randlinie der Fläche, die vom magnetischen Fluss durchsetzt wird. Die Wahl des Abstandes der beiden Kreislinien ist jedoch willkürlich. In den älteren Auflagen des Küpfmüllerschen Lehrbuches werden eine äußere und eine innere Selbstinduktivität eingeführt. Eine ausführliche Diskussion dieser unterschiedlichen Arten der Selbstinduktivität und einen Zusammenhang mit der magnetischen Energie findet man bei Henke ([114]).

¹ Franz Ernst Neumann, (Geb. 11. September 1798 in der Nähe von Joachimsthal in der Uckermark; gest. 23. Mai 1895 in Königsberg) war ein deutscher Physiker und gilt als einer der Begründer der theoretischen Physik. Einer seiner bedeutendsten Schüler war Gustav Kirchhoff. Unter Neumann's Leitung verfasste Kirchhoff seine Arbeiten zur Theorie elektrischer Netzwerke.

Eine dazu verwandte Möglichkeit besteht nach Weizel ([300], S. 377f) darin, die Singularität dadurch zu umgehen, dass man nur in ihrer Umgebung den Linienleiter volumenmäßig betrachtet und das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ mit Hilfe der Integralformel (21.21) berechnet. Eine Näherungsbetrachtung zeigt, dass man die Volumenintegration nur in einer sehr kleinen Umgebung um die Singularität benötigt und ansonsten die Formel (23.21) zur Berechnung der Selbstinduktivität L eines linienhaften, beliebig geformten Drahtringes verwenden kann.

Schließlich kann man z. B. nach Lehner [162] einen voluminösen geschlossenen Leiter verwenden, so dass sich ein Doppel-Volumenintegral zur Berechnung der Selbstinduktivität ergibt

$$L = \frac{\mu}{4\pi I^2} \iiint_V \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{J}(\hat{\mathbf{r}})}{\|\tilde{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V} d\hat{V}. \quad (23.22)$$

Die Singularität ist dann eine Menge vom Maß null und dieser Anteil kann dann vernachlässigt werden.

23.2.6 Induktivität in nichtlinearen magnetischen Kreisen

Wenn der magnetische Kreis Eisen enthält, so ist die Induktivität i. a. von der Stromstärke I abhängig. Nur bei sehr kleinen Stromänderungen, bei denen praktisch die reversible Permeabilität in Betracht kommt, kann mit einer konstanten Induktivität gerechnet werden. Im allgemeinen Fall kann man den verallgemeinerten Induktivitätskoeffizienten für jede Stromstärke aus der magnetischen Kennlinie $\Phi(I)$ des Kreises entnehmen

$$\hat{L}(I) := \frac{N\Phi(I)}{I}, \quad (23.23)$$

wobei N die Windungszahl ist. Dieser verallgemeinerte Induktivitätskoeffizient $\hat{L}(I)$ entspricht geometrisch der Steigung der *Sekante an die Kennlinie* $\Phi(I)$, die durch Stützpunkte $(0, 0)$ und $(\Phi(I), I)$ geht. Eine andere Verallgemeinerung benutzt die *Tangente an die Kennlinie* im Punkt $(\Phi(I), I)$

$$L(I) := \frac{d\Phi(I)}{dI}. \quad (23.24)$$

In der netzwerktheoretischen Literatur wird meistens diese Form (23.24) als *differentieller Induktivitätskoeffizient* verwendet (z. B. Mathis [180]).

Die Abhängigkeit der Induktivität L vom Strom I lässt sich bei Eisenkreisen vermindern, wenn in dem Eisenkern ein Luftspalt angebracht wird, der den Hauptteil des magnetischen Widerstandes enthält.

Aus Gl. (22.53) und (22.54) geht hervor, dass die Induktivität einer Wicklung mit N Windungen

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad (23.25)$$

wird, wenn R_m der magnetische Widerstand des von der Wicklung umschlungenen magnetischen Kreises ist; vgl. die Definition (22.54).

Zahlenbeispiele:

1. Eine *Zylinderspule* mit der Länge $l = 30\text{cm}$, dem Durchmesser $d = 5\text{cm}$ und $N = 300$ Windungen ohne Eisenkern hat angenähert die Induktivität

$$L = 300^2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m} \frac{0,05^2 \pi m^2}{4 \cdot 0,3m} = 740 \mu H. \quad (23.26)$$

2. Eine *Doppelleitung* mit $a = 30\text{cm}$ Drahtabstand, $r_0 = 2\text{mm}$ Leiterradius und $l = 1\text{km}$ Länge hat die Induktivität

$$L = \frac{1,257 \cdot 10^{-6} H 1000 m}{\pi m} \ln \frac{300}{2} = 2,0 mH. \quad (23.27)$$

3. Ein *Drahtring* von $d = 30\text{cm}$ Durchmesser und $r_0 = 2\text{mm}$ Drahtradius hat die Induktivität

$$L = 1,257 \frac{\mu H}{m} 0,15 m \ln \frac{300}{4} = 0,814 \mu H. \quad (23.28)$$

23.3 Gegeninduktivität und Koppelkoeffizient

Befindet sich in der Nachbarschaft eines Stromkreises 1, der von einem Strom I_1 durchflossen wird, ein zweiter Stromkreis 2, dann wird ein Teil des vom Stromkreis 1 erzeugten magnetischen Flusses mit dem Stromkreis 2 verkettet sein. Man definiert die *Gegeninduktivität* M_{21} zwischen Stromkreis 1 und 2 durch die Beziehung

$$\Phi_{21} =: M_{21} I_1. \quad (23.29)$$

Dabei ist Φ_{21} der magnetische Fluss, der mit dem Stromkreis 2 dann verkettet ist, wenn der Strom im Stromkreis 2 Null ist, wenn also dieser Stromkreis z.B. geöffnet ist. Die Einheit der Gegeninduktivität ist wie die der Induktivität 1 H .

Die Indizierung der Gegeninduktivität entspricht der in der mathematischen Literatur üblichen Indizierung. In der Elektrotechnik wird gelegentlich auch die umgekehrte Indizierung, bei der der verursachende Stromkreis an erster Stelle genannt wird, verwendet.

Die gleiche Definition der Gegeninduktivität gilt auch bei Spulen mit beliebiger räumlicher Ausdehnung. Der magnetische Fluss Φ_{21} setzt sich dann zusammen aus den Teilflüssen, die mit den einzelnen Windungen der Spule verkettet sind. Den mit einer Spule verketteten Gesamtfluss kann man immer berechnen als Summe der Teilflüsse in den einzelnen Windungen, indem man sich die Windungen in der Abb. 23.2 veranschaulichten Weise zu geschlossenen

Stromkreisen ergänzt denkt; die in den Ergänzungsstücken induzierten Spannungen heben sich gegenseitig auf. In Abb. 23.2 setzt sich der Gesamtfluss Φ_{21} aus den Beiträgen zusammen, die die Fläche a, b, c, d, f liefern. Häufig kann man auch hier den Gesamtfluss als Produkt der Windungszahl mit einem Bündelfluss berechnen. Es ist zu beachten, dass die Gegeninduktivität aus

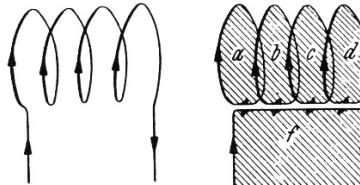


Abbildung 23.2. Zur Bestimmung des mit einer Spule verkettenden Induktionsflusses

dem Feldlinienbild definiert ist, das entsteht, wenn der Stromkreis 2 stromlos ist. In Abb. 23.3 sind für zwei parallele kreisförmige Drahtringe veranschaulicht. Der *gemeinsame Fluss* Φ_{21} wird durch das zwischen den beiden stark ausgezogenen Feldlinien liegenden Bündel dargestellt. Die anderen Feldlinien bilden den *Streufluss*. Fließt auch im Stromkreis 2 Strom, dann kann sich das Feldlinienbild wesentlich ändern; siehe Abb. 29.32.

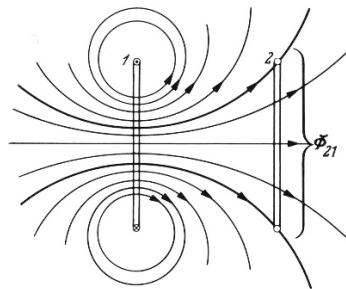


Abbildung 23.3. Gegeninduktivität zwischen zwei parallelen Drahtringen

Die folgenden Überlegungen zeigen, dass die Werte M_{21} und M_{12} einander gleich sind, dass also zwei beliebige Stromkreise 1 und 2 nur eine einzige Gegeninduktivität haben. Nach Gl.(21.25) ist der magnetische Fluss Φ_{21} , der von einem Leiter 1 erzeugt und mit einer geschlossenen Kurve C_2 verkettet ist, gleich

$$\Phi_{21} = \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_2. \quad (23.30)$$

Dabei ist das Linienintegral über die Kurve \mathcal{C}_2 zu bilden und das Vektorpotenzial \mathbf{A} ist nach (21.26) durch den Strom I_1 im Stromkreis 1 bestimmt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I_1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|} d\mathbf{r}_1. \quad (23.31)$$

Insgesamt erhält man mit (23.30) und (23.31)

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}. \quad (23.32)$$

Im Gegensatz zur Formel für die Selbstinduktivität in Gl.(23.21) ist diese Beziehung mathematisch wohldefiniert, da der Integrand auf den genannten Integrationswegen nicht singulär werden kann. Offensichtlich ist M_{21} unabhängig davon, welche Kurve mit \mathcal{C}_1 und welche mit \mathcal{C}_2 bezeichnet wird. Daraus folgt mit Gl.(23.30)

$$M_{12} = M_{21} =: M. \quad (23.33)$$

Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Beziehung ist, wie bei Gl.(21.25), dass die Permeabilität μ im ganzen Raum unabhängig vom magnetischen Feld ist. Die Beziehung gilt also insbesondere bei Stromkreisen, die sich in Luft oder magnetisch neutralen Stoffen befinden. Bei Anwesenheit ferromagnetischer Stoffe im magnetischen Feld hängt die Gegeninduktivität von der Stromstärke ab, und es ergeben sich im allgemeinen verschiedenen Werte der Gegeninduktivität, wenn nicht dafür gesorgt wird, dass die Flussdichte im Eisen die gleiche bleibt.

Die Gegeninduktivität kann entweder mit Hilfe von Gl.(23.32) oder mit der Definitionsgleichung (23.29) berechnet werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Gegeninduktivität über die Energie des magnetischen Feldes zu bestimmen (siehe Abschnitt 24). Bei dem praktisch besonders wichtigen Fall paralleler, gerader Leitungen ist der Weg über die Definitionsgleichung der einfachste.

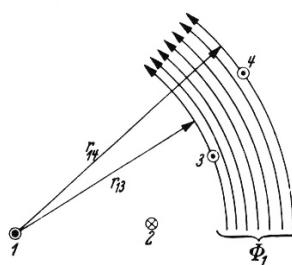


Abbildung 23.4. Gegeninduktivität zwischen zwei Doppelleitungen

In Abb. 23.4 sollen 1 und 2 die Spuren der beiden Drähte einer Doppelleitung, 3 und 4 die Spuren einer dazu parallelen Doppelleitung bezeichnen; es

soll die Gegeninduktivität zwischen den beiden Leitungen berechnen werden. Wir denken uns die Leitung 3, 4 stromlos und schicken durch die Leitung 1, 2 den Strom I_1 . Das durch diesen Strom hervorgerufene Magnetfeld durchsetzt die Schleife 3, 4. Die Bezugsrichtung für diesen verketteten Fluss sei durch die gezeichneten Feldlinien festgelegt; er kann aus den beiden Teilfeldern berechnet werden, die von den Drähten 1 und 2 herrühren. Bei der in der Abbildung angedeuteten Stromrichtung würde der Strom im Leiter 1 für sich allein einen Fluss mit kreisförmigen Feldlinien hervorrufen, von dem der Teil

$$\Phi_1 = \int_{r_{12}}^{r_{14}} \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{I_1}{r} dr = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_{14}}{r_{12}} \quad (23.34)$$

mit der Leitung 3, 4 in der angegebenen Richtung verkettet ist. Von Leiter 2 herrührend würde der Fluss

$$\Phi_{12} = \int_{r_{22}}^{r_{24}} \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{I_1}{r} dr = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_{22}}{r_{24}} \quad (23.35)$$

mit der Leitung 3, 4 verkettet sein. Der Gesamtfluss ist daher

$$\Phi_{21} = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_{14} r_{23}}{r_{13} r_{24}}. \quad (23.36)$$

Die Gegeninduktivität wird

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{14} r_{23}}{r_{13} r_{24}}. \quad (23.37)$$

Unter r_{13}, r_{23} usw. sind die Abstände der Leiterachsen zu verstehen. Das Feld im Innern der Leiter trägt praktisch nichts zur Gegeninduktivität bei, da sich die Beiträge in den beiden Hälften eines jeden Leiters aufheben. Anders ist es dagegen, wenn zwei der vier Leiter, z. B. 1 und 3, zusammenfallen, dann ist das innere Feld dieses Leiters beiden Stromkreisen gemeinsam. Zur Untersuchung dieses Falles eignet sich die „Energiemethode“ besser; die entsprechende Berechnung findet man in Abschnitt 24.

Betrachtet man zwei benachbarte Spulen mit den Induktivitäten L_1 und L_2 und einer Gegeninduktivität M , dann kann man deren gegenseitige Verkopp lung mit Hilfe des *Kopplungsfaktors*

$$k := \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (23.38)$$

beschreiben. Er liegt zwischen Null und 1.

Beispielhaft soll der Kopplungsfaktor k für zwei ebene und völlig gleiche Kreisspulen mit $L := L_1 = L_2$ betrachtet werden. Eine der beiden Spulen sei in der xy-Ebene eines Koordinatensystems platziert, wobei der Spulenmittelpunkt in den Koordinatenursprung gelegt wird. Der Spulenmittelpunkt der

anderen Spule liege im Punkt (y, z) , wobei die Spulenebene um den Winkel ϕ gedreht ist. Der Kopplungsfaktor ergibt sich dann zu

$$k(y, z, \phi) = \frac{M(y, z, \phi)}{L}. \quad (23.39)$$

In den folgenden Abbildungen 23.5 und 23.6 betrachten wir den Kopplungsfaktor $k(y, x, \phi)$ für die Winkel $\phi = 0^\circ$ und $\phi = 45^\circ$. Entsprechend der Intensitätsskala ist der Kopplungsfaktor in den dunkelgrauen Gebieten hoch, während er in den hellen Gebieten eher klein ist. In Abb. 23.5 ist klar er-

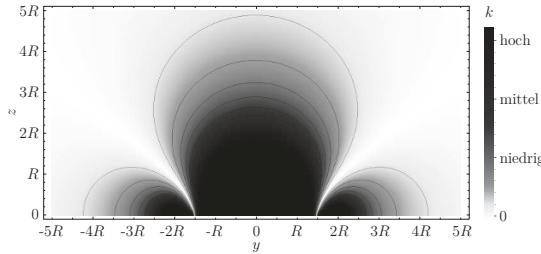


Abbildung 23.5. Kopplungsfaktor 0° Grad

kennbar, dass k maximal, wenn die beiden Spulen genau übereinander liegen. Eine horizontale Verschiebung um einen Spulenradius liefert ein Minimum (Nullstelle) von k . An beiden Seiten ergeben sich kleine Nebenminima. Diese Struktur wird deutlicher, wenn man die Spulenebene um 45° dreht; vgl. Abb. 23.6. Im Fernfeld verringert sich k sehr schnell. Diese Betrachtungen gelten in modifizierter Form auch für kompliziertere Spulen (z. B. Spiralspulen), wie sie etwa bei magnetischen Kopplung u. a. in RFID-Systemen zur drahtlosen Übertragung von Energie und Daten genutzt werden.

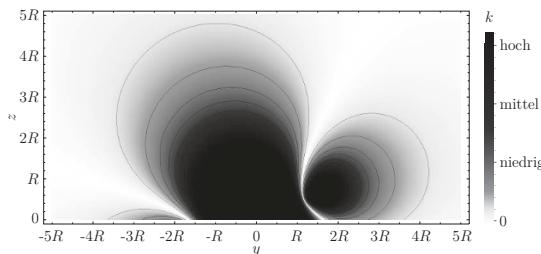


Abbildung 23.6. Kopplungsfaktor 45° Grad

In Abschnitt 29.3.4 wird der Kopplungsfaktor k im Zusammenhang mit dem linearen Übertrager diskutiert.

Energie im stationären Magnetfeld

Die im magnetischen Feld aufgespeicherte Energie lässt sich wie die elektrische Energie durch die Feldgrößen ausdrücken. Allerdings stößt man bei der Ableitung des Ausdrucks für die magnetische Energie auf einen wichtigen Unterschied. Im elektrischen Feld konnte der Ausdruck für die elektrische Energie auf der Grundlage eines Gedankenexperimentes hergeleitet werden: Transport von Ladungen aus dem Unendlichen. Diese Überlegung setzt voraus, dass man es mit einem energetisch abgeschlossenen System zu tun hat, was im Fall des elektrischen Feldes gegeben ist.

Wenn man „kleine“ Stromschleifen, die man in Analogie zu den Punktladungen als elementare Erzeuger des magnetischen Feldes ansehen kann, aus dem Unendlichen an beliebige Orte transportiert, so ergibt sich die Schwierigkeit, dass der Strom in den Schleifen konstant gehalten werden muss; vgl. Eder ([71], S. 72). Das lässt sich nur machen, wenn man jeder Schleife eine ideale Stromquelle zuordnet, wodurch man natürlich ein energetisch offenes physikalisches System erhält. Es bleibt nur, für die feldmäßige Form der magnetischen Energie einen Ausdruck in Analogie zum elektrischen Feld aufzubauen. In der Literatur wird diese Schwierigkeit selten erwähnt und man begnügt sich häufig damit, wie weiter unten gezeigt, einen Energieausdruck für den magnetischen Fall auf der Grundlage der Netzwerkgleichungen abzuleiten. Das ist jedoch im wesentlichen äquivalent zu der direkten Angabe des Ausdrucks für das magnetische Feld. In diesen Ableitungen wird häufig das Induktionsgesetz verwendet, dass nicht zur Theorie des stationären Magnetfeldes gehört.

In Analogie zum elektrostatischen Feld (vgl. Abschnitt 13) ergibt sich für die magnetische Energie des magnetischen Feldes in einem Volumen V

$$E_{mag} := \frac{1}{2\mu} \iiint_V \|\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}})\|^2 d\tilde{V} \quad (24.1)$$

oder mit der linearen Materialbeziehung

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V}. \quad (24.2)$$

Diese Definition ist konsistent mit der Ableitung des Ausdrucks für die magnetische Energie auf der Grundlage einer speziellen magnetischen Anordnung. Dazu kann man beispielsweise eine Ringspule mit einem Kern aus beliebigem Material wählen. Der Querschnitt A des Ringkernes soll jedoch so klein sein, dass das magnetische Feld im Innern des Kernes als homogen angesehen werden kann. Dann lässt sich der magnetische Fluss in dem Kern in der Form schreiben

$$\Phi = \|\mathbf{B}\|A. \quad (24.3)$$

Unter Verwendung des Induktionsgesetzes, das erst im Rahmen des quasi-stationären Feldes in Abschnitt 26.2 behandelt wird, erhält man bei einem zeitveränderlichen B -Feld $B := \|\mathbf{B}\|$ eine Selbstinduktionsspannung in der Wicklung mit N Windungen bei irgendwelchen Stromänderungen

$$u_L = NA \frac{dB}{dt}. \quad (24.4)$$

Wirkt in dem Stromkreis der Spule eine äußere Quellenspannung U_0 , so gilt daher

$$U_0 = Ri + NA \frac{dB}{dt}. \quad (24.5)$$

Mit der gleichen Überlegung wie oben ergibt sich hieraus für die während eines Zeitelements dt gespeicherte magnetische Energie

$$dW = iNA dB. \quad (24.6)$$

Andererseits ist nach dem Durchflutungsgesetz ($H := \|\mathbf{H}\|$)

$$iN = lH, \quad (24.7)$$

wenn l die Feldlinienlänge bezeichnet. Daher gilt

$$dW = AlH dB. \quad (24.8)$$

Wird hier das Volumen des Kerns $Al = V$ eingeführt, so ergibt sich

$$dW = VH dB. \quad (24.9)$$

Die bei irgendeiner magnetischen Feldstärke insgesamt gespeicherte Energie ist daher

$$W = V \int_0^B H dB. \quad (24.10)$$

Da nun das Feld im Innern des Kerns nach Voraussetzung homogen ist, so wird die *magnetische Energiedichte*

$$w := \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}. \quad (24.11)$$

Diese Beziehung gilt nun auch für ein Feld von ganz beliebiger Form, da jedes Feld in genügend kleinen Ausschnitten als homogen angesehen werden kann. Die in einem beliebigen Feld gespeicherte magnetische Energie wird daher durch Integration der Beiträge der einzelnen Volumenelemente erhalten

$$W = \iiint w \, dV. \quad (24.12)$$

Bei der Ableitung der Gl. (24.11) wurden keine Voraussetzungen über den Zusammenhang zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} gemacht. Diese Gleichung gilt daher auch für ferromagnetische Stoffe. Durch die Einführung des skalaren Produkts wurde auch berücksichtigt, dass \mathbf{H} und \mathbf{B} verschiedene Richtungen haben können. Bei Stoffen mit konstanter Permeabilität kann dagegen gesetzt werden

$$d\mathbf{B} = \mu d\mathbf{H} \quad (24.13)$$

Dann lässt sich die Integration ausführen, und es ergibt sich

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{H}\|^2 = \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{B}\|^2. \quad (24.14)$$

Die im ganzen magnetischen Feld gespeicherte Energie ergibt sich zu

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dV = \frac{1}{2} \mu \iiint \|\mathbf{H}\|^2 \, dV, \quad (24.15)$$

was E_{mag} in den Beziehungen (24.1) und (24.2) entspricht. Man kann also die magnetische Energie berechnen, wenn das H-Feld gegeben ist. Dieser Zusammenhang kann zur Bestimmung der Induktivität von räumlich ausgedehnten elektrischen Stromleitern dienen.

Dazu drücken wir Gl.(24.15) mit Hilfe des Vektorpotenzials \mathbf{A} und der Stromdichte \mathbf{J} aus

$$W = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) \, d\tilde{V} \quad (24.16)$$

wobei man einige Hilfsmittel der Vektoranalysis ($\operatorname{div}(\mathbf{M} \times \mathbf{N}) = \mathbf{N} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{N}$, Gaußscher Satz) zurückgreifen muss. Im Fall linienhafter Leiter erhalten wir

$$W = \frac{i}{2} \oint_{Leiter} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \, d\tilde{s} = \frac{i\Phi}{2}. \quad (24.17)$$

Wenn Φ und i linear zusammenhängen, wobei die Induktivität L der Proportionalitätskoeffizient ist, erhält man die Beziehung

$$W = \frac{1}{2} L i^2, \quad (24.18)$$

woraus bei bekannter Energie W in Abhängigkeit des Stromes i auch der Induktivitätskoeffizient berechnet werden kann. Als Anwendungsbeispiel werde

die Berechnung der *inneren Induktivität* von Drähten mit Kreisquerschnitt betrachtet. Das H-Feld im Leiterinnern ist nach Gl. (21.112)

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{r}{2\pi r_0^2} i. \quad (24.19)$$

Bei Voraussetzung konstanter Permeabilität enthält daher ein Hohlzylinder vom Radius r , der Dicke dr und der Länge l innerhalb des Leiters die Energie oder mit Gl. (24.19)

$$dW = \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{H}\|^2 2\pi r l dr, \quad (24.20)$$

oder mit Gl. (24.19)

$$dW = i^2 \frac{\mu l}{4\pi r_0^4} r^3 dr. \quad (24.21)$$

Die in dem Draht aufgespeicherte Energie ist

$$W = i^2 \frac{\mu l}{4\pi r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 dr = i^2 \frac{\mu l}{16\pi}, \quad (24.22)$$

und für die innere Induktivität ergibt sich gemäß Gl. (24.18)

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi}. \quad (24.23)$$

Bei einer Doppelleitung von der Länge l hat man diesen Wert zu verdoppeln, entsprechend der in Hin- und Rückleitung aufgespeicherten Energie. Bei der Ableitung der Gl. (24.23) wurde die Voraussetzung gemacht, dass der Strom den Drahtquerschnitt gleichmäßig ausfüllt. Das gilt in langgestreckten Leitern bei Gleichstrom und niederfrequentem Wechselstrom. Bei höheren Frequenzen wird der Strom nach der Drahtoberfläche „hin abgedrängt“, so dass die innere Induktivität kleiner wird (siehe Abschnitt 29.1). Dort wird dieser sogenannte Skineffekt allerdings als Felddiffusion gedeutet, wobei das elektromagnetische Feld nicht vollständig in den Leiter eindringt.

Die innere Induktivität L_i ist unabhängig von der Drahtstärke. Auf die Länge bezogen hat sie für alle magnetisch neutralen Leiter ($\mu = \mu_0$) den Wert

$$\frac{L_i}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} = 0,05 \frac{mH}{km}. \quad (24.24)$$

Bemerkung: Ein naheliegender Überlegungsfehler besteht darin, dass zur Berechnung der inneren Induktivität die Definition $\Phi = L i$ benutzt wird und dabei ein Stromfaden betrachtet wird, der die Achse des Leiters enthält. Ein solcher Stromfaden umschließt zwar den gesamten Induktionsfluss im Leiterinnern, aber dieser Fluss ist nicht mit dem ganzen Strom i des Leiters verkettet, sondern nur mit dem Bruchteil, der durch den betrachteten dünnen

Stromfaden geführt wird. Die anderen Stromfäden im Leiterinnern parallel zur Achse umschließen einen kleineren Induktionsfluss; die Selbstinduktionsspannung längs des Leiters nimmt von innen nach außen ab, und es wird daher ein mittlerer Wert beobachtet; dieser ist durch die Größe L_i Gl. (24.23) gegeben. Auf Grund dieser Vorstellung kann man die innere Induktivität auch mit der Definition $\Phi = L i$ berechnen. Dazu denkt man sich den Querschnitt des Leiters in Stromfäden mit dem im Grenzfall unendlich kleinen Querschnitt dA zerlegt, so das der Leiter aus $r_0^2\pi/dA$ solchen Stromfäden besteht. In einem ringförmigen Ausschnitt mit dem Radius r und der Breite dr befinden sich $2\pi r dr/dA$ Stromfäden, die alle mit dem gleichen Fluss Φ_r verkettet sind. Da das H-Feld im Leiterinnern nach Gl. (21.112) den Wert

$$H := \|\mathbf{H}\| = \frac{i}{2\pi r_0} \frac{r}{r_0} \quad (24.25)$$

hat, so ist dieser Fluss

$$\Phi_r = \int_r^{r_0} H \mu l dr = \frac{i}{4\pi r_0^2} \mu l (r_0^2 - r^2). \quad (24.26)$$

Der mit sämtlichen Stromfäden verkettete Fluss ist daher

$$\Phi_i = \frac{dA}{r_0^2 \pi} \int_r^{r_0} \Phi_r \frac{2r\pi}{dA} dr = \frac{i\mu l}{8\pi}, \quad (24.27)$$

woraus mit Definition $\Phi = L i$ die Gl. (24.23) für die innere Induktivität folgt. Eigentlich handelt es sich jedoch nicht um die Anwendung einer falschen Formel sondern um die Verwendung einer ungünstigen Näherung der vollständigen Theorie elektromagnetischer Felder. Für hochfrequente Felder ist die Theorie des stationären Magnetfeldes ungünstig und man sollte besser die Theorie des quasistationären elektromagnetischen Feldes anwenden.

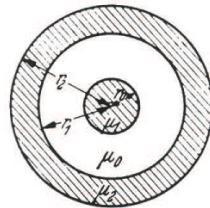


Abbildung 24.1. Koaxiales Kabel

Ein anderes Beispiel bildet die Berechnung der Induktivität eines Koaxialkabels Abb. 24.1. Das magnetische Feld kann hier in drei Teile zerlegt werden:

1. **Innenleiter.** Für die Induktivität des Innenleiters gilt wie oben

$$L_1 = \frac{\mu_1 l}{8\pi}. \quad (24.28)$$

2. Isolierstoff. Das H-Feld, ist wegen der Symmetrie des Feldes

$$H = \frac{i}{2\pi r}. \quad (24.29)$$

Der zwischen Innen- und Außenleiter enthaltene Fluss wird daher

$$\Phi = \mu_0 l \int_{r_0}^{r_i} H dr = i \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0}, \quad (24.30)$$

entsprechend einer Induktivität

$$L_2 = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0}. \quad (24.31)$$

3. Außenleiter. Für das H-Feld im Außenleiter folgt mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes

$$2\pi r H = i - i \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = i \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (24.32)$$

In einem Volumenelement, das durch zwei koaxiale Zylinder mit den Radien r und $r + dr$ begrenzt ist und die Länge l hat, ist eine Energie aufgespeichert vom Betrag

$$dW = i^2 \frac{\mu_2 l}{4\pi(r_2^2 - r_1^2)^2} (r_2^2 - r^2)^2 \frac{dr}{r}. \quad (24.33)$$

Daraus folgt die gesamte Energie in dem Außenleiter

$$W = i^2 \frac{\mu_2 l}{4\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left(\frac{r_2^4}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{3r_2^2 - r_1^2}{4} \right) \quad (24.34)$$

Die entsprechende Induktivität wird daher

$$L_3 = \frac{\mu_2 l}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left(\frac{r_2^4}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{3r_2^2 - r_1^2}{4} \right). \quad (24.35)$$

Die Gesamtinduktivität ergibt sich durch Addieren der drei Anteile.

Bemerkung: Bei supraleitenden Stromkreisen bleibt wegen des verschwindend kleinen Widerstandes ein einmal eingeleiteter Strom mit seinem magnetischen Feld praktisch unbegrenzte Zeit bestehen. Durch zusätzliche magnetische Felder kann der Zustand der Supraleitung aufgehoben werden; die Sprungtemperatur der supraleitenden Stoffe erniedrigt sich nämlich mit zunehmenden B-Feld. Wird daher ein Supraleiter auf eine Temperatur unterhalb der Sprungtemperatur gebracht, so geht die Supraleitung beim Überschreiten eines bestimmten B-Feldes in die normale Leitung über. Durch das magnetische Feld kann also der Widerstand eines supraleitenden Stäbchens und damit

der Strom in einem Gleichstrom- oder Wechselstromkreis gesteuert werden. Davon wird bei Einrichtungen zum sehr schnellen Schalten und Steuern von Strömen Gebrauch gemacht („Kryotron“). Das magnetische Feld wird mit einer kleinen Spule hergestellt, die das Stäbchen umgibt. Als Leitermaterial für diese Spule wird ebenfalls ein Supraleiter benutzt, der in dem ganzen verwendeten Bereich des B-Feldes supraleitend bleibt. Zur Steuerung ist dann nur die geringe durch die Induktivität der Spule bedingte Blindleistung erforderlich. Die durch das Stäbchen steuerbare Stromstärke ist dadurch begrenzt, dass der gesteuerte Strom selbst ein magnetisches Feld in dem Stäbchen verursacht. Diese Grenzstromstärke ist daher

$$I_g = \pi d \frac{B_g}{\mu_0}, \quad (24.36)$$

wenn mit B_g das zum Umkippen des Leitungsmechanismus notwendige B-Feld, mit d der Durchmesser des Stäbchens bezeichnet wird. Die zur Umsteuerung notwendige Stromstärke in der Spule von der Länge l mit N Windungen ergibt sich aus

$$I_s = \frac{B_g l}{\mu_0 N}. \quad (24.37)$$

Daher ist die *Stromverstärkung* des Kryotrons

$$\frac{I_g}{I_s} = \pi d \frac{N}{l}. \quad (24.38)$$

Z. B. ergibt sich mit $d = 0,1mm$, $N/l = 10mm^{-1}$ eine Stromverstärkung

$$\frac{I_g}{I_s} = \pi \cdot 0,1mm \cdot 10mm^{-1} = 3,14. \quad (24.39)$$

Fließen Ströme in zwei separaten Stromkreisen, so entsteht ein magnetisches Feld, das durch beide Ströme bestimmt ist. Die Energie dieses Feldes lässt sich genau so wie im Falle eines einzigen Stromkreises durch die Werte von **B** und **H** an den einzelnen Stellen des Feldes berechnen, Gl. (24.15). Sie lässt sich andererseits ausdrücken durch die Induktivität und die Gegeninduktivität, wie die folgende Betrachtung zeigt. Dabei wird ebenfalls vom Induktionsgesetz Gebrauch gemacht, obwohl das Ergebnis davon unabhängig ist.

Die in Stromkreis 2 induzierte Quellenspannung addiert sich im allgemeinen Fall zu den übrigen im Kreis 2 vorhandenen Quellenspannungen; durch diese Summe ist der Strom i_2 im Kreis 2 bestimmt. Die induzierte Quellenspannung $-Mdi_1/dt$ liefert dabei während des Zeitelementes dt in den Kreis 2 eine elektrische Arbeit vom Betrag $-i_2 Mdi_1$. Sie wird dem magnetischen Feld entzogen. Den gleichen Sachverhalt kann man auch dadurch ausdrücken, dass man sagt, die Arbeit $+i_2 Mdi_1$ werde während des betrachteten Zeitelementes als Zuwachs der Feldenergie in das magnetische Feld geliefert.

Vergrößert sich auch i_2 um einen Betrag di_2 , so entsteht eine Selbstinduktionsspannung $L_2 di_2/dt$ und die Feldenergie wächst um $i_2 L_2 di_2$.

Ganz entsprechend hat der Strom i_1 im Kreise 1 eine Arbeit $i_1 L_1 di_1$ zur Überwindung der Selbstinduktionsspannung und eine Arbeit $i_1 M di_2$ zur Überwindung der aus dem Kreis 2 induzierten Spannung zu leisten. Die im ganzen magnetischen Feld aufgespeicherte magnetische Energie nimmt also während des Zeitabschnittes dt um den Betrag

$$dW = L_1 i_1 di_1 + M(i_1 di_2 + i_2 di_1) + L_2 di_2 \quad (24.40)$$

zu. Lässt man den Strom i_1 von Null auf den Wert I_1 wachsen und den Strom im Kreis 2 von Null auf I_2 , so ergibt sich die Gesamtenergie des magnetischen Feldes durch Integration zu

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2. \quad (24.41)$$

Die Gegeninduktivität kann entweder mit Hilfe von Gl.(23.32) oder mit der Definitionsgleichung (23.29) berechnet werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Gegeninduktivität über die Energie des magnetischen Feldes zu bestimmen (siehe Abschnitt 24). Bei dem praktisch besonders wichtigen Fall paralleler, gerader Leitungen ist der Weg über die Definitionsgleichung der einfachste; die entsprechende Berechnung findet man in Abschnitt 23.3. Dabei zeigt sich, dass das Feld im Innern der Leiter trägt praktisch nichts zur Gegeninduktivität bei, da sich die Beiträge in den beiden Hälften eines jeden Leiters aufheben.

Anders ist es dagegen, wenn zwei der vier Leiter, z. B. 1 und 3, zusammenfallen, dann ist das innere Feld dieses Leiters beiden Stromkreisen gemeinsam. Zur Untersuchung dieses Falles eignet sich die „Energiemethode“ besser.

Für r_{13} ist in diesem Falle der Drahtradius r_0 des gemeinsamen Leiters zu setzen, und es ist zu dem so berechneten Wert der Gegeninduktivität, der nur die äußeren Felder berücksichtigt, noch ein Wert zu addieren, der von dem Innenfeld herröhrt. Um diesen Wert aufzufinden, berechnen wir die in dem Leiter 1 aufgespeicherte magnetische Energie. Die Stromstärke ist bei den gewählten Bezugsrichtungen $I_1 + I_2$, also wird das H-Feld im Innern dieses Leiters nach Gl. (21.112)

$$H = \frac{r}{2\pi r_0^2} (I_1 + I_2), \quad (24.42)$$

und es folgt aus Gl. (24.15)

$$W = \frac{\mu l}{16\pi} (I_1^2 + 2I_1 I_2 + I_2^2), \quad (24.43)$$

Der Vergleich mit Gl. (24.41) ergibt für den Beitrag des inneren Feldes zur Gegeninduktivität

$$M_i = \frac{\mu l}{16\pi}. \quad (24.44)$$

Damit folgt für die Gegeninduktivität zwischen den beiden Schleifen

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{r_{14}}{r_0} \frac{r_{23}}{r_{24}} + \frac{\mu_r}{4} \right). \quad (24.45)$$

Zahlenbeispiel: Die Achsen der 4 Drähte von zwei Doppelleitungen liegen auf einem Quadrat mit den Abständen $r_{12} = r_{24} = r_{34} = r_{31} = 30\text{cm}$. Der Radius der Drähte ist $r_0 = 2\text{mm}$. Werden die Drähte 1, 2 zu einer Doppelleitung, die Drähte 3, 4 zu einer zweiten Doppelleitung zusammengefasst, so ist die Gegeninduktivität zwischen den beiden Leitungen

$$\frac{M}{l} = \frac{1,257 \mu H}{2\pi m} \left(\ln \frac{30\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{2}}{30 \cdot 30} \right) = 0,139 \frac{mH}{km}. \quad (24.46)$$

Kräfte im stationären Magnetfeld

Analog zu den Verhältnissen im elektrostatischen Feld sind mit der Speicherung von Energie im stationären Magnetfeld mechanische Kraftwirkungen verknüpft, und zwar finden wir hier dreierlei mechanische Kräfte, nämlich solche zwischen den Stromleitern, Kräfte an den Grenzflächen von Stoffen verschiedener Permeabilität und Kräfte zwischen Stromleitern und magnetischen Stoffen; sie können physikalisch sämtlich auf Kräfte zwischen bewegten Ladungen zurückgeführt werden.

Neben den klassischen Anwendungen magnetischer Kräfte interessiert man sich auch auf mikroskopischer Ebene für magnetische Kräfte. Ein typisches Beispiel sind sogenannte magnetische Kraftmikroskope, die zur Klasse der Atomkraftmikroskope gehören; vgl. auch 14.4. Ein Beispiel für solche mikroskopischen Kraftberechnungen findet man bei Zueco [319]. Dabei werden grundsätzlich die gleichen Methoden angewendet wie bei makroskopischen Kraftberechnungen.

25.1 Kräfte zwischen Stromleitern

Zur Berechnung dient im Prinzip die Gl. (19.1). Man hat danach das B-Feld zu berechnen, die von dem ersten Leiter am Orte des zweiten Leiters erzeugt wird für den Fall, dass dieser stromlos ist. Bezeichnet \mathbf{B}_1 das B-Feld am Orte des Längenelementes $d\mathbf{s}_2$ des Leiters 2, so ist die Kraft, die vom magnetischen Feld auf dieses Längenelement ausgeübt wird, wenn es in seiner Pfeilrichtung einen Strom I_2 führt nach Gl. (19.13),

$$d\mathbf{F} = I_2(d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_1). \quad (25.1)$$

Die Gesamtkraft ergibt sich durch Integration über die ganze Länge des Leiters 2.

Als Beispiel werde die Kraft zwischen zwei sehr langen parallelen Stromleitern mit dem Abstand a betrachtet, Abb. 25.1. Die vom Leiter 1 in der

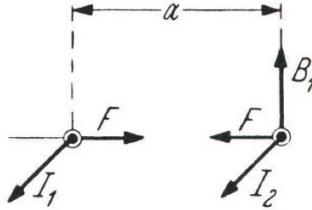


Abbildung 25.1. Berechnung der Kraft zwischen parallelen Drähten

Umgebung des Leiters 2 erzeugte B -Feld $B_1 := \|\mathbf{B}_1\|$ hat auf der ganzen Länge den Wert

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}; \quad (25.2)$$

sie ist senkrecht zum Leiter 2 gerichtet. Auf jedes Längenelement ds_2 wird daher eine Kraft vom Betrag

$$dF = I_2 B_1 ds_2 = \frac{\mu_0 ds_2}{2\pi a} I_1 I_2 \quad (25.3)$$

ausgeübt, die die beiden Leiter einander zu nähern sucht, wenn die Stromrichtungen gleich sind. Die in einem Abschnitt von der Länge l entstehende Anziehungskraft ergibt sich durch Integration

$$\|\mathbf{F}\| = I_2 B_1 ds_2 = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 \int ds_2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi a} I_1 I_2. \quad (25.4)$$

Von dieser Beziehung wird bei der Definition der Stromstärkeeinheit 1A Gebrauch gemacht.

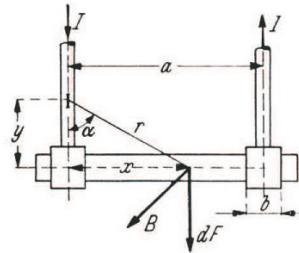


Abbildung 25.2. Berechnung der Kräfte in einem Schalter

Als weiteres Beispiel soll die Kraft berechnet werden, die auf die Traverse eines Schalters, Abb. 25.2, vom Strom ausgeübt wird. Die Stromkräfte sind hier immer so gerichtet, dass sie den Schalter zu öffnen suchen. In irgendeinem Längenelement dx der Traverse liefert der in dem Längenelement dy der

Zuführung fließende Strom nach der Amperèschen Formel entsprechend Gl. (21.61) den Beitrag

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dy}{r^2} \sin \alpha \quad (25.5)$$

zum B-Feld, oder mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\sin \alpha = x/(\sqrt{x^2 + y^2})$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{xdy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}. \quad (25.6)$$

Das von dem linken Stab herrührende B-Feld ist daher

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{x}. \quad (25.7)$$

Der Beitrag des anderen Stabes ist entsprechend

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a-x}, \quad (25.8)$$

so dass das gesamte B-Feld

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) \quad (25.9)$$

wird. Sie ist senkrecht zur Zeichenebene gerichtet. Die Kraft, die auf das Längenelement dx des Messers ausgeübt wird, ist daher

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{a-x} \right) \quad (25.10)$$

und es wird die Gesamtkraft

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \int_{b/2}^{a-b/2} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{a-x} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \frac{2a-b}{b}, \quad (25.11)$$

wobei b die Breite der beiden Klemmstücke bezeichnet.

Zahlenbeispiel: Durch einen Schalter mit $a = 15\text{cm}$, $b = 2\text{cm}$ fließe ein Kurzschlußstrom von $I = 10000\text{A}$. Dann ergibt sich eine Kraft von

$$F = \frac{1,257 \cdot 10^{-6}}{42\pi} 10^8 \ln 14 \frac{HA^2}{m} = 53N = 5,4kp. \quad (25.12)$$

25.2 Methode der virtuellen Verschiebung zur Kraftberechnung

Eine andere Methode zur Berechnung der magnetischen Feldkräfte besteht darin, dass man die Änderung der magnetischen Energie feststellt, die infolge einer gedachten Formänderung – auch virtuelle Verschiebungen genannt – des Stromkreises entsteht. Ändert man die Abmessung eines rechteckförmigen Stromkreises in x -Richtung um ein kleines Stück dx , so sind dabei (neben den elastischen Spannungen) magnetische Feldkräfte zu überwinden. Bezeichnen wir die durch das magnetische Feld erzeugte Kraft in der Richtung von x mit F_x , so wird bei der Verschiebung um dx eine mechanische Arbeit¹

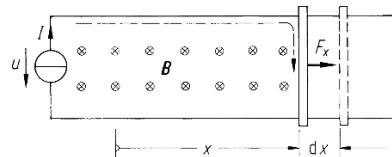


Abbildung 25.3. Rechteckförmiger Stromschleife mit virtueller Verschiebung

$$dW_1 = F_x dx \quad (25.13)$$

geleistet. Denken wir uns den Strom I bei dieser Änderung durch eine (ideale) Stromquelle konstant gehalten, so wächst bei einer solchen Formänderung der Gesamtfluss des Stromkreises,

$$\Phi = LI, \quad (25.14)$$

um einen Betrag

$$d\Phi = IdL = I \frac{\partial L}{\partial x} dx. \quad (25.15)$$

Erfolgt die Änderung in der Zeit dt , so ergibt sich eine Selbstinduktionsspannung

$$u = \frac{d\Phi}{dt} = I \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (25.16)$$

Diese erfordert beim Strom I während der Zeit dt einen elektrischen Arbeitsaufwand

$$dW_2 = u Idt = I^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx, \quad (25.17)$$

der durch die Stromquelle gebracht wird.

¹ Im folgenden und auch im diesem gesamten Abschnitt verwenden wir Differenzengrößen, so dass die entsprechenden Beziehungen teilweise nur näherungsweise gelten. Dennoch verzichten wir darauf, statt des Gleichheitszeichens = ein Näherungszeichen \approx zu verwenden.

Schließlich wird bei der Änderung ein Zuwachs der im magnetischen Feld aufgespeicherten Energie

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \text{ um } dW_m = \frac{1}{2}I^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx. \quad (25.18)$$

gewonnenen. Da die aufgewendete Arbeit gleich der gewonnenen, Arbeit sein muss, so folgt

$$dW_2 = dW_m + dW_1, \quad (25.19)$$

oder nach Einsetzen der Ausdrücke (25.13), (25.17) und (25.18) in (25.19) ergibt sich

$$F_x = \frac{1}{2}I^2 \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (25.20)$$

Die Kraft ist also immer so gerichtet, dass sie die Induktivität zu vergrößern sucht. Sie kann berechnet werden, wenn die Abhängigkeit der Induktivität des Stromkreises von x bekannt ist. Aus der Gl. (23.17) für die Induktivität einer Doppelleitung ergibt sich z. B. sofort die Beziehung (25.4) für die zwischen den beiden Drähten wirkende Kraft.

Handelt es sich um zwei verschiedene Stromkreise 1 und 2, so lassen sich die zwischen den Stromkreisen auftretenden Kräfte durch eine ähnliche Überlegung finden. Bei der Verschiebung dx der beiden Stromkreise gegeneinander ergibt sich eine Änderung der Gegeninduktivität M , durch die einerseits die in den beiden Stromkreisen induzierten Spannungen, andererseits die Änderung der Feldenergie, Gl.(24.41), bestimmt sind. Damit folgt für die in der Richtung der Verschiebung wirkende Kraft

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (25.21)$$

Diese sucht also die Stromkreise in eine solche Lage zu bringen, dass die Gegeninduktivität möglichst groß wird.

25.3 Kräfte zwischen Stromleitern und magnetischen Stoffen

Meist lassen sich magnetische Stoffe durch äquivalente stromführende Leiter ersetzen. Als Beispiel werde der in Abb. 22.3 dargestellte Fall betrachtet. Die Anziehungskraft zwischen Leiter und Eisenplatte ist bei unendlich großer Permeabilität des Eisens als Kraft zwischen den beiden Strömen in A und A' nach Gl. (25.4)

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{2h} I^2. \quad (25.22)$$

Nach dieser Beziehung wird die Anziehungskraft um so größer, je kleiner der Abstand des Leiters von dem Eisen ist. Derartige Kräfte spielen eine Rolle bei den Wicklungsköpfen der elektrischen Maschinen, wo sie besonders im Kurzschlußfall hohe Beträge erreichen können.

25.4 Kräfte an Grenzflächen

Die an Grenzflächen ausgeübten Kräfte können wie im elektrischen Feld zurückgeführt werden auf Kräfte, mit denen sich die Feldlinien zu verkürzen und zu verbreitern suchen. Analog den Kräften im elektrischen Feld haben Längszug und Querdruck die gleiche Form wie die Dichte der aufgespeicherten Energie unter der Voraussetzung, dass die Permeabilität eine Konstante ist. Es gilt nach Gl. (24.14)

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{H}\| = \frac{1}{2} \mu \|\mathbf{H}\|^2 = \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{B}\|^2. \quad (25.23)$$

Man kann diese Beziehung durch die Betrachtung einer Ringspule ableiten, die einen Ringkern mit sehr kleinem Querschnitt A und der Feldliniellänge l enthält. Die Induktivität der Ringspule mit Ringkern liefert, ist nach Gl. (23.7)

$$L = N^2 \frac{\mu A}{l}. \quad (25.24)$$

Daraus folgt für die Kraft, die die Länge l zu vergrößern sucht, nach Gl. (25.20)

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial l} = -\frac{1}{2} N^2 \frac{\mu A}{l^2} I^2. \quad (25.25)$$

Die Kraft wirkt also in entgegengesetzter Richtung, sie sucht die Feldlinien zu verkürzen. Für die Gl. (25.25) kann man mit (23.2) und (23.3) schreiben

$$F = -\frac{1}{2} \|\mathbf{B}\| \|\mathbf{H}\| A. \quad (25.26)$$

Für die Zugspannung folgt daraus die Gl. (25.23). Dass der Querdruck der Feldlinien ebenso groß ist, ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung wie im elektrischen Feld, Abb. 14.2.

Die Kräfte können genau so berechnet werden wie im Fall des elektrischen Feldes, Abschnitt 14. Das Ergebnis ist wie dort, dass die an der Grenzfläche angreifende Kraft immer senkrecht zur Grenzfläche gerichtet ist. Die von einem Stoff mit der Permeabilität μ_2 nach einem Stoff mit der Permeabilität μ_1 hin gerichtete Zugspannung hat ganz analog wie im elektrischen Feld, Gl. (14.26), den Betrag

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) \left(H_{t1}^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1}^2 \right). \quad (25.27)$$

Handelt es sich um eine Grenzfläche zwischen Eisen ($\mu_2 = \mu_r \mu_0$) und Luft ($\mu_1 = \mu_0$) so folgt hieraus

$$\sigma_z = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r \mu_0} (B_n^2 - \mu_r B_t^2), \quad (25.28)$$

wenn B_n und B_t die Komponenten der B-Feldstärke im Luftraum bezeichnen.

Eine Anwendung der Formel (25.28) bildet die angenäherte Berechnung der Tragkraft eines Elektromagneten. Wenn der Luftspalt des Magneten so eng ist (also z. B. bei anliegendem Anker), dass der Induktionsfluss senkrecht ($B_t \approx 0$) durch die Polfläche A hindurchtritt, dann ist die Tragkraft für $\mu_r \gg 1$

$$F = \sigma_z A = \frac{1}{2} \frac{B_n^2 A}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{\mu_0 A}, \quad (25.29)$$

wobei B_n das B-Feld im Luftspalt bezeichnet („Maxwellsche Formel“).

Zahlenbeispiel: Die größten Werte des B-Feldes in Luft, die in der Elektrotechnik im allgemeinen angewendet werden, liegen bei etwa $B = 2T = 2Vs/m^2$. Daher sind die größten magnetischen Zugspannungen

$$\sigma_z = \frac{1}{2} \frac{4}{1,257 \cdot 10^{-6}} \frac{V^2 s^2 m}{m^4 H} = 1,59 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \left(= 16,2 \frac{kp}{cm^2} \right). \quad (25.30)$$

Die Gl. (25.29) wurde unter der Voraussetzung feldstärkeunabhängiger Permeabilität des Eisens abgeleitet; sie gilt jedoch mit großer Genauigkeit auch für die gekrümmten Magnetisierungskurven des Eisens, soweit die *totale Permeabilität* μ_r groß gegen 1 ist.

Ein anderer Weg zur Berechnung der an Polflächen auftretenden Kräfte geht von der magnetischen Kennlinie des magnetischen Kreises aus. In Abb. 25.4 sei der Zusammenhang zwischen dem mit der Wicklung verketteten Gesamtfluss Φ und dem Strom i in der Wicklung bei irgendeiner Stellung des Ankers durch OA dargestellt.

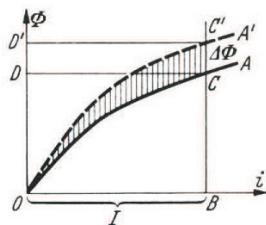


Abbildung 25.4. Zur Berechnung der Zugkraft eines Elektromagneten

Bei einer Änderung des magnetischen Flusses ergibt sich nach dem Induktionsgesetz eine Änderung der magnetischen Energie vom Betrag

$$dW_m = i \frac{d\Phi}{dt} dt = id\Phi. \quad (25.31)$$

Die Gesamtenergie hat daher bei gegebener Stromstärke i den Wert

$$W_m = \int_0^\Phi id\Phi. \quad (25.32)$$

Dieses Integral wird in Abb. 25.4 durch die Fläche OGD dargestellt:

$$W_m = \text{Fläche } OGD. \quad (25.33)$$

Nähert sich nun der Anker den Magnetpolen um ein kleines Stück Δx , so wird vom Magneten eine mechanische Arbeit

$$W_1 = F \Delta x \quad (25.34)$$

geleistet. Gleichzeitig wird Φ wegen des kleineren Luftspaltes größer, Kurve OA' . Dabei wächst die magnetische Energie auf den Betrag

$$W_m + \Delta W_m = \text{Fläche } OC'D', \quad (25.35)$$

wenn der Strom I bei der Änderung konstant gehalten wird. Aus Abb. 25.4 ist ersichtlich, dass

$$\text{Fläche } OG'D' = \text{Fläche } OCD + \text{Fläche } DD'C'C - \text{Fläche } OCC'. \quad (25.36)$$

Daher wird der Zuwachs der Energie nach Gl. (25.35) mit (25.33)

$$\Delta W_m = I \Delta \Phi - \text{Fläche } OCC'. \quad (25.37)$$

Die zur Überwindung der Selbstinduktionsspannung beim Strom I von der äußeren Stromquelle zu leistende Arbeit ist nach dem Induktionsgesetz

$$W_2 = I \Delta \Delta \Phi. \quad (25.38)$$

Nun gilt

$$W_2 = W_1 + \Delta W_m, \quad (25.39)$$

und daraus folgt durch Einsetzen

$$F \Delta x = \text{Fläche } OCC'. \quad (25.40)$$

eine Beziehung, aus der allgemein die Kraft F ermittelt werden kann.

In dem Sonderfall einer geradlinigen Magnetisierungskurve wird

$$\text{Fläche } OCC' = I \Delta \Phi, \quad \text{also} \quad F = \frac{1}{2} I \frac{\Delta \Phi}{\Delta x}. \quad (25.41)$$

In dem anderen Grenzfall einer Magnetisierungskurve, die zunächst sehr steil ansteigt und dann mit einem scharfen Knick in die Horizontale umbiegt, wird das Dreieck OCC' zu einem Rechteck, so dass in diesem Grenzfall

$$\text{Fläche } OCC' = I \Delta \Phi, \quad \text{und} \quad F = I \frac{\Delta \Phi}{\Delta x}. \quad (25.42)$$

In Wirklichkeit liegt die Zugkraft bei Elektromagneten mit Eisenkreisen zwischen diesen beiden Grenzen je nach der Krümmung der magnetischen Kennlinie des Kreises. Infolge dieser Krümmung wird also die Zugkraft von Elektromagneten größer als der unter Annahme konstanter Permeabilität berechnete Wert bis höchstens zum Doppelten dieses Wertes. Allgemein gilt

$$F = I\alpha \frac{\Delta\Phi}{\Delta x}, \quad (25.43)$$

wobei der Zahlenwert α zwischen 0,5 und 1 liegt und größer wird mit stärkerer Krümmung der magnetischen Kennlinie.

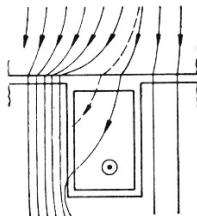


Abbildung 25.5. Kräfte im Anker eines Elektromotors

In den Nuten der elektrischen Maschinen, Abb. 25.5, ist das B-Feld wegen der hohen Eisenpermeabilität klein gegen das B-Feld in den Zähnen. Die auf die Stromleiter in den Nuten wirkenden Kräfte sind relativ gering. Die für das Drehmoment maßgebenden Triebkräfte greifen hier im wesentlichen an den Zahnflanken an.

Bei *breiten offenen Nuten* greifen die Feldlinien in die Zahnlücken ein; der Strom im Ankerleiter verursacht eine unsymmetrische Verteilung der Feldlinien wie in Abb. 25.5 angedeutet. Dadurch treten im allgemeinen nur Kräfte des Längszuges der Feldlinien an den Zahnflanken auf. In Abb. 25.5 sind diese Kräfte nach rechts gerichtet.

Bei *schmalen tiefen* und insbesondere bei *geschlossenen Nuten* können die Kräfte des Querdruckes fast allein das Drehmoment verursachen, Abb. 25.6. Denken wir uns zunächst den in der Nut liegenden Leiter stromlos, und bezeichnen wir das B-Feld des Erregerfeldes in den Zähnen mit B_0 , so gilt für das B-Feld in der als sehr schmal vorausgesetzten Nut

$$B = \frac{B_0}{\mu_r}, \quad (25.44)$$

da die Tangentialkomponente der magnetischen Erregung an den Zahnflanken stetig sein muss. Die auf den Leiter von der Länge l ausgeübte Kraft ist daher

$$F_1 = \frac{1}{\mu_r} B_0 I l, \quad (25.45)$$

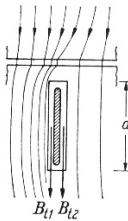


Abbildung 25.6. Kräfte des Querdrucks bei geschlossenen Nuten

wenn der Leiter von dem Strom I durchflossen wird. Sie ist um so kleiner, je größer die Permeabilität des Eisens ist. Um die Grenzflächenspannungen zu berechnen, müssen wir das wirkliche Feld betrachten, an dem auch der Ankerstrom beteiligt ist. Infolge der durch den Strom I bestimmten Durchflutung ist das B-Feld an den beiden Zahnflanken verschieden. Es gilt längs der Nutgrenzen für die Durchflutung angenähert die Beziehung

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = (H_{t_1} - H_{t_2})a = I. \quad (25.46)$$

Daher sind die Tangentialkomponenten der magnetischen Induktion an den beiden Zahnflanken

$$B_{t_1} = \frac{B_0}{\mu_r} + \frac{\mu_0 I}{2 a}, \quad (25.47)$$

$$B_{t_2} = \frac{B_0}{\mu_r} - \frac{\mu_0 I}{2 a}. \quad (25.48)$$

Die an den Zahnflanken angreifenden Flächenkräfte wirken einander entgegen; ihre Differenz ist nach Gl. (25.35)

Die am Ankereisen selbst angreifende Kraft ist also $\mu_r - 1$ mal so groß wie die auf den Leiter wirkende Kraft. Die Summe der beiden Kräfte ist

$$F = F_1 + F_2 = B_0 Il. \quad (25.49)$$

Sie hat denselben Wert, als ob sich der Leiter in dem Feld mit der Induktion B_0 befände. Dieses Ergebnis kann allgemeiner auch aus Gl. (27.59) abgeleitet werden. Im allgemeinen Fall sind Kräfte des Längszuges und des Querdruckes von Feldlinien an den Zahnflanken am Drehmoment beteiligt, immer sind aber die Leiter selbst infolge der hohen Eisenpermeabilität stark entlastet.

Teil VI

Das quasistationäre elektromagnetische Feld

26

Grundgleichungen des quasistationären Feldes

26.1 Elektrisches und magnetisches Feld

Bei den bisherigen Überlegungen wurden auf der Basis der Experimente von Coulomb sowie von Ørsted, Biot, Savart, Ampere und Laplace das elektrische und magnetische Feld als separate physikalische Systeme eingeführt. Lediglich die Tatsache, dass bewegte elektrische Ladungen – elektrische Ströme – in ihrer Umgebung eine magnetische Erregung erzeugen, die durch das H-Feld charakterisiert wird, gab Hinweise auf einen Zusammenhang des elektrischen und magnetischen Feldes. Im folgenden wollen wir zeigen, dass es weitere Hinweise auf einen solchen Zusammenhang gibt. Dazu betrachten wir wieder einmal die Mechanik des geladenen Probekörpers.

Wir nehmen an, dass wir durch geeignete Experimente mit einem bewegten geladenen Probekörper in einem hinreichend ausgedehnten Raumgebiet konstante magnetische Kraftwirkungen festgestellt haben, die wir durch ein konstantes B-Feld charakterisieren. Diese Eigenschaft lässt sich nach Abschnitt 19.1 zumindest im Prinzip sicherstellen, indem man einen bezüglich eines willkürlich gewählten (Labor-)Koordinatensystems geladenen Probekörper mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit versieht und dessen Bewegung beobachtet. Die Bahn sollte spiralförmig oder kreisförmig verlaufen, da der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleibt. Nach Gl. (18.21) sind diese Bahnen bei konstantem B-Feld (bezüglich des gewählten Koordinatensystems) Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.1)$$

Die Probeladung wird beschleunigt.

Nun betrachten wir eine ruhende Ladung Q bezüglich des gewählten Koordinatensystems. Die massebehaftete Ladung Q erfährt keine Beschleunigung, d.h. es gilt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}. \quad (26.2)$$

Wählen wir nun ein Koordinatensystem, dass sich relativ zu dem Laborsystem mit der konstanten Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ gleichförmig bewegt (beispielsweise in Richtung der x -Koordinate), dann gibt es im Sinne der Mechanik keinen Grund, dass die Beschleunigung einen von null verschiedenen Wert annimmt. Offensichtlich ist das ein Widerspruch mit den zuvor angesprochenen Experimenten, bei denen bei der dort vorgenommenen „aktiven“ Änderung der Geschwindigkeit des Probekörper eine Beschleunigung im Sinne von Gl.(26.1) auftritt. Dieses Paradoxon, das z. B. bei Falk und Ruppel [76] beschrieben wird, kann offensichtlich mit den bisherigen feldtheoretischen Konzepten nicht befriedigend aufgelöst werden. Später wird gezeigt, dass erst die experimentellen Befunde der Induktionserscheinung und deren mathematische Beschreibung durch das Induktionsgesetz das soeben diskutierte Paradoxon zumindest für kleine Relativgeschwindigkeiten \mathbf{v} auflösen kann. Eine vollständige Lösung gelingt jedoch erst im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie.

26.2 Das Induktionsgesetz

In Faradays Notizbuch findet sich bereits im Jahre 1822 eine Bemerkung, die Ausgangspunkt für eine fast zehnjährige Forschungstätigkeit gewesen ist

Convert Magnetism to Electricity;

vgl. z. B. Simonyi [262]. Eine prinzipiell geeignete Versuchsanordnung zur Erreichung dieses Ziels hatte er, wie das Labortagebuch zeigt, bereits 1825 und 1828 aufgebaut, aber die Meßempfindlichkeit war zu gering. Endlich entdeckte er am 29. August 1831 mit einer Anordnung, die wir heute einfach als Transformatormodell bezeichnen, den lange gesuchten Effekt, den wir als *elektromagnetische Induktion* bezeichnen.

Wir wollen nun einen Einblick in die energetischen Verhältnisse im Zusammenhang mit Induktionsvorgängen gewinnen, wobei wir uns auf Überlegungen von Weizel [300] stützen. Dazu betrachten wir n geschlossene fadenförmige Stromkreise beliebiger Form, in denen jeweils ein konstanter Strom I_k ($k = 1, \dots, n$) fließt. Die zugehörige magnetische Energie kann nach Gl.(24.17) notiert werden zu

$$E_{magn} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Phi_k. \quad (26.3)$$

Die Leiter werden als drahtförmig angenommen, so dass man den magnetischen Fluss Φ_k durch die Leiterflächen mit den Berandungen \mathcal{C}_k mit Hilfe des Vektorpotenzials \mathbf{A} , welches das Magnetfeld beschreibt, bestimmen kann

$$\Phi_k = \oint_{\mathcal{C}_k} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{s}}; \quad (26.4)$$

man erhält somit nach Gl.(24.17)

$$E_{magn} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \oint_{C_k} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{s}}. \quad (26.5)$$

Nun wird angenommen, dass sich die Stromkreise gegeneinander bewegen, wobei keine Deformation der Geometrie der Stromkreise auftreten soll und die Ströme I_k weiterhin konstant sein sollen. Demnach muss neben der magnetischen Energie auch die mechanische Bewegungsenergie berücksichtigt werden. Weiterhin nehmen wir an, dass es sich bei den Stromkreisen um reale Leiter handelt und somit Joulesche Wärmeleistung auftritt und daher ein *thermisches Bad* angekoppelt werden muss. Da die Anordnung ladungsneutral ist und offensichtlich auch die mechanischen Änderungen bleibt, braucht die elektrische Energie (im Sinne der Elektrostatik) nicht berücksichtigt werden. Im folgenden soll die zugehörige Leistungsbilanz für kleine Änderungen der Leistungen formuliert werden, wodurch sich auch das zugehörige abgeschlossene physikalische System definiert. Es gilt

$$\Delta E_{magn} + \Delta E_{mech} + \Delta E_{therm} = 0. \quad (26.6)$$

Es werden nur kleine Änderungen der Energie betrachtet, so dass auch mit den Differentialen gearbeitet werden kann.

Die zeitliche Änderung der magnetischen Energie lässt sich auf der Grundlage von Gl.(26.5) ermitteln

$$\frac{dE_{magn}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \oint_{C_k} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\tilde{\mathbf{r}}, t) \cdot d\tilde{\mathbf{s}}. \quad (26.7)$$

Man kann zeigen (siehe Weizel [300]), dass die nach außen abgegebene mechanische Arbeit ΔE_{mech} ebenso groß ist und *gleiches* Vorzeichen besitzt, so dass dem System insgesamt entweder die Leistung

$$\sum_{k=1}^n I_k \oint_{C_k} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\tilde{\mathbf{r}}, t) \cdot d\tilde{\mathbf{s}} \quad (26.8)$$

zugeführt werden muss oder sie kann an irgendeiner Stelle im Gesamtsystem eingespart werden.

In der Energiebilanz (26.6), die auch als Leistungsbilanz bezogen auf ΔT formuliert werden kann, hatten wir bereits die Wärmeleistung berücksichtigt, wobei die Beschränkung auf die mechanische und magnetische Leistung sowie die Wärmeleistung eine gewisse Willkür beinhaltet. Sie ist für unsere Überlegungen wesentlich und kann nur durch die Erfahrung gerechtfertigt werden. Ansonsten würde sich das als Ergebnis folgende Induktionsgesetz ableiten lassen, ohne experimentelle Tatsachen zu berücksichtigen, was den Grundprinzipien physikalischer Modellbildung widersprechen würde. Man hätte jedoch das Induktionsgesetz „erraten“ können.

Wenn wir davon ausgehend, dass die Ströme I_k in den geschlossenen Stromkreisen von einem E-Feld \mathbf{E} getrieben werden, das in Richtung des Wegelementes $d\mathbf{s}$ des jeweiligen Leiters orientiert ist. Nach Joule (vgl. Abschnitt 15) entsteht in dem gesamten Leitersystem eine Wärmeleistung von

$$\sum_{k=1}^n I_k \oint_{C_k} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{s}}. \quad (26.9)$$

Wir nehmen nach Gl. (26.6) an, dass für die Energie- bzw. Leistungsanteile ein Erhaltungssatz gilt und der mechanische und magnetische Energiebedarf, der sich aufgrund des bewegten und stromdurchflossenen Leitersystems ergibt, nur durch Einsparung von Wärmeleistung gedeckt werden kann. An dieser Stelle ist die Beschränkung auf die genannten Arten von Energieformen wesentlich.

Es stellt sich nun die Frage, wie diese Einsparung vorgenommen werden kann. Eine willkürliche, aber im Rahmen der voranstehenden Überlegungen naheliegende Möglichkeit besteht in der Annahme eines elektrischen Feldes $\hat{\mathbf{E}}$, das dem elektrischen Feld \mathbf{E} , welches die Ströme in den Leitern treibt, entgegengerichtet ist. Die Annahme, dass die Ströme weiterhin konstant bleiben, liefert eine Bedingung für das „induzierte“ elektrische Feld $\hat{\mathbf{E}}$. Um die Leistungsbilanz erfüllen zu können, müssen sich die Änderungen der mechanischen und der magnetischen Leistung, die in Gl. (26.8) zusammengefasst sind, mit der auf $\hat{\mathbf{E}}$ bezogenen Jouleschen Wärmeleistung zu null addieren. Daraus erhält man die Bedingungsgleichung für $\hat{\mathbf{E}}$

$$\sum_{k=1}^n I_k \oint_{C_k} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\tilde{\mathbf{r}}, t) + \hat{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{r}}, t) \right) \cdot d\tilde{\mathbf{s}} = 0. \quad (26.10)$$

Die Frage, wie die Energie für die Wärmeentwicklung überhaupt in das Leitervolumen kommt, kann hier allerdings nicht behandelt werden. Dazu verweisen wir auf den Abschnitt 29 über Felddiffusion und Wirbelströme.

Die Bedingungsgleichung (26.10) soll nun für alle Leitergeometrien und alle möglichen Bewegungen der Leiter gelten, so dass der Integrand verschwinden muss; man erhält

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (26.11)$$

Wenn wir annehmen, dass $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ auch für zeitabhängige magnetische Felder gilt, dann ergibt sich schließlich

$$\text{rot} \hat{\mathbf{E}} = -\text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (26.12)$$

Im Gegensatz zum E-Feld der Elektrostatik ist dieses „elektrische Gegenfeld“ nicht rotationsfrei. Nach Weizel lässt sich das Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen: *Wird das magnetische Feld durch gegenseitige Veränderung der Lage der Stromkreise variiert, so addiert sich dem E-Feld \mathbf{E} , das den Leiterstrom treibt, ein zusätzliches E-Feld $\hat{\mathbf{E}}$, das zur Reduktion der Jouleschen*

Wärme führt. Die Rotation von $\hat{\mathbf{E}}$ ist gerade die (negative) zeitliche Ableitung des B -Feldes \mathbf{B} und die Divergenz von $\hat{\mathbf{E}}$ ist ebenso wie \mathbf{A} gleich null.

Wir machen jetzt die naheliegende Annahme, dass dasselbe zusätzliche E -Feld auch dann auftritt, wenn \mathbf{B} auf irgendeine Weise zeitlich geändert wird. Dies bedeutet, dass folgende Beziehungen auch in diesen allgemeineren Fällen gelten

$$\text{rot} \hat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \hat{\mathbf{E}} = 0. \quad (26.13)$$

Im Sinne der zitierten Aussage von Weizel [300] besteht das E -Feld in der quasistationären Theorie elektromagnetischer Felder aus dem in der Elektrostatik eingeführten rotationsfreien Anteil $\mathbf{E}_{rotf} := \mathbf{E}_{stat} = -\text{grad}\varphi$ und dem in (26.11) eingeführten divergenzfreien Term $\mathbf{E}_{divf} := \hat{\mathbf{E}} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$. Insgesamt ergibt sich somit das E -Feld zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{rotf} + \mathbf{E}_{divf} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (26.14)$$

Wir werden sehen, dass diese Annahme zu Folgerungen führt, die sich experimentell ausnahmslos bestätigen lassen. Insbesondere kann damit das von Faraday entdeckte und am Anfang des Abschnitts diskutierte Phänomen der *Induktion* mathematisch beschrieben werden.

Es soll noch einmal betont werden, dass Weizels Betrachtungen nicht als Ableitung des Induktionsgesetzes missverstanden werden darf, obwohl mit dem Energiesatz eine zentrale experimentelle Erfahrung der Physik zugrundegelegt wird. Dazu ist die diskutierte Anordnung nicht universell genug. Allerdings lässt sich auf diese Weise besser erkennen, dass ein Zusammenspiel scheinbar unterschiedlicher Gebiete der Physik notwendig ist, um bestimmte physikalische Effekte – in diesem Fall das Phänomen der Induktion – befriedigend zu erklären. Letztlich kann man auf diese Weise vielleicht auch verstehen, warum in der Physik die Suche nach einer einheitlichen theoretischen Basis für das gesamte physikalische Geschehen immer wieder unternommen wird.

26.3 Die Grundgleichungen mit Induktionsgesetz

Die der Elektrostatik, dem elektrischen Strömungsfeld und dem stationären Magnetfeld zugrunde liegenden Phänomene führen zu einem System von algebraischen Gleichungen und partiellen Differentialgleichungen der Form

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad (26.15)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (26.16)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (26.17)$$

Nunmehr kommt das Induktionsgesetz dazu und das Gleichungssystem muss erweitert werden ($\partial(\cdot) / \partial t = (\cdot)$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad (26.18)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (26.19)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (26.20)$$

Daraus folgt, dass sämtliche mathematischen Felder grundsätzlich zeitabhängig sind. Wir werden später sehen, dass der hinzugefügte Term $-\dot{\mathbf{B}}$ ganz erhebliche Auswirkungen auf die Lösungstypen des Gleichungssystems hat. Eine eingehende Betrachtung soll jedoch wieder auf der Ebene der Potenziale φ und \mathbf{A} stattfinden.

Bisher konnten das E- und das D-Feld bzw. das B- und das H-Feld mathematisch weitgehend getrennt betrachtet werden. Im Sinne der Modellbildung gilt diese Unabhängigkeit nur für das modellhafte Geschehen. Das Induktionsgesetz führt nunmehr zu einer Kopplung von E- und B-Feld, so dass wir von nun an alle bisher eingeführten mathematischen Felder als verschiedene Ausprägungen eines umfassenden physikalischen Feldes interpretieren müssen. In diesem Sinne müssen wir nun auch Faradays Ergebnis sehen. Das Gleichungssystem (26.18)-(26.20) beschreibt dieses physikalische Feld in diesem Hauptabschnitt in quasistationärer Näherung und wir werden es als *elektromagnetisches Feld* bezeichnen,

Alternativ zur differentiellen Form der Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes in quasistationärer Näherung kann auch eine integrale Form angegeben werden, auf die wir bereits in den vorangegangenen Abschnitten näher eingegangen sind. Wir wollen diese Gleichungen noch einmal zusammenstellen, wobei sich die Materialgleichungen natürlich nicht ändern. Die integrale Form der Beziehungen in (26.18) lassen sich wie in (6.13) und (6.14) sehr leicht mit dem Stokesschen bzw. Gaußschen Integralsatz herleiten

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{\mathcal{V}} \varrho dV = Q, \quad (26.21)$$

während sich die integrale Form der Beziehungen in (26.19) mit (21.2), wobei die Definition des magnetischen Flusses Φ nach (18.27) genutzt wird

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = I, \quad \iint_{\mathcal{O}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (26.22)$$

Im Gegensatz zur Elektrostatik – vgl. Gl. (6.13) – verschwindet das Linienintegral über einen geschlossenen Weg \mathcal{C} in der ersten Gl. (26.21) jedoch nicht. Vielmehr muss das Linienintegral über das E-Feld, das nach (26.14) auch einen divergenzfreien Anteil besitzt, als Induktionsspannung

$$u_i := \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (26.23)$$

gedeutet werden. Somit folgt aus (26.21) die bekannte integrale Form des Induktionsgesetzes

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (26.24)$$

26.4 Das Induktionsgesetz und die Kontinuitätsgleichung

In Abschnitt 26.3 wurden die Grundgleichungen mit Induktionsgesetz formuliert. Sie lauten

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad (26.25)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (26.26)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (26.27)$$

Dabei handelte es sich um eine Erweiterung der Beschreibungsgleichungen des elektromagnetischen Feldes, die aufgrund des im Jahre 1831 von Faraday entdeckten Induktionseffekts notwendig geworden sind. Es fragt sich nun, ob diese Gleichungen abgeschlossen sind, d.h. ob sie sämtlichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten genügen, die im Zusammenhang mit quasistationären Erscheinungen benötigt werden. Die Ladungserhaltung und damit die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad (26.28)$$

ist eine solche fundamentale Gesetzmäßigkeit, die bereits im Zusammenhang mit dem stationären elektrischen Strömungsfeld diskutiert wurde. Im folgenden benötigen wir auch die integrale Form der Kontinuitätsgleichung

$$\oint_{\mathcal{O}} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} + \frac{dQ(t)}{dt} = 0, \quad Q(t) := \iiint_V \varrho(\mathbf{r}, t) dV \quad (26.29)$$

die man mit Hilfe des Gaußschen Satzes bestimmen kann. Ihre Gültigkeit ist weit über den Rahmen der klassischen Theorie des elektromagnetischen Feldes experimentell niemals widerlegt worden. Im Gegensatz zum stationären Strömungsfeld kann jedoch die Ladungsdichte ϱ zeitabhängig sein, so dass im quasistationären Feld die vollständige Kontinuitätsgleichung auftritt.

Betrachten wir nun das *Durchflutungsgesetz* $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$, dann lässt sich mit Hilfe der bekannten Operatoridentität der Vektoranalysis $\operatorname{div}(\cdot) \operatorname{rot}(\cdot) = 0$ eine Inkonsistenz mit der Kontinuitätsgleichung konstruieren. Wendet man den Divergenz-Operator auf das Durchflutungsgesetz an, dann erhält man nämlich

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \neq 0; \quad (26.30)$$

dem Durchflutungsgesetz unterliegt offensichtlich das stationäre Strömungsfeld mit $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$.

Die angesprochene Inkonsistenz ist im Fall einer zeitlich veränderlichen Ladungsdichte $\varrho(t)$ vom mathematischen Standpunkt aus gesehen evident. Der physikalische Sachverhalt soll nun anhand einer einfachen elektrischen Anordnung – eines Plattenkondensators in Abb. 26.1 – illustriert werden; vgl. z. B. Bosse [38]. Dazu wird die auf eine willkürliche Fläche A bezogene Stromdichte \mathbf{J} und damit der entsprechende Strom i berechnet, den wir als

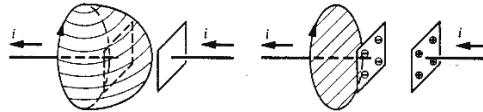


Abbildung 26.1. Plattenkondensatz und Verschiebungsstrom (aus Bosse [38])

zeitabhängig annehmen. Eine solche Zeitabhängigkeit des Stromes $i(t)$ kann beim Aufladevorgang eines Kondensators beobachtet werden. Der Strom i durch die symmetrisch um den Leiter platzierte kreisförmige Fläche A in Abb. 26.1 (rechts) lässt sich nach Definition des Strom (vgl. Abschnitt 15, Gl.(15.2)) wie folgt ermitteln

$$i(t) = \iint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}, \quad (26.31)$$

wobei die Stromdichte \mathbf{J} nun zeitabhängig ist. Legt man das stationäre Strömungsfeld zugrunde, dann sollte sich der Integralwert $i(t)$ nicht ändern, wenn man eine andere Fläche mit gleichem Rand verwendet. Das ist offensichtlich nicht richtig, da der Integralwert verschwindet, wenn man die in Abb. 26.1 (links) gezeigte Fläche verwendet, da sie nicht von einer elektrischen Stromdichte durchsetzt ist. Die Kontinuitätsgleichung (26.29) zeigt, dass sich die Ladung auf der entsprechenden Platte des Kondensators verändern muss und $\operatorname{div} \mathbf{J}$ nicht mehr null sein kann.

Um diesen physikalischen Sachverhalt im Durchflutungsgesetz unterzu bringen, wird ein zusätzlicher Term benötigt. Da sich auf den Platten des Kondensators die Ladung und somit zwischen den Platten das elektrische Feld zeitlich ändert, ist es naheliegend, diesem Term – unter der Voraussetzung eines linearen Materialgesetzes – als proportional zur Zeitableitung des E-Feldes anzunehmen; man erhält

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \alpha \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (26.32)$$

Wendet man wiederum den Divergenz-Operator auf diese Gleichung an, wobei das E-Feld im Sinne des Helmholtzschen Satzes zerlegt wird, dann ergibt sich

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\partial (\mathbf{E}_{divf} + \mathbf{E}_{rotf} + \mathbf{E}_{konst})}{\partial t} \right). \quad (26.33)$$

Offensichtlich ist der einzige Term, der zu einer nichttrivialen Modifikation des Durchflutungsgesetzes führt, die zeitliche Ableitung des rotationsfreien Anteils des E-Feldes. Nach Vergleich dieser Beziehung mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich $\alpha = \varepsilon$. Das modifizierte Durchflutungsgesetz lautet somit

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{rotf}}{\partial t} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}_{rotf}}{\partial t} \quad (26.34)$$

mit $\mathbf{D}_{rotf} := \varepsilon \mathbf{E}_{rotf}$.

26.5 Die Grundgleichungen des quasistationären elektromagnetischen Feldes

Nachdem wir im letzten Abschnitt das Durchflutungsgesetz soweit modifiziert haben, dass die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung garantiert wird, sollen nunmehr die allgemeinen Grundgleichungen des quasistationären elektromagnetischen Feldes zusammengestellt werden. Ausgangspunkt sind die in Abschnitt 26.3 notierten vorläufigen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes in quasistationärer Näherung. Danach sollen die Zustandsgleichungen im Rahmen dieser Näherung des elektromagnetischen Feldes abgeleitet werden, aus denen sich sämtlichen anderen Feldgrößen ableiten lassen.

Bezieht man in die im letzten Abschnitt aufgeführten Gleichungen (26.18) - (26.20) das modifizierte Durchflutungsgesetz ein, dann erhalten wir

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad (26.35)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}_{rotf}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (26.36)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (26.37)$$

Diese Gleichungen entsprechen hinsichtlich ihrer Struktur den vollständigen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes nach Maxwell. Im Gegensatz zu den Maxwellschen Gleichungen enthält das verallgemeinerte Durchflutungsgesetz der quasistationären elektromagnetischen Gleichungen nur den rotationsfreien Anteil des D-Feldes. Im Jahre 1864 formulierte Maxwell die vollständigen Gleichungen für das elektromagnetische Feld erstmals. Die in ihrem Gültigkeitsbereich eingeschränkten quasistationären Gleichungen waren in ihrem physikalischen Gehalt schon vor Maxwell bekannt (vgl. die Ergebnisse zur Elektrodynamik von Weber, Gauß, und F. Neumann in der Weber-Biographie von Wiederkehr [302]), aber eine explizite Formulierung wurde erst in den Jahren 1875-77 von Clausius¹ vorgelegt. Wir können damit auch von den Clausius-Gleichungen für das quasistationäre elektromagnetische Feld sprechen.

Nachdem wir die quasistationären Feldgleichungen kennengelernt haben, wollen wir uns mit den reduzierten Feldgleichungen oder Zustandsgleichungen des elektromagnetischen Feldes befassen. Dazu beschränken wir uns auf lineare Materialgleichungen, so dass das D- und das H-Feld sowie die Stromdichte \mathbf{J} eliminiert werden können. Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (26.38)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu \kappa \mathbf{E} + \mu \varepsilon \dot{\mathbf{E}}_{rotf}, \quad (26.39)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = \varrho / \varepsilon, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (26.40)$$

¹ Diesen Hinweis verdankt einer von uns (W.M.) dem ehemaligen Betreuer seiner theoretisch-physikalischen Diplomarbeit, Herrn Prof. Dr. rer. nat. Gerhard Gerlich, TU Braunschweig

wobei ϱ von der Zeit t abhängen kann.

Wird der Rotationsoperator $\text{rot}(\cdot)$ auf das verallgemeinerte Durchflutungsgesetz (26.39) angewendet, dann ergibt sich daraus die Beziehung

$$\text{rot rot} \mathbf{B} = \mu\kappa \text{rot} \mathbf{E} = -\mu\kappa \dot{\mathbf{B}}, \quad (26.41)$$

wenn man das Induktionsgesetz und die Beziehung $\text{rot} \mathbf{E}_{rotf} = \mathbf{0}$ benutzt. Wird schließlich die Operatoridentität $\text{rot}(\cdot)\text{rot}(\cdot) = \text{grad}(\cdot)\text{div}(\cdot) - \Delta(\cdot)$ und die Divergenzfreiheit von \mathbf{B} genutzt, so erhält man

$$\Delta \mathbf{B} = +\mu\kappa \dot{\mathbf{B}}. \quad (26.42)$$

Es handelt sich um eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung vom Typ einer Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung im vektoriellen Fall.

Wird der Rotationsoperator auf das Induktionsgesetz in Gl. (26.38) angewendet und setzt man das verallgemeinerte Durchflutungsgesetz in diese Gleichung ein, dann ergibt sich

$$\text{rot rot} \mathbf{E} = -\mu\kappa \dot{\mathbf{E}} - \mu\varepsilon \ddot{\mathbf{E}}_{rotf}. \quad (26.43)$$

Um diese Differentialgleichung interpretieren zu können, wird die Operatoridentität $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ benutzt, so dass man die folgende Beziehung erhält

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\kappa \dot{\mathbf{E}} = \text{grad div} \mathbf{E} + \mu\varepsilon \ddot{\mathbf{E}}_{rotf}. \quad (26.44)$$

Da auf der rechten Seite dieser partiellen Differentialgleichungen ein Quellterm (wenn man $\text{div} \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon$ einsetzt) und eine zweite Zeitableitung auftritt, handelt es sich bei dieser Gleichung für das E-Feld um eine inhomogene Wärmeleitungsgleichung, da $\ddot{\mathbf{E}}_{rotf}$ mit Hilfe einer separaten Gleichung bestimmt werden kann. Dazu ermitteln wir die Bestimmungsgleichungen für das skalare elektrische Potenzial φ und das Vektorpotenzial \mathbf{A} .

Wir setzen den Ansatz $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ in das Induktionsgesetz $\text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ ein und erhalten $\text{rot}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}$. Daraus folgt die bereits in Gl. (26.14) formulierte Darstellung des E-Feldes

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \dot{\mathbf{A}}, \quad (26.45)$$

wenn man wie in der Elektrostatik $-\text{grad} \varphi$ für das Feld ansetzt, auf das der Rotationsoperator angewendet wird. Im Gegensatz zur Theorie des stationären Magnetfeldes soll die Divergenz des Vektorpotenzials in der quasistationären Theorie des elektromagnetischen Feldes nicht null gesetzt werden (Coulomb-Eichung), sondern wir wählen nach Wunsch und Schulz ([310], S. 282ff) die Eichbedingung $\text{div} \mathbf{A} = -\mu\kappa \varphi$. Wenden wir den Divergenzoperator auf Gl.(26.45) an, dann folgt

$$\text{div} \mathbf{E} = -\text{div} \text{grad} \varphi - \text{div} \dot{\mathbf{A}} = -\Delta \varphi + \mu\kappa \dot{\varphi} = \varrho/\varepsilon. \quad (26.46)$$

Das elektrische Potenzial φ erfüllt also in der verwendeten Eichung eine inhomogene Diffusionsgleichung.

Wenden wir den Gradient-Operator auf Gl. (26.46) an und beachten, dass sich nach Anhang A.1 der Laplace-Operator Δ und der Gradient-Operator grad in der Reihenfolge der Anwendung vertauschen lassen, dann ergibt sich mit $\mathbf{E}_{rotf} = -\text{grad}\varphi$ aus (26.14)

$$\text{grad div}\mathbf{E} = \Delta\mathbf{E}_{rotf} - \mu\kappa \dot{\mathbf{E}}_{rotf}. \quad (26.47)$$

Setzen wir nun $\text{graddiv}\mathbf{E}$ aus Gl. (26.46) in Gl. (26.44) ein, so ergibt sich nach kurzer Rechnung die inhomogene Diffusionsgleichung für \mathbf{E}_{divf}

$$\Delta\mathbf{E}_{divf} - \mu\kappa \dot{\mathbf{E}}_{divf} = \mu\varepsilon \ddot{\mathbf{E}}_{rotf} = \mu\varepsilon \text{grad}\ddot{\varphi}. \quad (26.48)$$

Die Inhomogenität wird zuvor mit der inhomogenen Diffusionsgleichung (26.46) für φ ermittelt. Wird die Coulomb-Eichung verwendet, reduziert sich die Gl. (26.46) zu einer Poissons-Gleichung, wobei die Ladungsdichte ϱ von der Zeit abhängen kann.

Bezüglich des Vektorpotenzials \mathbf{A} ist die Vorgehensweise sehr einfach. Wir setzen die Beziehung $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ in Gl. (26.42) ein und erhalten

$$\Delta\text{rot}\mathbf{A} = +\mu\kappa \text{rot}\dot{\mathbf{A}}. \quad (26.49)$$

Nutzen wir die Eigenschaft der Vertauschbarkeit der Operatoren Δ und rot (siehe Anhang A.1), dann ergibt sich

$$\text{rot}(\Delta\mathbf{A} - \mu\kappa \dot{\mathbf{A}}) = \mathbf{0}. \quad (26.50)$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn das Vektorpotenzial Lösung der folgenden vektoriellen Diffusionsgleichung ist

$$\Delta\mathbf{A} - \mu\kappa \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}. \quad (26.51)$$

Ist eine Lösung dieser Gleichung bekannt, dann lassen sich das B-Feld und der divergenzfreie Anteil des E-Feldes durch Anwendung des Rotationsoperators ermitteln

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E}_{divf} = \frac{1}{\mu\kappa} \text{rot}\text{rot}\mathbf{A}. \quad (26.52)$$

Damit wird das elektrische Potenzial φ offensichtlich nicht gebraucht. Die zweite Beziehung ergibt sich direkt aus dem verallgemeinerten Durchflutungsgesetz (26.39). Der Übergang zu den Potenzialen hat demnach hinsichtlich des in der Theorie des quasistationären Feldes zu lösenden mathematischen Grundproblems scheinbar keine besonderen Vorteile. In jedem Fall hat man es mit der Lösung einer partiellen Differentialgleichung vom Diffusionstyp zu tun, auf die wir in Abschnitt 28 näher eingehen. Man sollte aber beachten, dass die Diffusionsgleichungen für \mathbf{B} und \mathbf{E} (einschließlich der Divergenzbedingungen) nur hinreichend dafür sind, dass die Lösungen dieser Gleichungen auch Lösungen der Maxwellschen Gleichungen für das quasistationäre elektromagnetische Feld sind. Im Gegensatz dazu führen die Potenzialgleichungen für

φ und \mathbf{A} immer zu Lösungen der quasistationären Maxwellschen Gleichungen; vgl. auch Wunsch und Schulz ([310], S. 282ff).

Weiterhin soll auch an dieser Stelle betont werden, dass die Diffusionsgleichung des Vektorpotenzials (26.51) im Sinne der Systemtheorie (siehe Abschnitt 2) als Zustandsgleichungen interpretiert werden kann und das die zugehörigen Beobachtungsgleichungen die Beziehungen (26.52) sind. In diesem Sinne kann man die Zustandsgleichung und die beiden Beobachtungsgleichungen für das quasistationäre elektromagnetische Feld in folgender Weise formulieren:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{\mu\kappa} \Delta \mathbf{A}, \quad (26.53)$$

$$\mathbf{E}_{divf} = \frac{1}{\mu\kappa} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (26.54)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (26.55)$$

Dabei ist zu beachten, dass Eingangsgrößen typischerweise über die Randbedingungen von (26.53) auf das System einwirken.

Elementare Betrachtungen zur Induktionswirkung

Bewegt man einen Leiter durch ein magnetisches Feld, so werden auch die Leitungselektronen im Inneren des Leiters mitgeführt. Die Elektronen erfahren daher Kräfte senkrecht zur Bewegungsrichtung des Leiters und zur Feldlinienrichtung des Magnetfeldes. Wird z.B. ein Kupferstab, Abb. 27.1, mit der Geschwindigkeit v durch ein magnetisches Feld senkrecht zum B-Feld \mathbf{B} bewegt, so wirken die magnetischen Feldkräfte auf die Elektronen entgegengesetzt zu der durch den Pfeil gekennzeichneten Richtung. Dadurch tritt an dem einen Stabende ein Überschuss, am anderen ein Mangel an Elektronen auf. Auf der Leiteroberfläche entsteht eine entsprechende Ladungsverteilung. Längs des Stabes stellt sich ein Potenzialgefälle ein, das die Elektronen in der Pfeilrichtung zu bewegen sucht. Im Gleichgewichtszustand halten sich die mit dem Potenzialgefälle verbundenen elektrischen Feldkräfte den magnetischen Feldkräften die Waage. Das resultierende E-Feld im Leiter und an seiner Oberfläche ist Null. Die auf die Leitungselektronen beim Bewegen des Leiters

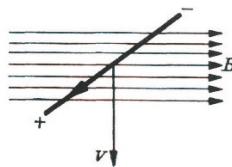


Abbildung 27.1. Induktionswirkung in einem bewegten Stab

einwirkenden magnetischen Feldkräfte lassen sich durch die Wirkung eines E-Feldes \mathbf{E}_i ersetzen; dieses Feld hat die Richtung wie der Strompfeil in Abb. 27.1 und kann auf folgende Weise berechnet werden.

Auf irgendeine Ladung Q wird durch das E-Feld \mathbf{E}_i nach Abschnitt 6 eine Kraft ausgeübt:

$$\mathbf{F}_1 = Q \mathbf{E}_i. \quad (27.1)$$

Die magnetische Feldkraft ist nach Gl.(19.1)

$$\mathbf{F}_2 = Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (27.2)$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (27.3)$$

Die ist eine spezielle Form des *Induktionsgesetzes*; weiter unten wird daraus die allgemeine Form Gl.(27.25) abgeleitet. Das E-Feld \mathbf{E}_i wird auch *induziertes E-Feld* genannt; sie ist senkrecht zum magnetischen B-Feld und zur Bewegung gerichtet. Besteht der bewegte Körper aus einem elektrischen Leiter, so bewegen sich die elektrischen Ladungen unter der Einwirkung des E-Feldes \mathbf{E}_i solange, bis das dadurch erzeugte Gegenfeld das E-Feld \mathbf{E}_i im Inneren des Leiters gerade kompensiert. Ist der bewegte Körper ein Nichtleiter, so ergibt sich eine Polarisation wie in einem elektrischen Feld mit dem E-Feld \mathbf{E}_i (siehe dazu Abschnitt 30).

Bei einem stabförmigen Leiter wie in Abb. 27.1 erhält man durch Multiplikation der Länge des Stabes mit der in die Stabrichtung fallende Komponente des E-Feldes \mathbf{E}_i eine Spannung. Diese Spannung wirkt wie die Leerlaufspannung einer Spannungsquelle, wenn der Leiter außerhalb des Feldes zu einem geschlossenen Stromkreis ergänzt wird. In einem solchen Stromkreis fließt der Strom außen von dem mit + bezeichneten zu dem mit - bezeichneten Stabende, innerhalb des Stabes von dem Minusende zum Plusende, wie bei einer in dem Stab wirkenden Quellenspannung. Wird mit l die in das Feld eintauchende Länge des Stabes bezeichnet und der entsprechende Längenvektor \mathbf{l} des Stabes eingeführt, so ist für die *induzierte Quellenspannung*

$$U_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}. \quad (27.4)$$

Die Gl.(27.4) gilt auch, wenn sich die Geschwindigkeit \mathbf{v} zeitlich ändert; es ändert sich dann auch die induzierte Quellenspannung, und in jedem Zeitpunkt gilt für den Augenblickswert der induzierten Quellenspannung

$$u_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}. \quad (27.5)$$

Schneidet ein Stab mit der Länge l die B-Feldlinien senkrecht, und wird er senkrecht zu sich selbst bewegt wie in Abb. 27.1, so ergibt sich hieraus im besonderen

$$u_i = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{B}\| l. \quad (27.6)$$

Ist das magnetische Feld nicht homogen oder die Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des Stabes nicht die gleiche, so gilt die Beziehung (27.5) für jeden kleinen Abschnitt von der Länge ds des Stabes, Abb. 27.2:

$$du_i = \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (27.7)$$

die in einem drahtförmigen Leiter induzierte Quellenspannung ist daher allgemein

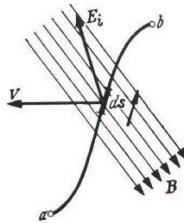


Abbildung 27.2. B-Feld in einem Draht beliebiger Form

$$u_i = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}. \quad (27.8)$$

Die gleichen Gesetze gelten auch für räumlich beliebig ausgedehnte Leiter.

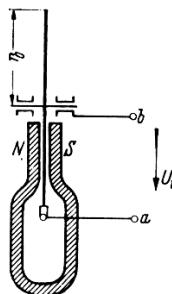


Abbildung 27.3. Induktion in einer Bremsscheibe

Wird z.B. eine Blechscheibe zwischen den beiden Polen eines Magneten gedreht, Abb. 27.3, so erfahren die Elektronen eine Ablenkung in radialer Richtung. Es tritt eine Spannung zwischen der Achse und dem Rand der Blechscheibe auf. Da die Bewegungsrichtung senkrecht auf der Feldlinienrichtung steht, so gilt hier für die in einem Abschnitt dr des Radius induzierte Spannung nach Gl.(27.7)

$$du_i = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{B}\| dr = 2\pi n \|\mathbf{B}\| r dr, \quad (27.9)$$

wenn n die Drehfrequenz bezeichnet. Kann das magnetische Feld auf der ganzen Scheibe als homogen angesehen werden, so ist die zwischen Rand und Achse auftretende Quellenspannung

$$U_i = 2\pi n \|\mathbf{B}\| \int_0^{r_0} r dr = \pi n r_0^2 \|\mathbf{B}\|. \quad (27.10)$$

Zahlenbeispiel: $B = 1T = 1Vs/m^2$, $r_0 = 1m$, $n = 2000/min$. Es wird

$$U_i = \pi \cdot 2000 \cdot 1 \cdot 1 \frac{Tm^2}{min} = 6,28 \cdot 10^3 \frac{Vsm^2}{m^2 60s} = 105V. \quad (27.11)$$

Bei der in Abb. 27.3 gezeichneten Anordnung ruft diese Spannung Ströme

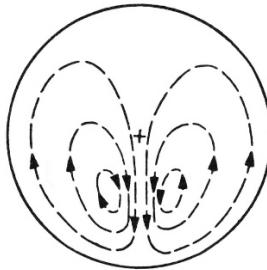


Abbildung 27.4. Wirbelströme in der Bremsscheibe

hervor, die sich innerhalb der Blechscheibe in der durch gestrichelte Linien in Abb. 27.4 dargestellten Weise schließen. Wegen dieses Kurzschlusses wird die Quellenspannung nicht als Spannung zwischen den Klemmen a und b erhalten. Um die Blechscheibe zu drehen, muss man eine mechanische Arbeit aufwenden, die der durch diese „Wirbelströme“ entwickelten Wärme gleichwertig ist. Es ergibt sich also eine *Bremswirkung*.

Auf dem gleichen Prinzip beruht die *Unipolarmaschine*; siehe Lehner [162]. Hier wird das Auftreten der Wirbelströme dadurch vermieden, dass die Scheibe in ihrer ganzen Ausdehnung in ein Magnetfeld gebracht wird, das zur Achse symmetrisch ist, so dass die induzierte Quellenspannung U_i auf jedem Radius die gleiche Größe hat. Sie tritt jetzt als Spannung zwischen a und b in Erscheinung. Eine volles Verständnis der Unipolar-Induktion ist jedoch nur mit Hilfe der Relativitätstheorie möglich (vgl. Becker [16]).

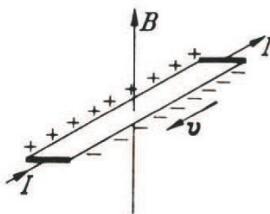


Abbildung 27.5. Hall-Effekt

Eine weitere Anwendung des Induktionsgesetzes ist der *Hall-Effekt*; siehe Ibach und Lüth [129]. Da der elektrische Strom in Leitern immer eine Driftbewegung von Ladungsträgern ist, so ergibt sich eine ähnliche Erscheinung

wie die elektrische Induktion auch innerhalb eines in einem stationären Magnetfeld ruhenden Leiters, so bald dieser vom Strom durchflossen wird (E. H. Hall, 1880). Fließt z. B. durch ein dünnes Metallband Strom in der Längsrichtung des Bandes und wird das Band von einem magnetischen Feld senkrecht durchstoßen, Abb. 27.5, so erfahren die mit der Driftgeschwindigkeit v strömenden Leitungselektronen Kräfte in der Querrichtung des Bandes, die zu einer Anhäufung von negativen und positiven Ladungen auf den beiden Längsseiten des Bandes führen. Die auf die Elektronen wirkenden Kräfte lassen sich wie bei Abb. 27.4 darstellen durch die Wirkung eines E-Feldes

$$\mathbf{E}_H := \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (27.12)$$

Die Stromdichte in dem Leiter ist nach Gl. (37.9)

$$\mathbf{J} = \mp n e \mathbf{v}. \quad (27.13)$$

je nachdem, ob es sich um Elektronenleitung oder um Löcherleitung handelt. Damit ergibt sich das E-Feld zu

$$\mathbf{E}_H = \mp \frac{1}{ne} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (27.14)$$

Man setzt

$$\mathbf{E}_H =: R_H (\mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (27.15)$$

und nennt R_H die *Hall-Konstante*; sie kann durch Messung der quer zum Leiter entstehenden Spannung, der Stromdichte und des B-Feldes bestimmt werden. Aus dem Hall-Effekt erhält man Aufschluss über die Art der Leitung (Elektronen- oder Löcherleitung), über die Dichte n und über die Beweglichkeit der Ladungsträger ($n = 1/(eR_H)$; $b = \sigma/(ne) = \sigma R_H$). Einige gemessene Zahlenwerte sind

$$\text{für Kupfer } R_H = -5,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}, \quad (27.16)$$

$$\text{für Silizium und Germanium } R_H \approx 10^3 \dots 10^5 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}, \quad (27.17)$$

$$\text{für Indiumantimonid } R_H = 200 \dots 600 \frac{\text{cm}^3}{\text{As}}. \quad (27.18)$$

Bei einem rechteckigen Plättchen mit der Dicke d , das von einem Strom I parallel zu einer Rechteckseite durchflossen wird und sich senkrecht zu den Kraftlinien eines B-Feldes $\|\mathbf{B}\|$ befindet, Abb. 27.5, wird die senkrecht zur Stromrichtung entstehende Spannung nach Gl. (27.15)

$$U_H =: R_H \frac{I}{d} \|\mathbf{B}\|. \quad (27.19)$$

Wird z. B. ein Germaniumplättchen mit $R_H = 10^4 \text{ cm}^3/\text{As}$ und 1mm Dicke von einem Strom $I = 1A$ durchflossen, so wird in einem magnetischen Feld mit $\|\mathbf{B}\| = 0,1T$

$$U_H = 10^4 \frac{cm^3}{As} \frac{1A}{0,1cm} 0,1 \cdot 10^{-4} \frac{Vs}{cm^2} = 1V. \quad (27.20)$$

Die Gl.(27.7) für die in einem Längenelement des Leiters induzierte Spannung lässt sich durch die folgenden Überlegungen in eine andere Form bringen. Dabei wird berücksichtigt, dass es sich bei dem Ausdruck $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$ um ein Spatprodukt handelt, das man geometrisch als Volumen des aus den drei Vektoren \mathbf{v}, \mathbf{B} und $d\mathbf{s}$ gebildeten Prismas interpretieren kann; vgl. Abb. 27.6. Das Produkt $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ entspricht der Fläche eines Parallelogramms. Das Spatprodukt kann man zyklisch vertauschen (siehe z.B. Merziger, Wirths [198])

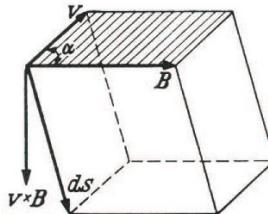


Abbildung 27.6. Darstellung der induzierten Quellenspannung durch das Volumen eines Prismas

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{B} \times d\mathbf{s}) \cdot \mathbf{v} = (d\mathbf{s} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B}. \quad (27.21)$$

Diese Rechenregel benutzen wir zur Umformung des Induktionsgesetzes Gl.(27.7):

$$\mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{s} \times \mathbf{v}). \quad (27.22)$$

Hier stellt $d\mathbf{s} \times \mathbf{v}$ die Fläche eines Parallelogramms dar, das aus den beiden Vektoren $d\mathbf{s}$ und \mathbf{v} gebildet wird. Dieses Produkt ist also gleich der Fläche A , die bei der Bewegung des Leiterelementes $d\mathbf{s}$ überstrichen wird, geteilt durch die Zeit. Das skalare Produkt des Vektors dieser Fläche mit dem Vektor des B-Feldes ergibt nach Gl. (19.6) den magnetischen (Induktions-)Fluss, der durch diese Fläche hindurchgeht, oder die Feldlinienzahl, die von dem Leiterelement $d\mathbf{s}$ überstrichen wird, geteilt durch die dazu erforderliche Zeit. Daraus folgt der Satz:

Die in einem Leiterelement induzierte Quellenspannung ist gleich dem von dem Leiterelement geschnittenen Fluss geteilt durch die Zeit.

Bezeichnet man den in der Zeit dt von $d\mathbf{s}$ überstrichenen Fluss mit

$$d\Phi_s = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \quad (27.23)$$

so gilt daher

$$\mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \frac{d(d\Phi_s)}{dt}. \quad (27.24)$$

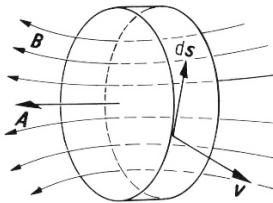


Abbildung 27.7. Induktion in einem geschlossenen Drahtkreis

Die zwischen den beiden Enden des Drahtes auftretende Quellenspannung ergibt sich durch Integration von $\mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s}$ über die Leiterlänge.

Bei den Anwendungen hat man es immer mit geschlossenen Stromkreisen zu tun. Für die Berechnung der in einem geschlossenen Kreis induzierten Spannung u_i , die man dann als Umlaufspannung bezeichnet, muss die Fläche, wie in Abb. 27.7 dargestellt, zu einem „Kragen“ zusammengebogen werden. Bei der eingezeichneten Richtung der Vektoren $d\mathbf{s}$ und \mathbf{v} zeigt der Flächenvektor des Kragens nach innen. Ergänzt man den Kragen durch zwei Stirnflächen zu einer Trommel, so kann man das Integral der Induktionslinien über die Fläche des Kragens ersetzen durch die beiden Integrale über die Stirnflächen. Denn da die Induktionslinien in sich geschlossen sind, müssen alle durch den Kragen eindringenden Linien an den Stirnflächen der Trommel wieder austreten. Orientiert man die Flächenvektoren der beiden Stirnseiten so, dass sie mit der durch $d\mathbf{s}$ gegebenen Umlaufrichtung im Sinne einer Rechtsschraube verknüpft sind – in Abb. 27.7 ist das die Richtung nach links –, so ergibt das Integral über die linke Stirnfläche den Fluss $\Phi(t)$, das Integral über die rechte Fläche den Fluss $\Phi(t+dt)$. Damit ist die Umlaufspannung oder Induktionsspannung ausgedrückt durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die vom Umlauf berandete Fläche

$$\oint_C \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = u_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (27.25)$$

wobei Umlaufrichtung und Flächenvektor rechtsschraubig einander zugeordnet sind; vgl. (26.24).

Das ist die von Faraday gefundene Form des Induktionsgesetzes. Es besagt, dass die in einem geschlossenen Stromkreis induzierte Umlaufspannung gleich der Abnahmegeschwindigkeit des mit der Schleife verketteten magnetischen Flusses ist. Die Abnahmegeschwindigkeit des magnetischen Flusses wird auch als *magnetischer Schwund* bezeichnet. Das Induktionsgesetz kann daher in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Die Umlaufspannung in einer geschlossenen Schleife ist gleich dem magnetischen Schwund.

Die Fassung (27.25) des Induktionsgesetzes gilt nicht nur für die Bewegung von Leiterschleifen in Magnetfeldern, sondern erfahrungsgemäß auch

dann, wenn sich das magnetische Feld zeitlich ändert. Man kann sich das Verschwinden eines Magnetfeldes in der Feldlinienvorstellung so veranschaulichen, dass sich die geschlossenen Feldlinien mehr und mehr zusammenschnüren, bis sie in einem Punkt zusammenschrumpfen. Dabei werden ebenfalls die Leiter geschnitten. Das Induktionsgesetz gilt ferner auch dann in der gleichen Form, wenn es sich um Bewegungen von Magneten oder Stromkreisen gegen feststehende Stromkreise handelt.

Der magnetische Fluss kann berechnet werden als Flächenintegral der magnetischen Induktion über eine Fläche, die von dem Leiter berandet wird, Gl. (19.6). Da die Feldlinien in sich geschlossen sind, ist die Form dieser Fläche ohne Einfluss auf den Wert des Oberflächenintegrals. Es tragen nur solche Induktionslinien zum Induktionsfluss bei, die mit dem Rand der Fläche verkettet sind.

Bei einer Spule muss man den Bündelfluss Φ nehmen und mit N multiplizieren, so dass sich der Gesamtfluss $\Phi_g = N\Phi$ ergibt. Daraus folgt das Induktionsgesetz

$$u_i = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (27.26)$$

Diese Form des Induktionsgesetzes kann man auch mit Hilfe eines Induktionskoeffizienten L formulieren. Gilt $\Phi_g = Li$, dann ergibt sich

$$u_i = -L \frac{di}{dt}. \quad (27.27)$$

Befindet sich in der Nachbarschaft eines Stromkreises 1 ein zweiter Stromkreis 2, so wird bei Änderung des durch den Kreis 1 erzeugten magnetischen Feldes nach dem Induktionsgesetz (27.27) im Kreis 2 eine Spannung induziert. Umgekehrt entsteht eine induzierte Spannung im Kreis 1 bei Stromänderungen in 2. Man nennt dieses Erscheinung die *Gegeninduktion*. Der Strom i_1 ist maßgebend für die im Stromkreis 2 induzierten Quellenspannung. Sie beträgt

$$u_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}, \quad (27.28)$$

wenn die Zählrichtung für i_2 den gemeinsamen Induktionsfluss im gleichen Sinne wie die Zählrichtung von i_1 umkreist. Ganz entsprechend lässt sich die Einwirkung von Stromkreis 2 auf Stromkreis 1 auf Grund des Induktionsgesetzes durch die Gleichung

$$u_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (27.29)$$

ausdrücken.

Im Fall eines nichtlinearen Zusammenhangs des magnetischen Flusses Φ und des Stromes i erhält man einen nichtlinearen Induktionskoeffizienten $L(i)$ nach (23.24) und es gilt die Beziehung

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt} = L(i) \frac{di}{dt}.$$

In den meisten praktischen Fällen ist diese Beziehung jedoch nur als eine Näherungsformel zu betrachten. Im Fall von $\hat{L}(i)$ nach (23.23) gilt für das in Strom und Spannung formulierte Induktionsgesetz ($N = 1$)

$$u_L = \frac{d(\hat{L}(i)i)}{dt} = \hat{L} \frac{di}{dt} + i \frac{d\hat{L}}{di} \frac{di}{dt} = \left(\hat{L} + i \frac{d\hat{L}}{di} \right) \frac{di}{dt}. \quad (27.30)$$

Beispiel: Der Strom in der Ablenkspule einer Braunschen Röhre wächst innerhalb von $0,1\text{ms}$ linear um 1A . Die Induktivität der Spule sei konstant und ihr Wert beträgt $L = 0,05\text{H}$. Die Spannung an der Spule ergibt sich daher während des betrachteten Zeitabschnittes bei Vernachlässigung des Widerstandes der Spule nach Gl. (27.27) zu

$$u = L \frac{di}{dt} = 0,05\text{H} \frac{1\text{A}}{0,1 \cdot 10^{-3}\text{s}} = 500\text{V}. \quad (27.31)$$

Nach (27.25) ist die auf einem geschlossenen Weg induzierte Quellenspannung u_i definiert als das Linienintegral des induzierten E-Feldes \mathbf{E}_i auf diesem Wege. \mathbf{E}_i ist nach Gl. (27.3) dasjenige E-Feld, das an jeder Stelle des Raumes auf Ladungsträger die gleichen Kräfte ausübt wie das wirkliche magnetische Feld. Der Nutzen dieser Definition liegt darin, dass man in *geschlossenen* Stromkreisen die Stromstärke nach dem Ohmschen Gesetz aus der induzierten Spannung berechnen darf. Dies ergibt sich auf folgende Weise.

Wir betrachten einen in sich geschlossenen Stromleiter, der irgendwie der Induktionswirkung magnetischer Felder unterliegt. Es kann sich also z. B. um einen Drahtring handeln oder um die Wicklung eines Transformators, die über einen beliebigen äußeren Widerstand geschlossen ist.

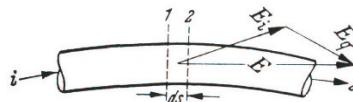


Abbildung 27.8. Zusammensetzung des E-Feldes in einem induzierten Leiter aus dem E-Feld E_i des Wirbelfeldes und dem E-Feld E_q eines wirbelfreien Feldes

An jeder Stelle des Stromleiters wirken auf die Ladungsträger Kräfte infolge des induzierten E-Feldes \mathbf{E}_i , Abb. 27.8. Unter der Wirkung dieser Kräfte und gegebenenfalls infolge anderer elektrischer Spannungen bildet sich eine bestimmte Verteilung von Oberflächenladungen aus, die an der betreffenden Stelle des Leiters ein zusätzliches E-Feld \mathbf{E}_q erzeugen. Das gesamte E-Feld an der betrachteten Stelle des Leiters ist daher

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_q. \quad (27.32)$$

An einem Längenelement ds des Leiters, Abb. 27.8, das die betrachtete Stelle enthält, entsteht daher die Spannung

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_q) \cdot d\mathbf{s}, \quad (27.33)$$

wobei die Richtung von $d\mathbf{s}$ durch den Strompfilz gegeben sei. Wäre der Stromkreis unterbrochen, so dass kein Strom fließen kann, dann würde sich eine solche Verteilung der Oberflächenladungen einstellen, dass $\mathbf{E}_q = -\mathbf{E}_i$ und $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ist.

Bei geschlossenem Stromkreis entsteht eine bestimmte Stromstärke i . Sie ergibt sich aus der Spannung zwischen den beiden Endflächen 1 und 2 des Längenelementes und dem Widerstand des dadurch abgegrenzten Leiterabschnittes. Nach dem Ohmschen Gesetz ist

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_q) \cdot d\mathbf{s} = i\rho \frac{d\mathbf{s}}{A}. \quad (27.34)$$

wenn A den Leiterquerschnitt und ρ den spezifischen Widerstand des Leiters in dem betrachteten Abschnitt bezeichnen. Diese Gleichung integrieren wir auf beiden Seiten über den ganzen geschlossenen Stromweg (z. B. längs der Leiterachse):

$$\oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} + \oint \mathbf{E}_q \cdot d\mathbf{s} = \oint i\rho \frac{ds}{A}. \quad (27.35)$$

Das erste Integral ist die Umlaufspannung u_i , Gl. (27.25). Das zweite Integral ist wegen $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ gleich Null, da das E-Feld \mathbf{E}_q durch die Oberflächenladungen verursacht wird, also einem wirbelfreien Feld zugehört. Im dritten Integral ist i wegen $\text{div } \mathbf{J} = 0$ längs des ganzen Stromleiters konstant und kann daher vor das Integral gesetzt werden. Als Faktor von i verbleibt das Integral $\oint (\rho/A) ds$. Das ist aber nichts anderes als der gesamte Widerstand R des geschlossenen Stromweges, gleichgültig wie er im einzelnen zusammengesetzt ist. Das Ergebnis lautet also

$$u_i = i R. \quad (27.36)$$

Für die Berechnung der Stromstärke in einem geschlossenen Stromkreis kann die Umlaufspannung u_i wie eine Quellenspannung behandelt werden.

Damit ist die Bezeichnung „induzierte Quellenspannung“ für die Umlaufspannung begründet. Ihre Verwendung ist zulässig, wenn es sich um die Berechnung des Stromes in geschlossenen Stromkreisen handelt. Das – Zeichen in Gl. (27.25) bedeutet, dass in einem geschlossenen Drahtring bei Zunahme des mit dem Ring verketteten Induktionsflusses ein Strom entsteht, der den Fluss linksläufig umkreist (wie die Drehung einer Linksschraube, die sich in der Flussrichtung bewegt).

Bemerkung: Bei der Anwendung des Induktionsgesetzes in der Form (27.25) auf Bewegungsvorgänge muss beachtet werden, dass die Linie, auf der die Umlaufspannung festgestellt wird, fest mit den Leitern verbunden zu denken ist. Bei dem im Anschluss an Abb. 27.3 besprochenen Beispiel der Unipolarmaschine ergibt sich das in Abb. 27.9 dargestellte Bild. Der magnetische Fluss gehe von vorn nach hinten durch die Zeichenebene hindurch. In einer Ausgangslage, die durch den gestrichelten Radius OA gekennzeichnet sei, umfasst

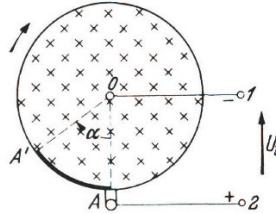


Abbildung 27.9. Zur Erläuterung des verketteten Flusses

die Schleife $OA21$ einen Quadranten, also ein Viertel des Gesamtflusses, der durch die Scheibe hindurchtritt. Dreht sich nun die Scheibe in der Pfeilrichtung bis der Punkt A nach A' kommt, so ist die Randlinie zur Berechnung der Umlaufspannung die Linie $OA'A21$. Sie zeigt, dass sich der Fluss Φ proportional mit dem Drehwinkel α vergrößert, nämlich um

$$\Phi = \frac{\alpha}{2\pi} \Phi_{ges} = \frac{\alpha}{2\pi} \|\mathbf{B}\| r_0^2 \pi. \quad (27.37)$$

Die induzierte Quellenspannung beträgt daher

$$U_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\| r_0^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\| r_0^2 \omega = \|\mathbf{B}\| r_0^2 \pi n \quad (27.38)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (27.10).

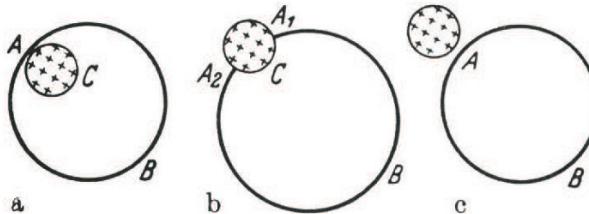


Abbildung 27.10. Beispiel für die Anwendung des Induktionsgesetzes

Durch die Außerachtlassung der genannten Regel werden häufig Fehler bei der Anwendung des Induktionsgesetzes in der Form (27.25) gemacht. Ein instruktives Beispiel ist das folgende. Nach Abb. 27.10, Teil a umgebe ein geschlossener Drahtring AB einen senkrecht auf der Zeichenebene stehenden Eisenkern, der einen magnetischen Fluss Φ durch den Drahtkreis hindurchführt. Der Eisenkern werde nun gemäß Abb. 27.10, Teil b und c so aus dem Drahtkreis herausgeführt, dass dieser bei A durchgeschnitten wird, aber während der Bewegung über den Eisenkern elektrisch leitend verbunden bleibt. Die Frage ist, ob bei dieser Bewegung in dem Drahtkreis eine Spannung und damit ein Strom entsteht. Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ändere sich bei

der beschriebenen Bewegung der mit dem Leiter verkettete Fluss von Φ auf 0, so dass eine Spannung induziert wird. Dies ist jedoch nicht der Fall. Nach der oben ausgesprochenen Regel muss die Randlinie fest mit jedem Körper verbunden bleiben. Als Randlinie kann z. B. die Linie $A_1CA_2BA_1$ betrachtet werden. Diese Linie umschließt während der ganzen Bewegung keinen Fluss, so dass auch keine Spannung auftritt. Natürlich würde eine Spannung entstehen, wenn der Fluss Φ im Falle Abb. 27.10, Teil a durch Abschalten seiner Erregung zum Verschwinden gebracht werden würde. (Heringsche Versuche; siehe Lehner [162]).



Abbildung 27.11. Spule zur Ausmessung magnetischer Felder

Das Induktionsgesetz liefert nach Rogowski und Steinhaus [249] eine einfache Methode zur *Ausmessung magnetischer Felder*. Dazu dient eine Probespule S , Abb. 27.11, von so kleinen Abmessungen, dass das magnetische Feld in ihrer Umgebung als homogen angesehen werden kann. Die Spule wird mit einem ballistischen Galvanometer G verbunden; siehe auch Abb. 27.12. Bringt man die Spule rasch in das magnetische Feld oder nimmt man sie aus dem magnetischen Feld rasch heraus, so ändert sich der Induktionsfluss, der mit der Spule verkettet ist; damit ergibt sich kurzzeitig eine induzierte Spannung und ein Stromstoß im Galvanometer. Aus dem ballistischen Ausschlag des Galvanometers kann die magnetische Induktion am Orte der Spule berechnet werden.

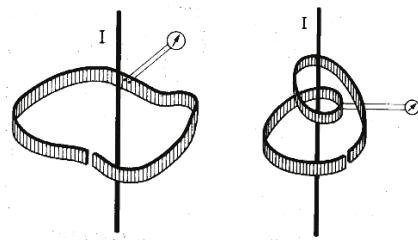


Abbildung 27.12. Magnetischer Spannungsmesser nach Rogowski und Steinhaus

Bezeichnet A die Fläche der Spulenöffnung und $\|\mathbf{B}\|$ das B -Feld in dieser Öffnung, so ist der von einer Windung der Spule umfasste Bündelfluss

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \|\mathbf{B}\| A \cos \alpha, \quad (27.39)$$

und der Gesamtfluss wird bei N Windungen der Spule

$$\Phi_g = N\Phi = N\|\mathbf{B}\|A \cos \alpha, \quad (27.40)$$

wobei α den Winkel zwischen Spulenachse und Feldlinienrichtung bedeutet. Der Gesamtfluss hat seinen größten Wert, wenn die Achse der Spule in die Richtung der Feldlinien fällt. Dann wird

$$\Phi = \|\mathbf{B}\|A. \quad (27.41)$$

Beim Herausnehmen der Spule aus dem Magnetfeld ändert sich der Fluss, und es entsteht nach Gl. (27.25) eine induzierte Quellenspannung u_i . Der dadurch hervorgerufene Strom ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$i = \frac{u_i}{R}, \quad (27.42)$$

wobei R den Gesamtwiderstand des Stromkreises bezeichnet. Damit wird

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_g}{dt} = -\frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (27.43)$$

Wird die Spule rasch aus dem Feld herausgenommen, so ergibt sich ein ballistischer Ausschlag des Galvanometers, der die Elektrizitätsmenge anzeigt, die während der Bewegung der Spule durch den Stromkreis fließt, also

$$Q = \int_0^\infty idt = -\frac{N}{R} \int d\Phi = \frac{N}{R}(\Phi_1 - \Phi_2), \quad (27.44)$$

wobei Φ_1 und Φ_2 die Flüsse zu Beginn und Ende der Bewegung bedeuten. Wächst also der die Spule durchsetzende Bündelfluss von Null auf den Wert Φ beim Hineinbringen der Spule in das Feld, oder nimmt er von diesem Wert Φ auf Null ab beim Herausnehmen der Spule aus dem Feld, so ergibt sich der gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Ausschlag des ballistischen Galvanometers; dieser Ausschlag liefert die Elektrizitätsmenge Q . Damit lässt sich berechnen

$$\Phi = \frac{N}{R}Q. \quad (27.45)$$

Die Richtung der Feldlinien kann dadurch bestimmt werden, dass man den größten Ausschlag durch Beobachten bei verschiedenen Stellungen der Spule zu erreichen sucht; dann ist das B-Feld

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{RQ}{NA} \quad (27.46)$$

und ihre Richtung die der Spulenachse.

Anmerkung und Zahlenbeispiel: Da der Wicklungsquerschnitt der Spule eine räumliche Ausdehnung besitzt, so ergibt sich die Frage, was man unter der

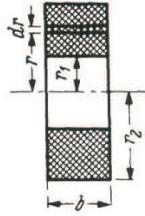


Abbildung 27.13. Zur Berechnung der wirksamen Fläche

Öffnung A der Spule zu verstehen hat. Wir bezeichnen die Abmessungen der Spule nach Abb. 27.13 und denken uns die Wicklung unendlich fein unterteilt. Eine Schicht der Wicklung vom Radius r und der Dicke dr umschließt den in Richtung der Spulenachse verlaufenden Induktionsfluss

$$\Phi = \|\mathbf{B}\| r^2 \pi, \quad (27.47)$$

da das Feld wegen der Kleinheit der Spule als homogen angesehen werden kann. In dieser Schicht sind

$$\frac{bdr}{b(r_2 - r_1)} N \quad (27.48)$$

Windungen vorhanden. Daher ist der *Gesamtfluss* dieser Schicht

$$d\Phi_g = N \frac{dr}{r_2 - r_1} \|\mathbf{B}\| r^2 \pi \quad (27.49)$$

und der Gesamtfluss der Spule

$$\Phi_g = \frac{N \|\mathbf{B}\| \pi}{r_2 - r_1} \int r^2 dr = \frac{N \pi \|\mathbf{B}\|}{r_2 - r_1} \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}. \quad (27.50)$$

Setzt man diesen Gesamtfluss

$$\Phi_g = N A \|\mathbf{B}\|, \quad (27.51)$$

so folgt für die mittlere Windungsfläche

$$A = \frac{\pi r_2^3 - r_1^3}{3(r_2 - r_1)} = \frac{\pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2). \quad (27.52)$$

Ist z. B. $r_1 = 0,4\text{cm}$, $r_2 = 1\text{cm}$, $b = 0,6\text{cm}$, so wird

$$A = \frac{\pi}{3} (0,16 + 0,4 + 1) \text{cm}^2 = 1,633 \text{cm}^2. \quad (27.53)$$

Die Spule enthalte $N = 10000$ Windungen; der Gesamtwiderstand des aus Spule und Galvanometer gebildeten Kreises sei $R = 1000 \text{ Ohm}$. Zeigt das Galvanometer eine Elektrizitätsmenge $Q = 0,001 \text{As}$, so wird

$$\Phi = \frac{R}{N} Q = \frac{1000}{10000} 0,001 \Omega As = 10^{-4} Vs = 10^{-4} Wb; \quad (27.54)$$

daraus folgt

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\Phi}{A} = \frac{10^{-4} Wb}{1,633 cm^2} = 0,613 T. \quad (27.55)$$

In den *elektrischen Maschinen* ist die Anordnung immer so getroffen, dass sich bei der Drehung des Ankers der gesamte Fluss ändert, der mit den Ankerspulen verkettet ist. Verfolgt man z. B. die Drehung eines Gleichstromankers während eines sehr kleinen Zeitabschnittes Δt , der so kurz ist, dass die Bürsten auf den gleichen Stromwenderstegen bleiben, so findet man, dass dabei der magnetische Fluss, der die Ankerwicklung auf dem Wege von der Minus- zur Plusbürste umschlingt, um einen ganz bestimmten Betrag $\Delta\Phi$ ab- oder zunimmt, siehe auch Abschnitt 29.4. Dann hat die zwischen den Bürsten auftretende Spannung einen Betrag, der durch den Grenzwert gegeben ist, dem sich das Verhältnis $\Delta\Phi/\Delta t$ bei hinreichend kleinem Δt nähert: $u_i = d\Phi_g/dt$. Da bei den elektrischen Maschinen die Ankerleiter senkrecht von den magnetischen Feldlinien geschnitten werden, so wird hier das Induktionsgesetz meist in der durch Gl. (27.5) gegebenen Form angewendet, die zu dem gleichen Ergebnis führt.

$$\|\mathbf{B}\| = \frac{\Phi}{A} = \frac{10^{-4} Wb}{1,633 cm^2} = 0,613 T. \quad (27.56)$$

Wird der Ankerkreis geschlossen, so fließt in den Ankerleitern Strom (Generator). Die auf die Ankerleiter im magnetischen Feld ausgeübten Kräfte verursachen ein Bremsmoment, und die entnommene elektrische Arbeit ist gleich der mechanischen Arbeit zur Überwindung dieses Bremsmomentes. Bezeichnet man den in dem betrachteten Wicklungsabschnitt während des Zeitelements dt fließenden Strom mit I , so ist die elektrisch erzeugte Leistung $dW = -Id\Phi_g/dt$; also ist die Arbeit

$$dW = -I d\Phi_g; \quad (27.57)$$

sie muss in Form von mechanischer Arbeit aufgewendet werden, d. h. es muss bei der Drehung des Ankers um den Winkel $d\alpha$ ein Bremsmoment M_d überwunden werden, so dass

$$dW = -I d\Phi_g = M_d d\alpha; \quad (27.58)$$

daraus ergibt sich für dieses Bremsmoment

$$M_d = -I \frac{d\Phi_g}{d\alpha}. \quad (27.59)$$

Die gleiche Beziehung gilt auch für den Fall des Motors, bei dem der Strom I von äußeren Quellen erzeugt wird; das Moment M_d ist dann als Triebmoment aufzufassen.

Ein und derselbe physikalische Vorgang, nämlich die Ablenkung bewegter Elektronen im magnetischen Feld, ist also die Ursache von Motor- und Generatorwirkung. Beim *Motor* werden die Leitungselektronen mit Hilfe einer äußeren elektrischen Energiequelle durch die Stromleiter hindurchgeführt. Die Stromleiter befinden sich in einem magnetischen Feld, dessen Feldlinien senkrecht zu dieser Bewegungsrichtung stehen. Dadurch erfahren die Elektronen Ablenkungskräfte quer zur Richtung der Leiter. Da sie im Leiter durch die Bildkräfte festgehalten sind, so übertragen sich die Ablenkungskräfte auf die Leiter. Beim *Generator* werden umgekehrt die Stromleiter mechanisch durch das magnetische Feld hindurch bewegt; dadurch ergibt sich eine Ablenkung der Elektronen in der Längsrichtung der Leiter bis zum Gleichgewichtszustand, in dem längs der Leiter eine Verschiebung von Ladungen entsteht. Zur Aufrechterhaltung dieser Ladungsverteilung ist ein Arbeitsaufwand nicht erforderlich, solange der Stromkreis unterbrochen ist. Fließt beim Schließen des Stromkreises Strom, so ergibt sich eine Längsbewegung der Elektronen in den Stromleitern und damit eine mechanische Bremskraft quer zur Stromrichtung, zu deren Überwindung eine mechanische Arbeit aufgewendet werden muss.

Beispiele: Eine einfache Anwendung dieser Zusammenhänge bildet die *elektromagnetische Pumpe* für leitende Flüssigkeiten, Abb. 27.14. In einem isolierenden Rohr wird mit Hilfe zweier Metallelektroden (Fläche $A = al$) durch die Flüssigkeit ein elektrischer Strom I geschickt. Senkrecht dazu und zur Strömungsrichtung v ist ein konstantes B -Feld gerichtet mit dem Betrag $\|\mathbf{B}\|$. Auf die Flüssigkeitsscheibe zwischen den beiden Elektroden wirkt die Kraft $\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{B}\|Id$ und damit der Druck

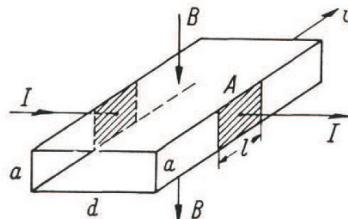


Abbildung 27.14. Prinzip der elektromagnetischen Pumpe

$$p = \frac{\|\mathbf{B}\|Id}{ad} = \frac{\|\mathbf{B}\|I}{a}. \quad (27.60)$$

Dieser treibt die Flüssigkeit durch das Rohr. Stellt sich dabei eine Geschwindigkeit v der Flüssigkeitsströmung ein, so entsteht eine induzierte Spannung $U_i = \|\mathbf{B}\|vd$. Sie vergrößert den ohmschen Spannungsabfall zwischen den Elektroden. Die zu ihrer Deckung erforderliche Leistung $U_i I$ wird in mechanische Leistung zur Fortbewegung der Flüssigkeit umgewandelt. Ist z. B.

$a = 2cm$, $\|\mathbf{B}\| = 1T = 1Vs m^2$, $I = 100A$, so wird der Druck

$$p = \frac{1 \cdot 100VsA}{0,02m^2m} = 5000 \frac{N}{m^2} = 0,05bar. \quad (27.61)$$

Ist die Geschwindigkeit $v = 0,1m/s$ und $d = 10cm$, so wird die induzierte Spannung

$$U_i = 1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \frac{Vs}{m^2} \frac{m}{s} = 10mV \quad (27.62)$$

und die auf die Flüssigkeit übertragene Bewegungsleistung $U_i I = 1W = 1Nm/s$.

2. Das Gegenstück zur elektromagnetischen Pumpe bildet der sogenannte *magnetohydrodynamische Generator*. Das Prinzip ist durch Abb. 27.15 veranschaulicht. Zur direkten Umwandlung von Verbrennungswärme fossiler Brennstoffe in elektrische Arbeit wird in einer Brennkammer Brennstoff mit Luft gemischt und unter Druck verbrannt. Die erhitzten Gase sind teilweise ionisiert (thermische Ionisierung); sie strömen durch die Düse D aus. Durch ein magnetisches Feld senkrecht zur Zeichenebene werden die positiven und negativen Ladungsträger abgelenkt und gelangen zu den Auffangplatten A . Bezeichnet v die Ausströmgeschwindigkeit der Teilchen und B das B-Feld, so ist die auf die Teilchen wirkende Kraft qvB . Infolge der durch die Teilchen erzeugten Aufladung der Auffangplatten entsteht ein elektrisches Gegenfeld E , dessen Feldkräfte qE der magnetischen Kraft entgegenwirken. Die Grenze für die Spannung zwischen den beiden Elektroden ist erreicht, wenn beide Kräfte einander gleich sind. Daraus folgt die erzeugte *Leerlaufspannung*

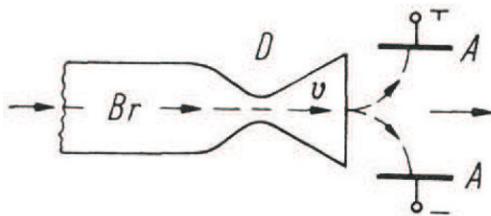


Abbildung 27.15. Prinzip des MHD-Generators

$$U_0 = E d = v B d, \quad (27.63)$$

wenn mit d der Plattenabstand bezeichnet wird.

Die Auffangplatten bilden die Pole eines Generators. Im Kurzschluss des Generators gelangen bei geeigneter Bemessung alle Ladungsteilchen auf die Platten. Der Kurzschlussstrom kann durch die Leitfähigkeit σ des heißen ionisierten Gases ausgedrückt werden. Die Kurzschlussstromdichte ist

$$J_k = \sigma \frac{U_0}{d} = \sigma v B. \quad (27.64)$$

Die Leitfähigkeit des Gases hängt stark von der Temperatur ab. Bei $3000K$ lassen sich Leitfähigkeiten von der Größenordnung $\sigma = 1S/cm$ erreichen. Ist z. B. $B = 1T = 1Vs/m^2$, $v = 100m/s$, $d = 10cm$, so wird die Leerlaufspannung

$$U_0 = 100 \frac{m}{s} \cdot 1 \frac{Vs}{m^2} \cdot 10cm = 10V. \quad (27.65)$$

Die Kurzschlußstromdichte wird

$$J_k = 1 \frac{S}{cm} \cdot 1 \frac{Vs}{m^2} \cdot 100 \frac{m}{s} = 10^4 \frac{A}{m^2}. \quad (27.66)$$

Bei einer Fläche der Auffangplatten von $100cm^2$ wird die Kurzschlussstromstärke

$$I_k = 10^4 \frac{A}{m^2} \cdot 100cm^2 = 100A. \quad (27.67)$$

Der durch die Gasstrecke bedingte Innenwiderstand des Generators ist

$$R_i = \frac{10V}{100A} = 0,1 \Omega. \quad (27.68)$$

Lösungsverfahren für Diffusionsgleichungen

Um Probleme der quasistationären elektromagnetischen Felder lösen zu können, werden Methoden zur Lösung von partiellen Vektor-Differentialgleichungen vom Diffusionstyp (vgl. Gl. (26.51))

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D \Delta \mathbf{u}. \quad (28.1)$$

benötigt, wobei D eine reelle Konstante ist. Im Fall spezieller Geometrien sind sogar analytisch Lösungen verfügbar. Betrachtet man den skalaren Fall, so hängt u nur von der Zeit und z. B. der Ortsvariablen x ab, so kann man die 1-dimensionale Diffusionsgleichung nach Einführung dimensionsloser Koordinaten $\tau := t/Dl$ und $\xi := x/l$ (l : charakteristische Länge) in folgender Weise darstellen

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}. \quad (28.2)$$

Man kann leicht nachprüfen, dass

$$\tilde{u}(\tau, \xi) = C \frac{e^{\frac{-(\xi - \xi')^2}{4\pi\tau}}}{\sqrt{4\tau}} \quad (28.3)$$

eine Lösung von Gl. (28.2) ist; dabei ist C eine Konstante und ξ' kennzeichnet das Maximum der Funktion. Offensichtlich reduziert sich das Maximum der Lösung mit der Zeit und sie verbreitert sich.

Diese Lösung ist *Greensche Funktion* des Problems, was man an der folgenden – symbolisch gemeinten – Grenzfunktion erkennt (vgl. Lehner [162], S. 371ff)

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-(\xi - \xi')^2}{4\pi\tau}}}{\sqrt{4\tau}} = \delta(\xi - \xi'). \quad (28.4)$$

Die „Deltafunktion“ kann als Anfangsbedingung für $\tau = 0$ interpretiert werden. Im Fall allgemeiner Anfangsbedingungen $h(\xi)$ kann die entsprechende

Lösung wie in der Systemtheorie von Zeitsignalen mit Hilfe eines Faltungsinintegrals berechnet werden

$$u(\tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}} h(\xi') \frac{e^{\frac{-(\xi - \xi')^2}{4\pi\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} d\xi'. \quad (28.5)$$

Weitere Felddiffusionsprobleme, die man wenigstens komponentenweise auf eine eindimensionale skalare Diffusionsgleichung zurückführen kann, werden ausführlich bei Lehner [162] behandelt.

Hat man es mit Felddiffusionsproblemen zu tun, bei denen mindestens zwei Ortsdimensionen berücksichtigt werden müssen, muss man wie der Laplace- oder Poissons-Gleichung versuchen, mit Hilfe eines Produktansatzes versuchen, die vektorielle Diffusionsgleichung zu reduzieren. Mit Hilfe der sich daraus ergebenden Lösungen kann man aufgrund der Linearität der Diffusionsgleichung weitere Lösungen durch Bildung von Linearkombinationen erzeugen. Der zylindrische Leiter ist ein wichtiges Beispiel dieser Klasse von Problemen und wird daher in Abschnitt 29.1.1 ausführlich behandelt. Auch bei diesem Problem tritt natürlich die Schwierigkeit auf, dass das elektromagnetische Feld im Unendlichen nicht verschwindet. Mit Hilfe von Symmetrieargumenten gelingt es jedoch, ein ebenes Problem zu definieren, bei dem das magnetische Feld nur vom Betrag des Radius $r := \|\mathbf{r}\|$ abhängt. Aus der Quellenfreiheit des B-Feldes ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$) folgt, dass die Radialkomponente B_r verschwindet. Insgesamt ergeben sich zwei partielle Differentialgleichungen für $B_\varphi(r, t)$ und $B_z(r, t)$, wobei φ der Winkel des Zylinderkoordinatensystems ist. Mit Hilfe eines Produktansatzes $B_\varphi := R_\varphi(r) \cdot T_\varphi(t)$, bei dem die jeweils die Zeit t von der Ortskoordinate r separiert wird, erhält man in beiden Fällen lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Besselschen Typ, für die ein Fundamentalsystem (zwei Basislösungen) bekannt sind, aus denen man andere Lösungen mit Hilfe von Linearkombinationen ermitteln kann.

In vielen Fällen gelingt es jedoch nicht, das Separationsverfahren erfolgreich einzusetzen. Das kann am Aufbau der partiellen Differentialgleichung oder der Art der Randbedingung liegen. Beispielsweise lässt sich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{x^2 + t^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (28.6)$$

offensichtlich nicht mit Hilfe des Ansatzes $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ separieren. Andererseits kann man auch die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (28.7)$$

mit den *inhomogenen* Randbedingungen $u(0, t) = g_1(t)$, $u(1, t) = g_2(t)$ und $u(x, 0) = f(x)$ mit Hilfe dieses Ansatzes nicht separieren. Geht man auf eine neue Funktion $v(x, t)$ über, die folgendermaßen definiert ist

$$v(x, t) := u(x, t) - g_1(t) - x(g_2(t) - g_1(t)), \quad (28.8)$$

dann erhält man die folgende inhomogene Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial v}{\partial t} = -g'_1(t) - x(g'_2(t) - g'_1(t)) \quad (28.9)$$

mit homogenen Randbedingungen

$$v(x, 0) = f(x), \quad v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0. \quad (28.10)$$

Bei solchen inhomogenen Diffusionsgleichungen kann eine Verallgemeinerung der Separationsmethode zum Erfolg führen. Bei der *Methode der Entwicklung nach Eigenfunktionen eines Sturm-Liouville-Problems* wird der Produktansatz verallgemeinert, indem man im Fall einer Ortskoordinate x folgenden Lösungsansatz macht

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x), \quad (28.11)$$

wobei es sich bei den $X_n(x)$ ein Fundamentalsystem – ein vollständiges Funktionensystem – für eine zugeordnete gewöhnliche Differentialgleichung auf dem interessierenden Intervall handelt. Die Vollständigkeit dieses Funktionensystems wird garantiert, wenn es sich bei der zugordneten Differentialgleichung mit den Randbedingungen um ein sogenanntes Sturm-Liouville'sches Randwertproblem handelt. Das Verfahren ist sehr aufwendig und führt vielfach nur zu analytischen Näherungslösungen, aber es unumgänglich, wenn man an analytischen Lösungen interessiert ist. Weitere Einzelheiten über diese Methode findet man z. B. bei Courant, Hilbert [59].

Diese Ausführungen machen jedoch deutlich, dass analytische Lösungen nur bei Problemen zu erwarten sind, bei denen gewisse Symmetrien genutzt werden können, um das Problem in seiner Komplexität zu reduzieren. In allgemeineren Fällen bleibt nur die numerische Simulation, die allerdings bei parabolischen partiellen Differentialgleichungen – darum handelt es sich nämlich bei Diffusionsgleichungen – auch besondere Schwierigkeiten bereitet. Weitere Einzelheiten findet man in der entsprechenden Spezialliteratur über die numerische Analyse von Wirbelstromproblemen. Eine Übersicht gibt Kost [149], wo man auch weitere Literatur findet; eine Einführung in die numerischen Methoden gibt Lehner [162]. Numerische Methoden müssen insbesondere bei Wirbelstromproblemen mit nichtlinearen Materialgleichungen oder Hystereseffekten eingesetzt werden, wobei nichtlineare Felddiffusionsprozesse auftreten; vgl. z. B. Hiptmair [121]. Es sind jedoch auch analytische Methoden verfügbar; vgl. Mayergoyz [192].

Anwendungen des quasistationären Feldes

29.1 Wirbelströme und Skineffekt

Befinden sich in einem magnetischen Wechselfeld elektrisch leitende Stoffe, so entstehen in diesen Stoffen nach dem Induktionsgesetz Wechselströme auf Bahnen, die mit den magnetischen Induktionslinien verkettet sind; man bezeichnet diese Ströme als *Wirbelströme*. In stromführenden Leitern überlagern sich die Wirbelströme dem Leiterstrom. Auch durch das magnetische Feld des Leiterstromes selbst werden Wirbelströme im Leiter hervorgerufen. Dadurch ergibt sich eine ungleichmäßige Verteilung des Stromes über den Leiterquerschnitt, die man als *Stromverdrängung* bezeichnet. Die Wirbelströme erzeugen selbst ein Magnetfeld und wirken daher auch auf das ursprüngliche Feld zurück, es scheint eine *Feldverdrängung* zu entstehen. Infolge der im Leiter entstehenden Stromwärme wird dem magnetischen Feld dabei Energie entzogen. Man bezeichnet als *Wirbelstromverluste* die Leistung, die infolge der Wirbelströme in Form von Wärme verloren geht.

Bemerkung: In der Einleitung zu diesem Abschnitt als auch in den weiteren Ausführungen wird gelegentlich von Feld- oder Stromverdrängung gesprochen. Diese häufig verwendete Vorstellung entspricht in keiner Weise den tatsächlichen Verhältnissen bei quasistationären elektromagnetischen Feldern, da die Grundgleichungen nach Abschnitt 26.5 vom Typ einer Diffusionsgleichung. Vielmehr handelt es sich um eine Felddiffusion (vgl. auch Lehner [162]) in den Leiter, bei der die Eindringtiefe begrenzt ist und somit ein Eindringmaß definiert werden kann. Verschiedene Beispiele zur Stromverdrängung findet man u. a. bei Schunk [258].

In einem Wirbelstromfeld sind elektrisches und magnetisches Feld durch das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz miteinander verknüpft. Das Linienintegral des H-Feldes ist auf jedem geschlossenen Weg durch die Durchflutung des Weges bestimmt. Auch das Induktionsgesetz gilt in einem

räumlich ausgedehnten Feld auf beliebigen Bahnen; das Linienintegral des E-Feldes ist also auf jedem geschlossenen Weg gleich dem *magnetischen Schwund* dieses Weges.

29.1.1 Stromverdrängung im zylindrischen Leiter

Ein besonders einfacher Fall der Felddiffusion oder *Stromverdrängung* liegt bei langen kreiszylindrischen Leitern vor. Wenn man sich auf die Betrachtung eines kurzen Längenabschnittes eines solchen Leiters beschränkt, so darf man annehmen, dass die elektrische und das magnetische Feld nur von dem Abstand r von der Achse abhängen, Abb. 29.1, und in jedem Leiterquerschnitt die gleichen Werte besitzen. Das magnetische Feld hat überall die tangentiale Richtung, während das E-Feld wie die Stromdichte axial gerichtet ist. Stromdichte und E-Feld sind im Sinne des *Ohmschen Gesetzes* linear verknüpft durch die Beziehung

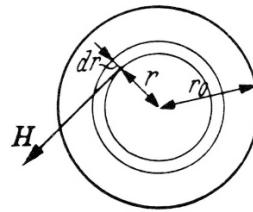


Abbildung 29.1. H-Feld in einem zylindrischen Leiter

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \quad (29.1)$$

wobei hier durchweg vorausgesetzt wird, dass der Verschiebungsstrom im Leiter gegen den Leistungsstrom vernachlässigt werden kann (siehe Abschnitt 33).

Wendet man daher das Durchflutungsgesetz auf einen Kreis vom Radius r an, so folgt für jeden Zeitpunkt

$$2\pi r H = \int_0^r J 2\pi r dr = 2\pi \kappa \int_0^r E r dr, \quad (29.2)$$

oder durch Differenzieren

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r} H = \kappa E. \quad (29.3)$$

H und E bedeuten die Augenblickswerte der Felder.

Um das *Induktionsgesetz* anzuwenden, betrachte man ein in einer Achsenebene des Leiters liegendes Rechteck, Abb. 29.2, dessen eine lange Seite in die Achse fällt, und dessen andere davon den Abstand r hat; die Länge

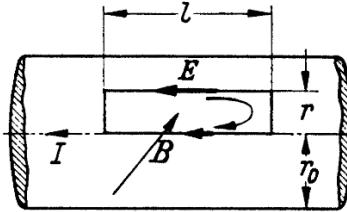


Abbildung 29.2. Anwendung des Induktionsgesetzes

des Rechtecks sei l . Ein solches Rechteck wird von den H-Feldlinien senkrecht durchsetzt, so dass der gesamte magnetische Fluss in dem Rechteck

$$\Phi = \int_0^r Bldr = \mu l \int_0^r Hdr \quad (29.4)$$

beträgt, wenn unter μ die als konstant angesehene Permeabilität des Leitermaterials verstanden wird. Bei der Bestimmung des Linienintegrals des E-Feldes hat man die angenommene Bezugsrichtung des Induktionsflusses im Sinne einer Rechtsschraube zu umkreisen. Dies ergibt

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E|_{r=0}l - E|_r l = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r Hdr; \quad (29.5)$$

die aus den Radien gebildeten Rechteckseiten tragen zu dem Linienintegral nichts bei, da das E-Feld senkrecht auf diesen Seiten steht. Durch Differenzieren nach r ergibt sich

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (29.6)$$

Differenziert man die Gl. (29.3) nach t und führt die eben gefundene Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = \kappa \mu \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (29.7)$$

Um diese partielle Differentialgleichung zu lösen, kann man ein Separationsverfahren anwenden oder wenn man sich auf in der Zeit sinusförmig veränderliche Feldgrößen beschränkt, kann man direkt einen Produktansatz in „komplexer Form“ benutzen. Dabei setzt man für die *komplexen* Augenblickswerte an

$$\tilde{E}(r, t) := E(r) \sqrt{2} e^{j\omega t}, \quad (29.8)$$

$$\tilde{H}(r, t) := H(r) \sqrt{2} e^{j\omega t}, \quad (29.9)$$

$$\tilde{J}(r, t) := J(r) \sqrt{2} e^{j\omega t} \quad (29.10)$$

Die Größen E , H und J stellen für jeden Punkt des Raumes „Zeiger“ in der komplexen Ebene dar. Dabei werden keine gesonderten Bezeichnungen

eingeführt wenn klar ist, ob es sich um den ortsabhängigen komplexen Zeiger $E(r)$ oder die orts- und zeitabhängige *reellen* Größe $E(r, t)$ usw. handelt. Die absoluten Beträge dieser Zeiger geben die Effektivwerte der Größen in dem betreffenden Raumpunkt an. Führt man die Ansätze (29.9) in die Gl. (29.7) ein, so folgt

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + k^2 E = 0. \quad (29.11)$$

Dabei ist gesetzt

$$k^2 := -j\omega\kappa\mu; \quad k = (1-j)\sqrt{\frac{1}{2}\omega\kappa\mu}. \quad (29.12)$$

Aus dem E-Feld folgt das H-Feld mit der Gl. (29.6)

$$H = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{dE}{dr}, \quad (29.13)$$

und es gilt für den komplexen Zeiger der Stromdichte

$$J = \kappa E. \quad (29.14)$$

Die Gl. (29.11) ist die Differentialgleichung für die *Besselschen Funktionen* der Ordnung Null¹. Von den verschiedenen Arten dieser Funktionen kommt hier nur diejenige in Betracht, welche für $r = 0$ endlich ist, da das elektrische Feld überall im Leiterquerschnitt endliche Werte haben muss. Es ist dies die Besselsche Funktion erster Art, die durch die Potenzreihe

$$J_0(kr) = 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^6 + \dots \quad (29.15)$$

definiert ist. Durch Einsetzen in Gl. (29.11) überzeugt man sich leicht, dass diese Funktion die Differentialgleichung befriedigt. Als Lösung der Differentialgleichung ergibt sich daher

$$E(r) = c J_0(kr), \quad (29.16)$$

wobei c eine willkürliche Konstante bedeutet. Um mit Hilfe von Gl. (29.13) das H-Feld zu berechnen, benutzt man die Formel

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \quad (29.17)$$

wobei $J_1(x)$ die Besselsche Funktion *erster* Ordnung bezeichnet. Damit wird

$$H(r) = -c \frac{k}{j\omega\mu} J_1(kr). \quad (29.18)$$

¹ siehe „Besselsche Differentialgleichung“ in Abramowitz und Stegun [2]

Die Integrationskonstante c kann aus dem Effektivwert I des Stromes im Leiter bestimmt werden. Das Durchflutungsgesetz liefert bei Anwendung auf die Randlinie des Leiterquerschnitts

$$H|_{r_0} 2\pi r_0 = I, \quad (29.19)$$

wenn der Stromzeiger als Bezugsgröße willkürlich in die reelle Achse der komplexen Ebene gelegt wird; oder mit Gl. (29.18):

$$c = -\frac{j\omega\mu}{2\pi r_0 k} \frac{I}{J_1(kr_0)}. \quad (29.20)$$

Für das E-Feld und die Stromdichte ergibt sich damit

$$E(r) = -\frac{j\omega\mu}{2\pi r_0 k} I \frac{J_0(kr)}{J_1(kr_0)} = \frac{Ik}{2\pi r_0 \kappa} \frac{J_0(kr)}{J_1(kr_0)}; \quad (29.21)$$

$$J(r) = \frac{Ik}{2\pi r_0} \frac{J_0(kr)}{J_1(kr_0)}. \quad (29.22)$$

Wenn kr sehr klein ist, also bei sehr niedrigen Frequenzen, gilt für $J_0(kr)$ nach Gl. (29.15) die Näherungsformel

$$J_0(kr) \approx 1, \quad (29.23)$$

ebenso mit Gl. (29.17)

$$J_1(kr_0) \approx \frac{1}{2} kr_0. \quad (29.24)$$

Daher wird die Stromdichte

$$J = \frac{I}{r_0^2 \pi}. \quad (29.25)$$

Bei niedrigen Frequenzen ist also der Strom gleichmäßig über den Querschnitt des Leiters verteilt.

Das E-Feld zeigt an, wie groß der Spannungsabfall längs des Leiters ist. Der Spannungsabfall längs einer Mantellinie ($r = r_0$) kann dargestellt werden durch die Wirkung eines Widerstandes R und einer Induktivität L_i . Es gilt also für einen Abschnitt des Leiters von der Länge l

$$I(R + j\omega L_i) = E l = \frac{Ikl}{2\pi r_0 \kappa} \frac{J_0(kr_0)}{J_1(kr_0)}, \quad (29.26)$$

eine Beziehung, aus der die Größen R und L_i durch Gleichsetzen von reellen und imaginären Teilen berechnet werden können². Die Größe R ist maßgebend für die Verluste, die in dem Leiter durch die Stromwärme auftreten; sie stellt den *Wechselstromwiderstand* des Leiters dar. Die Größe L_i gibt den Beitrag des Magnetfeldes im Leiterinneren zur Induktivität des Stromkreises an, ist

² siehe Abramowitz und Stegun [2]

also die *innere Induktivität* bei Wechselstrom. Einfache Formeln ergeben sich für große und kleine Werte von kr_0 , also hohe und niedrige Frequenzen. Setzt man

$$x = \frac{r_0}{2} \sqrt{\pi f \kappa \mu}, \quad (29.27)$$

und führt man den Gleichstromwiderstand

$$R_0 = \frac{l}{r_0^2 \pi \kappa} \quad (29.28)$$

ein, so erhält man mit Hilfe der Potenzreihe (29.15) für kleine Werte von $x (< 1)$ die Näherungsformeln

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{3} x^4, \quad (29.29)$$

$$\frac{\omega L_i}{R_0} = x^2 \left(1 - \frac{x^4}{6} \right). \quad (29.30)$$

und für große Werte von $x (> 1)$ mit Hilfe der für große Werte des Argumentes geltenden Entwicklungen der Besselschen Funktionen

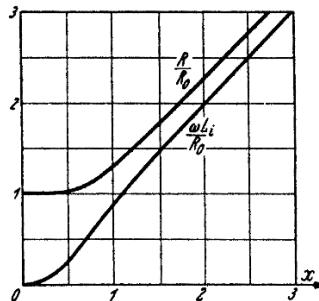


Abbildung 29.3. Wechselstromwiderstand und -induktivität eines Drahtes

$$\frac{R}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x}, \quad (29.31)$$

$$\frac{\omega L_i}{R_0} = x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2}. \quad (29.32)$$

Die Größen R/R_0 und $\omega L_i/R_0$ sind in Abb. 29.3 graphisch dargestellt. Bei sehr hohen Frequenzen wird

$$\omega L_i = R. \quad (29.33)$$

Zahlenbeispiel: Es sei der Widerstand einer Kupferleitung von 4 mm Durchmesser und 1 km Länge für eine Frequenz $f = 40000\text{Hz}$ zu berechnen, $\kappa = 57\text{Sm/mm}^2$.

Es wird

$$x = \frac{1}{2}0,2\text{cm} \sqrt{\pi \cdot 40000 \cdot 5710^4 \cdot 1,257 \cdot 10^{-8}\text{s}^{-1} \frac{\text{S}}{\text{cm cm}}} = 3, \quad (29.34)$$

also nach Gl. (29.31) und Gl. (29.32) $R/R_0 = 3,27$, $\omega L_i/R_0 = 2,98$.

Nun ist

$$R_0 = \frac{1000}{57 \cdot 12,57} \Omega = 1,4 \Omega. \quad (29.35)$$

Daher ergibt sich

$$R = 4,57 \Omega; \quad L_i = \frac{2,98 \cdot 1,4 \Omega s}{40000 \cdot 6,28} = 1,66 \cdot 10^{-5} \text{H}. \quad (29.36)$$

Bei Gleichstrom ist nach Gl. (24.23) die innere Induktivität $L_i = 5 \cdot 10^{-5} \text{H}$.

Die Zunahme des Widerstandes mit der Frequenz ist so zu erklären, dass bei hohen Frequenzen der Strom im wesentlichen in einer Schicht an der Oberfläche des Leiters fließt. Man erkennt dies, wenn man die Näherungsformeln der Besselschen Funktionen J_0 und J_1 mit imaginärem Argument für großes Argument x ($x > 2$) benutzt; vgl. z. B. Bronstein, Semendjajew [44]. Sie lauten

$$|J_0(x2\sqrt{2}\sqrt{-j})| = |J_1(x2\sqrt{2}\sqrt{-j})| = \frac{1}{\sqrt{4\pi x\sqrt{2}}} e^{2x}. \quad (29.37)$$

Damit ergibt sich aus Gl. (29.22) der Effektivwert der Stromdichte

$$J_{eff}(r) = |J(r)| = \frac{I}{2\pi r_0} \sqrt{\omega\kappa\mu} \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{-\sqrt{\omega\kappa\mu}(r_0-r)}. \quad (29.38)$$

Bezeichnet man den Abstand des betrachteten Punktes von der Leiteroberfläche mit y ,

$$r_0 - r = y \quad (29.39)$$

so nimmt also die Stromdichte mit wachsender Tiefe y etwa nach einer Exponentialfunktion ab. Große Werte der Stromdichte finden sich bei hohen Frequenzen nur in der Nähe der Oberfläche des Leiters (*Skineffekt, Hautefekt*).

29.1.2 Ebene Wirbelfelder

Wenn man von vornherein die Voraussetzung macht, dass die stromführende Schicht sehr dünn ist, dann kann man die Krümmung der Leiteroberfläche vernachlässigen und die in Abb. 29.4 dargestellten Verhältnisse zugrunde legen,

die sich bei ebener Begrenzung des Leiters ergeben. Die Feldgrößen hängen dann nur von dem Abstand y von der Leiteroberfläche ab. Die Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{J} haben die Richtung der Leiterachse, die in die z -Richtung fällt. Nach der Rechtsschraubenregel muss dann die positive Richtung des H -Feldes die x -Richtung sein. Wendet man das Durchflutungsgesetz auf das Rechteck a, dy in der x, y -Ebene an, so ergibt sich

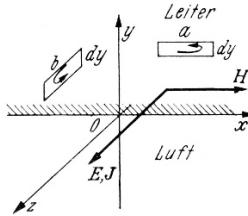


Abbildung 29.4. Ebene Wirbelströmung

$$H a - \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) a = \kappa E a dy, \quad \text{oder} \quad - \frac{dH}{dy} = \kappa E. \quad (29.40)$$

Die Anwendung des Induktionsgesetzes auf ein Rechteck b, dy in der y, z -Ebene ergibt

$$-Eb + \left(E + \frac{\partial E}{\partial y} dy \right) b = -\mu b j \omega H dy, \quad \text{oder} \quad - \frac{dE}{dy} = j \omega \mu H. \quad (29.41)$$

Aus den Gl. (29.40) und (29.41) folgt

$$\frac{d^2 E}{dy^2} = j \omega \kappa \mu E \quad (29.42)$$

mit der Lösung

$$E(y) = c_1 e^{-\beta y - j \beta y} + c_2 e^{\beta y + j \beta y} \quad (29.43)$$

in der

$$\beta = \sqrt{\pi f \kappa \mu} \quad (29.44)$$

bedeutet. Da das E -Feld mit zunehmender Tiefe nicht unbegrenzt zunehmen kann, so muss $c_2 = 0$ sein, also

$$E(y) = c_1 e^{-\beta y - j \beta y}. \quad (29.45)$$

Man erhält den (reellen) Augenblickswert $E(y, t)$ in irgend einem Zeitpunkt t , wenn man den Zeiger $E(r)$ mit $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ multipliziert, also mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren lässt und die Projektion auf eine feste Achse, z. B. auf die imaginäre Achse, bildet; man findet

$$E(y, t) = \sqrt{2}c_1 e^{-\beta y} \sin(\omega t - \beta y). \quad (29.46)$$

Diese Formel stellt eine Welle dar, die von der Oberfläche des Leiters nach innen fortschreitet. Verfolgt man nämlich die Punkte gleicher Schwingungsphase, so gilt für sie

$$\omega t - \beta y = \text{konst.} \quad (29.47)$$

oder

$$y = \frac{\omega}{\beta}t + \text{konst.} \quad (29.48)$$

Die Geschwindigkeit des Fortschreitens der Schwingungsphase ist also durch

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (29.49)$$

gegeben, die man Phasengeschwindigkeit nennt. Dabei nehmen die Amplituden beim Fortschreiten gemäß einem Exponentialgesetz ab. In Abb. 29.5 sind die augenblicklichen Werte des E-Feld in Abhängigkeit von der Tiefe unter der Oberfläche und für verschiedene Zeitpunkte dargestellt. An dieser Stelle

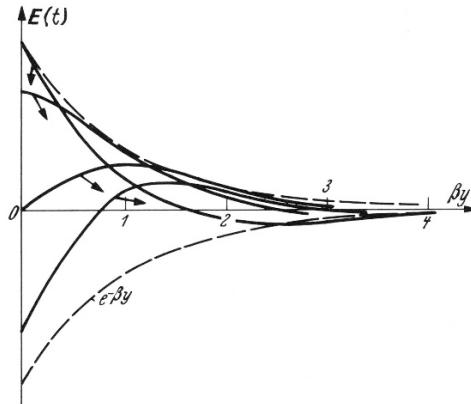


Abbildung 29.5. Eindringen des E-Feldes in den Leiter

soll angemerkt werden, dass es sich natürlich nicht um die „Wellenlösung“ einer Wellengleichung handelt, da Wirbelstromeffekte wie in Abschnitt 26.5 dargelegt, durch partielle Differentialgleichungen vom Typ einer Diffusionsgleichung mathematisch beschrieben werden, die jedoch im Fall von zeitlich sinusförmiger Änderung der Größen zu „schwingenden“ Lösungen mit „Dämpfung“ führen.

Die Tiefe δ , bei der das E-Feld auf den e -ten Teil ihres Oberflächenwertes abgenommen hat, bezeichnet man als *Eindringmaß*

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \kappa \mu}}. \quad (29.50)$$

Die *Eindringtiefe* des Feldes beträgt $4 \cdots 8 \delta$. Für das H-Feld ergibt sich aus Gl.(29.41)

$$H = \frac{1+j}{j} \frac{\beta}{\omega\mu} E. \quad (29.51)$$

Der Faktor

$$\frac{1+j}{j} = \frac{1}{j} + 1 = -j + 1 \quad (29.52)$$

stellt in der Zahlenebene, Abb. 29.6, einen Zeiger vom Betrag $\sqrt{2}$ dar, der einen Winkel von $-\pi/4$ mit der reellen Achse bildet. Daraus geht hervor, dass der Zeiger des H-Feldes dem Zeiger des E-Feldes um 45° nacheilt. Das H-Feld dringt im übrigen in der gleichen Weise in das Leiterinnere ein wie das E-Feld. Die Konstante c_1 kann wieder aus dem Durchflutungsgesetz berechnet

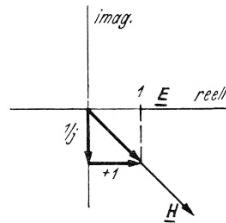


Abbildung 29.6. Phasenverschiebung zwischen E- und H-Feld

werden. An der Oberfläche des Leiters ist nach den Gl. (29.45) und (29.51)

$$H = \frac{1+j}{j} \frac{\beta}{\omega\mu} c_1 E. \quad (29.53)$$

Bei einem kreiszylindrischen Leiter ist der Umfang des Leiterquerschnittes $2\pi r_0$. Daher liefert das Durchflutungsgesetz

$$\frac{1+j}{j} \frac{\beta}{\omega\mu} c_1 2\pi r_0 = I, \quad (29.54)$$

wenn der Stromzeiger wieder in die reelle Achse der komplexen Ebene gelegt wird. Daraus folgt

$$c_1 = \frac{j}{1+j} \frac{\omega\mu}{\beta 2\pi r_0} I. \quad (29.55)$$

Der Spannungsabfall an der Leiteroberfläche liefert den Wechselstromwiderstand und die innere Induktivität des Leiters

$$R + \omega L_i = \frac{j}{1+j} \frac{\omega\mu}{\beta 2\pi r_0} l = \frac{1+j}{2} \frac{\omega\mu}{\beta} \frac{l}{2\pi r_0}. \quad (29.56)$$

Für genügend hohe Frequenzen gilt also

$$R = \omega L_i = \frac{l}{2r_0} \sqrt{\frac{\mu f}{\pi \kappa}} = \frac{l}{\kappa 2\pi r_0 \delta}, \quad (29.57)$$

wie es auch aus den Gl. (29.31), (29.32) und (29.33) hervorgeht. Gl. (29.57) zeigt, das R durch den Gleichstromwiderstand eines Rohres vom Radius r_0 und der Dicke δ gegeben ist; δ wird daher auch *äquivalente Leitschichtdicke* genannt.

Der Wechselstromwiderstand wächst mit der Wurzel aus der Frequenz, während die innere Induktivität umgekehrt proportional mit der Wurzel aus der Frequenz abnimmt. Es handelt sich also um eine irrationale Impedanz, die nicht in den Rahmen der üblichen Netzwerktheorie mit konzentrierten Bauelementen passt. Darauf wird in der Literatur häufig nicht hingewiesen. Eine ausführliche Studie über irrationale Impedanzen findet man bei Belevitch [21]. Neuere Anwendungen von Skineffekt-Modellen im Hinblick auf die Modellierung der Aufbau- und Verbindungstechnologie (Packaging) von integrierten Schaltungen findet man bei Engin und Mathis et al. [72]; siehe auch die Monographie von Swaminathan, Engin [272].

Zahlenbeispiel: Für das vorige Beispiel ergibt sich mit

$$\beta = 30 \text{ cm}^{-1} \quad (29.58)$$

das Eindringmaß

$$\delta = \frac{1}{30} \text{ cm} = 0,333 \text{ mm}. \quad (29.59)$$

Die Eindringtiefe hat die Größenordnung des Leiterradius. Trotzdem ergeben die Formel (29.57) noch eine einigermaßen gute Annäherung. Sie liefern für den Widerstand

$$R = \omega L_i = \frac{1000 \text{ m}}{2 \cdot 0,2 \text{ cm}} \sqrt{\frac{40000 \cdot 1,257 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \text{ H cm}}{\pi \cdot 57 \cdot 10^4 \text{ cm S}}} = 4,2 \Omega. \quad (29.60)$$

und für die innere Induktivität

$$L_i = \frac{4,2 \Omega \text{ s}}{40000 \cdot 6,28} \text{ cm} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ H}. \quad (29.61)$$

Bei der Frequenz von 40 kHz wird die Laufgeschwindigkeit der in das Kupfer von der Oberfläche her eindringenden „Welle“ nach Gl. (29.49)

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi 40 \cdot 10^3 \text{ cm}}{30 \text{ s}} \approx 84 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (29.62)$$

Es ist sehr zweckmäßig, das Eindringmaß für verschiedene Materialien (Kupfer, Aluminium, Eisen) anhand von Formel 29.57 mit einem Taschenrechner zu studieren, um ein Gefühl für die Größenordnung solcher Eindringtiefen zu gewinnen. Z. B. ist das Eindringmaß bei Kupfer bei 50 Hz gleich $9,44 \text{ mm}$, bei 1 MHz nur $0,0667 \text{ mm}$.

Bei hohen Frequenzen sind die elektrischen und magnetischen Felder wegen der geringen Eindringtiefe der metallischen Leiter praktisch auf die isolierenden Räume beschränkt. Bei langgestreckten Leiteranordnungen beliebigen Querschnitts werden die magnetischen Feldlinien wegen der Führung an den Leiteroberflächen identisch mit elektrischen Potenziallinien. Daher besteht zwischen der Induktivität und der Kapazität von Leitungen ein allgemeiner Zusammenhang. Betrachtet man die Funktion $u(x, y)$ Gl. (11.47) als Potenzialfunktion des E-Feldes, dann gibt $v(x, y)$ das magnetische Potenzial an. Für die Kapazität zwischen zwei Leitern gilt nach Gl. (11.65)

$$C = \frac{U}{I} = \frac{\varepsilon l \oint dv}{\int du}. \quad (29.63)$$

Dabei ist das Integral über dv längs des Leiterumfanges zu nehmen, das Integral über du von der einen zur anderen Leiteroberfläche. Ganz analog gilt für die Induktivität

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l \int du}{\oint dv}. \quad (29.64)$$

Daraus folgt

$$LC = \varepsilon \mu_0 l^2. \quad (29.65)$$

Das Produkt aus Induktivität und Kapazität einer Leitung ist bei hohen Frequenzen unabhängig von der geometrischen Form der Leiter und ihrer Anordnung und nur bestimmt durch Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des Isolierstoffes und die Leitungslänge.

Die bisher betrachtete Form der Stromverdrängung bezeichnet man als allseitige Stromverdrängung. Dazu gehört auch die Stromverteilung in einem leitenden Stoff, der als Rückleitung eines in diesen Stoff isoliert eingebetteten Leiters dient, wie z. B. im Seewasser als Rückleitung eines einadrigen Telegrafenkabels. Hier werden die Stromlinien im Wasser zum Kabel hingedrängt. Sie schnüren sich mit wachsender Frequenz immer enger in der Umgebung des Kabels zusammen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Rückleitung des Stromes einer oberirdischen Leitung durch die Erde; auch hier drängen sich die Stromlinien des Rückstromes in der Erde bei höheren Frequenzen immer dichter unterhalb der Leitung zusammen, so dass der Rückstrom im wesentlichen in einem Kanal unterhalb der Leitung fließt, dessen Querschnitt bei höheren Frequenzen immer kleiner wird. Für das Eindringmaß gilt in allen diesen Fällen die Gl. (29.50).

29.1.3 Einseitige Stromverdrängung in Ankerleitern und Spulen

Eine *einseitige Stromverdrängung* tritt bei den in die Nuten eines Eisenkörpers eingebetteten Kupferleitern der elektrischen Maschinen auf, Abb. 29.7. Das durch die Leiter erzeugte magnetische Feld hat Feldlinien, die angenähert senkrecht aus den Zahmflanken austreten und nahezu geradlinig von der einen

Zahnflanke zur anderen übergehen. Die Feldlinien schließen sich im Eisen, wie in Abb. 29.7 angedeutet. Wird der magnetische Widerstand des Eisenweges gegen den des Luftweges vernachlässigt, so ist nach dem Durchflutungsgesetz das H-Feld an jeder Stelle des Luftspaltes proportional dem darunter fließenden Strom. Wäre der Strom gleichmäßig über die Leiter verteilt, so würde die Feldverteilung die neben der Nut aufgezeichnete sein.

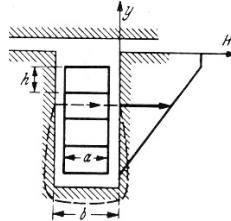


Abbildung 29.7. Zur Untersuchung der einseitigen „Stromverdrängung“

Bei Wechselstrom gilt innerhalb der Leiter die Gl. (29.41), wenn als positive Richtung für $\|\mathbf{E}\|$ die aus der Zeichenebene herauszeigende Richtung gewählt wird. Das Durchflutungsgesetz liefert, auf ein schmales horizontales Rechteck in der Nut von der Höhe dy und der Breite b angewendet, analog zu Gl. (29.40)

$$-\frac{dH}{dy} = \kappa \frac{a}{b} E, \quad (29.66)$$

wobei der zeitliche Anteil separiert und in komplexer Form abgetrennt wurde (vgl. Abschnitt 29.1.1).

In ähnlicher Weise wie oben lassen sich Gl. (29.40) und Gl. (29.66) zu einer einzigen vereinigen mit der Lösung (29.43), wobei jedoch

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{b} \pi f \kappa \mu}. \quad (29.67)$$

Daraus folgt für das H-Feld mit Gl. (29.41)

$$H(y) = \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} (c_1 e^{-\beta y - j\beta y} - c_2 e^{+\beta y + j\beta y}). \quad (29.68)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 ergeben sich aus den Grenzbedingungen. Betrachten wir den p -ten Leiter der Nut von unten gezählt und legen wir den Nullpunkt der y -Achse in die untere Kante dieses Leiters, bezeichnen wir ferner mit I_1 den Strom in einem einzelnen Leiter, so ist die Durchflutung der durch $y = 0$ definierten Feldlinie $(p-1)I_1$ die Durchflutung der durch $y = h$ gehenden Feldlinie pI_1 . Das Durchflutungsgesetz liefert für diese beiden Feldlinien

$$(p-1)I_1 = -b \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} (c_1 - c_2), \quad (29.69)$$

$$pI_1 = -b \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} (c_1 e^{-\beta h - j\beta h} - c_2 e^{+\beta h + j\beta h}), \quad (29.70)$$

und es folgt durch Auflösen

$$c_1 = \frac{j\omega\mu}{(1+j)b\beta} \frac{pI_1 - (p-1)I_1 e^{\beta h + j\beta h}}{2 \sinh \beta(1+j)h}; \quad (29.71)$$

$$c_2 = \frac{j\omega\mu}{(1+j)b\beta} \frac{pI_1 - (p-1)I_1 e^{-\beta h - j\beta h}}{2 \sinh \beta(1+j)h}. \quad (29.72)$$

Führt man diese Werte in Gl. (29.43) ein und berechnet die Stromdichte, so folgt

$$J(y) = \frac{j\omega\kappa\mu}{(1+j)b\beta} \frac{pI_1 \cosh \beta(1+j)y - (p-1)I_1 \cosh \beta(1+j)(h-y)}{\sinh \beta(1+j)h}. \quad (29.73)$$

Um den Effektivwert der Stromdichte hieraus berechnen zu können, muss man die Hyperbelfunktionen in die reellen und imaginären Teile zerlegen. Dazu dienen die beiden folgenden Formeln (vgl. Merziger et al. [199])

$$\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + j \cosh x \sin y, \quad (29.74)$$

$$\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + j \sinh x \sin y. \quad (29.75)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann der Betrag der komplexen Stromdichte J , der den Effektivwert J_{eff} der Stromdichte angibt, gebildet werden.

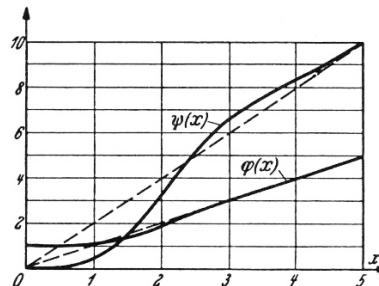


Abbildung 29.8. Zur Berechnung der Widerstandserhöhung eines Leiters in der Nut

Aus dem Effektivwert der Stromdichte ergeben sich die Verluste in einem Abschnitt von der Höhe dy des Stabes mit Hilfe von Gl. (16.20). Die Gesamtverluste in dem Stab erhält man durch Summieren der einzelnen Beiträge über die Höhe des Stabes

$$P = al \int_0^h J^2 \frac{1}{\kappa} dy. \quad (29.76)$$

Der Wirkwiderstand R_1 des Stabes ist definiert durch

$$P = I_1^2 R_1. \quad (29.77)$$

Durch Ausrechnung ergibt sich damit die folgende Beziehung

$$\frac{R_1}{R_0} = \varphi(x) + p(p-1)\psi(x), \quad (29.78)$$

in der R_0 den Gleichstromwiderstand des Stabes bezeichnet,

$$R_0 = \frac{l}{\kappa ah}, \quad (29.79)$$

und

$$x = \beta h = h \sqrt{\frac{a}{b} \pi \kappa f \mu}. \quad (29.80)$$

Es bedeutet ferner

$$\varphi(x) = x \frac{\sinh 2x + \sin 2x}{\cosh 2x - \cos 2x}, \quad (29.81)$$

$$\psi(x) = 2x \frac{\sinh x + \sin x}{\cosh x - \cos x}. \quad (29.82)$$

Das erste Glied (29.78) Leiters liegenden Stäbe in dem betrachteten Leiter zusätzliche Wirbelströme hervorruft. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind in Abb. 29.8 dargestellt¹. Die Abb. 29.9 veranschaulicht die Stromverteilung in den drei Stäben einer Nut für $x = 3$. Die Stromdichte in den aneinander

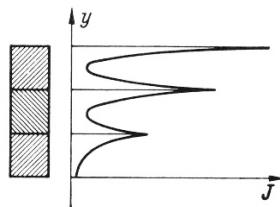


Abbildung 29.9. Stromverteilung in den drei Leitern einer Nut

liegenden Begrenzungsflächen der Stäbe sind im allgemeinen voneinander verschieden. Setzt man z. B. in Abb. 29.9 die Stromdichte an der unteren Kante des unteren Leiters = 1, so ist die Stromdichte an der oberen Kante dieses Leiters rund 10; die Stromdichte an der unteren Kante des folgenden Stabes ist rund 12, an der oberen Kante 21; beim dritten Stab ist die Stromdichte an der

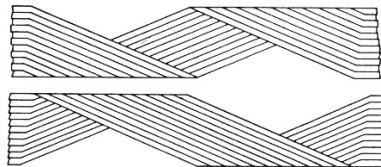


Abbildung 29.10. Schrägstab

unteren Kante 23, an der oberen 32. Dagegen geht das H-Feld natürlich von Stab zu Stab stetig über. Um die Widerstandserhöhung zu vermindern, stellt man die Leiter als Litze her, indem man sie unterteilt. Die einzelnen Drähte der Litze müssen dabei so durch das Gesamtfeld des Leiters hindurchgeführt werden, dass der von je zwei Litzendrähten umschlungene Fluss möglichst klein wird. Als Beispiel zeigt Abb. 29.10 die beiden Hälften eines „Schrängstabes“; die beiden Hälften werden ineinander gelegt, so dass alle Leiter einmal umeinander herumgeführt sind. Wie in Abb. 29.11 veranschaulicht, heben sich die von zwei beliebigen Leitern einer Stabhälfte umschlungenen Flüsse gerade auf; die beiden von den Pfeilen rechts umlaufenden und mit – bezeichneten Flächen ergeben zusammengesetzt eine Fläche, die gleichwertig der links umlaufenen +Fläche ist.

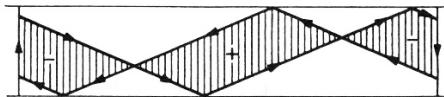


Abbildung 29.11. Flussverkettung des Schrägstabes

29.1.4 Wirbelströme in Eisenblechkernen

Ein weiteres Beispiel für die Felddiffusion oder *Feldverdrängung* geben die in Eisenblechpaketen entstehenden Wirbelströme. Die Wirbelströme umkreisen das magnetische Feld innerhalb eines jeden Bleches, wie es Abb. 29.12 zeigt. Unter der Voraussetzung konstanter Permeabilität des Bleches und so kleiner Dicke d im Vergleich zur Breite b , dass die Wirbelströmung im wesentlichen geradlinig verläuft, gelten die Gl. (29.40) und (29.41) mit den Lösungen (29.43), (29.44) und (29.68). Legen wir den Nullpunkt der y -Achse in die Blechmitte, und bezeichnen wir den Effektivwert des H-Feldes an den Begrenzungsflächen des Bleches mit H_0 , so ergeben sich die Konstanten c_1 und c_2 aus den Bedingungen

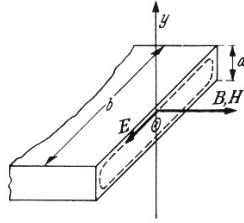


Abbildung 29.12. Wirbelströme in einem Eisenblech

$$H = H_0 = \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} \left(c_1 e^{-\beta(1+j)d/2} - c_2 e^{+\beta(1+j)d/2} \right); \quad (29.83)$$

$$H = H_0 = \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} \left(c_1 e^{+\beta(1+j)d/2} - c_2 e^{-\beta(1+j)d/2} \right). \quad (29.84)$$

für $y = +d/2$ bzw. $y = -d/2$. Daraus folgt

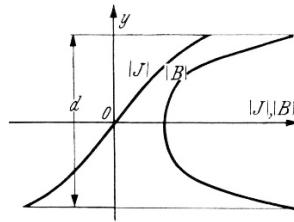


Abbildung 29.13. Strom- und Feldverteilung in dem Eisenblech

$$c_1 = -c_2 = \frac{j\omega\mu H_0}{(1+j)\beta 2 \cosh \beta(1+j)(d/2)}, \quad (29.85)$$

und es wird

$$B(y) = \mu H(y) = \mu H_0 \frac{\cosh \beta(1+j)y}{\cosh \beta(1+j)(d/2)}, \quad (29.86)$$

und nach Gl. (29.40)

$$J(y) = -\frac{dH}{dy} = -\beta(1+j)H_0 \frac{\sinh \beta(1+j)y}{\cosh \beta(1+j)d/2}. \quad (29.87)$$

Für den Effektivwert der komplexen Stromdichte J_{eff} ergibt sich daraus

$$J_{eff} = |J| = \beta\sqrt{2}H_0 \frac{\sqrt{\cosh 2\beta y - \cos 2\beta y}}{\sqrt{\cosh \beta d + \cos \beta d}}. \quad (29.88)$$

In Abb. 29.13 ist die Verteilung des B-Feldes und der Stromdichte über den Querschnitt des Bleches veranschaulicht. Die magnetischen Feldlinien scheinen nach außen hin zusammengedrängt zu werden.

Der ganze durch den Blechstreifen geführte magnetische Fluss ist darstellbar durch den Zeiger

$$\Phi = \int_{-d/2}^{d/2} bBdy = \frac{2\mu bH_0}{(1+j)\beta} \tanh \beta(1+j) \frac{d}{2}, \quad (29.89)$$

wobei der komplexe Fluss nicht gesondert bezeichnet wird, da sich im folgenden aus dem Zusammenhang ergibt, ob es sich um den komplexen Fluss handelt oder nicht. Er hat den Scheitelwert

$$\sqrt{2}|\Phi| = \frac{2\mu bH_0}{\beta} \sqrt{\frac{\cosh \beta d - \cos \beta d}{\cosh \beta d + \cos \beta d}}. \quad (29.90)$$

Daraus erhält man das mittlere B-Feld durch Division mit dem Querschnitt bd des Bleches; ihr Scheitelwert ist:

$$B_m = 2\mu H_0 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\cosh x - \cos x}{\cosh x + \cos x}}, \quad (29.91)$$

wobei

$$x = \beta d \quad (29.92)$$

gesetzt ist. Für die Verluste in dem Volumen V des Bleches ergibt sich, wenn an Stelle von H_0 mit Hilfe von Gl. (29.91) die mittlere Induktion B_m in Gl. (29.87) eingeführt wird,

$$V \frac{1}{\kappa d} \int_{-d/2}^{d/2} J^2 dy = \frac{1}{24} \kappa \omega^2 d^2 B_m^2 \frac{3 \sinh x - \sin x}{x \cosh x - \cos x} V. \quad (29.93)$$

Die hier vorkommende Funktion

$$F(x) = \frac{3 \sinh x - \sin x}{x \cosh x - \cos x} \quad (29.94)$$

ist in Abb. 29.14 dargestellt. Die in einem aus derartigen Blechen zusam-

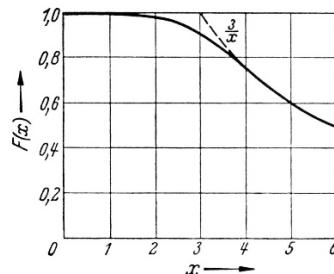


Abbildung 29.14. Zur Berechnung der Wirbelstromverluste

mengesetzten Eisenkern mit dem Volumen V entstehenden *Wirbelstromverluste* betragen also

$$P_w = \frac{1}{24} \kappa \omega^2 d^2 B_m^2 V F(x). \quad (29.95)$$

Für kleine Werte von x ist $F(x) \approx 1$. Damit ergibt sich die Näherungsformel

$$P_w \approx \frac{1}{24} \kappa \omega^2 d^2 B_m^2 V. \quad (29.96)$$

Die Wirbelstromverluste wachsen im Gebiet niedriger Frequenzen proportional mit dem Quadrat der Frequenz und dem der Blechdicke, so dass man durch Verkleinern der Blechdicke die Wirbelstromverluste erheblich vermindern kann. Für große Werte von x ist

$$F(x) \approx \frac{3}{x}. \quad (29.97)$$

Im Gebiet hoher Frequenzen wachsen also die Verluste bei *konstantem B-Feld* wie

$$d\omega^{3/2}. \quad (29.98)$$

Befindet sich auf dem geschlossenen Eisenkern eine Wicklung mit N Windungen, und beträgt die mittlere Feldlinienlänge l , so gilt nach dem Durchflutungsgesetz

$$H_0 = \frac{IN}{l}. \quad (29.99)$$

Die in der Wicklung vom magnetischen Fluss Φ_k des ganzen Blechpaketes induzierte Spannung ist

$$u_L = N \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (29.100)$$

oder unter Einführung komplexer Größen

$$U_L = j\omega N\Phi_k, \quad (29.101)$$

wobei auch hier keine neuen Bezeichnungen eingeführt werden. Der magnetische Fluss Φ_k ist durch die Summe der in den einzelnen Blechen geführten Flüsse gegeben. Bezeichnet man daher die Höhe des Eisenblechpaketes mit a , so gilt nach Gl. (29.89) für den Fluss

$$\Phi_k = \frac{2\mu abH_0}{(1+j)\beta d} \tanh \beta(1+j) \frac{d}{2}. \quad (29.102)$$

Damit kann man berechnen, wie groß der Beitrag des Eisenkernes zu dem *komplexen Wechselstromwiderstand* der Spule ist. Es ergibt sich

$$Z := \frac{U_L}{I} = \frac{2\mu abj\omega N^2}{(1+j)\beta ld} \tanh \beta(1+j) \frac{d}{2}. \quad (29.103)$$

Diese Impedanz ist natürlich wiederum irrational, so dass die gleichen Hinweise gelten wie zuvor.

Für sehr niedrige Frequenzen folgt daraus

$$Z = \frac{\mu abN^2}{l} j\omega = j\omega L_0, \quad (29.104)$$

wenn mit

$$L_0 := \frac{\mu abN^2}{l}. \quad (29.105)$$

die *Gleichstrominduktivität* der Spule eingeführt wird.

Allgemein wird damit nach Gl. (29.103)

$$Z = L_0 \frac{2j\omega}{(1+j)\beta d} \tanh \beta(1+j) \frac{d}{2}. \quad (29.106)$$

Durch Zerlegen in den reellen und imaginären Teil findet man für die *Wechselstrominduktivität* der Spule

$$L = L_0 \frac{1}{x} \frac{\sinh x + \sin x}{\cosh x + \cos x} \quad (29.107)$$

und für den *Wirbelstromwiderstand* der Spule

$$R = \omega L_0 \frac{1}{x} \frac{\sinh x - \sin x}{\cosh x + \cos x}. \quad (29.108)$$

Die Abb. 29.15 zeigt den Verlauf der beiden Funktionen

$$F_1(x) = \frac{1}{x} \frac{\sinh x + \sin x}{\cosh x + \cos x}, \quad (29.109)$$

$$F_2(x) = \frac{1}{x} \frac{\sinh x - \sin x}{\cosh x + \cos x}. \quad (29.110)$$

Für niedrige Frequenzen ($x < 0,5$) ergeben sich die Näherungsformeln

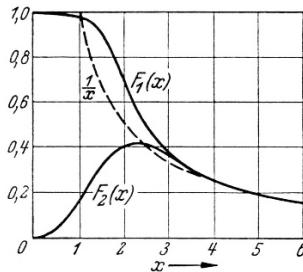


Abbildung 29.15. Zur Berechnung von Induktivität und Wirkwiderstand

$$R \approx \omega L_0 \frac{x^2}{6} = \frac{1}{12} \kappa \mu \omega^2 d^2 L_0; \quad L \approx L_0. \quad (29.111)$$

Für hohe Frequenzen ($x > 4$) wird angenähert

$$R = \omega L = \frac{\omega L_0}{x} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{4\pi f}{\kappa \mu}} L_0. \quad (29.112)$$

Die Grenze, oberhalb der infolge der „Feldverdrängung“ eine erhebliche Schwächung des Feldes auftritt, ist etwa durch $x = 1$ gegeben. Die dadurch definierte Frequenz bezeichnet man als *Grenzfrequenz des Bleches*. Es gilt für diese Frequenz

$$\beta d = d \sqrt{\pi f_g \kappa \mu} = 1. \quad (29.113)$$

also

$$f_g = \frac{1}{\pi \kappa \mu d^2}. \quad (29.114)$$

Sie lässt sich durch Verkleinern der Blechdicke und durch Wahl eines Materials mit möglichst geringer Leitfähigkeit erhöhen. Bei der Grenzfrequenz ist die Induktivität um etwa 4% kleiner als bei Gleichstrom.

Zahlenbeispiel: Eine Drosselspule habe eine Gleichstrominduktivität $L_0 = 0,2H$; der Kern sei aus besonders dicken Eisenblechen mit $d = 0,2cm$ zusammengesetzt. Die Leitfähigkeit des Eisens sei $a = 7 \cdot 10^4 S/cm$; die Permeabilität sei $\mu_r = 200$. Dann ergibt sich

$$x = 0,2cm \sqrt{\pi f \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 200 \cdot 1,257 \cdot 10^{-8} \frac{S}{cm \cdot cm}} = 0,149 \sqrt{\frac{f}{Hz}}. \quad (29.115)$$

Die Grenzfrequenz des Bleches ist $f_g = 45Hz$. Die Näherungsformeln für hohe

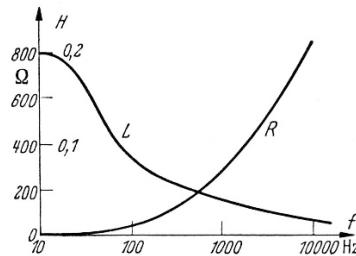


Abbildung 29.16. Induktivität und Wirbelstromwiderstand einer Drosselspule mit Eisenblechkern

Frequenzen gelten also etwa oberhalb $f = 200Hz$. Hier nimmt die Induktivität umgekehrt proportional mit der Wurzel aus der Frequenz ab, während der Wirbelstromwiderstand im gleichen Maße zunimmt. In Abb. 29.16 sind die Größen R und L in Abhängigkeit von der Frequenz f dargestellt.

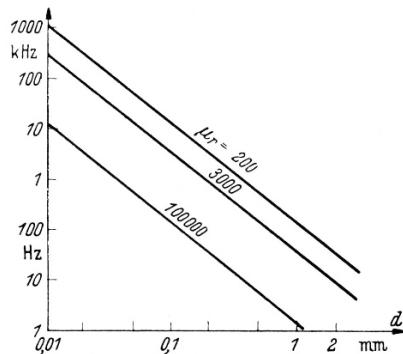


Abbildung 29.17. Grenzfrequenz verschiedener Eisenbleche

29.1.5 Abschirmung von Hochfrequenzfeldern

Wird in ein magnetisches Wechselfeld ein Metallblech gebracht, so entstehen in dem Blech Wirbelströme, die dem erzeugenden Feld entgegenwirken. Man kann daher mit Hilfe von Metallblechen magnetische Wechselfelder abschirmen, z. B. die Streufelder einer Drosselspule dadurch, dass man die Spule in ein Blechgehäuse einschließt. Für solche *elektromagnetischen Schirme* gelten die gleichen Gesetze wie sie hier betrachtet wurden. Die Wirbelstromverluste werden von dem Stromkreis gedeckt, der das magnetische Feld erzeugt. Besonders einfach liegt der Fall, wenn die Eindringtiefe so klein ist, dass nur ein kleiner Bruchteil des Feldes durch die Blechhülle hindurchgelangt. Dann wird das magnetische Feld innerhalb des Schirmes geführt wie eine Flüssigkeitssströmung in einem Gefäß, so dass das H-Feld H_0 an der Blechoberfläche nach Abschnitt 21.5 leicht berechnet werden kann; für den Zeiger der Stromdichte folgt aus Gl. (29.45) und (29.53), wenn man den Zeiger des H-Feldes als Bezugsgröße durch den Effektivwert H_0 ersetzt,

$$J(y) = \beta(1+j) H_0 e^{-\beta(1+j)y}. \quad (29.116)$$

Dabei ist $\beta = \sqrt{\pi f \kappa \mu}$ und y der Abstand des betrachteten Punktes im Blech von der Blechoberfläche. Für die in dem Flächenelement dA des Bleches in Wärme umgesetzte Verlustleistung ergibt sich

$$dP_w = \frac{dA}{\kappa} \int_0^\infty |J(y)|^2 dy = H_0^2 \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\kappa}} dA. \quad (29.117)$$

Die Gesamtverluste ergeben sich durch Summieren über die gesamte Oberfläche der Schirmhülle.

Die Schirmwirkung ist um so besser, je größer β ist. Große Leitfähigkeit ergibt daher eine gute Schirmwirkung und ist hinsichtlich der Verluste günstig, während hohe Permeabilität zwar für die Schirmwirkung vorteilhaft ist, aber zu größeren Verlusten führt (siehe Abschnitt 34). Um eine möglichst gute

Schirmwirkung zu bekommen, verwendet man Doppelgehäuse, die innen aus Kupfer oder Aluminium, außen aus Eisenblech bestehen. Das Kupferblech setzt das magnetische Feld so weit herab, dass im Eisen keine erheblichen Verluste mehr entstehen können, während das Eisenblech das restliche Feld abschirmt.

29.1.6 Triebströme eines Wechselstromzählers

In manchen Fällen kann man die Wirbelströmung angenähert berechnen, wenn man die Rückwirkung der Wirbelströme auf das erzeugte Feld vernachlässigt; das ist allgemein bei sehr niedrigen Frequenzen zulässig. Als Beispiel werde die Strömung in der *Tribscheibe eines Wechselstromzählers* betrachtet. Wir machen dabei die vereinfachende Annahme, dass der magnetische Induktionsfluss in Form eines zylindrischen Bündels mit dem gegen den Radius r_0 der Tribscheibe kleinen Radius r_k durch die Tribscheibe hindurch geht, Abb. 29.18. In den außerhalb des Feldlinienbündels liegenden Teilen der Blechscheibe gilt für jeden geschlossenen Weg, der mit dem Kraftlinienbündel nicht verkettet ist,

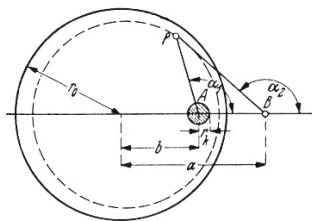


Abbildung 29.18. Triebströme eines Induktionszählers

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (29.118)$$

d. h. das elektrische Feld und damit das Strömungsfeld sind wirbelfrei. Es kann daher das E-Feld aus einem skalaren Potenzial φ abgeleitet werden, für das die Potenzialgleichung (14.15) gilt wie in einem stationären Strömungsfeld. Da die Strömung am Rand der Blechscheibe tangential verlaufen muss, so ist der Rand der Scheibe eine Stromlinie. Ferner müssen die das Feldlinienbündel umgebenden Stromlinien aus Symmetriegründen konzentrische Kreise sein. Es ergibt sich also ein Stromlinienbild, das dem Bild der Potenziallinien des elektrischen Feldes zwischen zwei geraden parallelen Leitern entspricht, Abb. 10.14. Der Abstand des zweiten Leiters, B in Abb. 29.18, vom Mittelpunkt der Scheibe ist

$$a = \frac{r_0^2}{b}. \quad (29.119)$$

Die Potenziallinien des Wirbelstromfeldes sind Kreise, die die Strecke \overline{AB} als Sehne haben. Das Potenzial ist also in irgendeinem Punkt P

$$\varphi = c(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (29.120)$$

Die Konstante c wird aus dem Induktionsgesetz bestimmt, nach dem die Umlaufspannung um den Punkte gleich der Abnahmegeschwindigkeit des Flusses ist. Geht man einmal um den Punkt A herum, so wächst α_1 von Null auf 2π , während α_2 auf seinen Anfangswert zurückkommt. Es gilt daher, wenn mit ω die Kreisfrequenz des Wechselflusses in A bezeichnet wird, mit Φ der Zeiger vom Betrag des Effektivwertes,

$$-c2\pi = -j\omega\Phi; \quad (29.121)$$

also wird der Zeiger des wechselnden Potenzials

$$\varphi = \frac{j\omega\Phi}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (29.122)$$

Für Punkte *innerhalb* des von Feldlinien durchsetzten Teiles der Scheibe gilt für das E-Feld nach dem Induktionsgesetz

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E2\pi r = -j\omega\Phi \frac{r^2}{r_k^2}. \quad (29.123)$$

Damit ist das Feld in jedem Punkt der Scheibe bekannt. Es ist jedoch zu beachten, dass dieses Resultat nur gilt, wenn das durch die Wirbelströme erzeugte magnetische Feld vernachlässigbar klein ist gegen das durch den Fluss Φ gegebene ursprüngliche Feld.

29.2 Ummagnetisierungsverluste bei ferromagnetischen Werkstoffen

Bei ferromagnetischen Stoffen entstehen im magnetischen Wechselfeld neben den Wirbelstromverlusten noch Verluste infolge der Hysterese. Ein Teil der Energie, die zur Verschiebung der Blochwände und für das Umklappen der Molekularmagnete erforderlich ist, erhöht den Wärmeinhalt des Magnetstofes.

Die Hystereseverluste können aus der Hystereseschleife berechnet werden. Entsprechende systematische Rechnungen wurden erstmals von Steinmetz ausgeführt; vgl. Steinmetz [268]. Hinweise zur mathematischen Modellierung von Hystereseffekten findet man in Abschnitt 20.3. Nach Abschnitt 23 wird bei der Magnetisierung eines Stoffes Energie aufgenommen mit der Dichte

$$w = \int_0^B H dB. \quad (29.124)$$

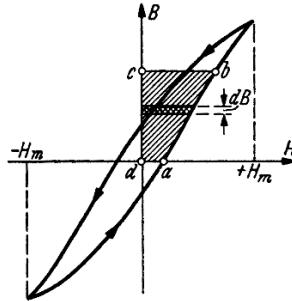


Abbildung 29.19. Berechnung Hystereseverluste

Im magnetischen Wechselfeld pendelt die magnetische Erregung zwischen zwei Grenzen $\pm H_m$, Abb. 29.19. Das Integral (29.124) stellt in irgendeinem Zeitpunkt die in Abb. 33.1 schraffierte Fläche $abcd$ dar, wenn mit der Berechnung im Punkt a begonnen wird. Während einer Periode durchläuft der Punkt b die ganze Hystereseschleife. Würden die beiden Äste der Hystereseschleife zusammenfallen, dann wäre die in der einen halben Periode vom Eisen aufgenommene Energie genau so groß wie die während der zweiten Halbperiode abgegebene. Da dies nicht der Fall ist, so bleibt bei einem vollen Umlauf eine Differenz zwischen aufgenommener und abgegebener Energie, die durch die von der Hystereseschleife berandete Fläche dargestellt wird. Diese Differenz ist die Arbeit, die während einer Periode im Eisen in Wärme umgewandelt wird. Bezeichnet man diese aus der Hystereseschleife zu berechnende Arbeit mit w_h und die Frequenz des Wechselstroms mit f , so ist also die räumliche Dichte der Hystereseverlustleistung $f w_h$. Hat der Eisenkern das Gesamtvolume V , so wird die *Hystereseverlustleistung*

$$P_h = V f w_h. \quad (29.125)$$

Die Leistung P_h wird meist in Bezug auf die Masse – häufig auch Gewicht genannt – angegeben, da die Masse proportional dem Volumen ist. Man setzt $p_m := P_h/m$ und gibt diese spezifische Leistung bei festem B-Feld und Frequenz an. Für jedes Material ist w_h eine bestimmte Funktion des Scheitwertes des B-Feldes B_m . Daher sind auch die auf die Masseinheit bezogenen Hystereseverluste eine Funktion von B_m ; sie sind ferner proportional der Frequenz.

Infolge der Krümmung der Magnetisierungskurve entsteht bei sinusförmigem zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses und damit der induzierten Quellenspannung ein nichtsinusförmiger Strom, wie dies durch Abb. 29.20 veranschaulicht ist.

Man kann eine nicht sinusförmige periodische Stromkurve nach Fourier in eine Reihe von harmonischen Sinusströmen zerlegen: (siehe z. B. Marko [178])

$$i = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sqrt{2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + I_3 \sqrt{2} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (29.126)$$

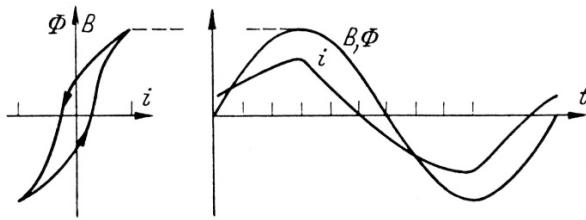


Abbildung 29.20. Verzerrung der Stromkurve

wobei I_1, I_2, \dots, I_n usw. die Effektivwerte der Teilströme bezeichnen, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ usw. Phasenwinkel. Diese Größen können aus dem vorgegebenen Verlauf von $i(t)$ berechnet werden mit Hilfe der Formeln

$$I_n \sqrt{2} \cos \varphi_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} i \sin n\omega t dt; \quad (29.127)$$

$$I_n \sqrt{2} \sin \varphi_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} i \cos n\omega t dt. \quad (29.128)$$

Für den *Effektivwert* des zusammengesetzten Wechselstromes gilt ferner

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}. \quad (29.129)$$

Zerlegt man nun im vorliegenden Fall den Strom i in die Grundschwing-

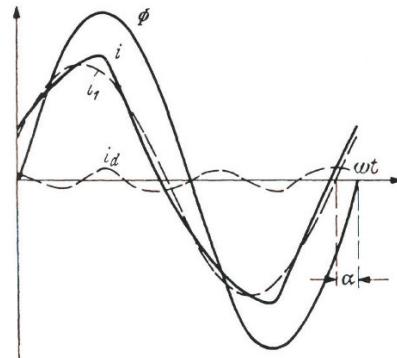


Abbildung 29.21. Zerlegung der Stromkurve bei Hysterese

gung i_1 und den Rest i_d , Abb. 29.21, so findet man, dass die Grundschwingung eine Phasenverschiebung α gegen den Fluss aufweist, und zwar eilt die Grundschwingung des Stromes dem Fluss um diesen Winkel α *voraus*. Zeigerdiagramme gelten nur für sinusförmig veränderliche Größen. Um zu einer

angenäherten Darstellung der Verhältnisse in einem Zeigerdiagramm zu kommen, kann man sich den wirklichen Strom $i(t)$ denken durch einen Sinusstrom, der

1. den gleichen Effektivwert I hat wie der wirkliche Strom,
2. die gleiche Frequenz wie die Grundschwingung des wirklichen Stromes, und der
3. die gleichen Verluste bei gleicher Spannung ergeben würde wie der wirkliche Strom.

Um die letzte Forderung zu erfüllen, denke man sich zunächst den Leiterwiderstand R der Spule nach außerhalb verlegt. Dann ist die Spannung an der Spule gleich der Selbstinduktionsspannung U_L . Die Hystereseverluste sind nun bestimmt durch die in Phase mit dieser Spannung liegende Komponente I_h des Ersatzstromes, Abb. 29.22. Diese Komponente ist daher

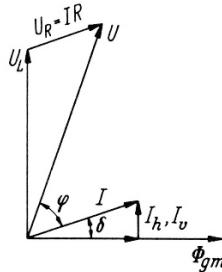


Abbildung 29.22. Zeigerdiagramm einer Spule mit Eisenkern

$$I_h = \frac{P_h}{U_L} \quad (29.130)$$

Auch die Wirbelstromverluste im Eisenkern haben eine in Phase mit U_L liegende Komponente des Stromes und damit eine Vergrößerung des Winkels δ zwischen Strom und Fluss zur Folge. Man bestimmt daher aus der Summe der Wirbelstrom- und Hystereseverluste P_v einen Wirkstrom

$$I_v = \frac{P_v}{U_L}, \quad (29.131)$$

der als maßgebend für die Phasenvoreilung des Stromes I gegen Φ angesehen wird und an die Stelle von I_h in Abb. 29.22 tritt. Damit kann das Dreieck der Stromzeiger gezeichnet werden und es gilt

$$\sin \delta = \frac{I_v}{I}. \quad (29.132)$$

Der Winkel δ , um den der Ersatzstrom dem Fluss Φ voreilt, wird damit etwas verschieden von dem Winkel α zwischen den Grundschwingungen.

Nunmehr kann auch der ohmsche Spannungsabfall IR in der Spule, der in Phase mit dem Strom I liegt, berücksichtigt werden wie es Abb. 29.22 zeigt.

Da die Wirbelstromverluste bei den in der Starkstromtechnik in Betracht kommenden niedrigen Frequenzen nach dem vorigen Abschnitt ungefähr proportional mit dem Quadrat der Frequenz wachsen, die Hystereseverluste dagegen nur proportional, so lassen sich die Gesamtverluste P_v leicht in diese beiden Werte zerlegen. Für kohlenstoffarmes Eisenblech von $0,35\text{mm}$ Dicke ergeben sich z.B. bei 50Hz folgende massebezogenen Hysterese- und Wirbelstromverluste für das maximale B-Feld B_m

$$B_m = 1,0T : p_h = 2,2\text{W/kg}, \quad (29.133)$$

$$B_m = 1,5T : p_h = 6,3\text{W/kg}, \quad (29.134)$$

wobei p_w die massebezogenen Wirbelstromverluste sind. Durch Legieren mit Silizium lassen sich massebezogenen Wirbelstrom- und Hystereseverluste herabsetzen. Mit 4% Siliziumgehalt kann man die massebezogenen Gesamtverluste $p_v = p_h + p_w$ auf etwa $0,9\text{W/kg}$ herabsetzen.

Bei geringer magnetischer Aussteuerung, wie sie vielfach in der *Nachrichtentechnik* vorliegt, teilt man die Ummagnetisierungsverluste in drei Teile:

a) Hystereseverluste. Sie sind, wie oben festgestellt, proportional der Frequenz f , dem Eisenvolumen V und der von der Hystereseschleife eingeschlossenen Fläche. Es zeigt sich, dass bei kleinen Flussdichten diese Fläche ungefähr proportional der dritten Potenz des H-Feldes H_m ist. Dies röhrt daher, dass hier die Hystereseschleife in vielen Fällen angenähert durch zwei Parabeläste dargestellt werden kann, Abb. 29.23. Für den aufsteigenden Ast kann man dann setzen

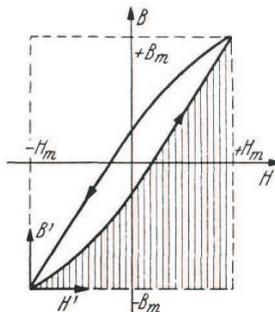


Abbildung 29.23. Hystereseverluste bei kleinem magnetischen Feld

$$B' = \mu_\alpha H' + \nu H'^2, \quad (29.135)$$

wobei μ_α die Anfangspermeabilität, ν eine andere Materialkonstante bezeichnet. Diese Beziehung bildet den Anfang einer Potenzreihe; sie gilt auch für

den absteigenden Ast, wenn man sie auf den anderen Eckpunkt der Schleife anwendet. Die in Abb. 29.23 schraffierte Fläche wird

$$\int_0^{2H_m} B' dH' = 2\mu_\alpha H_m^2 + \frac{8}{3}\nu H_m^3. \quad (29.136)$$

Die ganze Rechteckfläche ist

$$2B_m \cdot 2H_m. \quad (29.137)$$

Nun gilt aber nach Gl. (29.135)

$$2B_m = 2\mu_\alpha H_m + 4\nu H_m^2. \quad (29.138)$$

Also ist die Rechteckfläche

$$4\mu_\alpha H_m^2 + 8\nu H_m^3. \quad (29.139)$$

Für die Fläche der Hystereseschleife ergibt sich damit

$$w_h = \frac{8}{3}\nu H_m^3, \quad (29.140)$$

und es folgt für die Hystereseverluste mit Gl. (29.125)

$$P_h = \frac{8}{3}\nu f V H_m^3. \quad (29.141)$$

Man definiert den *Hysteresewiderstand* R_h einer Spule durch die Beziehung

$$P_h = I^2 R_h. \quad (29.142)$$

Für diesen Widerstand gilt dann der Ansatz

$$R_h = k_1 I f, \quad (29.143)$$

in dem k_1 für die betreffende Spule eine Konstante bezeichnet.

b) Die Wirbelstromverluste. Die Wirbelstromverluste sind im allgemeinen bei den in Betracht kommenden Frequenzen proportional B_m^2 und f^2 . Kann man die Permeabilität bei den vorkommenden Stromstärken als nahezu konstant ansehen, so kann man unter Einführung des *Wirbelstromwiderstandes* R_w für diese Verluste schreiben

$$P_w = I^2 R_w = k_2 I^2 f^2, \quad (29.144)$$

wobei also

$$R_w = k_2 f^2. \quad (29.145)$$

c) Die Nachwirkungsverluste. Es zeigt sich, dass die gesamten Verluste noch einen Rest enthalten, der proportional der Frequenz ist wie der Hystereseverlust, aber proportional dem Quadrat der Stromstärke wie der Wirbelstromverlust. Man führt diesen Rest auf Diffusionsvorgänge im Kristallgitter

und andere Nachwirkungerscheinungen zurück. Für den entsprechenden Widerstand, den man als *Nachwirkungswiderstand* bezeichnet, gilt der Ansatz

$$R_n = k_3 f. \quad (29.146)$$

Die Summe der drei damit eingeführten Widerstände stellt den Verlustwiderstand dar

$$R_v = k_1 I f + k_2 f^2 + k_3 f, \quad (29.147)$$

er bildet die Differenz aus dem *Wirkwiderstand* R der Spule und dem Gleichstromwiderstand R_0 :

$$R_v = R - R_0. \quad (29.148)$$

Zur Bestimmung der Verluste bei kleinen magnetischen Feldern wird eine Ringspule mit einem Kern aus dem betreffenden Material hergestellt und der Verlustwiderstand R_v in einer Wechselstrommessbrücke gemessen. Die Abb. 29.24 zeigt die einfachste (wenn auch nicht praktisch zweckmäßigste) Form einer solchen Messbrücke. Der Wechselstromgenerator S liefert den Wechselstrom mit der Frequenz f . Durch Verändern des Messwiderstandes R_2 und der Messinduktivität (*Induktionsvariometer*) L kann der Ton im Fernhörer F (oder anderes Nullinstrument) zum Verschwinden gebracht werden. Dann gilt, da die Potenzialdifferenz zwischen a und b durch die beiden Anschlusspunkte des Fernhörers halbiert wird,

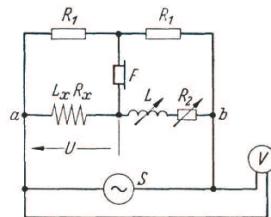


Abbildung 29.24. Messung der Verluste bei kleinen magnetischen Feldern

$$L_x = L, \quad R_x = R_2. \quad (29.149)$$

Die Flussdichte im Eisenkern der Spule kann aus der Spannung U berechnet werden, die halb so groß ist wie die vom Voltmeter angezeigte Spannung.

Die Stromstärke in der Spule ist betragsmäßig

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_x^2 + (2\pi f L_x)^2}}. \quad (29.150)$$

Damit kann die Selbstinduktionsspannung

$$U_L = \sqrt{U^2 - (IR_x)^2} = I 2\pi f L_x \quad (29.151)$$

berechnet werden. Nach dem Induktionsgesetz ist der Scheitelwert des B-Feldes bei sinusförmigem Verlauf der Spannung

$$B_m = \frac{U_L}{4,44AN} \quad (29.152)$$

wobei mit A der Kernquerschnitt, mit N die Windungszahl der Spule bezeichnet ist. Der Scheitelwert des H-Feldes ist

$$H_m = \frac{I\sqrt{2}N}{l}, \quad (29.153)$$

wenn l die mittlere Feldlinienlänge bezeichnet, und es ergibt sich die Wechselfeldpermeabilität des Kernes

$$\mu = \frac{B_m}{H_m} = \frac{l}{AN^2} L_x. \quad (29.154)$$

Die gesamten Eisenverluste betragen

$$P_v = I^2(R_x - R_0) = I^2R_v. \quad (29.155)$$

Man zerlegt den Verlustwiderstand R_v in seine drei Bestandteile, indem man

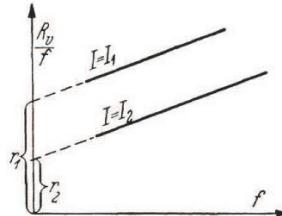


Abbildung 29.25. Trennung der Verlustanteile

Messungen bei verschiedenen Stromstärken und verschiedenen Frequenzen ausführt. Die Größe R_v/f wird für bestimmte Stromstärken in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen, Abb. 29.25. Mit den durch die Messpunkte gelegten geraden Linien ergeben sich die Abschnitte r_1 und r_2 auf der Ordinatenachse. Diese liefern, in Abhängigkeit von I aufgetragen, eine gerade Linie, Abb. 29.26, deren Schnitt mit der r -Achse den Wert k_3 ergibt. Dann kann ferner

$$k_1 = \frac{r - k_3}{I} \quad (29.156)$$

berechnet werden und aus Gl. (29.147)

$$k_2 = \frac{R_v - k_1 If - k_3 f}{f^2}. \quad (29.157)$$

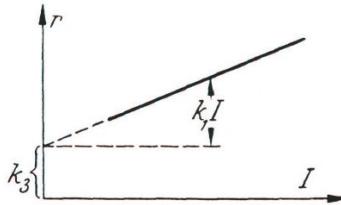


Abbildung 29.26. Zur Berechnung der Verlustanteile

Eine nur vom Material abhängige Angabe für die Verluste erhält man, wenn man sie auf die Masse bezieht.

Die Induktivität einer Spule wächst bei kleinen Stromstärken etwas mit dem Strom an. Nach Gl. (29.138) gilt für die *Permeabilität*

$$\mu = \frac{B_m}{H_m} = \mu_\alpha + 2\nu H_m. \quad (29.158)$$

Man kann also bei kleinen Stromstärken eine Spule mit Eisenkern darstellen durch die Reihenschaltung aus einer Induktivität, die mit der Stromstärke linear anwächst, und einem Widerstand, der einen konstanten Anteil R_0 enthält und einen Anteil R_v , der mit Frequenz und Stromstärke zunimmt.

In der komplexen Wechselstromrechnung (siehe Abschnitt 4.3) können die Ummagnetisierungsverluste einer Spule entweder durch einen Widerstand in Reihe mit der Spule oder durch einen Parallelwiderstand dargestellt werden. Eine andere Darstellung geht davon aus, dass infolge der Verluste der Strom dem Feld um einen Winkel δ voreilt, Abb. 29.22. Es ist also

$$IL = \Phi_g e^{j\delta} \quad (29.159)$$

$$IL e^{-j\delta} = \Phi_g. \quad (29.160)$$

Die Eisenverluste können daher auch durch die Einführung einer *komplexen Induktivität*

$$L_{kompl} := L e^{-j\delta}. \quad (29.161)$$

berücksichtigt werden.

Eine weitere vielfach benützte Möglichkeit besteht schließlich darin, dass man für die Permeabilität eine komplexe Größe einführt, die *komplexe Permeabilität*

$$\mu := \mu' - j\mu''. \quad (29.162)$$

Der Realteil μ' ist im wesentlichen maßgebend für die Induktivität, der Imaginärteil μ'' für die Verluste. Es gilt

$$\tan \delta = \frac{\mu''}{\mu'}. \quad (29.163)$$

29.3 Der Transformator

29.3.1 Allgemeine Beziehungen

Eingangs- und Ausgangswicklung des Transformators (Primär- und Sekundärwicklung) befinden sich meist auf einem geschlossenen Kern (Eisenblechpaket, Eisenpulverkern, Bandwickelkern oder Ferritkern). Der Kern sorgt dafür, dass möglichst der ganze in der einen Wicklung erzeugte Fluss auch durch die andere Wicklung hindurchgeführt wird, dass also die Streuung gering ist, und dass zur Herstellung des für die Energieübertragung notwendigen Flusses ein möglichst geringer Magnetisierungsstrom erforderlich wird. Das Schaltbild des Transformators ist in Abb. 5.12 dargestellt. Neben den Zählpfeilen für die Ströme muss hier auch der Wicklungssinn der beiden Wicklungen berücksichtigt werden. Er wird zweckmäßig durch einen Punkt am einen Ende der Wicklung markiert, wie in Abb. 5.12. Dadurch soll festgelegt werden, dass beim Durchlaufen der Wicklungen von dem Punkt aus der gemeinsame Kern in gleichem Sinn umkreist wird. In Abb. 5.12 umkreisen also die Zählrichtungen der Ströme in den beiden Wicklungen den Kern gleichsinnig. Ist der Eisenkern verzweigt, dann müssen die Punkte für je 2 Wicklungen getrennt festgelegt werden, da sich der Magnetfluss jeder einzelnen Wicklung in verschiedener Weise verzweigt.

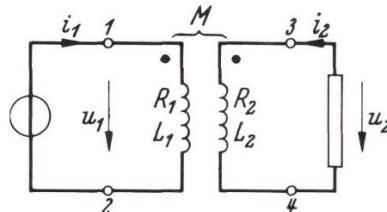


Abbildung 29.27. Schema eines Transformators, Windungszahlen N_1 und N_2

Bei der folgenden Näherungsbetrachtung seien nun zunächst die Verluste in den Wicklungen und im Eisenkern sowie die Streuung vernachlässigt. Die Windungszahlen der Primär- und der Sekundärwicklung seien N_1 und N_2 . Am Eingang 1 2 erzeuge eine Quelle die Wechselspannung U_1 mit dem Effektivwert U_1 .

Bei Leerlauf der Ausgangsklemmen 3 4 stellt sich nach dem Induktionsgesetz in jedem Zeitpunkt ein solcher magnetischer Fluss ein, dass die Selbstinduktionsspannung gerade gleich der Eingangsspannung u_1 ist („Spannungsgleichgewicht“). Daraus folgt für den Scheitelwert Φ_1 des Flusses

$$\Phi_1 = \frac{U_1}{4,44 N_1 f}. \quad (29.164)$$

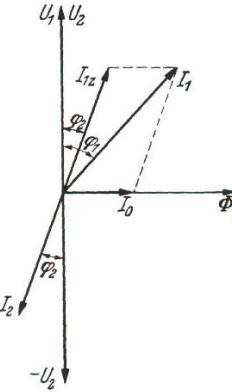


Abbildung 29.28. Zeigerdiagramm des verlust- und streuungsfreien Transfomators

Bei sinusförmigem Verlauf der Primärspannung verläuft auch der Fluss sinusförmig. In dem Zeigerdiagramm Abb. 29.28 eilt der Fluss Φ_1 der Spannung U_1 um genau 90° nach. Der dazugehörige Leerlaufstrom in der Primärwicklung ergibt sich nach Abb. 29.20 aus der Magnetisierungskennlinie und verläuft daher nicht sinusförmig; sein Effektivwert sei I_0 . Der komplexe Leerlaufstrom oder „Magnetisierungstrom“ I_0 liegt bei Vernachlässigung der Hysterese- und Wirbelstromverluste in Phase mit Φ_1 und eilt daher der Spannung U_1 ebenfalls um 90° nach.

Wegen der vernachlässigten Streuung ist der Fluss Φ_1 auch vollständig mit der Ausgangswicklung verkettet und erzeugt dort die komplexe Spannung U_2 mit dem Effektivwert

$$U_2 = 4,44 N_2 f \Phi_1. \quad (29.165)$$

Infolge der durch die Punkte gekennzeichneten Festlegung über den Wicklungssinn der Wicklungen liegt U_2 in Phase mit U_1 ; so dass unter Einführung der *Wicklungsübersetzung*

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} \quad (29.166)$$

für die komplexen Spannungen gilt

$$U_2 = \frac{1}{\ddot{u}} U_1. \quad (29.167)$$

Wird nun der Ausgang mit dem komplexen Widerstand Z_2 belastet, so entsteht der Sekundärstrom

$$I_2 = -\frac{U_2}{Z_2}. \quad (29.168)$$

Das Minuszeichen ist durch die in Abb. 29.27 entgegen der Bezugsrichtung der Spannung u_2 festgelegte Bezugsrichtung des Stromes i_2 bedingt. Im Zeigerdiagramm Abb. 29.28 erscheint daher I_2 um 180° gegenüber der bei Verbraucherwiderständen üblichen Darstellung gedreht. Der Strom I_2 durchfließt

die Ausgangswicklung und erzeugt eine Durchflutung $N_2 I_2$ des magnetischen Kreises. Da das Spannungsgleichgewicht auf der Eingangsseite erhalten bleiben muss, muss auch der Fluss Φ_1 die gleiche Größe behalten. Seine Durchflutung wird durch I_0 gedeckt; daher muss auf der Eingangsseite zusätzlich ein Strom entstehen, der die sekundäre Durchflutung gerade kompensiert. Wir nennen diesen Strom den *primären Zusatzstrom* I_{1z} ; er hat also die entgegengesetzte Richtung wie I_2 , und sein Effektivwert ergibt sich aus

$$N_1 I_{1z} = N_2 I_2. \quad (29.169)$$

Infolge des gleichen Fluxes bleibt auch die Sekundärspannung U_2 die gleiche.

Mit Gl. (29.167) und (29.168) folgt

$$I_{1z} = -\frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{U_1}{\ddot{u}^2 Z_2}. \quad (29.170)$$

Der primäre Zusatzstrom kann demnach dargestellt werden als Strom in einem Widerstand $\ddot{u}^2 Z_2$, an dem die Primärspannung liegt. Der gesamte Primärstrom wird

$$I_1 = I_{1z} + I_0. \quad (29.171)$$

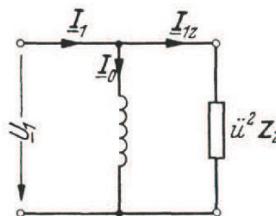


Abbildung 29.29. Ersatzbild des verlust- und streufreien Transfomators

Daraus ergibt sich das in Abb. 29.29 dargestellte Ersatzbild.

Der Magnetisierungsstrom I_0 wird durch geeignete Bemessung des Eisenkerns immer klein gegen den Betriebsstrom gehalten. Der *ideale Transfomator* („*idealer Übertrager*“) entsteht, wenn I_0 gegen I_{1z} vernachlässigbar klein ist. Daher gelten für den idealen Transfomator die Gleichungen

$$U_2 = \frac{1}{\ddot{u}} U_1, \quad I_2 = -\ddot{u} I_1. \quad (29.172)$$

Der Eingangswiderstand des idealen Übertragers ist gleich dem mit dem Quadrat der Übersetzung multiplizierten Lastwiderstand. Diese Eigenschaft wird in der Nachrichtentechnik zur *Leistungsanpassung* benutzt, indem die Übersetzung so gewählt wird, dass der übersetzte Widerstand gleich dem Innenwiderstand der Quelle auf der Primärseite ist.

29.3.2 Streuungs-Ersatzbild

Das Ersatzbild Abb. 29.29 kann leicht durch die Berücksichtigung der Verluste und der Streuung vervollständigt werden. Die Wirkwiderstände R_1 und R_2 der beiden Wicklungen können nach außerhalb gelegt werden, da sie nur jeweils von einem der beiden Ströme I_1 und I_2 durchflossen werden. Ebenso wirken mit je einer Wicklung verknüpften Feldlinien der magnetischen Streuflüsse wie Induktivitäten $L_{\sigma 1}$ und $L_{\sigma 2}$ in Reihe mit den beiden Wicklungen. Daraus ergibt sich das Streuungs-Ersatzbild Abb. 29.30 des Transformators. Die sekundäre Streuinduktivität und der sekundäre Widerstand erscheinen mit \ddot{u}^2 multipliziert auf der Primärseite. Der primäre Zusatzstrom ist $I_{1z} = I'_1 = I_2/\ddot{u}$, und die am Lastwiderstand wirkende Sekundärspannung U_2 ist als $U'_2 = \ddot{u}U_2$ auf der Primärseite eingetragen.

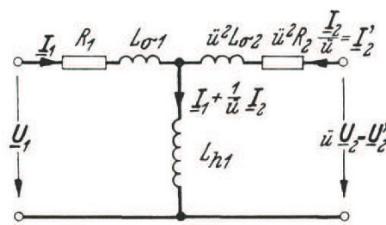


Abbildung 29.30. Streuungs-Ersatzbild des Transformators

Da die Streuflüsse ihren magnetischen Widerstand in der Hauptsache in der Luft und magnetisch neutralen Stoffen haben, sind die Streuinduktivitäten praktisch unabhängig von der Stromstärke und relativ klein; ihre Summe

$$L_\sigma = L_{\sigma 1} + \ddot{u}^2 L_{\sigma 2} \quad (29.173)$$

kann daher näherungsweise durch Messung des Eingangswiderstandes bei kurzgeschlossenem Ausgang bestimmt werden; diese Messung liefert auch die „Kupferverluste“ $I_1^2(R_1 + \ddot{u}^2 R_2)$.

Die *primäre „Hauptinduktivität“* L_{h1} dagegen hängt wegen der Krümmung der Magnetisierungskurve von der Betriebsspannung ab; sie ist definiert durch

$$L_{h1} = \frac{N_1 \Phi_1}{I_0 \sqrt{2}} \approx \frac{U_1}{\omega I_0}, \quad (29.174)$$

und kann daher näherungsweise bei Leerlauf des Ausgangs gemessen werden. Die Ummagnetisierungsverluste im Eisenkern können auf Grund von Abb. 29.22 durch einen ohmschen Widerstand parallel L_{h1} berücksichtigt werden, und daher ebenfalls bei Leerlauf gemessen werden.

29.3.3 Die Streuung

Bei Transformatoren mit Eisenkern sind die magnetischen Streuflüsse klein gegen den magnetischen Hauptfluss im Eisenkern. Wegen der räumlichen Ausdehnung der Wicklungsquerschnitte können jedoch die einzelnen Windungen mit verschiedenen großen Magnetflüssen verkettet sein. Dies soll im folgenden näher betrachtet werden.

Der bei offener Sekundärwicklung durch den Primärstrom erzeugte mit dem Primärkreis verkettete magnetische Fluss sei Φ_{g1} . Mit der Wicklung 2 ist dabei ein bestimmter Fluss Φ_{g12} verkettet. Man denkt sich nun die beiden Flüsse Φ_{g1} und Φ_{g12} durch *Bündelflüsse* Φ_{g1} und Φ_{g12} von solcher Größe ersetzt, dass sie in den beiden Wicklungen die gleichen Gesamtflüsse ergeben würden

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_{g1}}{N_1}, \quad \Phi_{12} = \frac{\Phi_{g12}}{N_2} \quad (29.175)$$

Wenn keine Feldlinien außerhalb des Kernes verlaufen würden, dann würden diese beiden Bündelflüsse einander gleich sein und identisch mit dem in Wirklichkeit in dem Eisenkern des Transformators vorhandenen Induktionsfluss. Infolge der Streufeldlinien sind die beiden Bündelflüsse etwas verschieden von dem Induktionsfluss im Eisenkern; sie sind als Rechengrößen zu betrachten. Ihre Differenz bezeichnet man als den *primären Streufluss*

$$\Phi_{\sigma1} = \Phi_1 - \Phi_{12}. \quad (29.176)$$

Negative Werte dieses Flusses zeigen an, dass die Verkettung der Feldlinien mit der Sekundärwicklung vollständiger ist als mit der Primärwicklung. Mit Hilfe der so eingeführten Flüsse definiert man nun die *primäre Streuinduktivität*

$$L_{\sigma1} = \frac{N_1 \Phi_{\sigma1}}{i_1}. \quad (29.177)$$

Durch eine entsprechende Überlegung ergibt sich für die *sekundäre Streuinduktivität*

$$L_{\sigma2} = \frac{N_2 \Phi_{\sigma2}}{i_2}. \quad (29.178)$$

Beispiel: Berechnung der Streuung eines Transformators. Auf dem Schenkel eines Transformators, Abb. 29.31, befindet sich eine Primärwicklung I mit der Höhe h_1 und eine Sekundärwicklung II mit der Höhe h_2 ; die durch einen Spalt von der Breite s getrennt sind. Fließt bei stromloser Sekundärwicklung in der Primärwicklung der Strom i_1 , so entsteht neben dem Hauptfluss Φ_h mit den Feldlinien 1 ein Luftfeld mit Feldlinien 2, während Feldlinien von der Form 3 nicht auftreten können, da ihre Durchflutung 0 wäre. Die Stärke des Luftfeldes kann dadurch abgeschätzt werden, dass der magnetische Widerstand im Eisen gegen den im Luftraum vernachlässigt wird. Das Linienintegral des H-Feldes

für eine Feldlinie 2 ist dann Hl , wobei l die mittlere Feldlinienlänge in der Luft bedeutet. Die Durchflutung der Feldlinie 2 ergibt sich aus dem verketteten Bruchteil $(x/h_1)N_1$ der Windungszahl N_1 der Primärwicklung:

$$Hl = i_1 N_1 \frac{x}{h_1}. \quad (29.179)$$

Das H-Feld nimmt von $H = 0$ für $x = 0$ linear auf den Wert $i_1 N_1 / l$ auf der

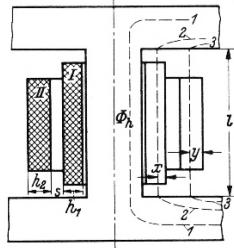


Abbildung 29.31. Zur Berechnung der Streuung eines Transformatormodells

Innenseite der Wicklung zu. Der magnetische Fluss, der sich aus Feldlinien der Form 2 zusammensetzt, ergibt sich durch Integration des B-Feldes $\mu_0 H$ über die ringförmigen Flächenelemente mit der Breite dx und der mittleren Windungslänge l_1 der Wicklung I:

$$\int_0^{h_1} Bl_1 dx = \frac{1}{2} \mu_0 i_1 N_1 h_1 \frac{l_1}{l}. \quad (29.180)$$

Dieser Fluss ist ebenso wie der im Eisen geführte Hauptfluss Φ_h , ganz mit den N_2 Windungen der Sekundärwicklung verkettet. Daher ist der mit der Sekundärwicklung verkettete Gesamtfluss:

$$\Phi_{g12} = N_2 \Phi_h + \frac{1}{2} \mu_0 i_1 N_1 N_2 h_1 \frac{l_1}{l}. \quad (29.181)$$

Die Feldlinien 2 sind dagegen jeweils nur mit dem Bruchteil $(x/h_1)N_1$ der primären Windungszahl verkettet. Daher ist der primäre Gesamtfluss

$$\Phi_{g1} = N_1 \Phi_h + \int_0^{h_1} Bl_1 \frac{x}{h_1} N_1 dx \quad (29.182)$$

oder

$$\Phi_{g1} = N_1 \Phi_h + \mu_0 i_1 N_1^2 \frac{1}{3} h_1 \frac{l_1}{l}. \quad (29.183)$$

Daraus folgt nach Gl. (29.175)

$$\Phi_1 = \Phi_h + \frac{1}{3} \mu_0 i_1 N_1 h_1 \frac{l_1}{l}, \quad (29.184)$$

und

$$\Phi_{12} = \Phi_h + \frac{1}{2} \mu_0 i_1 N_1 h_1 \frac{l_1}{l}, \quad (29.185)$$

sowie nach Gl. (29.176) der primäre Streufluss

$$\Phi_{\sigma 1} = -\frac{1}{6} \mu_0 i_1 N_1 h_1 \frac{l_1}{l}. \quad (29.186)$$

Die *primäre Streuinduktivität* wird nach Gl. (29.177)

$$L_{\sigma 1} = -\frac{1}{6} \mu_0 N_1^2 h_1 \frac{l_1}{l}. \quad (29.187)$$

Fließt andererseits bei stromloser Primärwicklung durch die Sekundärwicklung der Strom i_2 , so stellt sich der gleiche Fluss Φ_h im Eisenkern ein, wenn $i_2 N_2 = I_1 N_1$ gemacht wird. Die Feldlinien von der Form 2 durchsetzen den ganzen Innenraum der Sekundärwicklung bis zum Eisenkern. Das H-Feld ist hier $i_2 N_2 / l$, und es ergeben sich Feldlinien der Form 3 mit dem H-Feld $(i_2 N_2 / l)(y/h_2)$. Der sekundäre Gesamtfluss wird daher

$$\Phi_{\sigma 2} = N_2 \Phi_h + \mu_0 i_2 N_2^2 (h_1 + s) \frac{l_1}{l} + \mu_0 i_2 N_2^2 \frac{l_2}{l} \int_0^{h_2} \frac{y^2}{h_2^2} dy \quad (29.188)$$

oder

$$\Phi_{\sigma 2} = N_2 \Phi_h + \mu_0 i_2 N_2^2 \left((h_1 + s) \frac{l_1}{l} + \frac{1}{3} h_2 \frac{l_2}{l} \right). \quad (29.189)$$

Der mit der Primärwicklung verkettete Gesamtfluss wird

$$\Phi_{g21} = N_1 \Phi_h + \frac{1}{2} \mu_0 i_2 N_1 N_2 h_1 \frac{l_1}{l}. \quad (29.190)$$

Hieraus folgt

$$\Phi_2 = \Phi_h + \mu_0 i_2 N_2 \left((h_1 + s) \frac{l_1}{l} + \frac{1}{3} h_2 \frac{l_2}{l} \right), \quad (29.191)$$

$$\Phi_{21} = \Phi_h + \frac{1}{2} \mu_0 i_2 N_2 h_1 \frac{l_1}{l}. \quad (29.192)$$

und der sekundäre Streufluss

$$\Phi_{\sigma 2} = \Phi_2 - \Phi_{21} = \mu_0 i_2 N_2 \left(\left(\frac{1}{2} h_1 + s \right) \frac{l_1}{l} + \frac{1}{3} h_2 \frac{l_2}{l} \right) \quad (29.193)$$

Die *sekundäre Streuinduktivität* wird

$$L_{\sigma 2} = \mu_0 N_2^2 \left(\left(\frac{1}{2} h_1 + s \right) \frac{l_1}{l} + \frac{1}{3} h_2 \frac{l_2}{l} \right). \quad (29.194)$$

29.3.4 Der lineare Übertrager

Die Eigenschaften des Transformators werden spannungsunabhängig, wenn die Permeabilität des Kernes unabhängig von dem H-Feld ist. Dies wird bei den Übertragern der Nachrichtentechnik zwecks verzerrungsfreier Übertragung der Nachrichtensignale angestrebt. In dem Streuungssatzbild sind dann alle Induktivitäten konstant; das Bild veranschaulicht, wie bei hohen Frequenzen die Streuinduktivitäten, bei niedrigen Frequenzen die Hauptinduktivität die Übertragung zwischen Eingang und Ausgang sperren. In einem mittleren Frequenzbereich gelten angenähert die Gl. (29.172) des idealen Transformatoren.

Mit Hilfe des oben erläuterten Berechnungsganges der Streuinduktivitäten können folgende Größen definiert werden. Die *primäre Gesamtinduktivität* ist

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{i_1}. \quad (29.195)$$

Damit wird die *primäre Hauptinduktivität*

$$L_{h1} = L_1 - L_{\sigma 1} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_1} \quad (29.196)$$

Die *Gegeninduktivität* wird nach Gl. (23.29)

$$M = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_1}. \quad (29.197)$$

Damit gilt auch

$$L_{h1} = \frac{N_1}{N_2} M \quad (29.198)$$

und

$$L_{\sigma 1} = L_1 - \frac{N_1}{N_2} M \quad (29.199)$$

Durch die entsprechenden Überlegungen findet man die *sekundäre Gesamtinduktivität*

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{i_2}, \quad (29.200)$$

und die *sekundäre Hauptinduktivität*

$$L_{h2} = L_2 - L_{\sigma 2} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{i_2}. \quad (29.201)$$

Auf Grund dieser Beziehungen gilt ferner

$$L_{h2} = \frac{N_2}{N_1} M, \quad L_{\sigma 2} = L_2 - \frac{N_2}{N_1} M; \quad M := \sqrt{L_{h1} L_{h2}}, \quad (29.202)$$

und es verhalten sich die Hauptinduktivitäten wie die Quadrate der Windungszahlen:

$$\frac{L_{h1}}{L_{h2}} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \ddot{u}^2. \quad (29.203)$$

Wenn die Streuinduktivitäten Null wären, würde nach den Gl. (29.198), (29.199) und (29.202) gelten

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{und} \quad \ddot{u} = \frac{L_1}{M}. \quad (29.204)$$

In Wirklichkeit ist die Gegeninduktivität immer kleiner als dieser Wert. Dies wird durch den sogenannten *Streugrad* oder *Streufaktor* σ ausgedrückt, indem man setzt

$$\sigma := 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}. \quad (29.205)$$

Der Streugrad ist Null, wenn die Streuung Null ist und hat den Wert 1, wenn die beiden Wicklungen vollständig unabhängig voneinander sind. Ferner bezeichnet man

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{1 - \sigma}. \quad (29.206)$$

nach (23.38) als *Kopplungsgrad* oder *Kopplungsfaktor*; er liegt ebenfalls zwischen Null und 1. Die Streuinduktivitäten sind praktisch meist sehr klein gegen die Hauptinduktivität; dann folgt aus Gl. (29.205), (29.198) bis (29.202) die Näherungsformel

$$\sigma = \frac{L_{\sigma 1}}{L_1} + \frac{L_{\sigma 2}}{L_2} = \frac{L_\sigma}{L_1}. \quad (29.207)$$

Beispiel: In dem vorigen Beispiel ist zur Berechnung des Streugrades nach Gl. (29.207) angenähert zu setzen

$$L_1 = \frac{N_1}{i_1} \Phi_h, \quad L_2 = \frac{N_2}{i_2} \Phi_h, \quad (29.208)$$

und zu berücksichtigen, dass zur Erzeugung des gleichen Hauptflusses sein muss. Damit ergibt sich

$$\sigma = \frac{i_1 N_1}{\Phi_h} \mu_0 \left(s \frac{l_1}{l} + \frac{1}{3} h_1 \frac{l_1}{l} + \frac{1}{3} h_2 \frac{l_2}{l} \right). \quad (29.209)$$

Führt man die mittlere Feldlinienlänge l_E des Hauptflusses im Eisen ein, sowie die Permeabilität μ_r des Eisens und den Eisenquerschnitt A_E , so folgt schließlich

$$\sigma = \frac{1}{\mu_r A_E l} \left(s l_1 + \frac{1}{3} h_1 l_1 + \frac{1}{3} h_2 l_2 \right). \quad (29.210)$$

Der Streugrad ist umgekehrt proportional der relativen Permeabilität des Eisens. Er bleibt bei proportionaler Änderung sämtlicher Abmessungen konstant, ist also in erster Näherung unabhängig von der Größe des Transfornators.

Fließen in der Primär- und in der Sekundärwicklung Ströme, dann kann die Induktionswirkung im Kreis 1 auf den Gesamtfluss

$$\Phi'_g = L_1 i_1 + M i_2 \quad (29.211)$$

zurückgeführt werden; ebenso im Kreis 2

$$\Phi''_g = L_2 i_2 + M i_1. \quad (29.212)$$

Unter Einführung der Streuinduktivitäten kann man hierfür auch schreiben

$$\Phi'_g = L_{\sigma 1} i_1 + \frac{M}{N_2} (N_2 i_2 + N_1 i_1); \quad (29.213)$$

$$\Phi''_g = L_{\sigma 2} i_2 + \frac{M}{N_1} (N_2 i_2 + N_1 i_1). \quad (29.214)$$

Diese Gleichungen kann man so deuten, als ob mit jedem Kreis jeweils ein „Streufluss“, der nur von dem Strom in diesem Kreis herrührt, und ein „gemeinsamer Fluss“, der von der Summe der Durchflutungen herrührt, verkettet wären. Diese rein mathematische Zerlegung darf nicht zu der Annahme verleiten, dass diese Flüsse in Wirklichkeit Flussbündeln entsprechen müssten, die nur mit einem Kreis bzw. mit beiden Kreisen verkettet sind. Das resultierende Magnetfeld der beiden Ströme kann zwar Feldlinien enthalten, die mit je einem der beiden Kreise verkettet sind, und solche, die beide Kreise gemeinsam umschlingen; aber die durch diese Feldlinien gebildeten Bündel sind nicht gleich den Flüssen Φ'_g und Φ''_g . Es kann sogar der Fall vorkommen, dass es überhaupt keine Feldlinien gibt, die beiden Stromkreisen gemeinsam sind, während doch die Summe der Durchflutungen beider Kreise einen endlichen Wert hat. Ein Beispiel stellt das in Abb. 29.32 aufgezeichnete Feld zweier paralleler Drahtkreise dar, die in entgegengesetzter Richtung von Strömen im Verhältnis 1 : 2 durchflossen sind (vgl. Weber [296]).

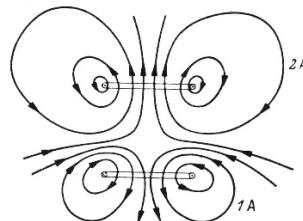


Abbildung 29.32. Feldlinienbild zweier paralleler Drahtkreise

In Abb. 29.27 haben die Spannungen der Selbstinduktion, $L_1 di_1/dt$ und $L_2 di_2/dt$, sowie die Spannungen der Gegeninduktion, $M di_1/dt$ und $M di_2/dt$ gleiches Vorzeichen bei gleichen Vorzeichen der Stromänderungen. Auf der Eingangsseite deckt die Spannung u_1 zwischen den Eingangsklemmen 1, 2 in

jedem Zeitpunkt die Summe von primärer Selbstinduktionsspannung, Gegeninduktionsspannung und Ohmschem Spannungsabfall :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + i_1 R_1. \quad (29.215)$$

Auf der Ausgangsseite ergibt sich die Spannung u_2 zwischen den Ausgangsklemmen 3, 4 in jedem Zeitpunkt als die Summe der sekundären Selbstinduktionsspannung, der Gegeninduktionsspannung und dem Ohmschen Spannungsabfall

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_2 R_2. \quad (29.216)$$

Im Fall sinusförmiger Spannungen und Ströme erhält man bei Einführung komplexer Amplituden die 2-Torgleichungen in Impedanzform entsprechend (4.131) für den verlustbehafteten linearen Übertrager aus den Gl. (29.215) und (29.216)

$$U_1 = I_1(R_1 + j\omega L_1) + I_2 j\omega M, \quad (29.217)$$

$$U_2 = I_1 j\omega M + I_2(R_2 + j\omega L_2). \quad (29.218)$$

Vernachlässigt man die Ohmschen Verluste und die Streuungen, dann erhält man nach einigen Umformungen aus den Gln. (29.217) und (29.218) unter Berücksichtigung von (29.204) und (29.205)

$$\frac{U_1}{sL_1} = I_1 + \frac{1}{\ddot{u}} I_2, \quad (29.219)$$

$$U_2 - \frac{1}{\ddot{u}} U_1 = (\sigma - 1) I_2. \quad (29.220)$$

Die Beschreibungsgleichungen für den idealen Übertrager (29.172) ergeben sich aus den Gln. (29.219) und (29.220) offensichtlich, in dem man auf den Fall fester Kopplung ($\sigma = 1$) und außerdem zum Grenzwert $L_1 \rightarrow \infty$ unter den Bedingungen $\ddot{u} < \infty$ und $|U_1| < \infty$ übergeht. Damit wird – wie bei den Kirchhoffsschen Gleichungen in Abschnitt 4.1 – eine vollständige Entkopplung der Beziehungen für die Spannungen und Ströme erreicht. Man beachte übrigens, dass der ideale Übertrager nicht mehr in Impedanzform beschrieben werden kann. Es existiert jedoch die A-Matrixform (vgl. (4.136) und Bosse III [38])

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ (-I_2) \end{pmatrix}. \quad (29.221)$$

Auch wenn der ideale Übertrager schon vorher zumindest formelmäßig verwendet wurde, hat Cauer zuerst die Bedeutung dieses Modells erkannt und ausführlich im Zusammenhang mit der Netzwerksynthese untersucht; vgl. Cauer [45], [47].

29.3.5 Kopplungs-Ersatzbilder des linearen Übertragers

Für die in Abb. 29.33 gezeichnete Anordnung gelten die gleichen Beziehungen (29.217) und (29.218), wie man leicht feststellen kann. Hier sind drei Spulen mit den Induktivitätswerten $L_1 - M$, $L_2 - M$ und M im Stern miteinander verbunden. Die beiden erstgenannten Spulen enthalten die beiden Wicklungs-widerstände R_1 und R_2 . Im Querzweig fließt ein Strom von der Stärke $I_1 + I_2$. Berechnet man die Spannung zwischen a und b auf dem Wege über e und, so ergibt sich sofort die Gl. (29.217). Die Gl. 29.218 entsteht durch Anwenden des zweiten Kirchhoff'schen Satzes auf den Kreis d, c, e, f . Man kann mit diesem „*Kopplungs-Ersatzbild*“ die Gegeninduktivität auf eine Induktivität zurückführen. Für die Gültigkeit des Ersatzbildes ist es belanglos, dass bei von eins verschiedenem Windungszahl Verhältnis des Transfornators einer der beiden Werte $L_1 - M$ und $L_2 - M$ negativ werden kann. Das Kopplungs-ersatzbild ist dann von Nutzen, wenn die Werte L_1 , L_2 und M unabhängig von den Spannungen und Strömen sind, also bei Spulen mit magnetisch neutralem Kern oder bei hinreichend kleiner magnetischer Aussteuerung des Kernmateri-als, wie es in der Hochfrequenz- und Nachrichtentechnik vorkommt. Dann gilt das Ersatzbild bei beliebiger Eingangsspannung und bei beliebiger Belastung. Es gilt sogar bei ganz beliebigen Potenzialen aller Klemmen wenn Primär- und Sekundärseite des Transfornators so miteinander verbunden sind, wie es in Abb. 29.34 dargestellt ist.

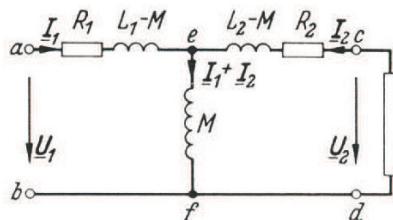


Abbildung 29.33. Kopplungs-Ersatzbild des Transfornators

Bei der umgekehrten Verbindung der beiden Wicklungen, wie in Abb. 29.35, geht das Ersatzbild in das der Abb. 29.36 über. Die beiden Kopplungs-ersatzbilder sind also in diesen beiden Fällen auch dann anwendbar, wenn sich der Transfornator in einem Netz befindet, in dem Sekundär- und Primärwick-lung noch in beliebiger Weise über weitere Zweige in Verbindung stehen. Im ersten Fall, Abb. 29.34 ist der komplexe Widerstand zwischen den beiden Klemmen a und c , wenn die anderen Klemmen isoliert sind, nach dem Ersatzbild

$$Z_{ac} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M); \quad (29.222)$$

er geht in den Wirkwiderstand der beiden hintereinander geschalteten Wick-lungen über, wenn die Streuung Null ist und die Windungszahlen gleich sind.

Die beiden Wicklungen sind „gegeneinander geschaltet“. Im anderen Fall dagegen, Abb. 34.9, wird der Widerstand zwischen b und c nach Abb. 29.35

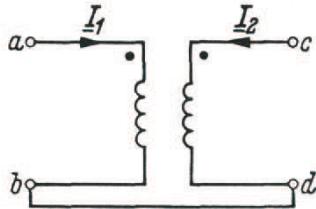


Abbildung 29.34. Äquivalenter Transformator zum Ersatzbild 29.33

$$Z_{bc} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M); \quad (29.223)$$

Die Induktivität hat hier im Idealfall bei gleichen Wicklungen den vierfachen Wert einer Wicklungsinduktivität; die beiden Wicklungen sind „wirksam hintereinander geschaltet“. Durch Messung der beiden Widerstände Z_{ac} und Z_{bc} kann die Gegeninduktivität bestimmt werden. Es ist

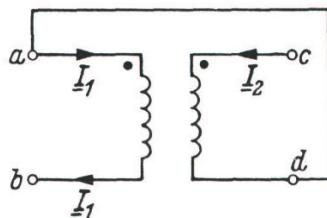


Abbildung 29.35. Hintereinanderschaltung der beiden Wicklungen

$$j\omega M = \frac{1}{4} (Z_{bc} - Z_{ac}). \quad (29.224)$$

Beim sogenannten Spartransformator, bei dem die Sekundärwicklung durch einen Teil der Primärwicklung gebildet wird, gelten das Streuungs-Ersatzbild Abb. 29.30 und das Kopplungs-Ersatzbild Abb. 29.33. An die Stelle von R_1 tritt jedoch $R_1 - R_2$, da nur dieser Teil von i_1 allein durchflossen wird; ferner liegt R_2 nicht am Ausgang, sondern in Reihe mit L_{h1} bzw. M . Wegen des Durchflutungsgleichgewichts werden der Strom in diesem gemeinsamen Wicklungsteil und damit die Stromwärmeverluste geringer als beim Transformator mit getrennten Wicklungen.

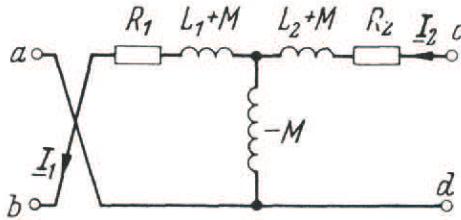


Abbildung 29.36. Kopplungs-Ersatzbild für den Transformator Abb. 29.35

29.4 Elektrisch-mechanische Energiewandlung

29.4.1 Allgemeines

Der Vorgang der Umwandlung elektrischer Arbeit in mechanische Arbeit mit Hilfe der elektrischen oder magnetischen Feldkräfte ist umkehrbar. Bewegt sich ein geladener Körper in einem elektrischen Feld unter der Einwirkung der Feldkräfte und leistet dabei eine mechanische Arbeit, so ergibt sich eine Rückwirkung der Bewegung auf das elektrische Feld dadurch, dass der Bewegung des Ladungsträgers ein elektrischer Strom entspricht; entweder wird daher durch die Bewegung des Ladungsträgers das elektrische Feld abgebaut, also dem Feld elektrische Energie entzogen, oder es muss aus einer äußeren Stromquelle dem Feld elektrische Arbeit zugeführt werden. Wird andererseits der Ladungsträger durch eine äußere mechanische Kraft entgegen den Feldkräften bewegt, so führt er dem elektrischen Feld Energie zu; es wird entweder das Feld verstärkt, oder es kann in einem äußeren Stromkreis elektrische Leistung entnommen werden. Genau das gleiche gilt für die Umwandlung von elektrischer Leistung in mechanische Leistung mit Hilfe magnetischer Feldkräfte, wie dies bereits in Abschnitt 26.2 ausgeführt wurde. Diese umkehrbare Energieumwandlung liegt einer großen Gruppe von elektrotechnischen Geräten zugrunde, insbesondere den elektrischen Maschinen, den Strom-, Spannungs- und Leistungsmessern, den Elektrizitätszählern, den Fernhörern, Lautsprechern und den magnetischen und elektrischen Mikrofonen. Elektrische Feldkräfte werden nur in Sonderfällen benutzt, meist beruht die Energieumwandlung auf der Anwendung magnetischer Feldkräfte. Die Ursache dafür liegt darin, dass mit magnetischen Feldern leichter hohe Energiedichten hergestellt werden können als mit elektrischen Feldern.

Die Dichte der in einem elektrischen Feld aufgespeicherten elektrischen Energie ist nach Abschnitt 13

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon \|\mathbf{E}\|^2. \quad (29.225)$$

In Luft ist $\varepsilon = \varepsilon_0$; der Betrag des E-Feldes $\|\mathbf{E}\|$ muss hinreichend weit unterhalb der Durchschlagsfeldstärke liegen, darf also in Luft höchstens etwa 10kV/cm sein. Damit wird

$$w = \frac{1}{2} 0,886 \cdot 10^{-13} \frac{F}{cm} 10^8 \frac{V^2}{cm^2} = 0,45 \cdot 10^{-5} \frac{Ws}{cm^3} = 4,5 \cdot 10^{-6} \frac{Ws}{cm^3}. \quad (29.226)$$

Im magnetischen Feld gilt nach Abschnitt 24

$$w = \frac{1}{2} \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{\mu}. \quad (29.227)$$

Für Luft ist $\mu = \mu_0$; es lassen sich Flussdichten von 1 Tesla leicht herstellen. Damit wird

$$w = \frac{1}{2} \frac{10^{-8} V^2 s^2 A cm}{1,257 \cdot 10^{-8} Vs cm^4} = 0,4 \frac{Ws}{cm^3}. \quad (29.228)$$

Die Energiedichte des magnetischen Feldes kann also in Luft rund 10^5 mal größer gemacht werden als die Energiedichte des elektrischen Feldes. Die elektrischen Maschinen arbeiten daher ausschließlich mit magnetischen Feldkräften.

29.4.2 Die Grundgleichungen der elektrischen Maschine

Im folgenden wird eine kurze Übersicht über die Anwendungen elektromagnetischer Felder auf dem Gebiet elektrischer Maschinen gegeben. Für weitgehende Betrachtungen dieses Gebietes werden die folgende zweibändige Monographie von Müller und Ponick [207], [208] sowie Müller, Vogt und Ponick [209] sehr empfohlen.

Die Hauptteile der elektrischen Maschinen sind Ständer und Läufer. Einer dieser beiden Hauptteile trägt die Nutzwicklung, und zwar bei den Gleichstrommaschinen der Läufer, bei den Synchron- und Induktionsmaschinen der Ständer. Den Klemmen dieser Wicklung wird die elektrische Leistung entnommen, wenn es sich um einen Generator handelt, die elektrische Leistung zugeführt beim Betrieb der Maschine als Motor. Die Nutzwicklung besteht im allgemeinen aus mehreren Wicklungssträngen, die in verschiedener Weise miteinander verbunden werden können, bei Gleichstrom z. B. in Parallel- oder Hintereinanderschaltung, bei dreiphasigem Wechselstrom in Dreieck- oder Sternform. Jeder Wicklungsstrang ist grundsätzlich so ausgeführt, dass ein durch einen Wicklungsstrang fließender Gleichstrom auf dem Umfang des Läufers in abwechselnder Folge magnetische Nord- und Südpole, also eine periodische Verteilung der Flussdichte, erzeugen würde. Die Zahl p der Polpaare ist also durch die Ausführung der Nutzwicklung gegeben. Der zweite Teil ist entweder als Magnetsystem ausgebildet mit der gleichen Zahl p von Polpaaren wie die Nutzwicklung, das mit Gleichstrom erregt wird (z. B. Gleichstrommaschinen und Synchronmaschinen), oder mit einer gleichartigen Wicklung wie der andere Teil (z. B. Induktionsmaschinen).

Die in einem Wicklungsstrang der Nutzwicklung induzierte Quellenspannung ist nach dem Induktionsgesetz

$$u_0 = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (29.229)$$

wenn Φ den Gesamtfluss bezeichnet, der mit dem Wicklungsstrang verkettet ist. Φ kann nun hier im allgemeinen Fall sich entweder dadurch ändern, dass der Fluss selbst zeitlich veränderlich ist oder dadurch, dass sich der Läufer gegen den Ständer dreht. Es kann also Φ eine Funktion der Zeit und des Winkels α zwischen Ständer und Läufer sein. Daher gilt allgemein für die in einem Wicklungsstrang induzierte Quellenspannung

$$u_0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 2\pi n, \quad (29.230)$$

oder

$$u_0 = -2\pi n \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (29.231)$$

n ist definiert als Quotient *Zahl der Umdrehungen geteilt durch Zeit* und wird *Drehzahl* oder *Umdrehungsfrequenz* genannt. Die Gl. (29.231) nennen wir die *erste Hauptgleichung der elektrischen Maschinen*.

Wird der Generator durch einen Verbraucher belastet, so fließt in der Wicklung ein Strom i . Die während eines Zeitelementes dt von dem Wicklungsstrang gelieferte elektrische Arbeit ist

$$dW = u_0 i dt = -2\pi n i \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} dt - i \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt. \quad (29.232)$$

Ist hier $n = 0$, so verschwindet das erste Glied, und man erkennt, dass der verbleibende Ausdruck rechts die Abnahme der magnetischen Energie des Stromkreises darstellt, das ist $dW = Lidi$. Bei endlichem n wird die in den äußeren Stromkreis gelieferte elektrische Arbeit dW gedeckt durch diesen Beitrag der magnetischen Feldenergie und die dem Leiter zugeführte mechanische Arbeit $M_d d\alpha$. Diese wird also durch den ersten Ausdruck in Gl.(29.232) dargestellt, und es gilt

$$M_d d\alpha = -2\pi n i \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} dt. \quad (29.233)$$

Hieraus ergibt sich der Augenblickswert des Drehmoments

$$M_d = -i \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}. \quad (29.234)$$

Dies ist die *zweite Hauptgleichung* der elektrischen Maschinen. Beide Hauptgleichungen gelten sowohl für Generator- als auch für Motorbetrieb.

29.4.3 Die Gleichstrommaschine

Bei der Gleichstrommaschine wird der Fluss Φ durch den konstanten Erregerstrom in der Wicklung des Ständers erzeugt; $\partial\Phi/\partial t$ ist Null, also

$$u_0 = -2\pi n \frac{d\Phi}{d\alpha}. \quad (29.235)$$

Die Bürsten liegen so auf dem Kommutator, dass sie jeweils den Maximalwert der an einem Wicklungsstrang während einer Umdrehung entstehenden Spannung abgreifen, also den Maximalwert von $d\Phi/d\alpha$. In der zu diesem Maximalwert gehörigen Stellung des Läufers (Ankers) geht Φ gerade durch 0; die Hälfte aller Windungen des Wicklungsstranges umschließt einen positiven Fluss, die andere Hälfte einen gleich großen negativen Fluss.

Die einzelnen Windungen der in sich geschlossenen Ankerwicklung sind gleichmäßig auf dem Umfang verteilt und haben eine Breite, die gleich dem Winkelabstand zwischen zwei aufeinander folgenden Magnetpolen ist, so dass jede Windung bei günstigster Lage gegenüber einem Magnetpol einen möglichst großen Teil Φ_m des zwischen Magnetpol und Anker übergehenden Fluxes umschließt. Die Breite einer Windung entspricht also längs des Umfanges einem Winkel π/p . Zwischen zwei Bürsten liegt in jeder Stellung des Ankers ein Wicklungsstrang, der N derartige Windungen hintereinander geschaltet enthält.

Wir betrachten nun einen solchen Wicklungsstrang bei einer kleinen Winkeldrehung $\Delta\alpha$ des Ankers. In der Ausgangslage war der mit dem Wicklungsstrang verbundene Gesamtfluss $\Phi = 0$, da sich die beiden Flusshälften gerade aufheben. Nach der Winkeldrehung $\Delta\alpha$ fehlt aber in der einen Flusshälfte der Beitrag von $N(\Delta\alpha/(\pi/p))$ Windungen, die gerade unter einem Magnetpol lagen, also der Beitrag $N(p/\pi)\Phi_m\Delta\alpha$, während in der anderen Flusshälfte dieser Beitrag hinzukommt. Die gesamte Flussänderung ist also

$$2N \frac{p}{\pi} \Phi_m \Delta\alpha, \quad (29.236)$$

und es wird

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} \approx \frac{\Delta\Phi}{\Delta\alpha} = 2N \frac{p}{\pi} \Phi_m. \quad (29.237)$$

Damit ergibt sich nach der ersten Hauptgleichung für die angenähert konstante Leerlaufspannung zwischen den Bürsten

$$U_0 = 4Nnp\Phi_m. \quad (29.238)$$

Aus der zweiten Hauptgleichung wird, wenn man den Ankerstrom mit I bezeichnet,

$$M_d = 2IN \frac{p}{\pi} \Phi_m. \quad (29.239)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Fluss Φ_m und dem Erregerstrom I_e , ist durch die magnetische Kennlinie des Magnetsystems gegeben, Abb. 22.8. Wird dieser Strom aus einer fremden Stromquelle entnommen („Fremderregung“), so ändert sich die Leerlauf Spannung bei konstanter Drehgeschwindigkeit mit dem Erregerstrom wegen der Proportionalität mit dem Fluss Φ_m in ähnlicher Weise, Abb. 29.37. Man nennt diese Kennlinie *Leerlaufkennlinie* der Gleichstrommaschine. U_0 ist ferner proportional der Drehzahl n des Ankers. Infolge des Ankerwiderstandes und des Übergangswiderstandes an den Bürsten, die zusammen den inneren Widerstand des Generators bilden, und infolge der

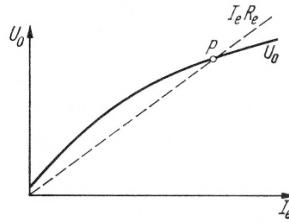


Abbildung 29.37. Leerlaufkennlinie der Gleichstrommaschine

Rückwirkung des durch den Ankerstrom erzeugten magnetischen Feldes auf das Gesamtfeld ergibt sich bei Belastung ein Spannungsverlust, so dass die Klemmspannung etwas kleiner wird als U_0 , der Unterschied ist jedoch gering.

Beim *selbsterregten Nebenschlussgenerator* wird der Erregerstrom aus dem Anker entnommen. Der Erregerstrom wächst nach dem Schließen des Erregerstromkreises, solange U_0 größer ist als der Spannungsverbrauch $I_e R_e$ des Erregerstromkreises (R_e : Widerstand des Erregerstromkreises), also bis zum Punkt P , Abb. 29.37. Bei diesem ursprünglich als *dynamoelektrisches Prinzip* (siehe z. B. Lindner [167]) bekannt gewordenen Verfahren von W. Siemens (1866) handelt es sich um die erste Art der technischen Anwendung des „Rückkopplungsprinzips“; siehe auch Abschnitt 40.4.4. Durch Verändern des Widerstandes R_e kann die Leerlaufspannung geändert werden.

Beim *selbsterregten Reihenschlussgenerator (Hauptschlussgenerator)* durchfließt der Ankerstrom auch die Erregerwicklung; es ist $I_e = I$. Die Kennlinie in Abb. 29.37 gibt also hier gleichzeitig den Zusammenhang zwischen Leerlaufspannung und Ankerstrom an.

Das Drehmoment M_d ist beim Generator ein Bremsmoment. Zu seiner Überwindung ist eine Leistung $P = 2\pi n M_d$ erforderlich, die genau gleich der gelieferten elektrischen Leistung $U_0 I$ ist. Erzeugt man den Gleichstrom I im Anker durch eine äußere Stromquelle, so bleibt das Drehmoment entsprechend der zweiten Hauptgleichung dasselbe; die Maschine wird bei gleicher Stromrichtung unter Umkehr der Drehrichtung zum Motor. Damit kehrt sich auch das Vorzeichen der Spannung um, sie wirkt der äußeren Spannung entgegen („Gegenspannung“).

Beim Nebenschlussmotor, bei dem Erregerwicklung und Anker parallel von der Netzspannung gespeist werden, wächst die Drehzahl n so lange, bis die mit n ebenfalls wachsende Gegenspannung U_0 bis auf den inneren Spannungsabfall IR_i gerade gleich der Netzspannung U ist, also bis

$$U_0 = H - IR_i. \quad (29.240)$$

Da der innere Spannungsabfall klein ist, gilt angenähert $U_0 = U$. Damit wird die Drehzahl

$$n = \frac{U}{4Np\Phi_m}. \quad (29.241)$$

Sie ist nach Gl. (29.241) nur so weit von der Belastung abhängig, wie der Spannungsabfall IR_i gegen U in Erscheinung tritt.

Durch Schwächen des Flusses, also Vergrößern eines Widerstandes im Erregerkreis, kann die Drehzahl gesteigert werden.

Die Ankerstromstärke I ist dadurch gegeben, dass im Gleichgewichtszustand das vom Motor gelieferte Drehmoment M_d gleich dem durch die Belastung des Motors bestimmten Lastmoment M_b wird:

$$I = \frac{M_b \pi}{2Np\Phi_m}. \quad (29.242)$$

Schwächung des magnetischen Flusses Φ_m hat also bei gleicher Belastung eine Vergrößerung des Ankerstromes zur Folge.

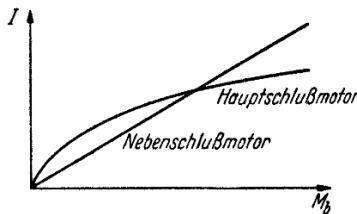


Abbildung 29.38. Belastungskennlinie von Nebenschluss- und Hauptschlussmotor

Beim *Reihenschlussmotor* durchfließt der Ankerstrom auch die Erregerwicklung. Daher ist Φ_m eine Funktion des Ankerstromes, die durch die magnetische Kennlinie dargestellt ist. Die Stromstärke ergibt sich wieder aus der Belastung. Sie ist aber nicht mehr proportional dem Belastungsmoment wie beim Nebenschlussmotor, sondern wächst wegen der Zunahme des Flusses mit dem Strom langsamer, Abb. 29.38. Für die Drehzahl gilt die gleiche Formel (29.241) wie beim Nebenschlussmotor, jedoch ist hier die Drehzahl nicht mehr nahezu unabhängig von der Belastung, sondern nimmt (infolge der Zunahme des Flusses mit dem Ankerstrom) mit zunehmender Belastung ab, Abb. 29.39. Der Reihenschlussmotor ist „nachgiebig“, während der Nebenschlussmotor bei Belastungsschwankungen „starr“ bleibt.

Unmittelbar nach dem Einschalten eines Motors ergibt sich wegen des kleinen inneren Widerstandes eine sehr hohe Stromstärke; sie kann durch einen Vorwiderstand (Anlasser) begrenzt werden. Ist der Widerstand dieses Anlassers R_a , so ist die Höchststromstärke nach dem Schließen des Schalters $I_a \approx U/R_a$. Durch diesen Anlaufstrom ist das Anlaufdrehmoment bestimmt; wird z.B. der Anlaufstrom doppelt so groß wie die Nennstromstärke des Motors gemacht, so wird das Anlaufdrehmoment beim Nebenschlussmotor doppelt so groß wie das Nenndrehmoment, beim Reihenschlussmotor dagegen wegen des gleichzeitig verstärkten Flusses mehr als doppelt jedoch weniger als viermal so groß.

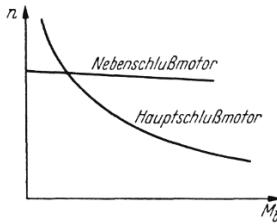


Abbildung 29.39. Drehzahlkennlinie von Nebenschluss- und Hauptschlussmotor

29.4.4 Die Synchronmaschine

Bei den Synchronmaschinen für dreiphasigen Wechselstrom trägt der Ständer drei gleichartige Wicklungsstränge, die gegeneinander längs des Umfanges um je $1/3$ Periode des magnetischen Flusses, also um einen Winkel $2\pi/3p$ verschoben sind. Fließen durch diese drei Wicklungsstränge Ströme, die eine zeitliche Phasenverschiebung von je 120° besitzen, deren Maximalwerte also in Abständen von je $1/3$ Periode aufeinander folgen, so durchläuft das Maximum des magnetischen Flusses während einer Periode des Wechselstroms gerade den Winkel $2\pi/p$; es ergibt sich ein umlaufendes magnetisches Feld, das für einen vollen Umlauf p Perioden des Wechselstroms benötigt. Die Drehzahl dieses *Drehfeldes* ist also

$$n = \frac{f}{p}, \quad (29.243)$$

wenn mit f die Frequenz des Wechselstromes bezeichnet wird.

Der Läufer (Polrad) mit der vom Erregergleichstrom durchflossenen Wicklung dreht sich im Betrieb des Synchronmotors mit dieser sogenannten *synchronen Drehzahl*. Dabei haben *ungleichnamige* magnetische Pole von Ständer- und Läuferfeld die gleiche Stellung; der Läufer wird durch die magnetischen Feldkräfte vom Ständerdrehfeld mitgenommen. Wird der Läufer abgebremst, wird also mechanische Arbeit entnommen, dann bleiben die Magnetpole des Läufers etwas gegenüber den ungleichnamigen Polen des Ständerfeldes zurück, so dass eine Tangentialkomponente der magnetischen Feldkräfte am Läufer auftritt, die dem Bremsmoment das Gleichgewicht hält; der Läufer behält daher weiter seine synchrone Drehzahl n . Wird die Welle des Läufers immer stärker abgebremst, so wird schließlich der Winkel zwischen dem Läufer und dem Ständerfeld so groß, dass die Pole des Läufers in die Lücken zwischen je zwei Ständerpole kommen; dann führt die geringste weitere Vergrößerung der Belastung zum Außertrittfallen des Läufers; er kommt zum Stillstand. Die genauere Beschreibung dieser Verhältnisse ergibt sich aus den Hauptgleichungen. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass der magnetische Kreis nur wenig gesättigt ist, so dass die von Ständer- und Läufererregung für sich allein erzeugten magnetischen Flüsse sich zum Gesamtfluss addieren.

Der mit einem Wicklungsstrang des Ständers verkettete Fluss setzt sich hier aus zwei Teilen zusammen:

1. dem von dem Läufer erzeugten Fluss, der von der Winkelstellung des Läufers gegen den Ständer abhängt. Im Betrieb der Maschine wächst der Winkel zwischen Läufer und Ständer entsprechend der Drehzahl proportional der Zeit,

$$\alpha = 2\pi nt = 2\pi \frac{f}{p} t = \frac{\omega}{p} t. \quad (29.244)$$

Der mit dem Wicklungsstrang verkettete aus dem Läufer herrührende Fluss habe in der betrachteten Ausgangsstellung $\alpha = 0$ gerade ein Maximum. Verdreht man den Läufer um den Winkel $(1/4)2\pi/p$, so geht der Fluss durch Null; nach einer weiteren Drehung um $(1/4)2\pi/p$ hat er das Maximum entgegengesetzter Richtung, geht dann wieder durch Null usw. Im einfachsten Fall sinusförmiger Verteilung des Flusses längs des Umfanges gilt also für den vom Läufer herrührenden Teil des Gesamtflusses

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cos p\alpha, \quad (29.245)$$

wobei Φ_0 den Maximalwert (bei $\alpha = 0$) des mit dem Wicklungsstrang verketteten Flusses bezeichnet.

2. Der durch den Wicklungsstrang fließende Strom mit dem Augenblickswert i erzeugt einen mit der Wicklung verketteten Fluss, der ihm angenähert proportional ist, da ein großer Teil des magnetischen Widerstandes im Luftschnitt liegt. Wir schreiben daher für diesen Teil des Flusses

$$\Phi_2 = L_s i, \quad (29.246)$$

wobei L_s die dem Fluss Φ_2 entsprechende Induktivität des Wicklungsstranges ist.

Bemerkung: Bei einem Polrad hat der Läufer ausgeprägte Pole (Schenkelpolrad); dann hängt die Induktivität L_s des Wicklungsstranges von der Stellung des Läufers ab. Im folgenden wird zur Vereinfachung konstante d. h. von der Läuferstellung unabhängige Induktivität angenommen. Es wird also Rotationssymmetrie des Läufers vorausgesetzt (Trommelläufer, Vollpolmaschine).

Damit gilt

$$\Phi = \Phi_0 \cos p\alpha + L_s i, \quad (29.247)$$

und es wird aus der ersten Hauptgleichung

$$u_0 = 2\pi np\Phi_0 \sin 2\pi ft - L_s \frac{di}{dt}. \quad (29.248)$$

Sieht man von dem geringen ohmschen Spannungsabfall in der Ankerwicklung ab, so ist die Klemmenspannung des Wicklungsstranges beim Betrieb als Motor $u = -u_0$, also

$$u = -2\pi np\Phi_0 \sin \omega t + L_s \frac{di}{dt}. \quad (29.249)$$

Danach setzt sich der Zeiger der Klemmenspannung U aus zwei Teilen zusammen, einem Zeiger mit dem Effektivwert

$$U_i = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} np\Phi_0, \quad (29.250)$$

der die in dem Wicklungsstrang durch das Läuferfeld erzeugte Spannung darstellt wenn in der Ständerwicklung kein Strom fließt, und einem zweiten Zeiger $I\omega L_s$, der gegenüber dem Strom I im Wicklungsstrang um 90° voreilt. Dieser zweite Zeiger gibt den induktiven Spannungsabfall in der Wicklung an. In komplexer Form lautet die Gl. (29.249)

$$U = U_i + j\omega L_s I. \quad (29.251)$$

Die Spannung U_i hängt wie Φ_0 vom Erregerstrom I_e in der Wicklung des Läufers ab; der Zusammenhang ist durch die magnetische Kennlinie gegeben. U_i kann also durch den Erregerstrom eingestellt werden. Es ist die Spannung, die an dem leerlaufenden Wicklungsstrang entsteht, wenn das Polrad durch eine Kraftmaschine mit der Drehzahl n angetrieben wird. Das Zeigerdiagramm und das zu Gl. (29.251) gehörige Ersatzschaltbild der Synchronmaschine ist durch Abb. 29.40 gegeben.

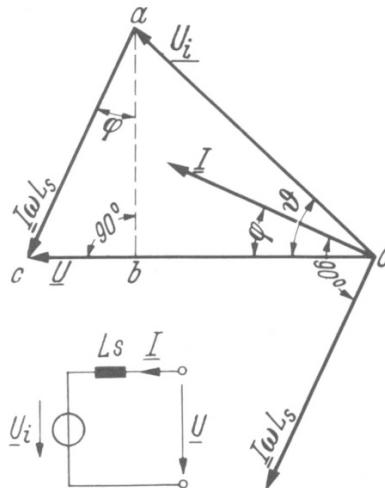


Abbildung 29.40. Ersatzbild und Spannungsdiagramm der Synchronmaschine

Wie beim Gleichstrommotor ist die Stromstärke I durch das Belastungsmoment M_b bestimmt. Es stellt sich im Gleichgewicht ein solcher Strom ein, dass das Drehmoment des Motors M_d gleich diesem Lastmoment ist. Der Zusammenhang des Drehmomentes M_d mit der Stromstärke kann aus der zweiten Hauptgleichung berechnet werden; sehr angenähert ergibt sich M_d

auch aus der von einem Strang aufgenommenen Wirkleistung $UI \cos \varphi$, da die Verluste gering sind. Unter Berücksichtigung der Beiträge aller drei Wicklungsstränge zum Gesamtdrehmoment wird danach

$$M_d = 3 \frac{UI \cos \varphi}{2\pi n}. \quad (29.252)$$

Da die Netzspannung U konstant und gegeben ist, kann man das Drehmoment aus der Strecke ab des Zeigerdiagramms, Abb. 29.40, entnehmen. Diese Strecke repräsentiert die Spannung

$$\overline{ab} = \omega L_s I \cos \varphi, \quad (29.253)$$

also gilt für das Drehmoment

$$M_d = \overline{ab} \frac{3U}{2\pi n} \frac{1}{\omega L_s}. \quad (29.254)$$

Der Faktor von \overline{ab} ist bei konstantem U eine Konstante. Bei konstantem Er-

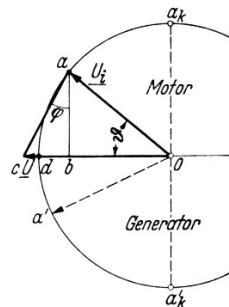


Abbildung 29.41. Kreisdiagramm der Synchronmaschine

regerstrom bleibt auch U_i konstant; jede Änderung der Belastung verändert daher von den Seiten des Dreiecks oac nur \overline{ac} ; daraus ergibt sich das *Kreisdiagramm* der *Synchronmaschine*, Abb. 29.41. Hier ist \overline{Oc} gleich der Netzspannung, \overline{Oa} gleich U_i ; die Strecke \overline{ac} stellt ein Maß für die Stromstärke dar,

$$I = \frac{\overline{ab}}{\omega L_s}; \quad (29.255)$$

die Strecke ab gibt nach Gl. (29.254) das Belastungsdrehmoment an. U_i eilt der Netzspannung U um den Winkel ϑ nach. Bei Belastungsänderung bewegt sich der Punkt a auf dem gezeichneten Kreis. Wenn der Motor entlastet wird, so wird entsprechend dem kleineren Moment die Strecke \overline{ab} immer kürzer; bei vollkommener Entlastung wandert der Punkt a nach d , ϑ wird 0. Wie das Diagramm zeigt, fließt nunmehr ein Blindstrom $I = \overline{dc}/(\omega L_s)$, der der

Spannung um $\varphi = 90^\circ$ nacheilt. Verstärkt man nun die Erregung, so wächst U_i , und man kann den Punkt d nach c verlegen. Nun stimmt U_i vollkommen mit der Netzzspannung überein, $U_i = U$, der Ständerstrom verschwindet.

Gegen diese „Leerlaufphasenlage“ des Läufermagnetfeldes dreht sich im Belastungsfall der Läufer des Motors um einen Winkel zurück, der der Phasenverschiebung ϑ entspricht und der Polradwinkel heißt. Der räumliche *Nach-eilwinkel* des Läufers ist also

$$\alpha = \frac{\vartheta}{p}. \quad (29.256)$$

Je stärker die Welle abgebremst wird, um so größer wird dieser Winkel. Für das Drehmoment folgt aus Gl. (29.254) mit $\overline{ab} = U_i \sin \vartheta$:

$$M_d = \frac{3}{2\pi} \frac{U_i U}{n\omega L_s} \sin \vartheta = M_k \sin \vartheta. \quad (29.257)$$

Überschreitet ϑ den Winkel 90° , dann reicht das Drehmoment nicht mehr zur Überwindung des Lastmomentes M_b , aus („Kippunkt“ a_k , „Kippmoment“ M_k); es muss $M_b < M_k$ sein.

Wird der Läufer von der Leerlaufage aus durch eine Kraftmaschine beschleunigt, so dreht er sich gegenüber der Leerlaufage vor, der Punkt a wandert nach unten, z.B. nach a' . Das Drehmoment M_d stellt sich der Drehung entgegen, die Maschine nimmt jetzt mechanische Leistung auf, und es wird elektrische Leistung in das Netz geliefert. Der untere Teil des Kreises beschreibt also die Verhältnisse beim *Synchrongenerator*.

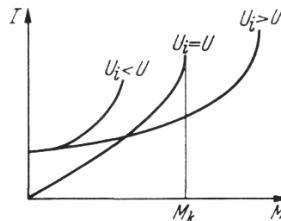


Abbildung 29.42. Belastungskennlinie der Synchronmaschine

Der allgemeine Zusammenhang zwischen Moment und Stromstärke kann aus dem Zeigerdiagramm als Zusammenhang zwischen den Strecken \overline{ab} und \overline{ac} entnommen werden; er ist in Abb. 29.42 für verschiedene Einstellung der Erregung aufgetragen.

Wird bei konstanter Belastung die Erregung geändert, so verschiebt sich der Punkt a auf einer Waagerechten. Daher ergeben sich für den Zusammenhang zwischen I_e und I Kurven von der in Abb. 29.43 gezeigten Form, die sogenannten *V-Kurven*. Bei jeder Belastung gibt es einen bestimmten Erregerstrom, für den der Ständerstrom am kleinsten wird.

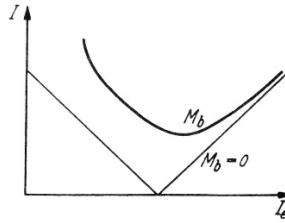


Abbildung 29.43. Ständerstrom und Erregerstrom der Synchronmaschine

Schließlich kann aus dem Zeigerdiagramm noch entnommen werden, dass die Phasenverschiebung zwischen Netzzspannung und Ständerstrom ebenfalls von der Erregung abhängt. Bei dem zum minimalen Ständerstrom gehörigen Erregerstrom ist $\varphi = 0$. Bei kleinerer Erregung des Motors ergibt sich eine induktive Phasenverschiebung, bei stärkerer Erregung eine kapazitive Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom (Anwendung als „Phasenschieber“ zum Ausgleich von unerwünschten Phasenwinkeln im Netz).

Die genauere Theorie der Synchronmaschine folgt aus der Analogie zum Transformator, dessen Primärwicklung (Läufer) mit einem konstanten Strom gespeist wird („Stromtransformator“).

Das Moment M_d nimmt mit wachsender Abweichung aus der Leerlauflage zu. Dadurch ergibt sich eine elastische Bindung des Läufers an die synchrone Drehzahl. Jedes Zurückbleiben des Läufers verursacht einen Überschuss des treibenden Momentes gegenüber dem Bremsmoment, der den Läufer wieder beschleunigt und in seine richtige Lage zurückbringt; umgekehrt ergibt sich bei einem Voreilen des Läufers gegenüber seiner Gleichgewichtslage ein Überschuss des bremsenden Momentes, so dass der Läufer ebenfalls wieder in die Gleichgewichtslage zurückgeführt wird. Nennt man das Lastmoment beim Motor oder das der elektrischen Belastung entsprechende Bremsmoment beim Generator M_b , so ergibt sich die Winkelabweichung α des Läuferfeldes nach Gl. (29.257) aus:

$$M_d = M_k \sin \vartheta = M_k \sin p\alpha. \quad (29.258)$$

Vergrößert sich α in der dadurch bestimmten Gleichgewichtslage um den kleinen Winkel Δ , so wird das Moment

$$M_b = M_k \sin p(\alpha + \Delta) \approx M_k \sin p\alpha + \Delta p M_k \cos p\alpha. \quad (29.259)$$

Es entsteht also ein Überschuss des Momentes vom Betrag

$$\Delta p M_k \cos p\alpha = \Delta p M_k \sqrt{1 - \left(\frac{M_b}{M_k}\right)^2} = \Delta p \sqrt{M_k^2 - M_b^2}. \quad (29.260)$$

Dieses Moment wird *synchronisierendes Moment* genannt, da es den Läufer wieder in seine Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht. Für die Schnelligkeit, mit der der Läufer in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, ist das Trägheitsmoment J maßgebend; es gilt

$$-J \frac{d^2 \Delta}{dt^2} = p \sqrt{M_k^2 - M_b^2} \Delta. \quad (29.261)$$

Diese Gleichung zeigt an, dass sich infolge des Trägheitsmomentes Pendelungen um die Gleichgewichtslage ergeben. Der durch ein Überschussmoment beschleunigte Läufer behält zunächst seine größere Drehgeschwindigkeit bei und schwingt über die der Belastung entsprechende Lage hinaus; durch das dann auftretende rücktreibende synchronisierende Moment wird er wieder abgebremst, hat aber beim Durchgang durch die richtige Phasenlage wieder eine zu kleine Drehgeschwindigkeit, so dass er wieder etwas zurückbleibt usw. Die Frequenz f_0 der Pendelungen erhält man mit dem Ansatz

$$\Delta = \Delta_0 \sin 2\pi f_0 t. \quad (29.262)$$

Durch Einsetzen in die Drehmomentgleichung (29.261) folgt für die Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{p}{J}} \sqrt[4]{M_k^2 - M_b^2}. \quad (29.263)$$

Diese Resonanzfrequenz wird also mit wachsender Annäherung des Nutzmomentes an das Kippmoment immer kleiner; sie hat ihren höchsten Wert im Leerlauf.

Bei periodischen Ungleichförmigkeiten im Antrieb können bei Resonanz die Amplituden der Pendelschwingungen bis zum Außertrittfallen anwachsen. Um das zu vermeiden, werden im Polrad *Dämpferrahmen* oder *Dämpferwicklungen* angebracht. Sie bilden geschlossene Stromkreise, die mit dem Drehfeld verkettet sind und mit ihm umlaufen. Sobald Pendelungen auftreten, ergibt sich eine Relativbewegung dieser Dämpferwicklungen gegen das Drehfeld; damit werden in den Windungen Spannungen induziert, und es entstehen Ströme, die die Pendelbewegung bremsen.

29.4.5 Die Induktionsmaschine

Die *Induktionsmaschinen* (*Asynchronmaschinen*) haben auf dem Ständer eine Wicklung von der gleichen Beschaffenheit wie die Wicklung des Ständers der Induktionsmaschinen; diese Ständerwicklung wird an das Netz angeschlossen. Der Läufer hat entweder eine gleichartige Wicklung wie der Ständer, die über Widerstände oder kurz geschlossen ist, oder er ist als „Käfigläufer“ ausgebildet, trägt also auf dem Umfang axiale Stäbe, die an den Stirnseiten durch Ringe kurzgeschlossen sind (Kurzschlussläufer).

Die in den drei Wicklungssträngen des Ständers fließenden dreiphasige Wechselströme verursachen wie bei der Synchronmaschine ein mit der Drehzahl

$$n_1 = \frac{f_1}{p} \quad (29.264)$$

umlaufendes Drehfeld. In den Stäben oder Drähten des Läufers wird durch dieses Feld eine Spannung induziert, die immer dort am stärksten ist, wo sich ein Maximum der Flussdichte des Drehfeldes befindet. Da die Läuferwicklung in sich geschlossen ist, entstehen Ströme in den Läuferstäben, die ebenfalls ungefähr dort ihr Maximum haben. Zwischen diesen Stäben und dem Magnetfeld ergeben sich mechanische Kräfte, die so gerichtet sind, dass sie den Läufer in der Umlaufrichtung des Feldes mitzunehmen suchen. Mit wachsender Annäherung der Drehzahl n_2 des Läufers an die synchrone Drehzahl n_1 wird die Schnelligkeit der Flussänderung in den Läuferstromkreisen immer geringer. Bei synchronem Lauf würde überhaupt keine Spannung mehr im Läufer induziert werden; damit würde der Läuferstrom verschwinden, das Drehmoment wäre Null. Die Läuferdrehzahl ist daher in der Regel immer kleiner als die synchrone Drehzahl (daher früher „Asynchronmotor“).

Die Frequenz f_2 der Wechselströme im Läufer ist durch die Relativgeschwindigkeit zwischen Läufer und Drehfeld gegeben; sie ist also in dem Verhältnis kleiner als die Ständerfrequenz f_1 , in dem der Unterschied zwischen den Drehzahlen n_1 und n_2 zur Drehzahl n_1 des Ständerfeldes steht,

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1}. \quad (29.265)$$

Dieses Verhältnis nennt man den *Schlupf*. Es ist also

$$s := \frac{n_1 - n_2}{n_1}. \quad (29.266)$$

Wie bei einem Transformator haben wir es hier mit zwei miteinander magnetisch gekoppelten Stromkreisen zu tun; im Gegensatz zum Transformator haben hier jedoch die Ströme in der Sekundärwicklung (Läufer) eine andere Frequenz als in der Primärwicklung (Ständer).

Betrachten wir zunächst den *Ständerkreis*, so können wir hier wie beim Transformator den Gesamtfluss in zwei Teile zerlegen, von denen der erste, der Hauptfluss, mit der Primär- und der Sekundärdurchflutung verkettet ist, der zweite dagegen, der primäre Streufluss, nur mit der primären Durchflutung. Wie bei den Synchronmaschinen kann man für den ersten Teil schreiben

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cos p\alpha, \quad (29.267)$$

wobei

$$p\alpha = 2\pi f_1 t = \omega t, \quad (29.268)$$

und α den Winkel bezeichnet, den das Flussdichtemaximum des mit der Geschwindigkeit n_1 umlaufenden Ständerdrehfeldes in irgendeinem Zeitpunkt gegenüber der Ausgangslage durchlaufen hat. Der zweite Teil des primären Gesamtflusses kann in der Form

$$\Phi_{\sigma 1} = L_{\sigma 1} i_1, \quad (29.269)$$

geschrieben werden, wobei also $L_{\sigma 1}$ die Streuinduktivität der Ständerwicklung bezeichnet. Damit wird die erste Hauptgleichung analog Gl. (29.248)

$$u_{01} = 2\pi n_1 p \Phi_0 \sin p\alpha - L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} \quad (29.270)$$

oder

$$u_{01} = \omega \Phi_0 \sin \omega t - L_{\sigma 1}. \quad (29.271)$$

Der gleiche Fluss $\Phi_0 \cos p\alpha$ ist auch mit der Wicklung des *Läufers* verketztet, wenn die Windungszahl der Läuferwicklung die gleiche ist wie die des Ständers; andernfalls muss mit dem Verhältnis der Windungszahlen N_2/N_1 multipliziert werden. Der Winkel α zwischen dem Läufer und dem Drehfeld ergibt sich aus

$$p\alpha = 2\pi f_2 t = swt. \quad (29.272)$$

Drückt man ferner den mit dem Läuferstrom allein verketteten Fluss durch die Streuinduktivität $L_{\sigma 2}$ des Läufers aus und beachtet, dass der Läufer nur mit der Differenzdrehzahl $n_1 - n_2$ von Ständerfeld- und Läuferdrehzahl induziert wird, so folgt für den Läuferstromkreis aus der ersten Hauptgleichung

$$u_{02} = 2\pi(n_1 - n_2)p \Phi_0 \frac{N_2}{N_1} \sin p\alpha - L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt}, \quad (29.273)$$

oder

$$u_{02} = sw \frac{N_2}{N_1} \Phi_0 \sin swt - L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt}. \quad (29.274)$$

Die Spannung auf der Ständerseite setzt sich nach Gl. (29.271) zusammen aus der vom Hauptfluss herrührenden Spannung

$$U_{i1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \Phi_0 \quad (29.275)$$

und der Streuspannung $\omega L_{\sigma 1} I_1$. Die auf der *Läuferseite* induzierte Spannung setzt sich nach Gl. (29.274) zusammen aus $s(N_2/N_1)U_{i1}$ und der Streuspannung $swL_{\sigma 2}I_2$, da die Kreisfrequenz des Läuferstromes sw ist. Der Unterschied gegenüber dem Transformator besteht also nur darin, dass auf der Sekundärseite die Spannung des Hauptflusses und die Streuspannung s -mal so groß sind. D.h. es gilt das Ersatzbild des Transformatoren, wenn alle Spannungen auf der Läuferseite durch s dividiert werden. Aus Abb. 29.34 wird so das *Ersatzbild der Induktionsmaschine*, Abb. 29.44. Das Verhältnis der Windungszahlen $\ddot{u} := N_1/N_2$ wird Übersetzungsverhältnis genannt. L_{h1} ist die Hauptinduktivität des Ständers, die den Leerlaufstrom oder Magnetisierungsstrom I_0 bestimmt.

Aus diesem Ersatzbild lassen sich alle wichtigen Betriebseigenschaften der Induktionsmaschinen ableiten. Wir begnügen uns im folgenden mit einer Näherungsbetrachtung, die sich ergibt, wenn der verhältnismäßig kleine Ständerwiderstand R_1 vernachlässigt wird, und wenn man sich die Spule mit

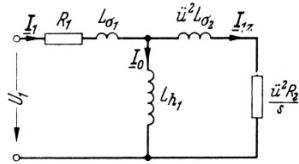


Abbildung 29.44. Ersatzbild der Induktionsmaschine

der Induktivität L_{h1} unmittelbar zwischen die Eingangsklemmen gelegt denkt. Zur Abkürzung setzen wir für die gesamte Streuinduktivität

$$L_\sigma = L_{\sigma 1} + \dot{u}^2 L_{\sigma 2} \quad (29.276)$$

Der Ständerstrom I_1 setzt sich nun aus dem Leerlaufstrom I_0 und dem primären Zusatzstrom I_{1z} zusammen. Dieser Zusatzstrom kann gemäß dem Ersatzbild als Strom in einer Spule mit der Induktivität L_σ und dem Widerstand $\dot{u}^2 R_2/s$ berechnet werden, an der die Ständerspannung U_1 liegt. Das Zeigerdiagramm für diesen Strom ist in Abb. 29.45 dargestellt. Der Phasenwinkel zwischen Spannung und Zusatzstrom ist mit γ bezeichnet.

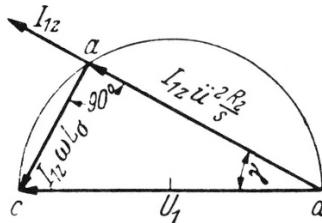


Abbildung 29.45. Zur Bestimmung des primären Zusatzstromes

Ändert sich die Drehzahl des Läufers, so ändert sich s . Da aber U_1 durch das Netz konstant gehalten wird und der Winkel bei a gerade 90° sein muss, so bewegt sich bei einer solchen Änderung der Punkt a auf dem gezeichneten Halbkreis. Dies führt zu dem *Kreisdiagramm der Induktionsmaschine* (Heyland), das ähnlich wie das der Synchronmaschine die Betriebseigenschaften bei Belastungsänderungen beschreibt. Wir dividieren alle Seiten des rechtwinkligen Spannungsdreiecks in Abb. 29.45 durch ωL_σ . Dann wird aus dem Spannungsdreieck das Stromdreieck Abb. 29.46; insbesondere wird aus der Strecke \overline{ac} der primäre Zusatzstrom I_{1z} . Er ist gegen die Spannung U_1 um den Winkel γ phasenverschoben. Errichtet man daher im Punkt c die Senkrechte zu \overline{cd} , so gibt diese Senkrechte die Lage des Spannungszeigers U_1 gegenüber dem Stromzeiger \overline{ca} an. Der Durchmesser Halbkreises ist $U_1/(\omega L_\sigma)$.

Die Lage des Punktes a lässt sich aus dem Schlupf s leicht bestimmen. Betrachtet man nämlich den Abschnitt $\overline{0x}$ auf der im Kreismittelpunkt er-

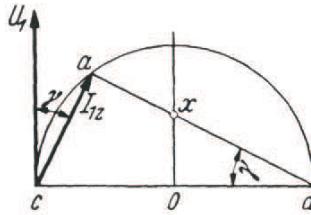


Abbildung 29.46. Zur Ableitung des Kreisdiagramms der Induktionsmaschine

richteten Senkrechten, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $0xd$ und acd

$$\frac{\overline{ox}}{\overline{od}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ad}}. \quad (29.277)$$

Mit

$$\overline{od} = \frac{1}{2} \frac{U_1}{\omega L_\sigma}, \quad \overline{ac} = I_{1z}, \quad \overline{ad} = I_{1z} \frac{\ddot{u}^2 R_2}{s \omega L_\sigma} \quad (29.278)$$

wird

$$\overline{ox} = s \frac{1}{2} \frac{U_1}{\ddot{u}^2 R_2}. \quad (29.279)$$

\overline{ox} ist also gleich dem Schlupf s multipliziert mit einer Konstanten; auf der Mittelsenkrechten kann eine Skala für s aufgetragen werden. Für $s = 0$ (Synchronismus) geht a in c über. Für $s = 1$ (Stillstand) ergibt sich ein bestimmter Punkt a_0 , der Anlaufpunkt.

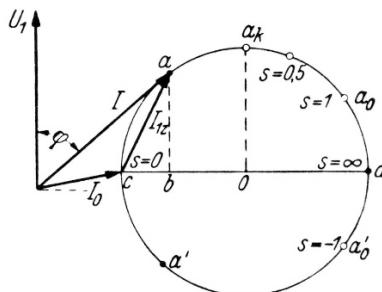


Abbildung 29.47. Kreisdiagramm der Induktionsmaschine

Zu dem primären Zusatzstrom I_{1z} muss der Leerlaufstrom I_0 addiert werden, der wegen der Eisenverluste gegenüber der Spannung U_1 um etwas weniger als 90° nacheilt. Damit erhält man das näherungsweise gültige Kreisdiagramm Abb. 29.47 der Induktionsmaschine, aus dem für jeden Wert des Schlupfes der Ständerstrom I mit seiner Phasenverschiebung φ gegen die Ständerspannung entnommen werden kann. Das Kreisdiagramm liefert ferner

das zu jedem Betriebspunkt gehörige Drehmoment M_d aus dem Abschnitt \overline{ab} . Dieser Abschnitt stellt die Wirkkomponente des Stromes I_{1z} dar, gibt also mit U_1 multipliziert die einem Wicklungsstrang zugeführte Leistung an; die gesamte dem Läufer zugeführte Leistung ist daher $3U_1\overline{ab}$. Sie ist gemäß dem Ersatzbild auch gleich $I_2^2R_2/s$. Von dieser Leistung wird im Läufer der Teil $I_2^2R_2$ in Wärme umgewandelt. Das Verhältnis der als Wärme verloren gehenden Leistung zur Gesamtleistung ist also s ; der in mechanische Arbeit umgewandelte Anteil der Leistung ist

$$(1-s)3U_1\overline{ab}. \quad (29.280)$$

Damit wird das Drehmoment

$$M_d = \frac{(1-s)3U_1\overline{ab}}{2\pi n_2} = \frac{3}{2\pi} \frac{U_1}{n_1} \overline{ab}. \quad (29.281)$$

Die Strecke \overline{ab} bildet also ein Maß für das Drehmoment. Für den Zusammen-

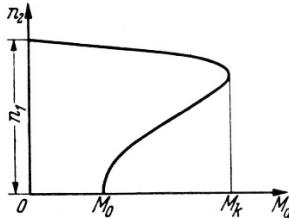


Abbildung 29.48. Drehzahlkennlinie der Induktionsmaschine

hang zwischen Drehmoment und Drehzahl des Läufers erhält man auf diese Weise Kurven von der in Abb. 29.48 gezeigten Art. Das maximale Drehmoment entsteht, wenn es mit a_k zusammenfällt. Hier wird $\overline{ab} = \overline{a_k 0} = \overline{0x} = \overline{0d}$, und mit Gl. (29.279)

$$s \frac{1}{2} \frac{U_1}{\ddot{u}^2 R_2} = \frac{1}{2} \frac{U_1}{\omega L_\sigma}, \quad \text{also} \quad s = \frac{\ddot{u}^2 R_2}{\omega L_\sigma}, \quad (29.282)$$

und

$$M_d = M_k = \frac{3}{4\pi} \frac{U_1^2}{n_1} \frac{s}{\ddot{u}^2 R_2} = \frac{3}{4\pi} \frac{U_1^2}{n_1} \frac{1}{\omega L_\sigma}. \quad (29.283)$$

Dieses maximale Moment ergibt sich also bei um so kleineren Drehzahlen, je größer der Widerstand R_2 des Läufers ist.

Der Motor läuft nach dem Anschalten an, wenn das Anlaufmoment M_0 größer ist als das entgegenstehende Bremsmoment der Belastung. Durch Vergrößern des Läuferwiderstandes R_2 mit einem Zusatzwiderstand kann man den Punkt a_0 weiter nach links verlegen und damit das Anlaufmoment M_0 vergrößern.

Da die Wärmeverluste im Läufer s -mal so groß sind wie die gesamte Leistungsaufnahme, so erfordert ein hoher Wirkungsgrad einen möglichst geringen Schlupf s . Im normalen Betrieb verhält sich der Induktionsmotor daher ähnlich wie ein Gleichstromnebenschlussmotor.

Bei übersynchroner Geschwindigkeit (n_2 größer n_1) wird s negativ, der Punkt a rückt in dem Diagramm, Abb. 29.47, auf die untere Hälfte des Kreises, z.B. nach a' ; der Wirkstrom kehrt seine Richtung um; es wird also elektrische Leistung in das Netz geliefert, die Maschine arbeitet als Generator. Wird andererseits der Läufer entgegen seinem Anlaufmoment in entgegengesetzter Richtung gedreht, so wird s größer als 1. Der Punkt a wandert über den Punkt a_0 hinaus nach rechts. Die Maschine arbeitet als *Bremse*; doch wird hier nicht wie bei Generatorbetrieb elektrische Leistung ins Netz geliefert, sondern die Summe aus der vom Netz zufließenden Leistung und der mechanisch zugeführten Leistung wird in Wärme umgewandelt.

29.4.6 Lineare elektrisch-mechanische Systeme

Die elektrisch-mechanischen Energiewandler der Nachrichtentechnik (Lautsprecher, Mikrophone) sind *lineare Systeme*; die elektrisch oder mechanisch erzeugten Kräfte sind proportional den Strömen oder Spannungen; die Bewegungsamplituden und Geschwindigkeiten sind proportional den Kräften. Diese Linearität ergibt sich bei „elektrodynamischen Systemen“ dadurch, dass die in einem konstanten Magnetfeld mit des B-Feldes $B := \|\mathbf{B}\|$ auf einen Stromleiter wirkende Kraft vom Augenblickswert $F_t = B \cdot l \cdot i$ benutzt wird, bei „elektromagnetischen Systemen“, wie z.B. beim Fernhörer, bei denen die Kraft an sich gemäß Gl. (25.29) quadratisch vom magnetischen Fluss abhängt, dadurch, dass die durch den Strom i verursachten Flussänderungen Li einem konstanten Fluss Φ_0 überlagert werden, so dass der gesamte Fluss

$$\Phi = \Phi_0 + Li \quad (29.284)$$

wird. Das Quadrat dieses Fluxes,

$$\Phi^2 = \Phi_0^2 + 2\Phi_0 Li + L^2 i^2, \quad (29.285)$$

enthält den von der Stromstärke linear abhängigen Teil $2\Phi_0 Li$, gegen den der quadratische Teil $L^2 i^2$ um so mehr verschwindet, je größer Φ_0 gegen Li gemacht wird. In ähnlicher Weise wird bei der Verwendung elektrischer Feldkräfte (Kondensatorlautsprecher, Kondensatormikrophon) die Nutzspannung u einer großen konstanten Vorspannung U überlagert, so dass das nach Gl. (14.36) für die Kraft maßgebende Quadrat der Gesamtspannung,

$$(U + u)^2 = U^2 + 2Uu + u^2, \quad (29.286)$$

ebenfalls angenähert linear von u abhängig wird.

Bei *magnetischen Feldkräften*, die auch hier aus dem gleichen Grund wie bei den elektrischen Maschinen vorwiegend angewendet werden, gilt also allgemein für die Augenblickswerte

$$F_t = Ki, \quad (29.287)$$

wobei die Konstante K mit Hilfe der Grundgleichungen des magnetischen Feldes aus den Abmessungen der Anordnung berechnet werden kann. Diese Kraft wirkt auf den mechanischen Teil des Energiewandlers, also z.B. die Membran des Fernhörers, ein. Setzt sich dieser Teil nun unter der Einwirkung dieser Kräfte in Bewegung, so ergibt sich wie bei den elektrischen Maschinen eine Rückwirkung auf den elektrischen Stromkreis. Infolge der Bewegung des mechanischen Teiles entsteht in dem Stromkreis eine Gegenspannung u_g . Dass dies allgemein so sein muss, folgt aus dem Energiesatz. Die Arbeit, die der mechanische Teil des Systems übernimmt, wenn er unter der Einwirkung der Kraft F_t während der Zeit dt eine Auslenkung dx erfährt, ist

$$dW = F_t dx = F_t \frac{dx}{dt} dt = F_t v dt, \quad (29.288)$$

wobei v die Geschwindigkeit bezeichnet. Dieser Arbeit entspricht die zur Überwindung der Gegenspannung u_g erforderliche elektrische Arbeit $u_g idt$. Durch Gleichsetzen findet man

$$u_g = Kv. \quad (29.289)$$

Die Gegenspannung ist also allgemein proportional der Geschwindigkeit v ; die Konstante ist die gleiche wie die zwischen Kraft und Strom. Bei einer gegebenen Anordnung kann man den Zusammenhang zwischen u_g und v auch aus dem Induktionsgesetz ableiten und so die Konstante K bestimmen. So ist z.B. bei einem elektrodynamischen Lautsprecher, dessen Spule in ein magnetisches Feld mit dem B-Feld B taucht und eine Gesamtdrahtlänge l besitzt,

$$F_t = Blv. \quad (29.290)$$

Wird andererseits die Spule mit der Geschwindigkeit v in dem Magnetfeld bewegt, so entsteht nach dem Induktionsgesetz eine Spannung

$$u_g = Blv. \quad (29.291)$$

In beiden Fällen ist also $K = Bl$. Die Gl. (29.287) und (29.289) entsprechen den beiden Hauptgleichungen der elektrischen Maschinen.

Zahlenbeispiel: Bei einem Kopfhörer sei durch Messung $K = 10mN/mA = 10N/A$ bestimmt worden; ein Strom von $1mA$ erzeuge also eine Kraft von $10mN$. Dann gilt auch hier $u_g = Kv$. Bei einer Membranamplitude von $\hat{x} = 0,02\mu m$ und einer Frequenz von $1000Hz$ wird die Geschwindigkeitsamplitude („Schnelle“) der Membranbewegung

$$\hat{v} = \hat{x}\omega = 0,02 \cdot 10^{-6} m 2\pi \cdot 10^3 s^{-1} = 0,126 \frac{mm}{s} = 0,126 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}. \quad (29.292)$$

Damit ergibt sich also für die induzierte Spannung der Scheitelwert

$$\hat{u}_g = K\hat{v} = 10 \frac{N}{A} \cdot 0,126 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} = 1,26 mV. \quad (29.293)$$

In Abb. 29.49 ist das allgemeine Ersatzbild des elektrischen Kreises eines

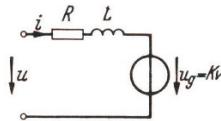


Abbildung 29.49. Allgemeines Ersatzbild eines magnetischen Energiewandlers

solchen Energiewandlers dargestellt. In der Wicklung des Wandlers wirkt die Gegenspannung u_g . Die Gesamtspannung ist daher

$$u = iR + L \frac{di}{dt} + Kv. \quad (29.294)$$

Besteht der mechanische Teil aus einer elastisch gelagerten Masse (Membran), so gilt für den Zusammenhang zwischen der Kraft Ki und der Geschwindigkeit der Bewegung

$$Ki = m \frac{dv}{dt} + rv + h \int v dt. \quad (29.295)$$

Dabei ist $h \int v dt = hx$ die proportional mit der Auslenkung x wachsende elastische Rückstellkraft, m die bewegte Masse und r eine Konstante, die ein Maß für die Dämpfung der Bewegung darstellt; bei Fernhörern und Lautsprechern sind diese Konstanten mitbedingt durch die Rückwirkung der Luft auf die Membran, aus der die Schallabstrahlung hervorgeht.

Die beiden Gl. (29.294) und (29.295) kann man zu einem *Ersatzbild der linearen elektrisch-mechanischen Energiewandler* mit magnetischem Antrieb vereinigen. Wir dividieren zu diesem Zweck die zweite Gleichung auf beiden Seiten durch K und setzen $u_g K$ für v . Dann lautet sie

$$i = \frac{m}{K^2} \frac{du_g}{dt} + \frac{r}{K^2} u_g + \frac{h}{K^2} \int u_g dt. \quad (29.296)$$

Der Strom i stellt sich also aus drei Teilstromen zusammengesetzt dar; der erste hat die gleiche Größe wie der Strom in einem Kondensator mit der Kapazität $C_m = m/K^2$, der zweite Teil entspricht dem Strom in einem Widerstand $R_m = K^2/r$, der dritte Teil dem Strom in einer Spule mit der Induktivität $L_m = K^2/h$, wenn an allen drei Elementen die gleiche Spannung u_g wirkt.

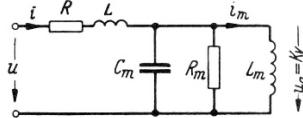


Abbildung 29.50. Ersatzbild des magnetischen Energiewandlers

Anders ausgedrückt: u_g kann als der Spannungsabfall angesehen werden, den der Strom i an der Parallelschaltung der drei Elemente C_m , R_m und L_m hervorruft. Daraus ergibt sich das Ersatzbild des magnetischen Energiewandlers, Abb. 29.50.

Bemerkung: Dass hier die Wirkung der trügen Masse durch die Kapazität eines Kondensators, die Wirkung einer Federkraft durch die Induktivität einer Spule dargestellt werden können, hängt mit der formalen Ähnlichkeit der elektrischen und mechanischen Grundgesetze zusammen. Wegen der Beziehungen

$$F_t = m \frac{dv}{dt}, \text{ und } F_t = h \int v dt \quad (29.297)$$

einerseits und

$$u = L \frac{di}{dt}, \text{ und } u = \frac{1}{C} \int idt \quad (29.298)$$

andererseits kann die Masse m in Analogie zur Induktivität, die Federkonstante h in Analogie zum Kehrwert der Kapazität gesetzt werden, wenn der Strom der Geschwindigkeit und die Spannung der Kraft entspricht.

Es kann aber auch wegen der Ähnlichkeit der Beziehungen

$$v = \frac{1}{h} \frac{dF_t}{dt}, \text{ und } v = \frac{1}{m} \int F_t dt \quad (29.299)$$

mit

$$u = L \frac{di}{dt}, \text{ und } u = \frac{1}{C} \int idt \quad (29.300)$$

für die Federkonstante der Kehrwert der Induktivität, für die Masse die Kapazität gesetzt werden, wenn der Strom der Kraft und die Spannung der Geschwindigkeit entspricht.

Diese beiden Möglichkeiten führen zu zwei verschiedenen elektrischen Ersatzbildern für beliebige lineare mechanische Systeme, durch die alle Rechenverfahren, die für elektrische Netzwerke gelten, ohne weiteres auf mechanische Systeme übertragen werden können; Einzelheiten findet man beispielsweise bei Reinschke und Schwarz [247].

Ganz analoge Überlegungen gelten auch bei Drehbewegungen. An die Stelle der Gl. (29.287) tritt dann die entsprechende Beziehung für das durch den Strom i bewirkte Drehmoment

$$M_d = K_m i. \quad (29.301)$$

Dreht sich nun der mechanische Teil des Energiewandlers um den Winkel α , so ergibt eine gleichartige Überlegung wie oben für die dadurch im elektrischen Stromkreis entstehende Gegenspannung an Stelle von Gl. (29.289)

$$u_g = K_m \frac{d\alpha}{dt} = K_m \omega = K_m 2\pi n, \quad (29.302)$$

wenn ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, n die augenblickliche Drehzahl bezeichnen.

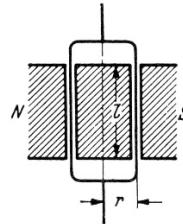


Abbildung 29.51. Drehspulinstrument

Als Beispiel werde ein *ballistisches Drehspulgalvanometer* betrachtet. Die Drehspule befindet sich mit N Windungen im Feld des permanenten Magneten mit dem B-Feld $B := \|\mathbf{B}\|$. Tauchen die Windungen auf eine Länge l in das Feld ein und ist r der Radius der Spulenwindungen, Abb. 29.51, so ist das Drehmoment

$$M_d = 2BlrNi. \quad (29.303)$$

Die Konstante K_m wird also

$$K_m = 2BlrN. \quad (29.304)$$

Für die mechanische Bewegung der Spule gilt nun die Beziehung

$$K_m i = J \frac{d\omega}{dt} + D\omega + s \int \omega dt, \quad (29.305)$$

wobei J das Trägheitsmoment des drehbaren Systems, s eine das Rückstellmoment kennzeichnende Größe und D ein Maß für die mechanische Dämpfung des Systems ist. Die Gl. (29.305) ist völlig analog der Gl. (29.295); ebenso gilt die Gl. (29.294) in der gleichen Form, wenn v durch ω ersetzt wird. Daher gilt auch das Ersatzbild Abb. 29.50 mit

$$C_m = \frac{J}{K_m^2}, \quad R_m = \frac{K_m^2}{D}, \quad L_m = \frac{K_m^2}{s}. \quad (29.306)$$

Da die Spannung an der Spule mit der Induktivität L_m einerseits durch $K_m(d\alpha/dt)$ und andererseits durch $Lm(di_m/dt) = (K_m^2/s)(di_m/dt)$ ausgedrückt werden kann, ergibt sich der Ausschlag α des Instrumentes aus dem Strom im in der Induktivität L_m :

$$\alpha = \frac{K_m}{s} i_m. \quad (29.307)$$

Mit diesem Ersatzbild lässt sich z. B. der zeitliche Verlauf des Ausschlags α nach dem Anlegen einer Spannung ermitteln.

Lässt man in Gl. (29.305) das Rückstellmoment weg, so ergeben sich die Gleichungen für einen frei drehbaren Anker, z. B. den Anker eines Gleichstrommotors mit konstanter Felderregung. Für die Konstante K_m gilt hier nach Gl. (29.238) und (29.239) angenähert

$$K_m = \frac{U_0}{2\pi n_0}, \quad (29.308)$$

wobei U_0 die Nennspannung, n_0 die Nenndrehzahl des Motors bezeichnen. Der Gleichstromanker wirkt also in erster Näherung wie ein Kondensator mit der Kapazität

$$C_m = \frac{1}{K_m^2} J = \left(\frac{2\pi n_0}{U_0} \right)^2 J. \quad (29.309)$$

Auf diese Weise können hohe Kapazitätswerte verwirklicht werden.

Zahlenbeispiel: Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders aus einem Material mit der Dichte γ ist in bezug auf seine Drehachse

$$J = \frac{\pi}{2} \gamma r^4 l, \quad (29.310)$$

wenn r den Radius, l die Länge des Zylinders bezeichnen. Der Anker eines $1-kW$ -Gleichstrommotors für $220V$ und eine Nenndrehzahl $n = 3000min^{-1} = 50s^{-1}$ lasse sich angenähert durch einen Vollzylinder mit dem Radius $r = 40mm = 4 \cdot 10^{-2}m$ und der Länge $l = 150mm = 0,15m$ ersetzen. Für Eisen und Kupfer werde näherungsweise $\gamma = 8kg/dm^3 = 8000kg/m^3$ gesetzt. Damit wird

$$J = \frac{\pi}{2} 8000 \cdot 256 \cdot 10^{-8} \cdot 0,15kgm^2 = 4,8 \cdot 10^{-3}kgm^2. \quad (29.311)$$

Aus Gl. (29.309) folgt

$$C_m = \left(\frac{2\pi 50}{220} \right)^2 4,8 \cdot 10^{-3}F = 10^{-2}F = 10000 \mu F. \quad (29.312)$$

Der Ableitungsstrom dieses Ersatzkondensators ist gleich dem Leerlaufstrom des Motorankers.

30

Der Verschiebungsstrom im quasistationären Feld

Elektrostatische Felder mit den im Abschnitt 6 besprochenen Eigenschaften setzen eine verschwindende Leitfähigkeit voraus. Wegen der endlichen Leitfähigkeit der Isolierstoffe stellt sich bei zeitlich konstanten Potenzialen in Wirklichkeit eine elektrische Strömung ein. *Die Potenzialverteilungen gehorchen bei konstanten Spannungen immer den Gesetzen des Strömungsfeldes.* Werden z.B. mehrere reale Kondensatoren hintereinander geschaltet an eine Gleichspannung gelegt, so verteilt sich die Spannung auf die einzelnen Kondensatoren im allgemeinen durchaus nicht umgekehrt wie die Kapazitätswerte, wie es unter der Voraussetzung elektrostatischer Felder sein müsste, sondern im Endzustand immer entsprechend den Isolationswiderständen, die ganz andere Verhältnisse haben können. *Das zeitlich konstante elektrische Feld ist immer ein elektrisches Strömungsfeld.*

Strömungsfeld und elektrostatisches Feld unterscheiden sich im allgemeinen, und zwar wegen der Verschiedenheit der Grenzbedingungen. Während beim elektrostatischen Feld die Elektrodenoberflächen Potenzialflächen sind, trifft dies beim Strömungsfeld angenähert nur dann zu, wenn die Leitfähigkeit der Elektroden sehr groß ist gegen die des leitenden Zwischenmediums. Die Brechungsgesetze der Strömungslinien und der D-Feldlinien zeigen ferner, dass die Grenzbedingungen an beliebigen Grenzflächen nur dann für beide Arten von Feldern die gleichen sind, wenn überall das Verhältnis ε/κ den gleichen konstanten Wert hat. Nur in diesem Falle stimmt das elektrostatische Feld mit dem Strömungsfeld überein. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, dann ist die Potenzialverteilung im stationären Zustand durch die Gesetze des Strömungsfeldes bestimmt. Die Grenzbedingungen des elektrostatischen Feldes haben im Strömungsfeld keine Gültigkeit; insbesondere gilt nicht mehr, dass die Normalkomponente des D-Feldes an den Grenzflächen stetig ist. Vielmehr gilt im Strömungsfeld nach Formel (15.9)

$$\kappa_1 E_{n1} = \kappa_2 E_{n2}. \quad (30.1)$$

Hieraus ergibt sich für das Verhältnis der Normalkomponenten des D-Feldes an beliebigen Grenzflächen

$$\frac{D_{n1}}{D_{n2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\kappa_2}{\kappa_1}. \quad (30.2)$$

Es münden also von der einen Seite der Grenzfläche her mehr oder weniger D-Feldlinien ein, als von der anderen Seite ausgehen; an der Grenzfläche sind Ladungen vorhanden. Die Dichte der Ladungen ist

$$D_{n1} - D_{n2} = D_{n2} \left(\frac{\varepsilon_1 \kappa_2}{\varepsilon_2 \kappa_1} - 1 \right); \quad (30.3)$$

Sie wird nur dann Null, wenn die oben angeführte Bedingung erfüllt ist.

Dass nun trotzdem der Elektrostatik ein so breiter Raum gewidmet wurde, hat seinen Grund darin, dass die Gesetze des elektrostatischen Feldes angenähert gelten, wenn es sich um *veränderliche* Felder handelt. Sobald sich die Potenziale zeitlich ändern, werden Ladungen transportiert, denen in den Zuleitungen zu den Elektroden des Feldes elektrische Ströme entsprechen. Dieser Vorgang bestimmt die Potenzialverteilung wie im elektrostatischen Feld und überdeckt meist schon bei verhältnismäßig langsamem zeitlichen Änderungen völlig den des Strömungsfeldes.

Wenn sich die Spannung an einem Kondensator ändert, so ergibt sich infolge der damit verbundenen Ladungsänderung ein Strom, der um so stärker ist, je rascher sich die Spannung ändert,

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (30.4)$$

Mit der Ladung ändert sich das D-Feld im Nichtleiter. Man kann daher die Ladungsänderung und damit den Ladungsstrom auch zurückführen auf Änderungen des D-Feldes im Nichtleiter, indem man annimmt, dass die Gl. (30.4) auch für beliebig kleine Ausschnitte des Feldes gilt. Betrachten wir als einen solchen Ausschnitt ein Prisma von der in Abb. 16.4 dargestellten Art, und belegen wir die beiden Grundflächen ΔA mit sehr dünnen Metallfolien, so ist die Kapazität des Prismas zwischen diesen Metallbelegungen

$$C \approx \varepsilon \frac{\Delta A}{\Delta n}, \quad (30.5)$$

wobei Δn die Änderung in Richtung der Flächennormale ist. An der Kapazität liegt die Potenzialdifferenz $\Delta\varphi$ an und es fließt der Ladestrom Δi . Der von diesem kleinen Kondensator aufgenommene Ladestrom ist daher nach Gl.(30.4)

$$\Delta i \approx \varepsilon \frac{\Delta A}{\Delta n} \left(\frac{d(\Delta\varphi)}{dt} \right); \quad (30.6)$$

dafür kann man schreiben

$$\frac{\Delta i}{\Delta A} \approx \varepsilon \frac{d \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta n} \right)}{dt}. \quad (30.7)$$

Nach Bildung eines Grenzüberganges in Richtung immer kleinerer Kapazitäten und nach Einführen von Richtungen für die Stromdichte \mathbf{J} , das E-Feld \mathbf{E} und das D-Feld \mathbf{D} erhält man

$$\mathbf{J} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{rotf}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}_{rotf}}{\partial t}, \quad (30.8)$$

wobei es sich nach Abschnitt 26 bei dem E-Feld und dem D-Feld um die *rotationsfreien Anteile* handelt, was durch den Index „*rotf*“ gekennzeichnet wird.

Man kann daher den von einem beliebigen Feld aufgenommenen Ladestrom so berechnen, als ob an jeder Stelle des Nichteiters bei zeitlichen Änderungen des E-Feldes ein Strom fließen würde, dessen Dichte durch die Änderungsgeschwindigkeit des D-Feldes gegeben ist. Diesen Strom bezeichnet man als *Verschiebungsstrom*. Er setzt sich mit dem infolge der Leitfähigkeit des Isolierstoffes fließenden *Leitungsstrom* zusammen, so dass an jeder Stelle des Feldes für die Stromdichte insgesamt zu setzen ist

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{rotf}}{\partial t}. \quad (30.9)$$

Man bezeichnet diese Größe vor allem in der älteren Literatur als die *Dichte des wahren Stromes*. Die Einführung des Verschiebungsstromes erfolgte früher zunächst willkürlich; sie wurde plausibel gemacht, indem man nach Maxwell die dielektrische Verschiebung durch eine Verschiebung von Elektrizitätsmengen im Nichteiter und im Äther erklärte. Da jedoch die Vorstellung des Äthers im Sinne der Relativitätstheorie zu Schwierigkeiten führte und somit nicht mehr akzeptiert wurde, musste der Verschiebungsstrom als eine Rechengröße betrachtet werden, die in Analogie zum elektrischen Strömungsfeld eingeführt wird (vgl. Abschnitt 17). Man bezeichnet deshalb das D-Feld \mathbf{D} auch als elektrische Flussdichte; früher war die Bezeichnung „*Verschiebungsdichte*“ üblich. In Abschnitt 26.4 wurde gezeigt, dass der (rotationsfreie) Verschiebungsstrom notwendig ist, um die Kontinuitätsgleichung für die Ladung zu erfüllen. Damit ist dieser Verschiebungsstrom in unserer Darstellung der Theorie des quasistationären elektromagnetischen Feldes nicht nur eine Rechengröße.

Daran anschließend sollte noch darauf hingewiesen werden, dass nur der erste Term der wahren Stromdichte 30.9 einen Beitrag zum Magnetfeld ergibt, worauf in der Literatur nur selten hingewiesen wird; eine Ausnahme ist die Arbeit von Raff [234]. Man kann das leicht verstehen, indem man im Durchflutungsgesetz $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ das \mathbf{H} durch \mathbf{B}/μ ersetzt und den Rotationsoperator darauf anwendet

$$\text{rotrot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}. \quad (30.10)$$

Nutzt man die Beziehung $\text{rotrot}(\cdot) = \text{grad div}(\cdot) - \Delta(\cdot)$ (vgl. Anhang A.1), dann ergibt sich die folgende partielle Differentialgleichung für das B-Feld

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu \text{rot } \mathbf{J}, \quad (30.11)$$

wenn man $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ berücksichtigt. Setzt man den wahren Strom (30.9) in die rechte Seite dieser Gleichung ein, dann trägt offensichtlich nur der Leitungsstrom $\kappa \mathbf{E}$ zum Magnetfeld bei.

Bemerkung: Nach Abschnitt 26 wird die Einführung des Verschiebungsstromes $\partial \mathbf{D}_{rotf} / \partial t$ notwendig, um die Gültigkeit der Ladungsbilanz in den quasistationären Feldgleichungen zu sichern. Ein verallgemeinerter Verschiebungsstrom, der auch den divergenzfreien Anteil $\partial \mathbf{D}_{divf} / \partial t$ enthält, muss erst dann eingeführt werden, wenn es sich um rasch veränderliche Felder handelt. Dann ist die magnetische Wirkung des verallgemeinerten Verschiebungsstromes im Nichtleiter der magnetischen Wirkung des Leitungsstromes gleichwertig, so dass es auf die Dichte des verallgemeinerten „wahren“ Stromes ankommt (siehe Abschnitt 33). Den verallgemeinerten Verschiebungsstrom werden wir im Unterschied zu dem bisherigen als *Maxwellschen Verschiebungsstrom* bezeichnen; vgl. Abschnitt 32.1.

Da der (rotationsfreie) Verschiebungsstrom (30.8) als eine Fortsetzung des Ladestromes aufgefasst werden kann, so gilt auch für den wahren Strom das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität, das ausgedrückt werden kann durch die Beziehungen

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (30.12)$$

Wenn nun der Verschiebungsstrom den Leitungsstrom erheblich überwiegt, so dass man diesen vernachlässigen kann, so muss an den Grenzflächen die Normalkomponente des Verschiebungsstromes stetig sein, also

$$\varepsilon_1 \frac{dE_{n1}}{dt} = \varepsilon_2 \frac{dE_{n2}}{dt} \quad (30.13)$$

oder

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}. \quad (30.14)$$

Das ist aber die im elektrostatischen Feld gültige Bedingung, Gl. (8.18). Die Stromlinien des veränderlichen E-Feldes sind in diesem Falle identisch mit den D-Feldlinien des elektrostatischen Feldes. Hierin liegt die Bedeutung der Kenntnisse vom elektrostatischen Feld. Bei vielen praktischen Anwendungen, insbesondere bei Wechselstrom, treten in den Nichtleitern veränderliche elektrische Felder auf, bei denen der Verschiebungsstrom den Leitungsstrom weit überwiegt. Daher gelten hier sehr genau die Gesetze der elektrostatischen Felder. Dies trifft meist schon bei Frequenzen von einigen Hz zu und gilt bis zu sehr hohen Frequenzen. Abweichungen treten erst bei so hohen Frequenzen oder so großen räumlichen Abmessungen auf, dass die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder, die in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit liegt, in Erscheinung tritt.

Es gilt also mit dieser Einschränkung: *Im langsam veränderlichen Feld ist die Potenzialverteilung in Nichtleitern angenähert die gleiche wie im elektrostatischen Feld.*

Ein Beispiel für die Fortsetzung eines Verschiebungsstromes durch einen Leistungsstrom bilden Funken- und Blitzentladungen. Ein zwischen zwei Elektroden bei genügend hoher Spannung entstehender Funke wächst längs einer gestreckten Bahn dadurch, dass an seinem Kopfende infolge des dort herrschenden hohen E-Feldes die Luft ionisiert, also elektrisch leitend wird. An dem Kopfende geht der in der Funkenbahn fließende Leistungsstrom in einen Verschiebungsstrom über. Die Geschwindigkeit, mit der der Kopf vorwärts wandert, ist nun dadurch begrenzt, dass mit wachsender Geschwindigkeit auch der Verschiebungsstrom wächst, Gl. (30.12); unendlich hohe Geschwindigkeit hätte also unendlich große Stromstärke zur Voraussetzung. Da in Wirklichkeit die Stromstärke durch den Generator oder durch die vorhandenen Ladungen und Stromwege begrenzt ist, stellt sich eine endliche Wanderungsgeschwindigkeit für das Vorschieben des Funkenkopfes ein, derart, dass die Leistungsstromstärke in der Funkenbahn gerade zur Deckung des von dem Kopf ausgehenden oder dort einmündenden Verschiebungsstromes ausreicht. Bei einem Blitz liegt diese Geschwindigkeit in der Größenordnung von 20000 km/s .

31

Bewegte Leiter und das Induktionsgesetz

31.1 Bewegte Leiter

Bei der technischen Anwendung der Induktionswirkung kommen oft Anordnungen vor, deren Teile sich gegeneinander bewegen, z. B. in elektrischen Maschinen. Die zweite Feldgleichung

$$u_i = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (31.1)$$

in der integralen Form setzt voraus, dass sich die Körperelemente, über die sich die Integration erstreckt, nicht gegeneinander bewegen, also z. B. fest miteinander verbunden sind. Bewegt sich ein Teil des Systems mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} , so gilt in diesem Teil für das von \mathbf{B} induzierte E-Feld

$$\text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (31.2)$$

Für einen ruhenden Beobachter hat aber das E-Feld \mathbf{E} nach Gl. (27.3) den

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (31.3)$$

Deswegen lautet die *zweite Feldgleichung für einen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Körper* in differentieller Form

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (31.4)$$

Die zugehörige integrale Form liefert die Umlaufspannung

$$u_i = \oint_{C_A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{C_A} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}, \quad (31.5)$$

wobei Umlaufrichtung des Linienintegrals und Orientierung des Flächenvektors im Sinne einer Rechtsschraube miteinander verknüpft sind.

Eine Ableitung von Gl. (31.4) kann alternativ aus der integralen Form von Gl. (31.2) mit zeitabhängiger Fläche $A(t)$

$$\iint_{A(t)} \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (31.6)$$

erfolgen. In diesem Fall kann die Zeitableitung mit der Flächenintegration nicht vertauscht werden. Wenn man jedoch die verallgemeinerte Zeitableitung D_t

$$D_t(\cdot) := \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \text{div}(\cdot) - \text{rot}(\mathbf{v} \times (\cdot)) \quad (31.7)$$

verwendet, wobei \mathbf{v} der Vektor der Geschwindigkeit ist, dann ergibt sich wegen $\text{div} \mathbf{B} = 0$ direkt die Gl. (31.5), wobei der Stokessche Satz verwendet wurde. Eine Ableitung als auch einen Beweis der Operatorbeziehung findet man z. B. bei Becker ([17], S. 129 und S. 36f).

Für technische Anwendungen ist das verallgemeinerte Induktionsgesetz für bewegte Körper eine völlig ausreichende Näherung, aber eine vollständige Beziehung ergibt sich erst auf der Grundlage der speziellen Relativitätstheorie, worauf an dieser Stelle nicht eingegangen werden soll; siehe 31.3. Der interessierte Leser wird auf die entsprechende Literatur verwiesen; siehe z. B. Lehner [162].

Beispiel: Das B-Feld im Luftspalt eines Wechselstrommagneten M , Abb. 31.1, ändere sich zeitlich gemäß der Beziehung

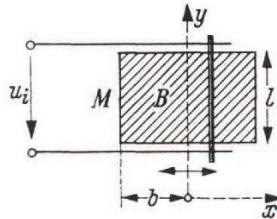


Abbildung 31.1. Bewegter Leiter im zeitlichen veränderlichen Magnetfeld

$$B_z = \hat{B} \cos \omega t. \quad (31.8)$$

Im Luftspalt schwingt parallel zu sich selbst ein stabförmiger Leiter sinusförmig mit der Geschwindigkeit

$$v_x = \hat{v} \cos \omega t \quad (31.9)$$

um eine Ruhelage; d. h. mit der Auslenkung

$$x = \int v_x dt = \int \hat{v} \cos \omega t dt = \frac{\hat{v}}{\omega} \sin \omega t. \quad (31.10)$$

In dem rechtwinkligen Koordinatensystem habe \mathbf{B} nur eine Komponente B_z in z -Richtung. Orientiert man auch den Flächenvektor $d\mathbf{A}$ in z -Richtung, dann braucht das Flächenintegral nur die Beträge zu berücksichtigen. Da B_z über die Fläche konstant ist, wird

$$-\iint_A \frac{\partial B_z}{\partial t} dA = -\frac{\partial B_z}{\partial t} (b+x)l = l\omega \hat{B} \sin \omega t \left(b + \frac{\hat{v}}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (31.11)$$

Im zweiten Integral zeigt das Vektorprodukt aus v_x und B_z in negative y -Richtung. Da beide Anteile unabhängig von y sind, ergibt das Integral

$$\int_0^l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{y} = -v_x B_z l = -\hat{v} \hat{B} \cos^2 \omega t. \quad (31.12)$$

Berücksichtigt man bei der Addition von (31.11) und (31.12), dass

$$\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t = \cos 2\omega t \quad (31.13)$$

ist, so erhält man für die Spannung u_i in der in Abb. 31.1 eingezeichneten Zählrichtung:

$$u_i = bl \hat{B} \omega \sin \omega t - l \hat{B} \hat{v} \cos 2\omega t. \quad (31.14)$$

Man hätte das Ergebnis auch erhalten, Wenn man den Fluss durch die Fläche in der Form

$$\Phi = (b+x)Bl \quad (31.15)$$

angeschrieben und dann Gl. (31.1) benutzt hätte.

Bemerkung: Bei der Anwendung der Gl. (31.3) können weitere zu Fehlschlüssen führende Schwierigkeiten auftreten, wenn gleichzeitig stromführende Leiter oder Stoffe mit von 1 verschiedener Permeabilitätszahl in dem magnetischen Feld bewegt werden. Ein instruktives Beispiel bilden die in den Nuten liegenden Leiter des Ankers elektrischer Maschinen. Diese Leiter befinden sich in einem schwachen Restfeld, das um so geringer ist, je höher die Permeabilität des Eisens ist (vgl. auch Abschnitt 21.5). Wie durch Anwenden der Gl. (31.1) gezeigt werden kann, hat trotzdem die induzierte Leiterspannung den gleichen Betrag als ob der Leiter in dem durch die Erregermagnete erzeugten gleichmäßig verteilten Feld liegen würde. An Hand der Abb. 31.2 soll mit einem einfachen Modell dieser Effekt erläutert werden.

Der durch das Feld mit der Geschwindigkeit v bewegte Leiter befindet sich im Innern eines mitbewegten Hohlzylinders aus Eisen. Das ursprünglich homogene Magnetfeld habe in großem Abstand von dem Hohlzylinder das konstante B-Feld B .

Ist die Leiterschleife außerhalb des magnetischen Feldes geschlossen und hat der Leiter im magnetischen Feld den Weg $x = vt$ zurückgelegt, so ist der von der Schleife in dem Zeitpunkt t umfasste Fluss

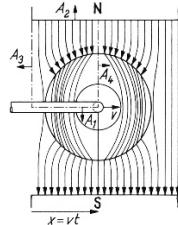


Abbildung 31.2. Bewegter Leiter in einem mitbewegten Eisenzyylinder

$$\Phi = xBl = vtBl \quad (31.16)$$

und die induzierte Spannung wird vBl .

Der Eisenzyylinder hat also keinen Einfluss auf die induzierte Spannung. Diese hat die gleiche Größe als ob der Leiter ohne Eisenhülle mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch das B-Feld \mathbf{B} hindurchgeführt werden würde, obwohl doch das B-Feld am Ort des Leiters bei hoher Permeabilität des Eisenzyinders verschwindend klein ist.

Die Richtigkeit dieses bemerkenswerten Ergebnisses sieht man sofort ein, wenn man die Divergenzfreiheit des B-Feldes \mathbf{B} berücksichtigt. Da ein beliebiges Hullenintegral über das B-Feld den Wert Null liefert, ergibt sich der durch die Fläche \mathbf{A}_1 hindurchtretende magnetische Fluss Φ auch als negative Summe der durch die restlichen Flächen hindurchtretenden Flüsse.

Das skalare Produkt zwischen den Flächen $\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ der vorderen und der hinteren Deckfläche und des B-Feldes \mathbf{B} liefert keinen Beitrag zum Fluss. So mit liefert nur die ganz im homogenen Feld liegende Fläche \mathbf{A}_2 das behauptete Ergebnis.

$$\Phi(t) = \iint_{A_1} \mathbf{B}(\mathbf{A}_1, t) \cdot d\mathbf{A}_1 = - \iint_{A_2} \mathbf{B}(\mathbf{A}_2, t) \cdot d\mathbf{A}_2 = \|\mathbf{B}\| \cdot l \cdot v \cdot t. \quad (31.17)$$

31.2 Bewegte nichtleitende Körper

Wird ein nichtleitender Körper ($\kappa = 0, \mu = \mu_0$) mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein *stationäres magnetisches Feld* \mathbf{B} bewegt, so wird in dem Körper nach Gl. (27.3) das elektrische Feld $\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ induziert. Für das dadurch verursachte D-Feld außerhalb des Körpers gilt jedoch nicht $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}_i$, sondern

$$\mathbf{D} = (\epsilon - \epsilon_0)(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (31.18)$$

da nur die materiellen Dipole bewegt werden und nur sie zum D-Feld beitragen.

Eine ähnliche Korrektur ist bei der Bewegung eines nichtleitenden Körpers in einem *elektrischen Feld* \mathbf{E} notwendig. An den Oberflächen einer isolierenden Platte in einem Plattenkondensator beträgt die Ladungsdichte $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Darin röhrt der Anteil $(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}$ von den materiellen Dipolen der nichtleitenden Platte her. Wird die Platte mit der Geschwindigkeit v zwischen den feststehenden Plattenelektroden verschoben, so wirken diese Oberflächenladungen wie elektrische Ströme, die auf den beiden Oberflächen entgegengesetzte Richtungen haben. Der Strombelag ist

$$v \|\mathbf{D}\| = (\varepsilon - \varepsilon_0) \|\mathbf{E}\|, \quad (31.19)$$

und nach dem Durchflutungsgesetz entsteht in der Isolierstoff-Platte ein magnetisches Feld mit dem H-Feld

$$\|\mathbf{H}\| = (\varepsilon - \varepsilon_0) v \|\mathbf{E}\|. \quad (31.20)$$

Werden auch die Kondensatorplatten mitbewegt, so entsprechen die Oberflächenladungen $\varepsilon \|\mathbf{E}\|$ auf den Kondensatorplatten elektrischen Strömen $v\varepsilon \|\mathbf{E}\|$ in entgegengesetzten Richtungen. Das H-Feld in dem Isolierstoff wird daher jetzt als Differenz

$$\|\mathbf{H}\| = \varepsilon_0 v \|\mathbf{E}\|. \quad (31.21)$$

31.3 Weitere Bewegungseffekte

Die übrigen elektromagnetischen Effekte, die bei Bewegungen von materiellen Körpern auftreten, haben wegen ihrer Kleinheit meist keine Bedeutung. Es sind im wesentlichen die folgenden:

1. Bewegte Raumladungen Wirken wie elektrische Ströme von der Dichte

$$\mathbf{J} = \varrho \mathbf{v}. \quad (31.22)$$

und erzeugen daher ebenso wie diese magnetische Felder.

2. Auch bei der Bewegung *un geladener* Leiter entstehen elektrische und magnetische Felder, wenn sich die Bewegungsgeschwindigkeit zeitlich ändert, da dann die Leitungselektronenwolke infolge ihrer Trägheit etwas voreilt oder zurückbleibt, so dass unkom pensierte Raumladungen auftreten.
3. Bei Bewegungsgeschwindigkeiten v , die nicht mehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c sind, treten in den Grundgleichungen des quasistationären elektromagnetischen Gleichungen und den vollständigen Maxwell-schen Gleichungen sowie (31.4) wegen des Gesetzes der konstanten Lichtgeschwindigkeit noch Faktoren von der Größenordnung $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ auf, die sich aus der Relativitätstheorie ergeben (siehe Abschnitt 31.1).

Bemerkungen: 1. Das elektrische Feld in der Umgebung einer mit konstanter Geschwindigkeit v frei fliegenden Ladung Q , z.B. eines Elektrons, hat man sich folgendermaßen vorzustellen. In irgendeinem Punkt P in der Umgebung der Ladung, Abb. 31.3, finden wir gemäß dem E-Feld einer Punktladung den Betrag des E-Feldes

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\|\mathbf{r}\|^2}. \quad (31.23)$$

x und y seien Koordinaten eines Systems, in dessen Ursprung sich die Ladung

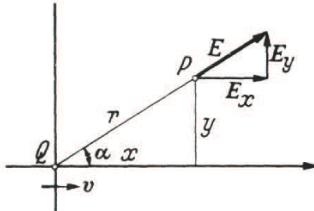


Abbildung 31.3. E-Feld der bewegten Punktladung

befindet. Die x - und y -Komponenten der des E-Feldes im Punkte P sind

$$E_x = \frac{x}{r} E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (31.24)$$

$$E_y = \frac{y}{r} E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (31.25)$$

Infolge der Bewegung der Ladung nimmt während eines Zeitelements dt die Koordinate x des festen Raumpunktes P um $dx = vdt$ ab. Daher nehmen die E-Feldkomponenten zu um

$$dE_x = -\frac{\partial E_x}{\partial x} dx, \quad dE_y = -\frac{\partial E_y}{\partial x} dx. \quad (31.26)$$

Diesen Änderungen des E-Feldes entsprechen Verschiebungsströme im Punkt P :

$$J_x = \varepsilon_0 \frac{dE_x}{dt} = \frac{Qv}{4\pi} \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad (31.27)$$

$$J_y = \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt} = \frac{Qv}{4\pi} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}. \quad (31.28)$$

Abb. 31.4 zeigt den dadurch bestimmten Verlauf der Linien des Verschiebungsstromes. Die x -Komponente wird Null für

$$y = \pm x\sqrt{2}. \quad (31.29)$$

Auf diesen Geraden verläuft also die Strömung senkrecht zur Flugbahn. In der Flugbahn selbst und auf der durch die Ladung gehenden, zur Flugrichtung senkrechten Ebene ist dagegen die y -Komponente der Strömung Null; die Strömung hat hier die Richtung der Flugbahn.

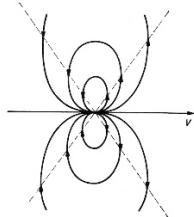


Abbildung 31.4. Verschiebungsströme der bewegten Punktladung

Mit der Strömung entsteht ein magnetisches Feld mit Feldlinien, die wegen der Symmetrie Kreisform haben. Die Ebenen dieser Kreise stehen senkrecht auf der Flugrichtung, ihre Mittelpunkte liegen in der Flugbahn. Die Durchflutung einer solchen Feldlinie mit dem Radius y ist

$$\Theta = \int_0^y J_x 2\pi y dy. \quad (31.30)$$

Die Integration lässt sich leicht ausführen und ergibt

$$\Theta = \frac{1}{2} Qv \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (31.31)$$

Wird das Durchflutungsgesetz auf die Feldlinie mit dem Radius y angewendet, $2\pi y H = \Theta$, so folgt für das H-Feld

$$H = \frac{1}{4\pi} Qv \frac{y}{r^3} = \frac{1}{4\pi} Qv \frac{\sin \alpha}{r^2}. \quad (31.32)$$

Das H-Feld ist an jeder Stelle des Raumes wie die Stromdichte proportional dem Produkt Qv . Die im magnetischen Feld aufgespeicherte Energie ist daher nach Gl. (24.14) und (24.15) proportional $Q^2 v^2$; sie wächst proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit wie die kinetische Energie $mv^2/2$ eines bewegten Körpers der Masse m . Bei den Elektronen ist eine andere Masse als diese „scheinbare elektromagnetische Masse“ nicht nachweisbar.

Die oben durchgeführte Überlegung gibt eine physikalische Begründung der Amperèschen Formel Gl. (21.61). Die Stromstärke I in dem Leiterstück von der Länge ds ist gleichwertig einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Elektrizitätsmenge $Q = Idt = I(dt/ds)ds = I(ds/v)$, d. h. es ist

$$Qv = Ids. \quad (31.33)$$

Damit werden die Gl. (31.32) und (21.61) identisch.

Bei hohen Geschwindigkeiten v , die sich der Lichtgeschwindigkeit nähern, entsteht eine Verzerrung des in Abb. 31.4 dargestellten Feldes infolge der Rückwirkung des magnetischen Feldes gemäß dem Induktionsgesetz. Dadurch ändert sich auch die scheinbare elektromagnetische Masse, siehe Gl. (37.3). 2. Es ist noch die Frage zu betrachten, was man unter der Geschwindigkeit v einer frei im Raum fliegenden Ladung zu verstehen hat.

Erfahrungsgemäß gelten die physikalischen Grundgesetze der Mechanik und der Elektrodynamik in jedem Koordinatensystem, das eine feste Orientierung gegen das Fixsternsystem hat, sowie in allen parallel dazu, also ohne Drehung, *gleichförmig bewegten* Koordinatensystemen. Solche Systeme nennt man *Inertialsysteme*. So kann ein in der Sonne verankertes Koordinatensystem, das fest gegen die Fixsterne orientiert ist, als ein Inertialsystem angesehen werden. Ein im Mittelpunkt der Erde verankertes derartiges System ist mit sehr großer Annäherung ein Inertialsystem, solange es sich um Vorgänge handelt, die kurz im Vergleich zu einem Erdumlauf um die Sonne, also zu einem Jahr, sind. Ein Koordinatensystem, das fest mit der Erdoberfläche verbunden ist (Laboratorium) ist zwar kein Inertialsystem, da es an der Erddrehung teilnimmt. Trotzdem kann auch ein solches System für viele Zwecke als Inertialsystem angesehen werden, wenn nämlich die Erddrehung während der Zeitspanne des betrachteten Vorganges unmerklich ist.

Streng genommen lautet daher die Antwort auf die oben gestellte Frage:

Unter v ist die Geschwindigkeit des Elektrons relativ zu einem Beobachter zu verstehen, vorausgesetzt, dass sich dieser in einem Inertialsystem befindet.

Für die Beobachtung auf der Erde ist dies praktisch gleich der Relativgeschwindigkeit der Elektronen gegen den Beobachter auf der Erde. Würde sich aber ein Beobachter mit seinen Messgeräten mit gleichförmig fliegenden Elektronen mitbewegen, dann würde er ruhende Elektronen mit ihrem elektrostatischen Feld beobachten können, aber kein magnetisches Feld der oben geschilderten Art.

Teil VII

Das instationäre elektromagnetische Feld

Die Maxwellsche Theorie des elektromagnetisches Feldes

32.1 Die Maxwellsche Ergänzung und Wellen

In Abschnitt 26.4 wurde den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, die nur das Induktionsgesetz berücksichtigen, noch der Term $\partial \mathbf{D}_{rotf} / \partial t$ hinzugefügt, um die Konsistenz mit der Kontinuitätsgleichung der Ladungen herzustellen. Es konnte gezeigt werden, dass die Zustandsgleichungen des elektromagnetischen Feldes trotzdem vom Typ einer Diffusionsgleichung sind, d.h. physikalisch gesehen, dass der neue Anteil keine magnetischen Wirkungen erzeugt. Maxwell hat nun den obengenannten Gleichungen des elektromagnetischen Feldes eine solche Erweiterung – die *Maxwellsche Ergänzung* – hinzugefügt, so dass sich Zustandsgleichungen für das elektromagnetische Feld vom Typ einer *Wellengleichung* ergeben. In diesen Zustandsgleichungen ist auch eine zweite Zeitableitung enthalten. Es ist üblich, den neuen Term als *Maxwellschen Verschiebungsstrom*¹ zu bezeichnen.

Betrachtet man die in Abschnitt 26.5 abgeleitete Diffusionsgleichung (26.44) des E-Feldes etwas genauer (vereinfacht für den ladungsfreien Fall $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$)

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\kappa \dot{\mathbf{E}} = \mu\epsilon \ddot{\mathbf{E}}_{rotf}, \quad (32.1)$$

dann wird schnell klar, wie man diese Gleichung zu erweitern hat, um eine (gedämpfte) Wellengleichung zu erhalten. Um eine zweite Zeitableitung zu erhalten, muss neben dem rotationsfreien Anteil von $\mu\epsilon \ddot{\mathbf{E}}$ auch der divergenzfreie Anteil auftreten, d.h. der vollständige Term $\partial \mathbf{D} / \partial t$ muss hinzugefügt werden. Das ist die eigentliche „Maxwellsche Ergänzung“, denn der rotationsfreie Anteil allein führt nicht auf Zustandsgleichungen mit Wellenlösungen. Maxwell hat hinsichtlich des Grundes der Einführung seines Zusatzterms $\sim \ddot{\mathbf{E}}$ keine näheren schriftlichen Aufzeichnungen hinterlassen, sondern nur die sich daraus ergebenden Folgerungen diskutiert. So führte die von Maxwell im Jahre

¹ Bei dem in den vorherigen Abschnitten benutzten Verschiebungsstrom handelte es sich nur um seinen rotationsfreien Anteil

1861 eingeführte Hypothese dazu, dass der von ihm eingeführte „Verschiebungsstrom“ die gleichen magnetischen Wirkungen wie der Leitungsstrom hervorruft. Man kann jedoch annehmen, dass ihm klar war, dass er auf diese Weise zu einer Wellengleichung kommen würde (siehe auch Zapolsky [314]) und dass dies einer zunächst theoretischen Begründung des Lichtes auf der Grundlage der elektromagnetischen Theorie führt. Ein Zusammenhang von Licht und Elektrizität war übrigens seit langem vermutet worden; Hinweise dazu findet man bereits in dem von Leonard Euler im Jahre 1769 verfassten Buch „Briefe an eine Deutsche Prinzessin“ [74]. Zur Illustration des von Maxwell neu in die elektromagnetische Theorie eingeführten theoretischen Aspekts der Wellenausbreitung soll ein Plattenkondensator betrachtet werden.

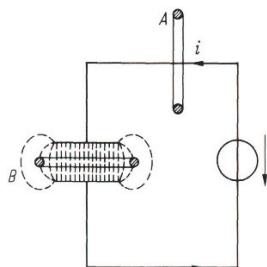


Abbildung 32.1. Magnetische Wirkung des Verschiebungsstromes

Wird an die beiden Platten eines Kondensators, Abb. 32.1, eine Wechselstromquelle angeschlossen, so fließt in dem so gebildeten Stromkreis ein Wechselstrom, der sich in dem isolierenden Raum zwischen den beiden Platten als Verschiebungsstrom fortsetzt, so dass an jeder Stelle des Stromkreises der Gesamtstrom den gleichen Wert i hat. In dem ringförmigen Raum A , z.B. einem Ring aus Isolierstoff, findet man daher ein magnetisches Feld mit konzentrischen Feldlinien. Das Linienintegral des H-Feldes längs einer solchen Feldlinie ist in jedem Zeitpunkt gleich der Stromstärke i . Man kann das B-Feld in dem Ring messen, indem man den Ring mit Draht bewickelt, der an ein Voltmeter angeschlossen wird. In der Lage B des Ringes ergibt sich nun infolge der magnetischen Wirkungen des Maxwellschen Verschiebungsstromes der gleiche Induktionsfluss wie in der Lage A (wobei davon abgesehen werde, dass ein Teil der Verschiebungslien sich außen um den Ring herum schließt). Diese Gleichwertigkeit von Verschiebungsstrom und Leitungsstrom hinsichtlich der *magnetischen Wirkung* ist von grundlegender Bedeutung, wenn es sich um rasch veränderliche Vorgänge handelt, da der Verschiebungsstrom mit zunehmender Schnelligkeit der Feldänderungen wächst. So wie der Raum in der Umgebung des Stromleiters von einem magnetischen Feld erfüllt ist, so sind auch mit den Linien des Verschiebungsstromes zwischen den beiden Platten magnetische Feldlinien verkettet, die bei symmetrischer Anordnung konzentrische Kreise bilden.

32.2 Die Maxwellschen Gleichungen

Die der Elektrostatik, dem elektrischen Strömungsfeld und dem stationären Magnetfeld zugrunde liegenden Phänomene führten zu einem System von algebraischen Gleichungen und partiellen Differentialgleichungen, das in Abschnitt 26.3 um das Induktionsgesetz erweitert wurde. Damit auch die allgemeine Form der Kontinuitätsgleichung weiterhin ihre Gültigkeit behält, wurde noch ein zusätzlicher Term eingefügt, der nach Maxwell als Verschiebungsstrom bezeichnet wird. Es handelt sich allerdings nur um den rotationsfreien Anteil des von Maxwell eingeführten Terms; vgl. Abschnitt 30. Das quasistationäre elektromagnetische Feld wird also durch die folgenden Gleichungen beschrieben

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad (32.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}_{rotf}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (32.3)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (32.4)$$

Wird nun nach Maxwell der vollständige Verschiebungsstrom $\partial \mathbf{D} / \partial t$ eingefügt, dann erhält man nunmehr die vollständigen Gleichungen für das elektromagnetische Feld, das man häufig auch als *Maxwellsche Gleichungen* des elektromagnetischen Feldes bezeichnet

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad (32.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (32.6)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (32.7)$$

Grundsätzlich ändert sich das Durchflutungsgesetz nur sehr wenig, aber diese Änderung hat erhebliche Auswirkungen. Während die quasistationären Feldgleichungen auf Potenzialgleichungen für \mathbf{A} und φ auf partielle Differentialgleichungen vom Diffusionstyp führen, ergeben sich aus den Maxwellschen Gleichungen Potenzialgleichungen vom Wellengleichungstyp. Das soll für den Fall linearer Materialgleichungen ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$) gezeigt werden. Dazu machen wir wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ wiederum den Ansatz $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ und setzen diese Beziehung in das verallgemeinerte Durchflutungsgesetz ein; man erhält

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.8)$$

Verwendet man die Beziehung $\operatorname{rot} \operatorname{rot}(\cdot) = \operatorname{grad} \operatorname{div}(\cdot) - \Delta(\cdot)$ (vgl. Anhang A.1)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (32.9)$$

wobei diesmal die Coulomb-Eichung nicht benutzt wird.

Mit dem Ansatz $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ kann man auch eine alternative Form des Induktionsgesetzes ableiten

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{A})}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}. \quad (32.10)$$

Da $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ rotationsfrei ist, kann man wie in der Elektrostatik einen Gradienten-Ansatz mit einem skalaren Potenzial φ machen und es ergibt sich

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (32.11)$$

Setzt man Gl.(32.11) in Gl.(32.9), so erhält man

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \varepsilon \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (32.12)$$

Auf entsprechende Weise erhält man für das skalare Potenzial φ die Beziehung

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t}. \quad (32.13)$$

Würde man die Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ verwenden, dann vereinfacht sich zwar die Gl. (32.13) und man erhält eine Poissonsche Differentialgleichung, aber in der Gl. (32.12) bleibt ein komplizierterer Term in φ übrig. Man verwendet deshalb die sogenannte *Lorenz-Eichung*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (32.14)$$

um die Divergenz des Vektorpotenzials festzulegen. Damit ergeben sich die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}, \quad (32.15)$$

$$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (32.16)$$

Im Sinne der Systemtheorie in Abschnitt 2 können diese Gleichungen als Zustandsgleichungen des vollständigen elektromagnetischen Feldes angesehen werden, woraus sich die beobachtbaren Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} und \mathbf{H} mit Hilfe der „Beobachtungsgleichungen“ (32.11) und $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ sowie den Materialgleichungen bestimmen lassen.

Im folgenden sollen die Lösungsverfahren der Wellengleichungen (32.15) und (32.16) nicht in voller Allgemeinheit diskutieren, denn selbst wenn wir uns auf die elektromagnetischen Felder beschränken, gibt es eine Vielzahl von analytischen und numerischen Methoden. Stattdessen sollen einige für die elektrotechnischen Anwendungen wichtigen Fälle behandelt und anhand derer einige analytische Lösungswege solcher Gleichungen illustriert werden.

Den interessierten Leser müssen wir auf die umfangreiche Literatur verweisen. Hinsichtlich der analytischen Verfahren sollen insbesondere die Monographien von Müller [205], Becker [18], Lehner [162] erwähnt werden, während Russer [253], Salazar-Palma et al. [254], Chari und Salon [54] und Chew et al. [55] eine sehr gute Übersicht auch über numerische Methoden bei elektromagnetischen Wellen bieten.

Auch die Methode der Greenschen Funktion kann im Fall *inhomogener Wellengleichungen* wiederum sehr hilfreich sein, um Lösungen bei allgemein vorgegebener Ladungsdichte ϱ und Stromdichte \mathbf{J} als Faltungssintegral aufzuschreiben; vgl. z. B. Lopez Davalos [60] und Ludwig [172]. Dabei wird die Greensche Funktion G im Fall einer skalaren Wellengleichung mit Hilfe einer raumzeitlichen „Delta-Funktion“ ermittelt

$$\left(\Delta - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, t; \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = -4\pi\delta(t - \tilde{t})\delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}). \quad (32.17)$$

Die Lösungen lassen sich dann in integraler Form formulieren

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\iiint G(\mathbf{r}, t; \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) d\tilde{V} \right) d\tilde{t}. \quad (32.18)$$

Für den unendlich ausgedehnten Raum ergibt sich die folgende *retardierte Greensche Funktion* ($c := 1/\sqrt{\mu\epsilon}$)

$$G(\mathbf{r}, t; \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \frac{\delta(t - \frac{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}{c} - \tilde{t})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}; \quad (32.19)$$

des Weiteren gibt es noch eine *avancierte Greensche Funktion*, die man im freien Raum aus Kausalitätsgründen üblicherweise ausschließt; z. B. Ludwig ([172], S. 176ff), Lehner ([162], S. 454f). Setzt man die Greensche Funktion (32.19) und nutzt die Deltafunktion, dann erhält man folgende Potenziale

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\varrho(\mathbf{r}, t - \frac{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}{c})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (32.20)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t - \frac{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}{c})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \quad (32.21)$$

Elementare Betrachtungen zum instationären elektromagnetischen Feld

In einem veränderlichen elektromagnetischen Feld in quasistationärer Näherung ist der (quasistationäre) Verschiebungsstrom nach Abschnitt 30 definiert als die Zunahme des Flusses des D-Feldes geteilt durch die Zeit. Die Dichte dieses Verschiebungsstromes beträgt $\partial \mathbf{D}_{rotf} / \partial t$ und setzt sich mit der Leitungsstromdichte \mathbf{J} in dem betreffenden Stoff zur Dichte \mathbf{J}_w des sogenannten *wahren Stromes* in der quasistationären Näherung zusammen, Gl.(30.9),

$$\mathbf{J}_w := \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}_{rotf}}{\partial t}. \quad (33.1)$$

Ist der Stoff linear und elektrisch isotrop, so gilt

$$\mathbf{J}_w := \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{rotf}}{\partial t}. \quad (33.2)$$

Der durch irgendeine Fläche A in dem Raum hindurchfließende Gesamtstrom ist gleich dem Flächenintegral der wahren Stromdichte

$$i = \iint_A \mathbf{J}_w \cdot d\mathbf{A}. \quad (33.3)$$

Erweitert man den Verschiebungsstrom im Maxwellschen Sinne, dann erweitern sich auch die wahre Stromdichte und der zugehörige Strom

$$\mathbf{J}_w^{Max} := \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (33.4)$$

und

$$i = \iint_A \mathbf{J}_w^{Max} \cdot d\mathbf{A}. \quad (33.5)$$

Dies ist zunächst nichts weiter als eine willkürliche Definition. Sie erhält aber ihren Sinn dadurch, dass nach der Erfahrung – wie bereits erwähnt – der

Maxwellsche Verschiebungsstrom in gleicher Weise magnetische Wirkungen hervorruft wie der Leistungsstrom. Dabei beziehen sich die genannten Erfahrungen auf das Auftreten von elektromagnetischen Wellen.

Nimmt man den Maxwellschen Verschiebungsstrom in das Durchflutungsgesetz auf, so ergibt sich aus Gl.(26.34) die *erste Feldgleichung* der Maxwellsschen Theorie

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (33.6)$$

die besagt, dass der Wirbel des H -Feldes an jeder Stelle des Raumes gleich der wahren (Maxwellschen) Stromdichte an dieser Stelle ist; sie lautet in integraler Form

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A}, \quad (33.7)$$

wobei das Flächenintegral über eine vom Weg \mathcal{C} des Linienintegrals berandete Fläche A zu nehmen ist. Dabei sind Umlaufrichtung und Orientierung des Flächenvektors im Sinne einer Rechtsschraube miteinander verknüpft.

Die *zweite Feldgleichung* der Maxwellsschen Theorie stellt, wie bereits in der quasistationären Theorie des elektromagnetischen Feldes diskutiert, eine Verallgemeinerung des Induktionsgesetzes dar. Die in einem beliebigen geschlossenen Weg \mathcal{C} innerhalb eines Leiters bei Änderungen des magnetischen Flusses induzierte Spannung ist nach Gl. (27.25)

$$u_i = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (33.8)$$

Sie ist unabhängig von dem Leitermaterial, und man hat daher anzunehmen, dass das Linienintegral des E-Feldes den gleichen Wert hat, auch wenn überhaupt kein Leiter vorhanden ist. Diese Folgerung wird in der Tat durch die Erfahrung bestätigt. Ändert sich der magnetische Induktionsfluss in einem Nichtleiter, so entsteht also ebenfalls ein elektrisches Feld. Über die Struktur dieses Feldes kann man eine Aussage machen mit Hilfe der folgenden Überlegung. Wir denken uns in dem Magnetfeld ein Flächenelement $\Delta \mathbf{A}$ mit der Berandung \mathcal{C} senkrecht zur Richtung der magnetischen Feldlinien abgegrenzt. Wendet man auf dieses Flächenelement das Induktionsgesetz nach Gl. (33.8) an und wandelt das Linienintegral nach dem Stokesschen Satz in ein Flächenintegral um, so findet man näherungsweise

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \approx \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A} \approx -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \Delta \mathbf{A}, \quad (33.9)$$

wenn man noch die Definition des magnetischen Flusses benutzt. Daraus folgt nach Division durch ΔA mit $\mathbf{n} := \Delta \mathbf{A} / \Delta A$ die folgende Beziehung

$$\frac{1}{\Delta A} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \approx \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \approx -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}. \quad (33.10)$$

Der *Wirbel des E-Feldes* ist danach an jeder Stelle des Raumes gleich der *Abnahmgeschwindigkeit des B-Feldes*. Die Richtung des Wirbels des E-Feldes ist durch die Richtung der Änderung des B-Feldes gegeben; in einem Feld mit geraden parallelen B-Feldlinien steht die Richtung des E-Feldes überall senkrecht auf der Richtung der B-Feldlinien.

Zwischen dem E-Feld und dem B-Feld besteht demnach ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen dem H-Feld und der wahren Maxwellschen Stromdichte. So wie jeder elektrische Strom mit dem Auftreten eines magnetischen Feldes verknüpft ist, das geschlossene, mit den Stromlinien verkettete Feldlinien hat, so entsteht bei jeder Änderung des magnetischen Induktionsflusses ein elektrisches Feld mit in sich geschlossenen Feldlinien, die mit den magnetischen Feldlinien verkettet sind.

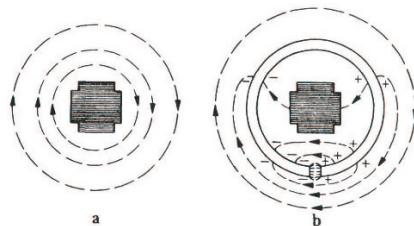


Abbildung 33.1. Elektrisches Feld in der Umgebung eines Transformatorkernes

In Abb. 33.1, Bild a ist der Verlauf der Feldlinien des induzierten elektrischen Feldes in der Umgebung eines von Windungen freien Teiles eines Transformatorkernes dargestellt. Längs einer jeden Feldlinie hat die Umlaufspannung den gleichen Wert: sie ist gleich der Abnahmgeschwindigkeit des Flusses im Eisenkern, wenn man von den magnetischen Streulinien absieht. Liegt eine Windung aus Kupferdraht in dem Feld, wie in Abb. 33.1, Bild b, so setzen sich – interpretiert im Sinne der klassischen mikroskopischen Transporttheorie – die Leitungselektronen unter der Einwirkung des induzierten elektrischen Feldes in Bewegung, bis an dem einen Drahtende eine bestimmte positive Ladung, am anderen eine negative Ladung vorhanden ist, die für sich allein ein Potenzialgefälle in entgegengesetzter Richtung erzeugen würden. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein, in dem das E-Feld innerhalb des Drahtes Null ist. Die ganze Umlaufspannung findet man dann zwischen den beiden Drahtenden. Der Leiter schiebt also das elektrische Feld auf den Raum zwischen seinen Enden zusammen.

Die Abbildung 33.1 soll nur ein qualitatives Bild geben. Der genaue Verlauf der elektrischen Feldlinien wird durch den Eisenkern und seine Struktur, z.B. Schichtung aus Blechen, beeinflusst.

Bemerkung: Eine Anwendung findet das elektrische Wirbelfeld im leiterfreien Raum beim *Betatron* (Steenbeck 1940). Hier werden ähnlich wie beim

Zyklotron Ladungsträger tangential in einen dosenförmigen luftleeren Raum geschossen, der parallel zur Achse von einem magnetischen Feld durchsetzt ist. Während beim Zyklotron das magnetisch Feld zeitlich konstant bleibt, wird hier ein magnetisches Wechselfeld mit der Frequenz f benutzt. Der Betrag des E-Feldes des Wirbelfeldes auf einer Kreisbahn mit dem Radius r ist nach Gl.(33.8)

$$\|\mathbf{E}_i\| = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (33.11)$$

wenn mit Φ der durch die Kreisbahn gehende Fluss bezeichnet wird. Sie beschleunigt auf der Kreisbahn laufende Elektronen etwa während einer Viertelperiode auf eine Anlaufspannung

$$U_a = n \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{\max} = n 2\pi f \Phi_{\max}, \quad (33.12)$$

wobei n die Zahl der Elektronenumläufe während der Zeit $1/(4f)$ ist. Damit können hohe Spannungen hergestellt werden. Wie sich aus der Betrachtung der Bewegungsgleichungen der Elektronen ergibt, erfordert hier die Stabilisierung der Elektronenbahn auf einen Kreis die Einhaltung bestimmter Bedingungen (Krümmung der magnetischen Feldlinien nach außen, Zunahme des B-Feldes in der Umgebung der Elektronenbahn mit dem Radius, B-Feld in der Elektronenbahn halb so groß wie bei homogenem Feld mit gleichem Φ_{\max} (siehe z.B. Prassler [232]).

Nach den beiden Feldgleichungen der Maxwellschen Theorie sind elektrisches und magnetisches Feld wechselseitig miteinander verknüpft. Ändert sich der Induktionsfluss, so entstehen geschlossene elektrische Feldlinien, die mit dem Fluss verkettet sind. Mit dem Entstehen der elektrischen Feldlinien ist das Auftreten von Leitungsströmen und von Verschiebungsstrom verbunden. Die Ströme erzeugen wieder ein magnetisches Feld. Eine Änderung eines der beiden Felder für sich allein ist nicht möglich. Nur wenn die Änderungen sehr langsam vor sich gehen, kann man diese gegenseitige Abhängigkeit vernachlässigen. Bei der Beschreibung des Ladenvorganges eines Kondensators in Abschnitt 30 war stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die entstehenden magnetischen Felder und ihre Rückwirkungen vernachlässigt werden können. Ganz ähnlich wird bei der Berechnung des Stromverlaufes nach dem Einschalten einer Spule zwar die in dem Leiter durch die Flussänderung entstehende Quellenspannung berücksichtigt, nicht aber das elektrische Feld, das nach der zweiten Feldgleichung auch außerhalb der Leitungsdrähte vorhanden ist und das durch seine Verschiebungsströme wieder auf das magnetische Feld zurückwirkt. Der genaue Feldverlauf ist außerordentlich kompliziert und nur in wenigen besonders einfachen Fällen der analytischen Berechnung zugänglich, sondern muss mit einem Feldsimulator (ANSYS [85], etc.) ermittelt werden.

Bemerkung: Man kann jedoch meist den infolge der Vernachlässigung der magnetischen Wirkungen des Verschiebungsstromes entstehenden Fehler auf

Grund der Feldgleichungen leicht abschätzen. Als Beispiel werde die in Abb. 22.9 dargestellte Drosselspule betrachtet. Fließt durch die Wicklung ein Wechselstrom von 50Hz mit dem Scheitelwert $0,54\text{A}$, so entsteht ein magnetischer Fluss mit dem Scheitelwert $\Phi_m = 5 \cdot 10^{-4}\text{Vs}$. Die infolge der Flussänderungen im Fenster des Eisenkerns auftretenden elektrischen Feldlinien bilden ungefähr Kreise, die den Fluss umschlingen; sie haben daher eine mittlere Länge von etwa 15cm . Nach dem Induktionsgesetz ist die Umlaufspannung längs einer solchen Feldlinie im Maximum

$$\omega\Phi_m = 314 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\text{s}^{-1}\text{Vs} = 0,16\text{V}. \quad (33.13)$$

Das E-Feld längs der Feldlinie ist daher ungefähr

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{0,16\text{V}}{15\text{cm}} \approx 0,01 \frac{\text{V}}{\text{cm}}, \quad (33.14)$$

und die Dichte des Verschiebungsstromes beträgt im Maximum

$$\varepsilon_0\omega\|\mathbf{E}\| = 0,886 \cdot 10^{-13} \cdot 314 \cdot 0,01 \frac{\text{F}}{\text{cm}} \text{s}^{-1} \frac{\text{V}}{\text{cm}} \approx 3 \cdot 10^{-13} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}, \quad (33.15)$$

Denkt man sich das ganze Fenster des Eisenkerns mit einem Verschiebungsstrom von dieser Dichte ausgefüllt, so ist sein Querschnitt ungefähr 28cm^2 , und die durch die Verschiebungsströme verursachte zusätzliche Durchflutung beträgt

$$\Theta' = 3 \cdot 10^{-13} \cdot 28\text{A} \approx 10^{-11} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}. \quad (33.16)$$

Das ist ein verschwindend kleiner Betrag gegen die Durchflutung des Wechselstromes in der Wicklung von 3600A .

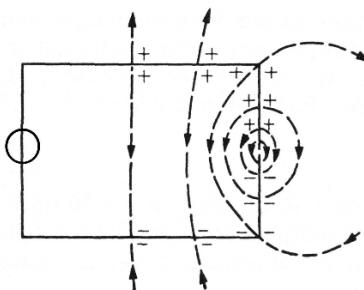


Abbildung 33.2. Elektrostatisches Feld bei einem unterbrochenen Stromkreis

Die enge Verknüpfung der magnetischen und elektrischen Felder, wie sie in den Maxwell'schen Feldgleichungen zum Ausdruck kommen, hat zur Folge, dass sich jede Feldänderung im Raum nur mit einer endlichen Geschwindigkeit

ausbreiten kann. Es ist interessant, das Entstehen eines magnetischen Feldes an Hand der beiden Grundgesetze gedanklich zu verfolgen. In Abb. 33.2 ist ein einfache Anordnung mit einer Gleichspannungsquelle dargestellt, der an einer Stelle eine Unterbrechung mit ganz kleinem Abstand der beiden Drahtenden haben soll. Infolge der von der Spannungsquelle erzeugten Potenzialdifferenz spannen sich elektrische Feldlinien von dem positiven Drahtende zum negativen. Auf der Oberfläche des oberen Drahtes befinden sich positive, auf der Oberfläche des unteren Drahtes negative Ladungen. Wir wollen nun verfolgen, wie sich das Feldbild verändert, wenn die beiden Drahtenden miteinander in Berührung gebracht werden. In Abb. 33.3, Teil a ist gezeigt, wie unmittelbar Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens infolge der Kräfte des elektrischen Feldes sich auszugleichen suchen. Dieser Ausgleich wirkt so wie ein Strom, der in einem kurzen Abschnitt des Drahtes in der Umgebung der Berührungsstelle von oben nach unten fließt. Dieser Strom baut das elektrische Feld ab, und es ergibt sich daher ein Maxwellscher Verschiebungsstrom, der von unten nach oben fließt und den Leistungsstrom schließt; er ist in der Abbildung gestrichelt eingezeichnet.

Dieses Bild ist aber nicht vollständig. Mit dem Strom ergibt sich nach der ersten Feldgleichung in der Umgebung der Berührungsstelle ein magnetisches Feld, dessen Feldlinien den Strom im Leiter ungefähr in Kreisform umschließen und zwar innerhalb des von den Verschiebungsströmen begrenzten etwa kugelförmigen Raumes. Außerhalb dieses Raumes können keine derartigen Feldlinien auftreten, da ihre Durchflutung Null wäre. Das Entstehen des magnetischen Feldes hat nach der zweiten Feldgleichung ein elektrisches Feld zur Folge mit Feldlinien, die wieder mit dem magnetischen Fluss verkettet sind. Längs der Strombahn, die durch den Leistungsstrom und den Verschiebungsstrom gebildet wird, wirkt die Umlaufspannung dieses elektrischen Feldes, und man findet aus den Richtungsregeln, dass die induzierte Quellenspannung dem Strom auf diesem Weg entgegenwirkt. Das Magnetfeld sucht also das Anwachsen des Stromes und damit den Abbau des ursprünglichen elektrischen Feldes zu verhindern. Je rascher der Strom anwächst, um so schneller wächst das magnetische Feld, um so größer wird aber die den Strom hemmende induzierte Spannung. Es stellt sich daher ein Gleichgewicht ein zwischen dem ursprünglichen elektrischen Feld und dem durch das Anwachsen des Magnetfeldes nach dem Induktionsgesetz entstehende elektrische Feld, so dass der Abbau des elektrischen Feldes mit einer ganz bestimmten endlichen Geschwindigkeit vor sich geht.

Einige Zeit später finden wir die in Abb. 33.3, Teil b dargestellte Feldverteilung. Die Ladungen sind nun auf einer größeren Länge des Drahtes ausgeglichen, ein größerer Raum ist frei vom elektrischen Feld; er ist bereits mit dem magnetischen Feld ausgefüllt. In dem Raum außerhalb dieser Zone hat das elektrische Feld noch die gleiche Beschaffenheit wie vor dem Schließen des Stromkreises. Der Vorgang setzt sich in gleicher Weise fort, wobei die durch die Maxwellschen Verschiebungsströme gebildeten Grenzflächen zwischen dem ursprünglichen elektrischen Feld und dem entstehenden magnetischen Feld

immer weiter in den Raum hinauseilt, bis schließlich der ganze Raum vom magnetischen Feld ausgefüllt ist (vom Spannungsabfall längs des Leiters, der ein schwaches elektrisches Feld bedingt, sehen wir hier ab). Diesen Vorgang der Ausbreitung des Feldes bezeichnet man als *elektromagnetische Welle*. Eine elektromagnetische Welle entsteht immer, wenn sich die Ströme oder Spannungen in einem Stromkreis irgendwie ändern; einige spezielle Formen und Eigenschaften der elektromagnetischen Wellen werden im nächsten Abschnitt 34 betrachtet.

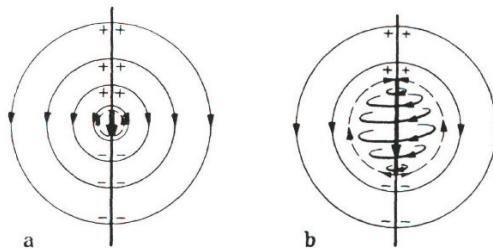


Abbildung 33.3. Aufbau des elektrischen und Aufbau des magnetischen Feldes

Bildet man auf beiden Seiten der ersten Feldgleichung (33.6) die Divergenz, so ergibt sich mit Hilfe von $(\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0)$ und (33.4)

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_w^{Max} = 0, \quad (33.17)$$

eine Beziehung, die aussagt, dass die Linien des Maxwellschen wahren Stromes immer in sich geschlossen sind. Endigt ein Leitungsstrom an einer Grenzfläche zwischen einem Leiter und einem Nichtleiter, so fließt ein Maxwellscher Verschiebungsstrom gleicher Stärke im Nichtleiter von dieser Stelle weg.

Aus Gl.(33.17) folgt mit Gl.(33.1)

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (33.18)$$

Führt man hier mit $(\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho)$ die Raumladungsdichte ϱ ein, so ergibt sich

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (33.19)$$

Der Leitungsstrom ist also nur quellenfrei, wenn die Raumladungsdichte Null oder zeitlich konstant ist.

Auf dem gleichen Weg ergibt sich aus der dritten Feldgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \text{konst.} \quad (33.20)$$

Die Konstante ist erfahrungsgemäß Null, also

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (33.21)$$

Die magnetischen Induktionslinien sind entweder endlos oder in sich geschlossen. Alle Gesetze der elektromagnetischen Theorie sind in den Gl. (33.6), (33.9), (33.17) und (33.21) enthalten, die für den Verlauf beliebiger elektromagnetischer Felder gelten.

An den Grenzflächen von Stoffen verschiedener Eigenschaften ergeben sich aus diesen Gleichungen gewisse *Grenzbedingungen*, die eine Verallgemeinerung der früher aufgestellten Grenzbedingungen darstellen.

Im ganzen ergeben sich auf diese Weise vier Bedingungen, die an Grenzflächen erfüllt sein müssen:

1. Die Normalkomponente der wahren Stromdichte muss stetig sein:

$$J_{wn1} = J_{wn2}. \quad (33.22)$$

Dies folgt aus Gl.(33.17), wenn man ein Flächenelement der Grenzfläche betrachtet. Der von der einen Seite eintretende Strom muss gleich dem auf der anderen Seite austretenden Strom sein. An der Grenzfläche zwischen einem metallischen Leiter und einem Isolator gilt folgendes. Innerhalb der Metalle ist der Verschiebungsstrom wegen der hohen Leitfähigkeit gegenüber dem Leistungsstrom nicht nachweisbar. In Metallen gibt es praktisch nur den Leistungsstrom. In einem guten Isolator, z.B. Luft, überwiegt andererseits der Verschiebungsstrom. Es muss daher hier

$$\kappa E_{n1} = \varepsilon \frac{dE_{n2}}{dt} \quad (33.23)$$

sein. Die Normalkomponente des Leistungsstromes geht stetig über in die Normalkomponente des Verschiebungsstromes; die Normalkomponente des E-Feldes hat auf beiden Seiten von Grenzflächen im allgemeinen verschiedene Werte.

2. Die Tangentialkomponente des E-Feldes muss stetig sein:

Diese Beziehung folgt aus der Integralform der zweiten Feldgleichung, wenn man sie auf ein hinreichend schmales Rechteck anwendet, dessen lange Seiten beiderseits der Grenzfläche liegen und dessen kurze Seiten die Grenzflächen durchstoßen. Die beiden Bedingungen 1 und 2 zeigen, dass im allgemeinen Fall die Linien des wahren Stromes an den Grenzflächen gebrochen werden, und zwar in ziemlich komplizierter Weise, wenn es sich um zeitlich veränderliche Größen handelt. In Wechselfeldern durchläuft der Winkel, den die Stromlinien mit der Grenzfläche bilden, während jeder Periode 360° (vgl. Abschnitt 34).

3. Die Normalkomponente des B-Feldes muss stetig sein:

$$B_{n1} = B_{n2}. \quad (33.24)$$

Dies folgt aus Gl.(33.21) in gleicher Weise wie früher z. B. Gl.(22.24), ebenso

4. Die Tangentialkomponente des H-Feldes muss stetig sein:

$$H_{t1} = H_{t2}. \quad (33.25)$$

Die magnetischen Feldlinien werden also gebrochen, wenn die Permeabilität in den beiden aneinander grenzenden Stoffen verschiedene Werte hat.

Das zur Berechnung von elektromagnetischen Feldern und Wellen dienende System von Gleichung ist im folgenden nochmals zusammengestellt, wobei die Kontinuitätsgleichung für die Stromdichte J bereits in den Maxwellschen Feldgleichungen enthalten ist

$$\begin{aligned} \text{Feldgleichungen: } & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{Kontinuitätsgleichungen: } & \operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (33.26) \\ \text{Materialgleichungen: } & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Die Maxwellschen Feldgleichungen gelten in der hier aufgestellten Form zunächst nur für ruhende Körper. Bei *Bewegungen von leitender oder nicht-leitender Materie* im Raum treten zusätzlicher Effekte auf, die durch diese Gleichungen nicht beschreiben werden. Im Fall des quasistationären elektromagnetischen Feldes sind wir im Abschnitt auf eine derartige Erweiterung eingegangen und nur mit wenigen Hinweisen auf das allgemeine elektromagnetische Feld. Der allgemeine Fall kann erst im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie detailliert behandelt werden; vgl. z. B. Hehl [108].

34

Elektromagnetische Wellen

34.1 Elementarform der elektromagnetischen Welle

Nach den vorherigen Abschnitten entsteht eine elektromagnetische Welle, sobald sich die Ströme oder Spannungen zeitlich ändern. Zeitlich *konstante* Spannungen und Ströme liegen vor, wenn sich Elektrizitätsmengen in Ruhe oder in *gleichförmiger* Bewegung befinden; Strom- und Spannungssänderungen werden durch ungleichmäßig bewegte Elektrizitätsmengen verursacht. Die einfachste elektromagnetische Welle wird sich daher ergeben, wenn eine punktförmige Elektrizitätsmenge in einem sonst von Ladungen und materiellen Körpern freien Raum ungleichförmig bewegt wird. Die bei allgemeinen Bewegungen von räumlich ausgedehnten Ladungen entstehenden Wellen lassen sich durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungsteilchen ausgehenden Wellen darstellen.

Da sich jede Bewegung nach *Fourier* in zeitlich sinusförmigen Bewegungen zerlegen lässt, so erhält man einen Einblick in diese Vorgänge, wenn man eine sinusförmige Bewegung von Ladungen betrachtet. Solche Bewegungen treten auch auf, wenn sich die Ströme und Spannungen in einem Stromkreis zeitlich sinusförmig verändern. In jedem kleinen Ausschnitt des vom Wechselstrom durchflossenen Leiters schwingt die Elektronenwolke gegenüber den feststehenden positiven Ladungen der Atomrümpfe in der Längsrichtung des Leiters hin und her. Die von einem drahtförmigen Leiter ausgehende elektromagnetische Welle kann aus den von den Längenelementen des Leiters herührenden Teilwellen zusammengesetzt gedacht werden. Die von einem sehr kurzen von Sinusstrom durchflossenen Leiterabschnitt ausgehende Welle bildet die *Elementarform der elektromagnetischen Welle*. Sie wird durch den Wechselstrom i in dem Leiterabschnitt von der sehr kleinen Länge l erregt oder, was damit gleichwertig ist, durch eine Ladung Q , die mit der Geschwindigkeit v sinusförmig um eine Ruhelage schwingt. Beide Vorgänge sind gleichwertig, wenn gemäß Gl.(31.33)

$$vQ = Il. \quad (34.1)$$

Eine solche Erregungsstelle wird *Hertzscher Dipol* genannt.

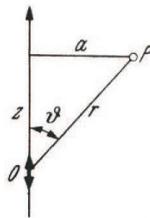


Abbildung 34.1. Koordinaten der schwingenden Ladung

Die Lage eines beliebigen Punktes P im Raum gegenüber der schwingenden Ladung werde durch die Koordinaten, Abb. 34.1, gekennzeichnet. Die z -Achse werde in die Bewegungsrichtung der Ladung gelegt. Aus Symmetriegründen hängen dann die Feldgrößen nur von den beiden Zylinderkoordinaten a und z ab. In dem Raum außerhalb des Dipols gelten die Feldgleichungen in der Form

$$\text{rot} \mathbf{H} = +j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (34.2)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (34.3)$$

wenn der Voraussetzung gemäß eine sinusförmige Zeitabhängigkeit mit der Kreisfrequenz ω eingeführt wird. Dabei werden die in komplexer Form dargestellten Felder nicht besonders gekennzeichnet, wenn klar ist, ob es sich um reelle oder komplexe Felder handelt. Ausgehend von den Gln. (33.26) erhält man diese Gleichungen, wenn $\epsilon = \epsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ sowie die Stromdichte $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ist, so dass mit Hilfe der Materialgleichungen die Felder \mathbf{D} und \mathbf{B} eliminiert werden können. Anschließend separiert man den Zeitanteil oder geht direkt auf sinusförmige Größen über, wobei die komplexen Ortsanteile die Gln. (34.2) und (34.3) erfüllen müssen.

Formal entspricht die Beziehung (34.2) der im stationären magnetischen Feld geltenden Beziehung $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$, wenn \mathbf{J} an Stelle von $j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}$ eingeführt wird, und man kann auch hier das H-Feld aus einem Vektorpotenzial ableiten, indem man

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (34.4)$$

setzt. Führt man dies in Gl.(34.3) ein, so folgt

$$\text{rot}(\mathbf{E} + j\omega\mu_0 \mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (34.5)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass das Feld des in der Klammer stehenden Vektors wirbelfrei ist; daher kann dieser Vektor aus einem zunächst noch unbekannten skalaren Potenzial φ abgeleitet werden; die Lösung von Gl.(34.5) kann in folgender Weise notiert werden

$$\mathbf{E} + j\omega\mu_0\mathbf{A} =: -\text{grad } \varphi \quad (34.6)$$

oder

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - j\omega\mu_0\mathbf{A}. \quad (34.7)$$

Führt man andererseits den Ansatz (34.4) in Gl.(34.2) ein, so folgt mit Hilfe der Operatoridentität $\text{rotrot}(\cdot) = \text{grad}(\cdot)\text{div}(\cdot) - \Delta(\cdot)$ aus Anhang A.1

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} \quad (34.8)$$

oder

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\text{grad div } \mathbf{A} - \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\Delta \mathbf{A}. \quad (34.9)$$

Durch Vergleich dieser Beziehung mit Gl.(34.7) findet man

$$\varphi = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\text{div } \mathbf{A}, \quad (34.10)$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{A}. \quad (34.11)$$

Wir setzen zur Abkürzung¹

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299\,792.458 \frac{\text{km}}{\text{s}}; \quad (34.12)$$

dann wird aus Gl.(34.11)

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{A}. \quad (34.13)$$

Für die *Augenblickswerte* des Vektorpotenzials gilt also die sogenannte *Wellengleichung*:

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (34.14)$$

Die magnetischen Feldlinien sind aus Symmetriegründen Kreise, deren Mittelpunkte auf der z -Achse liegen. Es muss daher der Vektor \mathbf{A} parallel zur z -Achse gerichtet sein. Wir nehmen ferner an, dass genauso wie im Fall des stationären Feldes der Vektor \mathbf{A} nur von dem Abstand r des Punktes P von der Erregungsstelle abhängt. Es zeigt sich, dass man mit dieser Annahme alle Bedingungen des Problems erfüllen kann. In *Kugelkoordinaten* (r, ϑ, α) ² lautet nun die Gl.(34.13), da alle Komponenten von \mathbf{A} mit Ausnahme derjenigen in der z -Richtung Null sind, nach Gl.(B.2) mit A_z statt φ

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA_z}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(r A_z)}{dr^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} A_z; \quad (34.15)$$

¹ Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist aufgrund ihrer überragenden Bedeutung auf diesen zahlenmäßigen Wert von der 17. Generalversammlung für Maß und Gewichte im Jahre 1983 festgelegt worden.

² vgl. Anhang B

hieraus folgt

$$r A_z = C e^{\pm kr}, \quad (34.16)$$

wobei

$$k := j \frac{\omega}{c} \quad (34.17)$$

und C eine zunächst noch unbestimmte Konstante darstellt. Da wir uns auf die Betrachtung von Feldern beschränken, die von dem Dipol ausgehen, so ist nur das negative Vorzeichen von k brauchbar, und es wird schließlich

$$A_z = \frac{C}{r} e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (34.18)$$

Die Augenblickswerte bestimmten wir durch Multiplikation mit $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ und Projektion auf die imaginäre Achse:

$$A_z = \frac{C \sqrt{2}}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (34.19)$$

Das Vektorpotenzial ist also hier durch eine nach allen Richtungen hin fortschreitende Welle dargestellt, deren Geschwindigkeit c ist und deren Amplituden umgekehrt proportional mit dem Abstand r abnehmen.

Es lassen sich nunmehr die Feldgrößen mit Hilfe der Gl. (34.4) und (34.9) berechnen. Das H-Feld hat überall die auf a und z senkrechte Richtung von α . Mit Gl.(34.3) und dem Rotationsoperator in *Zylinderkoordinaten* (r, α, z) ³, deren r hier a entspricht, ergibt sich

$$H_\alpha := \text{rot}_\alpha A_z = - \frac{\partial A_z}{\partial a} = - \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{dr}{da}. \quad (34.20)$$

Da nach Abb. 34.1

$$r = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (34.21)$$

ist, wird

$$\frac{dr}{da} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{a}{r}, \quad (34.22)$$

und mit Gl.(34.18) gilt:

$$H_\alpha = C \frac{a}{r^3} \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (34.23)$$

In der *unmittelbaren Nähe* der schwingenden Ladung, ($\omega r/c \ll 1$), wird daher

$$H_\alpha = C \frac{a}{r^3}. \quad (34.24)$$

Andererseits ist nach der Amperèschen Formel, Gl.(21.61), der Effektivwert des H-Feldes in der Umgebung eines geraden Stromleiters von der kleinen

³ vgl. Anhang B

Länge l , der von einem Wechselstrom mit dem Effektivwert I durchflossen wird

$$H_\alpha = \frac{1}{4\pi} I \frac{a}{r^3} l. \quad (34.25)$$

Der Vergleich mit Gl.(34.24) zeigt, dass das berechnete Feld in das Feld des kurzen geraden Stromleiters übergeht, wenn man setzt

$$C = \frac{Il}{4\pi}. \quad (34.26)$$

Ersetzt man den kurzen Stromleiter durch die bewegte Ladung Q gemäß Gl.(34.1) so gilt auch

$$C = \frac{Q\hat{v}}{4\pi\sqrt{2}}, \quad (34.27)$$

wobei \hat{v} den Scheitelwert der Geschwindigkeit der Ladungsbewegung (*Schnelle*) bedeutet.

Zur Berechnung des *E-Feldes* benützen wir Gl.(34.9) und Gl.(34.11)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \text{grad div} \mathbf{A} - j\omega\mu_0 \Delta \mathbf{A}. \quad (34.28)$$

Es ist dem Divergenzoperator in *Zylinderkoordinaten* und mit Gl.(34.21)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (34.29)$$

Hieraus folgt mit dem Gradienten in *Zylinderkoordinaten*

$$\text{grad}_z(\text{div } \mathbf{A}) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \left(\frac{z}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (34.30)$$

$$\text{grad}_a(\text{div } \mathbf{A}) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial a \partial z} = \frac{az}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} - \frac{az}{r^3} \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (34.31)$$

$$\text{grad}_\alpha(\text{div } \mathbf{A}) = 0. \quad (34.32)$$

Ferner ist mit Gl.(34.18)

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{C}{r^2} \left(1 + j\frac{\omega r}{c}\right) e^{-j\frac{\omega r}{c}}, \quad (34.33)$$

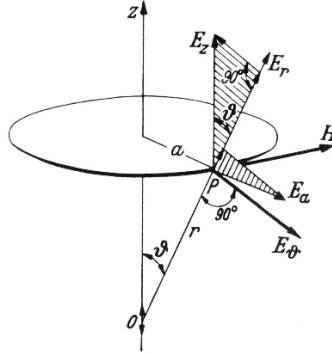
$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} = \frac{C}{r^3} \left(2 + 2j\frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right) e^{-j\frac{\omega r}{c}}. \quad (34.34)$$

Damit ergibt sich

$$E_z = \frac{C}{r^5} e^{-j\frac{\omega r}{c}} \left[\frac{(3z^2 - r^2)}{j\omega\epsilon_0} \left(1 + j\frac{\omega r}{c}\right) + j\omega\mu_0 r^2 (z^2 - r^2) \right], \quad (34.35)$$

$$E_a = \frac{C}{r^5} \frac{az}{j\omega\epsilon_0} e^{-j\frac{\omega r}{c}} \left[3 + 3j\frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 \right], \quad (34.36)$$

$$E_\alpha = 0. \quad (34.37)$$

**Abbildung 34.2.** Feldkomponenten der schwingenden Ladung

Der Vektor des E-Feldes liegt also in der durch den Punkt P gehenden Meridianebene; er steht daher überall senkrecht auf dem H-Feld \mathbf{H} ; Abb. 34.2.

Zerlegt man E_z und E_a in die beiden aufeinander senkrecht stehenden Richtungen r und ϑ , so kann man mit Hilfe der beiden schraffierten rechtwinkligen Dreiecke die Komponenten E_r und E_ϑ des E-Feldes berechnen. Es ist

$$E_r = E_z \cos \vartheta + E_a \sin \vartheta \quad (34.38)$$

und

$$E_\vartheta = -E_z \sin \vartheta + E_a \cos \vartheta. \quad (34.39)$$

Ferner ist

$$a = r \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (34.40)$$

Führt man dies in Gl.(34.35) und (34.36) ein, so ergibt sich

$$E_r = \frac{2C \cos \vartheta}{j\omega \varepsilon_0 r^3} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}} \quad (34.41)$$

und

$$E_\vartheta = \frac{2C \sin \vartheta}{j\omega \varepsilon_0 r^3} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (34.42)$$

Ferner gilt nach Gl.(34.23)

$$H_\alpha = \frac{C \sin \vartheta}{r^2} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (34.43)$$

Dies sind die Feldgrößen der elektromagnetischen Elementarwelle nach H. Hertz (1888).

34.1.1 Nahfeld der schwingenden Ladung

In unmittelbarer Nähe des Dipols ($\frac{\omega r}{c} \ll 1$) wird nach den Gl.(34.41) bis (34.23) angenähert

$$E_r = \frac{2C \cos \vartheta}{j\omega \varepsilon_0 r^3}, \quad (34.44)$$

$$E_\vartheta = \frac{2C \sin \vartheta}{j\omega \varepsilon_0 r^3}, \quad (34.45)$$

$$H_\alpha = \frac{C \sin \vartheta}{r^2}. \quad (34.46)$$

Der Vergleich mit Gl.(10.5) zeigt, dass die Struktur des E-Feldes derjenigen eines statischen Dipolfeldes gleicht. Der Faktor j im Nenner des E-Feldes zeigt an, dass das E-Feld gegen die magnetische und damit gegen den Strom I um 90° phasenverschoben ist. Dies erklärt sich daraus, dass sich der Strom I im Luftraum als Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \partial E / \partial t$ fortsetzt, der in Phase mit dem Strom schwingt; das E-Feld eilt daher dem Strom um 90° nach.

34.1.2 Fernfeld der schwingenden Ladung

In der Funktechnik interessieren die Felder besonders in großer Entfernung von der Erregungsstelle. Hier kommen nur die Glieder mit den höchsten Potenzen von r zur Wirkung („Fernfeld“). Aus den Gl.(34.41) bis (34.23) folgt

$$E_r = 0, \quad (34.47)$$

$$E_\vartheta = j\omega \mu_0 \frac{C \sin \vartheta}{r} e^{-j\frac{\omega r}{c}}, \quad (34.48)$$

$$H_\alpha = j\omega \mu_0 \frac{C \sin \vartheta}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{-j\frac{\omega r}{c}}. \quad (34.49)$$

H-Feld und E-Feld stehen räumlich senkrecht aufeinander und senkrecht zum Radius r (Abb. 34.2). Die beiden Felder breiten sich mit der Geschwindigkeit c in radialer Richtung aus. Der radiale Abstand zweier Punkte gleicher Schwingungsphase stellt die Wellenlänge dar:

$$\lambda = c \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{f}. \quad (34.50)$$

Die Gl.(34.48) und (34.49) sagen ferner aus, dass E-Feld und H-Feld im Fernfeld zeitlich in Phase liegen. Dies erklärt sich aus der hier überwiegenden Induktionswirkung des magnetischen Feldes. Jede Veränderung des magnetischen Feldes hat einen Auf- oder Abbau des elektrischen Feldes zur Voraussetzung wie in Abb. 33.3.

In jedem Zeitpunkt und an jedem Ort ist das Verhältnis des Betrages des E-Feldes und des H-Feldes

$$\frac{\|\mathbf{E}\|}{\|\mathbf{H}\|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} =: Z_0 = 376,73 \Omega. \quad (34.51)$$

Man bezeichnet diese Größe als den *Feldwellenwiderstand* oder *Wellenwiderstand des leeren Raumes*, da sie für die elektromagnetische Welle eine ähnliche Bedeutung hat wie der Wellenwiderstand einer Leitung für die Leitungswelle. Für den Effektivwert des E-Feldes ergibt sich aus den Gl.(34.48) und (34.26)

$$E_{\text{eff}} = \frac{\mu_0}{2} f \frac{\sin \vartheta}{r} I l = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} I Z_0 \frac{\sin \vartheta}{r}. \quad (34.52)$$

Es ist ferner

$$H_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{Z_0}. \quad (34.53)$$

Die Ausstrahlung ist also am stärksten in der Richtung senkrecht zum Dipol ($\vartheta = 90^\circ$), sie ist Null in der Richtung des Dipols ($\vartheta = 0$).

Eine *ruhende Ladung* Q erzeugt nach Gl.(11.42) im Abstand r ein E-Feld vom Betrag

$$\|\mathbf{E}\| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{1}{r}, \quad (34.54)$$

die umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung r ist, also schnell abnimmt.

Die *schwingende Ladung*, also die ungleichförmig bewegte Ladung, erzeugt im Abstand r ein E-Feld, die in der günstigsten Richtung ($\vartheta = 90^\circ$) nach Gl.(34.27) und (34.48)

$$E_{\text{eff}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} Q \frac{1}{r} \quad (34.55)$$

ist. Hier nimmt das E-Feld also nur umgekehrt zur ersten Potenz des Abstandes r , d.h. viel langsamer, ab. Dies ist darin begründet, dass zur Beschleunigung der Ladung Q eine Arbeit erforderlich ist; sie wird in Strahlungsenergie umgesetzt, die sich im Raum ausbreitet.

Bemerkung: Die Frage nach dem Bezugssystem für die Ausbreitungs geschwindigkeit c wird heute folgendermaßen beantwortet. Die Ausbreitungs gesetze der elektromagnetischen Wellen gelten in allen Inertialsystemen (vgl. Abschnitt 31.3). Das heißt, dass in jedem Koordinatensystem, das sich mit beliebiger Geschwindigkeit gleichförmig translatorisch (ohne Drehung) gegen das Inertialsystem der Fixsterne bewegt, für die Ausbreitung nach allen Rich tungen im Vakuum die gleiche Geschwindigkeit c beobachtet wird (Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nach A. Einstein 1905). Die Folgerungen hieraus behandelt die spezielle Relativitätstheorie (z.B. Lehner [162]).

34.1.3 Energiefluss in der Elementarwelle, Strahlungswiderstand

Durch die elektromagnetische Welle wird Energie transportiert. Nach den Gl. (13.15) und (24.14) ist die räumliche Dichte der gespeicherten Energie

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\|\mathbf{E}\|^2 + \frac{1}{2}\mu_0\|\mathbf{H}\|^2. \quad (34.56)$$

Da die beiden Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{H} nur von r und ϑ abhängen, so kann man die Energie in einem Raumelement berechnen, das nach Abb. 34.3 durch Breitenkreise begrenzt wird. Das Raumelement hat den Inhalt

$$dv = 2\pi r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta. \quad (34.57)$$

Die Energie, die in diesem Raumelement *im Mittel* gespeichert ist, beträgt

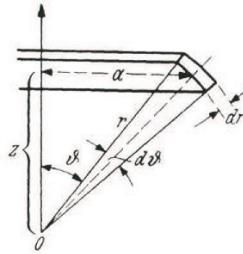


Abbildung 34.3. Berechnung des Energieflusses

$$dW(r, \vartheta) = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{\text{eff}}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H_{\text{eff}}^2 \right) dv, \quad (34.58)$$

$$dW(r, \vartheta) = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{\text{eff}}^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} E_{\text{eff}}^2 \right) dv = \varepsilon E_{\text{eff}}^2 dv. \quad (34.59)$$

Magnetische und elektrische Energie sind gleich groß. Die zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen mit dem Abstand dr im Mittel vorhandene Energie ergibt sich durch Integration von Gl. (34.59) nach Einsetzen von Gl. (34.52) und (34.60):

$$dW(r) = \int_0^\pi \frac{dW(r, \vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta = \frac{\pi I^2 l^2 \mu_0}{2\lambda^2} dr \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi I^2 l^2 \mu_0}{3\lambda^2} dr. \quad (34.60)$$

Die Welle durchläuft die Strecke dr in einer Zeit

$$dt = \frac{dr}{c}. \quad (34.61)$$

Die durch eine Kugelfläche vom Radius r nach außen fließende Leistung ist daher

$$P = \frac{dW(r)}{dr} = \frac{2\pi I^2 l^2 \mu_0 c}{3\lambda^2} = \frac{2\pi}{3} I^2 Z_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (34.62)$$

Sie ist unabhängig vom Radius r der Kugel, da wir den Raum als vollkommen isolierend vorausgesetzt haben, und infolgedessen keine Verluste an Energie durch Umwandlung in Wärme entstehen.

Die hier gefundenen Ergebnisse kann man in folgender Weise auf die Berechnung der *Strahlung von Antennen* anwenden.

Auf jeder Antenne stellt sich nach dem Anlegen der Wechselspannung eine wellenförmige Stromverteilung ein, ähnlich wie bei einer Leitung. An irgendeiner Stelle x der Antenne sei I_x , die komplexe Stromstärke. Von dem kleinen Längenabschnitt dx an dieser Stelle geht daher eine Welle aus, die in einem Punkt P in großer Entfernung r_x von der Antenne durch das komplexe E-Feld, Gl. (34.48),

$$dE = j \frac{f\mu_0}{2} \frac{\sin \vartheta}{r_x} I_x dx e^{-j \frac{\omega}{c} r_x} \quad (34.63)$$

und das komplexe H-Feld, Gl. (34.53),

$$dH = \frac{dE}{Z_0} \quad (34.64)$$

gegeben ist, Abb. 34.4. Die von den einzelnen Längenelementen herrührenden

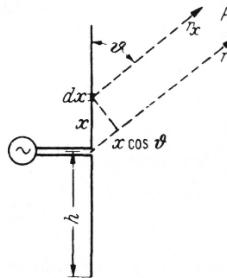


Abbildung 34.4. Berechnung der Strahlung einer Antenne

Beiträge des magnetischen Feldes setzen sich im Punkt P zusammen. Nun ist nach Abb. 34.4

$$r_x = r - x \cos \vartheta. \quad (34.65)$$

Die von den einzelnen Abschnitten der Antenne eintreffenden Elementarwellen sind also gegeneinander phasenverschoben; für das gesamte E-Feld gilt

$$E(r) = j \frac{1}{2} f \mu_0 \frac{\sin \vartheta}{r} e^{-j \frac{\omega}{c} r} \int_{-h}^{+h} I_x e^{j \frac{\omega}{c} x \cos \vartheta} dx, \quad (34.66)$$

wobei das Integral über die Antennelänge zu erstrecken ist. Dabei ist näherungsweise im Nenner r für r_x gesetzt.

Als einfaches Beispiel werde eine Antenne betrachtet, deren Länge $2h$ sehr kurz gegen die Wellenlänge λ ist („kurzer Dipol“). Dabei soll auch der im Exponenten vorkommende Ausdruck $\omega x/c$ so klein gegen 1 sein, dass

$$e^{j \frac{\omega}{c} x \cos \vartheta} \approx 1 \quad (34.67)$$

gesetzt werden kann. Dies bedeutet, dass

$$2\pi \frac{h}{\lambda} \ll 1 \quad (34.68)$$

sein soll. Dann gilt für den Effektivwert des E-Feldes angenähert

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \mu_0 f \frac{\sin \vartheta}{r} \int_{-h}^{+h} I_x dx. \quad (34.69)$$

Gegenüber Gl. (34.52) tritt also an die Stelle von Il das Integral der Stromstärke über die Antennenlänge. Das gleiche gilt daher bei Gl. (34.62) für die insgesamt ausgestrahlte Leistung. Diese *Strahlungsleistung* wird

$$P_s = \frac{2\pi Z_0}{3} \frac{Z_0}{\lambda^2} \left(\int_{-h}^{+h} I_x dx \right)^2. \quad (34.70)$$

Wegen der Voraussetzung sehr kurzer Antennendrähte nimmt wie bei einer kurzen Leitung, die am Ende offen ist, die Stromstärke I_x , von einem Anfangswert I_0 an der Stelle der Einspeisung angenähert linear auf den Wert Null am Leitungsende ab, also

$$I \approx I_0 \left(1 - \frac{x}{h} \right). \quad (34.71)$$

Damit wird

$$\int_{-h}^{+h} I_x dx = 2 \int_0^h I_x dx = I_0 h, \quad (34.72)$$

und die gesamte Strahlungsleistung ergibt sich zu

$$P_s = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 I_0^2. \quad (34.73)$$

Zahlenbeispiel: $I_0 = 10A$, $h = 1/50\lambda$, $Z_0 = 377\Omega$

$$P_s = \frac{2\pi}{3} \cdot 377 \frac{1}{2500} \cdot 100W = 31,6W. \quad (34.74)$$

Der Dipol nimmt diese Leistung elektrisch auf, so wie ein Reihenwiderstand

$$R_s = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2; \quad (34.75)$$

R_s wird als *Strahlungswiderstand* bezeichnet. Gl. (34.75) gibt den *Strahlungswiderstand des kurzen Dipols*. Der Strahlungswiderstand für beliebig lange

Antennendrähte kann mit Hilfe von Gl. (34.66) in gleicherweise angenähert berechnet werden, wenn für den Strom I_x die Leitungsgleichungen angesetzt werden; vgl. Abschnitt 35.

Der Strahlungswiderstand kann nach Arbeiten von Wessel [301] in ganz allgemeiner Weise für einen verlustbehafteten LC-Schwingkreis ableiten, bei dem Anteile des Maxwellschen Verschiebungsstromes berücksichtigt werden. Demnach erhält man den Strahlungswiderstand, wenn man in gewisser Näherung über die quasistationäre Näherung der Maxwellschen Gleichungen hinausgeht. Zur Ableitung der durch den Verschiebungsstrom modifizierten Formeln für den Widerstand, die Induktivität und die Kapazität bestimmt man zunächst eine Integralgleichung für die Leistung des elektromagnetischen Feldes und ermittelt aus der Analogie zur Leistungsbilanz eines RLC-Schwingkreises die entsprechenden Beziehungen. Der Strahlungswiderstand in Gl. (34.75) ergibt sich dann in erster Näherung aus der Beziehung für den Widerstand. Weitere Einzelheiten finden man auch bei Mathis [180].

Zahlenbeispiel: In dem vorigen Zahlenbeispiel wird

$$R_s = \frac{2\pi}{3} \cdot 377 \frac{1}{2500} \Omega = 0,316 \Omega. \quad (34.76)$$

Für den Dipol gilt ein Ersatzbild nach Abb. 34.5, in dem C_A die Kapazität zwischen den beiden Antennenleitern bedeutet. Bei wirklichen Antennen muss noch der Leitungswiderstand berücksichtigt werden, der in dem Ersatzbild als Wirkwiderstand in Reihe mit dem Strahlungswiderstand liegt. Eine

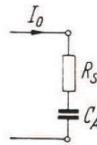


Abbildung 34.5. Ersatzbild der kurzen Antenne

Vertikalantenne von der Höhe h , die am Fußpunkt gespeist wird, kann durch Spiegelung zu einer Antenne von der oben betrachteten Form ergänzt werden. Bei gleicher Stromstärke sind daher auch die elektromagnetischen Felder die gleichen; da aber Leistung nur in den oberen Raum ausgestrahlt wird, ist der Strahlungswiderstand halb so groß.

Somit ist der Strahlungswiderstand einer Vertikalantenne von der Höhe h

$$R_s = \frac{\pi}{3} Z_0 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 = 395 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \Omega. \quad (34.77)$$

Er wächst mit dem Quadrat der Höhe der Antenne, wobei aber zu berücksichtigen ist, dass die Formel (34.77) nur gilt, solange h klein ist gegen λ .

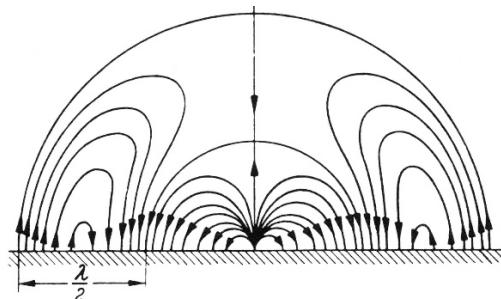


Abbildung 34.6. Elektrisches Feldbild des schwingenden Dipols

In Abb. 34.6 ist der Verlauf der elektrischen Feldlinien in der Umgebung der Antenne im Zeitpunkt eines Stromnulls veranschaulicht (H. Hertz 1888).

Die Abb. 34.7 zeigt, wie man sich die Abstrahlung elektromagnetischer Energie als einen „Ablösevorgang“ der E-Feldlinien von der Antenne vorstellen kann. Die ersten 5 Bilder stellen Ausschnitte aus der ersten positiven Halbperiode des Wechselstromes im Antennenfuß dar, die beiden letzten Bilder Ausschnitte aus der darauf folgenden negativen Halbperiode.

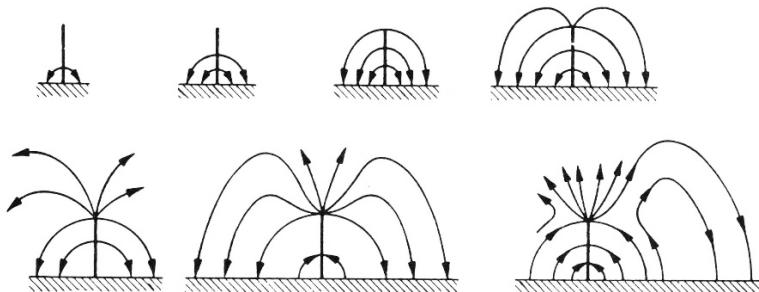


Abbildung 34.7. Elektrisches Feldbild des schwingenden Dipols

Es soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass man die Abstrahlung elektromagnetischer Energie von einer Antenne im Sinne der Maxwellschen Gleichungen, die ein vollständig gekoppeltes System von Gleichungen für das elektrische und das magnetische Feld darstellen und die den allgemeinen instationären Fall beschreiben, nicht als einen „sequentiell arbeitenden Ablösevorgang“ deuten sollte. Vielmehr hat man es bei dem elektromagnetischen Feld mit einem *ausgedehnten physikalischen System* zu tun, dessen ortsabhängige Beschreibungsgrößen auch zeitlich veränderlich sind. Nur die Energie breitet

sich aus. Die genannte sequentielle Interpretation des Abstrahlungsvorganges ist mit den Maxwellschen Gleichungen nicht vereinbar, da man sich bei dieser Interpretation das vollständig gekoppelte Gleichungssystem durch ein rekursives Lösungsverfahren im Sinne eines *Gauß-Seidel-Verfahrens* (siehe z. B. Deufhard [64]) gelöst denkt anstatt die Gleichungen als Ganzes zu lösen. Für heuristische Zwecke ist diese Sichtweise jedoch durchaus brauchbar, wenn man die Begrenzungen dieser Interpretation beachtet. Eine solche Vorgehensweise ist in der Physik auch nicht unüblich. Die Quantenmechanik ist ein anderes Beispiel, denn auch wenn eine reine Wellenvorstellung nicht zulässig ist, kann in bestimmten Anwendungsbereichen der Theorie eine solche Interpretation durchaus hilfreich sein.

34.2 Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

Die in einem allgemeinen elektromagnetischen Feld *strömende Energie* lässt sich wie die in einem ruhenden Feld aufgespeicherte Energie durch die Feldgrößen \mathbf{E} und \mathbf{H} ausdrücken. An jeder Stelle eines elektromagnetischen Feldes ist die Energie mit einer Dichte

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon\|\mathbf{E}\|^2 + \frac{1}{2}\mu\|\mathbf{H}\|^2 \quad (34.78)$$

gespeichert. Ändern sich die Feldgrößen zeitlich, so ändert sich die gespeicherte Energie, es wird also Energie im Raum transportiert. Während des Zeitelementes dt nimmt die Energiedichte um

$$dw = \varepsilon\mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} dt + \mu\mathbf{H} \cdot \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} dt \quad (34.79)$$

zu. Führt man hier die beiden Feldgleichungen (vgl. Gln. (33.26))

$$\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \kappa\mathbf{E}, \quad (34.80)$$

$$\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} \quad (34.81)$$

ein, so folgt

$$dw = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dt - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} dt - \kappa\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dt. \quad (34.82)$$

Der letzte Ausdruck rechts gibt an, wie groß die während der Zeit dt in Wärme umgewandelte Feldenergie ist; die beiden ersten Glieder stellen daher den *Zuwachs der Feldenergie* in der Zeit dt , bezogen auf die Raumeinheit, dar. Die Energie, die aus einem beliebigen Raumelement dv „herausfließt“, dividiert durch dt , ist daher

$$dP = (\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}) dv. \quad (34.83)$$

oder bei Anwendung der vektoranalytischen Beziehung $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ aus Anhang A.1

$$dP = \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv. \quad (34.84)$$

Nach Poynting (1884) setzt man

$$\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (34.85)$$

so dass

$$dP = \operatorname{div} \mathbf{S} dv. \quad (34.86)$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß folgt damit für die Leistung der aus einem beliebigen Raum „herausfließenden“ Feldenergie

$$P = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}, \quad (34.87)$$

wobei das Integral über die Oberfläche des Raumes zu bilden ist. Der Vektor \mathbf{S}

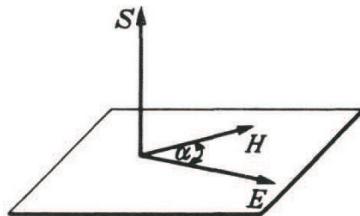


Abbildung 34.8. Strahlungsdichte nach Poynting

gibt an, welche Richtung die Energieströmung an jeder Stelle des Raumes hat und wie groß die Leistungsdichte der Energieströmung ist. Man nennt daher diesen Vektor die *Dichte der Energieströmung* oder die *Strahlungsdichte*. Wie die Abb. 34.8 zeigt, bilden die drei Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{H} und \mathbf{S} ein Rechtssystem. Der Betrag der Strahlungsdichte ist

$$\|\mathbf{S}\| = \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{H}\| \sin \alpha. \quad (34.88)$$

Die Energieströmung kann also in einfacher Weise berechnet werden, wenn das elektrische und das magnetische Feld bekannt sind. Besonders interessant ist es, einen einfachen elektrischen Stromkreis unter feldtheoretischen Gesichtspunkten zu betrachten. Dabei zeigt sich, dass entgegen den Vorstellungen auf der Grundlage fließender Ladung (Elektronen) in metallischen Leiter die elektromagnetisch Energie außerhalb der Leiter fließt; vgl. Döring [67].

Es wird darauf hingewiesen, dass der Poynting-Vektor \mathbf{S} im Rahmen der Bilanzgleichungen für Energie, linearer Impuls und Drehimpuls des aus den

mechanischen und elektromagnetischen Teilsystemen zusammengesetzte Gesamtsystems eine wichtige Rolle spielt. Es stellt sich heraus, dass es sich bei den genannten Größen um Erhaltungsgrößen handelt. Ein ausführliche Diskussion dieser Bilanzgleichungen findet man bei Schnackenberg [256].

Nach den obigen Ausführungen stehen die elektrischen und magnetischen Feldlinien in einer elektromagnetischen Welle senkrecht aufeinander ($\alpha = 90^\circ$) und in genügend großem Abstand von der Erregungsstelle auch senkrecht zum Radius, der von der Erregungsstelle zu dem betrachteten Punkt gezogen wird. Der Vektor \mathbf{S} hat die Richtung des Radius; er weist von der Erregungsstelle weg. Sein Betrag ist gleich dem Produkt aus E- und H-Feld.

Als Beispiel werde die Strahlungsdichte im Fernfeld eines kurzen Dipols betrachtet. Nach Gl. (34.69) und (34.72) ist das E-Feld

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \mu_0 f \frac{\sin \vartheta}{r} I_0 h. \quad (34.89)$$

Durch Erweitern mit c folgt daraus

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} Z_0 \frac{h}{\lambda} I_0 \frac{\sin \vartheta}{r}. \quad (34.90)$$

Mit Gl. (34.73) kann die Stromstärke I_0 durch die vom Strahlungswiderstand R_s aufgenommene Leistung ausgedrückt werden:

$$I_0 = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{P_s}{Z_0} \frac{\lambda}{h}} \quad (34.91)$$

Damit folgt

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi} P_s Z_0} \frac{\sin \vartheta}{r}. \quad (34.92)$$

Die Strahlungsdichte wird unter Berücksichtigung von Gl. (34.53)

$$S = \frac{3}{8\pi} P_s \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}. \quad (34.93)$$

Sie wird wie das elektrische Feld am größten für $\vartheta = \pi/2$ also in der senkrecht zum Dipol liegenden Äquatorebene.

Würde Sich die Strahlungsleistung gleichmäßig auf den konzentrischen Kugelflächen mit dem Radius r verteilen, so wäre die Strahlungsdichte im Abstand r

$$S_0 = \frac{P_s}{4\pi r^2}. \quad (34.94)$$

Gegenüber diesem sogenannten *isotropen Strahler* ist also die wirkliche Strahlung in der Äquatorebene 3/2mal so groß. Die Strahlung ist Null in der Achsenrichtung des Dipols.

Bei der betrachteten Ausbreitung im freien Raum gilt für das E-Feld in der Äquatorebene ($\vartheta = \pi/2$)

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi} P_s Z_0} \frac{1}{r}. \quad (34.95)$$

Durch Einsetzen des Wertes für Z_0 erhält man auch

$$E_{\text{eff}} = 0,212 \frac{km}{r} \sqrt{\frac{P_s}{kW}} \frac{V}{m}. \quad (34.96)$$

Bei einer von dem Dipol ausgestrahlten Leistung von $1kW$ ist also z.B. in $100km$ Entfernung das E-Feld bei ungestörter Ausbreitung $E_{\text{eff}} = 2,12mV/m$.

34.3 Ebene Welle

Man kann die Wellenfront in großem Abstand von der Erregungsstelle mit einer gewissen Annäherung als eben ansehen. In einer solchen ebenen elektromagnetischen Welle hängen die Feldgrößen nur von einer einzigen Koordinate x in der Fortpflanzungsrichtung ab. Die Feldgleichungen lauten, wenn in die y -Richtung $E = E_y$ und in die z -Richtung $H = H_z$ gelegt wird, Abb. 34.9, mit dem Rotationsoperator in x, y, z -Koordinaten

$$(\text{rot } \mathbf{H})_y = -\frac{\partial H}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (34.97)$$

$$(\text{rot } \mathbf{E})_z = \frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (34.98)$$

Differenziert man die erste dieser beiden Gleichungen nach t , die zweite nach x , so ergibt sich

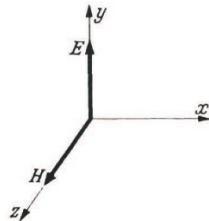


Abbildung 34.9. Feldgrößen der ebenen Welle

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (34.99)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \quad (34.100)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (34.101)$$

Ähnlich ergibt sich

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (34.102)$$

die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$E(x, t) = E_y = F_{\pm}^E(x \pm ct), \quad (34.103)$$

wobei F_+^E und F_-^E beliebige Funktionen sind, und entsprechend Gl. (34.51)

$$H(x, t) = H_z = F_{\pm}^H(x \pm ct). \quad (34.104)$$

Aus der Beziehung (34.97) folgt, dass F_{\pm}^H und F_{\pm}^E nicht unabhängig gewählt werden können; man erhält bis auf eine Konstante

$$F_{\pm}^H = \mp \frac{1}{Z_0} F_{\pm}^E. \quad (34.105)$$

Durch Einsetzen in die Gl. (34.101) und (34.102) kann man sich leicht von der Richtigkeit dieser Lösung überzeugen. Eine Ableitung der sogenannten D'Alembertschen Lösungen ist jedoch sehr einfach. Dazu wird der Differentialoperator in den Gln. (34.101), (34.102) in Produktform geschrieben (nur für E ausgeführt)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0 \quad (34.106)$$

und auf die neuen Koordinaten $\xi := x - ct$, $\eta := x + ct$ transformiert. Mit Hilfe der Kettenregel der Differentialrechnung erhält man dann folgende Differentialgleichung

$$4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (34.107)$$

die man durch zweifache Integration lösen kann, wobei die Lösungen von Gl. (34.101) nach Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten x und t mit Hilfe beliebiger, zweimal differenzierbarer Funktionen F_{\pm}^E darstellbar sind

$$E(x, t) = F_-^E(x - ct) + F_+^E(x + ct), \quad (34.108)$$

die als rück- und hinlaufende Welle interpretiert werden können.

In einer ebenen Welle bleibt also eine beliebige Verteilung der Felder in der x -Richtung erhalten, sie wandert jedoch mit der Geschwindigkeit c fort. Im allgemeinen Fall sind Wellen nach beiden Richtungen hin möglich; das obere Vorzeichen gilt für Wellen, die in Richtung negativer x fortschreiten, das untere Vorzeichen für Wellen positiver Richtung. Für die letzteren ist also

$$E = E_y = F_-^E(x - ct), \quad H = H_z = \frac{1}{Z_0} F_-^E(x - ct). \quad (34.109)$$

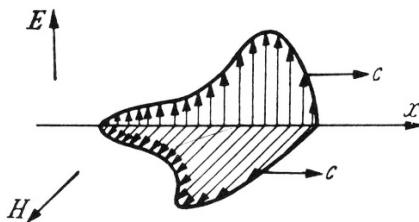


Abbildung 34.10. Ebene elektromagnetische Welle

Elektrische und magnetische Felder bilden mit der Laufrichtung der Welle ein Rechtssystem, Abb. 34.10; die Dichte der Energieströmung ist

$$S = E \cdot H = \frac{1}{Z_0} E^2. \quad (34.110)$$

Zahlenbeispiel: In der *Funktechnik* kommen beim Empfänger Felder bis herab zu etwa $1\mu V/m$ vor. Die Dichte der Energieströmung ist dabei

$$S = \frac{1}{377} \cdot 10^{-16} \frac{V^2}{\Omega cm^2} = 2,65 \cdot 10^{-19} \frac{W}{cm^2}. \quad (34.111)$$

In der Umgebung von *Hochspannungsleitungen* können an den Leiteroberflächen E-Felder bis zu etwa $10kV/cm$ auftreten. Es stehen hier ebenfalls elektrische und magnetische Felder nahezu aufeinander senkrecht: Die elektrischen Feldlinien treten nahezu senkrecht aus der Leiteroberfläche aus, während die magnetischen Feldlinien die tangentiale Richtung haben. Der Strahlungsvektor hat nahezu die Richtung der Energieübertragung längs der Leitung; er ist etwas zur Leiterachse hin geneigt wegen des Spannungsabfalles längs des Leiters. Die Strahlungsdichte in der Nähe der Drähte wird

$$S = \frac{1}{377} 10^8 \frac{V^2}{cm^2 \Omega} = 265 \frac{kW}{cm^2}. \quad (34.112)$$

Die Luft ist also befähigt, elektrische Energie in erheblicher Dichte zu übertragen.

Die betrachteten einfachen Verhältnisse der Kugelwelle und der ebenen Welle liegen nur vor, wenn der Raum von einem homogenen Nichtleiter vollständig erfüllt ist. An jeder Grenzfläche ergibt sich eine *Reflexion* und eine *Brechung der Wellen*.

Trifft z. B. eine ebene Welle senkrecht auf die ebene Oberfläche eines Leiters, Abb. 34.11, so wird ein Teil der Energie reflektiert. Die Feldgrößen in dem Raum vor der Wand setzen sich demgemäß aus den Feldgrößen der beiden Teilwellen zusammen. Für die von links nach rechts einfallende zeitlich

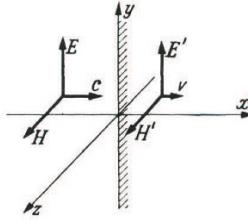


Abbildung 34.11. Reflexion einer ebenen elektromagnetische Welle an einer ebenen Wand

sinusförmige Welle gilt in komplexer Schreibweise, wenn E und H jetzt die komplexen Zeiger bedeuten,

$$H = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{E}{Z_0}, \quad (34.113)$$

und die Fortpflanzungskonstante ist

$$\gamma = j\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}. \quad (34.114)$$

In den Leiter dringt eine Welle ein, die durch die Zeiger E' und H' gekennzeichnet sei. In den Feldgleichungen für das Leiterinnere tritt κ an die Stelle von $j\omega\varepsilon_0$ und μ an die Stelle von μ_0 . Daher wird der *Wellenwiderstand* im Leiter

$$Z_w = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}}. \quad (34.115)$$

und die (komplexe) *Fortpflanzungskonstante*

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\kappa}. \quad (34.116)$$

Es gilt ferner

$$H' = \frac{E'}{Z_w}. \quad (34.117)$$

Im Luftraum läuft die reflektierte Welle von rechts nach links; sie sei durch E'' und EH'' beschrieben, vgl. Gl. (34.104):

$$H'' = -\frac{E''}{Z_0}. \quad (34.118)$$

An der Grenzfläche müssen nun das E- und das H-Feld, die hier nur eine Komponente tangential zur Grenzfläche haben, stetig sein; dies ergibt

$$E + E'' = E', \quad (34.119)$$

$$H + H'' = H'. \quad (34.120)$$

Führt man in Gl. (34.120) die Gln. (34.113), (34.117) und (34.118) ein, so wird

$$\frac{E}{Z_0} - \frac{E''}{Z_0} = \frac{E'}{Z_w}. \quad (34.121)$$

Durch Auflösen nach E' und E'' folgt aus den Gl. (34.119) und (34.121)

$$E' = \frac{2Z_w}{Z_0 + Z_w} E =: bE, \quad (34.122)$$

$$E'' = \frac{Z_w - Z_0}{Z_w + Z_0} E =: rE \quad (34.123)$$

Wir nennen b den Brechungsfaktor, r den Reflexionsfaktor. Bei den Metallen ist selbst für die höchsten praktisch verwendeten Frequenzen Z_w verschwindend klein gegen Z_0 . Das bedeutet, dass praktisch

$$r = -1. \quad (34.124)$$

Die reflektierte Welle löscht daher das elektrische Feld an der Oberfläche des Leiters fast aus, so dass dort das resultierende elektrische Feld fast Null ist. In dem Raum vor der leitenden Wand überlagern sich die beiden gegenläufigen Wellen E, H und E'', H'' zu einer stehenden Welle, deren elektrisches Feld an der Leiteroberfläche einen Knotenpunkt hat, während das magnetische Feld dort ein Maximum besitzt. Die elektrische Feldstärke der in den Leiter eindringenden „gebrochenen“ Welle ist sehr klein gegen E , da b sehr klein gegen 1 ist. Das magnetische Feld wird dagegen an der Leiteroberfläche rund doppelt so groß wie H .

Bemerkung: Diese Überlegungen enthalten die Voraussetzung, dass der Verschiebungsstrom im Leiter gegen den Leitungsstrom vernachlässigt werden kann. Streng genommen ist statt die elektrische Leitfähigkeit κ zu setzen $\kappa + j\omega\epsilon$, wobei ϵ die Dielektrizitätskonstante des Leiters bezeichnet. Über die Größe der Dielektrizitätskonstante von Metallen bei technischen Frequenzen sind noch keine genauen Werte bekannt, doch ist der Verschiebungsstrom mindestens bis zu Frequenzen von $10^{10} Hz$ gegen den Leitungsstrom vernachlässigbar.

Bei Halbleitern und Ferriten, kann dagegen bei hohen Frequenzen κ klein gegen $\epsilon\omega$ sein. Ein solches Material ist für die elektromagnetischen Wellen mehr oder weniger „durchsichtig“.

Die innerhalb des Leiters fortschreitende gebrochene Welle wird bei ihrem Eindringen in den Leiter gedämpft. Es liegt der bereits in Abschnitt 29.1 betrachtete Fall des Eindringens der Felder in den Leiter vor. Auch für das Eindringmaß gilt der gleiche Ausdruck wie dort, Gl. (29.50).

Die gleichen Verhältnisse findet man auch, wenn der unendlich ausgedehnte Leiter durch eine Platte oder ein Blech endlicher Dicke ersetzt wird, wenn

nur die Blechdicke größer als die Eindringtiefe ist. Ist die Blechdicke kleiner, so ergibt sich innerhalb des Leiters infolge der Reflexion an der zweiten Begrenzungsebene eine gegenläufige Welle. Diese verschwindet praktisch bei genügender Dicke der Platte. Bleche, die dicker sind als die Eindringtiefe, wirken gegen auftreffende Wechselfelder wie ein Spiegel.

Für die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen gelten nach den oben durchgeföhrten Überlegungen Beziehungen, die vollkommen analog den Leitungsgleichungen sind. Bezeichnen E_1 und H_1 die komplexen Felder am Anfang, E_2 und H_2 die komplexen Felder am Ende eines Abschnittes von der Länge l , so gilt

$$E_1 = E_2 \cosh \gamma l + H_2 Z_w \sinh \gamma l, \quad (34.125)$$

$$H_1 = H_2 \cosh \gamma l + \frac{E_2}{Z_w} \sinh \gamma l, \quad (34.126)$$

wobei

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon)} \quad (34.127)$$

und

$$Z_w = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}} \quad (34.128)$$

Damit können z.B. die Vorgänge beim Lauf einer solchen Welle durch einen quer zur Laufrichtung geschichteten Raum verfolgt werden. An den Grenzflächen sind die Größen E und H stetig, so wie die Spannungen und Ströme an der Stoßstelle von Leitungen verschiedener Eigenschaften.

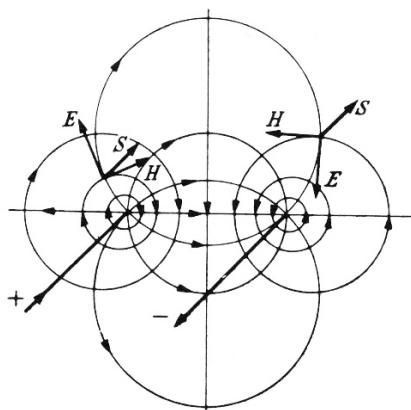


Abbildung 34.12. Elektromagnetisches Feld einer Zweidrahtleitung

Ein Beispiel für den anderen Grenzfall, in dem die ebene Welle eine ebene Leiteroberfläche gerade tangiert, bilden die längs der Erdoberfläche laufenden Wellen der drahtlosen Übertragungen. Ebenso haben die Felder in der

Umgebung einer Leitung, Abb. 34.12, die Eigenschaft, dass die Vektoren der elektrischen und der magnetischen Felder aufeinander senkrecht stehen; in genügend kleinen Ausschnitten können die Felder daher als ebene Wellen betrachtet werden, die an den Drähten entlanggleiten.

Legen wir wieder die Laufrichtung der ebenen Welle in die x -Achse, das H-Feld in die z -Achse, so fällt das E-Feld in die y -Richtung. Die Oberfläche des Leiters sei nun durch die x, z -Ebene gebildet. Da das H-Feld tangential zur Leiteroberfläche gerichtet ist, so muss sie an der Oberfläche stetig übergehen, d.h. es muss auch im Leiterinnern ein H-Feld der gleichen Richtung vorhanden sein. Infolge des H-Feldes im Leiterinnern entsteht im Leiter eine elektrische Umlaufspannung in Ebenen, die parallel zur x, y -Ebene liegen. Wegen der endlichen Leitfähigkeit des Leiters ergeben sich daher Ströme parallel zur x -Achse. Diese Ströme verursachen eine Komponente des E-Feldes in z -Richtung innerhalb des Leiters. Da nun aber die Tangentialkomponente des E-Feldes an der Grenzfläche stetig sein muss, so folgt daraus, dass auch außerhalb des Leiters eine x -Komponente des E-Feldes vorhanden ist.

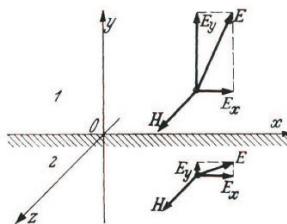


Abbildung 34.13. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Welle längs eines eben begrenzten Leiters

Die elektrischen Feldlinien treten also hier nicht senkrecht aus der Leiteroberfläche aus, Abb. 34.13. Es muss ferner die Dichte des wahren Stromes an der Grenzfläche stetig sein; für zeitlich sinusförmige Vorgänge gilt also

$$\varepsilon j\omega E_{y1} = \kappa E_{y2}, \quad (34.129)$$

wenn die beiden Räume durch die Indizes 1 und 2 unterschieden werden und σ die Leitfähigkeit des Leiters bedeutet. Also ist

$$\left| \frac{E_{y2}}{E_{y1}} \right| = \frac{\varepsilon\omega}{\kappa}. \quad (34.130)$$

Setzt man hier für Kupfer $\kappa = 5,7 \cdot 10^7 S/m$, so wird für eine Frequenz von $10^7 Hz$

$$\frac{\varepsilon_0 \omega}{\kappa} = \frac{8,86 \cdot 10^{-12} 2\pi \cdot 10^7}{5,7 \cdot 10^7} \frac{Fs^{-1} m}{mS} \approx 10^{-11}, \quad (34.131)$$

also ein verschwindend kleiner Bruchteil. Selbst für Erde mit der Leitfähigkeit $\kappa = 10^{-2} S/m$ wird $\varepsilon_0 \omega / \kappa$ erst rund 0,06. Man kann daher praktisch meist die

Vertikalkomponente des E-Feldes im Leiterinnern vernachlässigen. Dann zeigt der Vektor der Energieströmung im Leiter praktisch senkrecht nach unten. Andererseits ist die durch die Welle in der x -Richtung fortgeführte Leistung durch die Strahlungsdichte $S_x = E_{y1} \cdot H$ bestimmt. In y -Richtung fließt der Teil $S_y = E_x \cdot H$ in den Leiter. Im Außenraum ist daher der Strahlungsvektor etwas nach unten geneigt, Abb. 34.14. Infolge des dauernden Energieentzuges durch die Absorption im Leiter nehmen die Amplituden der Welle beim Fortschreiten längs des Leiters ab.

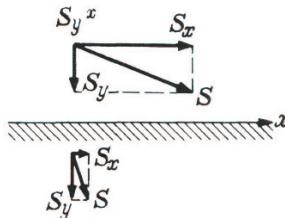


Abbildung 34.14. Richtung der Energieströmung bei der Fortpflanzung der Welle längs des Leiters

Es ergibt sich also wieder der oben betrachtete Fall des Eindringens einer Welle in den Leiter. Die Fortleitung der Energie geschieht längs der Leiteroberfläche im nichtleitenden Raum, im wesentlichen parallel zur Leiteroberfläche. Ein Teil der Energie dringt in den Leiter ein und wird dort durch die Stromwärme aufgezehrt. Die Tiefe, bei der die Feldgrößen auf $1/e$ ihres Oberflächenwertes abgenommen haben, ist gemäß Gl. (29.50)

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \kappa \mu}}. \quad (34.132)$$

Zahlenbeispiel: Eine elektromagnetische Welle mit der Frequenz $10^6 Hz$, entsprechend einer Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} = 300m. \quad (34.133)$$

dringt in den Erdboden mit der Leitfähigkeit $\kappa = 10^{-2} S/m$ bis zu einer Tiefe von

$$4,6\delta = \frac{4,6}{\sqrt{\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} s^{-1} Sm^{-1} Hm^{-1}}} = 23 m \quad (34.134)$$

mit 1% ihres Oberflächenwertes ein.

Die im Leiter infolge E_x in der Längsrichtung fließenden Ströme bewirken durch die Verkettung zwischen dem H-Feld und den Strömen eine

Führung der elektromagnetischen Welle. Die Energieübertragung folgt daher den Krümmungen der Leiter und zwar um so vollkommener, je vollkommener der Strom in den Leitern geführt wird, d.h. je größer die Leitfähigkeit κ der Leiter gegen die „Leitfähigkeit“ $\epsilon\omega$ der isolierenden Umgebung ist. Bei Niederfrequenz ist dies in hohem Maße der Fall, da hier $\epsilon\omega$ außerordentlich klein gegen κ ist. Bei hohen Frequenzen von der Größenordnung

$$\omega_g = \frac{\kappa}{\epsilon} \quad (34.135)$$

und darüber verlieren die Leiter immer mehr die führende Wirkung, so dass sich bei jeder räumlichen Änderung der Leiterform das Feld vom Leiter scheinbar „ab löst“ und im Raum als freie elektromagnetische Welle weiterläuft. Für die Grenzfläche zwischen Erde mit $\kappa = 10^{-2} S/m$ und Luft wird $\omega_g = 1,1 \cdot 10^9 s^{-1}$, also rund $100 MHz$. Funkwellen mit höheren Frequenzen ($\lambda < 3m$) werden an der Erdoberfläche praktisch nicht mehr geführt, und ihre Bahn nähert sich der von Lichtstrahlen.

Da die Tangentialkomponente des E-Feldes an der Oberfläche des Leiters stetig übergehen muss, so ist an der Oberfläche

$$H = E_{x1} \sqrt{\frac{\kappa}{j\omega\mu}}. \quad (34.136)$$

Andererseits ist

$$E_{y1} = Z_0 H = E_{x1} Z_0 \sqrt{\frac{\kappa}{j\omega\mu}}. \quad (34.137)$$

Das Verhältnis der beiden Komponenten des in Luft befindlichen E-Feldes an der Leiteroberfläche wird also

$$\left| \frac{E_{x1}}{E_{y1}} \right| = \frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}}. \quad (34.138)$$

Zahlenbeispiel: (Fortsetzung) Der Leser sollte für den Erdboden mit $\kappa = 10^{-2} S/m$ einige Zahlenwerte des Verhältnisses von Vertikal- zur Horizontalkomponente des E-Feldes im Luftraum mit Hilfe von Formel (34.138) berechnen. Man erhält beispielsweise für $f = 1 MHz$ und einer Wellenlänge von $\lambda = 300m$ ein Verhältnis $|E_{y1}/E_{x1}|$ von 13,4.

Die beiden Komponenten E_{x1} und E_{y1} haben nun, wie die Gl. (34.137) zeigt, eine zeitliche Phasenverschiebung von 45° entsprechend dem Winkel von \sqrt{j} . Der räumliche Winkel, unter dem die elektrischen Feldlinien von außen her an der Leiteroberfläche einmünden, wächst daher während jeder Periode um 360° , wie dies aus der folgenden Überlegung hervorgeht. Setzt man für den Augenblickswert

$$E_{y1}(t) = A \sin \omega t, \quad (34.139)$$

so wird

$$E_{x1}(t) = A \frac{1}{Z_0} \frac{\omega\mu}{\kappa} \sin(\omega t + \pi/4) = \frac{A}{Z_0} \frac{\omega\mu}{2\kappa} (\sin \omega t + \cos \omega t). \quad (34.140)$$

Aus Gl. (34.139) folgt

$$\sin \omega t = \frac{E_{y1}(t)}{A}. \quad (34.141)$$

Führt man dies in Gl. (34.140) ein, so ergibt sich

$$E_{x1}(t) = \frac{B}{\sqrt{2}} \left(\frac{E_{y1}(t)}{A} + \sqrt{1 - \left(\frac{E_{y1}(t)}{A} \right)^2} \right), \quad (34.142)$$

wobei

$$B = \frac{A}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\kappa}} \quad (34.143)$$

gesetzt ist; daraus folgt

$$\left(\frac{E_{x1}(t)\sqrt{2}}{B} - \frac{E_{y1}(t)}{A} \right)^2 + \left(\frac{E_{y1}(t)}{A} \right)^2 = 1. \quad (34.144)$$

Das ist die Gleichung einer schrägliegenden Ellipse in der xy -Ebene; vgl. Abb.

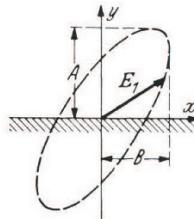


Abbildung 34.15. Elliptisches Drehfeld an der Grenzfläche

34.15. Der Endpunkt des Vektors des E-Feldes durchläuft also eine Ellipse; das E-Feld stellt ein *elliptisches Drehfeld* dar. Ähnliche Verhältnisse ergeben sich an allen Grenzflächen verschiedener Stoffe, auch, wenn $\omega\epsilon_2$ nicht wie hier gegen κ vernachlässigt wird.

Die Abb. 34.16 zeigt für ein willkürliches Beispiel wie man sich das elliptische Drehfeld bei Funkwellen längs der Erdoberfläche vorzustellen hat. Das Bild stellt die elektrischen Feldlinien in einem bestimmten Zeitpunkt dar. Mit fortschreitender Zeit verschiebt sich das Feld ohne wesentliche Änderung seiner Form in der x -Richtung mit Lichtgeschwindigkeit. Betrachtet man daher irgend einen Punkt P an der Erdoberfläche, so erkennt man, wie dort der Vektor \mathbf{E} ständig den vollen Winkel durchläuft. Die Verschiebungslienien schließen sich innerhalb der Erde als Leitungsströme in ganz flachen Bogen innerhalb der „Eindringtiefe“.

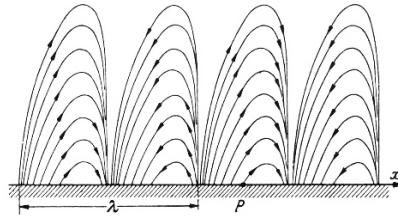


Abbildung 34.16. Längs einer Leiteroberfläche fortschreitende Welle

34.4 Empfangsantennen

Befindet sich in kurzer Dipol der Länge $h \ll \lambda$ in einem elektrischen Wechselfeld, und fällt die Richtung der Dipolachse mit der Richtung des elektrischen Feldes zusammen, Abb. 34.17, so ergibt sich in der Mitte eine Leerlauf Spannung

$$U_0 = \|\mathbf{E}\| h. \quad (34.145)$$

Schließen die Richtungen von Dipol und E-Feld den Winkel α ein, so verklei-

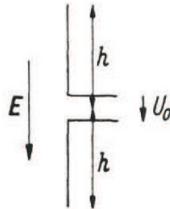


Abbildung 34.17. Kurze Dipolantenne im elektrischen Feld

nert sich die Leerlaufspannung um dem Faktor $\cos \alpha$. Beim Anschluss eines Lastwiderstandes an die Antenne fließt ein Strom, der wie bei einer Sendeanntenne zu einer Ausstrahlung von Energie führt. Daher muss im Ersatzbild der Antenne der Strahlungswiderstand R_s , berücksichtigt werden, Abb. 34.18, zu dem gegebenenfalls noch der Leitungswiderstand der Antenne hinzuzufügen ist. C_A ist wie in Abb. 34.5 die Antennenkapazität. Die maximal aus der Empfangsantenne entnehmbare Leistung bei Leistungsanpassung ergibt sich in einem komplex konjugierten Abschlusswiderstand zu

$$P_{max} = \frac{U_0^2}{4R_s} = \frac{E_{eff}^2 h^2}{4R_s}. \quad (34.146)$$

Eine gleich große Leistung wird dabei vom Strahlungswiderstand R_s , aufgenommen, d.h. wieder ausgestrahlt. Führt man hier den Strahlungswiderstand R_s , aus Gl. (34.75) ein, so folgt

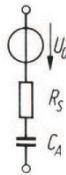


Abbildung 34.18. Ersatzbild der kurzen Empfangsantenne

$$P_{max} = \frac{E_{eff}^2 h^2 3\lambda^2}{4 \cdot 2\pi Z_0 h^2} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 S. \quad (34.147)$$

Dabei bedeutet S die zu dem angenommenen E-Feld gehörige Strahlungsdichte. Den Faktor von S nennt man die *wirksame Antennenfläche*. Dies ist die Querschnittsfläche der Welle, deren Leistung von der Antenne maximal absorbiert werden kann. Bei dem betrachteten kurzen Dipol ist also die wirksame Antennenfläche

$$A = \frac{3}{8\pi} \lambda^2. \quad (34.148)$$

Zahlenbeispiel: Bei einer Funkwelle mit $\lambda = 10m$ wird

$$A = \frac{3}{8\pi} 10^2 m^2 = 12m^2. \quad (34.149)$$

Die durch diese Fläche transportierte Leistung kann also der Welle durch einen kurzen Dipol maximal entzogen werden.

Die wirksame Antennenfläche ist nur bei sehr kleinen Antennenabmessungen von diesen unabhängig, im übrigen aber durch den Aufbau und die räumliche Ausdehnung der Antenne bestimmt. In den beiden Ersatzbildern Abb. 34.5 und Abb. 34.18 tritt an die Stelle von C ein positiver oder negativer Blindwiderstand.

34.5 Elektromagnetische Schirme

In metallischen Leitern ist die Eindringtiefe des Feldes nach Abschnitt 29.1 bei hohen Frequenzen sehr gering. Die Strömung breitet sich flächenhaft an der Oberfläche der Leiter aus und schirmt das Innere des Leiters von dem elektromagnetischen Feld ab. Ist der Leiter magnetisch neutral, dann ist die Normalkomponente des magnetischen Feldes auch außerhalb des Leiters verschwindend klein; die magnetischen Feldlinien folgen praktisch der Leiteroberfläche. Ein metallischer magnetisch neutraler Leiter wirkt daher für Hochfrequenzfelder wie ein magnetisch undurchlässiger Stoff mit der Permeabilität

Null. Bringt man z.B. eine hohle Metallkugel in ein magnetisches Wechselfeld, dann weichen die Feldlinien der Kugel aus, ähnlich wie die ausgezogenen Linien in Abb. 10.4. An der Kugeloberfläche verschwindet die Normalkomponente des magnetischen Feldes. Ferner gilt außerhalb der Kugel die gewöhnliche Potenzialgleichung $\Delta\psi = 0$, soweit es sich um Abmessungen handelt, die klein gegen die Wellenlänge sind. Daher kann man nach den Ausführungen in Abschnitt 10.1.4, Gl. (10.28), für das magnetische Potenzial im Außenraum den Ansatz machen (siehe auch Abschnitt 21.5)

$$\psi(r) = \left(c_1 r + \frac{c_2}{r^2} \right) \cos \alpha. \quad (34.150)$$

Bezeichnet r_2 nach Abb. 34.19 den Außenradius der Hohlkugel, so lautet die Grenzbedingung für $r = r_2$

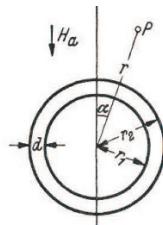


Abbildung 34.19. Leitende Hohlkugel im magnetischen Wechselfeld

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0. \quad (34.151)$$

Dies ergibt

$$c_2 = \frac{1}{2} c_1 r_2^3. \quad (34.152)$$

Ferner geht für große r das Potenzial in das des homogenen Feldes mit dem H-Feld H_a über, so dass $c_1 = H_a$. Daher wird das Potenzial im Außenraum der Kugel

$$\psi(r) = H_a \left(r + \frac{r_2^3}{2r} \right) \cos \alpha. \quad (34.153)$$

Ein Teil des Feldes dringt durch die Kugelwand in das Kugellinnere ein; er kann durch die folgende Näherungsbetrachtung berechnet werden: An der Kugeloberfläche ist das tangentiale H-Feld

$$H_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \Big|_{r=r_2} = \frac{3}{2} H_a \sin \alpha. \quad (34.154)$$

Das magnetische Feld dringt in die Wand ein mit dem Fortpflanzungsmaß

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\kappa} = \sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\kappa(1+j)} = \beta(1+j). \quad (34.155)$$

Das Eindringmaß ist

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}. \quad (34.156)$$

Die Wandstärke d sei groß gegen das Eindringmaß; dann ergibt sich aus den

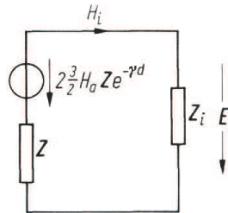


Abbildung 34.20. Ersatzbild für die in das Kugellinnere eindringende Welle; $\alpha = 90^\circ$

Leitungsgleichungen (vgl. 35) das für lange Leitungen gültige Ersatzbild, das für unseren Fall nochmals in Abb. 34.20 dargestellt ist. Die Quellenspannung $3H_aZ \exp(-\gamma d)$ wirkt über den Wellenwiderstand Z der Wand auf den Widerstand Z_i des Innenraumes der Kugel. Der Wellenwiderstand der Wand ist nach Gl. (34.115)

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}}; \quad (34.157)$$

dabei handelt es sich wieder um eine *irrationale Impedanz*. Z_i stellt das Verhältnis von E-Feld zu H-Feld an der inneren Begrenzung der Hohlkugel dar. Das magnetische Feld ist im Kugellinnern angenähert homogen. Der von dem Äquatorkreis mit dem Radius r_1 umfasste magnetische Fluss ist daher $\mu_0 r_1^2 \pi H_i$ und das Induktionsgesetz, auf diesen Kreis angewendet, ergibt für den Zeiger des E-Feldes E_i im Innern der Hohlkugel

$$2\pi r_1 E_i = j\omega \mu_0 r_1^2 \pi H_i. \quad (34.158)$$

Hieraus folgt

$$E_i = \frac{1}{2} j\omega \mu_0 r_1 H_i. \quad (34.159)$$

und hieraus

$$Z_i = \frac{E_i}{H_i} = \frac{1}{2} j\omega \mu_0 r_1. \quad (34.160)$$

Nunmehr ergibt die Anwendung des Ersatzbildes Abb. 34.20

$$H_i = \frac{3H_a Z e^{-\gamma d}}{Z + Z_i} \approx 3H_a \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}} \frac{2}{j\omega \mu_0 r_1} e^{-\gamma d}. \quad (34.161)$$

Der *Schirmfaktor* wird also

$$\frac{H_i}{H_a} = 3\sqrt{2} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\delta}{r_1} e^{-\frac{d}{\delta}} \quad (34.162)$$

und bei magnetisch neutralem Schirmmaterial

$$\frac{H_i}{H_a} = 3\sqrt{2} \frac{\delta}{r_1} e^{-\frac{d}{\delta}}. \quad (34.163)$$

Damit kann die Schirmwirkung von leitenden Hüllen abgeschätzt werden, indem man sie durch eine Hohlkugel etwa mit dem gleichen Volumen und der gleichen Wandstärke ersetzt. Die magnetische Schirmwirkung wird um so besser, je größer der Radius der Hülle ist; sie hängt sehr stark von dem Verhältnis der Wanddicke d zum Eindringmaß ab.

Beispiel: Eine Hülle aus 0,5mm starkem Kupferblech und einem Radius $r_1 = 25\text{mm}$ setzt ein homogenes magnetisches Wechselfeld auf folgende Bruchteile herab:

f/Hz	10 ⁵	10 ⁸
δ/mm	0,211	0,0667
H_i/H_a	1 : 300	1 : 160 000

TEM-Wellen auf Doppel- und Mehrfachleitungen

35.1 Vorbemerkungen

Von fundamentaler Bedeutung für die Elektrotechnik ist die Tatsache, dass elektromagnetische Felder entlang metallischer Leiter geführt werden können. Beginnend mit der Frequenz null bis zu Frequenzen in den GHz-Bereich sind dafür Zwei- und Mehrdrahtleitungen geeignet. Hohlleiter können bis zu Frequenzen im Bereich mehrerer hundert GHz eingesetzt werden. Leitungen sind deshalb wichtige Hilfsmittel sowohl für die Energie- als auch für die Nachrichtenübertragung.

Zur Beschreibung elektromagnetischer Vorgänge auf Leitungen gibt es eine Vielfalt unterschiedlicher, mehr oder minder stark idealisierter Modelle.

Generell lässt sich die Ausbreitung elektromagnetischer Felder entlang einer Leitung auf ein Randwertproblem für die Maxwellschen Gleichungen zurückführen. Unter der Annahme, dass die Leiter ideal leitend sind und das Dielektrikum zwischen den Leitern ideal nichtleitend ist, lassen sich viele wichtige Aussagen über Eigenschaften der Lösungen entsprechender Randwertaufgaben beweisen. Aber selbst unter diesen stark idealisierenden Annahmen gelingt es nur in wenigen Spezialfällen, Lösungen der zugehörigen Randwertaufgaben in geschlossener Form, möglichst auch noch mit Hilfe elementarer Funktionen anzugeben. In allen anderen Fällen und insbesondere, wenn die endliche Leitfähigkeit realer Leiter berücksichtigt werden soll, in die die Felder gedämpft eindringen (Skineffekt), können in der Regel bestenfalls Näherungslösungen angegeben werden.

Beschränkt man sich auf die Berechnung des sinusförmig eingeschwungenen Zustands, dann lässt sich die Lösung dieser Randwertaufgaben auf ein Eigenwertproblem zurückführen. Diese Eigenwertprobleme haben abzählbar unendliche viele Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenlösungen werden als Wellenmoden bezeichnet. Hohlleiter haben gewissermaßen Hochpass-Charakter. Bei ihnen existieren auch im verlustfreien Fall ausbreitungsfähige Wellenmoden nur oberhalb gewisser Grenzfrequenzen (vgl. Abschnitt 36). Im Gegensatz dazu gibt es bei Zwei- und Mehrdrahtleitungen stets eine als *Grund-* oder

Hauptwelle bezeichnete Lösung dieser Randwertaufgaben, mit der auch noch bei der Frequenz null Energie transportiert wird. Bei hinreichend kleinen Verlusten sind die zu diesen Lösungen gehörenden Felder nahezu transversal. Bei solchen, auch als *Quasi-TEM-Wellen* bezeichneten Lösungen sind die Longitudinalkomponenten des elektrischen Feldes an den Leiteroberflächen um mehrere Größenordnungen kleiner als die entsprechenden Transversalkomponenten des elektrischen Feldes.

Weil sich die höheren Wellenmoden auch hinsichtlich ihrer Phasen- und Gruppenlaufzeiten von der Grundwelle unterscheiden, ist es bei Zwei- und Mehrdrahtleitungen zur Reduktion der Signalverzerrungen zweckmäßig, durch hinreichend kleine Abstände zwischen den Leitern dafür zu sorgen, dass durch die zu übertragenden Signale keine ausbreitungsfähigen höheren Moden angeregt werden.

Für Quasi-TEM-Wellen gibt es neben einer näherungsweisen Beschreibung durch feldtheoretische Modelle auch eine (selbstverständlich wieder nur näherungsweise) Beschreibung durch Modelle, die auf der Verwendung der Begriffe Spannung und Strom basieren und durch die sogenannten *Leitungs-* oder *Telegraphengleichungen* beschrieben werden. Diese Modelle sind vor allem deshalb interessant, weil man aus ihnen Netzwerkmodelle zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens solcher Leitungen gewinnen kann. Mit Hilfe derartiger Modelle ist es vielfach möglich, auch komplizierte technische Schaltungen einheitlich mit den Mitteln der Netzwerktheorie zu beschreiben. Beginnend mit den allerersten Anfängen der Elektrotechnik (s. z.B. [262]), die mit Namen wie Thomson, Heaviside, Siemens, Edison, u.a. verbunden sind, bis in die heutige Zeit, man denke etwa an die Anwendung supraleitender Kabel in der Elektroenergi 技术 or an die Leiterbahnen hochintegrierter mikroelektronischer Schaltkreise, ist die Theorie der Übertragungsleitungen und die Entwicklung leistungsfähiger Modelle zur Berechnung von Ausbreitungs vorgängen auf Leitungen ein wichtiger Forschungsgegenstand geblieben (vgl. z.B. [148, 214, 51, 98, 215, 92, 99]). Bedeutende Teile des Theoriengebäudes der Elektrotechnik sind im Zusammenhang mit Untersuchungen zur Theorie der Übertragungsleitungen entstanden. Beispiele dieser Art sind die klassische *Vierpoltheorie* und die daraus entstandene Theorie der *Zwei-* und *Mehrto re*, die *Streuparameterdarstellung* des Klemmenverhaltens von Mehrtoren, die Theorie der *Kettenleiter*, die *Wellenparametertheorie* zum Filterentwurf und die daraus zusammen mit der Theorie der systematischen Verfahren zur *Netzwerksynthese* entstandene *Betriebsparametertheorie* zum Filterentwurf. Nicht zuletzt ist die Theorie der Lichtwellenleiter eine aktuelle Weiterentwicklung der Theorie der Hohlleiter.

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf Modelle zur Beschreibung der Grundwellen auf verlustfreien und verlustbehafteten Doppelleitungen mit Hilfe von Leitungsgleichungen. Auf Leitungsgleichungen zur Beschreibung der Ausbreitung von TEM-Wellen auf Mehrfachleitungen wird dagegen nur ausblicksweise eingegangen.

In den beiden folgenden Abschnitten wird zunächst die Ausbreitung von TEM-Wellen auf beidseitig unendlich langen Leitungen behandelt. Leitungen endlicher Länge und der Einfluss der Abschlüsse solcher Leitungen auf die Wellenausbreitung werden erst in den nachfolgenden Abschnitten betrachtet.

Es soll an dieser Stelle ausdrücklich hervorgehoben werden, dass ein Großteil der im Folgenden beschriebenen Ergebnisse auf die in [105, 106] zusammengestellten Arbeiten von Oliver Heaviside zurückgeht. Eine ganze Reihe dieser Ergebnisse hat Heaviside schon vor 1886, dem Jahr, in dem Heinrich Hertz der experimentelle Nachweis der von Maxwell vorhergesagten elektromagnetischen Wellen gelungen ist, ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen hergeleitet. Selbst die im vorliegenden Buch verwendete Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen geht wesentlich auf die Arbeiten von Heaviside zurück. Seine Priorität gerade auf diesem Gebiet wird von keinem Geringeren als Heinrich Hertz ausdrücklich anerkannt, vgl. [116]. Mit seinen auf der Maxwellschen Theorie basierenden Arbeiten zur Theorie der Übertragungsleitungen hat Heaviside neben Hertz einen wichtigen Beitrag zur Durchsetzung dieser Theorie geliefert.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass in Nachfolge von Heaviside die feldtheoretische Behandlung der Ausbreitungsvorgänge auf Leitungen auch heute noch eine reizvolle Anwendung der Maxwellschen Theorie liefert.

35.2 Verlustfreie Doppelleitungen

35.2.1 Feldtheoretische Beschreibung

In diesem Abschnitt wird die Ausbreitung transversaler elektromagnetischer Wellen auf verlustfreien Doppelleitungen untersucht. Die Ausbreitung höherer Wellenmoden wird hier nicht betrachtet, vgl. aber Abschnitt 36.

Der mathematischen Behandlung der Wellenausbreitung auf einer mit Λ bezeichneten Doppelleitung werden folgende Voraussetzungen zu Grunde gelegt:

Λ sei eine gerade, beidseitig unendlich lange Doppelleitung. Die beiden Leiter von Λ sollen parallel sein und einen konstanten Querschnitt haben. Alle betrachteten Funktionen werden als hinreichend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt. Alle Felder sollen in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem beschrieben werden, dessen z -Achse zu den Leitern parallel ist. Die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen dieses Koordinatensystems werden mit \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z bezeichnet. Das Tripel $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ dieser Einheitsvektoren bilde ein Rechtsdreibein.

A bezeichne die als hinreichend glatt vorausgesetzte Grenzfläche zwischen den Leitern und dem Dielektrikum.

$\mathbb{R}m$ bezeichne die Menge $\mathbb{R}m := \{\lambda m \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ aller Produkte einer reellen Maßzahl λ mit der Maßeinheit m. Entsprechend bezeichne \mathbb{RV} die Menge aller

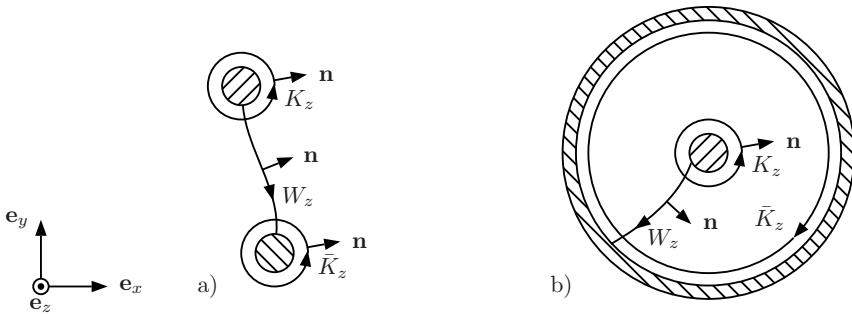


Abbildung 35.1. Querschnitte typischer Doppelleiter. a) nichtkoaxiale Doppelleiter, b) koaxiale Doppelleiter

Produkte reeller Zahlen mit der Maßeinheit V, usf. (vgl. [135], S. 42 ff., [188] und die dort angegebene Literatur).

Für jeden Punkt $z \in \mathbb{R}^m$ bezeichne W_z einen orientierten glatten Weg, der die beiden Leiter von Λ in der zu ihnen orthogonalen Ebene $A_z := \{(x, y, z) | x, y \in \mathbb{R}^m\}$ verbindet. Der Leiter, an dem der Weg W_z endet, wird im Folgenden als *Bezugsleiter* bezeichnet. Zur Vereinfachung der Sprechweise wird der Bezugsleiter mit dem Index 0 und der von ihm verschiedene zweite Leiter mit dem Index 1 bezeichnet.

Bei Koaxialkabeln wird der Außenleiter als Bezugsleiter gewählt. Bei allen anderen Doppelleitungen kann einer der beiden Leiter willkürlich als Bezugsleiter ausgewählt werden.

Der Grenzfall, bei dem einer der beiden Leiter ein von einer unendlich ausgedehnten Ebene begrenzter Halbraum ist und der andere Leiter ein zu dieser Ebene paralleler, unendlich langer Leiter mit konstantem Querschnitt ist, wird ausdrücklich zugelassen.

\bar{K}_z und K_z seien disjunkte geschlossene orientierte glatte Wege, die den Leiter 0 bzw. den Leiter 1 in der Ebene A_z umschließen. Die Wege \bar{K}_z und K_z seien so orientiert, dass an jedem ihrer Punkte das Tripel bestehend aus einem in Richtung vom Leiter zum Dielektrikum orientierten Normalenvektor, einem in Richtung der Orientierung des Wegs gerichteten Tangentenvektor und dem Vektor e_z jeweils ein Rechtsdreibein bildet. Die Wege W_z , \bar{K}_z und K_z sollen sich von W_0 , \bar{K}_0 bzw. K_0 nur durch eine Parallelverschiebung entlang der z -Achse unterscheiden.

Das Feld der Tangenteneinheitsvektoren der Wege W_z , \bar{K}_z und K_z , deren Richtung mit der Richtung der Orientierung dieser Wege übereinstimmt, wird mit t bezeichnet. Das Feld der Einheitsvektoren, die auf dem Basisvektor e_z und den Wegen W_z , \bar{K}_z und K_z senkrecht stehen, wird mit n bezeichnet. An den Punkten von W_z bilde jeweils das Tripel aus dem Tangentenvektor, dem Normalenvektor und dem Vektor e_z ein Rechtsdreibein. An den Punkten von

\bar{K}_z und K_z bildet, wie bereits vereinbart, das Tripel aus dem Normalenvektor, dem Tangentenvektor und dem Vektor e_z ein Rechtsdreibein, vgl. auch Abb. 35.1. Um die Darstellung zu vereinfachen, ist in dieser Abbildung auf die Wiedergabe der Ortsabhängigkeit der eingetragenen Normalenvektoren verzichtet worden.

Die Leiter von Λ seien ideal leitend. Genauer wird angenommen, dass die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} und \mathbf{B} der elektromagnetischen Wellen nicht in die Leiter eindringen. Das Dielektrikum zwischen den Leitern sei homogen, nichtleitend und raumladungsfrei. Es habe die Permittivität ϵ und die Permeabilität μ . $Z_F := \sqrt{\mu/\epsilon}$ bezeichne den zu diesem Dielektrikum gehörenden Freiraumwellenwiderstand und $v_F := 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ die entsprechende Freiraumlichtgeschwindigkeit. C' bezeichne den Kapazitäts- und L' den Induktivitätsbelag von Λ (vgl. Abschn. 12 bzw. 23).

Durch die Voraussetzung, dass Λ eine unendlich lange Doppelleitung sein soll, wird der Einfluss der Streufelder an den Enden einer endlich langen Leitung eliminiert. Sind bei einer Doppelleitung mit endlicher, aber gegenüber der Wellenlänge immer noch großer Gesamtlänge, die Abstände zwischen den beiden Leitern so gering, dass höhere Wellenmoden nicht ausbreitungsfähig sind, so klingt der Einfluss der Streufelder, die sich an den Enden einer solchen Leitung ausbilden, im Inneren der Leitung rasch ab, vgl. Abschn. 36 und [210, 211]. Deshalb kann man Ausbreitungsvorgänge auf einer endlich langen Leitung in guter Näherung mit dem Modell einer unendlich langen Leitung beschreiben, wenn diese Ausbreitungsvorgänge die Enden der Leitung noch nicht erreicht haben.

Vereinbarungsgemäß ist das Dielektrikum zwischen den Leitern von Λ nichtleitend. Damit verschwindet die Stromdichte im Innern des Dielektrikums. Weil die Felder nicht in die Leiter eindringen, muss in den Leitern die Stromdichte \mathbf{J} durch die hier¹ mit dem Buchstaben \mathbf{S} bezeichnete Flächenstromdichte und die Raumladungsdichte ρ durch die Flächenladungsdichte σ ersetzt werden. Die Flächenstromdichte und die Flächenladungsdichte sind Felder $\mathbf{S} : A \rightarrow (\mathbb{R}\text{A}/\text{m}) \times (\mathbb{R}\text{A}/\text{m}) \times (\mathbb{R}\text{A}/\text{m})$ bzw. $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}\text{As}/\text{m}^2$, die ausschließlich auf der Leiteroberfläche von Λ definiert sind. Die Flächenstromdichte beschreibt die Bewegung der Flächenladungen.

Eine elektromagnetische Welle auf Λ wird deshalb durch die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{S} und σ beschrieben. Ein elektrostatisches Feld auf Λ wird durch die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} und σ beschrieben. Ein stationäres Magnetfeld auf Λ wird durch die Felder \mathbf{H} , \mathbf{B} und \mathbf{S} beschrieben.

Die Begriffe des elektromagnetischen Feldes und der elektromagnetischen Welle werden als Synonyme betrachtet. Zeitinvariante Felder sollen als Spezialfälle elektromagnetischer Wellen angesehen werden. Eine zeitinvariante elektromagnetische Welle auf Λ „zerfällt“ in ein elektrostatisches Feld und ein stationäres Magnetfeld.

¹ Um Verwechslungen zu vermeiden, wird in diesem Abschnitt das Feld des Poyntingvektors ausschließlich mit $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ bezeichnet.

Die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{S}$ und σ einer elektromagnetischen Welle auf A müssen den Maxwellschen Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}, \quad (35.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (35.2)$$

den Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (35.3)$$

und den Randbedingungen

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|A = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|A = 0, \quad (35.4)$$

$$\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|A, \quad \mathbf{S} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|A \quad (35.5)$$

genügen. In Glg. (35.1) bezeichnet ∂_t die partielle Ableitung nach der Zeit. Entsprechend sollen im Folgenden die partiellen Ableitungen nach den kartesischen Ortskoordinaten mit ∂_x, ∂_y und ∂_z bezeichnet werden. Mit den Symbolen $\mathbf{E}|A, \dots, \mathbf{H}|A$ werden in (35.4) und (35.5) die Einschränkungen der Felder $\mathbf{E}, \dots, \mathbf{H}$ auf die Leiteroberflächen bezeichnet.

Eine elektromagnetische Welle auf A wird als *transversal* oder als eine *TEM-Welle auf A* bezeichnet, wenn ihre Komponenten den Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_x, E_y, 0), & \mathbf{D} &= (D_x, D_y, 0), \\ \mathbf{H} &= (H_x, H_y, 0), & \mathbf{B} &= (B_x, B_y, 0), \\ \mathbf{S} &= (0, 0, S_z) \end{aligned} \quad (35.6)$$

genügen.

Die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \sigma$ bzw. $\mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{S}$ beschreiben ein elektrostatisches Feld bzw. ein stationäres Magnetfeld auf A , wenn sie nicht von der Zeit abhängen und den Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \\ \sigma &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|A, & \mathbf{n} \times \mathbf{E}|A &= 0 \end{aligned} \quad (35.7)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}|A &= 0, & \mathbf{n} \times \mathbf{H}|A &= \mathbf{S} \end{aligned} \quad (35.8)$$

genügen.

In Analogie zu (35.6) werden transversale elektrostatische Felder und transversale stationäre Magnetfelder auf A definiert.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass elektrostatische Felder auf unendlich langen Doppel- und Mehrfachleitungen nicht notwendigerweise transversal sind (vgl. [210, 211]).

Für nichtkoaxiale Doppelleitungen sollen die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} und \mathbf{B} der TEM-Wellen zusätzlich in jeder zu den Leitern senkrechten Ebene für $(x^2 + y^2) \rightarrow \infty$ wenigstens so schnell wie $1/(x^2 + y^2)$ gegen null konvergieren.

Bezeichnet $\check{K}_z(R)$ mit $z, R \in \mathbb{R}$ und $R > 0$ eine in der Ebene A_z liegende, relativ zur positiven Orientierung der z -Achse im Rechtsschraubensinn orientierte Kreislinie mit Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, z)$, die beide Leiter von Λ umschließt, dann folgt aus dieser Voraussetzung, dass die Integrale

$$\oint_{\check{K}_z(R)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad \oint_{\check{K}_z(R)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad (35.9)$$

und

$$\oint_{\check{K}_z(R)} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}), \quad \oint_{\check{K}_z(R)} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}) \quad (35.10)$$

für $R \rightarrow +\infty$ gegen null konvergieren.

Mit anderen Worten, für alle z haben die Einschränkungen der Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} bzw. \mathbf{D} und \mathbf{B} auf die Fläche A_z im Unendlichen keine Wirbel bzw. keine Quellen. Aus Sicht der Anwendungen bedeutet diese Voraussetzung zum einen, dass diese Felder auf der betrachteten Doppelleitung keine Anteile enthalten sollen, die von einer Gleichtaktansteuerung erregt worden sind und zum anderen, dass die Ausbreitungsvorgänge auf dieser Leitung nicht wesentlich durch andere, weit entfernte (idealisiert: unendlich weit entfernte) parallele Leitungen beeinflusst werden.

Vereinbarungsgemäß ist die z -Achse des unseren Betrachtungen zu Grunde gelegten Koordinatensystems parallel zur Ausbreitungsrichtung der TEM-Wellen auf Λ . Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßig, die Gleichungen (35.1) so umzuformen, dass die ausgezeichnete Rolle der z -Achse in diesen Gleichungen deutlicher hervortritt.

In Bezug auf das am Beginn dieses Abschnitts eingeführte kartesische Koordinatensystem erhält man für ein transversales E-Feld aus $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ die Gleichung

$$(-\partial_z E_y, +\partial_z E_x, +\partial_x E_y - \partial_y E_x) = -(\partial_t B_x, \partial_t B_y, 0), \quad (35.11)$$

woraus mit $\text{rot}_z \mathbf{E} := +\partial_x E_y - \partial_y E_x$ die Gleichungen

$$\partial_z E_x = -\partial_t B_y, \quad \partial_z E_y = \partial_t B_x, \quad \text{rot}_z \mathbf{E} = 0. \quad (35.12)$$

folgen. Wegen

$$(-B_y, B_x, 0) = \mathbf{e}_z \times \mathbf{B} \quad (35.13)$$

kann man die beiden ersten Gleichungen von (35.12) in

$$\partial_z \mathbf{E} = \mathbf{e}_z \times \partial_t \mathbf{B} \quad (35.14)$$

zusammenfassen. Das bedeutet, dass man für TEM-Wellen auf Λ die Gleichungen (35.1) durch die äquivalenten Gleichungssysteme

$$\partial_z \mathbf{E} = \mathbf{e}_z \times \partial_t \mathbf{B}, \quad (35.15)$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{E} = 0 \quad (35.16)$$

und

$$\partial_z \mathbf{H} = -\mathbf{e}_z \times \partial_t \mathbf{D}, \quad (35.17)$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{H} = 0 \quad (35.18)$$

ersetzen kann.

Ist $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$ ein zur z -Achse transversales Vektorfeld, so sind die durch $\mathbf{e}_z \times \mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{F} \times \mathbf{e}_z$ definierten Vektorfelder gleichfalls transversal. Die Feldvektoren von $\mathbf{e}_z \times \mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{F} \times \mathbf{e}_z$ gehen durch eine 90° -Drehung im mathematisch positiven bzw. mathematisch negativen Sinn aus denen von \mathbf{F} hervor. Vertritt \mathbf{F} speziell das vektorielle Linienelement $d\mathbf{r} = tds$ eines der Wege K_z, \tilde{K}_z bzw. W_z , so gilt mit den im Zusammenhang mit Abb. 35.1 eingeführten Orientierungen die Beziehung $d\mathbf{r} \times \mathbf{e}_z = n ds$ bzw. $\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r} = n ds$, wobei $ds := |d\mathbf{r}|$ das zugehörige skalare Wegelement bezeichnet.

Entsprechend gilt bei den in Zusammenhang mit den Integralen (35.9) und (35.10) eingeführten geschlossenen Wegen $\tilde{K}_z(R)$ die Beziehung $\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r} = \mathbf{n} ds$, wobei \mathbf{n} einen nach Innen orientierten Normalenvektor von $\tilde{K}_z(R)$ bezeichnet. Mithin beschreiben die Integrale aus (35.10) die Werte der Flüsse pro Länge, die durch die Felder \mathbf{D} und \mathbf{B} in der Ebene A_z von „Außen“ in das Doppelleitersystem Λ „eindringen“.

Aus dem System der Gleichungen (35.15) bis (35.18) und (35.2) bis (35.6) lassen sich alle entscheidenden Aussagen über Eigenschaften von TEM-Wellen auf Λ herleiten.

Diese Aussagen sollen im Folgenden für beliebige Doppelleitungen, die den obigen Voraussetzungen genügen, bewiesen und zusätzlich durch die Diskussion eines parallelaufendes Beispiels illustriert werden. Für die als Beispiel gewählte koaxiale Leiteranordnung lassen sich einige dieser Beweise vereinfachen.

Als erstes soll gezeigt werden, dass sich die TEM-Wellen auf Λ mit der Freiraumlichtgeschwindigkeit v_F ausbreiten.

Differentiation von (35.15) bzw. (35.17) nach z bzw. t liefert zusammen mit den Materialgleichungen $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ und $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ die Beziehungen $\partial_z \partial_z \mathbf{E} = \mathbf{e}_z \times \mu \partial_z \partial_t \mathbf{H}$ bzw. $\partial_z \partial_t \mathbf{H} = -\mathbf{e}_z \times \epsilon \partial_t \partial_z \mathbf{E}$, aus denen durch Elimination des Terms $\partial_z \partial_t \mathbf{H}$ die Gleichung $\partial_z \partial_z \mathbf{E} = -\epsilon \mu \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \partial_t \partial_z \mathbf{E})$ folgt. Mit dem Entwicklungssatz $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ der Vektoralgebra und der Transversalitätsbedingung $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{E} = 0$ folgt schließlich, dass die elektrische Feldstärke einer TEM-Welle auf Λ der Wellengleichung

$$\partial_z \partial_z \mathbf{E} = \epsilon \mu \partial_t \partial_t \mathbf{E} \quad (35.19)$$

genügen muss. Diese Gleichung ist eine Wellengleichung vom gleichen Typ wie die der (linearisierten) Differentialgleichung einer schwingenden Saite (s. z.B. [112, 169]). Auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch die übrigen Bestimmungsstücke einer TEM-Welle auf Λ einer Wellengleichung dieses Typs

genügen müssen. Wie in der Analysis (z.B. [112, 169]) gezeigt wird, lässt sich jede Lösung einer solchen Gleichung nach einem auf d'Alembert zurückgehenden Ansatz jeweils als Überlagerung einer hin- und rücklaufenden Welle darstellen, die sich mit der Freiraumlichtgeschwindigkeit $v_F = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ parallel zur z -Achse ausbreitet (vgl. auch Abschn. 34.3).

Beispiel: A sei ein verlustloses unendlich langes Koaxialkabel. Der Außen durchmesser des Innenleiters sei R_1 und der Innendurchmesser des Außenleiters sei R_2 . Wie oben vereinbart diene der Außenleiter als Bezugsleiter.

Um die Symmetrie der Anordnung auszunutzen, werden an Stelle der kartesischen Koordinaten die für $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}m$ durch

$$\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z) := (r \cos \alpha, r \sin \alpha, z) \quad (35.20)$$

definierten Zylinderkoordinaten verwendet. Mit \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_α und \mathbf{e}_z werden die Felder der Vektoren bezeichnet, die die begleitenden Dreibeine zu diesen krummlinigen Koordinaten bilden. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir jedoch im Folgenden bei den Termen $\mathbf{e}_r(r, \alpha, z)$, $\mathbf{e}_\alpha(r, \alpha, z)$ und $\mathbf{e}_z(r, \alpha, z)$ die Wiedergabe der Argumente r, α und z unterdrücken.

Nach dem oben gesagten sind die Felder einer TEM-Welle auf diesem Koaxialkabel Lösungen einer speziellen Wellengleichung und müssen sich als Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Welle darstellen lassen. Wegen der Linearität dieser Gleichung bedeutet es keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir uns im Folgenden auf Wellen beschränken, die nur in einer dieser beiden Richtungen laufen. Aus Symmetriegründen werden in einem Koaxialkabel mit konzentrischen Leitern und einem homogenen Dielektrikum zwischen den Leitern die Felder einer TEM-Welle nicht von der Variablen α abhängen. Auf den Leiteroberflächen müssen die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und die Normalkomponenten von \mathbf{B} verschwinden.

Die soeben genannten Bedingungen an eine TEM-Welle lassen sich mit beliebigen wenigstens zweimal differenzierbaren Funktionen $F : \mathbb{R}m \times \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{R}V/m$ und $G : \mathbb{R}m \times \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{R}A/m$ durch den Ansatz

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) := F(r, z - vt)\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{H}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) := G(r, z - vt)\mathbf{e}_\alpha \quad (35.21)$$

erfüllen.

Aus den Werten der Normalkomponenten von \mathbf{D} bzw. denen der Tangentialalkomponenten von \mathbf{H} auf dem Rand kann man zusätzlich die Flächenladungsdichten bzw. die Flächenstromdichten auf den Leitern bestimmen.

Außer den Randbedingungen müssen die Komponenten eines elektromagnetischen Feldes dem Induktionsgesetz $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \partial_t \mathbf{H}$, dem Durchflutungsgesetz $\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon \partial_t \mathbf{E}$, der Bedingung $\text{div } \mathbf{D} = 0$ für die Quellenfreiheit des D-Feldes und der Bedingung $\text{div } \mathbf{B} = 0$ für die Quellenfreiheit des B-Feldes genügen.

Weil ϵ und μ konstant sind, genügt es, zu fordern, dass die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} quellenfrei sind. Wie man leicht nachprüft, genügt der Ansatz für \mathbf{H} bereits

der Bedingung $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. In Zylinderkoordinaten müssen deshalb die Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} nur noch den drei Gleichungen

$$0 \mathbf{e}_r + \partial_z F(r, z - vt) \mathbf{e}_\alpha + 0 \mathbf{e}_z = \mu v \partial_z G(r, z - vt) \mathbf{e}_\alpha, \quad (35.22)$$

$$\begin{aligned} -\partial_z G(r, z - vt) \mathbf{e}_r + 0 \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{r} \partial_r(rG(r, z - vt)) \mathbf{e}_z \\ = -\epsilon v \partial_z F(r, z - vt) \mathbf{e}_r, \end{aligned} \quad (35.23)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r(rF(r, z - vt)) = 0 \quad (35.24)$$

genügen, wobei ∂_r die partielle Ableitung nach der Variablen r bezeichnet.

Aus Gleichung (35.24) und der z -Komponente von Gleichung (35.23) folgt, dass die durch die Zuordnungen $(r, z) \mapsto rF(r, z)$ und $(r, z) \mapsto rG(r, z)$ definierten Funktionen von der Variablen r unabhängig sind. Folglich gibt es Funktionen $f : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{R}V$ und $g : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{R}A$, mit denen sich die Funktionen F und G in der Form

$$F(r, z - vt) = f(z - vt)/r \text{ bzw. } G(r, z - vt) = g(z - vt)/r \quad (35.25)$$

darstellen lassen.

Aus der Bedingung für die α -Komponente in Gleichung (35.22) und der für die r -Komponente in Gleichung (35.23) ergibt sich das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_z F(r, z - vt) & -\mu v \partial_z G(r, z - vt) = 0, \\ \epsilon v \partial_z F(r, z - vt) & -\partial_z G(r, z - vt) = 0, \end{aligned} \quad (35.26)$$

aus dem man mit (35.25) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f'(z - vt) & -\mu v g'(z - vt) = 0, \\ \epsilon v f'(z - vt) & -g'(z - vt) = 0 \end{aligned} \quad (35.27)$$

zur Berechnung der Ableitungen f' und g' der Funktionen f bzw. g erhält.

Dieses Gleichungssystem hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn seine Koeffizientendeterminante $(-1 + \epsilon \mu v^2)$ verschwindet, d.h., wenn

$$v = \pm 1/\sqrt{\epsilon \mu} \quad (35.28)$$

gilt. Mit anderen Worten, wenn der Betrag von v gleich der Freiraumlichtgeschwindigkeit v_F im Dielektrikums ist.

Im Fall $v > 0$ bewegt sich die elektromagnetische Welle als vorwärtslaufende Welle in Richtung der positiven z -Achse und im Fall $v < 0$ bewegt sich die elektromagnetische Welle als rücklaufende Welle in Richtung der negativen z -Achse.

Mit $Z_F = \sqrt{\mu/\epsilon}$ müssen wegen $\mu v = \text{sgn}(v)Z_F$ und $\epsilon v = \text{sgn}(v)Z_F^{-1}$ die Komponenten der nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems der Bedingung

$$f'(z - vt) = \text{sgn}(v)Z_F g'(z - vt) \quad (35.29)$$

genügen.

Durch Integration erhält man daraus

$$f(z - vt) = f(0) + \text{sgn}(v)Z_F(g(z - vt) - g(0)). \quad (35.30)$$

Mit der frei wählbaren Funktion $g : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{RA}$ und der gleichfalls frei wählbaren Konstante $f_0 \in \mathbb{RV}$ für den Anfangswert der Funktion f erhält man mit $k_0 := f_0 - \text{sgn}(v)Z_F g(0)$ die Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) &= \frac{k_0 + \text{sgn}(v)Z_F g(z - vt)}{r} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{H}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) &= \frac{g(z - vt)}{r} \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (35.31)$$

Aus (35.31) erhält man für die Leistungsflussdichte der von der zugehörigen TEM-Welle transportierten Energie an der Stelle $\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z)$ zum Zeitpunkt t die Beziehung

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H})(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) = \frac{k_0 g(z - vt) + \text{sgn}(v)Z_F g^2(z - vt)}{r^2} \mathbf{e}_z. \quad (35.32)$$

Ist $g(z - vt) \neq 0$, so zeigt der von den Konstanten $f(0)$ und $g(0)$ unabhängige Anteil dieser Leistungsflussdichte zum Zeitpunkt t für $v > 0$ bzw. $v < 0$ in Richtung von \mathbf{e}_z bzw $-\mathbf{e}_z$.

Weil die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{S}$ und σ sowohl im Inneren der Leiter des Koaxkabels als auch im Aussengebiet dieses Kabels verschwinden, liefert das Integral

$$\begin{aligned} \int_{A_z^\varnothing} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{k_0 g + \text{sgn}(v)Z_F g^2}{r} d\alpha dr, \\ &= 2\pi(k_0 g + \text{sgn}(v)Z_F g^2) \ln \frac{R_2}{R_1}. \end{aligned} \quad (35.33)$$

den Leistungsfluss durch die Fläche A_z , wobei A_z^\varnothing den Durchschnitt des mit dem Dielektrikum des Kabels gefüllten Raumteils mit der Fläche A_z bezeichnet und zur Vereinfachung der Schreibweise in der Funktion g die Argumente z und t weggelassen worden sind.

Weil die Querschnitte der Leiter nicht von der Längskoordinate z abhängen, ist das mit dem Dielektrikum gefüllte Gebiet von A gleich dem kartesischen Produkt $A_0^\varnothing \times \mathbb{R}m \subset \mathbb{R}^3m$.

Bleibt noch der Fall zu diskutieren, bei dem die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems (35.27) ungleich null ist. Dann hat (35.27) nur die

triviale Lösung $f' = g' = 0$ und die Funktionen f und g sind konstant. Dieser Fall ist für $g = \text{konst.}$ in (35.31) als Spezialfall enthalten. In diesem Fall zerfällt die TEM-Welle in ein transversales elektrostatisches Feld und in ein von diesem Feld unabhängiges transversales stationäres Magnetfeld. Wie Gleichung (35.33) zeigt, kann mit einem koaxialen Kabel auch bei $g = \text{konst.}$, d.h. bei der Frequenz null, Energie transportiert werden.

Aus $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|A$ und $\mathbf{S} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|A$ erhält man mit $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ für die Flächenladungsdichte σ bzw. die Flächenstromdichte \mathbf{S} auf dem Innenleiter die Beziehung

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}(R_1, \alpha, z), t) = \frac{\epsilon(k_0 + \text{sgn}(v)Z_F g(z - vt))}{R_1} \quad (35.34)$$

bzw.

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{r}}(R_1, \alpha, z), t) = \frac{g(z - vt)}{R_1} \mathbf{e}_z. \quad (35.35)$$

Damit sind alle Felder bestimmt, durch die eine TEM-Welle auf diesem Koaxalkabel festgelegt wird. \square

Offensichtlich stehen die durch die Gleichungen (35.31) definierten Feldvektoren, genauer die normierten Feldvektoren $\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t)$ m/V und $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t)$ m/A, an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs senkrecht aufeinander. Mit den in [241] zusammengestellten funktionentheoretischen Hilfsmitteln lässt sich eine analoge Aussage für alle verlustfreien Doppelleitungen, die den einleitend genannten Voraussetzungen genügen, beweisen.

Die Gleichungen (35.31), (35.34) und (35.35) liefern für $R_1 < r < +\infty$ auch die Felder einer TEM-Welle für eine verlustfreie Einzelleitung mit kreisförmigem Querschnitt. Aus Glg. (35.33) folgt für $R_2 \rightarrow \infty$, dass eine nichttriviale TEM-Welle dieser Art stets eine unendlich große Leistung transportieren würde. Realistischere Modell für eine Einzelleitung erhält man erst, wenn man für ihren Leiter eine endliche Leitfähigkeit zulässt, vgl. [264].

Auch unter Berücksichtigung einer endlichen Leitfähigkeit haben Einzelleitungen zur störungsfreien Energie- oder Nachrichtenübertragung mit Quasi-TEM-Wellen keine technische Bedeutung, weil ihre Felder trotzdem in radia-ler Richtung sehr weit ausgedehnt sind, so dass Wechselwirkungen mit anderen elektrischen Feldern nicht ausgeschlossen werden können. Technische Bedeutung für die Nachrichtenübertragung haben dagegen Einzelleiter erlangt, die nicht mit der Grundwelle, sondern einer geeigneten höheren Wellenmode betrieben werden und zusätzlich mit einem Dielektrikum mit hinreichend großer Dielektrizitätskonstante ummantelt sind. Durch diese Maßnahmen erreicht man, dass sich ihre Felder nicht mehr weit im Raum ausdehnen und für die Energieübertragung im wesentlichen nur die unmittelbare Umgebung der Leitung benötigt wird. Diese, auch als *Harms-Gouba-Wellenleiter* (s. auch [235, 261]) bezeichneten Einzelleitungen können bis in den Giga-Hz-Bereich verwendet werden.

Gemäß (35.34) breitet sich die Oberflächenladungsdichte mit der Freiraumlichtgeschwindigkeit v_F aus, für $\epsilon = \epsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ also mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c . Unabhängig von dem zur Herleitung dieser Beziehung betrachteten speziellen Beispiel folgt eine solche Beziehung allgemein aus der Tatsache, dass das D-Feld einer TEM-Welle auf einer verlustfreien Doppelleitung, die den einleitend vereinbarten Voraussetzungen genügt, auch Lösung einer zu (35.19) analogen Wellengleichung sind. Dieses Ergebnis darf man aber nicht dahingehend interpretieren, dass sich die Ladungsträger, in den metallischen Leitern einer realen Leitung also die Elektronen, mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Das ist prinzipiell unmöglich, weil Ladungen stets an Teilchen gebunden sind, die eine von null verschiedene Ruhemasse haben. Die Tatsache, dass die Felder einer elektromagnetischen Welle bei einer verlustfreien Leitung nicht in die Leiter eindringen, und mit den Feldern \mathbf{D} und \mathbf{H} lediglich Flächenladungsdichten bzw. Flächenstromdichten verbunden sind, ist eine Folge der einleitend verabredeten Idealisierungen. Werden Leiter mit endlicher Leitfähigkeit zugelassen, dringen die Felder einer nichtkonstanten elektromagnetischen Welle gedämpft in die Leiter ein (Skineffekt). Dadurch ergibt sich in den Leitern eine räumlich ausgedehnte Stromverteilung mit einer überall endlichen Stromdichte \mathbf{J} , der dann Ladungsträgersgeschwindigkeiten in der Größenordnung von Millimetern pro Sekunde entsprechen. Für einfache Konfigurationen (vgl. [264, 175]) kann man solche Felder auch in geschlossener Form berechnen. Die soeben erwähnten Beispiele aus [264, 175] zeigen (auch, wenn es schwierig ist, für diese Tatsache einen allgemeingültigen Beweis anzugeben), dass sich TEM-Wellen auf realen Doppelleitungen, deren Leiter eine hinreichend große endliche Leitfähigkeit und hinreichend große Querschnitte haben, mit einer Geschwindigkeit bewegen, die nur geringfügig kleiner als die entsprechende Freiraumlichtgeschwindigkeit ist. Auf Leitungen, deren Leiter eine endliche Leitfähigkeit haben, breitet sich also die Wellenfront und damit auch das Gebiet, in dem die Stromdichte \mathbf{J} , die die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} und \mathbf{B} begleitet, von null verschiedene Werte annimmt, nahezu mit der entsprechenden Freiraumlichtgeschwindigkeit aus. Die frei beweglichen Ladungsträger aber bewegen sich in diesem Gebiet nur sehr langsam, wobei dieser gerichteten Bewegung bekanntermaßen zusätzlich auch noch eine ungerichtete thermische Bewegung überlagert ist (vgl. Abschn. 37.2.2).

Haben die Leiter von A eine endliche Leitfähigkeit, dann hat das E-Feld zwangsläufig eine nichtverschwindende Longitudinalkomponente. Betrachtet man bei vorgegebener Frequenz nur den sinusförmig eingeschwungenen Zustand, und ist an jeder Stelle der Leitung der Krümmungsradius (also der Kehrwert der differentialgeometrisch definierten Krümmung [295] der beiden in $A \cap A_z$ enthaltenen Raumkurven) groß gegenüber der Eindringtiefe, so kann man mit den Ergebnissen aus Abschn. 29 zumindest auf den Oberflächen der Leiter das Verhältnis zwischen der Amplitude E_{long} der Longitudinalkomponente und der Amplitude E_{tr} der Transversalkomponente von $\mathbf{E}|A$ abschätzen. Mit den bisherigen Ergebnissen kann man eine solche

Abschätzung für das Koaxkabel für unser fortlaufendes Beispiel sofort angeben.

Beispiel (1. Fortsetzung): Für den sinusförmig eingeschwungenen Zustand einer verlustfreien Leitung folgt aus Gleichung (35.31) mit $E_{\text{tr.}} := \|\mathbf{E}|A\|$ und $H_{\text{tr.}} := \|\mathbf{H}|A\|$ die Beziehung $E_{\text{tr.}}/H_{\text{tr.}} = Z_F = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Gleichung (29.51) liefert $E_{\text{long.}}/H_{\text{tr.}} = \sqrt{\omega\mu/\kappa}$. Aus beiden Teilergebnissen erhält man für das gesuchte Amplitudenverhältnis die Beziehung $E_{\text{long.}}/E_{\text{tr.}} \approx \sqrt{\omega\epsilon/\kappa}$. Mit $\kappa_{\text{Cu}} \approx 5,7 \cdot 10^7 \text{ A/Vm}$, $\epsilon_{\text{Cu}} \approx \epsilon_0 \approx (10^{-9}/36\pi)\text{As/Vm}$ und $\omega = 2\pi f$ erhält man für $\sqrt{\omega\epsilon/\kappa}$ die zugeschnittene Größengleichung

$$\sqrt{\frac{\omega\epsilon_{\text{Cu}}}{\kappa_{\text{Cu}}}} \approx 10^{-5} \sqrt{\frac{f_{/\text{MHz}}}{102,6}} \approx 10^{-6} \sqrt{f_{/\text{MHz}}}.$$

Selbst bei einer Frequenz von 100 MHz erhält man für dieses Verhältnis also den Wert 10^{-5} . Die Freiraumwellenlänge beträgt bei dieser Frequenz 3 m und ist damit groß gegenüber der zugehörigen Eindringtiefe von $6,7 \mu\text{m}$. Diese Tatsache rechtfertigt die Anwendung der auf einer quasistationären Näherung basierenden Abschätzung. \square

35.2.2 Leitungsgleichungen

In schnell veränderlichen Feldern hängen die Linienintegrale des E-Feldes i.a. von der Form des Wegs ab, der zwei Punkte verbindet. Deshalb ist es nicht möglich, Spannungen zwischen beliebigen Punkten zu definieren. Das gilt selbstverständlich auch für nichttriviale TEM-Wellen auf einer Doppelleitung.

Eine für die Beschreibung der TEM-Wellen auf verlustfreien Doppelleitungen wichtige Folgerung aus Glg. (35.16) ist die Tatsache, dass man einer verlustfreien Doppelleitung Λ sehr wohl Spannungen zuordnen kann, wenn man die Menge der zulässigen Integrationswege geeignet einschränkt.

Weil die Tangentialkomponente des E-Feldes auf den Leiteroberflächen verschwindet und im Raum zwischen den Leitern die Beziehung $\text{rot}_z \mathbf{E} = 0$ gilt, folgt aus dem Integralsatz von Stokes, dass das Linienintegral $\int_{W_z} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ für alle z unabhängig von der speziellen Wahl des Wegs W_z ist, der die Leiter in der zu ihnen orthogonalen Ebene A_z verbindet. Deshalb lässt sich jeder TEM-Welle auf Λ die für alle z und t durch

$$u(z, t) = \int_{W_z} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad (35.36)$$

definierte *Spannungsverteilung* $u : \mathbb{R}m \times \mathbb{R}s \rightarrow \mathbb{R}V$ zuordnen.

Die bei einem festen Wert $z_0 \in \mathbb{R}m$ durch $u(z_0, \cdot)(t) := u(z_0, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}s$ definierte Zeitfunktion $u(z_0, \cdot)$ ist die auf den Bezugsleiter bezogene Spannung zwischen den Leitern von Λ an der Stelle z_0 .

Unter den Voraussetzungen, die die Unabhängigkeit des Integrals auf der rechten Seite der Glg. (35.36) von der speziellen Wahl des Weges $W_z \subset A_z$

sichern, lässt sich dem Feld der elektrischen Feldstärke einer TEM-Welle auf Λ für alle $(x, y, z, t) \in A_0^\emptyset \times \mathbb{R}m \times \mathbb{R}s$ durch

$$\varphi(x, y, z, t) := - \int_{W_\varphi^{xyz}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (35.37)$$

eine differenzierbare Funktion $\varphi : A_0^\emptyset \times \mathbb{R}m \times \mathbb{R}s \rightarrow \mathbb{R}V$ zuordnen, wobei $W_\varphi^{xyz} \subset A_z^\emptyset$ ein Weg ist, der in der Ebene A_z einen beliebigen Punkt der Oberfläche des Bezugsleiters mit dem Punkt $(x, y, z) \in A_z^\emptyset$ verbindet. Bezeichnet grad_2 den für differenzierbare Funktionen $\psi : D \subseteq \mathbb{R}^3m \times \mathbb{R}s \rightarrow \mathbb{R}V$ durch $\text{grad}_2 \psi := (\partial_x \psi, \partial_y \psi, 0)$ definierten Gradientenoperator für transversale Felder, dann gilt die Beziehung

$$\mathbf{E} := - \text{grad}_2 \varphi. \quad (35.38)$$

Definitionsgemäß hat die Funktion φ an den Punkten der Oberfläche des Bezugsleiters unabhängig von $t \in \mathbb{R}s$ den Wert null. Für alle $z \in \mathbb{R}m$ und alle $t \in \mathbb{R}s$ genügt φ an den Punkten (x, y, z) , die auf der Oberfläche des Leiters 1 liegen, dann notwendigerweise der Bedingung $\varphi(x, y, z, t) = u(z, t)$.

Ausgehend von der Flächenstromdichte $\mathbf{S} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|A$ kann man den Leitern von Λ mit dem Vektor \mathbf{e}_z als Bezugsrichtung und der Beziehung $d\mathbf{r} = tds$ zwischen dem vektoriellen und dem skalaren Wegelement eine *Stromverteilung* zuordnen. Für den Leiter 1 erhält man auf diese Weise die durch

$$\begin{aligned} i(z, t) &= \oint_{K_z} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{e}_z \, ds \\ &= \oint_{K_z} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{e}_z \, ds \\ &= - \oint_{K_z} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z) \, ds \\ &= \oint_{K_z} (\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{n})) \, ds \\ &= \oint_{K_z} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (35.39)$$

für alle z und t definierte Stromverteilung $i : \mathbb{R}m \times \mathbb{R}s \rightarrow \mathbb{R}A$.

Die bei einem festen Wert $z_0 \in \mathbb{R}m$ durch $i(z_0, \cdot)(t) := i(z_0, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}s$ definierte Zeitfunktion $i(z_0, \cdot)$ liefert den Strom, der in diesem Leiter an der Stelle z_0 fließt.

Entsprechend erhält man für den Bezugsleiter die für alle z und t durch

$$\bar{i}(z, t) = \oint_{\bar{K}_z} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \quad (35.40)$$

definierte Stromverteilung $\bar{i} : \mathbb{R}m \times \mathbb{R}s \rightarrow \mathbb{R}A$.

Für eine koaxiale Anordnung der Leiter von Λ folgt wegen $\text{rot}_z \mathbf{H} = 0$ aus dem Integralsatz von Stokes sofort die Beziehung

$$i(z, t) = -\bar{i}(z, t). \quad (35.41)$$

Für eine nichtkoaxiale Anordnung der Leiter von Λ kann man die Wege K_z und \bar{K}_z durch einen Rückkehrschnitt verbinden, der in der zu den Leitern orthogonalen Ebene A_z liegt, und erhält so einen Weg \hat{K}_z , der beide Leiter umschließt. Sei nun $\check{K}_z(R)$ einer der im Zusammenhang mit den Integralen (35.9) und (35.10) eingeführten zu \hat{K}_z gleichorientierten geschlossenen Kreisbögen mit dem Radius R , der gleichfalls in der zu den Leitern orthogonalen Ebene A_z liegt, disjunkt zu \hat{K}_z ist und \hat{K}_z umschließt, dann folgt wegen $\text{rot}_z \mathbf{H} = 0$ aus dem Integralsatz von Stokes zunächst die Beziehung

$$\oint_{\hat{K}_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\check{K}_z(R)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}. \quad (35.42)$$

Aus den im Anschluss an Gleichung (35.8) eingeführten Voraussetzungen über das asymptotische Verhalten der Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ und \mathbf{B} einer TEM-Welle auf einer nichtkoaxialen Doppelleitung folgt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\check{K}_z(R)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (35.43)$$

und damit $\oint_{\hat{K}_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Wegen $\oint_{\hat{K}_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\bar{K}_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{K_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 0$ gilt die Beziehung (35.41) also auch für eine nichtkoaxiale Doppelleitung.

Bei einer reinen Gleichtakterregung verhält sich eine nichtkoaxiale Doppelleitung im Wesentlichen wie eine Einfachleitung (vgl. [264]). Auch bei einer Gleichtakterregung können sich auf einer solchen Doppelleitung TEM-Wellen ausbreiten. Allerdings genügen dann die korrespondierenden Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ und \mathbf{B} nicht den im Anschluß an Glg. (35.8) eingeführten Zusatzvoraussetzungen. Weil die Integrale zur Bestimmung der zugeordneten Spannungsverteilung bei Leitern mit unendlicher Leitfähigkeit divergieren, können die Ausbreitungsvorgänge von TEM-Wellen, die auf diese Art angeregt worden sind, nicht mit Leitungsgleichungen beschrieben werden.

Beispiel (2. Fortsetzung): Mit

$$\begin{aligned} u(z, t) &:= \int_{R_1}^{R_2} \frac{k_0 + \text{sgn}(v) Z_F g(z - vt)}{r} dr \\ &= (\ln(R_2/R_1)) (k_0 + \text{sgn}(v) Z_F g(z - vt)), \end{aligned} \quad (35.44)$$

$$\begin{aligned} i(z, t) &:= \int_0^{2\pi} \frac{g(z - vt)}{r} r d\alpha \\ &= 2\pi g(z - vt) \end{aligned} \quad (35.45)$$

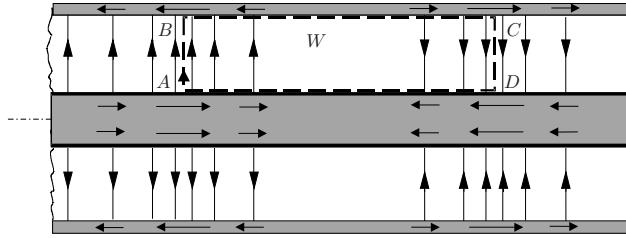


Abbildung 35.2. Koaxialkabel mit Feldlinien einer sinusförmigen TEM-Welle und orientiertem Weg W

wird den Feldern \mathbf{E} und \mathbf{H} einer TEM-Welle des in diesem Beispiel betrachteten Koaxkabels eine Spannungs- bzw. Stromverteilung zugeordnet.

Ein Vergleich von Gleichung (35.33) mit den Gleichungen (35.44) und (35.45) liefert für den Leistungsfluss durch die Fläche A_z die wichtige Beziehung

$$\int_{A_z^{\circ}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = u(z, \cdot) i(z, \cdot). \quad (35.46)$$

Gilt mit $v = +v_F$, $k_0 = 0$ und den positiven Konstanten $I_0 \in \mathbb{R}A$ und $\lambda \in \mathbb{R}m$ für alle $z \in \mathbb{R}m$ die Beziehung $g(z - v_F t) = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z - v_F t)\right)$, so breitet sich auf diesem Koaxkabel die in Abb. 35.2 skizzierte Sinuswelle mit der Wellenlänge λ in Richtung von \mathbf{e}_z aus.

Für den in Abb. 35.2 eingetragenen orientierten Weg W gilt die Beziehung

$$\oint_W \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (35.47)$$

Aus dem skizzierten Feldbild folgen die Beziehungen $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} > 0$ und $\int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} > 0$. Weil die Feldlinien des E-Feldes senkrecht auf den Leitern stehen, gilt die Beziehung $\int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Interpretiert man die beiden anderen Summanden auf der rechten Seite von (35.47) als Spannungen, dann können die so definierten Spannungen unmöglich eine Maschengleichung für den Umlauf erfüllen, der durch den orientierten Weg W definiert wird.

Weil $\partial_t \mathbf{B}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t)$ in der von W umschlossenen Fläche A_W wegen $\partial_t \mathbf{B}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) = -\frac{I_0 v_F}{r} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z - v_F t)\right)$ negativ ist, folgt diese Tatsache auch unmittelbar aus dem Induktionsgesetz, d.h. aus

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{A_W} \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (35.48)$$

Entsprechend sieht man sofort, dass für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}m$ mit $z_1 = \frac{\lambda}{4} \bmod \lambda$ und $z_2 - z_1 = \lambda/2$ die Leistungsströme $i(z_1, \cdot)$ und $i(z_2, \cdot)$ dieser Doppelleitung unmöglich einer Schnittgleichung $-i(z_1, \cdot) + i(z_2, \cdot) = 0$ für die in

Abb. 35.3 skizzierte geschlossene Hüllfläche A^H genügen können, weil diese Fläche zusätzlich zu den beiden Leitungsströmen von einem nichtverschwindenden Verschiebungsstrom durchsetzt wird. \square

Weiter unten werden wir einen allgemeingültigen Beweis für Gleichung (35.46) angeben.

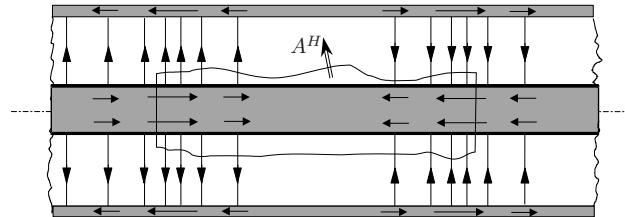


Abbildung 35.3. TEM-Welle und Kirchhoffsches Stromgesetz

Die vorangehenden Betrachtungen haben noch einmal verdeutlicht, dass die Verwendung der Begriffe Spannung und Strom zur Beschreibung der Wellenausbreitung auf Leitungen nicht ganz unproblematisch ist und dass der naive Umgang mit diesen Begriffen und den Kirchhoffschen Gesetzen sofort zu Widersprüchen führt.

Die Überlegungen zur Anwendbarkeit des Kirchhoffschen Spannungsge setzes zeigen zugleich, dass es bei einer Doppelleitung, auf der sich eine TEM-Welle ausbreitet, überhaupt nicht möglich ist, zwischen Punkten eines Leiters mit unterschiedlichen Längskoordinaten eine Spannung definieren, weil das entsprechende Linienintegral der elektrischen Feldstärke wegen rot $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \neq 0$ vom Weg abhängt (vgl. Abb. 35.4).

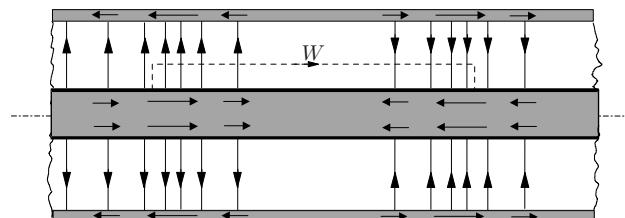


Abbildung 35.4. Zum Problem der Definition einer Spannung zwischen Punkten eines Leiters mit unterschiedlichen Längskoordinaten

Aus dieser Tatsache ergibt sich eine wichtige Konsequenz für die Analyse von Zusammenschaltungen realer Doppel- und Mehrfachleitungen mit anderen elektrischen Schaltungen: *Soll das Verhalten der Übertragungsleitungen einer solchen Zusammenschaltung mit Hilfe von Leitungsgleichungen beschrieben werden, so kann dies nur dann gelingen, wenn die Leitungen in einem gewissen Sinne symmetrisch sind.*

ben werden, so darf eine eventuell mehradrige Übertragungsleitung nur Schaltungsteile verbinden, zwischen denen keine weiteren leitenden Verbindungen bestehen. Mit anderen Worten: Alle zwischen zwei Schaltungsteilen vorhandenen leitenden Verbindungen müssen sich zu einer einzigen Mehrfachleitung zusammenfassen lassen. Ausnahmen von dieser Regel sind nur bei speziellen symmetrischen Schaltungsanordnungen möglich.

Gegeben sei nun wieder eine TEM-Welle auf Λ . Gegeben seien ferner $z_0 \in \mathbb{R}m$ und $t_0 \in \mathbb{R}s$. Dann wird für alle $z \in \mathbb{R}m$, alle $t \in \mathbb{R}s$ und alle Punkte (x, y, z_0) von A_z , die nicht im Innern der Leiterquerschnitte liegen, durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &:= \mathbf{E}(x, y, z_0, t_0), \\ \bar{\mathbf{D}} &:= \epsilon \bar{\mathbf{E}}, \quad \bar{\sigma} := \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{D}} | A\end{aligned}\tag{35.49}$$

ein transversales elektrostatisches Feld und durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &:= \mathbf{H}(x, y, z_0, t_0), \\ \bar{\mathbf{B}} &:= \mu \bar{\mathbf{H}}, \quad \bar{\mathbf{S}} := \mathbf{n} \times \bar{\mathbf{H}} | A\end{aligned}\tag{35.50}$$

ein transversales stationäres Magnetfeld auf Λ definiert. Anders ausgedrückt, setzt man die Feldkonfigurationen $\mathbf{E}(\cdot, \cdot, z_0, t_0)$ und $\mathbf{H}(\cdot, \cdot, z_0, t_0)$, die man aus den Momentanwerten erhält, die die Felder \mathbf{E} bzw. \mathbf{H} zur Zeit t_0 auf der Ebene A_{z_0} annehmen, auf Λ als zeitinvariante Felder nach rechts und links fort, so erhält man das E-Feld eines elektrostatischen Feldes bzw. das H-Feld eines stationären Magnetfelds.

Diese Behauptungen kann man sofort nachprüfen, indem man unter Berücksichtigung von $\partial_t \bar{\mathbf{B}} = 0$, $\partial_t \bar{\mathbf{D}} = 0$, $\text{rot}_z \bar{\mathbf{E}} = 0$ und $\text{rot}_z \bar{\mathbf{H}} = 0$ die so erhaltenen Felder in die Gleichungen (35.7) bzw. (35.8) einsetzt.

Die für feste Werte von z_0 und t_0 durch die Zuordnung $(x, y) \mapsto \varphi(x, y, z_0, t_0)$ definierte partielle Abbildung $\varphi(\cdot, \cdot, z_0, t_0) : A_{z_0}^\emptyset \rightarrow \mathbb{R}V$ der in Glg. (35.37) eingeführten Funktion φ liefert ein Skalarpotential für das von z und t unabhängige transversale Feld $\bar{\mathbf{E}}$. In Analogie dazu lässt sich für das von z und t unabhängige transversale Feld $\bar{\mathbf{B}}$ ein skalares Vektorpotential angeben, Einzelheiten siehe [241].

So einfach der Beweis dieser Aussagen ist, so wichtig sind sie für eine feldtheoretische Begründung der Leitungsgleichungen. Insbesondere rechtfertigten diese Aussagen die Verwendung der aus der Theorie der statischen bzw. stationären Felder stammenden Begriffe des Kapazitäts- bzw. Induktivitätsbelags zur Beschreibung der Ausbreitung von TEM-Wellen auf einer Doppelleitung.

Definieren die Felder \mathbf{E}, \mathbf{D} und σ ein elektrostatisches Feld auf Λ , dann ist $U := \int_{W_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ die zugehörige Spannung zwischen den Leitern und $Q' := \oint_{K_0} \sigma \, ds = \oint_{K_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{K_0} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{dr} \times \mathbf{e}_z) = \oint_{K_0} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{r}$ die pro Längeneinheit auf den Leitern von Λ gespeicherte Ladung. Definitionsgemäß besteht zwischen diesen Größen die Beziehung

$$Q' = C' U.\tag{35.51}$$

Definieren die Felder \mathbf{H} , \mathbf{B} und \mathbf{S} ein stationäres Magnetfeld auf Λ , dann ist $I := \int_{K_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$ der zugehörige Strom in den Leitern (vgl. (35.39)). Weil die Normalkomponente von \mathbf{B} auf den Leitern von Λ verschwindet und das B-Feld im Raum zwischen den Leitern quellenfrei ist, folgt aus dem Gaußschen Integralsatz für ebene Felder, dass der Wert von $\Phi' := \int_{W_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{W_0} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}) = \int_{W_0} (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_z) \cdot d\mathbf{r}$ nicht von der Form des gewählten Wegs W_0 abhängt. Die Größe Φ' ist der Wert des Magnetflusses pro Längeneinheit, der eine Fläche durchsetzt, die aus W_0 durch Parallelverschiebung entlang der z -Achse entstanden ist (vgl. Abb. 35.5). Definitionsgemäß besteht zwischen diesen Größen die Beziehung

$$\Phi' = L'I. \quad (35.52)$$

Beispiel (3. Fortsetzung): \mathbf{E} und \mathbf{H} seien die durch (35.31) gegebenen Feldstärcefelder einer TEM-Welle auf dem als Beispiel betrachteten Koaxkabel Λ . Mit (35.49), (35.50), $z_0 = 0$ und $t_0 = 0$ erhält man daraus die Felder

$$\bar{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) = \frac{k_0 + \operatorname{sgn} v Z_F g(0)}{r} \mathbf{e}_r, \quad \bar{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z), t) = \frac{g(0)}{r} \mathbf{e}_\alpha. \quad (35.53)$$

Diese Felder sind transversal, zeitinvariant, quellen- und wirbelfrei und genügen den entsprechenden Randbedingungen. Sie sind damit die Feldstärcefelder eines elektrostatischen Feldes bzw. eines stationären Magnetfeldes. Aus (35.53) erhält man mit

$$U = \int_{W_0} \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{r} = u(0, 0) = (\ln(R_2/R_1))(k_0 + \operatorname{sgn} v Z_F g(0)), \quad (35.54)$$

$$Q' = \oint_{K_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_r ds = 2\pi\epsilon(k_0 + \operatorname{sgn} v Z_F g(0)) \quad (35.55)$$

und

$$I = \oint_{K_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi g(0), \quad (35.56)$$

$$\Phi' = \int_{W_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\alpha ds = \mu \ln(R_2/R_1)g(0), \quad (35.57)$$

für C' bzw. L' die Werte

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(R_2/R_1)} \quad \text{bzw.} \quad L' = \frac{\mu \ln(R_2/R_1)}{2\pi}. \quad (35.58)$$

Offensichtlich genügen diese Werte der Bedingung

$$C'L' = \epsilon\mu. \quad \square \quad (35.59)$$

Wie wir noch zeigen werden, gilt die Beziehung (35.59) für beliebige Doppelleitungen, die den einleitend genannten Voraussetzungen genügen.

Mit den Gleichungen (35.49) und (35.50) ist ein Zusammenhang zwischen den Feldern einer TEM-Welle auf Λ und den in der Theorie der statischen und stationären Felder definierten Größen aufgedeckt worden. Die dort als Hilfsgrößen eingeführten Felder $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{S}}$ und $\bar{\sigma}$ können auch wieder eliminiert werden. Dann gilt mit

$$q'(z, t) := \oint_{K_z} \sigma(\mathbf{r}, t) \, ds = \oint_{K_z} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)) \cdot d\mathbf{r} \quad (35.60)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^m$ und $t \in \mathbb{R}^s$ die Beziehung

$$q'(z, t) = C' u(z, t). \quad (35.61)$$

Entsprechend gilt mit

$$\phi'(z, t) = \int_{W_z} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{W_z} (\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{e}_z) \cdot d\mathbf{r} \quad (35.62)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^m$ und $t \in \mathbb{R}^s$ die Beziehung

$$\phi'(z, t) = L' i(z, t). \quad (35.63)$$

Jetzt sind wir in der Lage, die folgende Aussage zu beweisen:

Sind $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{S}$ und σ die Felder einer TEM-Welle auf Λ und bezeichnet u bzw. i die zugeordnete Spannungs- bzw. Stromverteilung, so ist das geordnete Paar (u, i) eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \partial_z u &= -L' \partial_t i, \\ \partial_z i &= -C' \partial_t u. \end{aligned} \quad (35.64)$$

Das Gleichungssystem (35.64) wird als das *System der Leitungsgleichungen* für Λ bezeichnet.

Ausgangspunkt für den Beweis der ersten der in (35.64) zusammengefassten Gleichungen ist die Integralform

$$\oint_W \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{A_W} \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (35.65)$$

des Induktionsgesetzes. Mit den in Abb. 35.5 eingeführten Bezeichnungen erhält man aus

$$\begin{aligned} \oint_W \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{W_{z+h}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} - \int_{W_z} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \\ &= u(z + h, t) - u(z, t) = \int_z^{z+h} \partial_\zeta u(\zeta, t) \, d\zeta, \end{aligned} \quad (35.66)$$

für die linke Seite von (35.65) die Darstellung $\int_z^{z+h} \partial_\zeta u(\zeta, t) \, d\zeta$, wobei ∂_ζ die partielle Ableitung nach ζ bezeichnet. Mit

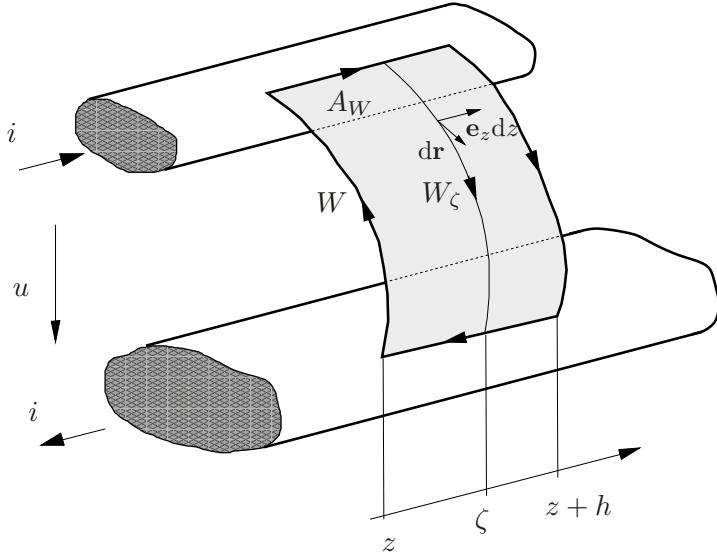


Abbildung 35.5. Bezeichnungen zur Anwendung des Induktionsgesetzes

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= (\mathbf{e}_z \times dr) dz = \mathbf{n} ds dz, \\ \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= \partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds dz \end{aligned} \quad (35.67)$$

erhält man wegen (35.62) und (35.63) über

$$\begin{aligned} - \int_{A_W} \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} &= - \int_z^{z+h} \int_{W_\zeta} \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} ds d\zeta \\ &= - \int_z^{z+h} L' \partial_t i(\zeta, t) d\zeta. \end{aligned} \quad (35.68)$$

für die rechte Seite von (35.65) den Term $- \int_z^{z+h} L' \partial_t i(\zeta, t) d\zeta$. Mit diesen Umformungen lässt sich (35.65) in der Form

$$\int_z^{z+h} (\partial_\zeta u(\zeta, t) + L' \partial_t i(\zeta, t)) d\zeta = 0. \quad (35.69)$$

schreiben. Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt die Existenz eines Zwischenwerts $\zeta_{zw} \in (0, h)$, mit dem aus der vorangehenden Gleichung die Beziehung

$$(\partial_\zeta u(\zeta_{zw}, t) + L' \partial_t i(\zeta_{zw}, t)) h = 0, \quad (35.70)$$

folgt. Aus dieser Gleichung erhält man dann nach Division durch h ($h \neq 0$) durch den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ wegen $z + h \rightarrow z$ und $\zeta_{zw} \rightarrow z$ die erste der Gleichungen aus (35.64).

Ausgangspunkt für den Beweis der zweiten der in (35.64) zusammengefassten Gleichungen ist die Integralform

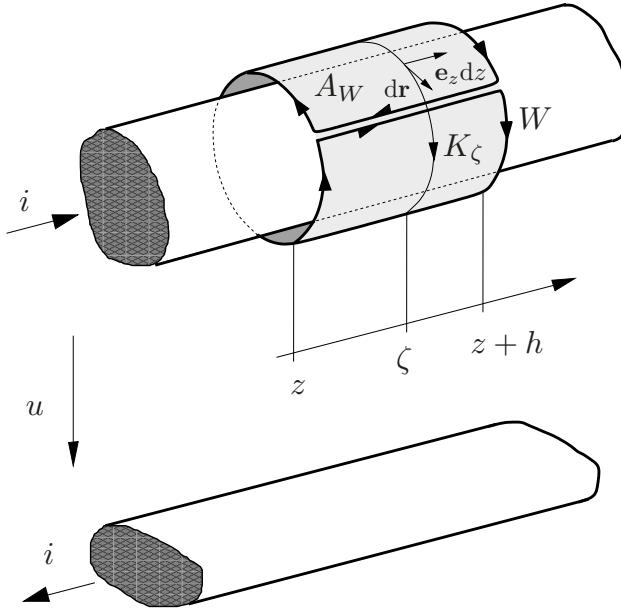


Abbildung 35.6. Bezeichnung zur Anwendung des Durchflutungsgesetzes

$$\oint_W \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_W} \partial_t \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} \quad (35.71)$$

des Durchflutungsgesetzes. Mit den in Abb. 35.6 eingeführten Bezeichnungen erhält man aus

$$\begin{aligned} \oint_W \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{K_{z+h}} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} - \int_{K_z} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \\ &= i(z+h, t) - i(z, t) = \int_z^{z+h} \partial_\zeta i(\zeta, t) d\zeta, \end{aligned} \quad (35.72)$$

für die linke Seite von (35.71) die Darstellung $\int_z^{z+h} \partial_\zeta i(\zeta, t) d\zeta$. Mit

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}) dz = -\mathbf{n} ds dz, \\ \partial_t \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} &= -\partial_t \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds dz \end{aligned} \quad (35.73)$$

erhält man wegen wegen (35.60) und (35.61) über

$$\begin{aligned} \int_{A_W} \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} &= - \int_z^{z+h} \int_{K_\zeta} \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} ds d\zeta \\ &= - \int_z^{z+h} C' \partial_t u(\zeta, t) d\zeta. \end{aligned} \quad (35.74)$$

für die rechte Seite von (35.71) den Term $-\int_z^{z+h} C' \partial_t u(\zeta, t) d\zeta$. Mit diesen Umformungen lässt sich (35.71) in der Form

$$\int_z^{z+h} (\partial_\zeta i(\zeta, t) + C' \partial_t u(\zeta, t)) d\zeta = 0 \quad (35.75)$$

schreiben. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert mit einem geeigneten Wert $\zeta_{zw} \in (0, h)$ die Beziehung

$$(\partial_\zeta i(\zeta_{zw}, t) + C' \partial_t u(\zeta_{zw}, t)) h = 0, \quad (35.76)$$

aus der man nach Division durch h ($h \neq 0$) durch den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ die zweite der Gleichungen aus (35.64) erhält.

In Ergänzung zu dem in Anschluss an Glg. (35.63) formulierten Satz kann zusätzlich bewiesen werden, dass bei hinreichend glatten Berandungen der Leiter zu jeder Lösung der Leitungsgleichungen für Λ eine TEM-Welle existiert, deren zugeordnete Spannungs- bzw. Stromverteilung gleich der Funktion u bzw. i ist. Eine Skizze der Beweisidee findet man weiter unten in Abschnitt 35.4.1, vgl. auch [240].

Weniger anschaulich, aber wesentlich kürzer ist ein anderer Beweis der Aussage, dass die einer TEM-Welle auf Λ zugeordneten Spannungs- und Stromverteilungen den Leitungsgleichungen (35.64) genügen, den man durch Integration der Gleichungen (35.15) und (35.17) über W_z bzw. K_z erhält.

Auf diese Weise erhält man aus (35.15) bzw. (35.17)

$$\begin{aligned} \partial_z \int_{W_z} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{W_z} (\mathbf{e}_z \times \partial_t \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{W_z} \partial_t \mathbf{B} \cdot (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}) \\ &= -\partial_t \int_{W_z} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (35.77)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \partial_z \int_{K_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{K_z} (\mathbf{e}_z \times \partial_t \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= + \int_{K_z} \partial_t \mathbf{D} \cdot (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}) \\ &= -\partial_t \int_{K_z} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds, \end{aligned} \quad (35.78)$$

woraus mit (35.62) und (35.63) bzw. (35.60) und (35.61) folgt, dass das Paar (u, i) dem System der Leitungsgleichungen genügt. Bei den an den Integralen auf der rechten Seite der Gleichungen (35.77) und (35.78) vorgenommenen Umformungen werden die in Abschn. 35.2.1 eingeführten Vereinbarungen zu den Beziehungen zwischen den Normalen- und Tangentenvektoren der Wege

W_z bzw K_z wesentlich verwendet.

Beispiel (4. Fortsetzung): Durch partielle Differentiation erhält man aus (35.44) und (35.45) mit $v \operatorname{sgn}(v) = v_F$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}\partial_z u(z, t) &= \operatorname{sgn}(v) Z_F \ln(R_2/R_1) g'(z - vt), \\ \partial_t u(z, t) &= -v_F Z_F \ln(R_2/R_1) g'(z - vt), \\ \partial_z i(z, t) &= 2\pi g'(z - vt), \\ \partial_t i(z, t) &= -2\pi v g'(z - vt),\end{aligned}\tag{35.79}$$

woraus sich mit $\operatorname{sgn}(v)/v = 1/v_F$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}\partial_z u(z, t) &= Z_F \ln(R_2/R_1) g'(z - v_F t) \\ &= -\frac{Z_F \ln(R_2/R_1)}{2\pi v_F} \partial_t i(z, t), \\ \partial_z i(z, t) &= 2\pi g'(z - vt) \\ &= -\frac{2\pi}{Z_F v_F \ln(R_2/R_1)} \partial_t u(z, t)\end{aligned}\tag{35.80}$$

ergeben. Wegen $Z_F/v_F = \mu_0$, $(Z_F v_F)^{-1} = \epsilon$ und $L' = \mu \ln(R_2/R_1)/2\pi$, $C' = 2\pi\epsilon/\ln(R_2/R_1)$ gilt schließlich

$$\partial_z u(z, t) = -L' \partial_t i(z, t), \quad \partial_z i(z, t) = -C' \partial_t u(z, t).\tag{35.81}$$

Damit ist gezeigt, dass ein geordnetes Paar bestehend aus der einer TEM-Welle auf diesem Koaxkabel zugeordneten Spannungs- und Stromverteilung stets auch eine Lösung der Leitungsgleichungen für dieses Koaxkabel ist. \square

Nunmehr sind wir auch in der Lage, zu zeigen, dass die Beziehung $L'C' = \epsilon\mu$ für beliebige Doppelleitungen gilt, die den am Beginn dieses Abschnitts zusammengestellten Voraussetzungen genügen. Außerdem soll an dieser Stelle ein allgemeiner Beweis von Glg. (35.46) nachgeholt werden.

Ausgehend von (35.19) und der analog gebildeten Gleichung $\partial_z \partial_z \mathbf{H} = \epsilon\mu \partial_t \partial_t \mathbf{H}$ erhält man durch Integration über W_z bzw. K_z die Beziehung

$$\partial_z \partial_z \int_{W_z} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \epsilon\mu \partial_t \partial_t \int_{W_z} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\tag{35.82}$$

bzw.

$$\partial_z \partial_z \int_{K_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \epsilon\mu \partial_t \partial_t \int_{K_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r},\tag{35.83}$$

woraus mit (35.36) und (35.39) die Gleichungen

$$\partial_z \partial_z u = \epsilon\mu \partial_t \partial_t u \quad \text{bzw.} \quad \partial_z \partial_z i = \epsilon\mu \partial_t \partial_t i\tag{35.84}$$

folgen.

Differenziert man die erste der Gleichungen (35.64) nach z und die zweite dieser Gleichungen nach t und eliminiert aus den so erhaltenen Gleichungen die gemischte Ableitung, so folgt aus (35.64) die Beziehung

$$\partial_z \partial_z u = L' C' \partial_t \partial_t u. \quad (35.85)$$

Analog erhält man aus (35.64) die Beziehung

$$\partial_z \partial_z i = C' L' \partial_t \partial_t i. \quad (35.86)$$

Gemäß Glg. (35.84), (35.85) und (35.86) sind die Funktionen u und i Lösungen strukturell gleichartiger Wellengleichungen, deren Koeffizienten $\epsilon\mu$, $L' C'$ bzw. $C' L'$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen festlegen. Weil sich diese Wellen nicht mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten können, gilt notwendigerweise die Beziehung

$$L' C' = C' L' = \epsilon\mu. \quad (35.87)$$

Die Gleichungen (35.85) und (35.86) sind die einfachsten Beispiele für die in Abschn. 35.1 erwähnten Telegraphengleichungen.

Der nachfolgende Beweis der Allgemeingültigkeit von Glg.(35.46) ist etwas trickreich, man vergleiche hierzu auch die Darstellung in [3].

Zunächst benötigen wir für diesen Beweis einen Spezialfall des Gaußschen Integralsatzes für ebene Felder. Der Einfachheit halber wollen wir diese Variante des Gaußschen Integralsatzes aus dem von der Integralform der Maxwellischen Gleichungen vertrauten Integralsatz von Stokes (siehe Anhang A) herleiten.

Gegeben sei ein zur z -Achse transversales Vektorfeld $\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0)$. Weiter sei A_z° ein ebenes, nicht notwendigerweise einfach zusammenhängendes Gebiet $A_z^\circ \subset A_z$, dessen Orientierung durch den Vektor \mathbf{e}_z festgelegt wird. W_z° bezeichne den dazu im Rechtsschraubensinn orientierten Rand. Dann gilt

$$\begin{aligned} \oint_{W_z^\circ} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{A_z^\circ} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \int_{A_z^\circ} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z dA \\ &= \int_{A_z^\circ} \operatorname{rot}_z \mathbf{F} dA. \end{aligned}$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt wegen $F_z = 0$ die Beziehung

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{F} = \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{e}_z).$$

Damit erhält man bereits die im folgenden benötigte Version

$$\int_{A_z^\circ} \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{e}_z) dA = \oint_{W_z^\circ} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (35.88)$$

des Gaußschen Integralsatzes für ebene Felder. (Drückt man das vektorielle Linienelement $d\mathbf{r}$ mit Hilfe des nach außen orientierten Normalenvektors \mathbf{n} aus, erhält man $\int_{A_z^\circ} \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{e}_z) dA = \oint_{W_z^\circ} (\mathbf{F} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{n} ds$. Mit $\mathbf{K} := \mathbf{F} \times \mathbf{e}_z$ erhält man die Standardversion $\int_{A_z^\circ} \operatorname{div} \mathbf{K} dA = \oint_{W_z^\circ} \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} ds$ dieses Integralsatzes.)

Das Integral

$$\int_{A_z^\circ} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{A_z^\circ} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z dA \quad (35.89)$$

beschreibt den Leistungsfluss der von einer TEM-Welle auf Λ durch die Ebene A_z transportierten Energie.

Mit der in Glg. (35.37) definierten Funktion φ kann man den Integranden auf der rechten Seite von (35.89) wie folgt umformen:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z = -(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} = +(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad}_2 \varphi.$$

Mit \mathbf{E} ist auch $\partial_t \mathbf{E}$ ein transversales Vektorfeld und damit auch $\partial_t \mathbf{D} = \epsilon \partial_t \mathbf{E}$. Aus Glg. (A.12) folgt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ &= 0 - \mathbf{e}_z \cdot \partial_t \mathbf{D} = 0, \end{aligned}$$

weil \mathbf{e}_z nicht von den Ortskoordinaten abhängt und die Beziehungen $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}$ und $\mathbf{e}_z \cdot \partial_t \mathbf{D} = 0$ gelten. Zusammen mit diesem Ergebnis liefert Glg. (A.11)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H})) &= \varphi \operatorname{div}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad}_2 \varphi \\ &= 0 + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad}_2 \varphi \\ &= (\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad}_2 \varphi \end{aligned}$$

Also gilt

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z = \operatorname{div}(\varphi(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H})).$$

Weil das Gebiet A_z° von den Kurven W_z und \bar{W}_z berandet wird, die aber entgegengesetzt zur Rechtsschraubenregel orientiert sind, erhält man zunächst die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{A_z^\circ} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z dA &= \int_{A_z^\circ} \operatorname{div}(\varphi(\mathbf{e}_z \times \mathbf{H})) dA \\ &= - \int_{A_z^\circ} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{H} \times \mathbf{e}_z) dA \\ &= - \oint_{-W_z} \varphi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{-\bar{W}_z} \varphi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \\ &= + \oint_{W_z} \varphi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{\bar{W}_z} \varphi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Während φ auf W_z überall gleich $u(z, \cdot)$ ist, hat φ auf \bar{W}_z überall den Wert null. Damit erhält man für das Integral aus Glg. (35.89) die Beziehung

$$\int_{A_z^\emptyset} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z \, dA = u(z, \cdot) \oint_{W_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r},$$

d.h.

$$\int_{A_z^\emptyset} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{e}_z \, dA = u(z, \cdot) i(z, \cdot), \quad (35.90)$$

was zu beweisen war.

Dieses Ergebnis ist von grundsätzlicher Bedeutung für das von der Maxwell'sche Theorie vermittelte physikalische Weltbild. Es zeigt, dass die von einer von einer TEM-Welle auf einer verlustfreien Leitung übertragene Energie im Dielektrikum zwischen den Leitern und *nicht* in den Leitern transportiert wird. Wird die endliche Leitfähigkeit realer Leiter berücksichtigt, so fließt die Energie im wesentlichen immer noch im Dielektrikum. Die dann an den Oberflächen der Leiter notwendigerweise auftretende Longitudinalkomponente des E-Feldes hat eine von null verschiedenen Normalkomponente des Poyntingschen Vektors zur Folge, mit der den Leitern die in ihrem Inneren in Wärme umgewandelte Energie zugeführt wird.

A. Sommerfeld ([264], S.117) schreibt hierzu: „Dieses Bild ist wesentlich verschieden von dem, was man sich populärerweise unter dem Energiehaushalt eines stromdurchflossenen Drahtes vorzustellen pflegt. Vom Maxwell'schen Standpunkt besteht aber kein Zweifel an der inneren Konsistenz und Zwangsläufigkeit unseres Bildes. Es zeigt den fundamentalen Wechsel, den die Maxwell'sche Theorie in den Begriffen Leiter und Nichtleiter gebracht hat: *Leiter sind Nichtleiter der Energie. Nur in den Nichtleitern wird die elektromagnetische Energie ohne Verlust transportiert;* in den Leitern wird sie zerstört, d.h. umgewandelt. Die Bezeichnung „Leiter“ und „Nichtleiter“ kennzeichnet nur ihr Verhalten gegenüber der *Ladung*; sie ist irreführend bezüglich ihres Verhaltens gegenüber der Energie.“

35.2.3 Konstruktion von Leitungsmodellen mit Differenzenformeln

Die einfachsten Netzwerkmodelle für verlustfreie Doppelleitungen erhält man direkt aus den Leitungsgleichungen, indem man in diesen Gleichungen die partiellen Ableitungen nach der Ortskoordinate durch Differenzenformeln ersetzt.

Zur Herleitung der erforderlichen Differenzengleichungen betrachten wir zunächst eine reellwertige differenzierbare Abbildung f eines endlichen oder unendlichen Intervalls I in die Menge der reellen Zahlen. Weiterhin sei $J \subseteq \mathbb{Z}$ eine endliche oder unendliche Teilmenge aufeinanderfolgender ganzer Zahlen und $(z_n)_{n \in J}$ sei ein Gitter äquidistanter Punkte z_n aus dem Intervall I . $\Delta z := z_n - z_{n-1}$ bezeichne die Schrittweite zwischen diesen Punkten. Bezeichnet f' die Ableitung von f , so erhält man mit

$$f_n = f(z_n) \quad \text{und} \quad f'_n \approx f'(z_n) \quad (35.91)$$

die folgenden Differenzenformeln

$$f'_{n-1} = \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta z}, \quad (35.92)$$

$$f'_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta z}, \quad (35.93)$$

$$\frac{1}{2}(f'_n + f'_{n-1}) = \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta z} \quad (35.94)$$

zur Berechnung von Näherungswerten für die Ableitungen von f an den diskreten Punkten z_n ($n \in J$). Diese Formeln werden in dieser Reihenfolge als *explizite* bzw. *implizite Eulerformel* bzw. als *Trapezregel* bezeichnet.

Ist das geordnete Paar (u, i) eine Lösung der Leitungsgleichungen von Λ , so liefern für jeden festgehaltenen Wert der Längskoordinate z die durch die Zuordnungen $t \mapsto u(z, t)$ und $t \mapsto i(z, t)$ definierten partiellen Abbildungen $u(z, \cdot)$ bzw. $i(z, \cdot)$ den zeitlichen Verlauf der Spannung bzw. des Stroms an der Stelle z . Ist nun $(z_n)_{n \in J}$ eine endliche oder unendliche Folge äquidistanter Punkte auf der z -Achse, so werden durch die Beziehungen

$$u_n := u(z_n, \cdot), \quad i_n := i(z_n, \cdot) \quad (35.95)$$

jeder Lösung der Leitungsgleichungen die Folgen

$$(u_n)_{n \in J} \quad \text{und} \quad (i_n)_{n \in J} \quad (35.96)$$

zugeordnet.

Mit Hilfe von Kombinationen der Differenzenformeln (35.92) bis (35.94) kann man aus den Leitungsgleichungen von Λ Systeme von Differenzengleichungen zur näherungsweisen Berechnung der Glieder dieser Folgen herleiten. Interpretiert man die so erhaltenen Systeme von Differenzengleichungen als Gleichungssysteme, die das Klemmenverhalten von Zweitoren beschreiben, so wird man auf eine Reihe unterschiedlicher Netzwerkmodelle für ein endliches Leitungssegment der Länge Δz geführt [73]. Durch Kettenschaltung von endlich oder abzählbar unendlich vielen solcher Netzwerkmodelle erhält man dann Netzwerkmodelle für endlich lange bzw. unendlich lange Leitungen.

Diskretisierung der Leitungsgleichungen mit der expliziten Eulerformel liefert

$$u_n - u_{n-1} = -(L' \Delta z) \partial_t i_{n-1}, \quad i_n - i_{n-1} = -(C' \Delta z) \partial_t u_{n-1}. \quad (35.97)$$

Von diesen Gleichungen ausgehend erhält man die in Abb. 35.7 dargestellte Netzwerkinterpretation für ein Leitungssegment der Länge Δz .

Diskretisierung der Leitungsgleichungen mit der impliziten Eulerformel liefert

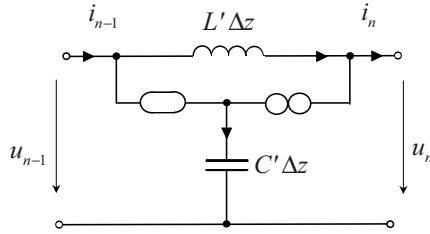


Abbildung 35.7. Leitungsmodell basierend auf der expliziten Eulerformel

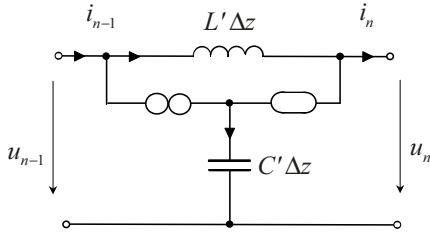


Abbildung 35.8. Leitungsmodell basierend auf der impliziten Eulerformel

$$u_n - u_{n-1} = -(L' \Delta z) \partial_t i_n, \quad i_n - i_{n-1} = -(C' \Delta z) \partial_t u_n. \quad (35.98)$$

Von diesen Gleichungen ausgehend erhält man die in Abb. 35.8 dargestellte Netzwerkinterpretation für ein Leitungssegment der Länge Δz .

Diskretisierung der Leitungsgleichungen mit einer Kombination aus expliziter und impliziter Eulerformel liefert

$$u_n - u_{n-1} = -(L' \Delta z) \partial_t i_{n-1}, \quad i_n - i_{n-1} = -(C' \Delta z) \partial_t u_n. \quad (35.99)$$

Von diesen Gleichungen ausgehend erhält man die in Abb. 35.9 dargestellte Netzwerkinterpretation für ein Leitungssegment der Länge Δz .

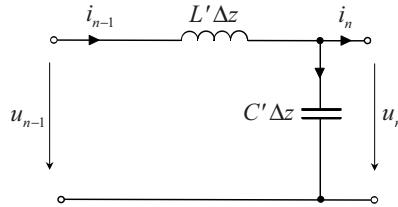


Abbildung 35.9. Leitungsmodell basierend auf einer Kombination aus expliziter und impliziter Eulerformel

Diskretisierung der Leitungsgleichungen mit einer Kombination aus impliziter und expliziter Eulerformel liefert

$$u_n - u_{n-1} = -(L' \Delta z) \partial_t i_n, \quad i_n - i_{n-1} = -(C' \Delta z) \partial_t u_{n-1}. \quad (35.100)$$

Von diesen Gleichungen ausgehend erhält man die in Abb. 35.10 dargestellte Netzwerkinterpretation für ein Leitungssegment der Länge Δz .

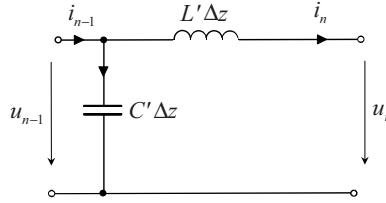


Abbildung 35.10. Leitungsmodell basierend auf einer Kombination aus impliziter und expliziter Eulerformel

Diskretisierung der Leitungsgleichungen mit der Trapezregel liefert

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= -\frac{1}{2}(L' \Delta z) (\partial_t i_n + \partial_t i_{n-1}), \\ i_n - i_{n-1} &= -\frac{1}{2}(C' \Delta z) (\partial_t u_n + \partial_t u_{n-1}). \end{aligned} \quad (35.101)$$

Von diesen Gleichungen ausgehend erhält man die in Abb. 35.11 dargestellte Netzwerkinterpretation für ein Leitungssegment der Länge Δz .

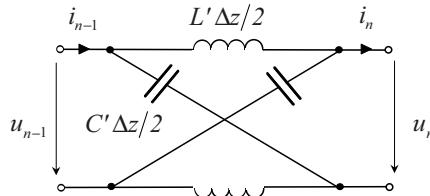


Abbildung 35.11. Leitungsmodell basierend auf der Trapezregel

Die in den Abbildungen 35.7 bis 35.10 dargestellten Realisierungen der Zweitorgleichungen (35.97) bis (35.100) lassen sich unmittelbar aus den definierenden Gleichungen ablesen. Die in Abb. 35.7 und Abb. 35.8 dargestellten Ersatzschaltungen sind erstmalig in [73] angegeben worden. Sie enthalten jeweils einen Nullator und einen Norator. Nullatoren und Noratoren wiederum sind erstmalig um 1960 in der netzwerktheoretischen Literatur untersucht worden [52, 53], vgl. auch [103, 242]. Um die in Abb. 35.11 angegebene Realisierung für die mit der Trapezregel gewonnenen Zweitorgleichungen zu verifizieren, empfiehlt es sich, die definierenden Gleichungen zunächst im Frequenzbereich in die Leitwertform zu überführen. Die zugehörige Leitwertmatrix zerfällt

dann auf natürliche Weise in die Summe zweier Leitwertmatrizen, von denen die eine zu einem induktiven und die andere zu einem kapazitiven Zweitor gehört. Die in den Abbildungen 35.9 bis 35.11 dargestellten Netzwerkmodelle sind verlustfrei. Das folgt u.a. aus der Tatsache, dass die Trapezregel und die paarweise Kombination aus expliziter und impliziter Eulerformel sogenannte *symplektische* Integrationsverfahren [245, 163] definieren.

Während Kettenbeschaltungen der in Abb. 35.9 und Abb. 35.10 dargestellten Netzwerke auf Tiefpassketten führen, liefert eine Kettenbeschaltung der in Abb. 35.11 dargestellten Netzwerke auf eine Kette aus Allpässen 1. Ordnung.

Es kann außerdem gezeigt werden [73], dass die Grenzfrequenz dieser Tiefpassketten im Sinne der Wellenparametertheorie mit der Stabilitätsgrenze [50, 57] der expliziten Eulerformel zusammenfällt.

Unabhängig von der Art der Herleitung haftet allen LC- und RLC-Modellen einer Übertragungsleitung der grundsätzliche Nachteil an, dass ihr Übertragungsverhalten durch gewöhnliche und nicht durch partielle Differentialgleichungen beschrieben wird. Deshalb können Laufzeiteffekte mit solchen Modellen prinzipiell nicht adäquat nachgebildet werden.

35.2.4 Ausblick: Mehrfachleitungen

Die Überlegungen aus den Abschnitten 35.2.1 und 35.2.2 lassen sich auf Mehrfachleitungen übertragen, die aus $n + 1$ parallelen, ideal leitenden, geraden Leitern mit konstantem Querschnitt bestehen, zwischen denen sich ein homogenes, ideal nichtleitendes, raumladungsfreies Dielektrikum befindet [240, 241, 220]. Werden die Felder der TEM-Wellen auf einer solchen Leitung wieder auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen, dessen z -Achse parallel zu den Leitern ist, dann können die Gleichungen für die feldtheoretische Beschreibung der Wellenausbreitung unverändert aus Abschn. 35.2.1 übernommen werden. Insbesondere gelten also die Gleichungen (35.15) bis (35.18).

Wieder wird einer der Leiter als Bezugsleiter ausgewählt. Die übrigen Leiter werden nun mit den Indizes 1 bis n und der Bezugsleiter mit dem Index 0 bezeichnet.

Zur Definition von Spannungen, Flüssen, Leiterströmen und Ladungen müssen hier für jeden der n Leiter in den Ebenen A_z gesonderte Wege eingeführt werden. Zu diesem Zweck wird der j -te Leiter ($j = 1, \dots, n$) in den Ebenen A_z ($z \in \mathbb{R}^m$) mit dem Bezugsleiter durch einen Weg $W_{z,j}$ verbunden, der vom j -ten Leiter zum Bezugsleiter orientiert ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird vorausgesetzt, dass sich die Wege $W_{z,j}$ und $W_{0,j}$ durch eine Parallelverschiebung entlang der z -Achse ineinander überführen lassen. Außerdem werden in jeder der Ebenen A_z paarweise disjunkte orientierte Wege $K_{z,j}$ ($j = 1, \dots, n$) eingeführt, wobei der Weg $K_{z,j}$ den in Richtung von \mathbf{e}_z orientierten Leiter j im Rechtsschraubensinn umschließt. Auch hier wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass sich für alle z und j

jeweils die Wege $K_{z,j}$ und $K_{0,j}$ durch eine Parallelverschiebung entlang der z -Achse ineinander überführen lassen. Außerdem müssen die in Abschn. 35.2.1 vereinbarten Beziehungen zwischen den Normalen- und Tangentenvektoren aller dieser Wege sinngemäß übertragen werden.

Aus (35.15) folgt, dass man dem E-Feld einer TEM-Welle auf einer solchen Mehrfachleitung in den zu den Leitern orthogonalen Ebenen A_z Spannungen zwischen den Leitern zuordnen kann. Für alle z und t werden die Spannungswerte $u_j(z, t)$ zwischen dem Leiter j ($j = 1, \dots, n$) und dem Bezugsleiter in einer $n \times 1$ -Spaltenmatrix $\mathbf{u}(z, t)$ zusammengefaßt. Analog zum Vorgehen in Abschn. 35.2.1 kann man jedem Leiter mit dem H-Feld einer solchen TEM-Welle für alle z und t einen Stromwert $i_j(z, t)$ zuordnen. Die Stromwerte der Leiter 1 bis n werden jeweils in einer $n \times 1$ -Spaltenmatrix $\mathbf{i}(z, t)$ zusammengefaßt. Auf diese Weise wird jeder TEM-Welle auf einer solchen Leitung die spaltenmatrixwertige Spannungs- bzw. Stromverteilung $\mathbf{u} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}V$ bzw. $\mathbf{i} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}A$ zugeordnet. Entsprechend kann man durch Integration der Normalkomponente des D- bzw. B-Feldes über $K_{z,j}$ bzw. $W_{z,j}$ für alle z und t ausgewählte Ladungs- bzw. Flusswerte pro Längeneinheit bestimmen.

Umhüllt der Bezugsleiter als Schirm die übrigen Leiter oder genügen die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ und \mathbf{B} den auf S. 8 angegebenen Zusatzvoraussetzungen, so kann wiederum gezeigt werden, dass die über alle Leiter einer solchen Mehrfachleitung gebildete Summe der Leiterströme verschwindet.

An die Stelle des Kapazitäts- bzw. Induktivitätsbelags einer Doppelleitung treten nun die entsprechenden $n \times n$ -Matrizen der längenbezogenen Kapazitäts- bzw. Induktivitätskoeffizienten \mathbf{C}' bzw. \mathbf{L}' . Diese Matrizen müssen bei einer Mehrfachleitung mit homogenen Dielektrikum der zu (35.87) analogen Beziehung

$$\mathbf{L}'\mathbf{C}' = \mathbf{C}'\mathbf{L}' = \epsilon\mu\mathbf{I} \quad (35.102)$$

genügen, wobei \mathbf{I} eine $n \times n$ -Einheitsmatrix bezeichnet.

Schließlich kann gezeigt werden, dass das geordnete Paar (\mathbf{u}, \mathbf{i}) bestehend aus der einer TEM-Welle zugeordneten Spannungs- und Stromverteilung stets Lösung der analog zu (35.64) gebildeten Leitungsgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_z \mathbf{u} &= -\mathbf{L}' \partial_t \mathbf{i}, \\ \partial_z \mathbf{i} &= -\mathbf{C}' \partial_t \mathbf{u} \end{aligned} \quad (35.103)$$

ist.

Die im Anschluss an (35.92) bis (35.94) skizzierte Herleitung von Netzwerkmodellen für Leitungsabschnitte der Länge Δz lässt sich sinngemäß auf den Fall der Mehrfachleitungen übertragen.

Setzt man die Existenz der Matrizen \mathbf{L}' und \mathbf{C}' voraus, so lässt sich auch der Beweis der zu (35.87) analogen Beziehung (35.102) aus Abschn. 35.2.2 übertragen. Einen auf der Theorie der ebenen Felder basierenden funktionentheoretischen Beweis dieser Identität findet man in [241].

35.2.5 Schlußbemerkung

In diesem Abschnitt ist die Beschreibung der Ausbreitung von TEM-Wellen auf verlustfreien Doppel- und Mehrfachleitungen ausgehend von [105, 106, 1, 292] konsequent auf der Basis der Maxwellschen Theorie entwickelt worden. Von den auf diese Weise gewonnenen Leitungsgleichungen sind wir Hilfe einfacher Differenzenformeln auf eine Reihe von Netzwerkmodellen für endliche Leitungsabschnitte geführt worden.

In den Standardlehrbuchdarstellungen wird dagegen zur Herleitung der Leitungsgleichungen für eine Doppelleitung in umgekehrter Richtung vorgegangen. Ausgangspunkt ist dort eine Kettenbeschaltung aus endlich oder abzählbar unendlichen vielen der in den Abb. 35.9 und Abb. 35.10 gezeigten LC-Glieder, aus der die Leitungsgleichungen dann durch mehr oder weniger fragwürdige „Grenzübergänge“ gewonnen werden, die sich mathematisch kaum rechtfertigen lassen. Die berechtigte Frage, ob die Ausbreitung elektromagnetischer Vorgänge auf einer Leitung überhaupt mit Hilfe der Begriffe Spannung und Strom und den Kirchhoffsschen Gesetzen beschrieben werden kann und weshalb die auf die Theorie der statischen bzw. stationären Felder zurückgehenden Begriffe des Kapazitäts- bzw. Induktivitätsbelags einer Leitung bei einer solchen Beschreibung der Wellenausbreitung überhaupt eine Rolle spielen, wird dabei in der Regel völlig übergangen.

35.3 Verlustbehaftete Doppelleitungen

35.3.1 Doppelleitungen mit verlustbehaftetem Dielektrikum

Bei realen Leitungen ist die Isolation zwischen den Leitern keineswegs ideal. Die Berücksichtigung dieser Verluste ist ein Schritt zur Verbesserung der Modellierung. Immerhin können sich auch auf Leitungen mit verlustbehaftetem Dielektrikum und ideal leitenden Leitern reine TEM-Wellen ausbreiten. Wegen der endlichen Leitfähigkeit des Dielektrikums muss bei der Beschreibung der Wellenausbreitung auf solchen Leitungen selbstverständlich neben der Flächenstromdichte \mathbf{S} auf den Leitern auch die Stromdichte \mathbf{J} im Dielektrikum berücksichtigt werden. Die elektromagnetischen Wellen auf solchen Leitungen werden deshalb durch die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{S}$ und σ beschrieben. Aus der Transversalität dieser Wellen folgt auch hier, dass die z -Komponenten von rot \mathbf{E} und rot \mathbf{H} verschwinden. Auf Grund dieser Tatsache ist es wiederum möglich, den TEM-Wellen einer solchen Leitung stationäre elektromagnetische Felder zuzuordnen. Auf diese Weise erhält man dann wieder eine Rechtfertigung für die Definition des einer TEM-Welle zugeordneten Spannungs- und Strombelags und eine Rechtfertigung für die Verwendung der Begriffe des Induktivitäts-, Kapazitäts- und Leitwertbelags bei der Beschreibung der Ausbreitung von TEM-Wellen auf solchen Leitungen.

Im Unterschied zu den verlustfreien Leitungen sind aber die auf diese Art konstruierten stationären Felder von der z -Koordinate abhängig.

Beispiel: Gegeben seien die Felder $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{S}$ und σ einer TEM-Welle auf einem Koaxialkabel mit ideal leitendem Innen- und Außenleiter und verlustbehafteten Dielektrikum mit der Leitfähigkeit σ . R_1 sei der Radius des Innenleiters und R_2 der Innenradius des Außenleiters. $(0, 0, z_0)$ sei ein Punkt auf der Achse des Innenleiters und t_0 ein beliebig gewählter Zeitpunkt.

Mit dem Leitwertbelag

$$G' := \frac{2\pi\kappa}{\ln(R_2/R_1)} \quad (35.104)$$

und den für jedes Wertepaar (z_0, t_0) definierten Größen

$$I_0 := \oint_{K_{z_0}} \mathbf{H}(x, y, z_0, t_0) \cdot d\mathbf{r}, \quad U_0 := \oint_{W_{z_0}} \mathbf{E}(x, y, z_0, t_0) \cdot d\mathbf{r}, \quad (35.105)$$

$$R_0 := \frac{U_0}{I_0} \quad (35.106)$$

werden dieser TEM-Welle mit den für alle z und t durch

$$\begin{aligned} \bar{E}_r(r, \alpha, z, t) &:= E_r(r, \alpha, z_0, t_0) = \frac{U_0}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r}, \\ \bar{S}_r(r, \alpha, z, t) &:= \sigma E_r(r, \alpha, z_0, t_0), \\ \bar{D}_r(r, \alpha, z, t) &:= \epsilon E_r(r, \alpha, z_0, t_0), \\ \bar{\sigma}(\alpha, z, t) &:= \sigma(\alpha, z_0, t_0) = D_r(R_1, \alpha, z_0, t_0), \end{aligned} \quad (35.107)$$

sowie

$$\begin{aligned} \bar{H}_\alpha(r, \alpha, z, t) &:= (1 - G'R_0(z - z_0)) H_\alpha(r, \alpha, z_0, t_0) \\ &= \frac{I_0 - G'U_0(z - z_0)}{2\pi r}, \end{aligned} \quad (35.108)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_\alpha(r, \alpha, z, t) &:= \mu B_\alpha(r, \alpha, z_0, t_0), \\ \bar{S}_z(\alpha, z, t) &:= H_\alpha(R_1, \alpha, z_0, t_0) \end{aligned}$$

definierten Feldkomponenten die Felder $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{J}}$ und $\bar{\sigma}$ eines transversalen stationären elektromagnetischen Feldes zugeordnet.

Zu diesem stationären Feld gehört die für alle z und t durch

$$\bar{U}(z, t) := U_0, \quad \bar{I}(z, t) := I_0 - G'U_0(z - z_0). \quad (35.109)$$

definierte Spannungs- bzw. Stromverteilung. \square

Unter den obigen Voraussetzungen kann die Herleitung der ersten der Gleichungen von (35.64) unverändert aus Abschn. 35.2.2 übernommen werden.

Bei der Herleitung der zweiten Gleichung des Systems der Leitungsgleichungen muss im Dielektrikum zwischen den Leitern zusätzlich zur Verschiebungstromdichte $\partial_t \mathbf{D}$ noch die Stromdichte $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$ berücksichtigt werden.

Mit den in Abb. 35.6 eingeführten Bezeichnungen erhält man aus

$$\oint_W \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_W} (\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{A} \quad (35.110)$$

mit

$$\begin{aligned} \oint_W \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{K_{z+h}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} - \int_{K_z} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \\ &= i(z+h, t) - i(z, t) = \int_z^{z+h} \partial_\zeta i(\zeta, t) d\zeta, \end{aligned} \quad (35.111)$$

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}) dz = -\mathbf{n} ds dz, \quad (35.112)$$

$$(\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{A} = -((\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n}) ds dz \quad (35.113)$$

und dem durch

$$G' := \int_{W_\zeta} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds \quad (35.114)$$

definierten Leitwertbelag die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{A_W} (\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{A} &= - \int_z^{z+h} \int_{W_\zeta} ((\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{n}) ds d\zeta \\ &= - \int_z^{z+h} (C' \partial_t u(\zeta, t) + G' u(\zeta, t)) d\zeta, \end{aligned} \quad (35.115)$$

d.h.

$$\int_z^{z+h} (\partial_\zeta i(\zeta, t) + C' \partial_t u(\zeta, t) + G' u(\zeta, t)) d\zeta = 0, \quad (35.116)$$

woraus mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung mit einem geeigneten Wert $\zeta_{zw} \in (0, h)$ die Beziehung

$$(\partial_\zeta i(\zeta_{zw}, t) + C' \partial_t u(\zeta_{zw}, t) + G' u(\zeta_{zw}, t)) h = 0$$

folgt, aus der man nach Division durch h ($h \neq 0$) durch den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ die Gleichung $\partial_z i = -C' \partial_t u - G' u$ erhält.

Insgesamt lässt sich also das Verhalten einer Doppelleitung mit verlustbehaftetem Dielektrikum und ideal leitenden Leitern durch das folgende System

$$\begin{aligned} \partial_z u &= -L' \partial_t i, \\ \partial_z i &= -C' \partial_t u - G' u \end{aligned} \quad (35.117)$$

von Leitungsgleichungen beschreiben.

35.3.2 Doppelleitungen mit verlustbehaftetem Dielektrikum und verlustbehafteten Leitern

Wenn sowohl die Verluste im Dielektrikum zwischen den Leitern als auch die endliche Leitfähigkeit der Leiter selbst berücksichtigt werden soll, so stößt man auf eine Reihe grundsätzlicher Schwierigkeiten. Wegen der endlichen Leitfähigkeit kann das E-Feld prinzipiell nicht mehr streng transversal sein. Streng genommen, ist es dann nicht einmal mehr möglich, Spannungen zwischen Punkten der Leiter zu definieren, die in einer zu den Leitern orthogonalen Ebene liegen. Wegen der endlichen Leitfähigkeit der Leiter dringen die Felder nunmehr in die Leiter ein. Vom stationären Sonderfall abgesehen, dringen die Felder gedämpft in die Leiter ein (Skineffekt), folglich gibt es im Innern der Leiter keine homogenen Stromdichteverteilungen. Eine originelle graphische Veranschaulichung dieses Vorgangs bei einer Zweidrahtleitung findet man in [165], S. 218. Eine vollständige Behandlung dieses Problems für Mehrfachleitungen, deren Leiter einen kreisförmigen Querschnitt haben, findet man in der Monographie [160], u.a. findet man dort auch Aussagen über die Konvergenz von Iterationsverfahren für die dabei zu lösenden nichtlinearen Gleichungssysteme. Wichtige Vorarbeiten zu diesem Problem sind vor mehr als hundert Jahren für den Spezialfall der Zweidrahtleitungen von [196] geleistet worden (vgl. auch [264]). Für den einfachsten aller Spezialfälle, das verlustbehaftete Koaxialkabel, findet man in [175] eine strenge Lösung, bei der unendliche Reihen aus Besselfunktionen wesentlich verwendet werden.

Ansonsten bleibt als Ausweg nur die Verwendung grober Näherungen, deren Auswirkungen sich leider vorher schlecht abschätzen lassen. Typische Näherungen dieser Art sind die Vernachlässigung des Skineffekts und die Annahme, dass die Beträge der axialen Feldkomponenten um mehrere Größenordnungen kleiner als die der transversalen Komponenten sind.

Vernachlässigung des Skineffekts bedeutet Annahme einer homogenen StromdichteVerteilung in den Leitern. Auch unter dieser Annahme ist die Bestimmung der nun hinzukommenden inneren Induktivität der Leiter im allgemeinen schwierig.

Wegen des Eindringens der Felder in die Leiter muss die Abb. 35.5 modifiziert werden. Im Unterschied zu Abb. 35.5 liegt in Abb. 35.12 jeweils ein Teil der Fläche A , die in Glg. (35.120) zur Berechnung des Magnetflusses gebraucht wird, im Innern der beiden Leiter. Der diese Teile durchsetzende Magnetfluss korrespondiert zu den inneren Induktivitäten der Leiter. Abgesehen vom Spezialfall eines Koaxialkabels ist es in der Regel kaum möglich, exakt festzulegen, wie groß diese Flächenteile gewählt werden müssen. Unabhängig davon sollte man sich aber stets vor Augen führen, dass der gesamten auf Gleichung (35.120) basierenden Herleitung bereits eine Reihe von mehr oder minder gut erfüllten Approximationsschritten vorangegangen ist.

Mit den in Abb. 35.12 eingeführten Bezeichnungen, den Beziehungen

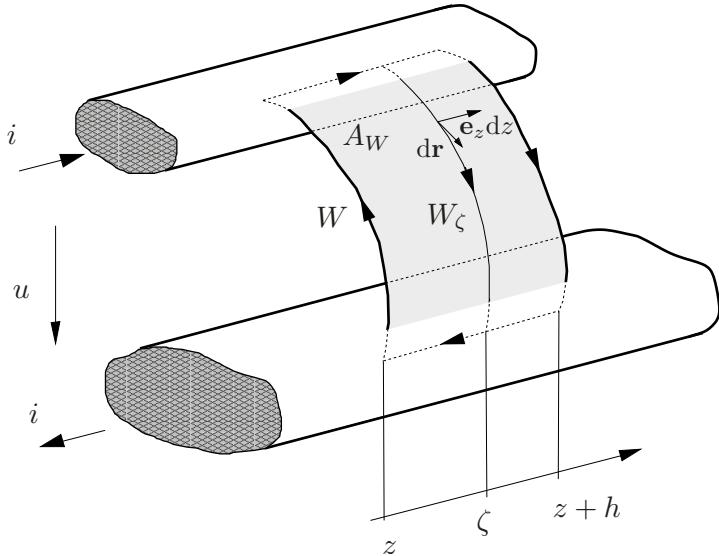


Abbildung 35.12. Bezeichnungen zur Anwendung des Induktionsgesetzes bei einer verlustbehafteten Doppelleitung

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= (\mathbf{e}_z \times d\mathbf{r}) dz = \mathbf{n} ds dz, \\ \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= (\partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) ds dz \end{aligned} \quad (35.118)$$

und dem durch

$$R' := \frac{1}{\kappa_1 A_0} + \frac{1}{\kappa_2 A_1} \quad (35.119)$$

definierten Widerstandsbelag, wobei A_0 bzw. A_1 den Querschnitt des Leiters 0 bzw. 1 bezeichnet, erhält man unter Berücksichtigung der soeben erwähnten Näherungen aus der Integralform

$$\oint_W \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{A_W} \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (35.120)$$

des Induktionsgesetzes mit den Umformungen

$$\begin{aligned} \oint_W \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{W_{z+h}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{W_z} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \left(\int_{W^{(0)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{W^{(1)}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) \\ &= u(z+h, t) - u(z, t) + \int_z^{z+h} \left(\frac{1}{\kappa_1 A_1} + \frac{1}{\kappa_2 A_2} \right) i(\zeta, t) d\zeta \\ &= \int_z^{z+h} (\partial_\zeta u(\zeta, t) + R' i(\zeta, t)) d\zeta \end{aligned} \quad (35.121)$$

und

$$\begin{aligned} - \int_{A_W} \partial_t \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= - \int_z^{z+h} \int_{W_\zeta} (\partial_t \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) ds d\zeta \\ &= - \int_z^{z+h} L' \partial_t i(\zeta, t) d\zeta, \end{aligned} \quad (35.122)$$

der linken bzw. rechten Seite dieser Beziehung die Gleichung

$$\int_z^{z+h} (\partial_\zeta u(\zeta, t) + R'i(\zeta, t) + L' \partial_t i(\zeta, t)) d\zeta = 0, \quad (35.123)$$

wobei das „ \approx “-Zeichen rigoros durch ein „=“-Zeichen ersetzt worden ist. In Glg. (35.121) sind die parallel zu den Achsen der Leiter 0 und 1 liegenden Teile von W mit $W^{(0)}$ und $W^{(1)}$ bezeichnet worden.

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhält man aus (35.123) durch Grenzübergang $h \rightarrow 0$ die Beziehung

$$\partial_z u = -L' \partial_t i - R'i \quad (35.124)$$

Mit den vereinbarten Näherungen kann die weiter oben für den Fall einer Doppelleitung mit verlustbehaftetem Dielektrikum und ideal leitenden Leitern angegebene Herleitung der Gleichung $\partial_z i = -C' \partial_t u - G'u$ übernommen werden.

Insgesamt lässt sich damit das Verhalten einer Doppelleitung mit verlustbehafteten Leitern und verlustbehaftetem Dielektrikum zumindest näherungsweise durch das auf Heaviside zurückgehende System

$$\begin{aligned} \partial_z u &= -L' \partial_t i - R'i, \\ \partial_z i &= -C' \partial_t u - G'u \end{aligned} \quad (35.125)$$

von Leitungsgleichungen beschreiben.

Die vier Parameter L' , C' , R' und G' der Heavisideschen Leitungsgleichungen (35.125) werden auch als *Leitungskonstanten* bezeichnet.

Differenziert man die erste bzw. die zweite der Gleichungen (35.125) nach z und die zweite bzw. die erste dieser Gleichungen nach t und eliminiert aus den so erhaltenen Gleichungen die gemischten Ableitungen, so wird man auf die allgemeine Form der *Telegraphengleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_z u &= L'C' \partial_t \partial_t u + (C'R' + G'L') \partial_t u + G'R'u, \\ \partial_z \partial_z i &= L'C' \partial_t \partial_t i + (C'R' + G'L') \partial_t i + G'R'i \end{aligned} \quad (35.126)$$

geführt. Gelegentlich werden aber auch die Leitungsgleichungen (35.125) als Telegraphengleichungen bezeichnet.

Wendet man auf die Leitungsgleichungen (35.125), wie in Abschn. 35.2.3 beschrieben, die Kombination aus expliziter und impliziter Eulerformel zur Diskretisierung der partiellen Ableitungen nach der Variablen z an, so wird man für Leitungsabschnitte der Länge Δz auf Netzwerkmodelle geführt, die

ähnlich zu den in Abb. 35.9 und Abb. 35.10 sind, bei denen aber zu den Induktivitäten ein Widerstand $R'\Delta z$ in Reihe und zu den Kapazitäten ein Leitwert $G'\Delta z$ parallel geschaltet ist.

Auch die Ausführungen aus Abschn. 35.2.4 über verlustbehaftete Leitungen lassen sich sinngemäß auf Mehrfachleitungen übertragen.

35.4 Lösung der Leitungsgleichungen im Zeitbereich

35.4.1 Wellenausbreitung auf verlustlosen Doppelleitungen

Gegeben sei die in Abb. 35.13 gegebene Anordnung. Beim Schließen des Schalters entsteht eine elektromagnetische Welle, die von der angeschlossenen Spannungsquelle ihren Ausgang nimmt und von den Leitungsdrähten geführt wird, ähnlich wie es in Abschn. 33 durch Abb. 33.2 dargestellt ist. Die Übergangsstellen zwischen Verschiebungsstrom und Leistungsstrom laufen mit einer Geschwindigkeit an den Drähten entlang, die ungefähr gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Einige Zeit nach dem Schalten ergibt sich daher ein Bild, wie es durch Abb. 35.13 veranschaulicht wird. Zwischen den beiden Leitungsdrähten baut sich ein elektrisches Feld auf, der Strom in den Leitungsdrähten liefert positive und negative Ladungen zum Wellenkopf (vgl. Abb. 35.14), gleichzeitig ist mit dem Fließen des Stromes ein magnetisches Feld verknüpft. Der Hauptteil der Energie beider Felder befindet sich in der unmittelbaren Umgebung der Leitungsdrähte.

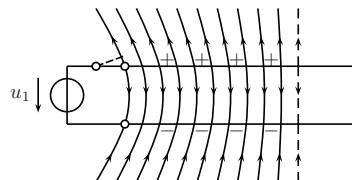


Abbildung 35.13. Feldlinien des E-Feldes und Stromverteilung nach Anschließen einer Spannungsquelle an eine Doppelleitung

Auch wenn sich nach dem Schließen des Schalters auf dieser Leitung in größerem Abstand von der erregenden Spannungsquelle eine nahezu transversale elektromagnetische Welle ausbreitet, so sind die elektrischen und magnetischen Felder dieser Welle in der unmittelbaren Umgebung der Spannungsquelle keineswegs transversal. Um den Randbedingungen an der komplizierteren geometrischen Struktur der Leiter in der Umgebung der Spannungsquelle und des Schalters zu genügen, lässt sich eine solche Welle mathematisch nur durch eine Überlagerung von unendlich vielen Wellenmoden beschreiben. Sind aber die Abstände zwischen den beiden Leitern hinreichend klein, so sind diese

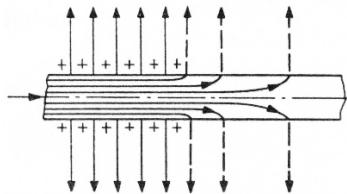


Abbildung 35.14. Übergang des Leitungsstroms in den Verschiebungsstrom an der Front der Welle an einem Leitungsdrähten

höheren Wellenmoden nicht ausbreitungsfähig, d.h., sie klingen in Ausbreitungsrichtung exponentiell gedämpft ab. Unter dieser Voraussetzung besteht die von der Spannungsquelle angeregte elektromagnetische Welle in genügend großem Abstand von der „Störung“ praktisch nur noch aus der Grundwelle.

Einschwingvorgänge können auf Übertragungsleitungen aber auch durch die Einwirkung externer elektromagnetischer Felder ausgelöst werden.

Ein klassisches Beispiel dieser Art sind die sogenannten Wanderwellen. Das sind Ausgleichsvorgänge, die durch die Änderung der atmosphärischen elektrischen Felder bei Blitzenladungen hervorgerufen werden. Die in den Gewitterwolken gespeicherten Ladungen verursachen Influenzladungen auf den Freileitungen. Da die Leitungsisolatoren endliche Übergangswiderstände haben, fließen die entgegengesetzten Ladungen über die Isolatoren nach der Erde ab, wie dies für eine negativ geladene Wolke durch Abb. 35.15 veranschaulicht wird. Ist der Gleichgewichtszustand erreicht, so haben die einzelnen Leiter der Leitung das gleiche Potenzial wie die Erdoberfläche, wenn man von der Betriebsspannung absieht, die man sich überlagert denken kann, und sind mit positiven Influenzladungen bedeckt, die durch die negativen Ladungen der Gewitterwolke im Gleichgewicht gehalten werden.

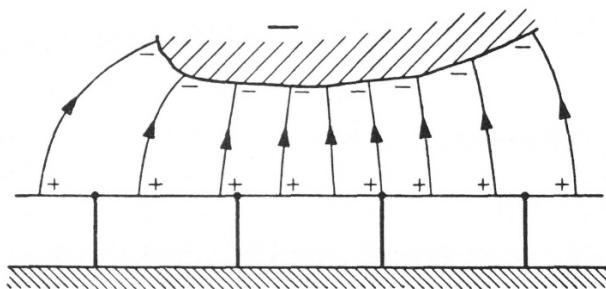


Abbildung 35.15. Feldlinien des E-Feldes zwischen Gewitterwolke und Freileitung

Entlädt sich die Wolke durch einen Blitz nach der Erde, so werden die positiven Ladungen der Leitung frei. Unmittelbar nach der Blitzenladung

ergibt sich die durch Abb. 35.16 veranschaulichte Verteilung der Ladungen. Die Feldlinien des D-Feldes verbinden nun die positiven Ladungen auf den einzelnen Leitern mit negativen Ladungen auf der Erdoberfläche.

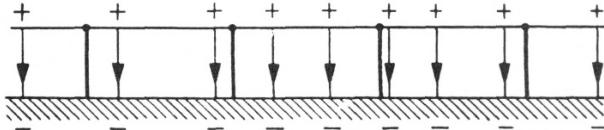


Abbildung 35.16. Feldlinien des E-Feldes nach Entladung der Wolke

Zu dieser ortsabhängigen Ladungsverteilung auf der Leitung gehört eine gleichfalls ortsabhängige Spannungsverteilung. Folglich kann die partielle Ableitung dieser Spannungsverteilung nach der Ortskoordinate nicht identisch verschwinden. Aus den Leitungsgleichungen folgt dann aber zwangsläufig, dass auch die Zeitableitung dieser Spannungsverteilung von null verschieden sein muss. Es ist deshalb zu erwarten, dass die auf den Leitern sitzenden Ladungen nach beiden Seiten abfließen. Mit dem Abfließen der Ladungen ergeben sich magnetische Felder, die sich der Ladungsbewegung hemmend entgegenstellen, so dass der Ausgleich der Ladungen nur mit einer bestimmten endlichen Geschwindigkeit erfolgen kann; die Felder breiten sich nach beiden Richtungen hin mit dieser Geschwindigkeit als *Wanderwellen* über die Leitung aus.

Diese intuitive Vorstellung soll nun genauer betrachtet werden. Es darf vorausgesetzt werden, dass sich die zeitliche Entwicklung der Ausgleichsvorgänge in guter Näherung durch lineare Gleichungen beschreiben lässt. Dementsprechend kann wieder von der überlagerten Betriebsspannung abgesehen werden. Außerdem wollen wir annehmen, dass die Abschlüsse der betrachteten Freileitung weit entfernt von den Gewitterwolken sind. Wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen bedeutet es deshalb keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir diese Freileitung als in beiden Richtungen unendlich lang ansehen. Für eine näherungsweise Beschreibung können wir schließlich die verschiedenen Leiter der gegebenen Freileitung zu einem einzigen Bündelleiter zusammenfassen. Mit der Erdoberfläche als Rückleiter kann die gesamte Anordnung nun als eine unendlich lange Doppelleitung aufgefasst werden. Vernachlässigen wir der Einfachheit halber auch noch die Verluste, so wird diese Leitung durch ihren Kapazitätsbelag C' und ihren Induktivitätsbelag L' bereits vollständig charakterisiert.

Gemäß Glg. (35.57) gehört zu der Ladungsverteilung $q^{(0)} : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{RA}s/m$, die sich auf dem Leiterbündel unmittelbar vor der Blitzentladung eingestellt hat, die durch $u^{(0)} := q^{(0)}/C'$ definierte Spannungsverteilung $u^{(0)} : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{RV}$. Wenn man annimmt, dass sich unmittelbar vor der Blitzentladung die auf der Leitung verteilten Influenzladungen im Gleichgewicht befunden haben, dann kann der Anfangswert $i^{(0)} : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{RA}$ der Stromverteilung auf der

Leitung in guter Näherung als verschwindend angenommen werden, d.h., für alle $z \in \mathbb{R}m$ wird $i^{(0)}(z) := 0$ gesetzt.

Damit haben wir das obengenannte Problem der Berechnung einer Wanderwelle auf die Lösung einer Anfangswertaufgabe für das System der Leitungsgleichungen (35.64) einer Doppelleitung zurückgeführt.

Die Lösung von Anfangswertaufgaben dieses Typs soll zunächst losgelöst von speziellen Beispielen diskutiert werden.

Gegeben sei eine verlustfreie, beidseitig unendlich lange Doppelleitung mit dem Induktivitätsbelag L' und dem Kapazitätsbelag C' . Gegeben seien ferner die Anfangswerte $u^{(0)} : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{R}V$ und $i^{(0)} : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{R}A$ für die Spannungs- bzw. Stromverteilung zur Zeit $t = t_0$. Gesucht sind stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}m \times [t_0, +\infty)s \rightarrow \mathbb{R}V$ und $i : \mathbb{R}m \times [t_0, +\infty)s \rightarrow \mathbb{R}A$, die den Leitungsgleichungen und den Anfangsbedingungen genügen, d.h., eine Lösung des resultierenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\partial_z u &= -L' \partial_t i, & \partial_z i &= -C' \partial_t u, \\ u(\cdot, t_0) &= u^{(0)}, & i(\cdot, t_0) &= i^{(0)}\end{aligned}\tag{35.127}$$

liefern.

Die Lösung der Leitungsgleichungen (35.127) soll zunächst durch eine Variablentransformation auf die Lösung eines entkoppelten Gleichungssystems zurückgeführt werden. Im Anschluss daran wird gezeigt, welchen Bedingungen ein geordnetes Paar von Lösungen der zugeordneten Telegraphengleichungen (35.85) und (35.86) genügen muss, damit es auch eine Lösung der Leitungsgleichungen ist.

Mit dem Wellenwiderstand $Z_L := \sqrt{L'/C'}$ und der Signalgeschwindigkeit $v_L := v_F = 1/\sqrt{L'/C'}$ lassen sich wegen $L'/Z_L = 1/v_L$ und $C'Z_L = 1/v_L$ die Leitungsgleichungen in (35.127) auch in der Form

$$\partial_z u = -v_L^{-1} \partial_t Z_L i, \quad \partial_z Z_L i = -v_L^{-1} \partial_t u \tag{35.128}$$

schreiben.

Durch Addition und Subtraktion der in dieser Form geschriebenen Leitungsgleichungen erhält man

$$\partial_z(u + Z_L i) = -v_L^{-1} \partial_t(u + Z_L i), \quad \partial_z(u - Z_L i) = +v_L^{-1} \partial_t(u - Z_L i). \tag{35.129}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die durch

$$a := u + Z_L i \quad \text{und} \quad b := u - Z_L i \tag{35.130}$$

definierten Funktionen $a, b : \mathbb{R}m \times [t_0, +\infty)s \rightarrow \mathbb{R}V$ Lösungen der entkoppelten partiellen Differentialgleichungen

$$v_L \partial_z a = -\partial_t a, \quad v_L \partial_z b = +\partial_t b \tag{35.131}$$

sein müssen.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen lässt sich (vgl. [112]) mit Hilfe zweier Funktionen $a^+, b^- : \mathbb{R}m \rightarrow \mathbb{R}V$ in der Form

$$a(z, t) = a^+(z - v_L t), \quad b(z, t) = b^-(z + v_L t) \quad (35.132)$$

darstellen. Es gilt also

$$(u + Z_L i)(z, t) = a^+(z - v_L t), \quad (u - Z_L i)(z, t) = b^-(z + v_L t). \quad (35.133)$$

Wegen (35.132) wird die Funktion a als eine *hinlaufende* und die Funktion b als eine *rücklaufende Spannungswelle* bezeichnet. Analog werden auch die Linearkombinationen $u + Z_L i$ und $u - Z_L i$ als hin- bzw. rücklaufende Spannungswellen bezeichnet.

Wiederum durch Addition und Subtraktion erhält man aus (35.133) die Darstellung

$$u = \frac{1}{2} (a + b), \quad i = \frac{1}{2Z_L} (a - b) \quad (35.134)$$

der allgemeinen Lösung der Leitungsgleichungen als Überlagerung einer hin- und einer rücklaufenden Welle, woraus mit (35.132) die Beziehungen

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \frac{1}{2} (a^+(z - v_L t) + b^-(z + v_L t)), \\ i(z, t) &= \frac{1}{2Z_L} (a^+(z - v_L t) - b^-(z + v_L t)) \end{aligned} \quad (35.135)$$

folgen.

Die Funktionen a^+ und b^- werden durch die Anfangsbedingungen (vgl. Glg. (35.127)) festgelegt.

Für $t_0 = 0$ gilt

$$a^+ := u^{(0)} + Z_L i^{(0)}, \quad b^- := u^{(0)} - Z_L i^{(0)}. \quad (35.136)$$

Für $t_0 \neq 0$ erhält man die Funktionen a^+ und b^- für alle $z \in \mathbb{R}m$ aus

$$\begin{aligned} a^+(z) &= (u^{(0)} + Z_L i^{(0)})(z - v_L t_0), \\ b^-(z) &= (u^{(0)} - Z_L i^{(0)})(z + v_L t_0). \end{aligned} \quad (35.137)$$

Im Sinne der Systemtheorie (vgl. Abschn. 2) kann man aus diesem Ergebnis eine Zustandsdarstellung des Verhaltens einer verlustfreien, unendlich langen Doppelleitung gewinnen. Das zugehörige System hat keinen Eingang, d.h., es ist ein autonomes System. Die Funktionen a und b sind die Zustandsgrößen. Die Gleichungen (35.131) sind die Zustandsgleichungen. Die Gleichungen (35.134) sind die Ausgangsgleichungen. Das Funktionenpaar $(u^{(0)}, i^{(0)})$ definiert den Anfangszustand $(u^{(0)} + Z_L i^{(0)}, u^{(0)} - Z_L i^{(0)})$ dieses Systems. Der Zustandsraum dieses Systems ist gleich der Menge aller Paare stetig differenzierbarer Funktionen, die auf $\mathbb{R}m$ definiert sind und Werte in $\mathbb{R}V$ annehmen, und ist damit ein unendlichdimensionaler linearer Raum.

Unendlichdimensionale Zustandsräume sind ein charakteristisches Merkmal *nichtkonzentrierter* (oder *verteilter*) Systeme.

Wie in Abschn. 35.2.2 gezeigt worden ist, liefert jede Lösung (u, i) der Leitungsgleichungen (35.64) auch eine Lösung der Telegraphengleichung (35.85) bzw. (35.86), falls u bzw. i eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist.

Sind umgekehrt u und i Lösungen von (35.85) bzw. (35.86), dann gibt es Funktionen u^+, u^-, i^+ und i^- , mit denen sich diese Lösungen in der Form

$$\begin{aligned} u(z, t) &= u^+(z - v_L t) + u^-(z + v_L t), \\ i(z, t) &= i^+(z - v_L t) + i^-(z + v_L t) \end{aligned} \quad (35.138)$$

darstellen lassen. Soll das geordnete Paar (u, i) dieser Lösungen auch eine Lösung des gekoppelten Systems der Leitungsgleichungen sein, so können die vier Funktionen u^+, u^-, i^+ und i^- nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden.

Einsetzen von (35.138) in (35.128) liefert

$$\begin{aligned} v_L \partial_z(u^+(z - v_L t) + u^-(z + v_L t)) &= -Z_L \partial_t(i^+(z - v_L t) + i^-(z + v_L t)) \\ &= -v_L Z_L \partial_z(-i^+(z - v_L t) + i^-(z + v_L t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_L Z_L \partial_z(i^+(z - v_L t) + i^-(z + v_L t)) &= -\partial_t(u^+(z - v_L t) + u^-(z + v_L t)) \\ &= -v_L \partial_z(-u^+(z - v_L t) + u^-(z + v_L t)). \end{aligned} \quad (35.139)$$

Wegen $\partial_t i^+(z - v_L t) = -v_L \partial_z i^+(z - v_L t)$, usf. erhält man aus (35.139) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_z(u^+ - Z_L i^+) + \partial_z(u^- + Z_L i^-) &= 0, \\ \partial_z(u^+ - Z_L i^+) - \partial_z(u^- + Z_L i^-) &= 0. \end{aligned} \quad (35.140)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich als ein homogenes lineares algebraisches Gleichungssystem in den Variablen $\partial_z(u^+ - Z_L i^+)$ und $\partial_z(u^- + Z_L i^-)$ auffassen. Weil die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ungleich null ist, kann dieses Gleichungssystem nur die durch

$$\partial_z(u^+ - Z_L i^+) = 0, \quad \partial_z(u^- + Z_L i^-) = 0 \quad (35.141)$$

festgelegte triviale Lösung haben.

Folglich liefert der Ansatz (35.138) nur dann eine Lösung des Systems (35.128) der Leitungsgleichungen, wenn die Linearkombinationen $u^+ - Z_L i^+$ und $u^- + Z_L i^-$ der Funktionen u^+ und i^+ bzw. u^- und i^- konstant sind, d.h., wenn es zwei Konstanten U_0^+ und U_0^- gibt, mit denen für alle z und t die Beziehungen

$$(u^+ - Z_L i^+)(z - v_L t) = U_0^+, \quad (u^- + Z_L i^-)(z + v_L t) = U_0^- \quad (35.142)$$

gelten.

Mit Hilfe dieser Darstellungen der Lösung der Leitungsgleichungen kann man eine wichtige Ergänzung zu der in Zusammenhang mit der Einführung der Leitungsgleichungen (35.64) in Abschn. 35.2.2 bewiesenen Aussage herleiten.

Ist Λ eine verlustfreie Doppelleitung, die den in Abschn. 35.2.1 angegebenen Voraussetzungen genügt, dann gibt es stets zeitinvariante transversale Felder $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{H}}$, die von der Ortskoordinate z unabhängig sind, mit denen sich jedes transversale elektrostatische E-Feld \mathbf{E} auf Λ in der Form

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}U \quad (35.143)$$

und jedes stationäre H-Feld \mathbf{H} auf Λ in der Form

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}I \quad (35.144)$$

darstellen lässt, wobei U die Spannung zwischen den Leitern und I den Strom in den Leitern von Λ bezeichnet.

Ist nun das geordnete Paar (u, i) eine Lösung der Leitungsgleichungen von Λ , so liefern die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}}u, & \mathbf{D} &= \epsilon \hat{\mathbf{E}}u, \\ \mathbf{H} &= \hat{\mathbf{H}}i, & \mathbf{B} &= \mu \hat{\mathbf{H}}i, \\ \mathbf{S} &= (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}|A) i, & \sigma &= (\epsilon \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}|A) u, \end{aligned} \quad (35.145)$$

wie man durch Einsetzen in die Gleichungen (35.15) bis (35.18) und (35.2) bis (35.6) sofort nachprüfen kann, eine elektromagnetische Welle, deren zugeordnete Spannungs- bzw. Stromverteilung gerade die Funktionen u bzw. i sind, von denen man bei der Konstruktion dieser Felder ausgegangen ist. Mit anderen Worten:

Für verlustfreie Doppelleitungen, die den Voraussetzungen aus Abschn. 35.2.1 genügen, liefern die Lösungen der zugehörigen Leitungsgleichungen eine adäquate Darstellung der Wellenausbreitung.

Beispiel: Für das in den Abschnitten 35.2.1 und 35.2.2 behandelte Beispiel erhält man die Felder $\hat{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{H}}$ mit $R_1 \leq r \leq R_2$, $0 \leq \alpha < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$ aus

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z)) &:= \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r, \\ \hat{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{r}}(r, \alpha, z)) &:= \frac{1}{2\pi r} \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \quad (35.146)$$

Außerdem erhält man für dieses Beispiel aus (35.44) und (35.45) für $v = \pm v_F$ ($v_F = v_L$) die Beziehungen

$$\begin{aligned} u^\pm(z \mp v_F t) &= \ln(R_2/R_1)(k_0 \pm Z_F g(z \mp v_F t)), \\ i^\pm(z \mp v_F t) &= 2\pi g(z \mp v_F t). \end{aligned} \quad (35.147)$$

Aus (35.147) folgt mit

$$Z_L = L'v_L = \frac{Z_F \ln R_2/R_1}{2\pi} \quad (35.148)$$

und

$$\begin{aligned} u^\pm(z \mp v_F t) \mp Z_L i^\pm(z \mp v_F t) &= \ln(R_2/R_1)(k_0 \pm Z_F g(z \mp v_F t)) \\ &\mp \frac{Z_F \ln(R_2/R_1)}{2\pi} 2\pi g(z \mp v_F t) \end{aligned} \quad (35.149)$$

die Beziehung

$$u^\pm(z \mp v_F t) \mp Z_L i^\pm(z \mp v_F t) = k_0 \ln(R_2/R_1). \quad (35.150)$$

Damit ist gezeigt, dass die in (35.44) und (35.45) zusammengefassten Lösungen der Leitungsgleichungen für dieses Koaxialkabel den Verträglichkeitsbedingungen (35.142) genügen. \square

Die in Glg. (35.130) und (35.134) eingeführte Variablentransformation liefert die Motivation für die durch die Zuordnungen

$$(u, i) \mapsto (a, b) := ((u + Z_L i), (u - Z_L i)) \quad (35.151)$$

und

$$(a, b) \mapsto (u, i) := \frac{1}{2}((a + b), Z_L^{-1}(a - b)) \quad (35.152)$$

definierte (nichtnormierte) *Heaviside-Transformation* (siehe z.B. [147]), auf der u.a. die *Streuparameterdarstellungen* des Klemmenverhaltens von Mehrtoren, viele wichtige Verfahren zur Netzwerksynthese [20, 104, 48] und eine Vielzahl messtechnischer Prinzipien der Höchstfrequenztechnik [318] basieren. Dividiert man die Terme auf der rechten Seite von (35.151) durch $\sqrt{Z_L}$, so wird man auf die auch in Abschn. 4.5 verwendete Standarddarstellung der Heaviside-Transformation geführt.

Kommen wir nun wieder zurück zu dem einleitend betrachteten Beispiel der Ausbreitung einer Wanderwelle.

Mit $t_0 = 0$ gilt wegen $i^{(0)} = 0$ die Beziehung $a^+ = b^- = u^{(0)}$. Die ursprünglich vorhandene Spannungsverteilung halbiert sich also, und die beiden Teile laufen in unveränderter Form mit der Geschwindigkeit v_L nach beiden Seiten hin über die Leitung. Dabei entsteht ein Strom, der in jeder Welle proportional der Spannung ist und dessen Richtung relativ zur Fortbewegungsrichtung in jeder Welle die gleiche ist. Die Abb. 35.17 veranschaulicht diesen Vorgang für eine Leitung aus zwei Drähten. Der Leistungsstrom schließt sich zwischen den Drähten als Verschiebungsstrom. Der Verschiebungsstrom (gestrichelt angedeutet) baut am Kopf jeder Welle das elektrische Feld auf, er hat also dort die gleiche Richtung wie die Verschiebungslinien (dünne Linien); er baut dagegen am Ende eines jeden Wellenzuges das elektrische Feld ab, hat dort die entgegengesetzte Richtung wie die Felder.

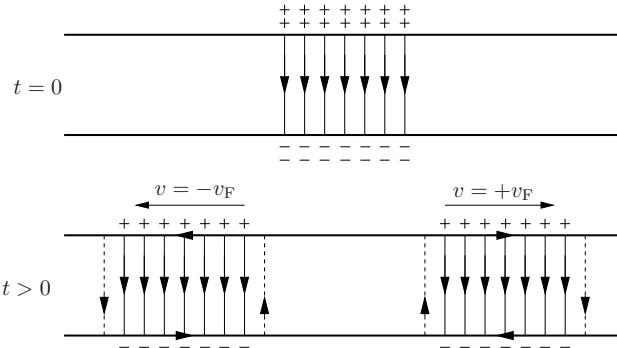


Abbildung 35.17. Abfließen der Ladungen

Falls die Leitung homogen und unendlich lang ist, setzt sich dieser Ausbreitungsvorgang unbegrenzt fort. Jede Ungleichmäßigkeit der Leitung aber spaltet die Welle auf in *weitergehende* oder *gebrochene* Wellen und *rückläufige* oder *reflektierte* Wellen. Auch die an die Leitungen angeschlossenen Geräte oder Maschinen unterbrechen die Gleichmäßigkeit der Leitung, ergeben also eine Zerlegung der auftreffenden Wellen. Die Gesetze dieser Aufspaltung sind dadurch gegeben, dass wegen der Stetigkeit der Feldenergie Spannung und Strom an der Stoßstelle stetig sein müssen.

Als Beispiel werde der Fall betrachtet, dass eine Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_1 und der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_1 an der Stelle $z = z_0$ an eine Leitung mit einem Wellenwiderstand Z_2 und einer Ausbreitungsgeschwindigkeit v_2 angeschlossen ist. Mit einer auf der gesamten z -Achse definierten differenzierbaren Funktion f_1 , die mit $z_+ < z_0$ für alle $z > z_+$ identisch verschwindet, sei für $z < z_0$ und $t < (z_0 - z_+)/v_L$ durch

$$u_1(z, t) = f_1(z - v_1 t), \quad i_1(z, t) = \frac{1}{Z_1} f_1(z - v_1 t), \quad (35.153)$$

eine in Richtung von \mathbf{e}_z auf die Stoßstelle laufende Welle gegeben. Dann erhält man für $z \geq z_0$ und $t \geq (z_0 - z_+)/v_L$ die Spannung u_1 und den Strom i_1 vor der Stoßstelle durch Hinzufügen einer reflektierten Welle f_r . Es ist also

$$\begin{aligned} u_1(z, t) &= f_1(z - v_1 t) + f_r(z + v_1 t), \\ i_1(z, t) &= \frac{1}{Z_1} (f_1(z - v_1 t) - f_r(z + v_1 t)). \end{aligned} \quad (35.154)$$

Hinter der Stoßstelle fließt eine gebrochene Welle weiter, die durch den Ansatz

$$\begin{aligned} u_2(z, t) &= f_g(z - v_2 t), \\ i_2(z, t) &= \frac{1}{Z_2} f_g(z - v_1 t) \end{aligned} \quad (35.155)$$

beschrieben werden soll.

Die Stetigkeitsbedingung fordert, dass an der Stoßstelle z_0 , die Beziehungen

$$u_1(z_0, t) = u_2(z_0, t) \quad \text{und} \quad i_1(z_0, t) = i_2(z_0, t), \quad (35.156)$$

d.h.

$$\begin{aligned} f_1(z_0 - v_1 t) + f_r(z_0 + v_1 t) &= f_g(z_0 - v_1 t), \\ f_1(z_0 + v_1 t) - f_r(z_0 + v_1 t) &= \frac{Z_1}{Z_2} f_g(z_0 - v_1 t). \end{aligned} \quad (35.157)$$

oder

$$\begin{aligned} f_r(z_0 + v_1 t) - f_g(z_0 - v_1 t) &= -f_1(z_0 - v_1 t), \\ Z_2 f_r(z_0 + v_1 t) + Z_1 f_g(z_0 - v_1 t) &= Z_2 f_1(z_0 + v_1 t) \end{aligned} \quad (35.158)$$

gelten müssen. Aus (35.158) folgt durch Auflösen

$$\begin{aligned} f_r(z_0 + v_1 t) &= \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} f_1(z_0 - v_1 t), \\ f_g(z_0 - v_1 t) &= \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} f_1(z_0 - v_1 t). \end{aligned} \quad (35.159)$$

Die *reflektierte* Welle f_r hat also in bezug auf die Laufrichtung die gleiche Form wie die einfallende Welle; ihre Amplitude unterscheidet sich von der der einfallenden Welle durch den Proportionalitätsfaktor

$$\rho := \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (35.160)$$

Die in Glg. (35.160) eingeführte Größe r wird als (*Spannungs-*)*Reflexionsfaktor* bezeichnet. Offensichtlich genügt r in Abhängigkeit von Z_1 und Z_2 der Ungleichung

$$-1 \leq \rho \leq +1. \quad (35.161)$$

Die beiden Grenzfälle ergeben sich bei gegebenem Wert von Z_1 mit $Z_1 \neq 0$ für $Z_2 = 0$ oder $Z_2 = \infty$ ist. Der erste Fall entspricht dem bei $z = z_0$ kurzgeschlossenen, der zweite dem bei $z = z_0$ offenen Leitungsende.

Setzt man in der ersten Gleichung von (35.159)

$$w := z_0 + v_1 t, \quad (35.162)$$

so ergibt sich

$$f_r(w) = \rho f_1(2z_0 - w). \quad (35.163)$$

Damit gilt

$$f_r(z + v_1 t) = \rho f_1(2z_0 - z - v_1 t), \quad (35.164)$$

und aus Gl. (35.154) folgt

$$\begin{aligned} u_1(z, t) &= f_1(z - v_1 t) + \rho f_1(2z_0 - z - v_1 t), \\ i_1(z, t) &= \frac{1}{Z_1} f_1(z - v_1 t) - \frac{r}{Z_1} f_r(2z_0 - z - v_1 t). \end{aligned} \quad (35.165)$$

Für den Fall des *offenen Leitungsendes*, d.h. für $\rho = 1$, wird in Abb. 35.18 die zeitliche Entwicklung der Spannungs- und Stromverteilung veranschaulicht. Bei sehr steiler Front der Welle kann sich, wie die Abbildung zeigt, nahezu eine Verdoppelung des Maximalwertes der Spannung ergeben. Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei *kurzgeschlossenem Leitungsende*, d.h. bei $\rho = -1$. Hier muss die Spannung für $z = z_0$ ständig null sein, während der Strom nahezu auf den doppelten Maximalwert ansteigen kann.

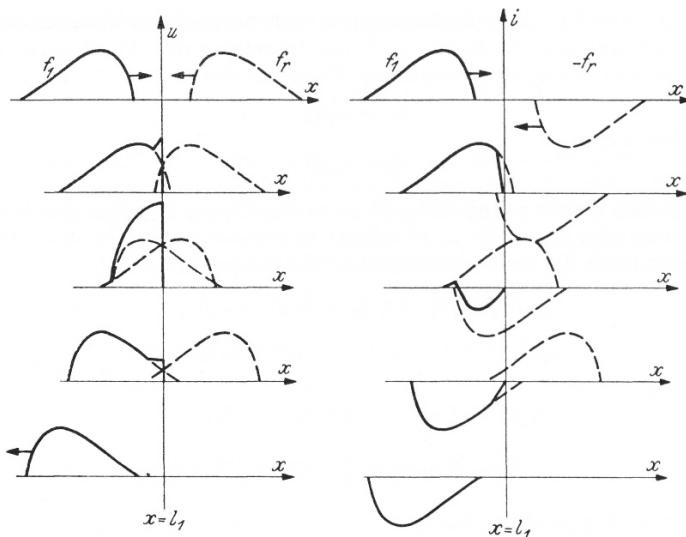


Abbildung 35.18. Reflexion einer Wanderwelle am offenen Leitungsende

Für die gebrochene Welle f_g ergibt sich bei Einführung des *Brechungsfaktors* oder *Transmissionsfaktors*

$$\tau := \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 1 + \rho \quad (35.166)$$

mit $w := z_0 - v_2 t$ die Beziehung

$$f_g(w) = \tau f_1 \left(z_0 - \frac{v_1}{v_2} z_0 + \frac{v_1}{v_2} w \right) \quad (35.167)$$

und aus Gl. (35.155) folgt

$$u_2(z, t) = f_g(z_0 - v_2 t) = \tau f_1 \left(z_0 - \frac{v_1}{v_2} z_0 + \frac{v_1}{v_2} w \right). \quad (35.168)$$

Im Gegensatz zur reflektierten Welle ergibt sich hier im allgemeinen, also abgesehen von dem durch die Bedingungen $Z_1 = Z_2$ und $v_1 = v_2$ definierten Trivialfall, auch eine Umbildung der Wellenform, bei der alle Längenabsmessungen der Welle im Verhältnis v_2/v_1 vergrößert werden. In Abb. 35.19 ist dies für den Fall $v_2 = 2v_1$ und $\rho = 1/2$, $\tau = 3/2$ dargestellt.

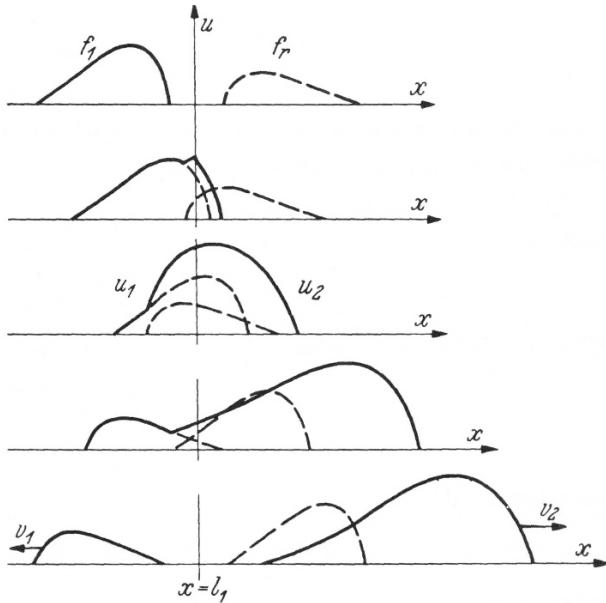


Abbildung 35.19. Übergang einer Wanderwelle an der Verbindungsstelle zweier Leitungen

Um die Werte der „gebrochenen“ Spannung zu finden, hat man alle von $z = z_0$ aus gemessenen Längenabschnitte von f_1 mit dem Faktor 2 und alle Ordinaten mit dem Faktor $3/2$ zu multiplizieren. Beim Übergang von einer Leitung mit niedrigem Wellenwiderstand zu einer Leitung mit hohem Wellenwiderstand, z. B. beim Übergang von einer Kabelleitung zu einer Freileitung, können die Spannungen der Wanderwellen nahezu verdoppelt werden.

Lässt sich der Abschluss einer Leitung durch ein lineares Netzwerk darstellen, so wird die Beziehung zwischen der Spannung u_2 und dem Strom i_2 am Leitungsende durch die Impedanz des Abschlusses bestimmt. Die Funktionen u_2 und i_2 müssen der sich daraus ergebenden Differentialgleichung und den beiden Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} f_1(z_0 - v_1 t) + f_r(z_0 + v_1 t) &= u_2(t), \\ f_1(z_0 + v_1 t) - f_r(z_0 + v_1 t) &= Z_1 i_2(t) \end{aligned} \quad (35.169)$$

an der Stelle $z = z_0$ genügen. Durch Addition und Subtraktion folgt aus (35.169)

$$\begin{aligned} u_2(t) + Z_1 i_2(t) &= 2f_1(z_0 - v_1 t), \\ f_r(z_0 + v_1 t) &= \frac{1}{2}u_2(t) - \frac{1}{2}Z_1 i_2(t). \end{aligned} \quad (35.170)$$

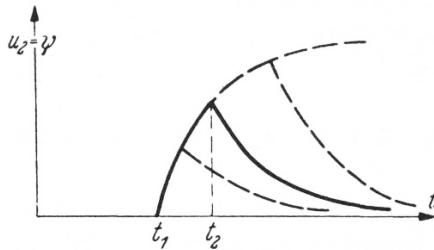


Abbildung 35.20. Einwirkung einer Wanderwelle auf einen Kondensator

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann der Verlauf von Spannung und Strom am Ende der Leitung berechnet werden.

Es sei z.B. die Leitung bei $z = z_0$ mit einem Kondensator der Kapazität C abgeschlossen. Dann gilt

$$i_2(t) = Cu'_2(t), \quad (35.171)$$

wobei u'_2 die Ableitung von u_2 bezeichnet. Setzt man diese Beziehung in die erste Gleichung von (35.170) ein, so folgt

$$u_2(t) + CZ_1 u'_2(t) = 2f_1(z_0 - v_1 t). \quad (35.172)$$

Man löst diese Gleichung durch den Ansatz

$$u_2(t) = F_1(t)F_2(t), \quad (35.173)$$

in dem F_1 und F_2 zunächst unbekannte Funktionen bedeuten. Es ergibt sich

$$F_1(t)F_2(t) + CZ_1 F'_1(t)F_2(t) + CZ_1 F_1(t)F'_2(t) = 2f_1(z_0 - v_1 t), \quad (35.174)$$

wobei F'_1 bzw. F'_2 die Ableitung von F_1 bzw. F_2 bezeichnet. Setzt man hier

$$F_1(t) = A_1 e^{-t/CZ_1}, \quad (35.175)$$

so folgt

$$CZ_1 A_1 e^{-t/CZ_1} F'_2(t) = 2f_1(z_0 - v_1 t) \quad (35.176)$$

oder durch Integration

$$F_2(t) = \frac{2}{CZ_1 A_1} \int_0^t e^{\tau/CZ_1} f_1(z_0 - v_1 \tau) d\tau + A_2. \quad (35.177)$$

Wurde der Kondensator im Zeitpunkt $t = 0$ ungeladen, so muss $A_2 = 0$ sein, und es wird

$$u_2(t) = \frac{2}{CZ_1} e^{-t/CZ_1} \int_0^t e^{\tau/CZ_1} f_1(z_0 - v_1 \tau) d\tau. \quad (35.178)$$

Hieraus kann man die Spannung u_2 und damit nach Glg. (35.171) den Strom i_2 und nach Glg. (35.170) die Funktion f_r ermitteln, wenn der Verlauf von f_1 , also der ankommenden Welle, bekannt ist. Besteht z.B. die ankommende Welle aus einem kurzen Rechteckimpuls, der im Zeitpunkt $t = t_1$ eintrifft, bis zum Zeitpunkt $t = t_2$ den konstanten Wert U hat und dann wieder auf Null abfällt, so gilt mit

$$\frac{2U}{CZ_1} e^{-t/CZ_1} \int_0^t e^{\tau/CZ_1} d\tau = 2U \left(1 - e^{-(t-t_1)/CZ_1} \right) \quad (35.179)$$

die Beziehung

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_1, \\ 2U \left(1 - e^{-(t-t_1)/CZ_1} \right) & \text{für } t_1 \leq t < t_2, \\ 2U e^{-t/CZ_1} \left(e^{t_2/CZ_1} - e^{t/CZ_1} \right) & \text{für } t \geq t_2. \end{cases} \quad (35.180)$$

Der Verlauf von u_2 ist in Abb. 35.20 für verschiedene Werte von t_2 dargestellt. Die Spitzenspannung am Leitungsende nähert sich der Höhe der Wanderwelle um so mehr, je länger die Wanderwellenimpulsbreite ist.

35.4.2 Leitungsmodelle zur Netzwerkanalyse im Zeitbereich

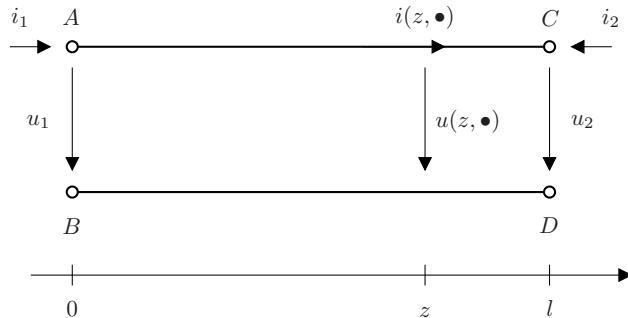


Abbildung 35.21. Doppelleitung der Länge l

Die vorangehend zusammengestellten Ergebnisse sollen nun zur Entwicklung von Netzwerkmodellen für endlich lange Leitungen herangezogen werden.

Wir beschränken uns dabei auf endlich lange Doppelleitungen, die jeweils zwei disjunkte Teile einer hier nicht näher spezifizierten Schaltung verbinden. Dann verhält sich ein solches Leitungsstück im Sinne der in Abschn. 4.5 eingeführten Definition wie ein Zweitor.

Netzwerktheoretische Modelle von Übertragungsleitungen werden vor allem mit dem Ziel entwickelt, elektrische Schaltungen, die Übertragungsleitungen enthalten, einheitlich mit den Mitteln der Netzwerktheorie beschreiben zu können. Zusätzlich erhofft man sich durch die Verwendung solcher Modelle bei der Simulation von Schaltungen, die Übertragungsleitungen enthalten, eine Daten- und Rechenaufwandsreduktion dadurch, dass man dann auf eine Berechnung der Spannungs- und Stromverteilungen auf den Leitungen verzichten kann (vgl. hierzu aber auch die Ausführungen am Ende dieses Unterabschnitts zu den Ergebnissen aus [252]).

Das einfachste Leitungsmodell erhält man, wenn man die in den elektrischen und magnetischen Feldern einer solchen Leitung gespeicherten Energien vernachlässigt und die Leiter der Doppelleitung im zugeordneten Netzwerkmodell jeweils durch eine widerstandslose Verbindung ersetzt. Dementsprechend wird dann die Leitung mit den in Abb. 35.21 eingeführten Bezeichnungen durch ein resistives Zweitor nachgebildet, dessen Spannungs-Strom-Relation in Matrizenschreibweise durch die Hybrid-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (35.181)$$

gegeben ist. Ein dazu äquivalentes Netzwerkmodell erhält man, wenn diese widerstandslosen Verbindungen „zusammengezogen“ werden, was bedeutet, dass mit den Bezeichnungen aus Abb. 35.21 Knoten *A* mit Knoten *C* und entsprechend Knoten *B* mit Knoten *D* identifiziert wird.

Die Verwendung derartig stark idealisierter Leitungsmodelle ist nur bei sogenannten elektrisch kurzen Leitungen sinnvoll. Eine Übertragungsleitung wird traditionell als *elektrisch kurz* bezeichnet, wenn ihre Länge klein gegenüber der Wellenlänge der höchsten zu übertragenden Signalfrequenz ist. Die so eingeführte „Kürze“ einer Leitung ist streng genommen gar keine echte Eigenschaft der betreffenden Leitung, denn sie hängt ja zusätzlich auch noch von der Frequenz der zu übertragenden Signale ab.

Eine einfache Überschlagsrechnung zeigt, dass auch eine 1cm lange Leitung bei einer genügend hohen Signalfrequenz durchaus als elektrisch lang angesehen werden muss. Betrachten wir einen Prozessor mit einer Taktrate von 3 GHz, nehmen wir an, dass die zu übertragenden Signale Frequenzen bis zur zehnten Oberwelle der Taktrate enthalten, so gehört zu dieser Frequenz bereits eine Vakuum-Wellenlänge von 1cm. Weil die Permittivität des Dielektrikums einer Übertragungsleitung größer als ϵ_0 sein wird, verkürzt sich die zugehörige Wellenlänge sogar.

Unter den in Abschn. 35.2.2 erläuterten Voraussetzungen lässt sich das Klemmenverhalten einer Doppelleitung zumindest näherungsweise durch die

miteinander verträglichen Randwerte der Lösungen der zugehörigen Leitungsgleichungen beschreiben. Eine notwendige Voraussetzung dafür ist die Annahme, dass die elektromagnetischen Wellen auf dieser Leitung nahezu transversal sind. Das bedeutet, dass man entweder die notwendigerweise nichttransversalen Anteile, die diese Wellen in der Umgebung der Anschlußstellen haben, vernachlässigt oder dass man diese Gebiete als Bestandteile der Abschlüsse auffasst.

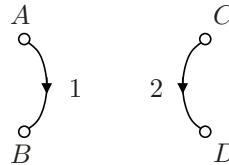


Abbildung 35.22. Graph für ein Branin- oder Heaviside-Modell einer Doppelleitung der Länge l

Generell lässt sich das Klemmenverhalten eines Zweitors durch ein Netzwerk darstellen, dessen Graph wie in Abb. 35.22 aus zwei einzweigigen Komponenten besteht. Bezeichnet man die Zweigspannungen und Zweigströme eines solchen Zweitors mit den Variablen u_1 und u_2 bzw. i_1 und i_2 , so kann die Spannungs-Strom-Relation dieses Zweitors durch die Menge aller geordneten Paare (\mathbf{u}, \mathbf{i}) von 2×1 -Spaltenmatrizen $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top$ bzw. $\mathbf{i} = (i_1, i_2)^\top$ dargestellt werden, für die das Viertupel (u_1, u_2, i_1, i_2) ein System miteinander verträglicher Zweigspannungen und -Ströme dieses Zweitors ist [237, 242, 243].

Beispielsweise lässt sich das Klemmenverhalten des durch Glg. (35.181) gegebenen Zweitors durch einen zweizweigigen idealen Übertrager mit dem Windungszahlverhältnis $w_1/w_2 = 1$ darstellen.

Gegeben sei nun eine verlustfreie Doppelleitung der Länge l mit dem Induktivitätsbelag L' und dem Kapazitätsbelag C' . Ein Netzwerk \mathcal{N} ist ein *Branin-Modell* für das Übertragungsverhalten dieser Doppelleitung [42], wenn sein Graph die in Abb. 35.22 gezeigte Struktur hat und seine Spannungs-Strom-Relation mit den in Abb. 35.21 eingeführten Bezugsrichtungen gleich der Menge aller geordneten Paare $((u_1, u_2)^\top, (i_1, i_2)^\top)$ ist, für die es eine Lösung (u, i) der Leitungsgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_z u &= -L' \partial_t i, \\ \partial_z i &= -C' \partial_t u\end{aligned}\tag{35.182}$$

gibt, die zusätzlich den Randbedingungen

$$\begin{aligned}u_1 &= u(0, \cdot), & i_1 &= +i(0, \cdot), \\ u_2 &= u(l, \cdot), & i_2 &= -i(l, \cdot)\end{aligned}\tag{35.183}$$

genügt.

Im Vergleich zu den konstitutiven Gleichungen, die die Spannungs-Strom-Relation eines RLC-Netzwerks darstellen, ist die Verhaltensbeschreibung des Branin-Modells einer verlustlosen Leitung relativ kompliziert. Während die Kopplung der Spannungen und Ströme eines RLC-Netzwerks durch ein Algebraidifferentialgleichungssystem dargestellt werden kann, in dem zu jedem Zeitpunkt t die Momentanwerte der Spannungen und Ströme und die ihrer Ableitungen miteinander verknüpft sind, wird diese Kopplung beim Branin-Modell einer Übertragungsleitung jeweils durch eine Lösung der zugehörigen Leitungsgleichungen vermittelt. Der Spannungs-Strom-Relation eines Branin-Modells genügen genau die Paare (\mathbf{u}, \mathbf{i}) , deren Elemente Randwerte einer solchen Lösung sind.

Die durch Glg. (35.133) gegebene Lösung der Leitungsgleichungen lässt sich heranziehen, um die Darstellung der definierenden Bedingungen der Spannungs-Strom-Relation eines Branin-Modells zu vereinfachen. Auf diese Weise lassen sich diese definierenden Bedingungen durch eine äquivalente Darstellung ersetzen, bei der jeweils die Momentanwerte der Größen u_1, u_2, i_1 und i_2 zu den Zeitpunkten t und $t - t_L$ durch ein lineares algebraisches Gleichungssystem miteinander verknüpft sind, wobei t_L wieder die Signallaufzeit auf der nachzubildenden Leitung bezeichnet. Um die Grundidee deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir uns dabei für die Zweigspannungen und Zweigströme des Branin-Modells auf Zeitfunktionen beschränken, die auf dem Intervall $[0, +\infty)$ definiert sind. Dementsprechend werden auch nur noch Lösungen der Leitungsgleichungen benötigt, die auf dem kartesischen Produkt $\mathbb{R}^m \times [0, +\infty)$ definiert sind.

In Analogie zu (35.133) gibt es dann zu jedem geordneten Paar $(\mathbf{u}, \mathbf{i}) = ((u_1, u_2)^\top, (i_1, i_2)^\top)$ von 2×1 -Spaltenmatrizen, das der Spannungs-Strom-Relation des Branin-Modells genügt, zwei Funktionen

$$a^+ : (-\infty, l] \rightarrow \mathbb{R}^V, \quad b^- : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^V, \quad (35.184)$$

mit der sich die zugehörige Lösung (u, i) von (35.182) in der Form

$$(u + Z_L i)(z, t) = a^+(z - v_L t), \quad (u - Z_L i)(z, t) = b^-(z + v_L t) \quad (35.185)$$

darstellen lässt. Mit den in Abb. 35.21 eingeführten Bezugsrichtungen folgen aus (35.183) und (35.185) die Beziehungen

$$\begin{aligned} (u_1 + Z_L i_1)(t) &= a^+(-v_L t), & (u_1 - Z_L i_1)(t) &= b^-(+v_L t), \\ (u_2 - Z_L i_2)(t) &= a^+(l - v_L t), & (u_2 + Z_L i_2)(t) &= b^-(l + v_L t) \end{aligned} \quad (35.186)$$

Mit der durch $t_L = l/v_L$ gegebenen Signallaufzeit auf der Leitung erhält man aus (35.186) mit einfachen Umformungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} (u_1 + Z_L i_1)(t - t_L) &= a^+(-v_L(t - t_L)), \\ (u_2 - Z_L i_2)(t) &= a^+(-v_L(t - t_L)), \end{aligned} \quad (35.187)$$

und

$$\begin{aligned}(u_1 - Z_L i_1)(t) &= b^- (+v_L t), \\ (u_2 + Z_L i_2)(t - t_L) &= b^- (+v_L t).\end{aligned}\quad (35.188)$$

Für $t \geq t_L$ kann man in (35.187) bzw. (35.188) die Terme $a^+(-v_L(t-t_L))$ bzw. $b^-(+v_L t)$ eliminieren. Für $0 \leq t < t_L$ kann man die Funktionswerte dieser Terme in Analogie zu Glg. (35.136) durch die Anfangsbelegung der Leitung mit Spannungs- und Stromwerten ausdrücken.

Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$(u_1 - Z_L i_1)(t) = \begin{cases} (u^{(0)} - Z_L i^{(0)})(v_L t) & \text{für } 0 \leq t < t_L, \\ (u_2 + Z_L i_2)(t - t_L) & \text{für } t \geq t_L, \end{cases} \quad (35.189)$$

$$(u_2 - Z_L i_2)(t) = \begin{cases} (u^{(0)} + Z_L i^{(0)})(l - v_L t) & \text{für } 0 \leq t < t_L, \\ (u_1 + Z_L i_1)(t - t_L) & \text{für } t \geq t_L, \end{cases} \quad (35.190)$$

denen die auf dem Intervall $[0, +\infty)m$ definierten Zweigspannungen und Zweigströme eines Branin-Modells genügen müssen.

An Hand der Darstellung der Spannungs-Strom-Relation des Branin-Modell durch die Gleichungen (35.189) und (35.190) kann man den entscheidenden Vorteil, den dieses Leitungsmodell gegenüber den in Abschn. 35.2.3 hergeleiteten LC-Kettenleitermodellen hat, sofort erkennen: Mit diesem Modell ist es möglich, die wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit unvermeidliche Verzögerung der übertragenen Signale wenigstens näherungsweise zu erfassen; das ist mit RLC-Modellen prinzipiell nicht möglich. Nicht erfasst werden mit dem Branin-Modell allerdings die durch die endliche Leitfähigkeit realer Leiter bedingte Dämpfung und die an einer realen Leitung zu beobachtende Signalverzerrung, die eine Folge der Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit sinusförmiger Wellen ist, die als *Dispersion* bezeichnet wird. Auch die Dispersion ist letztlich eine Folge der endlichen Leitfähigkeit realer Leiter. Sowohl die mit der endlichen Leitfähigkeit verbundenen Verluste als auch der dadurch bedingte Skineffekt tragen zur Dispersion bei.

Erste Ansätze zu diesen Gleichungen gehen auf Arbeiten von Bergeron und anderen Hydraulik-Ingenieuren aus den 1920er und 1930er Jahren zur Entwicklung von Verfahren zur Bestimmung der Druckstöße in den Rohrleitungen von Wasserkraftwerken zurück (s. z.B. [26, 27, 28, 101, 230]). Die Gleichungen (35.189) und (35.190) liefern die Grundlage für das inzwischen auch in der elektrotechnischen Literatur (vgl. [42, 118, 220, 224, 230, 282]) vielfach behandelte *Bergeron-Verfahren* zur Analyse von Zusammenschaltungen einer verlustfreien Doppelleitung mit linearen oder nichtlinearen Zweipolen. Im Anschluss an die Arbeit [42] von Branin, der über Jahrzehnte hinweg immer wieder wichtige Beiträge zum rechnergestützten Schaltungsentwurf geliefert hat, ist das durch diese Gleichungen definierte Netzwerkmodell in einer Vielzahl von Schaltkreis-Simulatoren eingesetzt worden [50, 220]. Eine aus rechentechnischer Sicht wichtige Eigenschaft des Branin-Modells ist die Tatsache, dass es

auf der Basis der Gleichungen (35.188) und (35.189) möglich ist, dieses Modell so zu implementieren, dass erforderliche numerischen Aufwand linear mit der Länge des Zeitintervalls wächst, auf dem die zu berechnenden Trajektorien definiert sind.

Für $t \in [0, t_L]$ lassen sich die Gleichungen (35.189) und (35.190) auch in der Form

$$\begin{aligned} u_1(t) &= Z_L i_1(t) + (u^{(0)} - Z_L i^{(0)})(v_{LT}), \\ u_2(t) &= Z_L i_2(t) + (u^{(0)} + Z_L i^{(0)})(l - v_{LT}), \end{aligned} \quad (35.191)$$

schreiben. Wie Glg. (35.191) zeigt, hat das Branin-Modell für $t \in [0, t_L]$ das gleiche Klemmenverhalten wie das in Abb. 35.23 dargestellte kopplungsfreie resistive Netzwerk. Insbesondere folgt für verschwindende Werte der Anfangsbelegungen $u^{(0)}$ und $i^{(0)}$ aus dem Branin-Modell einer verlustfreie Leitung, dass sich eine solche Leitung für $t \in [0, t_L]$ an den Enden wie ein linearer ohmscher Widerstand verhält, dessen Wert gleich dem des Wellenwiderstands dieser Leitung ist.

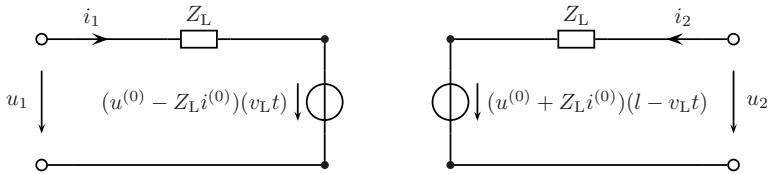


Abbildung 35.23. Äquivalentes Ersatzschaltbild eines Branin-Modells für $t \in [0, t_L]$

Auch für $t \geq t_L$ sind in den Gleichungen (35.189) und (35.190) nur Momentanwerte der Größen u_1, u_2, i_1 , und i_2 miteinander verknüpft. Weil in diesen Gleichungen dann aber Momentanwerte der Zeitfunktionen u_1, u_2, i_1 , und i_2 zu unterschiedlichen Zeitpunkten miteinander verknüpft sind, verhält sich das Branin-Modell für $t \geq t_L$ nicht mehr wie ein resistives Netzwerk und gehört damit zur Klasse der dynamischen Netzwerke.

In Anlehnung an die in Zusammenhang mit den Gleichungen (35.132) und (35.133) eingeführte Terminologie werden die Terme $(u_1 + Z_L i_1)$ und $(u_2 + Z_L i_2)$ als am Tor 1 bzw. 2 des Branin-Modells *einlaufende Spannungswellen* bezeichnet. Entsprechend werden die Terme $(u_1 - Z_L i_1)$ und $(u_2 - Z_L i_2)$ als am Tor 1 bzw. 2 des Branin-Modells *auslaufende Spannungswellen* bezeichnet. Durch die Wahl symmetrischer Bezugsrichtungen für die Zweigspannungen und Zweigströme des Branin-Modells ist die Definition der ein- und auslaufenden Spannungswellen unabhängig von der willkürlich gewählten Zuordnung der Indizes 1 und 2 zu den Enden der Leitung.

Mit diesen Bezeichnungen folgt aus den Gleichungen (35.189) und (35.190), dass für $t \geq t_L$ der Momentanwert der am Tor 1 bzw. 2 auslaufenden Spannungswelle zur Zeit t gleich dem Momentanwert der um die Signallaufzeit t_L verzögerten einlaufenden Spannungswelle am Tor 2 bzw. 1 zu diesem Zeitpunkt ist.

Für $t \in [0, t_L]$ werden die Momentanwerte der an diesen Toren auslaufenden Spannungswellen durch die auf dem Intervall $[0, l]$ definierten Anfangswerte der Spannungs- und Stromverteilung auf der Leitung festgelegt. Weil diese Anfangswerte wiederum zu Punkten in einem unendlichdimensionalen Zustandsraum korrespondieren, ist das Branin-Modell einer verlustlosen Doppelleitung der Länge l ein typisches Beispiel für ein nichtkonzentriertes Netzwerk.

Im Vergleich zu den in Abschn. 35.2.3 behandelten LC-Kettenleitermodellen für eine verlustlose Leitung liefert das Branin-Modell wesentlich bessere Nachbildungen der Signalverläufe. Insbesondere bei steilen Signalflanken liefern LC-Kettenleitermodelle völlig unrealistische, lang anhaltende oszillierende Nachläufer, s. z.B. [50, 251].

Ein Nachteil des Branin-Modells ist selbstverständlich die Tatsache, dass mit diesem Modell die Verluste und die Dispersion einer realen Leitung nicht nachgebildet werden können.

Die am Schluss des Abschnitts 35.3 erwähnten RLC-Kettenleitermodelle, die man aus den Leitungsgleichungen (35.125) durch Diskretisierung der partiellen Ableitungen nach der Ortskoordinate mit einer Kombination aus expliziter und impliziter Euler-Formel erhält, haben bei der Berechnung von Einschwingvorgängen mit steilen Flanken die gleichen Nachteile wie die soeben erwähnten verlustlosen LC-Kettenleitermodelle.

Es liegt deshalb nahe, das Branin-Modell durch in Kette geschaltete resistive Dämpfungsglieder und eventuell weitere in Kette geschaltete impulsformende RLC-Netzwerke zu ergänzen oder durch alternierende Kettenschaltungen aus Branin-Modellen, Dämpfungsgliedern und impulsformenden Netzwerken zu ersetzen, um mit einem auf diese Weise modifizierten Modell auch die Dämpfung und Dispersion realer Leitungen (möglichst unter Einschluss des Skineffekts) nachbilden zu können, vgl. z.B. [110, 111, 91, 95, 274, 275, 122] und [94].

Zur Nachbildung der Verluste einer realen Leitung kann man aber ein Netzwerkmodell auch auf der Basis der auf Heaviside zurückgehenden Leitungsgleichungen (35.125) konstruieren. In Analogie zur Definition des Branin-Modells durch den in Abb. 35.22 gegeben Graphen und seiner durch die Gleichungen (35.182) und (35.183) beschriebenen Spannungs-Strom-Relation lässt sich die Definition eines solchen Modells sofort hinschreiben:

Gegeben sei eine verlustbehaftete Doppelleitung endlicher Länge l mit den Leitungskonstanten L', C', R' und G' (vgl. Abb. 35.21). Ein Netzwerk \mathcal{N} ist ein *Heaviside-Modell* für das Übertragungsverhalten dieser Doppelleitung, wenn sein Graph die in Abb. 35.22 gezeigte Struktur hat und seine Spannungs-Strom-Relation mit den in Abb. 35.21 eingeführten Bezugsrich-

tungen gleich der Menge aller geordneten Paare $((u_1, u_2)^\top, (i_1, i_2)^\top)$ ist, für die es eine Lösung (u, i) der Leitungsgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_z u &= -L' \partial_t i - R'i, \\ \partial_z i &= -C' \partial_t u - G'u\end{aligned}\quad (35.192)$$

gibt, so dass die Beziehungen

$$\begin{aligned}u_1 &= u(0, \cdot), & i_1 &= +i(0, \cdot), \\ u_2 &= u(l, \cdot), & i_2 &= -i(l, \cdot)\end{aligned}\quad (35.193)$$

gelten.

Leider lassen sich die Gleichungen (35.125) nicht mit einem so einfachen Ansatz wie im Fall der verlustfreien Leitungen lösen.

Auf alle Fälle wird man erwarten, dass die Lösungen dieser Gleichungen durch die Leitungsverluste abklingen werden. Es liegt dann nahe, einen Ansatz der Form

$$u(z, t) = e^{-\delta t} v(z, t), \quad i(z, t) = e^{-\delta t} j(z, t) \quad (35.194)$$

auszuprobieren, wobei δ ein geeignetes positives Element aus $\mathbb{R}s^{-1}$ ist.

Setzt man (35.194) in die Gleichungen (35.125) ein, so erhält man nach Division durch den Term $e^{-\delta t}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\partial_z v &= -L' \partial_t j - (R' - \delta L')j, \\ \partial_z j &= -C' \partial_t v - (G' - \delta C')v,\end{aligned}\quad (35.195)$$

dem die Funktionen v und j genügen müssen. Das so erhaltene Gleichungssystem ist i.a. vom gleichen Typ wie das Ausgangsgleichungssystem (35.125). Genügen jedoch die Parameter L' , C' , R' und G' der Bedingung

$$R'C' = G'L', \quad (35.196)$$

und setzt man

$$\delta := \frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'}, \quad (35.197)$$

so erhält man aus (35.195) die Gleichungen

$$\partial_z v = -L' \partial_t j, \quad \partial_z j = -C' \partial_t v. \quad (35.198)$$

Dieses Gleichungssystem ist nun aber vom Typ der Leitungsgleichungen einer verlustfreien Doppelleitung.

Für verlustbehaftete Leitungen, deren Parameter der Bedingung (35.196) genügen, liefert der Ansatz (35.194) mit $\delta = R'/L'$ die exakte Lösung. Auf diesen, schon Heaviside bekannten Spezialfall lassen sich die obigen Ergebnisse sofort übertragen.

Bei verlustbehafteten Leitungen, deren Parameter der Bedingung (35.196) genügen, werden die übertragenen Signale in Abhängigkeit von der Zeit zwar exponentiell gedämpft, ihre Kurvenform wird aber nicht geändert. Aus diesem Grunde werden solche Leitungen als *verzerrungsfrei* bezeichnet.

Mit

$$Z_0 := \sqrt{L'/C'}, \quad v_0 := 1/\sqrt{L'C'}, \quad t_0 := l/v_0, \quad \delta_0 := R'/L' \quad (35.199)$$

$$u(z, 0) = e^0 v(z, 0) = u^{(0)}(z), \quad i(z, 0) = e^0 j(z, 0) = i^{(0)}(z), \quad (35.200)$$

$$v_1(t - t_0) = e^{\delta_0(t-t_0)} u_1(t - t_0), \quad j_1(t - t_0) = e^{\delta_0(t-t_0)} i_1(t - t_0) \quad (35.201)$$

und den entsprechenden Beziehungen für $v_2(t - t_0)$ und $j_2(t - t_0)$ erhält man dann aus den Gleichungen (35.189) und (35.190) für die Spannungs-Strom-Relation des Heaviside-Modells einer verzerrungsfreien Leitung die Beziehungen

$$(u_1 - Z_0 i_1)(t) = \begin{cases} e^{-\delta_0 t} (u^{(0)} - Z_0 i^{(0)})(v_0 t) & \text{für } 0 \leq t < t_0, \\ e^{-\delta_0 t_0} (u_2 + Z_0 i_2)(t - t_0) & \text{für } t \geq t_0. \end{cases} \quad (35.202)$$

$$(u_2 - Z_0 i_2)(t) = \begin{cases} e^{-\delta_0 t} (u^{(0)} + Z_0 i^{(0)})(l - v_0 t) & \text{für } 0 \leq t < t_0, \\ e^{-\delta_0 t_0} (u_1 + Z_0 i_1)(t - t_0) & \text{für } t \geq t_0, \end{cases} \quad (35.203)$$

wobei die Signallaufzeit auf der Leitung hier zur Vereinfachung des Druckbildes nicht mit v_L , sondern mit v_0 bezeichnet worden ist.

Im allgemeinen Fall empfiehlt es sich, zur Lösung der Leitungsgleichungen Frequenzbereichs-Methoden heranzuziehen, vgl. aber auch die Ausführungen in [169, 297] zur Anwendung der Riemannschen Integrationsmethode auf die Telegraphengleichung. Mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöste Beispiele für die Berechnung der Einschwingvorgänge von Zusammenschaltungen des Heaviside-Modells mit einfachen linearen konzentrierten Netzwerken (Spannungsquelle mit realem Innenwiderstand, RC-Glied o.ä.) findet man in [68, 83, 293].

Mit Methoden der Laplace-Transformation ist bereits in [278, 279] eine Darstellung der Spannungs-Strom-Relation für das Heaviside-Modell einer verlustbehafteten Leitung durch Faltungsintegrale hergeleitet worden, deren Kerne sich in geschlossener Form durch modifizierte Besselfunktion erster Gattung ausdrücken lassen. Die dort angegebenen Beziehungen sind gewissermaßen ein Analogon zur Darstellung der Spannungs-Strom-Relation eines Branin-Modells durch die Gleichungen (35.189) und (35.190) und enthalten selbstverständlich das Branin-Modell als Spezialfall. Eine ähnliche Darstellung findet man in [251]. In den Fällen, in denen der Einfluss des Skineffekts vernachlässigt werden kann, liefern diese Verfahren sehr gute Ergebnisse. Allerdings haben sie im Vergleich zum Branin-Modell den Nachteil, dass der für ihre Auswertung erforderliche Rechenaufwand quadratisch mit der Länge des Zeitintervalls wächst, auf dem die zu berechnenden Trajektorien definiert

sind. Diese unangenehme Eigenschaft haben diese Verfahren, wenn nicht besondere Vorkehrungen (s. z.B. [166, 213, 122, 290]) getroffen werden, zunächst mit allen anderen Verfahren gemeinsam, die auf der Auswertung geeignet diskreter Faltungsintegrale basieren.

Auf [206] geht die auch in [279, 280] ausgenutzte Beobachtung (vgl. auch [251, 259]) zurück, dass die Impulsantworten einer Streuparameter-Darstellung der Spannungs-Strom-Relation eines Heaviside-Modells sehr schnell gegen null konvergieren. Werden bei der numerischen Auswertung der diskreten Faltungsintegrale nur noch die Funktionswerte dieser Kerne berücksichtigt, deren Betrag größer als eine vorgegebene Schranke ist, so steigt der erforderliche Rechenaufwand nur noch linear mit der Zeit.

In [252] wird eine interessante Variante zu den in [278, 279, 251] entwickelten Verfahren beschrieben. Ausgehend von den Ergebnissen aus [251] wird ein Algorithmus entwickelt, mit dem in jedem Integrationsschritt eine stückweise lineare Approximation der Spannungs- und Stromverteilung einer durch die Heavisideschen Leitungsgleichungen beschriebenen Übertragungsleitung berechnet wird, die mit konzentrierten nichtlinearen Netzwerken abgeschlossen ist. Bemerkenswert an diesem Zugang ist die Tatsache, dass durch die stückweise lineare Approximation der Spannungs- und Stromverteilung auf der Leitung der unendlichdimensionale Zustandsraum des Heaviside-Modells *ohne* wesentliche Genauigkeitseinbußen durch einen endlichdimensionalen linearen Raum ersetzt wird. Auch bei diesem Verfahren steigt der Rechenaufwand nur noch linear mit der Zeit.

Aufbauend auf früheren Arbeiten haben Haase und Nitsch [98], vgl. auch [99] aus den Maxwell'schen Gleichungen verallgemeinerte Leitungsgleichungen für ungleichförmige Mehrfachleitungen im Frequenzbereich abgeleitet, die es gestatten, auch die Abstrahlung zu berücksichtigen, die deshalb für EMV-Anwendungen besonders interessant sind. Weiterhin haben sie auf der Grundlage eines Produktintegrals ein leistungsfähiges Näherungsverfahren entwickelt, vgl. auch [214]. Eine detaillierte Diskussion der Abstrahlung an inhomogenen Leitungen findet man in [215].

Speziell auf die Belange der Elektroenergetik zugeschnittene Verfahren zur Analyse von Wellenvorgängen auf Hochspannungsfreileitungen findet man in [125].

35.5 Lösung der Leitungsgleichungen im Frequenzbereich

In diesem Abschnitt sollen sinusförmig eingeschwungene Lösungen der Leitungsgleichungen für verlustfreie und verlustbehaftete Doppelheiten untersucht werden. Wir beschränken uns dabei im Wesentlichen auf endlich lange Leitungen, nur gelegentlich wird auf den Grenzfall der einseitig unendlich langen Leitungen eingegangen. Ein wichtiges Ziel ist die Herleitung von Frequenzbereichsdarstellungen der Spannungs-Strom-Relation der Branin- bzw. Heaviside-Modelle endlich langer Leitungen.

Die Frequenz sowie die Amplituden und Nullphasenlagen der Komponenten einer solchen sinusförmig eingeschwungenen Lösung werden durch die äußere Beschaltung der Leitung festgelegt. Der sinusförmig eingeschwungene Zustand ist erreicht, wenn alle Reflexionen und Mehrfachreflexionen auf der Leitung und die Wechselwirkungen mit den Einschwingvorgänge in den äußeren Beschaltungen abgeklungen sind. An jeder Stelle der Leitung sind dann die Spannungen und Ströme sinusförmige Zeitfunktionen, deren Amplituden und Nullphasenlagen nur noch von der Ortskoordinate und der Frequenz, nicht aber von der Zeit abhängen können.

Auf die Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung der Leitungsgleichungen wird nicht explizit eingegangen. Diesbezüglich muss auf die bereits in Abschn. 35.4.2 genannte Literatur verwiesen werden.

35.5.1 Sinusförmig eingeschwungene Lösungen der Leitungsgleichungen

Gegeben sei eine verlustbehaftete Leitung der Länge l mit den Leitungskonstanten L', C', R' und G' . Gesucht ist die Menge aller Lösungen (u, i) der Heavisideschen Leitungsgleichungen (35.125), die sich für alle $z \in [0, l]$ und alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer positiven Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$ in der Form

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \operatorname{Re}(U(z, j\omega) e^{j\omega t}), \\ i(z, t) &= \operatorname{Re}(I(z, j\omega) e^{j\omega t}) \end{aligned} \quad (35.204)$$

darstellen lassen. Einsetzen von (35.204) in die Leitungsgleichungen (35.125) liefert das System

$$\partial_z \begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(R' + j\omega L') \\ -(G' + j\omega C') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} \quad (35.205)$$

linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen, dem die komplexen Amplituden der gesuchten Lösungen genügen müssen. Aus der Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen [6, 136, 294] ist bekannt, dass die Menge aller Lösungen von Glg. (35.205) einen zweidimensionalen komplexen linearen Raum bildet.

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = e^{\hat{\gamma}(j\omega)z} \begin{pmatrix} \hat{U}(j\omega) \\ \hat{I}(j\omega) \end{pmatrix}, \quad (35.206)$$

den man auch in der Form

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\hat{\gamma}(j\omega)z} & 0 \\ 0 & e^{\hat{\gamma}(j\omega)z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}(j\omega) \\ \hat{I}(j\omega) \end{pmatrix} \quad (35.207)$$

schreiben kann, liefert bei geeigneter Wahl des von der vorgegebenen Kreisfrequenz ω abhängenden Parameters $\hat{\gamma}(j\omega)$ partikuläre Lösungen der Differentialgleichung (35.205).

Setzt man (35.207) in Glg. (35.205) ein, so sieht man, dass die komplexen Amplitude $(\hat{U}(j\omega), \hat{I}(j\omega))^T$ und der Wert des Parameters $\hat{\gamma}(j\omega)$ einer solchen partikulären Lösung dem homogenen linearen algebraischen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\hat{\gamma}(j\omega) & -(R' + j\omega L') \\ -(G' + j\omega C') & -\hat{\gamma}(j\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}(j\omega) \\ \hat{I}(j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35.208)$$

genügen müssen. Jede Lösung dieses Gleichungssystems liefert eine partikuläre Lösung von (35.205). Jede Linearkombination solcher Lösungen ist wegen der Linearität von (35.205) wieder eine Lösung von (35.205).

Das lineare algebraische Gleichungssystem (35.208) hat genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn seine Koeffizientendeterminante

$$\det \begin{pmatrix} -\hat{\gamma}(j\omega) & -(R' + j\omega L') \\ -(G' + j\omega C') & -\hat{\gamma}(j\omega) \end{pmatrix} = \hat{\gamma}^2(j\omega) - (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \quad (35.209)$$

verschwindet. Die Nullstellen

$$\gamma^+(j\omega) := -\gamma(j\omega) \quad \text{und} \quad \gamma^-(j\omega) := +\gamma(j\omega). \quad (35.210)$$

dieser Koeffizientendeterminante sind die Eigenwerte der 2×2 -Matrix auf der rechten Seite von (35.205), wobei $\gamma(j\omega)$ die durch

$$\gamma(j\omega) := \alpha(\omega) + j\beta(\omega) := \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}, \quad (35.211)$$

definierte *Ausbreitungskonstante* bezeichnet. Ihr Realteil wird als *Dämpfungs-* und ihr Imaginärteil als *Phasenkonstante* bezeichnet.

Die durch Glg. (35.211) für $\omega \in \mathbb{R}s^{-1}$ definierten Frequenzcharakteristiken γ , α und β sind Funktionen, die i.a. auch tatsächlich von der Frequenz abhängen, vgl. die entsprechenden Ausführungen dazu in Abschn. 35.5.3. Die Bezeichnung ihrer Funktionswerte $\gamma(j\omega)$, $\alpha(\omega)$ und $\beta(\omega)$ als *Ausbreitungs-, Dämpfungs- bzw. Phasenkonstante* sind traditionsbedingt.

Zu diesen Eigenwerten gehören die durch

$$\gamma^\pm(j\omega)U^\pm(j\omega) + (R' + j\omega L')I^\pm(j\omega) = 0 \quad (35.212)$$

bis auf einen konstanten Faktor festgelegten Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} U^+(j\omega) \\ I^+(j\omega) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} U^-(j\omega) \\ I^-(j\omega) \end{pmatrix}. \quad (35.213)$$

Mit dem *Wellenwiderstand*

$$Z_L(j\omega) := \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma(j\omega)} \quad (35.214)$$

erhält man aus (35.212) die Beziehungen

$$U^+(\omega) = +Z_L(\omega)I^+(\omega), \quad U^-(\omega) = -Z_L(\omega)I^-(\omega). \quad (35.215)$$

Mit (35.212) lassen sich die Eigenvektoren z.B. in der Form

$$\begin{pmatrix} U^+(\omega) \\ I^+(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ Z_L^{-1}(\omega) \end{pmatrix} U^+(\omega), \quad \begin{pmatrix} U^-(\omega) \\ I^-(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -Z_L^{-1}(\omega) \end{pmatrix} U^-(\omega) \quad (35.216)$$

durch die komplexen Amplituden $U^+(\omega)$ und $U^-(\omega)$ ausdrücken.

Die in (35.211) und (35.214) angegebenen Definitionen für die Ausbreitungskonstante und den Wellenwiderstand einer Leitung sind unvollständig. Die Terme auf den rechten Seiten dieser Gleichungen beschreiben algebraische Funktionen, die im Sinne der Funktionentheorie auf zweiblättrigen Riemannschen Flächen (s. z.B. [22]) definiert sind. Erst durch Auswahl eines Zweigs dieser Funktionen, der auf einem Blatt der zugehörigen Riemannschen Fläche definiert ist, das schlicht über der positiven imaginären Achse der komplexen Frequenzebene liegt, ist eine eindeutige Zuordnung ihrer Funktionswerte möglich.

Wie in Abschn. 35.5.3 begründet wird, muss zur Bestimmung der Funktionswerte von Z_L bei der Frequenz ω der Zweig der Wurzelfunktion ausgewählt werden, der durch die Bedingung

$$\operatorname{Re} Z_L(\omega) \geq 0 \quad (35.217)$$

festgelegt wird. Wegen $L', C' > 0$ und $R', G' \geq 0$ ist es für $\omega \geq 0$ immer möglich, diese Bedingungen zu erfüllen.

Für die Funktion γ ist es auf Grund von (35.210) gleichgültig, welchen der beiden möglichen Zweige man auswählt. Um Widersprüche zu vermeiden, muss man aber eine einmal getroffene Auswahl konsequent beibehalten. Wir entscheiden uns hier für den durch

$$|\arg \gamma(\omega)| \leq \pi/2, \quad (35.218)$$

festgelegten Zweig.

Mit diesen Festlegungen werden durch die Zuordnungen $\omega \mapsto \gamma(\omega)$ und $\omega \mapsto Z_L(\omega)$ für $\omega > 0$ stetig differenzierbare Funktionen definiert.

Offensichtlich genügt die Funktion γ für alle ω der zu (35.217) analogen Bedingung

$$\operatorname{Re} \gamma(\omega) \geq 0. \quad (35.219)$$

Wegen $L', C' > 0$ und $R', G' \geq 0$ ist die Übertragungskonstante $\gamma(\omega)$ für $\omega > 0$ von null verschieden. Damit hat die Koeffizientenmatrix von Glg. (35.205) für $\omega > 0$ zwei unterschiedliche Eigenwerte und demzufolge auch zwei linear unabhängige Eigenvektoren [135]. Deshalb liefert der Ansatz (35.206) für jeden festen Wert $\omega > 0$ zwei linear unabhängige Lösungen von (35.205) und damit eine Basis für den linearen Raum aller Lösungen dieser Differentialgleichung.

Aus dem Vorangehenden folgt, dass es bei vorgegebener Kreisfrequenz ω zu jeder sinusförmig eingeschwungenen Lösung der Leitungsgleichungen Werte $U^+(\mathrm{j}\omega)$ und $U^-(\mathrm{j}\omega)$ geben muss, mit denen man diese Lösung durch eine Linearkombination der Lösungen von (35.205) darstellen kann.

Bei Vorgabe von U^+ und U^- erhält man für die in (35.204) eingeführten komplexen Amplituden die Beziehungen

$$\begin{aligned} U(z, \mathrm{j}\omega) &= e^{-\gamma z} U^+ + e^{+\gamma z} U^-, \\ Z_L I(z, \mathrm{j}\omega) &= e^{-\gamma z} U^+ - e^{+\gamma z} U^-, \end{aligned} \quad (35.220)$$

die man auch in der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} U(z, \mathrm{j}\omega) \\ I(z, \mathrm{j}\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma z} & e^{+\gamma z} \\ Z_L^{-1} e^{-\gamma z} & -Z_L^{-1} e^{+\gamma z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} \quad (35.221)$$

zusammenfassen kann.

Um die Schreibweise der Formeln zu vereinfachen, haben wir in den Gleichungen (35.220) und (35.221) bei den Funktionen Z_L , γ , U^+ , U^- , I^+ und I^- auf die Angabe des Arguments $\mathrm{j}\omega$ verzichtet. Diese Konvention soll im Folgenden beibehalten werden.

Die Funktionen U^+ , U^- usf. können aber auch als Fourier- oder Laplace-Transformierte aufgefasst werden. Von dieser Möglichkeit wird aber im Folgenden kein Gebrauch gemacht.

Glg. (35.221) kann auch in der Form

$$\begin{pmatrix} U(z, \mathrm{j}\omega) \\ I(z, \mathrm{j}\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Z_L^{-1} & -Z_L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma z} & 0 \\ 0 & e^{+\gamma z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} \quad (35.222)$$

geschrieben werden.

Aus (35.221) erhält man für die Komponenten einer sinusförmig eingeschwungenen Lösung der Leitungsgleichungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \operatorname{Re}(U^+ e^{\mathrm{j}\omega t - \gamma z} + U^- e^{\mathrm{j}\omega t + \gamma z}), \\ i(z, t) &= \operatorname{Re}(Z_L^{-1} (U^+ e^{\mathrm{j}\omega t - \gamma z} - U^- e^{\mathrm{j}\omega t + \gamma z})). \end{aligned} \quad (35.223)$$

Auf Grund ihrer mathematischen Struktur beschreiben die Terme

$$\operatorname{Re}(U^+ e^{\mathrm{j}\omega t - \gamma z}), \quad \operatorname{Re}(Z_L^{-1} (U^+ e^{\mathrm{j}\omega t - \gamma z})) \quad (35.224)$$

und

$$\operatorname{Re}(U^- e^{\mathrm{j}\omega t + \gamma z}), \quad \operatorname{Re}(-Z_L^{-1} (U^- e^{\mathrm{j}\omega t + \gamma z})) \quad (35.225)$$

hin- bzw. rücklaufende Wellen.

Die komplexen Amplituden dieser hin- und rücklaufenden Wellen werden durch die komplexen Amplituden der Spannungen und Ströme an den Enden der Leitung festgelegt. Die Frequenzbereichsdarstellungen der Spannungs-Strom-Relation des Heaviside-Modells einer Übertragungsleitung sollen die

miteinander verträglichen Kombinationen dieser Randwerte liefern. Um die Herleitung solcher Darstellungen zu vereinheitlichen, soll die in Glg. (35.221) angegebene Darstellung der Menge aller sinusförmig eingeschwungenen Lösungen der Heavisideschen Leitungsgleichungen durch eine Reihe äquivalenter Darstellungen ergänzt werden. Wichtige Darstellungen dieser Art erhält man, wenn man das geordnete Paar (U^+, U^-) durch die Randwertkombinationen (U_1, I_1) oder (U_2, I_2) oder durch das geordneten Paar $(U_1 + Z_L I_1, U_1 - Z_L I_1)$ bzw. $(U_2 + Z_L I_2, U_2 - Z_L I_2)$ der am Tor 1 bzw. 2 ein- und auslaufenden Spannungswellen ersetzt.

Mit

$$U(0, j\omega) = U_1(j\omega) \quad \text{und} \quad I(0, j\omega) = I_1(j\omega). \quad (35.226)$$

erhält man für $z = 0$ aus (35.221) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ Z_L I_1 \end{pmatrix} \quad (35.227)$$

zur Bestimmung von U^+ und U^- aus den Randwerten U_1 und I_1 . Multiplikation von (35.227) von links mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (35.228)$$

liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 + Z_L I_1 \\ U_1 - Z_L I_1 \end{pmatrix} \quad (35.229)$$

zur Bestimmung von U^+ und U^- aus den Werten von $U_1 + Z_L I_1$ und $U_1 - Z_L I_1$. Die Lösung der Gleichungssysteme (35.227) und (35.229) liefert die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ Z_L I_1 \end{pmatrix} \quad (35.230)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_1 + Z_L I_1 \\ U_1 - Z_L I_1 \end{pmatrix}. \quad (35.231)$$

Mit (35.230) erhält man aus (35.221) unter Berücksichtigung von

$$\cosh \gamma z = \frac{1}{2} (e^{+\gamma z} + e^{-\gamma z}), \quad \sinh \gamma z = \frac{1}{2} (e^{+\gamma z} - e^{-\gamma z}) \quad (35.232)$$

die Gleichung

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma z & -Z_L \sinh \gamma z \\ -Z_L^{-1} \sinh \gamma z & \cosh \gamma z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}. \quad (35.233)$$

Mit (35.231) erhält man aus (35.221)

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-\gamma z} & +e^{+\gamma z} \\ Z_L^{-1} e^{-\gamma z} & -Z_L^{-1} e^{+\gamma z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 + Z_L I_1 \\ U_1 - Z_L I_1 \end{pmatrix}. \quad (35.234)$$

Analog kann man mit den in Abb. 35.22 festgelegten Bezugsrichtungen bei Vorgabe von $U_2(j\omega)$ und $I_2(j\omega)$ von den Beziehungen

$$U(l, j\omega) = U_2(j\omega) \quad \text{und} \quad I(l, j\omega) = -I_2(j\omega). \quad (35.235)$$

ausgehen. Mit (35.235) erhält man für $z = l$ aus (35.221) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma l} & e^{+\gamma l} \\ -e^{-\gamma l} & e^{+\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ Z_L I_2 \end{pmatrix} \quad (35.236)$$

zur Bestimmung von U^+ und U^- aus den Werten von U_2 und I_2 erhält. Multiplikation von (35.236) mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix} \quad (35.237)$$

von links liefert das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2e^{-\gamma l} & 0 \\ 0 & 2e^{+\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 - Z_L I_2 \\ U_2 + Z_L I_2 \end{pmatrix} \quad (35.238)$$

zur Berechnung von U^+ und U^- aus $U_2 - Z_L I_2$ und $U_2 + Z_L I_2$. Die Lösung der Gleichungssysteme (35.236) und (35.238) liefert die Beziehungen

$$\begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{+\gamma l} & -Z_L e^{+\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & Z_L e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (35.239)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{+\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 - Z_L I_2 \\ U_2 + Z_L I_2 \end{pmatrix}. \quad (35.240)$$

Mit (35.239) und (35.221) erhält man unter Berücksichtigung von (35.232) das Analogon

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma(l-z) & -Z_L \sinh \gamma(l-z) \\ Z_L^{-1} \sinh \gamma(l-z) & -\cosh \gamma(l-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (35.241)$$

zu Glg. (35.233).

Mit (35.240) erhält man aus (35.222) über das Zwischenergebnis

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ Z_L^{-1} & -Z_L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{+\gamma(l-z)} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma(l-z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 - Z_L I_2 \\ U_2 + Z_L I_2 \end{pmatrix}, \quad (35.242)$$

die Gleichung

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+\gamma(l-z)} & e^{-\gamma(l-z)} \\ Z_L^{-1} e^{+\gamma(l-z)} & -Z_L^{-1} e^{-\gamma(l-z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 - Z_L I_2 \\ U_2 + Z_L I_2 \end{pmatrix}. \quad (35.243)$$

Die unterschiedliche Verteilung der Vorzeichen in den Spaltenmatrizen auf der rechten Seite der Gleichungen (35.243) und (35.234) sind eine Folge der in Abb. 35.22 eingeführten Bezugsrichtungen.

Weil die Koeffizientenmatrizen der Gleichungen (35.227), (35.229), (35.236) und (35.238) für $\omega > 0$ nicht singulär sind, liefern die Gleichungen (35.233), (35.234), (35.241) (35.243) und (35.227) äquivalente Darstellungen der Menge aller sinusförmigen Lösungen der Heavisideschen Leitungsgleichungen.

Die in den Abschnitten 35.2 und 35.3 angegebenen Herleitungen der Leitungsgleichungen lassen sich auch direkt im Frequenzbereich durchführen. Durch einen Rückgriff auf die Ergebnisse von Abschn. 29.1 ist es dann mit gewissen zusätzlichen Näherungen möglich, den Einfluss des Skineffekts zu berücksichtigen. Der Auswertung der Integrale in Glg. (35.120) in den Gleichungen (35.121) und (35.123) müssen dann an Stelle der in Abb. 35.12 eingeführten Integrationsbereiche wieder die in Abb. 35.5 eingeführten Integrationsbereiche zugrundegelegt werden. Der Term $R'i(\zeta, t)$ wird dann in Glg. (35.121) durch das Produkt eines mit den Ergebnissen aus Abschn. 29.1 abgeschätzten Impedanzbelags mit der komplexen Amplitude der Stromverteilung i an der Stelle ζ ersetzt. Dieser Impedanzbelag kann dann zur Vereinfachung der Schreibweise mit dem Term $j\omega L'$ zu einem resultierenden Impedanzbelag $Z'(j\omega)$ zusammengefasst werden. Entsprechend kann man in Glg. (35.115) den Einfluss des Kapazitätsbelags C' , des Leitwertbelags G' und ggf. den der dielektrischen Verluste, die auf diese Weise zusätzlich berücksichtigt werden können, in einem resultierenden Admittanzbelag $Y'(j\omega)$ zusammenfassen. Auf diese Weise wird man an Stelle von Glg. (35.205) auf das folgende System

$$\partial_z \begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -Z'(j\omega) \\ -Y'(j\omega) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ I(z, j\omega) \end{pmatrix} \quad (35.244)$$

modifizierter Heavisidescher Leitungsgleichungen im Frequenzbereich geführt. Glg. (35.244) ist bei vorgegebenem Wert von ω eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung sich in geschlossener Form angeben lässt.

Verzichtet man auf die näherungsweise Berücksichtigung des Skineffekts und der dielektrischen Verluste und setzt $Z'(j\omega) := R' + j\omega L'$ sowie $Y'(j\omega) := G' + j\omega C'$, so ist Glg. (35.205) als Sonderfall in (35.244) enthalten.

35.5.2 Leitungsmodelle für die Netzwerkanalyse im Frequenzbereich

Aus (35.241) erhält man für $z = 0$ unter Berücksichtigung der Kettenzählfeilkonvention die *Kettenform*

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma l & Z_L \sinh \gamma l \\ Z_L^{-1} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \quad (35.245)$$

der Darstellung der Spannungs-Strom-Relation des Heaviside-Modells im Frequenzbereich.

Analog erhält man aus (35.233) für $z = l$ unter Berücksichtigung einer Kettenzählpfeilkonvention, bei der das Tor 2 als Eingang gewählt wird, die *inverse Kettenform*

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma l & Z_L \sinh \gamma l \\ Z_L^{-1} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{pmatrix} \quad (35.246)$$

der Darstellung der Spannungs-Strom-Relation des Heaviside-Modells im Frequenzbereich. Weil homogene Doppelheiten längssymmetrisch im Sinne von [147] sind, haben die in Glg. (35.245) und (35.246) angegebenen Beziehungen die gleiche Koeffizientenmatrix.

Durch Elimination von U^+ und U^- aus den Gleichungen (35.231) und (35.240) erhält man zunächst die Gleichung

$$\begin{pmatrix} U_1 + Z_L I_1 \\ U_1 - Z_L I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 - Z_L I_2 \\ U_2 + Z_L I_2 \end{pmatrix}. \quad (35.247)$$

Durch Umsortieren der Variablen erhält man daraus die Gleichung

$$\begin{pmatrix} U_1 - Z_L I_1 \\ U_2 - Z_L I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma l} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 + Z_L I_2 \\ U_1 + Z_L I_1 \end{pmatrix}. \quad (35.248)$$

Diese Beziehung liefert eine Frequenzbereichsdarstellung der Spannungs-Strom-Relation eines Heaviside-Modells durch die in Abschn. 35.4.1 im Zusammenhang mit dem Branin-Modell eingeführten Begriffe der *ein- und auslaufenden Spannungswellen*. Man beachte die strukturelle Analogie zu der durch die Gleichungen (35.189) und (35.190) bzw. (35.202) und (35.203) gegebenen Zeitbereichsdarstellung des Branin-Modells einer verlustlosen bzw. verzerrungsfreien Leitung. Weil hier nur sinusförmige Zeitfunktionen mit vorgegebener Frequenz zugelassen sind, ist es möglich, die Verzögerung der einlaufenden Wellen durch eine entsprechende Phasenverschiebung darzustellen. Die durch die Verluste der Leitung verursachte Dämpfung wird in Analogie zu den Gleichungen (35.202) und (35.203) durch den Faktor $e^{-\alpha l}$ berücksichtigt, den man wegen $e^{(-\alpha+j\beta l)} = e^{-\alpha l} e^{-j\beta l}$ von dem Term $e^{-\gamma l}$ abspalten kann.

Zu Glg. (35.248) eng verwandte Beziehungen im Bildbereich der Laplace-Transformation sind auch die Ausgangspunkte der bereits in Abschn. 35.4.1 erwähnten Arbeiten von [278, 279, 280] und [251, 252].

Durch eine weitere Umstellung der Variablen erhält man aus (35.248) die folgende Variante

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{+\gamma l} \\ 1 & -e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z_L \begin{pmatrix} -1 & -e^{+\gamma l} \\ +1 & +e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (35.249)$$

einer *Belevitch-Darstellung* der Spannungs-Strom-Relation des Heaviside-Modells einer Übertragungsleitung im Frequenzbereich.

Durch eine nochmalige Permutation der Variablen erhält man aus (35.249) die Gleichung

$$\begin{pmatrix} +1 & +Z_L e^{+\gamma l} \\ +1 & -Z_L e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_L & e^{+\gamma l} \\ +Z_L & e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (35.250)$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{+\gamma l} \\ 1 & -e^{-\gamma l} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{Z_L}{2 \sinh \gamma l} \begin{pmatrix} -e^{-\gamma l} & 1 & +e^{+\gamma l} \\ -1 & & +1 \end{pmatrix} \quad (35.251)$$

und

$$\left(Z_L \begin{pmatrix} -1 & -e^{+\gamma l} \\ +1 & +e^{-\gamma l} \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{2Z_L \sinh \gamma l} \begin{pmatrix} +e^{-\gamma l} & +e^{+\gamma l} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (35.252)$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 1 & +Z_L e^{-\gamma l} \\ 1 & -Z_L e^{+\gamma l} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2Z_L \cosh \gamma l} \begin{pmatrix} +Z_L e^{-\gamma l} & +Z_L e^{+\gamma l} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \quad (35.253)$$

erhält man aus (35.249) bzw. (35.250) durch Multiplikation mit (35.251), (35.252) bzw. (35.253) von links die *Impedanzform*

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = Z_L \begin{pmatrix} +\coth \gamma l & +1/\sinh \gamma l \\ +1/\sinh \gamma l & \coth \gamma l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad (35.254)$$

die *Admittanzform*

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_L} \begin{pmatrix} \coth \gamma l & -1/\sinh \gamma l \\ -1/\sinh \gamma l & \coth \gamma l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (35.255)$$

bzw. die *Hybridform*

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_L \tanh \gamma l & 1/\cosh \gamma l \\ -1/\cosh \gamma l & Z_L^{-1} \tanh \gamma l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (35.256)$$

der Darstellung der Spannungs-Strom-Relation eines Heaviside-Modells im Frequenzbereich.

Die hier angegebenen Frequenzbereichsdarstellungen der Spannungs-Strom-Relation des Heaviside-Modells lassen sich unter gewissen Voraussetzungen, die hier nicht weiter untersucht werden sollen, auch zur numerischen Berechnung der Einschwingvorgänge einer Zusammenschaltung dieses LeitungsmodeLLS mit RLC-Netzwerken heranziehen, die bis auf unabhängige Quellen linear und zeitinvariant sind. Zu diesem Zweck wird zunächst die entsprechende Zusammenschaltung im Frequenzbereich an einer Folge äquidistant aufeinanderfolgender Frequenzpunkte analysiert. In einem zweiten Schritt wird dann mit den Methoden der schnellen Fourier-Transformation der zugehörige Einschwingvorgang berechnet.

Glg. (35.244) kann auch als Ausgangspunkt gewählt werden, um im Frequenzbereich Modelle für verlustbehaftete Leitungen zu entwickeln, bei denen der Skineffekt berücksichtigt werden soll. Abgesehen vom Koaxkabel ist es aber selbst bei Leitungen, deren Leiter einen kreisförmigen Querschnitt haben, mit den Ergebnissen von Abschn. 29.1 kaum möglich, den Impedanzbelag Z' exakt zu berechnen, u.a. schon deshalb, weil die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke auf den in Abschn. 35.2.1 eingeführten Kurven K_z und \bar{K}_z i.a. nicht konstant ist. Man kann deshalb auch versuchen, die Werte der Parameter $Z'(\omega)$ und $Y'(\omega)$ mit einem Optimierungsverfahren an eine Folge von Messdaten geeigneter Frequenzcharakteristiken anzupassen.

Eine Reihe zusätzlicher Probleme ist zu lösen, wenn die auf diese Weise an diskreten Frequenzpunkten ermittelten Werte des Impedanz- und Admittanzbelags einer verlustbehafteten Leitung nach dem soeben skizzierten Verfahren zur Berechnung von Einschwingvorgängen herangezogen werden sollen, weil jeweils der Real- und der Imaginärteil einer solchen Frequenzcharakteristik über die Kramers-Kronig-Relationen [130] miteinander gekoppelt sind. Über Beispiele, die auf diese Art berechnet worden sind, wird in [94] berichtet.

35.5.3 Eigenschaften der Lösungen der Leitungsgleichungen im Frequenzbereich

Für eine verlustfreie Leitung erhält man aus (35.214) und (35.211) die Beziehungen

$$Z_L(j\omega) = \sqrt{L'/C'} \quad \text{und} \quad \gamma(j\omega) = j\sqrt{L'C'} \omega. \quad (35.257)$$

Damit gilt

$$\alpha(\omega) = 0 \quad \text{und} \quad \beta(\omega) = \sqrt{L'C'}\omega = \omega/v_F, \quad (35.258)$$

wobei v_F die in Abschn. 35.2.1, Glg. (35.87) eingeführte Freiraumlichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Entsprechend erhält man für eine verzerrungsfreie Leitung die Beziehungen

$$Z_L(j\omega) = \sqrt{L'/C'}, \quad \gamma(j\omega) = \sqrt{R'G'} + j\sqrt{L'C'} \omega \quad (35.259)$$

und

$$\alpha(\omega) = \sqrt{R'G'}, \quad \beta(\omega) = \omega/v_F. \quad (35.260)$$

Für eine allgemeine verlustbehaftete Leitung sind sowohl der Wellenwiderstand als auch die Übertragungskonstante frequenzabhängig. Aus (35.211) erhält man durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil die Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2}(G'R' - \omega^2 L'C') + \frac{1}{2}\sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}}, \\ \beta(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 L'C' - G'R') + \frac{1}{2}\sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}}. \end{aligned} \quad (35.261)$$

Ausführliche Diskussionen der Frequenzabhängigkeiten dieser Größen findet man z.B. in [261, 318].

Für kleine Verluste erhält man ausgehend von

$$\gamma(j\omega) = j\omega\sqrt{L'C'} \left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (35.262)$$

mit Hilfe der nach dem dritten Glied abgebrochenen Binomialreihe

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \quad (35.263)$$

von $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ unter Vernachlässigung der Potenzen von $\frac{1}{\omega}$, die höher als 2 sind, die Näherungsformel

$$\gamma(j\omega) \approx j\omega\sqrt{L'C'} \left(1 - j\frac{1}{\omega} \left(\frac{R'}{2L'} + \frac{G'}{2C'}\right) + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R'}{L'} - \frac{G'}{C'}\right)^2\right). \quad (35.264)$$

Speziell gilt dann

$$\alpha(\omega) \approx \frac{1}{2} \left(R' \sqrt{\frac{C'}{L'}} + G' \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right). \quad (35.265)$$

Sind die Isolationsverluste gegenüber den ohmschen Verlusten in den Leitern vernachlässigbar, erhält man wegen $G' \approx 0$ aus (35.265) die erstmals von Heaviside auf ähnliche Weise hergeleitete Formel

$$\alpha(\omega) \approx \frac{1}{2} R' \sqrt{\frac{C'}{L'}}. \quad (35.266)$$

Schon Heaviside hat daraus die Folgerung gezogen, dass die Dämpfungskonstante einer verlustbehafteten Leitung kleiner wird, wenn man den Wert des Induktivitätsbelags vergrößert. Leider konnte er sich mit diesem Vorschlag seinerzeit bei der britischen Postverwaltung nicht durchsetzen [105, 106]. Erst Pupin und Krarup haben mit Bezug auf die Arbeiten von Heaviside diese Idee technisch realisiert. Pupin, indem er in periodischen Abständen in die Leitungen zusätzliche Magnetspulen, die sogenannten *Pupinspulen*, eingefügt hat, und Krarup, indem er die Leitungen mit ferromagnetischen Drähten oder Bändern umwickelt hat. In der Zeitspanne bis zur Erfindung der Elektronenröhre und der bald darauf einsetzenden Entwicklung leistungsfähiger Verstärker haben insbesondere die Pupinkabel eine wesentliche Verbesserung für den Telefon- und Telegraphie-Weitverkehr gebracht. Auf diese Weise ist es bereits vor dem ersten Weltkrieg möglich gewesen, von Berlin nach Mailand über eine Entfernung von 1350 km ohne einen zwischengeschalteten Verstärker zu telefonieren.

Mit elementaren Umformungen erhält man aus (35.224) und (35.225) die Beziehungen

$$\begin{aligned}
U^+ e^{j\omega t - \gamma z} &= U^+ e^{-\alpha z} e^{j\omega(t - \frac{\beta(\omega)}{\omega}z)}, \\
&\vdots \\
Z_L^{-1} U^- e^{j\omega t + \gamma z} &= Z_L^{-1} U^- e^{+\alpha z} e^{j\omega(t + \frac{\beta(\omega)}{\omega}z)}.
\end{aligned} \tag{35.267}$$

An Hand der auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Terme der Gleichungen (35.267) sieht man sofort, dass sich die durch diese Terme definierten Funktionen, als Wellen interpretieren lassen, die sich in ihrer jeweiligen Ausbreitungsrichtung mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_L(\omega) := \frac{\omega}{\beta(\omega)} \tag{35.268}$$

bewegen.

Für verlust- oder verzerrungsfreie Leitungen folgt aus (35.258) und (35.259) für alle $\omega > 0$ die Beziehung

$$v_L(\omega) = v_F = 1/\sqrt{L'C'} \tag{35.269}$$

Während für verlust- oder verzerrungsfreie Leitungen die Phasengeschwindigkeit, mit der sich die sinusförmig eingeschwungene Lösungen der zugeordneten Heavisideschen Leitungsgleichungen ausbreiten, gleich der Freiraumlichtgeschwindigkeit v_F ist, genügt die Phasengeschwindigkeit $v_L(\omega)$ der sinusförmig eingeschwungenen Lösungen der Heavisideschen Leitungsgleichungen für eine allgemeine verlustbehaftete Leitung der Ungleichung

$$v_L(\omega) < v_F. \tag{35.270}$$

Ausserdem ist die Phasengeschwindigkeit, mit der sich die sinusförmig eingeschwungenen Lösungen der Heavisideschen Leitungsgleichungen für eine verlustbehaftete Leitung ausbreiten, von der Frequenz abhängig. Folglich ist es mit dem Heaviside-Modell möglich, die an realen Leitungen beobachtbare Dispersion zumindest näherungsweise nachzubilden.

Ausgangspunkt für den Beweis der Ungleichung (35.270) ist die zweite der in (35.261) zusammengefassten Gleichungen. Zusammen mit (35.268) erhält man aus (35.261) die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_L^2(\omega)} &= \frac{\beta^2(\omega)}{\omega^2} \\
&= \frac{1}{2} \left(L'C' - \frac{R'G'}{\omega^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R'^2}{\omega^2} + L'^2 \right) \left(\frac{G'^2}{\omega^2} + C'^2 \right)} \\
&= \frac{1}{2} \left(L'C' - \frac{R'G'}{\omega^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{L'^2C'^2 + \frac{R'^2C'^2}{\omega^2} + \frac{L'^2G'^2}{\omega^2} + \frac{R'^2G'^2}{\omega^4}} \\
&= \frac{1}{2} \left(L'C' - \frac{R'G'}{\omega^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\left(L'C' + \frac{R'G'}{\omega^2} \right)^2 - \frac{2R'G'L'C'}{\omega^2} + \frac{R'^2C'^2}{\omega^2} + \frac{L'^2G'^2}{\omega^2}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{1}{v_L^2(\omega)} = \frac{1}{2} \left(L'C' - \frac{R'G'}{\omega^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(L'C' + \frac{R'G'}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{R'C'}{\omega} - \frac{L'G'}{\omega} \right)^2}. \quad (35.271)$$

Offensichtlich gilt für eine nicht verzerrungsfreie verlustbehaftete Leitung wegen $R'C' \neq L'G'$ für alle $\omega \neq 0$ die Ungleichung $\left(\frac{R'C'}{\omega} - \frac{L'G'}{\omega} \right)^2 > 0$. Der Betrag des Radikanden in (35.271) wird deshalb verkleinert, wenn man den zweiten der beiden Summanden unter dem Wurzelzeichen weglässt. Dann gilt

$$\frac{1}{v_L^2(\omega)} < \frac{1}{2} \left(L'C' - \frac{R'G'}{\omega^2} \right) + \frac{1}{2} \left(L'C' + \frac{R'G'}{\omega^2} \right) = L'C', \quad (35.272)$$

woraus die Ungleichungen

$$v_L^2(\omega) < 1/L'C' \quad \text{und} \quad v_L(\omega) < v_F = 1/\sqrt{L'C'} \quad (35.273)$$

folgen.

Schreibt man die Gleichungen (35.223) in der Form

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \operatorname{Re}((U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{+\gamma z}) e^{j\omega t}), \\ i(z, t) &= \operatorname{Re}(Z_L^{-1} (U^+ e^{-\gamma z} - U^- e^{+\gamma z}) e^{j\omega t}), \end{aligned} \quad (35.274)$$

so sieht man deutlich, dass die Momentanwerte der Spannungs- bzw. Stromverteilung auf der Leitung bei festgehaltenem Wert für die Ortskoordinate z sinusförmige Schwingungen mit zeitinvarianter Amplitude sind. In Glg. (35.274) werden die komplexen Amplituden dieser Lösungen der Leitungsgleichungen als Summe bzw. Differenz komplexer Zeiger dargestellt, die in Abhängigkeit von der Ortskoordinate gegenläufig „rotieren“. Daraus resultiert eine markante „Welligkeit“ dieser komplexen Amplituden. Die sinusförmig eingeschwungenen Lösungen der Leitungsgleichungen werden deshalb auch als *stehende Wellen* bezeichnet.

Bei einer verlustfreien Leitung, also einer Leitung mit verschwindender Dämpfungskonstante, hat der Betrag von $U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{+\gamma z}$ jeweils an den Stellen der Leitung, deren Längskoordinate z der Bedingung $\arg(U^+ e^{-\gamma z}) = \arg(U^- e^{+\gamma z}) \pmod{2\pi}$ bzw. $\arg(U^+ e^{-\gamma z}) = \arg(U^- e^{+\gamma z}) + \pi \pmod{2\pi}$ genügt, ein Maximum bzw. ein Minimum. Bei einer Leitung mit hinreichend kleiner Dämpfungskonstante treten solche Maxima und Minima gleichfalls auf, nur liegen sie dann nicht exakt an den genannten Stellen, sondern in der Nähe dieser Punkte. Eine entsprechende Aussage gilt für die Beträge der komplexen Amplituden der Stromverteilung auf der Leitung. Graphische Darstellungen dieser Zusammenhänge findet man in vielen weiterführenden Lehrbüchern, z.B. in [261, 282, 318]. Diese Effekte liefern auch die Basis für eine Reihe wichtiger Verfahren der HF-Messtechnik [118, 224, 235, 261, 282, 287, 318].

Bei der Analyse von Zusammenschaltungen von Leitungsmodellen mit nichtlinearen Netzwerken ist man i.a. auf numerische Verfahren angewiesen. Immerhin kann man aber in dem für viele Anwendungen wichtigen Sonderfall, bei dem eine durch die Heavisideschen Leitungsgleichungen beschriebene Doppelleitung an der Stelle $z = l$ mit einem linearen zeitinvarianten Netzwerk abgeschlossen ist, einige allgemeingültige Aussagen über die Eigenschaften der sinusförmig eingeschwungenen Lösungen einer solchen Zusammenschaltung herleiten. Wir wollen dabei von der Annahme ausgehen, dass sich das Klemmenverhalten dieses linearen zeitinvarianten Netzwerks unter Berücksichtigung der in Abb. 35.22 angegebenen Bezugsrichtungen mit einer Impedanz Z_2 durch die Beziehung

$$U_2 = -Z_2 I_2 \quad (35.275)$$

darstellen lässt.

Aus Glg. (35.243) erhält man mit Glg. (35.275) die Beziehung

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) \\ Z_L I(z, j\omega) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e^{+\gamma(l-z)} & e^{-\gamma(l-z)} \\ e^{+\gamma(l-z)} & -e^{-\gamma(l-z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_L \\ Z_2 - Z_L \end{pmatrix} I_2. \quad (35.276)$$

Offensichtlich bildet die Menge der komplexen Amplituden der sinusförmig eingeschwungenen Lösungen der Heavisideschen Leitungsgleichungen nun nur noch einen eindimensionalen komplexen linearen Raum.

Multipliziert man (35.276) von links mit der Matrix (35.228), so erhält man für die komplexen Amplituden der hin- und rücklaufenden (Spannungs-) Wellen die Darstellung

$$\begin{pmatrix} U(z, j\omega) + Z_L I(z, j\omega) \\ U(z, j\omega) - Z_L I(z, j\omega) \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} e^{+\gamma(l-z)} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma(l-z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_L \\ Z_2 - Z_L \end{pmatrix} I_2. \quad (35.277)$$

Dann ist der durch

$$r(z, j\omega) := \frac{U(z, j\omega) - Z_L I(z, j\omega)}{U(z, j\omega) + Z_L I(z, j\omega)} \quad (35.278)$$

definierte Quotient aus der komplexen Amplitude der rück- und der hinlauenden Welle an jeder Stelle z der Leitung unabhängig von dem Parameter I_2 . Damit ist die durch die Zuordnung $(z, j\omega) \mapsto r(z, j\omega)$ definierte Funktion r eine von speziellen Lösungen unabhängige Kenngröße der Zusammenschaltung der Leitung mit der Abschlussimpedanz Z_2 , die als *Reflexionsfaktor* bezeichnet wird.

Wegen Glg. (35.277) gilt

$$r(z, j\omega) = e^{-2\gamma(j\omega)(l-z)} \frac{(Z_2 - Z_L)(j\omega)}{(Z_2 + Z_L)(j\omega)}. \quad (35.279)$$

Speziell ist also

$$r_2 := r(l, \cdot) = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} \quad (35.280)$$

der Reflexionsfaktor am Abschluss der Leitung, und

$$r_{e1}(Z_2)(j\omega) := r(0, j\omega) = e^{-2\gamma(j\omega)l} \ r_2(j\omega). \quad (35.281)$$

ist der zugehörige Wert des Reflexionsfaktors am Eingang der Leitung.

An dieser Stelle muss noch einmal daran erinnert werden, dass in allen Teilen des Abschnitts 35.5 ausschließlich sinusförmig eingeschwungene Lösungen der Leitungsgleichungen untersucht werden, die auf der gesamten Zeitachse von $-\infty$ bis $+\infty$ durch die Gleichungen (35.204) beschrieben werden. Wie in Abschn. 35.4.2 gezeigt worden ist, lassen sich die Lösungen der Heavisideschen Leitungsgleichungen i.a. nicht durch einen d'Alembertschen Ansatz beschreiben. Man darf deshalb Glg. (35.281) nicht mit der Vorstellung verbinden, dass dieser komplexwertige Koeffizient den Reflexionsvorgang einer Welle beschreibt, die z.B. ausgehend vom energielosen Anfangszustand für alle $t \geq 0$ von einer Spannungsquelle mit sinusförmiger eingeprägter Spannung angeregt wird, die zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $z = 0$ mit der Leitung verbunden worden ist, und nun nach einer endlichen Laufzeit $t_0 > 0$ erstmalig an der Stelle $z = l$ eintrifft.

Für verlustfreie Leitungen folgt wegen $\gamma l = j\beta l$ und $|e^{-2j\beta l}| = 1$ aus (35.279) für alle $z \in [0, l]$

$$|r(z, j\omega)| = |r_2(j\omega)|. \quad (35.282)$$

Für jede komplexe Zahl z_0 definiert die Zuordnungsvorschrift $z \mapsto \frac{z-z_0}{z+z_0}$ eine konforme Abbildung, die zur Klasse der Möbiustransformationen gehört [22, 115]. Möbiustransformationen sind biholomorphe Abbildungen, die die durch Hinzufügen des unendlichfernen Punkts geschlossene komplexe Ebene auf sich selbst abbilden.

Für den Sonderfall, bei dem Z_L reell ist, bildet die durch den Term auf der rechten Seite von Glg. (35.280) definierte Möbiustransformation die rechte Halbebene der Z_2 -Ebene auf das Innere des Einheitskreises der r_2 -Ebene ab. Für verlust- oder verzerrungsfreie Leitungen gilt deshalb stets die Beziehung

$$|r_2(j\omega)| \leq 1. \quad (35.283)$$

Für verlustbehaftete Leitungen kann dagegen der Betrag von $r_2(j\omega)$ durchaus auch Werte annehmen, die größer als eins sind.

Für verlust- oder verzerrungsfreie Leitungen lässt sich die Wirkung der durch den Term auf der rechten Seite von Glg. (35.280) definierten Möbiustransformation sehr gut durch eine Drehung der Riemannschen Zahlenkugel veranschaulichen: Zu diesem Zweck wird die rechte Halbebene der Z_2 -Ebene zunächst mit der bekannten stereographischen Projektion auf die rechte Halbkugel der Riemannschen Zahlenkugel abgebildet. Dieser Möbiustransformation entspricht nun eine 90° -Drehung der Zahlenkugel, bei der aus der rechten Halbkugel eine untere Halbkugel wird. Durch die anschließende stereographische Projektion wird diese untere Halbkugel in das Innere des Einheitskreises

der komplexen r_2 -Ebene abgebildet, vgl. [22, 115]. Diese geometrischen Beziehungen sind die Grundlage für die Konstruktion des sogenannten *Smith-Diagramms* [118, 224, 235, 261, 282, 287, 318]. (In [118] wird gezeigt, wie man Möbiustransformationen einsetzen kann, um die Wellenwiderstände verschiedener Leitungen ineinander umzurechnen.)

Die Eingangsimpedanz $Z_{e1}(Z_2)$ des mit der Impedanz Z_2 abgeschlossenen Heaviside-Modells einer Übertragungsleitung kann unmittelbar mit Hilfe der Darstellung seiner Spannungs-Strom-Relation in Kettenform berechnet werden. Mit (35.275) und (35.245) erhält man aus

$$\begin{aligned} U_1 &= -(Z_2 \cosh \gamma l + Z_L \sinh \gamma l) I_2, \\ I_1 &= -(Z_2 Z_L^{-1} \sinh \gamma l + \cosh \gamma l) I_2 \end{aligned} \quad (35.284)$$

über

$$U_1 = Z_L \frac{Z_2 \cosh \gamma l + Z_L \sinh \gamma l}{Z_2 \sinh \gamma l + Z_L \cosh \gamma l} I_1 \quad (35.285)$$

durch Koeffizientenvergleich mit dem Ansatz $U_1 = Z_{e1}(Z_2) I_1$ die Beziehung

$$Z_{e1}(Z_2) = \frac{Z_2 + Z_L \tanh \gamma l}{Z_L + Z_2 \tanh \gamma l} Z_L. \quad (35.286)$$

Unter Berücksichtigung von (35.232) erhält man nach einigen elementaren Umformungen aus (35.286) die Gleichung

$$Z_{e1}(Z_2) = \frac{1 + r_2 e^{-2\gamma l}}{1 - r_2 e^{-2\gamma l}} Z_L. \quad (35.287)$$

Auch die durch die Gleichungen (35.286) und (35.287) definierte Transformation sind Möbiustransformationen. Für eine graphische Auswertung dieser Beziehungen mit Hilfe des Smith-Diagramms sei auf [118, 224, 235, 261, 282, 287, 318] verwiesen.

Mit

$$r_2 = \begin{cases} +1 & \text{für } Z_2 = \infty, \\ -1 & \text{für } Z_2 = 0 \end{cases} \quad (35.288)$$

folgen aus (35.287) für die Eingangsimpedanz einer bei $z = l$ offenen oder kurzgeschlossenen Leitung die Beziehungen

$$Z_{e1}(\infty) = Z_L \coth \gamma l \quad (35.289)$$

bzw.

$$Z_{e1}(0) = Z_L \tanh \gamma l. \quad (35.290)$$

Aus (35.289) und (35.290) ergibt sich die Darstellung

$$Z_L = \sqrt{Z_{e1}(\infty) Z_{e1}(0)} \quad (35.291)$$

des Wellenwiderstandes einer Leitung als geometrisches Mittel aus Leerlauf- und Kurzschlusswiderstand.

Zur Berechnung von Z_L muss in Glg. (35.291) der Zweig der Wurzelfunktion gewählt werden, der für $\operatorname{Re} Z_{e1}(\infty), \operatorname{Re} Z_{e1}(0) \geq 0$ Werte liefert, die der Bedingung $\operatorname{Re} Z_L \geq 0$ genügen.

Für $Z_2 = Z_L$ gilt $r_2 = 0$ und damit

$$Z_{e1}(Z_L) = Z_L. \quad (35.292)$$

Wir betrachten nun eine verlustbehaftete Leitung der Länge l , die mit einer Impedanz Z_2 abgeschlossen ist. Wegen $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$ folgt aus Glg. (35.287) für $l \rightarrow +\infty$ die Beziehung

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} Z_{e1}(Z_2) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1 + r_2 e^{-2\gamma l}}{1 - r_2 e^{-2\gamma l}} Z_L = Z_L. \quad (35.293)$$

Für eine hinreichend lange verlustbehaftete Leitung ist deshalb der Eingangswiderstand dieser Leitung in guter Näherung gleich ihrem Wellenwiderstand.

Die Beziehung (35.292) liefert wenigstens einen heuristischen Ansatz, um die in Glg. (35.217) getroffene Wahl des Zweigs der Wurzelfunktion zur Berechnung des Wellenwiderstands einer Leitung aus den Leitungsparametern L', C', R' und G' zu begründen. Gegeben sei eine einseitig unendlich lange verlustbehaftete Leitung im energielosen Anfangszustand, die für $t \geq 0$ an ihrem Eingang mit einer unabhängigen Stromquelle mit der Kreisfrequenz ω sinusförmig erregt wird. Wäre $\operatorname{Re} Z_L(j\omega) < 0$, so würde diese Quelle nach Erreichen des eingeschwungenen Zustands ständig die Wirkleistung $\frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_L(j\omega) |I_1^e|^2 < 0$ abgeben, wobei I_1^e die komplexe Amplitude des eingeprägten Stroms dieser Stromquelle bezeichnet. Weil negative abgegebene Leistung vereinbarungsgemäß als positive aufgenommene Leitung gezählt wird, heißt das, dass die Quelle nachdem die gesamte Schaltung den sinusförmig eingeschwungenen Zustand erreicht hat (der bei realen verlustbehafteten Schaltungen schon nach einer endlichen Zeit und nicht erst für $t \rightarrow \infty$ erreicht wird), ständig die positive Wirkleistung $\frac{1}{2} |\operatorname{Re} Z_L(j\omega)| |I_1^e|^2$ entnimmt. Das ist nicht möglich, ohne den Energiesatz zu verletzen. Also gilt $\operatorname{Re} Z_L(j\omega) \geq 0$.

Wir wollen jetzt das Klemmenverhalten einer Leitung der Länge l an der Stelle $z = l$ betrachten, die bei $z = 0$ mit einer Reihenschaltung aus einer unabhängigen Spannungsquelle mit sinusförmiger Klemmenspannung und einer Impedanz $Z_1 := Z_L$ abgeschlossen ist. U_1^e sei die komplexe Amplitude der eingeprägten Spannung dieser Quelle. Aus den Gleichungen (35.245) für die Spannungs-Strom-Relation des Heaviside-Modells in Kettenform erhält man mit

$$Z_L I_1 = U_1^e - U_1 \quad (35.294)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} U_1 &= \cosh \gamma l U_2 + Z_L \sinh \gamma l (-I_2), \\ U_1^e - U_1 &= \sinh \gamma l U_2 + Z_L \cosh \gamma l (-I_2). \end{aligned} \quad (35.295)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen aus (35.295) lässt sich die Spannung U_1 eliminieren. Eine einfache Umstellung des Ergebnisses liefert für die Beschreibung des Klemmenverhaltens der so abgeschlossenen Leitung die Beziehung

$$U_2 = e^{-\gamma l} U_1^e - Z_L(-I_2). \quad (35.296)$$

Glg. (35.296) lässt sich als eine Leerlaufspannungsersatzschaltung mit der Leerlaufspannung $e^{-\gamma l} U_1^e$ und dem Innenwiderstand Z_L interpretieren. Im eingeschwungenen Zustand gibt dieser Zweipol seine maximale Leistung bei Wirkleistungsanpassung, also bei Abschluss mit der zum Wellenwiderstand konjugiert komplexen Impedanz $Z_2 = \bar{Z}_L$ ab. Nur wenn der Wellenwiderstand der Leitung reell ist, fällt die Leistungsanpassung mit der Wellenwiderstands-anpassung zusammen.

Abschließend soll noch das Verhalten der Kettenbeschaltung der Heaviside-Modelle zweier Leitungsstücke betrachtet werden, die den gleichen Wellenwiderstand, die gleiche Ausbreitungskonstante und die i.a. unterschiedlichen Längen l_1 und l_2 haben. Das Produkt ihrer Kettenmatrizen liefert unter Berücksichtigung der Additionstheoreme für hyperbolische Funktionen die Beziehung

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cosh \gamma l_1 & Z_L \sinh \gamma l_1 \\ Z_L^{-1} \sinh \gamma l_1 & \cosh \gamma l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \gamma l_2 & Z_L \sinh \gamma l_2 \\ Z_L^{-1} \sinh \gamma l_2 & \cosh \gamma l_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(\gamma l_1 + \gamma l_2) & Z_L \sinh(\gamma l_1 + \gamma l_2) \\ Z_L^{-1} \sinh(\gamma l_1 + \gamma l_2) & \cosh(\gamma l_1 + \gamma l_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35.297)$$

Mit anderen Worten, bei dieser Kettenbeschaltung addieren sich die Übertragungsmaße γl_1 und γl_2 der beiden Leitungsstücke.

Diese Beobachtung ist seinerzeit ein wichtiger Anstoß für die Entwicklung der Kettenleitertheorie und der daraus gewonnenen Wellenparametertheorie für den Filterentwurf gewesen, Einzelheiten siehe [145, 104, 48].

Hohlleiter und Hohlraumresonatoren

Bei hohen Frequenzen kann elektromagnetische Energie im *Innenraum* von hohlzylindrischen Leitern übertragen werden. Die Leitungsverluste durch Stromwärme im Leitungsmaterial können dann sogar geringer sein als bei Drahtleitungen, wo die hohe Feldkonzentration an den Leitungsdrähten nach Gl.(29.117) hohe Verluste bedingt. Praktisch werden besonders Hohlleiter von kreisförmigen und von rechteckigen Querschnitten verwendet. Im folgenden wird als Beispiel die Theorie der Übertragung in *rechteckigen Hohlleitern* betrachtet, zugleich als weiteres Beispiel für die Anwendung der Feldgleichungen.

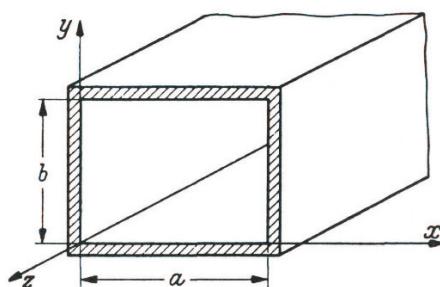


Abbildung 36.1. Rechteckhohlleiter

Der Innenraum des Hohlleiters, Abb. 36.1, sei durch die Abmessungen a und b gekennzeichnet. Die z -Richtung des Achsensystems sei die Längsrichtung und damit zugleich die Richtung der Energieübertragung. Zunächst werde angenommen, dass das Leitermaterial unendlich gut leitend sei, so dass die Eindringtiefe des Feldes unendlich klein wird. Dann muss die Tangentialkomponente des E-Feldes an der gesamten Innenfläche des Leiters verschwinden; die Grenzbedingungen lauten

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } y = b, \\ E_y &= 0 \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x = a, \\ E_z &= 0 \quad \text{für } x = 0, x = a, y = 0 \text{ und } y = b. \end{aligned} \quad (36.1)$$

Wird man eine sinusförmige Zeitabhängigkeit der Feldgrößen mit der Kreisfrequenz ω vorausgesetzt, so liefern die beiden Feldgleichungen (33.6) und (33.9) das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j\omega\epsilon_0 E_x; & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -j\omega\mu_0 H_x; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon_0 E_y; & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 H_y; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon_0 E_z; & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Alle Feldgrößen sind ohne besondere Kennzeichnung als komplex anzusehen.

Führt man für die Ausbreitung in der z -Richtung ähnlich wie bei Leitungen ein zunächst noch unbekanntes Fortpflanzungsmaß γ ein, so sind alle Größen mit dem Faktor $e^{\gamma z}$ multipliziert zu denken. Dieser Faktor hebt sich damit auf beiden Seiten der Gleichungen heraus und an Stelle der Ableitungen nach z erscheint der Faktor γ . Die Gl. 36.2) lauten damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma H_y &= j\omega\epsilon_0 E_x; & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma E_y &= -j\omega\mu_0 H_x \\ \gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon_0 E_y; & \gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 H_y; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon_0 E_z; & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z. \end{aligned} \quad (36.3)$$

Diese Gleichungen beschreiben alle möglichen Feldformen, mit denen sich elektromagnetische Wellen längs des Leiters ausbreiten können. Praktisch wichtig sind besonders zwei Klassen von Wellen, die dadurch gekennzeichnet sind, dass entweder das E-Feld oder das H-Feld *keine Komponenten in der z -Richtung*, also nur transversale Komponenten hat. Wellen der ersten Art nennt man *transversal-elektrische Wellen*, abgekürzt TE-Wellen oder H-Wellen; Wellen der zweiten Art nennt man *transversal-magnetische Wellen*, abgekürzt TM-Wellen oder E-Wellen.

Bei gewöhnlichen Leitungswellen sind das E- und das H-Feld transversal; vgl. Abschnitt 35. Diese Wellen werden daher auch als TEM-Wellen bezeichnet. Sie haben bei den Leitungen zur Voraussetzung, dass die Abstände zwischen Hin- und Rückleitung klein gegen die Wellenlänge sind.

Bei den TE-Wellen (H-Wellen), die wir als Beispiel weiter betrachten, ist also $E_z = 0$.

Damit wird aus den Gl. (36.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \gamma H_y &= j\omega\varepsilon_0 E_x; & -\gamma E_y &= -j\omega\mu_0 H_x \\ \gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_0 E_y; & +\gamma E_x &= -j\omega\mu_0 H_y; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 H_z. \end{aligned} \quad (36.4)$$

Durch Einführung der drei H -Komponenten aus den drei rechten Gleichungen in die drei linken folgt

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \gamma E_x = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 E_x, \quad (36.5)$$

$$-\gamma^2 E_y - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 E_y, \quad (36.6)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (36.7)$$

und hieraus durch Einsetzen der letzten Gleichungen in die beiden anderen

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -(\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2) E_x, \quad (36.8)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -(\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2) E_y, \quad (36.9)$$

Diese Gleichungen lassen sich durch die Ansätze, die man auch direkt mit Hilfe eines Separationsansatzes erhält,

$$\sin px \cos qy, \quad \sin px \sin qy, \quad (36.10)$$

$$\cos px \cos qy, \quad \cos px \sin qy \quad (36.11)$$

für E_x und E_y integrieren, wobei sich ergibt

$$p^2 + q^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \gamma^2. \quad (36.12)$$

Die allgemeinen Lösungen für das E-Feld lauten daher

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \sin px \cos qy + A_2 \cos px \cos qy + \\ &\quad + A_3 \sin px \sin qy + A_4 \cos px \sin qy; \end{aligned} \quad (36.13)$$

$$\begin{aligned} E_y &= B_1 \sin px \cos qy + B_2 \cos px \cos qy + \\ &\quad + B_3 \sin px \sin qy + B_4 \cos px \sin qy. \end{aligned} \quad (36.14)$$

Die Grenzbedingungen (36.1) liefern für $y = 0$

$$0 = A_1 \sin px + A_2 \cos px, \quad (36.15)$$

und für $x = 0$

$$0 = B_1 \cos qy + B_4 \sin qy. \quad (36.16)$$

Diese Gleichungen können nur so erfüllt werden, dass

$$A_1 = 0, A_2 = 0, B_2 = 0, B_4 = 0. \quad (36.17)$$

Ferner wird nun

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = A_3 p \cos px \sin qy - A_4 p \sin px \sin qy, \quad (36.18)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -B_1 q \sin px \sin qy + B_4 q \sin px \cos qy \quad (36.19)$$

Aus Gl.(36.7) folgt daher

$$A_4 q + B_1 p = 0, A_3 = 0, B_3 = 0, \quad (36.20)$$

und es bleibt

$$E_x = A_4 \cos px \sin qy, \quad (36.21)$$

$$E_y = -A_4 \frac{p}{q} \sin px \cos qy. \quad (36.22)$$

Nun sind noch die Grenzbedingungen (36.1) für $y = b$ und $x = a$ zu erfüllen

$$0 = A_4 \cos pa \sin qb \quad \text{für alle } x, \quad (36.23)$$

$$0 = -A_4 \frac{p}{q} \sin pa \cos qy \quad \text{für alle } y. \quad (36.24)$$

Die erste Gleichung fordert

$$qb = n\pi \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (36.25)$$

Die zweite Gleichung fordert

$$pa = m\pi \quad \text{mit } m = 0, 1, 2, \dots \quad (36.26)$$

Die Lösungen lauten also schließlich, wenn A für A_4 geschrieben wird,

$$E_x = A \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad (36.27)$$

$$E_y = -A \frac{m}{n} \frac{b}{a} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}, \quad (36.28)$$

und es ist nach Gl.(36.12)

$$\gamma^2 = -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2. \quad (36.29)$$

Für die Komponenten des H-Felder ergibt sich durch Einsetzen in die Gl.(36.4) (rechte Seite):

$$H_x = -\frac{\gamma}{j\omega\mu_0} A \frac{m}{n} \frac{b}{a} \sin m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}; \quad (36.30)$$

$$H_y = -\frac{\gamma}{j\omega\mu_0} A \frac{b}{a} \cos m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}; \quad (36.31)$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu_0} A \frac{b}{n\pi} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cos m\pi \frac{x}{a} \cos n\pi \frac{y}{b}. \quad (36.32)$$

Da m und n beliebige ganze Zahlen sein können, so beschreiben die Gln.(36.27) bis (36.32) unendlich viele verschiedene Wellenformen. Man kennzeichnet sie durch die Indizes m und n als TE_{mn} -Wellen oder H_{mn} -Wellen. Welche Wellenformen sich ausbildet, hängt von der Art der Anregung am Anfang des Hohlleiters und von der Frequenz ω der Anregung ab. Die praktisch meist verwendete Welle ist die TE_{01} -Welle (H_{01} -Welle).

Hier ist

$$\gamma^2 = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2. \quad (36.33)$$

γ wird also bei hohen Frequenzen rein imaginär: $\gamma = \pm j\beta$, und es ist

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2}. \quad (36.34)$$

Ferner gilt für die Zeiger der TE_{01} -Welle in komplexer Schreibweise (ohne besondere Kennzeichnung) unter Berücksichtigung des Faktors $\exp \gamma z$

$$\begin{aligned} E_x &= a e^{\pm j\beta z} \sin \pi \frac{y}{b}; & H_x &= 0; \\ E_y &= 0; & H_y &= \mp \frac{\beta}{\omega \mu_0} A e^{\pm j\beta z} \sin \pi \frac{y}{b}; \\ E_z &= 0; & H_z &= \frac{1}{j\omega\mu_0} A \frac{\pi}{b} e^{\pm j\beta z} \cos \pi \frac{y}{b}. \end{aligned} \quad (36.35)$$

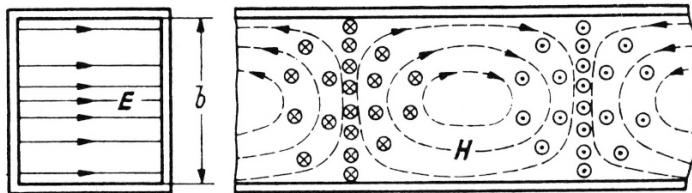


Abbildung 36.2. Feldlinien der H_{01} -Welle

Die E-Feldlinien haben die x -Richtung und sind gerade Linien, Abb. 36.2. Die H-Feldlinien (gestrichelt) sind in geschlossenen Kurven mit den E-Feldlinien verkettet; sie verlaufen in Ebenen parallel zur y, z -Ebene. Das ganze

Feldbild wandert mit der *Phasengeschwindigkeit*

$$v_p := \frac{\omega}{\beta} \quad (36.36)$$

in der z -Richtung. Die Phasengeschwindigkeit ist mit Gl.(36.34)

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 - \left(\frac{\pi}{\omega b}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{2bf}\right)^2}}. \quad (36.37)$$

Sie ist größer als die Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ und nähert sich ihr mit wachsender Frequenz f . Bei Verkleinerung der Frequenz wächst v_p in der durch Abb. 36.3 dargestellten Weise und wird bei einer bestimmten Kreisfrequenz ω_g unendlich groß.

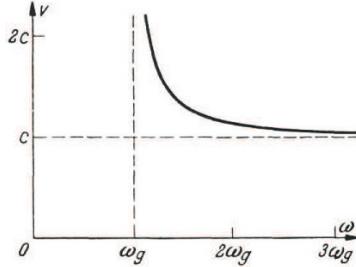


Abbildung 36.3. Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Frequenz

Unterhalb dieser „Grenzfrequenz“ ist γ reell, so dass jede Welle beim Fortschreiten in der z -Richtung sehr stark gedämpft wird. Nur für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz

$$\omega_g = \frac{\pi}{a}c \quad \text{oder} \quad f_g = \frac{1}{2} \frac{c}{b} \quad (36.38)$$

ist der Rechteckhohlleiter daher zur Energieübertragung geeignet, z. B. bei $b = 1 \text{ cm}$ nur oberhalb der Frequenz $f_g = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ Hz} = 15 \text{ GHz}$. Führt man die Wellenlänge $\lambda = c/f$ an Stelle der Frequenz ein, so ergibt sich die *Grenzwellenlänge* des Hohlleiters

$$\lambda_g = 2b. \quad (36.39)$$

Sie ist doppelt so groß wie die Länge der Rechteckseite quer zum elektrischen Feld. Nur für kürzere Wellenlängen ist der Leiter übertragungsfähig.

Dass die Phasengeschwindigkeit hier größer als die Lichtgeschwindigkeit wird, besagt nicht etwa, dass sich die Energie rascher als mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt. Einen vertieften Einblick in die Verhältnisse erhält man

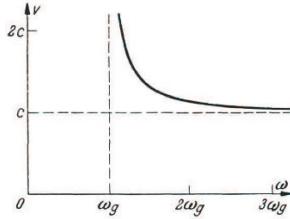


Abbildung 36.4. Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Frequenz

durch die folgende Deutung der Wellenfortpflanzung in Hohlleitern. Eine *ebene* Welle, die sich frei im Raum in der z -Richtung mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, kann nach Abschnitt 34.1 durch die Feldstärken

$$E = E_0 e^{j\omega(t - \frac{z}{c})}, \quad H = \frac{E}{Z_0} \quad (36.40)$$

beschrieben werden. Bildet die Fortpflanzungsrichtung der Welle mit der z -

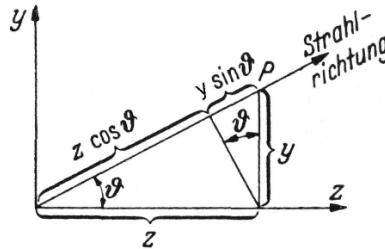


Abbildung 36.5. Ebene Welle, schrig zur z -Richtung

Achse einen Winkel ϑ , Abb. 36.5, so ist z durch $z \cos \vartheta + y \sin \vartheta$ zu ersetzen. Daher ist für irgendeinen Punkt P

$$E = E_0 e^{j\omega(t - \frac{z}{c} \cos \vartheta - \frac{y}{c} \sin \vartheta)}, \quad H = \frac{E}{Z_0}. \quad (36.41)$$

Es lässt sich nun zeigen, dass durch die Überlagerung zweier ebener Wellen, deren Fortpflanzungsrichtungen die Winkel $+\vartheta$ und $-\vartheta$ zur z -Achse bilden und deren E -Richtungen mit der x -Richtung zusammenfallen, ein E -Feld entsteht, das die Grenzbedingungen in einem Rechteckhohlleiter erfüllt. Sei also nach Abb. 36.6

$$E = 2E_0 e^{j\omega(t - \frac{z}{c} \cos \vartheta - \frac{y}{c} \sin \vartheta)} + E_0 e^{j\omega(t - \frac{z}{c} \cos \vartheta + \frac{y}{c} \sin \vartheta)}. \quad (36.42)$$

Dies lässt sich schreiben

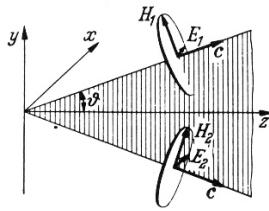


Abbildung 36.6. Überlagerung, zweier die z -Richtung unter entgegengesetzt gleichen Winkel kreuzenden, ebenen Wellen

$$E = E_0 e^{j\omega(t - \frac{z}{c} \cos \vartheta)} \cos\left(\frac{\omega y}{c} \sin \vartheta\right). \quad (36.43)$$

Das resultierende E-Feld verschwindet also für bestimmte Werte von y , für die

$$\frac{\omega y}{c} \sin \vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (36.44)$$

ist.

In den dadurch bestimmten Ebenen parallel zur x, z -Ebene ist $E = E_x = 0$. Für den Abstand b zweier solcher Ebenen gilt daher

$$\frac{\omega b}{c} \sin \vartheta = \pi, \quad (36.45)$$

und man kann sich in diesen beiden Ebenen ideal leitende Flächen angebracht denken.

Umgekehrt bilden sich bei der Wellenausbreitung zwischen zwei solchen Flächen zwei Wellen mit einem ganz bestimmten Winkel ϑ gegen die Längsrichtung aus, Abb. 36.7, für den die Gl.(36.45) gilt:

$$\sin \vartheta = \frac{\pi c}{\omega b} = \frac{\lambda}{2b} = \frac{\lambda}{\lambda_g}. \quad (36.46)$$

Die Wellen pflanzen sich also auf Zickzack-Bahnen mit Lichtgeschwindigkeit fort. Die in der z -Richtung gemessene Länge einer Welle ist, wie Abb. 36.7

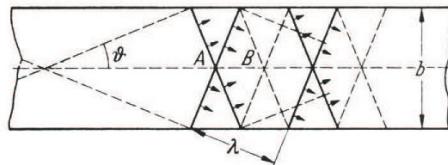


Abbildung 36.7. Aufspaltung der Hohlleiterwelle in zwei ebene Wellen

zeigt, größer als λ . Die Strecke AB stellt die halbe Länge einer Welle in der

z -Richtung dar, nämlich den Abstand zwischen dem positiven und negativen Maximum der Felder. Er ist um den Faktor $1/\cos \vartheta$ größer als $\lambda/2$. Die Länge einer Periode des in der z -Richtung fortschreitenden Feldbildes ist also $\lambda/\cos \vartheta = c/(f \cos \vartheta)$. Da $1/f$ die Zeitdauer einer Periode ist, so folgt daraus für die Geschwindigkeit, mit der Punkte gleicher Phase den Hohlleiter durchlaufen,

$$v_p = \frac{c}{\cos \vartheta}. \quad (36.47)$$

Dies ist gleichbedeutend mit Gl.(36.37). Wenn dort die Grenzwellenlänge λ_g nach Gl.(36.39) eingeführt und Gl.(36.46) berücksichtigt wird, ergibt sich nämlich

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2}} = \frac{c}{\cos \vartheta}. \quad (36.48)$$

Die *Phasengeschwindigkeit* v_p der Wellenfortpflanzung ist in dem Übertragungsbereich des Wellenleiters ($\lambda < \lambda_g$) größer als die Lichtgeschwindigkeit c .

Die *Geschwindigkeit des Energietransportes* dagegen wird infolge der Zick-zack-Bahn kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, nämlich gleich (Gruppengeschwindigkeit)

$$v_p = c \cos \vartheta = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2}. \quad (36.49)$$

Die *Wellenform* kann durch die Art der Anregung und die Frequenz der Anregung gewählt werden. Ist der Wellenleiter für die betreffende Frequenz übertragungsfähig, dann genügt es, ein elektrisches oder magnetisches Feld am Anfang des Wellenleiters einzuführen, die eine Komponente der gewünschten Wellenform besitzt. Z. B. genügt die Einführung eines elektrischen Feldes in der x -Richtung zur Erzeugung von TE_{01} -Wellen. Um diese allein zu erhalten, muss jedoch a gleich oder etwas kleiner als b gemacht werden, und die Grenzwellenlänge darf nur verhältnismäßig wenig über der Betriebswellenlänge liegen, damit nicht Wellen höherer Ordnung auftreten können, insbesondere TE_{11} -Wellen und TM_{11} -Wellen, bei denen die Grenzwellenlänge $\lambda_g = \sqrt{2}b$ ist.

Wegen der endlichen Leitfähigkeit wirklicher Wellenleiter pflanzen sich die Wellen wie bei Leitungen fort. Für TE_{0n} - und TE_{m0} -Wellen kann der *Dämpfungsbelag* nach einem in der HF-Technik angewandten Verfahren (vgl. [235], [261]) aus der in einem Abschnitt s erzeugten Stromwärme P_v und der übertragenen Leistung P berechnet werden:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P_v}{P} \frac{1}{s}. \quad (36.50)$$

Die Rechnung werde wieder für die TE_{01} -Welle als Beispiel durchgeführt.

Die an irgendeiner Stelle z durch die Querschnittsfläche ab fließende Leistung ergibt sich mit Gl.(36.35) aus der Strahlungsdichte in der z -Richtung

$$S_z(y) = |E_x H_y| = \frac{\beta}{\omega \mu_0} A^2 \sin^2 \pi \frac{y}{b}. \quad (36.51)$$

Durch einen Flächenstreifen von der Höhe dy und der Breite a fließt die Leistung $a dy S_z$ und der gesamte Leistungsfluss ist

$$P = \int_0^b S_z(y) a dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} A^2 ab. \quad (36.52)$$

Aus dem tangentialen H-Feld an den inneren Begrenzungsflächen ergibt sich die Stromwärme nach Gl.(29.117). Die z -Komponente (Gl.(36.35)) verursacht an den beiden waagerechten Begrenzungsflächen die Verlustdichte

$$\sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\kappa_1}} \left(\frac{A}{\omega \mu_0} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2, \quad (36.53)$$

wenn mit κ_1 und μ_1 die Konstanten des Leitermaterials bezeichnet werden. An den beiden senkrechten Begrenzungsflächen setzen sich die y -Komponenten und die z -Komponente des H-Feldes zu dem resultierenden H-Feld

$$|H_0| = \sqrt{|H_y|^2 + |H_z|^2} = \frac{A}{\omega \mu_0} \sqrt{\beta^2 \sin^2 \pi \frac{y}{b} + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} \cos^2 \pi \frac{y}{b}. \quad (36.54)$$

Durch Integration über die Begrenzungsflächen findet man die gesamte Verlustleistung. Sie beträgt je Länge s

$$P_v = s \sqrt{\frac{\pi f \mu_1}{\kappa_1}} \left(\frac{A}{\omega \mu_0} \right)^2 ab \left(\frac{\beta^2}{a} + \frac{2}{b} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right). \quad (36.55)$$

Damit wird

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P_v}{P} \frac{1}{s} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\pi \mu_1}{2b \mu_0 \kappa_1 Z_0}} \frac{\frac{b}{a} + 2\eta^2}{\sqrt{\eta(1 - \eta^2)}}, \quad (36.56)$$

wobei zur Abkürzung

$$\eta := \frac{\lambda}{\lambda_g} = \frac{1}{2bf \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (36.57)$$

und $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ gesetzt ist.

Zahlenbeispiel: Bei einem Hohlleiter mit $a = b = 2 \text{ cm}$ wird die Grenzwellenlänge nach Gl.(36.39) $\lambda_g = 4 \text{ cm}$. Besteht der Leiter aus Kupfer mit $\kappa_1 = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/cm}$, so ergibt sich aus Gl.(36.56)

$$\alpha = 3,02 \frac{1 + 2\eta^2}{\sqrt{\eta(1 - \eta^2)}} \frac{Np}{km}. \quad (36.58)$$

Die danach berechneten Werte der Dämpfung sind in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ in Abb. 36.8 aufgetragen. Die Dämpfung steigt in der Nähe der

Grenzwellenlänge sehr stark an und hat ein Minimum etwa bei einem Drittel der Grenzwellenlänge. Bei kürzeren Wellenlängen geht sie ebenfalls gegen Unendlich. In das gleiche Bild ist die Dämpfung eines *koaxialen* Kabels gestrichelt eingezeichnet, dessen Kupfermantel einen Innendurchmesser von 2 cm und dessen Innenleiter einen Durchmesser von $0,56\text{ cm}$ („günstiger“ Innenleiterdurchmesser, siehe weiter unten) hat. Für die Dämpfung gilt hier nach Gl.(35.266) $\alpha = \frac{1}{2}(R'_i + R'_a)\frac{1}{Z_0}$, wobei R'_i und R'_a die Widerstandsbeläge des Innen- und Außenleiters bezeichnen. Bei hohen Frequenzen ist nach Gl.(29.57)

$$R'_i = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\kappa_1\pi}}, \quad R'_a = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\kappa_1\pi}}. \quad (36.59)$$

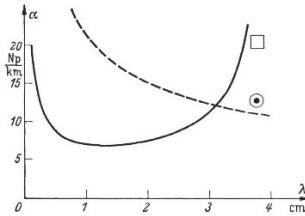


Abbildung 36.8. Dämpfungsbelag eines quadratischen Hohlleiters \square mit 2cm Kantenlänge im Vergleich zu einem koaxialen Kabel \odot mit 2cm Außenleiterdurchmesser

Ferner ist nach Gl. (10.67) und Gl. (24.31) (vgl. auch Gl. (35.58))

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 60 \ln \frac{D}{d} \Omega, \quad (36.60)$$

wenn mit D und d die Durchmesser von Außen- und Innenleiter bezeichnet werden. Daher wird

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f\mu_0}{\kappa_1\pi}} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \frac{1}{60 \ln \frac{D}{d} \Omega}. \quad (36.61)$$

Durch Differenzieren nach d findet man, dass dieser Ausdruck ein Minimum für $d = 0,278 D$ hat. Damit wird

$$\alpha = \frac{21,6}{\sqrt{\lambda/\text{cm}}} \frac{Np}{\text{km}}. \quad (36.62)$$

Der Hohlleiter hat bei Wellenlängen unterhalb etwa 3 cm eine geringere Dämpfung als das koaxiale Kabel gleichen Durchmessers. In Wirklichkeit kommen bei Koaxialkabeln noch die dielektrischen Verluste im Isoliermaterial hinzu (Ableitungsdämpfung), so dass der Unterschied zwischen den Dämpfungen größer ist als in Abb. 36.8.

Wird ein Hohlleiter an beiden Enden durch leitende Wände abgeschlossen, so entsteht ein Hohlraum, in dem sich eine stehende Welle ausbilden kann. Die Bedingung dafür lautet

$$\beta l = \pi, 2\pi, \dots, p\pi, \dots, \quad (36.63)$$

wenn mit l die Länge des Hohlraumes in der z -Richtung bezeichnet wird. Durch Einsetzen von Gl.(36.63) in Gl.(36.29) ergibt sich für den rechteckigen Hohlleiter mit $\gamma^2 = -\beta^2$

$$\omega_g^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \quad (36.64)$$

oder

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 + \left(\frac{p}{2l} \right)^2. \quad (36.65)$$

Auch hier ist also eine unendliche große Zahl von Schwingungsformen möglich. Wird der Hohlraum mit einer dieser Resonanzwellenlängen erregt (z.B. durch ein hineinragendes Leiterstück geeigneter Form), so ergeben sich große Amplituden der Felder wie bei einem Schwingkreis im Resonanzfall. Derart angeregte Hohlräume werden daher als „Hohlraumresonatoren“ bei hohen Frequenzen an Stelle von Schwingkreisen benutzt. Wegen der geringen Verluste durch Wandströme erreicht man mit ihnen sehr hohe Gütezahlen.

Teil VIII

Das elektromagnetische Feld in elektronischen Bauelementen

Mechanismen der Stromleitung

37.1 Stromleitung in Gasen: Grundbegriffe (Internet)

37.1.1 Stoßionisierung

37.1.2 Elektronenauslösung an der Kathode

37.1.3 Anlaufspannung. Durchschlag in Gasen

37.1.4 Koronaentladung

37.1.5 Kurzzeitige Gasentladung

37.1.6 Bogenentladung

37.1.7 Bogenentladung an Kontakten

37.1.8 Die Kapazität bei Feldern mit Raumladungen

37.1.9 Der Durchschlag von Isolierstoffen

Anmerkung: Der Unterabschnitt 37.1 kann aus dem Internet als PDF-File geladen werden; Einzelheiten dazu findet man im Vorwort zu diesem Buch. Die Hinweise auf Abschnitte, Gleichungen und Abbildungen beziehen sich auf den vorliegenden Text. Die Seitennummern entsprechen der Vollversion des Buchmanuskripts, die sämtliche im Internet vorhandenen Unterabschnitten einbezieht und können somit leider nicht mit den Seitennummern der vorliegenden gedruckten Version des Buchmanuskripts in Zusammenhang gebracht werden.

37.2 Stromleitung in festen Körpern und Flüssigkeiten

37.2.1 Atomstruktur der Leiter und Leitungsmechanismen

Den bisherigen Betrachtungen liegt die Vorstellung zugrunde, dass der konstante elektrische Strom durch ein gleichmäßiges Fließen von Elektrizitätsmengen in den elektrischen Leitern dargestellt wird. In dieser Vorstellung wird die Elektrizität als eine fein verteilte nicht zusammendrückbare Flüssigkeit aufgefasst, die die elektrischen Leiter ausfüllt wie Wasser den Hohlraum eines Leitungsrohrs. Sobald diese Flüssigkeit in Bewegung kommt, ergeben sich Wärmewirkungen und magnetische Wirkungen, die den elektrischen Strom kennzeichnen. Diese einfache Vorstellung ist für die Lösung einer großen Gruppe von Problemen vollständig ausreichend. Einen vertieften Einblick in das Zustandekommen der elektrischen Erscheinungen hat die Erkenntnis gebracht, dass die Elektrizität wie die Materie Atomstruktur besitzt.

Die kleinsten Teilchen negativer Elektrizität sind die *Elektronen*. Elektrizitätsmengen treten nur als ganzzahlige Vielfache dieser sehr kleinen Elektrizitätsmenge, der *Elementarladung* auf, die nach den genauesten Messungen

$$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} C \quad (37.1)$$

beträgt.

Freie Elektronen, wie sie z. B. durch Erhitzen elektrischer Leiter im luftleeren Raum erzeugt werden können, zeigen bei allen Bewegungsvorgängen die Erscheinungen der tragen Masse. Bei Geschwindigkeiten, die niedrig im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind, beträgt die experimentell feststellbare Masse (*Ruhemasse*)

$$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} kg. \quad (37.2)$$

Mit wachsender Bewegungsgeschwindigkeit v der Elektronen wächst ihre Masse und zwar gemäß dem Gesetz

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad (37.3)$$

wobei $c = 299792458 m/s$ die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum bedeutet.

Die räumliche Ausdehnung der *freien Elektronen* ist sehr gering. Man darf sich das freie Elektron etwa als Kugel vorstellen, deren Radius kleiner ist als

$$3 \cdot 10^{-15} m = 3 fm. \quad (37.4)$$

Im Sinne des Bohrschen Atommodells setzt sich die *Elektronenhülle der Atome* aus Elektronen zusammen, die den *Atomkern* schalenförmig umgibt. Im Rahmen der Quantenmechanik hat sich gezeigt, dass die Verhältnisse komplizierter sind, worauf jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll; in der Literatur über Quantenmechanik findet man weitere Einzelheiten (z. B. Kacher und Meyer [139] sowie Neundorf, Pfendtner und Popp [212] für

eine einführende Übersicht und weitere Literatur). Die chemischen Elemente unterscheiden sich durch die Anzahl Z der Elektronen je Atom. Z ist die Ordnungszahl des Elements, z. B. $Z = 29$ bei Kupfer, $Z = 13$ bei Aluminium. Kupfer hat also 29 Elektronen in der Elektronenhülle eines jeden Atoms. Die gesamte negative elektrische Ladung der Elektronenhülle beträgt $Z \cdot e$.

Der Atomkern kann zusammengesetzt gedacht werden aus Z Protonen und einer bestimmten Anzahl N Neutronen. Das Proton hat eine Masse, die rund 1836mal so groß wie die des Elektrons ist, und eine positive Ladung e . Das Neutron hat fast genau die gleiche Masse wie das Proton, aber keine elektrische Ladung. Die Masse des Atoms ist daher ungefähr $(Z + N) 1836 m_0$.

$Z + N$ heißt die *Massenzahl* des Atoms, Z auch die *Kernladungszahl*. Z. B. ist

$$\text{für Aluminium } Z + N = 27, \quad (37.5)$$

für die beiden Isotope von Kupfer $Z + N = 63$ bzw. 65.

Die Protonen und Neutronen sind im Atomkern auf einem Raum zusammengedrängt, dessen Durchmesser in der Größenordnung

$$10 \cdot 10^{-15} m = 10 fm \quad (37.6)$$

liegt.

Die Elektronenhülle nimmt einen dagegen sehr großen Raum ein, dessen Durchmesser 10000 – 100000mal so groß ist, so dass die Atomkerne in einem festen Körper verhältnismäßig große Abstände voneinander haben. So liegen z. B. in dem kubisch flächenzentrierten Kupferkristall mit einer Kantenlänge der Elementarzelle von $362 pm$ die Abstände benachbarter Atomkerne bei $256 pm$.

37.2.2 Metallische Leiter

Die Elektronen der äußeren Schale sind verhältnismäßig locker an das Atom gebunden. In den *metallischen Leitern* sind einige dieser Elektronen frei beweglich zwischen den ein festes Gerüst bildenden Atomresten (Ionen). Sie führen, ähnlich wie die Moleküle eines Gases, ungeordnete Bewegungen in allen Richtungen aus und sind die Ursache der Leitfähigkeit. Man nennt sie die Leitungselektronen und die Gesamtheit der Leitungselektronen auch *Elektronengas*.

Der elektrische Strom besteht nun darin, dass sich der ungeordneten Bewegung der Elektronen, deren mittleres Geschwindigkeitsquadrat der Temperatur proportional ist, eine Bewegung in der Stromrichtung überlagert („Drift“), deren Geschwindigkeit allerdings sehr gering ist gegen die mittlere Geschwindigkeit der Wärmebewegung der Elektronen.

Die Stromstärke ist der Quotient aus der durch den Leiterquerschnitt fließenden Elektrizitätsmenge und der Zeit. Bei einer Stromdichte von $1 A/cm^2$ wird in einer Sekunde eine Elektrizitätsmenge von $1 As$ durch einen Querschnitt von $1 cm^2$ transportiert; da ein Elektron eine Elektrizitätsmenge von $l,6 \cdot 10^{-19} As$ mit sich führt, so müssen rund $6 \cdot 10^{18}$ Elektronen in jeder Sekunde

durch den Leiterquerschnitt von 1cm^2 wandern. Trotz dieser großen Zahl ist jedoch die Driftgeschwindigkeit gering, da in dem metallischen Leiter sehr viele freie Elektronen vorhanden sind. Im Kubikzentimeter eines Kupferkristalls befinden sich z. B. rund $8,5 \cdot 10^{22}$ Kupferatome (Avogadro-Konstante $6,02 \cdot 10^{23}$ Atome/mol, mal Dichte $8,9\text{g/cm}^3$, geteilt durch Atommasse 64g/mol). Kupfer hat nur ein einziges Elektron in der äußersten Schale; es ist das Valenzelektron, das die chemische Wertigkeit bestimmt. Dieses Valenzelektron ist so lose an das Atom gebunden, dass es von einem zum anderen Atom übergehen kann. Daher gibt es im Kubikzentimeter bei Kupfer rund $8,5 \cdot 10^{22}$ Leitungselektronen. Eine Stromdichte von 10A/mm^2 entspricht damit einer Driftgeschwindigkeit der Leitungselektronen von

$$v = \frac{10\text{A/mm}^2}{8,5 \cdot 10^{22}\text{cm}^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\text{As}} = 0,735 \frac{\text{mm}}{\text{s}}. \quad (37.7)$$

Wird allgemein die Zahl der Leitungselektronen je Volumen (Elektronendichte) mit n bezeichnet, dann ist die Driftgeschwindigkeit bei der Stromdichte \mathbf{J}

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{J}\|}{ne}, \quad (37.8)$$

und es gilt für die Stromdichte in Vektorschreibweise

$$\mathbf{J} = ne\mathbf{v}. \quad (37.9)$$

Wird hier der Zusammenhang, Gl. (16.12), zwischen Stromdichte und elektrischer Feldstärke eingeführt, so folgt für die Leitfähigkeit

$$\kappa = ne \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{E}\|}. \quad (37.10)$$

Das Verhältnis der Driftgeschwindigkeit zur elektrischen Feldstärke nennt man die *Beweglichkeit* μ_n der Leitungselektronen

$$\mu_n = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{E}\|}. \quad (37.11)$$

Damit wird die Leitfähigkeit auch

$$\kappa = ne\mu_n. \quad (37.12)$$

Bei Kupfer mit $\kappa = 5,7 \cdot 10^7 \text{S/m}$, $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{cm}^{-3}$ wird

$$\mu_n = \frac{5,7 \cdot 10^7}{8,5 \cdot 10^{22} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{Scm}^3}{\text{mA} \cdot \text{s}} = 42 \frac{\text{cm/s}}{\text{V/cm}} = 42 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}. \quad (37.13)$$

Die Drift der Leitungselektronen und damit der elektrische Strom entsteht als Folge der mechanischen Kräfte, die das Spannungsgefälle auf die Leitungselektronen ausübt.

Es sind dies die Kräfte, die als Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte bei elektrisch geladenen Körpern bekannt sind. Erzeugt man zwischen irgendwelchen Leitern, die in einem nichtleitenden Raum aufgestellt sind, Spannungen, so ergibt sich in diesem Raum eine bestimmte Verteilung des Potenzials ähnlich wie im elektrischen Strömungsfeld. Werden elektrisch geladene Teilchen in diesen Raum gebracht, so suchen sie sich zu bewegen, und zwar so, dass positive Elektrizitätsmengen potenzialabwärts zu wandern suchen, also vom positiven zum negativen Pol, negative Elektrizitätsmengen in entgegengesetzter Richtung.

Diesen besonderen Zustand des Raumes, in dem auf Elektrizitätsmengen mechanische Kräfte ausgeübt werden, kennzeichnet man durch die Bezeichnung *elektrisches Feld*. Ein elektrisches Feld ist immer vorhanden, wenn zwischen irgendwelchen Punkten eines Raumes elektrische Spannungen bestehen.

Die elektrische Strömung in den Leitern entsteht daher als Folge der mechanischen Kräfte, die das durch die Stromquelle erzeugte elektrische Feld auf die Leitungselektronen ausübt. Alle Leitungselektronen werden durch diese Kräfte entgegengesetzt zum Potenzialgefälle beschleunigt. Die ihnen dadurch von der Stromquelle zugeführte Energie geben sie bei Zusammenstößen mit den Atomresten an diese ab. Die Wärmeschwingungen der Atomreste werden dadurch verstärkt. Dies ist die Joulesche Wärme, die an allen stromdurchflossenen Leitern beobachtet wird. *Die den Leitungselektronen vom elektrischen Feld erteilte mechanische Arbeit wird in Wärme umgewandelt.*

Mit Hilfe dieser Vorstellung kann man die im elektrischen Feld auf die Elektronen, also auf Elektrizitätsmengen, ausgeübten mechanischen Kräfte aus dem Jouleschen Gesetz berechnen.

Es werde ein gerader zylindrischer Leiter mit dem Querschnitt A betrachtet, durch den ein konstanter Strom I fließt. Die Leitungselektronen führen daher während einer beliebigen Zeit t eine negative Elektrizitätsmenge

$$Q = It \quad (37.14)$$

durch den Leiterquerschnitt. Hat die „Elektronenwolke“ dabei die Geschwindigkeit v , so bewegt sie sich während der Zeit t um ein Stück $l = vt$ weiter. Ein Abschnitt der Wolke von der Länge l enthält daher die Elektrizitätsmenge

$$Q = I \frac{l}{v}. \quad (37.15)$$

Die Stromdichte ist

$$J = \frac{I}{A} = \frac{Qv}{lA}, \quad (37.16)$$

und nach dem Jouleschen Gesetz wird in dem Abschnitt von der Länge l des Leiter eine Leistung

$$P = J \| \mathbf{E} \| l A = Q v \| \mathbf{E} \| \quad (37.17)$$

in Wärme umgesetzt, wobei $\| \mathbf{E} \|$ die elektrische Feldstärke im Leiter bezeichnet. Andererseits wird auf den betrachteten Ausschnitt der Elektronenwolke

vom elektrischen Feld eine Kraft $\|\mathbf{F}\|$ ausgeübt. Die zur Fortbewegung dieses Abschnittes nötige Leistung ist daher

$$P = \|\mathbf{F}\|v. \quad (37.18)$$

Aus der Gleichheit der beiden Leistungen folgt

$$\|\mathbf{F}\| = Q\|\mathbf{E}\|. \quad (37.19)$$

Die Kraft hat die entgegengesetzte Richtung wie die elektrische Feldstärke, wenn die Elektrizitätsmenge Q negativ ist; sie hat die gleiche Richtung wie \mathbf{E} bei positivem Q . Stellt man die Kraft durch einen Vektor \mathbf{F} dar, so gilt also

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}. \quad (37.20)$$

Im elektrischen Feld wird auf eine Elektrizitätsmenge (Ladung) eine Kraft ausgeübt, die gleich ist dem Produkt von Elektrizitätsmenge und Feldstärke.

Da die Ladung eines Elektrons

$$Q = -e \quad (37.21)$$

ist, so erfährt jedes Elektron im elektrischen Feld eine Kraft

$$\mathbf{F}_1 = -e\mathbf{E}. \quad (37.22)$$

Zahlenbeispiele: 1. Es sei $Q = 1As$; $E = 1V/cm$. Dann wird die Kraft

$$\|\mathbf{F}_1\| = 1 \frac{Ws}{cm} = 100 N \approx 10,2 kp. \quad (37.23)$$

2. Die auf die Leitungselektronen ausgeübten Kräfte sind außerordentlich gering. Die E-Feldstärke liegt bei Leitern nach dem Beispiel zu Gl. (16.12) in der Größenordnung von $10^{-2}V/m$. Die auf ein Leitungselektron wirkende Kraft beträgt daher

$$\|\mathbf{F}_1\| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-2} \frac{VAs}{m} = 1,6 \cdot 10^{-21} N. \quad (37.24)$$

Wegen der sehr kleinen Masse der Elektronen erfahren sie durch diese Feldkräfte doch eine sehr große Beschleunigung, nämlich

$$a = \frac{\|\mathbf{F}_1\|}{m_0} = \frac{1,6 \cdot 10^{-21} N}{9,1 \cdot 10^{-31} kg} \approx 10^9 \frac{m}{s^2}, \quad (37.25)$$

das ist mehr als 10^8 -fache Erdbeschleunigung.

Die Leitungselektronen werden auch durch die Feldkräfte der positiven Atomreste beeinflusst. Es zeigt sich jedoch, dass sie sich hinsichtlich der

Vorgänge der elektrischen Leitung so verhalten, als ob sie völlig frei beweglich wären wie die Atome eines idealen Gases. Die Driftbewegung kann daher auf folgende Weise genauer beschrieben werden.

Bei ihrer unregelmäßigen Wärmebewegung im Metall durchlaufen die Leitungselektronen im Durchschnitt einen Weg von der Länge s , bis sie von einem Atom eingefangen werden. Die mittlere Geschwindigkeit v_m der Wärmebewegung bestimmt die durchschnittliche Zeit des freien Fluges eines Elektrons

$$\tau = \frac{s}{v_m}. \quad (37.26)$$

Ist $\|\mathbf{E}\|$ die durch eine Stromquelle erzeugte Feldstärke, so wirkt auf jedes freie Elektron eine Kraft $e\|\mathbf{E}\|$. Die Beschleunigung entgegen der positiven Stromrichtung ist $(e\|\mathbf{E}\|)/m$, wenn mit m die Masse des Elektrons bezeichnet wird. Die mittlere Driftgeschwindigkeit wird daher

$$v = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \|\mathbf{E}\| \tau. \quad (37.27)$$

Ist n die räumliche Dichte der Leitungselektronen, so wird die Stromdichte nach Gl. (37.9)

$$J = nev = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \tau}{m} \|\mathbf{E}\|. \quad (37.28)$$

Dies ist das Ohmsche Gesetz. Für die Leitfähigkeit erhält man mit Gl. (16.8)

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \tau}{m} = \frac{1}{2} \frac{e^2 n s}{m v_m}, \quad (37.29)$$

für die Beweglichkeit, Gl. (37.30),

$$\mu_n = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \tau. \quad (37.30)$$

Für Kupfer ergibt sich hieraus mit $\mu_n = 42 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $m = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g}$:

$$\tau = \frac{2m\mu_n}{e} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-3} \cdot 42 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{kgm}^2}{\text{AsVs}} = 4,8 \cdot 10^{-14} \text{ s}. \quad (37.31)$$

Die freie Laufzeit der Elektronen ist also selbst bei den höchsten technisch verwendeten Frequenzen noch sehr kurz gegen die Periodendauer. Die Leitfähigkeit κ von Metallen ist daher unabhängig von der Frequenz der Wechselströme; sie ist ferner in weiten Grenzen unabhängig von der elektrischen Feldstärke, wenn die Temperatur konstant gehalten wird.

Die Leitungselektronen sind bei den Metallen auch maßgebend für den Wärmetransport. Die Wärmeleitfähigkeit ist daher ebenfalls durch die in der soeben angestellten Überlegung vorkommenden Größen bestimmt. Daraus ergibt sich (Wiedemann-Franz 1853; Lorenz 1872), dass das Verhältnis von

Wärmeleitfähigkeit λ zu elektrischer Leitfähigkeit κ für alle reinen Metalle den gleichen Wert hat und proportional der absoluten Temperatur ist. Das Verhältnis der beiden Größen beträgt bei 20° ungefähr

$$\frac{\lambda}{\kappa} = 7 \cdot 10^{-6} \frac{W/m \cdot K}{S/m}. \quad (37.32)$$

Bei Metalllegierungen nimmt das Verhältnis im allgemeinen mit abnehmender elektrischer Leitfähigkeit zu, weil dann neben der Elektronenleitung auch die Wärmeleitung über das Atomgerüst („Ionengitter“) in Erscheinung tritt.

Anmerkung: Die hier für das Elektronengas benützten Vorstellungen der kinetischen Gastheorie liefern nur hinsichtlich der elektrischen Leitungsvorgänge richtige Ergebnisse; dagegen führen sie zu falschen Schlüssen für die Wärmeleitfähigkeit der Leiter und einige andere physikalische Effekte. Der Grund dafür liegt darin, dass die Elektronen rund drei Zehnerpotenzen leichter sind als Gasmoleküle und dass die Konzentration der Leitungselektronen etwa vier Zehnerpotenzen größer ist als die Konzentration der Moleküle in einem Gas unter normalen Bedingungen. Daher ist die klassische (Maxwell-Boltzmannsche) Statistik keine Annäherung mehr an die korrekte Quantenstatistik. Infolge der Rückwirkung des Ionengitters auf die Elektronen kann die Energie eines Elektrons nur in bestimmten Bereichen („Bändern“) liegen. Dazwischen können sich Sperrbereiche befinden („verbogene Bänder“), deren Energiewerte von Elektronen nicht angenommen werden können.

37.2.3 Ionenleiter

Die Stromleitung in Metallen ist nach dem oben Ausgeföhrten elektronisch; auch nach beliebig langer Zeit zeigt sich daher keine stoffliche Veränderung des Leiters infolge von Stromleitung. An Stofftransport gebundene Stromleitung findet man dagegen bei Gasen (siehe Abschnitt 37.1) und bei Elektrolyten. Bei den Elektrolyten, z. B. wässriger $NaCl$ -Lösung, sind die beweglichen Ladungsträger Atome mit fehlenden oder überzähligen Elektronen (Ionen), in der Kochsalzlösung z. B. positive Na -Atome mit einem fehlenden Elektron und negative Cl -Atome mit einem überzähligen Elektron. Beide Ionenarten tragen zur Stromleitung bei und es gilt entsprechend Gl. (37.12) für die Leitfähigkeit des Elektrolyten

$$\kappa = n_1 z e \mu_1 + n_2 z e \mu_2, \quad (37.33)$$

wobei n_1 und n_2 die Konzentrationen der positiven und negativen Ionen (Anzahl pro Volumen), z die Anzahl der je Ion fehlenden oder überschüssigen Elektronen (Wertigkeit) und μ_1 und μ_2 die Beweglichkeiten der beiden Ionenarten bedeuten. Bei der Stromstärke I treffen je Zeiteinheit zwangsläufig $I/(ze)$ positive Ionen an der negativen Elektrode ein und ebensoviele negative Ionen an der positiven Elektrode. In dem Beispiel der Kochsalzlösung sind dies bei einem Strom von $1A$ mit $z = l$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} As$:

$$\frac{I}{ze} = \frac{1 \text{ A}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 6,3 \cdot 10^{18} \frac{\text{Ionen}}{\text{s}}. \quad (37.34)$$

Das entspricht einer Natriummenge von $0,24 \text{ mg/s}$ ($6,3 \cdot 10^{18}$ Atome/s mal Atomgewicht 23 g/mol) geteilt durch die Avogadro-Konstante $6,02 \cdot 10^{23}$ Atome/ mol) und einer Chlormenge (Atomgewicht 35 g/mol) von $0,37 \text{ mg/s}$.

An den Elektroden werden die Ionen durch Aufnahme oder Abgabe von Elektronen in neutrale Atome umgewandelt, oder sie gehen dort chemische Verbindungen ein. Der Vorgang der elektrolytischen Leitung verändert also die Beschaffenheit des Leiters und erschöpft dessen Leitfähigkeit allmählich, wenn er lang genug fortgesetzt wird.

37.2.4 Schwankungerscheinungen

Die Atomstruktur der Elektrizität ist die Ursache einer für verschiedene Anwendungen der Elektrotechnik sehr wichtigen Erscheinung. Der elektrische Strom stellt genau genommen kein stetiges Fließen von Elektrizität dar, sondern setzt sich aus den Beiträgen der einzelnen Elementarladungen zusammen. Dem mittleren Wert sind daher kleine unregelmäßige zeitliche Schwankungen überlagert; sie finden sich bereits im stromlosen Zustand des Leiters. Jedes Elektron, das infolge der Wärmebewegung seine freie Weglänge während der Zeit τ durchfliegt, ist gleichbedeutend mit einem Stromstoß von der Dauer τ . Dieser Stromstoß entspricht einem Spannungsstoß zwischen den Enden des Leiters. Es handelt sich um außerordentlich kurzzeitige Spannungsstöße, die aber in sehr großer Häufigkeit auftreten; in einem cm^3 des Leiters erfolgen z. B. bei Kupfer mit $8,5 \cdot 10^{22}$ Valenzelektronen/ cm^3 und $4,8 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ freier Laufzeit

$$\frac{50 \cdot 10^{22}}{4,8 \cdot 10^{-14}} = 1,8 \cdot 10^{36} \quad (37.35)$$

Sprünge je Sekunde. Die von den einzelnen Leitungselektronen herührenden Spannungsstöße addieren sich und liefern eine unregelmäßig schwankende Spannung zwischen den Enden des Leiters, die man als Spannung des Wärmerauschens bezeichnet. Sie kann auf Grund dieser Vorstellung berechnet werden.

Die Vorgehensweise soll an einem kleinen Beispiel erläutert werden. Dazu verwendet wir ein elektrisches Netzwerk bestehend aus einem Widerstand R und einer parallel geschalteten Kapazität C . Mit Hilfe der Methoden der Netzwerkanalyse (vgl. Abschnitt 4.2) kann die beschreibende Differentialgleichung für die Spannung an der Kapazität u sehr leicht abgeleitet werden

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = 0, \quad (37.36)$$

wobei noch eine Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ vorzugeben ist. Modelliert man das thermische Rauschen, das als Störung dieser „deterministischen“

Gleichung aufgefasst wird, mit Hilfe eines *weißen Rauschprozesses* $\xi(t)$ mit den Eigenschaften

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(\tilde{t}) \rangle = \alpha \delta(t - \tilde{t}), \quad (37.37)$$

dann kann man die rechte Seite von Gl. (37.36) durch einen stochastischen Term modifizieren, der die obengenannten „Spannungsstöße“ repräsentiert. Man erhält

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u = \xi(t), \quad (37.38)$$

wobei nun auch $u(t)$ ein stochastischer Prozess – ein sogenannter Markov-Prozess – ist. Für die Konstruktion von Lösungsmethoden für *stochastische Differentialgleichungen* wird ein verallgemeinerter Integraltyp benötigt, da die rechte Seite von Gl. (37.38) keine integrierbare Funktion im Sinne klassischer Integraltypen ist. Die dazu notwendigen mathematischen Grundlagen überschreiten jedoch den Rahmen dieses Buches und wir verweisen stattdessen auf die Literatur; vgl. Arnold [8]. Um dennoch eine Vorstellung von den Eigenschaften der Lösung der Gl. (37.38) zu erhalten, gehen wir von der formalen Lösung dieser Gleichung im Sinne einer inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten aus

$$u(t) = U_0 e^{-t/RC} + e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tilde{t}/RC} \xi(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (37.39)$$

aus und berechnet die ersten beiden Momente, wobei die Momente von ξ berücksichtigt werden. Aufgrund der Linearitätseigenschaften des Mittelwertoperators $\langle \cdot \rangle$ (Erwartungswert-Operator) gilt

$$\langle u(t) \rangle = U_0 e^{-t/RC} + e^{-t/RC} \int_0^t e^{\tilde{t}/RC} \langle \xi(\tilde{t}) \rangle d\tilde{t} = U_0 e^{-t/RC}, \quad (37.40)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass der Mittelwert einer deterministischen Funktion gleich der Funktion ist. Das ergibt sich auch aus der Differentialgleichung (37.38), denn durch Mittelwertbildung zeigt man unmittelbar (nach Vertauschen mit $\langle \cdot \rangle$ und d/dt), dass der Mittelwert die deterministische Differentialgleichung erfüllt. Auch das 2. Moment (Standardabweichung) $\langle u(t) u(\tilde{t}) \rangle$ für $t = \tilde{t}$ kann bestimmt werden

$$\begin{aligned} \langle (u(t))^2 \rangle &= U_0^2 e^{-2t/RC} + e^{-2t/RC} \int_0^t \int_0^t e^{(\tilde{t}+\hat{t})/RC} \langle \xi(\tilde{t}) \xi(\hat{t}) \rangle d\tilde{t} d\hat{t} \\ &= U_0^2 e^{-2t/RC} + \frac{\alpha RC}{2} \left(1 - e^{-2t/RC} \right). \end{aligned} \quad (37.41)$$

Die beiden ersten Momente sind also nicht gekoppelt, was für lineare zeitinvariante Netzwerke und Systeme typisch ist. Außerdem gibt es einen Zusammenhang von Dissipation (hier durch den Ohmschen Widerstand) und Rauschen (auch Fluktuation genannt), der als Dissipations-Fluktuations-Theorem bezeichnet wird; vgl. van Kampen [284].

Für nichtlineare Netzwerke und Systeme sind die Momente nicht mehr un gekoppelt. Das ist sehr leicht zu sehen, wenn wir die lineare deterministische Differentialgleichung (37.36) durch eine nichtlineare stochastische Differenti algleichung ersetzen

$$\frac{du}{dt} + f(u) = \xi(t), \quad (37.42)$$

wodurch z. B. ein Netzwerk mit einem nichtlinearen Widerstand beschrieben werden könnte; vgl. Mathis [180]. Da Mittelwertoperator $\langle \cdot \rangle$ und die nicht lineare Funktion f nicht vertauschen (d. h. $\langle f(u) \rangle \neq f(\langle u \rangle)$), erhalten wir folgende Differentialgleichung für das erste Moment

$$\frac{d\langle u \rangle}{dt} + \langle f(u) \rangle = \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad (37.43)$$

woraus sich eine Momentenkopplung ergibt. Auf diesen Umstand hat van Kampen schon Anfang der 1960er Jahre hingewiesen; vgl. van Kampen [284] hinsichtlich einer ausführlichen Darstellung stochastischer Prozesse in der Physik. Während bei nichtlinearen deterministischen Netzwerken und Systemen eine Frequenzkopplung auftritt, kommt es bei nichtlinearen stochasti schen Netzwerken und Systemen zu einer Momentenkopplung. Beispielsweise wird beim nichtlinearen Oszillator nach Abschnitt 40.4.5 bei der Frequenz null über die Betriebsspannung Energie „eingekoppelt“, die von der Oszillat ororschaltung zur „Speisung“ der Schwingung mit der Oszillat orfrequenz (ggf. auch höhere Harmonische) genutzt wird.

Wie Stratonovich [270] gezeigt hat, gibt es auch in der Nähe von Gleich gewichtspunkten nichtlinearer Netzwerke und Systeme ebenfalls Relationen, die thermische Fluktuationen und Dissipation in Beziehung setzen. Auf der Grundlage dieser Ergebnisse haben Weiss und Mathis [298] [191] eine allgemeine Theorie für die Klasse reziproker nichtlinearer Netzwerke mit thermischem Rauschen in der Umgebung von Gleichgewichtspunkten entwickelt, mit der man die Rauschspektren der nichtlinearen Bahnwiderstände einer Vielzahl von Halbleiterbauelementen *thermodynamisch* und damit alternativ zu den mikroskopischen Bilanzbetrachtungen ableiten konnte; siehe Weiss und Mathis [299].

37.2.5 Das Wesen der Spannungsquellen - Quellenspannung

Das Zustandekommen eines elektrischen Stromes hat zur Voraussetzung, dass in dem Stromkreis Kräfte tätig sind, die den Elektronenstrom, also die elektrische Feldstärke und die Spannung aufrechterhalten. Im Innern der Stromquelle müssen die Elektronen den Potenzialunterschied zwischen den Klemmen *ent gegen* den elektrischen Feldkräften durchlaufen. Das Wesen der Stromquellen besteht daher allgemein darin, dass durch Kräfte *nichtelektrischer* Art Elektrizitätsmengen entgegen den Kräften des Potenzialunterschiedes in Bewegung gesetzt werden. Es ist dazu ein Arbeitsaufwand erforderlich, z. B. die Auf wendung einer chemischen Energie in den galvanischen Elementen oder die

Aufwendung mechanischer Arbeit in den elektrischen Maschinen. Umgekehrt wird von den Elektronen bei der Bewegung im äußeren Stromkreis, also in der Richtung der Feldkräfte, elektrische Energie in nichtelektrische Arbeit umgewandelt, z. B. in Wärme. Die elektrischen Feldkräfte vermitteln also den Energietransport zwischen Quelle und Verbraucher.

Um eine gewisse Elektrizitätsmenge Q durch einen Stromkreis zu treiben, ist ein bestimmter Arbeitsaufwand W nötig. Die Wirksamkeit der Quelle kann durch das Verhältnis W/Q gekennzeichnet werden. Dieses Verhältnis definiert die Quellenspannung der Quelle:

$$U_q = \frac{W}{Q}. \quad (37.44)$$

Wird kein Strom aus der Quelle entnommen, so ergibt sich ein Überschuss von Elektronen am negativen Pol, ein Mangel am positiven. Durch diese Ladungen wird ein elektrisches Feld erzeugt, dessen Kräfte im Inneren der Quelle die nichtelektrischen Kräfte gerade kompensieren. In diesem Gleichgewicht ist der Potenzialunterschied zwischen den beiden Klemmen der Quelle die Leerlaufspannung.

37.3 Stromleitung in Halbleitern

Für das Verständnis aller Dioden und Transistoren sind einige Begriffe und Zusammenhänge grundlegend. Sie werden hier so zusammengestellt, dass alles, was nicht unbedingt zum Verständnis der Grundlagen dient, weggelassen wurde. Die Probleme wurden möglichst idealisiert dargestellt, auch wenn die technische Ausführung scheinbar andere Wege geht. So erlaubt zum Beispiel das Ideal einer unendlich langen Diffusionszone, den Diffusionsprozess klarer zu beschreiben, als dies in einer technisch wichtigen Diode mit kurzer Baulänge, die zudem für hohe Geschwindigkeit mit Goldatomen dotiert ist, möglich wäre.

37.3.1 Siliziumkristall

Silizium ist mit großem Abstand der technisch wichtigste Halbleiter. Deshalb werden die wesentlichen Erscheinungen in Silizium beschrieben, die Ergebnisse können dann auf Germanium, Galliumarsenid, Indiumphosphid und andere Halbleiter übertragen werden. Das Element Silizium steht im periodischen System in der vierten Spalte, ist vierwertig, die chemischen Bindungen übernehmen die vier Valenzelektronen in der äußersten ($M-$) Schale. Sie allein müssen in der Halbleitertechnik beachtet werden, der Kern und die restlichen zehn Elektronen in den inneren $K-$ und L -Schalen können als ein mit vier positiven Elementarladungen geladener Atomrumpf betrachtet werden (Abb. 37.1). Diese vier Valenzelektronen besorgen die Bindung benachbarter Atome

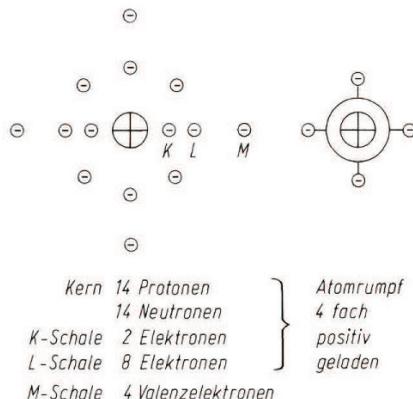


Abbildung 37.1. Schematischer Aufbau des Siliziumatoms

im Si-Kristall. Aus Symmetriegründen ordnen sie sich in Form eines Tetraeders mit Abständen von 154 pm an. Dieser Abstand von 154 pm kann in Å zu $1,54\text{ \AA}$ angegeben werden; im folgenden wird darauf aber verzichtet. Ein Atom des Tetraeders besetzt einen Eckpunkt, ein Atom bleibt im Inneren, die restlichen drei sitzen in den Flächenzentren eines Würfels, der Elementarzelle des Si-Kristalls (Abb. 37.2). Dieser Würfel ist der kleinste Kristallbereich, der in allen drei Kristallachsen regelmäßig wiederkehrt. Seine Kantenlänge ist die Gitterkonstante $a_{Si} = 543\text{ pm}$.

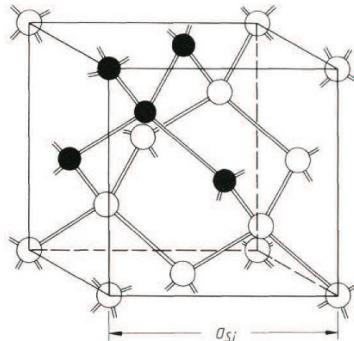


Abbildung 37.2. Siliziumkristall

Diamant, also reiner Kohlenstoff C, besitzt ein gleichartig gebautes Gitter mit $a_C = 356\text{ pm}$, ebenso Germanium mit $a_{GE} = 565\text{ pm}$. Bei Galliumarsenid GaAs sind die Gitterplätze abwechselnd mit Ga- und As-Atomen besetzt.

Zwei benachbarte Atome sind je über ein Elektronenpaar mit entgegengesetztem Spin verbunden, man nennt diese Paarbindung eine homöopolare

oder kovalente Bindung, im Gegensatz zur Bindung in Ionenkristallen wie NaCl. Durch Abzählen in Abb. 37.2 findet man in einem Elementarkubus acht Atome, die nur zu diesem Kubus gehören. Das bedeutet eine Dichte n_{Si} der Si-Atome im Kristall von

$$n_{Si} = \frac{8}{a^3} = \frac{8}{5,43^3 \cdot 10^{-24} cm^3} = 5 \cdot 10^{22} cm^{-3}. \quad (37.45)$$

Das Bild des perfekten Kristalls gilt am absoluten Nullpunkt $T_0 = -273,15 K$, und zwar gleichermaßen für Diamant wie auch für Silizium und Germanium. Da alle Elektronen im perfekten Kristall gebunden sind, so sind am absoluten Nullpunkt die Halbleiter Si und Ge perfekte Isolatoren wie der Diamant. Verschiebt ein äußeres elektrisches Feld die Elektronenhülle gegenüber den Kernen, ohne ein Elektron aus der Bindung zu lösen, so ergibt sich für den so polarisierten Si-Kristall die relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_{Si} = 11,7$.

37.3.2 Bändermodell

Die Elektronen eines Atoms können nur diskrete Energiewerte annehmen. Man nennt sie Energieniveaus, Energiezustände oder einfach Zustände. Im Kristallgitter sind alle Elektronen miteinander verkoppelt. Dann gilt das Pauli-Prinzip, wonach nur je zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin einen Zustand einnehmen können. Es gibt also in einem Si-Kristall mit $4 \cdot 10^{22}$ Valenzelektronen $2 \cdot 10^{22}$ verschiedene Energiezustände, in denen sich die Elektronen befinden. Diese diskreten Zustände bilden ein Energieband, das *Valenzband*. Bei tiefen Temperaturen, ideal am absoluten Nullpunkt, sind alle Elektronen wie in Abb. 37.2 angeordnet, die Valenzelektronen haben ihre diskreten Energiewerte im Valenzband.

Bei höheren Temperaturen schwingen die Atomrümpfe um ihre Ruhelagen, Paarbindungen können aufbrechen und Elektronen als freie Leitungselektronen in den Kristall entlassen. Sie besetzen dann neue Zustände im Leitungsband. Dazu ist bei Si die Mindestenergie von $1,1 eV$ notwendig, das heißt, der unterste Zustand im Leitungsband hat vom obersten Zustand im Valenzband den Bandabstand $1,1 eV$. Energieniveaus zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband sind nicht erlaubt, es besteht eine verbotene Zone mit der Breite $1,1 eV$. Bei Anheben eines Elektrons vom Valenzband ins Leitungsband bleibt im Valenzband ein Loch zurück, man spricht von der Erzeugung eines Elektron/Loch-Paares mit der

$$\text{Generationsrate} = \frac{\text{Zahl der erzeugten Elektron/Loch-Paare}}{\text{Zeitintervall} \cdot \text{Volumen}} = G(T). \quad (37.46)$$

Sie hängt von der Kristalltemperatur T ab und ist natürlich um so größer, je höher diese ist.

Zum Generationsprozess muss es einen gegenläufigen Prozess geben, wenn die Zahl der generierten Elektron/Loch-Paare nicht unbegrenzt ansteigen

soll. Es fallen also auch Elektronen aus dem Leitungsband wieder in freie Löcher des Valenzbandes zurück, man spricht von der Rekombination eines Elektron/Loch-Paares mit der ebenfalls temperaturabhängigen

$$\text{Rekombinationsrate} = \frac{\text{Zahl rekombinierter Elektron/Loch-Paare}}{\text{Zeitintervall} \cdot \text{Volumen}} = R(T). \quad (37.47)$$

Die Rekombination eines Elektrons mit einem Loch ist um so wahrscheinlicher, je größer die Zahl n der Elektronen im Leitungsband und je größer die Zahl der Löcher p im Valenzband ist, man kann also mit dem temperaturabhängigen Rekombinationsfaktor $r(T)$, dessen Einheit $[r] = \text{cm}^3/\text{s}$ ist, schreiben

$$R(T) = np r(T). \quad (37.48)$$

Generation und Rekombination müssen im Gleichgewicht sein

$$R(T) = G(T). \quad (37.49)$$

Man nennt dieses Gleichgewicht in Anlehnung an die Chemie auch Massenwirkungsgesetz.

37.3.3 Eigenleitung

Beim geschilderten Generationsprozess ist die Zahl der ins Leitungsband angehobenen Elektronen gleich groß wie die Zahl der im Valenzband frei werdenden Löcher. Es ist

$$n = p = n_i = n_i(T) \quad (37.50)$$

und mit den Gl. (37.48), (37.49)

$$np = n_i^2 = \frac{G(T)}{r(T)}. \quad (37.51)$$

In Silizium und bei Raumtemperatur ($T = 300K$) ist

$$n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{cm}^3}. \quad (37.52)$$

Man nennt diesen für den Kristall typischen Wert die Eigenleitungsdichte. Sie ist sehr viel kleiner als die Dichte der Si-Atome im Kristall. Aus

$$\frac{5 \cdot 10^{22} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}}{n_i}. \quad (37.53)$$

ergibt sich, dass nur jedes $3,3 \cdot 10^{12}$ te Atom eines seiner Elektronen in den Kristall als Leitungselektron entlässt. Diese Leitungselektronen mit der Beweglichkeit μ_n ermöglichen die sehr schwache Eigenleitfähigkeit des Si-Kristalls

$$\kappa_n = en_i\mu_n. \quad (37.54)$$

Tatsächlich misst man den fast doppelt so großen Wert. Man muss ihn damit erklären, dass in das freigewordene Loch im Valenzband ein benachbartes Elektron springt, in das von diesem freigewordene Loch ein drittes und so fort. Die Bewegung dieser Elektronen im Valenzband beschreibt man durch die umgekehrte Bewegung der Löcher, die man als mit einer positiven Elementarladung versehene Ladungen ansehen kann. So entstehen im Halbleiter zwei Leitungsmechanismen: Die Elektronenleitung, von den Elektronen im Leitungsband getragen, und die Löcherleitung, von den Löchern im Valenzband getragen. Obwohl nach dem beschriebenen Vorgang auch die Löcherleitung auf eine nur gehemmte Elektronenbewegung im Valenzband zurückzuführen ist, hilft die Unterscheidung in negativ geladene Elektronen und positiv geladene Löcher sehr bei der Beschreibung aller Leitungsvorgänge in Halbleitern. Die Löcher werden als Defektelektronen bezeichnet.

Sehr anschaulich wird der Vorgang der Löcherleitung von Shockley durch die Analogie zu einer Parkgarage dargestellt (Abb. 37.3). Die untere Etage sei zunächst mit fünf Autos voll besetzt, ein Fahren ist nicht möglich, wie auch kein Stromfluss möglich ist, wenn alle Elektronen fest als Valenzelektronen gebunden sind. Wird nun Wagen 2 auf die obere Etage gehoben, so kann er frei fahren. Dies entspricht der Elektronenleitung mit hoher Beweglichkeit im Leitfähigkeitsband durch Elektron 2.

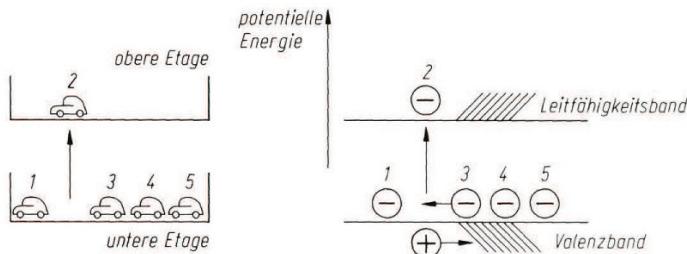


Abbildung 37.3. Shockley-Garagenmodell zur Erklärung der Löcherleitung

Auf der unteren Etage ist eine Lücke entstanden, in die Wagen 3 aufrücken kann, ebenso Wagen 4, dann Wagen 5. Ebenso können die Elektronen im Valenzband nacheinander ins Loch nachrücken.

Dies lässt sich auch so ausdrücken, dass das Loch sich entgegengesetzt zu den Elektronen im Valenzband mit kleinerer Beweglichkeit nach rechts bewegt.

Dem Vorgang entsprechend ist die Beweglichkeit der Löcher μ_p immer kleiner als die Beweglichkeit der Elektronen μ_p . Insgesamt ergibt sich die Eigenleitfähigkeit zu

$$\kappa = en_i(\mu_n + \mu_p), \quad (37.55)$$

und entspricht mit $\mu_n = 1350 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und $\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ den gemessenen Werten.

Der Eigenleitwert ist eine technisch unerwünschte, aber prinzipiell wichtige Größe. Eine Siliziumscheibe habe eine Dicke von $d = 0,5 \mu\text{m}$ und eine Fläche von $A = 10 \mu\text{m} \cdot 10 \mu\text{m}$. Es ergibt sich durch Eigenleitung fein Leitwert

$$\begin{aligned} G_{Si} &= en_i(\mu_n + \mu_p) \frac{A}{d} & (37.56) \\ &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1,5 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{cm}^3} \cdot 1830 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}} \cdot 200 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \\ &= 8,784 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{11,4 M\Omega}. \end{aligned}$$

Zum Vergleich dazu hat ein gleich großes Kupferscheibchen den Leitwert

$$G_{Cu} = \kappa_{Cu} \frac{A}{d} = 5,7 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega \text{m}} \cdot 200 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 11,4 \cdot 10^3 \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{88 \mu\Omega} \quad (37.57)$$

37.3.4 Störstellenleitung

Leitfähigkeit im Si-Kristall in technisch gewünschter und nutzbarer Weise wird durch Dotierung mit Fremdatomen erreicht. Diese geben ein Elektron ins Leitfähigkeitsband ab und heißen deshalb *Donatoren*; oder sie geben ein Loch ins Valenzband ab, anders ausgedrückt: Sie ziehen ein Elektron an und heißen deshalb *Akzeptoren*.

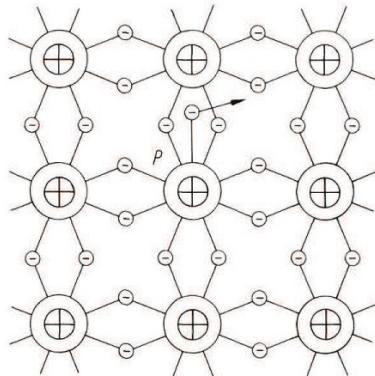


Abbildung 37.4. Einbau eines Phosphor-Donatoratoms in ein Si-Kristallgitter. Es entsteht ein $n\text{-Si}$

Donatoren sind die im periodischen System in der Spalte V stehenden Elemente (Tabelle 37.1) Phosphor, Arsen, Antimon, deren 5. Valenzelektron lose gebunden ist und schon bei kleiner thermischer Anregung in den Kristall

als Leitungselektron entlassen wird (Abb. 37.4). Bei Raumtemperatur haben fast alle Donatoren ihr Elektron abgegeben. Dies drückt sich im Bändermodell so aus, dass das Donatorniveau knapp ($0,045\text{eV}$) unter der Unterkante des Leitfähigkeitsbandes liegt (Abb. 37.6).

<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>
<i>B</i>	<i>C</i>	<i>N</i>
<i>Al</i>	<i>Si</i>	<i>P</i>
<i>Ga</i>	<i>Ge</i>	<i>As</i>
<i>In</i>		<i>Sb</i>

Tabelle 37.1. Ausschnitt aus dem periodischen System der Elemente

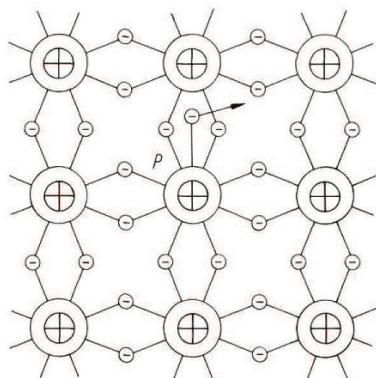


Abbildung 37.5. Einbau eines Bor-Akzeptoratoms in ein Si-Kristallgitter. Es entsteht ein *p*-Si

Akzeptoren können deshalb leicht ein Elektron einfangen, anders ausgedrückt, ein Loch abgeben, weil sie nur drei Valenzelektronen besitzen (Abb. 37.5). Elemente der III. Spalte, also Bor, Aluminium, Gallium, Indium sind Akzeptoren.

Ein mit N_D Donatoren dotierter Kristall hat also einen Überschuss an $n = N_D$ frei beweglichen Elektronen und wird kurz *n*-Si genannt. Seine Eigenleitung ist wegen $n_i \ll N_D$ sehr viel kleiner als die Störstellenleitung.

Ein mit N_A Akzeptoren dotierter Kristall hat einen Überschuss an $p = N_A$ Löchern und wird *p*-Si genannt.

Ein mit $10^{16}/\text{cm}^3$ Phosphoratomen dotiertes Si-Scheibchen mit einer Dicke von $d = 0,5\mu\text{m}$ und mit einer Fläche von $A = 10\mu\text{m} \cdot 10\mu\text{m}$ hat einen Leitwert

$$\begin{aligned}
 G &= en\mu_n \frac{A}{n} \\
 &= 1,6 \cdot 10^{-19} As \cdot 10^{16} cm^{-3} \cdot 1350 \frac{cm^2}{Vs} \cdot 200 \cdot 10^{-4} cm \\
 &= 0,043 \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{23,1 \Omega}
 \end{aligned} \tag{37.58}$$

Durch die Stärke der Dotierung N_D kann der Leitwert eingestellt werden.

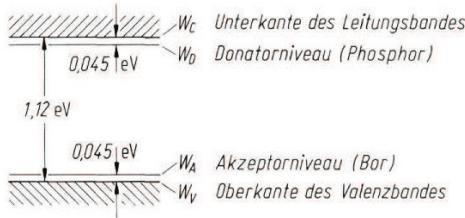


Abbildung 37.6. Lage der Störstellen niveaus im Bandschema von Si

Man könnte annehmen, in n -Si gäbe es keine Löcher, da bei dem großen Überangebot an Elektronen jedes Loch ein Elektron als Rekombinationspartner finden sollte. Dem ist nicht so.

In einem n -Kristall gibt es die Majoritätsträgerdichte n der Elektronen, aber auch eine endliche Minoritätsträgerdichte p der Löcher. Man bestimmt sie nach dem Massenwirkungsgesetz: Die Rekombinationsrate R ist nach Gl. (37.48)

$$R(T) = r(T) \cdot np \tag{37.59}$$

proportional zur Elektronendichte n und zur Löcherdichte p . Da im zeitlichen Mittel bei einer bestimmten Temperatur T genau so viel Generationsprozesse mit der Rate $G(T)$ stattfinden müssen, also $R = G$ sein muss, so muss das Produkt von Elektronen- und Löcherdichte

$$np = \frac{G(T)}{r(T)} \tag{37.60}$$

sein. Mit Gl. (37.51) ergibt sich so die wichtige Aussage

$$np = n_i^2, \tag{37.61}$$

das Produkt aus Elektronendichte und Löcherdichte ist stets gleich dem Quadrat der Eigenleitungsichte.

Da man Gl. (37.61) auch schreiben kann

$$\frac{n}{n_i} = \frac{n_i}{p}, \tag{37.62}$$

nennt man die Eigenleitungsichte n_i auch Inversionsdichte.

Schreibt man Gl. (37.61)

$$\frac{n}{n_i} \cdot \frac{p}{n_i} = 1 \quad (37.63)$$

und logarithmiert

$$\lg \frac{n}{n_i} + \lg \frac{p}{n_i} = \lg 1 = 0, \quad (37.64)$$

so wird

$$\lg \frac{n}{n_i} = -\lg \frac{p}{n_i}. \quad (37.65)$$

Trägt man also die Elektronendichte und die Löcherdichte in einem logarith-

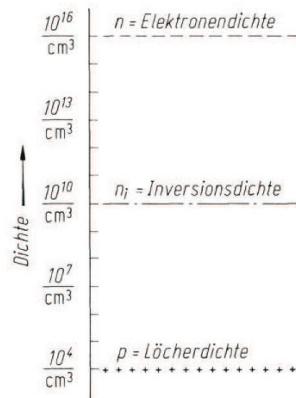


Abbildung 37.7. Im logarithmischen Maßstab liegen Löcherdichte und Elektronendichte symmetrisch zur Inversionsdichte (Die Abzisse ist hier bedeutungslos, sie wird später die Ortskoordinate)

mischem Maßstab auf, so wird in dieser Darstellung die Elektronendichte n und die Löcherdichte p symmetrisch zur Inversionsdichte n_i sein (Abb. 37.7).

37.3.5 Feldstrom und Diffusionsstrom

Wir betrachten nun Stromflussmechanismen in Halbleitern. Dabei kann man zwei Mechanismen unterscheiden, die auf klassischen Grundlagen verständlich sind: der *Driftstrom* und der *Diffusionsstrom*. Den unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes fließenden Strom nennt man Feldstrom oder Driftstrom. Nach dem Ohmschen Gesetz ist seine Stromdichte in x -Richtung

$$J_{Feld} = \kappa E. \quad (37.66)$$

Da die E-Feldstärke

$$E = -(\text{grad}\varphi)_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (37.67)$$

ist, ist die Feldstromdichte proportional zum Potenzialgradienten

$$J_{Feld} = \kappa \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right). \quad (37.68)$$

Löcher als positiv geladene Teilchen driften zur Stelle niedrigsten Potenzials, Elektronen als negativ geladene Teilchen driften zur Stelle höchsten Potenzials. Der Feldstrom wird auch Driftstrom genannt.

Im Halbleiter ist ein zweiter Leitungsmechanismus entscheidend wichtig: die Diffusion von Ladungsträgern unter dem Einfluss eines Dichtegefälles.

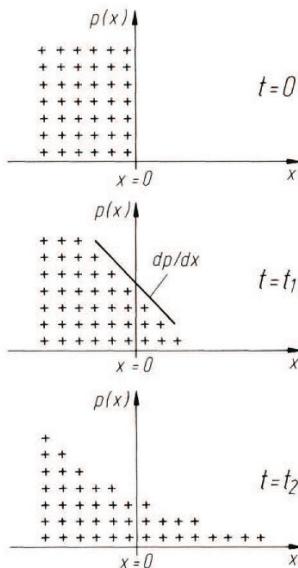


Abbildung 37.8. Diffusion

In Abb. 37.8 ist angenommen, dass ein Halbleiterkristall bei $x = 0$ durch eine Trennwand in zwei Teile geteilt sei. Der linke Teil sei mit positiven Ladungsträgern, also Löchern, gefüllt, der rechte sei leer. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Trennwand plötzlich entfernt, die Träger werden sich sicher über den ganzen Kristall auszubreiten suchen, so dass nach der Zeit t_1 und nach der späteren Zeit t_2 die gezeigten Konzentrationsverteilungen bestehen werden. Diesen Vorgang nennt man *Diffusion*. Über den Querschnitt bei $x = 0$ fließt dann ein Diffusionsstrom. Die Diffusionsstromdichte J_{Diff} ist proportional zum Dichtegradienten, der Proportionalitätsfaktor wird Diffusionskonstante D genannt.

$$J_{Diff} = +eD \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) = +eD(-\text{grad}p)_x. \quad (37.69)$$

Das Minuszeichen besagt, dass positive Teilchen, also Löcher, vom Bereich großer Dichte nach einem Bereich kleiner Dichte, also dem Dichtegefälle folgend, diffundieren. Um einen stationären Diffusionsstrom zu erhalten, müssen in Erweiterung von Abb. 37.8 stets von links her neue Ladungsträger nachgeliefert werden.

Die Diffusionskonstante ist für Löcher und Elektronen verschieden. Bei Si ist

$$D_p = 12,5 \frac{cm^2}{s}, \quad (37.70)$$

$$D_n = 35 \frac{cm^2}{s}. \quad (37.71)$$

Der Diffusionsvorgang wird begünstigt durch eine hohe Temperatur T und durch eine hohe Trägerbeweglichkeit μ . Allgemein gilt die Einstein-Relation für den Zusammenhang der Diffusionskonstanten mit der Beweglichkeit

$$D = \mu \frac{kT}{e}. \quad (37.72)$$

Beispiel: Durch einen Querschnitt $A = 10\mu m \cdot 10\mu m$ fließt ein Diffusionsstrom, weil auf einer Länge von $l = 1\mu m$ die Löcherdichte von $10^{17}/cm^3$ auf $10^{16}/cm^3$ fällt. Der Diffusionsstrom ist

$$\begin{aligned} I_{diff} &= AJ_{diff} = AeD_p \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ &= 10^{-6} cm^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} As \cdot 12,5 \frac{cm^2}{s} \frac{(10^{17} - 10^{16})cm^{-3}}{10^{-4}cm} = \\ &= 1,8mA. \end{aligned} \quad (37.73)$$

Zusammenfassend gesagt gibt es im Halbleiter vier Ströme:

Feldstrom der Elektronen

$$J_{Feld,n} = -en\mu_n \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (37.74)$$

Feldstrom der Löcher

$$J_{Feld,p} = +ep\mu_p \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (37.75)$$

Diffusionsstrom der Elektronen

$$J_{diff,n} = -eD_n \left(-\frac{\partial n}{\partial x} \right), \quad (37.76)$$

Diffusionsstrom der Löcher

$$J_{Feld,p} = +eD_p \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (37.77)$$

In jedem Querschnitt eines stromführenden Halbleiterkristalls muss selbstverständlich der Gesamtstrom nach der Kontinuitätsgleichung gleich groß sein. Das bedingt, dass ein Feldstrom von einem Diffusionsstrom übernommen werden kann und umgekehrt.

37.3.6 Diffusion von Minoritätsträger

Wir wollen nun einen solchen Vorgang, nämlich die Diffusion von Löchern in einen n -leitenden Kristall; es handelt sich dabei offensichtlich um die Diffusion von Minoritätsträgern. Zuerst muss die Löcherdichte bestimmt werden, aus ihr folgt der Strom (Abb. 37.9).

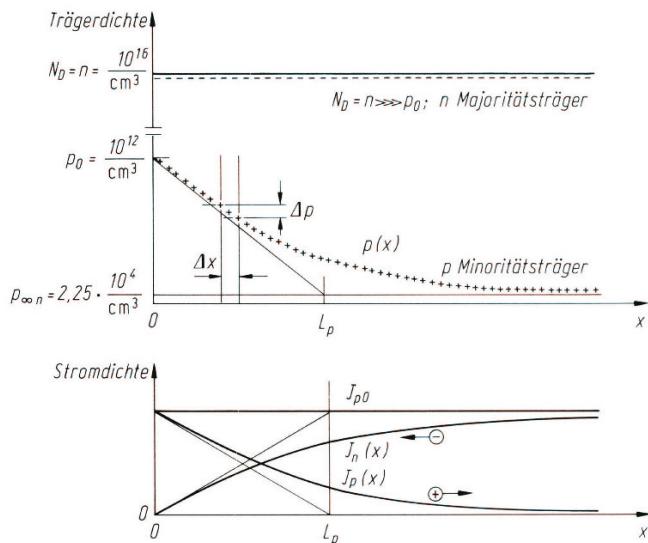


Abbildung 37.9. Diffusion von Löchern in einem n -Kristall. Durch Rekombination mit Elektronen fällt die Löcherdichte $p(x)$ vom linksseitig eingeprägten Randwert p_0 exponentiell mit der charakteristischen Diffusionslänge L_p auf die Gleichgewichtsdichte $p_{\infty n}$ ab. Aus der Löcherdichte $p(x)$ ergibt sich die Diffusionsstromdichte $J_p(x)$, mit der Rekombinationsstromdichte $J_n(x)$ ergibt sich die von x unabhängige Gesamtstromdichte $J_{p0} = eD_p(p_0 - p_{\infty n})/L_p$

Der Si-Kristall habe den Querschnitt A und sei mit $N_D = 10^{16}/cm^3$ Phosphoratomen homogen dotiert, enthält also

$$n = N_D = \frac{10^{16}}{cm^3} \quad (37.78)$$

im Kristall frei bewegliche Elektronen.

Die Löcherdichte ergibt sich aus dem Massenwirkungsgesetz Gl. (37.61) zu

$$p_{\infty n} = \frac{n_i^2}{n_{\infty n}} = \frac{2,25 \cdot 10^{20}}{10^{16} cm^3} = 2,25 \cdot 10^4 \frac{1}{cm^3}, \quad (37.79)$$

ist also nicht null, wohl aber sehr klein.

Nun werde dieses Gleichgewicht dadurch gestört, dass von außen zwangsläufig die Löcherdichte auf einen hohen Wert p_0 , z. B. auf $p_0 = 10^{12}/cm^3$ erhöht werde. Die Art, wie dies geschieht, ist zunächst nebensächlich, sie wird im folgenden Abschnitt erklärt. Überlässt man den Kristall nach der Einprägung von p_0 sich selbst, so wird diese hohe Löcherdichte durch Rekombination mit den reichlich vorhandenen Elektronen auf den eben berechneten Endwert $p_{\infty n}$ abgebaut. Nach welcher Zeitfunktion geschieht dies?

Die Löcherdichte nimmt während des Zeitintervalls dt um dp mit der Rekombinationsrate nach Gl. (37.48) ab

$$dp = r \cdot np dt. \quad (37.80)$$

Es gilt also die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} + rnp = 0. \quad (37.81)$$

Der Lösungsansatz $p_0 \exp(\lambda t)$ führt mit $\lambda = -rn =: -1/\tau_p$ auf

$$p_0 \lambda e^{\lambda t} + rnp_0 e^{\lambda t} = 0. \quad (37.82)$$

Unter Berücksichtigung des Anfangswertes p_0 und des Endwertes $p_{\infty n}$ wird

$$p(t) = (p_0 - p_{\infty n}) e^{-\frac{t}{\tau_p}} + p_{\infty n}. \quad (37.83)$$

Der Abbau der Überschussträgerdichte geschieht also exponentiell mit der Zeitkonstanten $\tau_p := 1/rn$.

Man nennt sie die Löcherlebensdauer oder – da im n -Kristall die Löcher Minoritätsträger sind – auch Minoritätsträgerlebensdauer. Sie ist eine wichtige Größe. Je größer die Majoritätsträgerdichte n ist, um so weniger lang leben die Löcher im n -Kristall, aber auch um so weniger, je größer die Rekombinationskonstante r ist. Letztere ist von der Temperatur abhängig, aber auch insbesondere davon, ob der Kristall Rekombinationszentren, z. B. Goldatome besitzt, in deren Umgebung eine Elektron/Loch-Rekombination besonders leicht erfolgen kann. In einem reinen Kristall ist die Rekombinationsrate geringer, die Lebensdauer τ_p ist groß.

Wie diffundieren Minoritätsträger in einem Kristall, wie ist die örtliche Verteilung der Löcherdichte $p(x)$, wenn am Rande des Kristalls die Dichte p_0 eingeprägt wird?

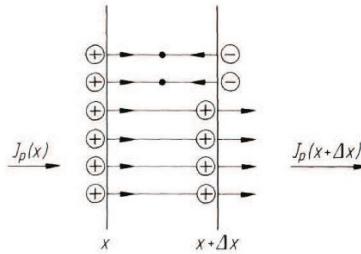


Abbildung 37.10. Rekombination von Löchern mit Elektronen in einer Kristallscheibe der Dicke Δx

Man denke sich an der Stelle x eine Scheibe der Dicke Δx aus dem Kristall ausgeschnitten (Abb. 37.10). Am linken Rand der Scheibe strömen Löcher in sie ein. Die zugehörige Löcherdiffusionsstromdichte sei

$$J_p(x) = eD_p \left(-\frac{dp}{dx} \right). \quad (37.84)$$

Am rechten Rand der Scheibe tritt der kleinere Löcherdiffusionsstrom aus mit der Dichte

$$J_p(x + \Delta x) = J_p(x) - \Delta J_p. \quad (37.85)$$

Ebenso ist die Löcherkonzentration am rechten Rand um dp gefallen, da im Inneren der Scheibe

$$dp = -rnp(x)dt = -\frac{p(x)}{\tau_p}dt \quad (37.86)$$

Löcher mit Elektronen rekombinieren; vgl. Gl. (37.48). Diese Löcher haben die Ladung

$$\Delta Q = eA\Delta x dp = -eA\Delta x \frac{p(x)}{\tau_p} dt. \quad (37.87)$$

Sie muss von ΔJ_p in dt getragen werden, d. h.

$$\Delta Q = \Delta J_p \cdot Adt. \quad (37.88)$$

Beide gleichgesetzt ergibt

$$-\Delta J_p = e \frac{p(x)}{\tau_p} \Delta x \quad (37.89)$$

und mit dem Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{dJ_p}{dx} = -e \frac{p(x)}{\tau_p}. \quad (37.90)$$

Dies ist nach Gl. (37.84) auch

$$\frac{dJ_p}{dx} = -eD_p \frac{d^2p}{dx^2}. \quad (37.91)$$

So erhält man nach Gleichsetzen die Dgl. 2. Ordnung

$$\tau_p D_p \frac{d^2p}{dx^2} + p = 0. \quad (37.92)$$

Der Ansatz $p(x) = p_0 \exp(\lambda x)$ ergibt die charakteristische Gleichung zweiten Grades

$$\tau_p D_p \lambda^2 - 1 = 0 \quad (37.93)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{\tau_p D_p}} =: \pm \frac{1}{L_p}. \quad (37.94)$$

Damit und mit den Randbedingungen

$$p(x)|_{x=0} = p_0, \quad p(x)|_{x=\infty} = p_{\infty n} < \infty. \quad (37.95)$$

erhält man die gesuchte Löcherdichteverteilung

$$p(x) = (p_0 - p_{\infty n}) e^{-\frac{x}{L_p}} + p_{\infty n}. \quad (37.96)$$

Die Größe

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} \quad (37.97)$$

nennt man die Diffusionslänge der Löcher im n -Kristall. L_p ist mit der Lebensdauer und der Diffusionskonstanten verknüpft und liegt in den Größenordnungen von $1\mu m \dots 100\mu m$ und τ_p in einem entsprechend weiten Bereich von $1ns \dots 10\mu s$ (Abb. 37.9).

Mit der Kenntnis der Löcherdichteverteilung ergibt sich auch der Diffusionsstrom der Löcher nach Gl. (37.84) zu

$$J_p(x) = eD_p \left(-\frac{dp}{dx} \right) = e \frac{D_p}{L_p} (p_0 - p_{\infty n}) e^{-\frac{x}{L_p}}. \quad (37.98)$$

Die Stromdichte am linksseitigen Rand ist

$$J_{p0} = eD_p \frac{p_0 - p_{\infty n}}{L_p} \quad (37.99)$$

oder, wenn $p_0 \gg p_{\infty n}$, einfach

$$J_{p0} = eD_p \frac{p_0}{L_p}. \quad (37.100)$$

Der Randwert der Dichte p_0 und die Diffusionslänge L_p bestimmen also die in den Kristall eintretende Stromdichte.

Aus Kontinuitätsgründen muss der Strom mit dieser Dichte J_{p0} unabhängig von x durch den Kristall fließen. Das ist nur möglich, wenn die an

jeder Stelle bestehende Löcherdiffusionsstromdichte $J_p(x)$ durch den Strom der rekombinierenden Elektronen auf J_{p0} aufgefüllt wird (Abb. 37.9). Es gilt also an jeder Stelle:

Diffusionsstrom der Löcher und der Rekombinationsstrom der Elektronen ergibt den Gesamtstrom, also

$$J_p(x) + J_n(x) = J_{p0}. \quad (37.101)$$

Der Diffusionsstrom der Minoritätsträger am Kristallrand bestimmt also schon vollständig den Gesamtstrom!

37.3.7 Diffusion von Löchern aus einer *p*-Zone in eine *n*-Zone. Diffusionsspannung

Der Halbleiterkristall sei für $x < 0$ mit der ortsunabhängigen Akzeptordichte N_A *p*-dotiert, für $x > 0$ mit der ortsunabhängigen Donatoredichte N_D *n*-dotiert, bei $x = 0$ sei ein abrupter Übergang zwischen der *p*-Zone und der *n*-Zone. Betrachtet wird die Dichteverteilung der beweglichen Löcher $p(x)$, (Abb. 37.11).

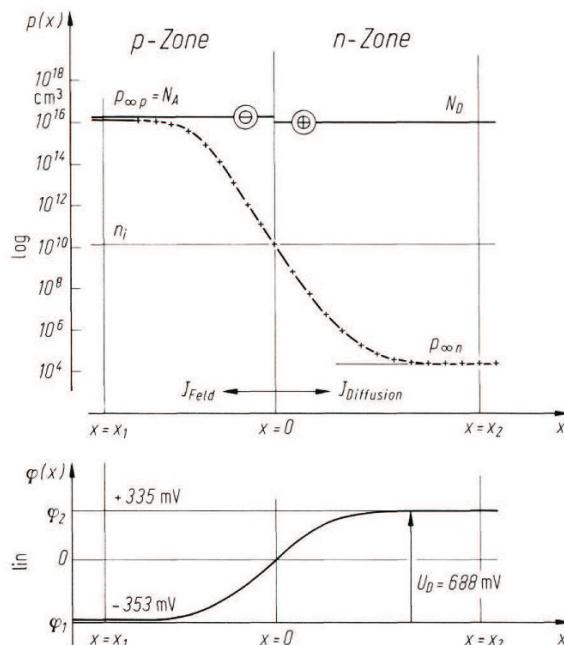


Abbildung 37.11. Diffusion von Löchern in eine *n*-Zone. Die logarithmisch aufgetragene Löcherdichteverteilung ist der negativen Potenzialverteilung proportional. Zwischen *p*- und *n*-Zone bildet sich die Diffusionsspannung U_D aus

Jeder Akzeptoren gebe sein Loch ab, weit links in der p -Zone ist also $p_{\infty n} = N_A$. Die freien Löcher diffundieren unter ihrem eigenen Dichtegradienten nach rechts in die n -Zone. Dieser Diffusion wirkt eine Feldkraft entgegen, denn jeder Akzeptor, der ein Loch abgegeben hat, stellt eine ortsfeste negative Ladung dar. Diese ortsfesten negativen Ladungen in der p -Zone versuchen, die beweglichen Löcher bei ihrer Wanderung nach rechts zurückzuhalten. Es wird ein elektrisches Feld aufgebaut, das dem Diffusionsvorgang das Gleichgewicht hält.

Dem Diffusionsstrom nach rechts unter dem Dichtegradienten steht ein Feldstrom nach links unter dem Einfluss des Potenzialgradienten gegenüber

$$J_{Feld} = J_{Diffusion}. \quad (37.102)$$

Dieses Gleichgewicht heißt Boltzmann-Gleichgewicht. Der Gesamtstrom an den Enden des nicht kontaktierten Kristalls ist dabei gleich Null.

Bemerkung: Die Erdatmosphäre steht ebenfalls in einem Boltzmann-Gleichgewicht. So erklärt sich die Anziehung der Lufthülle durch die Schwerkraft und gleichzeitig die Abnahme der Luftpumpe mit der Höhe. Die Luftmoleküle möchten unter dem Einfluss der Luftpumpe in den Weltraum abdiffundieren, sie werden aber durch die Gravitationskraft zurückgehalten. Im Mittel ergibt sich ein Gleichgewicht.

Drückt man Feldstrom und Diffusionsstrom mit Hilfe der Gl. (37.75) aus, so wird am Übergang

$$e\mu_p p \frac{d\varphi}{dx} = -eD_p \frac{dp}{dx}. \quad (37.103)$$

Dies ist eine erste Differentialgleichung für die gesuchten Funktionen $p(x)$ und $\varphi(x)$.

Da allgemein die Einstein-Relation (37.72) gilt

$$D = \mu \frac{kT}{e} = \mu U_T, \quad (37.104)$$

wobei U_T die Temperaturspannung

$$U_T = \frac{kT}{e} \quad (37.105)$$

ist, hängen die Beweglichkeit μ_p und die Diffusionskonstante D_p über die Boltzmannkonstante k mit der Temperatur T zusammen. Die Temperaturspannung ist die wichtigste Bezugsgröße für alle Potenziale und Spannungen in der Halbleitertechnik. Bei Raumtemperatur ist $U_T = 25mV$.

Der Übersichtlichkeit wegen wird hier zunächst nur die Löcherdiffusion von links nach rechts von der p -Zone in die n -Zone behandelt. In Wirklichkeit diffundieren gleichzeitig die freien Elektronen von rechts nach links. An jeder Stelle muss Gl. (37.61), also

$$n(x) \cdot p(x) = n_i^2 \quad (37.106)$$

gelten. Das bedeutet, dass für $x = 0, n(0) = p(0) = n_i$ sein muss. Es bedeutet auch, dass wegen $n(x) = n_i/p(x)$ die Elektronenkonzentration im logarithmischen Maßstab symmetrisch zur Löcherkonzentration ist.

Die Differentialgleichung für die gesuchte Löcherdichte $p(x)$ und das Potenzial $\varphi(x)$ Gl. (37.103) ist separierbar

$$-\frac{d\varphi(x)}{U_T} = \frac{dp(x)}{p(x)}. \quad (37.107)$$

Die Integration ergibt

$$-\frac{1}{U_T} \int_0^x d\varphi = \int_0^x \frac{dp}{p} \quad (37.108)$$

$$-\frac{1}{U_T} \varphi(x) = \ln p(x) - \ln n_i = \ln \frac{p(x)}{n_i} \quad (37.109)$$

$$-\frac{\varphi(x)}{U_T} = \ln \frac{p(x)}{n_i}, \quad (37.110)$$

oder auch

$$p(x) = n_i e^{-\frac{\varphi(x)}{U_T}}. \quad (37.111)$$

Das Ergebnis ist bemerkenswert: Im Boltzmann-Gleichgewicht ist die negative Potenzialverteilung der logarithmisch aufgetragenen Löcherdichteverteilung proportional (Abb. 37.11).

Die sich zwischen den Enden der beiden Kristallzonen einstellende Potenzialdifferenz $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = U_D$ wird Diffusionsspannung U_D genannt. Mit

$$-\varphi(x_2) = U_T \ln \frac{p_{\infty n}}{n_i} \quad \text{und} \quad -\varphi(x_1) = U_T \ln \frac{p_{\infty p}}{n_i} \quad (37.112)$$

wird

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U_T \left(\ln \frac{p_{\infty p}}{n_i} - \ln \frac{p_{\infty n}}{n_i} \right) = U_T \ln \frac{p_{\infty p}}{p_{\infty n}}. \quad (37.113)$$

Es ist also

$$U_D = U_T \ln \frac{p_{\infty p}}{p_{\infty n}}. \quad (37.114)$$

Mit $p_{\infty p} = N_A$ und $p_{\infty n} = n_i^2/n_{\infty n} = n_i^2/N_D$ lässt sich die Diffusionsspannung noch allgemeiner schreiben

$$U_D = U_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}. \quad (37.115)$$

sie hängt also im wesentlichen von den Dotierungen N_A und N_D ab (Abb. 37.12) Die n -Zone ist positiv gegenüber der p -Zone!

Mit den Zahlenwerten $N_A = 2 \cdot 10^{16}(1/cm^3)$ und $N_D = 10^{16}(1/cm^3)$ ergeben sich die Potenziale

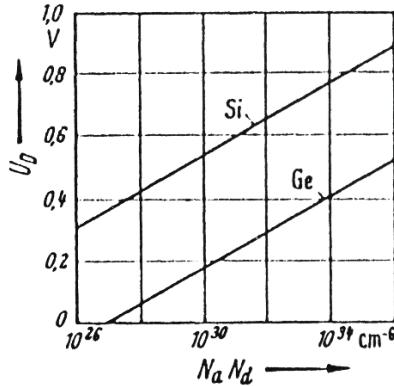


Abbildung 37.12. Diffusionsspannung beim pn -Übergang in Abhängigkeit von den Dotierungen

$$\varphi_2 = 25mV \ln \frac{10^{16}}{1,5 \cdot 10^{10}} = 335mV \quad \text{und} \quad -\varphi_1 = 25mV \ln \frac{2 \cdot 10^{16}}{1,5 \cdot 10^{10}} = 353mV \quad (37.116)$$

und damit die Diffusionsspannung $U_D = 688mV$.

Die erste Differentialgleichung (37.103) hat nur die Verwandtschaft der beiden gesuchten Funktionen $p(x)$ und $\varphi(x)$ gezeigt; zur Ermittlung des Verlaufs kann man als zweite die Poisson-Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\varrho(x)}{\varepsilon} \quad (37.117)$$

ansetzen. Die Raumladung ϱ ergibt sich aus den ortsfesten Dichten N_A und N_D sowie aus den ortsabhängigen Dichten der Löcher $p(x)$ und Elektronen $n(x)$ zu

$$\varrho(x) = e(p(x) - n(x) + N_D - N_A). \quad (37.118)$$

Mit Gl. (37.111)

$$p(x) = n_i e^{-\frac{\varphi(x)}{U_T}} \quad (37.119)$$

und entsprechend

$$n(x) = n_i e^{+\frac{\varphi(x)}{U_T}} \quad (37.120)$$

geht Gl. (37.117) über in

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2en_i}{\varepsilon} \frac{e^{+\frac{\varphi(x)}{U_T}} - e^{-\frac{\varphi(x)}{U_T}}}{2} - \frac{e}{\varepsilon}(N_D - N_A), \quad (37.121)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2en_i}{\varepsilon} \sinh \frac{\varphi}{U_T} - \frac{e}{\varepsilon}(N_D - N_A). \quad (37.122)$$

Durch den \sinh -Term erlaubt diese Gleichung leider keine einfache Bestimmung der Funktionen $p(x)$ und $\varphi(x)$. Zur Wahrung der Durchsichtigkeit wird deshalb meist, und auch im folgenden, eine Näherung verwendet: Die Schottky-Parabelnäherung. Sie setzt den Potenzialverlauf von Abb. 37.11 aus zwei Parabelbögen zusammen und erlaubt leicht, Potenzial-, Feldstärke- und Ladungsverteilung im Zusammenhang zu sehen. Dieser Gedankengang wird bei der Beschreibung des pn -Übergangs in Abschnitt 39.1 weitergeführt.

37.3.8 Thermoeffekt

Der Thermoeffekt wird zur direkten *Umwandlung von Wärme in elektrische Energie* und umgekehrt zur *Kühlung durch elektrische Energie* benutzt. Werden z. B. an den beiden Enden eines Halbleiterstäbchens Metallkontakte angebracht und wird die eine der beiden Kontaktstellen (1) gegenüber der anderen (2) erwärmt, so entsteht zwischen den beiden Metallkontakten eine elektrische Spannung (T. J. Seebeck 1822), die *Thermospannung* oder *Seebeck-Spannung*. Sie ist proportional der Differenz der Temperaturen an der warmen Kontaktstelle, T_w , und an der kalten Kontaktstelle, T_k :

$$U_0 = \alpha(T_w - T_k). \quad (37.123)$$

Schließt man den Stromkreis zwischen den beiden Elektroden durch einen äußeren Stromleiter, so fließt ein Strom I , der durch diese Leerlaufspannung und den Gesamtwiderstand des Kreises bestimmt ist. In den äußeren Widerstand wird elektrische Leistung geliefert; sie muss durch die zugeführte Wärmeleistung gedeckt werden. Umgekehrt entsteht daher an dem Kontakt 1 ein Wärmeentzug, die *Peltier-Wärme*, wenn aus einer äußeren Stromquelle Strom in der gleichen Richtung geschickt wird (M. Peltier 1834); an dem Kontakt 2 wird dabei Wärme erzeugt. Mit geeigneten Halbleitern, z. B. Wismut-Tellurid, Bi_2Te_3 , können Koeffizienten α von einigen Zehntel mV je Kelvin erreicht werden. Bei der Umwandlung von Wärme in elektrische Energie fließt durch das Stäbchen ein Wärmestrom, der einer Verlustleistung

$$P_v = (T_w - T_k) \frac{\lambda A}{l} \quad (37.124)$$

entspricht, wobei A den Querschnitt, l die Länge des Stäbchens, λ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnen. Die maximal entnehmbare elektrische Leistung ist $U_0^2 \kappa A / 4l$. Das Verhältnis dieser Leistung zur Verlustleistung ist daher proportional $(T_w - T_k) \alpha^2 \kappa / \lambda$. Die Größe $\alpha^2 \kappa / \lambda$ wird als *Effektivität* bezeichnet; es werden Werte der Effektivität von einigen $10^{-3} K^{-1}$ erreicht.

37.3.9 Photoeffekt

In Halbleitern können durch Beleuchtung Trägerpaare erzeugt werden. Bedingung dafür ist, dass die Energie hf der absorbierten Lichtquanten ausreichend

hoch ist. An die Stelle der Austrittsarbeit W_0 beim „äußeren Photoeffekt“ tritt bei dem „inneren Photoeffekt“ der Halbleiter der Energieabstand $\Delta W = e\Delta U$ zwischen Valenz- und Leitungsband. Die Grenzwellenlänge λ_g , unterhalb der durch ein Photon ein Überschussträgerpaar gebildet werden kann, beträgt daher

$$\lambda_g = \frac{hc}{e\Delta U}. \quad (37.125)$$

Kennt man den Bandabstand eines Halbleitermaterials, so kann man mit dieser Gleichung die entsprechende Wellenlänge mit einem Taschenrechner bestimmen. Die Wellenlängen des sichtbaren Lichtes (0,35 bis 0,8 μm) reichen also zur Erzeugung von Überschussträgern aus (*Photodioden*).

Umgekehrt können beim Zurückfallen von Leitungselektronen in das Valenzband (Rekombination) Photonen ausgelöst werden. Entsprechend dem Energiebetrag $e\Delta U$ wird Licht mit der Wellenlänge λ_g erzeugt (*Elektrolumineszenz, Leuchtdioden*).

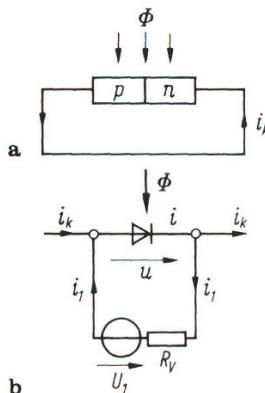


Abbildung 37.13. Prinzip der Photodiode, i_k Kurzschlussstrom bei Beleuchtung mit einem Lichtstrom Φ

Die bei einer Photodiode je Zeiteinheit erzeugte Überschussträgerdichte ist proportional dem auftreffenden Lichtstrom Φ . Maßgebend für den Proportionalitätskoeffizienten ist die Transparenz des Halbleitermaterials für die betreffende Lichtart und infolge der Rekombination der Überschussträger der räumliche Abstand des Erzeugungsortes vom pn-Übergang. Bei Kurzschluss der Diode fließen die Minoritätsträger über die Potentialschwelle ab. Der dem Lichtstrom Φ proportionale Kurzschlußstrom i_k fließt daher in der Diode vom n-Bereich zum p-Bereich, Abb. 37.13. Damit ergibt sich bei beliebiger Schaltung der Diode das Ersatzschaltbild Abb. 37.13. Der Photostrom i_k addiert sich zu dem Diodenstrom i . Bei der angegebenen Zählrichtung für i_1 gilt $i_1 = i - i_k$. Die i, u -Kennlinie der Diode verschiebt sich also um den Betrag i_k nach unten, Abb. 37.14. In das Diagramm ist die Widerstandsgerade

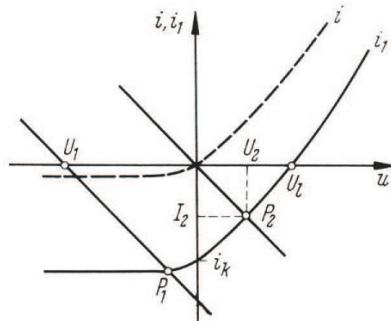


Abbildung 37.14. Kennlinie der Photodiode, i Strom ohne Beleuchtung, P_2 Betriebspunkt ohne Vorspannung, P_1 Betriebspunkt mit Vorspannung U_1

$$i_1 = \frac{U_1 - u}{R_v} \quad (37.126)$$

für den Fall einer negativen Quellenspannung U_1 und für den Fall $U_1 = 0$ eingetragen. Ihr Schnittpunkt mit der Kennlinie der Photodiode liefert den bei der betreffenden Beleuchtung erzeugten Strom i_1 . Im Leerlauf, $i_1 = 0$, stellt sich die zu dem Lichtstrom Φ gehörige Leerlaufspannung U_1 ein; sie wächst wegen der Krümmung der Kennlinie nicht proportional mit Φ . Der Schnittpunkt P_2 zeigt die Verhältnisse bei quellenfreiem Abschluss der Diode. In dieser Anordnung werden Photodioden z. B. zur *Messung von Lichtstrahlung* (auch Röntgen- oder γ -Strahlen) benutzt. Halbleiterphotodioden finden ferner Anwendung zur *Erzeugung elektrischer Energie* aus dem Sonnenlicht (Solarzellen). Im Punkt P_2 wird die Leistung $U_2 I_2$ in den Lastwiderstand geliefert.

38

Elektronenröhren (Internet)

38.1 Die Raumladungsgleichung

38.2 Elektronenemission

38.3 Photoemission

38.4 Die Strom-Spannungsrelation für Elektronenröhren

38.5 Die Hochvakuumtriode

38.6 Die Hochvakuumtriode

38.7 Raumladung in leitenden Stoffen

Anmerkung: Dieser Abschnitt kann aus dem Internet als PDF-File geladen werden; Einzelheiten dazu findet man im Vorwort zu diesem Buch. Die Hinweise auf Abschnitte, Gleichungen und Abbildungen beziehen sich auf den vorliegenden Text. Die Seitennummern entsprechen der Vollversion des Buchmanuskripts, die sämtliche im Internet vorhandenen Unterabschnitten einbezieht und können somit leider nicht mit den Seitennummern der vorliegenden gedruckten Version des Buchmanuskriptes in Zusammenhang gebracht werden.

Halbleiterbauelemente

39.1 Der *pn*-Übergang

39.1.1 Der *pn*-Übergang im stromlosen Zustand

Die Funktionsweise des *pn*-Übergangs ist fundamental für das Verständnis aller Halbleiterbauelemente. Man betrachtet ihn zunächst im stromlosen Zustand (Abb. 39.1). Der Kristall sei an seinen Enden nicht angeschlossen, der Gesamtstrom ist gleich Null. Über den Übergang diffundieren, wie in Abschnitt 37.3.6 beschrieben, Löcher aus der p-Zone nach rechts in die n-Zone, das dabei entstehende Feld wirkt dagegen, es besteht Boltzmann-Gleichgewicht $J_{Feld} = J_{Diff}$.

Ebenso diffundieren freie Elektronen aus der n-Zone nach links, sie werden durch die positiven Donatoren zurückgehalten, auch für die Elektronendiffussion besteht Boltzmann-Gleichgewicht. $p(x)$ und $n(x)$ werden nochmals in Abb. 39.1, Teil a gezeigt.

Trägt man die Konzentrationen nicht in logarithmischem, sondern in linearer Maßstab auf (Abb. 39.1, Teil b), so erkennt man, dass in nächster Nähe des Übergangs die Löcherdichte wie auch die Elektronendichte um Größenordnungen kleiner ist als im übrigen Kristall. Es entsteht also eine von beweglichen Trägern entblößte Zone, in der nur noch eine verschwindend kleine Leitfähigkeit möglich ist. Die ausgeräumte Zone wird zur Sperrsicht. In ihr sind nur noch ortsfeste Akzeptoren links und ortsfeste Donatoren rechts, die eine Raumladung $\varrho(x)$ nach Abb. 39.1, Teil c bilden

$$\varrho = e (N_D(x) - N_A(x)). \quad (39.1)$$

Außerhalb der Raumladungszone ist der ganze Kristall elektrisch neutral, $\varrho = 0$, links kompensieren die positiven Löcher die negativen Akzeptoren, rechts kompensieren die Elektronen die positiven Donatoren. Insbesondere an den zonenseitigen Rändern könnte man den Einfluss der beweglichen Träger berücksichtigen und exakt schreiben

$$\varrho = e (N_D - N_A + p(x) - n(x)). \quad (39.2)$$

man erhält aber mit der Näherung (39.1) eine ausreichend genaue Darstellung und die bessere Übersicht.

Die Raumladungszone hat in der p-Zone die Dicke l_p , in der n-Zone die Dicke l_n und damit die gesamte Dicke

$$l = l_p + l_n. \quad (39.3)$$

Der ganze Kristall muss bei den Diffusionsvorgängen elektrisch neutral bleiben, es muss also die Ladung $Q_A = -eN_A l_p$ auf der p-Seite der Raumladungszone entgegengesetzt gleich groß zur Ladung $Q_D = +eN_D l_n$ sein. Das heißt, es muss die Neutralitätsbedingung

$$N_A l_p = N_D l_n \quad (39.4)$$

gelten. Die Raumladungszone wirkt wie ein Kondensator mit den Ladungen Q_A und Q_D . Zur Bestimmung des E-Feldverlaufs $E(x)$ betrachtet man den durch die Front einer Hülle austretenden elektrischen Fluss

$$A \cdot \varepsilon E = A \cdot \int_{-l_p}^x \varrho(x) dx, \quad (39.5)$$

der nach dem Gaußschen Satz gleich der eingeschlossenen Ladung sein muss.

Für $-l_p \leq x \leq 0$ ergibt sich

$$E(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-l_p}^x (-e) N_A dx = -\frac{e}{\varepsilon} N_A (x + l_p), \quad (39.6)$$

also ein linearer Abfall mit dem maximalen E-Feld bei $x = 0$

$$E(0) = -E_{max} = -\frac{e}{\varepsilon} N_A l_p. \quad (39.7)$$

Für $0 \leq x \leq l_p$ steigt das E-Feld wieder linear

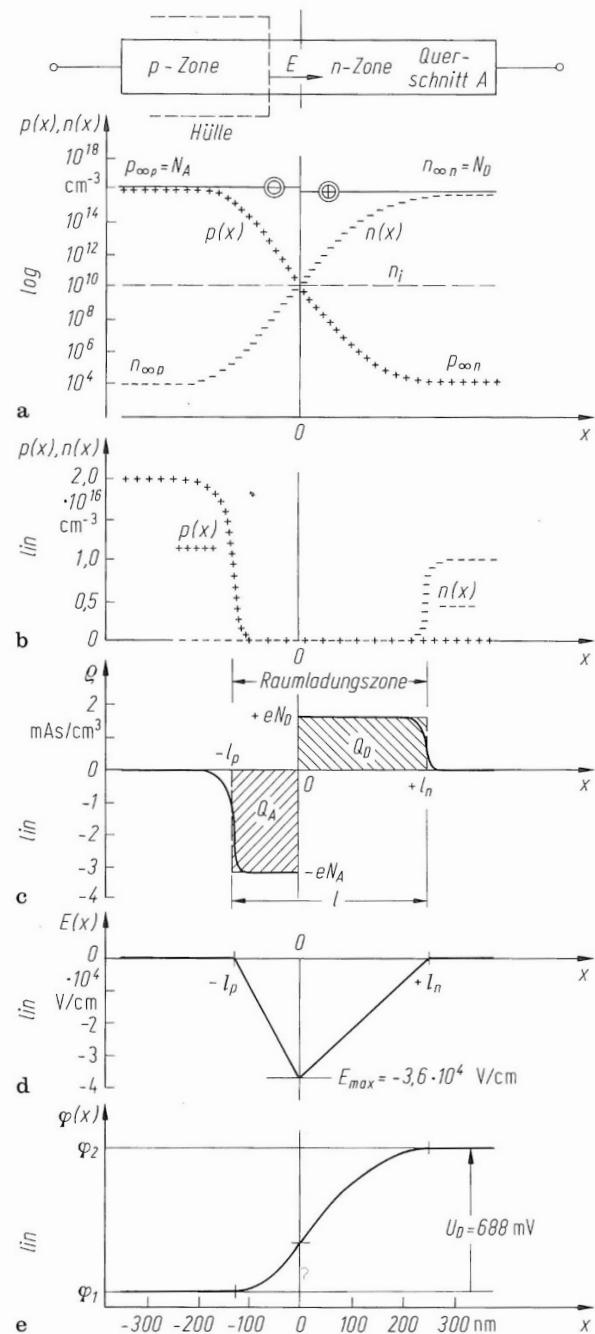
$$E(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x e N_D dx + E(0) = +\frac{e}{\varepsilon} N_D x + E(0). \quad (39.8)$$

Sie erreicht den Wert $E = 0$ bei

$$x = \frac{E(0)}{\frac{e}{\varepsilon} N_D} = \frac{N_A}{N_D} l_p = l_n. \quad (39.9)$$

Insgesamt ergibt sich der Dreieckverlauf des E-Feldes Abb. 39.1, Teil d. Mit der Neutralitätsbedingung (39.4) ist

$$E_{max} = \frac{e}{\varepsilon} N_A l_p = \frac{e}{\varepsilon} N_D l_n. \quad (39.10)$$

Abbildung 39.1. pn -Übergang im stromlosen Zustand

Aus $E = -d\varphi/dx$ ergibt eine weitere Integration den Potenzialverlauf, aus den Geradenstücken des E-Feldverlaufs werden Parabelstücke von $\varphi(x)$, wie sie Abb. 39.1, Teil e zeigt. Zu den Parabelstücken von $\varphi(x)$ sind die Parabelstücke von $p(x)$ und $n(x)$ nach Abschnitt 37.3.7 proportional, der ganze Ansatz wird Schottky-Parabelnäherung genannt.

Im einzelnen

$$\varphi(0) = \varphi_1 - \int_{-l_p}^0 E(x) dx \quad (39.11)$$

mit

$$E(x) = -E_{max} - \frac{E_{max}}{l_p} x \quad (39.12)$$

wird

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_1 + E_{max}x \Big|_{-l_p}^0 + \frac{E_{max}}{2l_p}x^2 \Big|_{-l_p}^0 \\ &= \varphi_1 + E_{max}l_p - \frac{1}{2}E_{max}l_p \\ &= \varphi_1 + \frac{1}{2}E_{max}l_p. \end{aligned} \quad (39.13)$$

Ebenso wird

$$\varphi_2 = \varphi(0) + \frac{1}{2}E_{max}l_n \quad (39.14)$$

also

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{2}E_{max}(l_p + l_n) = \frac{1}{2}E_{max}l. \quad (39.15)$$

Die Differenz ist gleich der Diffusionsspannung, die damit in Beziehung zum maximalen E-Feld und zur Breite der Raumladungszone tritt

$$U_D = \frac{1}{2}E_{max}l. \quad (39.16)$$

Die gefundenen Teilergebnisse lassen sich auch noch anders zusammenfassen:
Gl. (39.10) ergibt mit (39.16)

$$\begin{aligned} U_D &= \frac{1}{2}E_{max} \left(\frac{\varepsilon E_{max}}{eN_A} + \frac{\varepsilon E_{max}}{eN_D} \right), \\ E_{max} &= \sqrt{2U_D \frac{e}{\varepsilon} \frac{N_A N_D}{N_A + N_D}}. \end{aligned} \quad (39.17)$$

Mit Gl. (39.16) liegt damit auch die Breite der Raumladungszone

$$l = \frac{2U_D}{E_{max}} \quad (39.18)$$

fest.

Interessant ist noch die Größe von Feldstrom und Diffusionsstrom im Boltzmann-Gleichgewicht. Fällt die Löcherdichte von N_A über die Distanz l auf $p_{\infty n} = N_D/n_i^2 \approx 0$ ab, so ist der Diffusionsstrom der Löcher

$$J_{diff} = eD_p \frac{dp}{dx} \approx eD_p \frac{N_A}{l}. \quad (39.19)$$

Er ist mit $J_{Diff} = 1081 A/cm^2$ sehr groß, groß gegen alle zu erwartenden Durchlassströme! Dieser große Diffusionsstrom hält einem ebenso großen Feldstrom das Boltzmann-Gleichgewicht. Alle beispielhaft verwendeten Zahlenwerte sind in den folgenden Gleichungen zusammengefasst:

$$N_A = 2 \cdot 10^{16} \frac{1}{cm}, \quad N_D = 1 \cdot 10^{16} \frac{1}{cm}, \quad (39.20)$$

$$p_{\infty,n} = n_i^2/N_D = 2,25 \cdot 10^4 \frac{1}{cm}, \quad (39.21)$$

$$p_{\infty,p} = n_i^2/N_A = 1,125 \cdot 10^4 \frac{1}{cm}, \quad (39.22)$$

$$L_n = 10 \mu m, \quad L_p = 5 \mu m, \quad (39.23)$$

$$U_D = U_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} = 688 mV, \quad E_{max} = 3,716 \cdot 10^4 \frac{V}{cm}, \quad (39.24)$$

$$l = \frac{2U_D}{E_{max}} = 370 nm, \quad (39.25)$$

$$l_p = \frac{1}{3} l = 123 nm, \quad l_n = \frac{2}{3} l = 247 nm, \quad (39.26)$$

$$J_{Diff} = eD_p \frac{N_A}{l} = 1081 \frac{A}{cm^2}, \quad (39.27)$$

$$J_s = e \left(\frac{D_p}{L_p} p_{\infty,n} + \frac{D_n}{L_n} n_{\infty,p} \right) = 150 \frac{pA}{cm^2}. \quad (39.28)$$

39.1.2 *pn*-Übergang im Durchlassbereich

An den Kristall werde jetzt von außen eine positive Spannung U angelegt. Sie führt zu einer neuen erzwungenen Potenzialverteilung $\varphi(x)$ (Abb. 39.2, Teil a). An die Stelle der Diffusionsspannung U_D tritt jetzt die Differenz $U_D - U$.

Da der zu erwartende Durchlassstrom wesentlich kleiner ist als der Strom im Boltzmann-Gleichgewicht, bleibt dessen Eigenschaft erhalten, dass die Potenzialverteilung proportional zur logarithmisch aufgetragenen Trägerdichte ist. So folgt aus $\varphi(x)$ die Löcherdichte $p(x)$ und die Elektronendichte $n(x)$ in Abb. 39.2, Teil b.

Der linke Endwert der Löcherdichte bleibt $p_{\infty n} = N_A$ unverändert, aber $p_{\infty n}$ geht in p_0 über, wobei jetzt

$$U_D - U = U_T \ln \frac{p_{\infty p}}{p_0}, \quad (39.29)$$

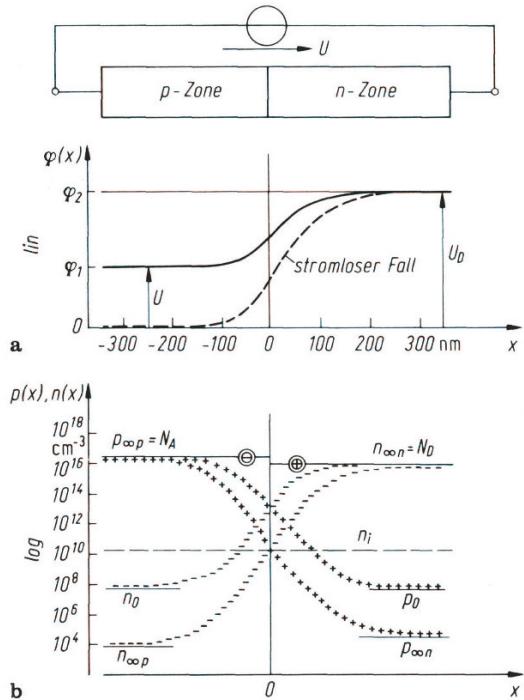


Abbildung 39.2. pn -Übergang im Durchlassbereich mit dem Maßstab in x -Richtung im Bereich $0, 1\mu\text{m}$

statt wie in Gl. (37.114)

$$U_D = U_T \ln \frac{p_{\infty p}}{p_{\infty n}} \quad (39.30)$$

im stromlosen Fall sein muss.

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$U = U_T \left(\ln \frac{p_{\infty p}}{p_{\infty n}} - \ln \frac{p_{\infty p}}{p_0} \right), \quad (39.31)$$

$$U = U_T \ln \left(\frac{p_0}{p_{\infty n}} \right), \quad (39.32)$$

oder

$$p_0 = p_{\infty n} e^{\frac{U}{U_T}}, \quad (39.33)$$

die eingeprägte Spannung U bestimmt also die Löcherdichte p_0 am rechtsseitigen Rand des Übergangs.

Man betrachte den Maßstab in x -Richtung. Die Raumladungszone ist bei Boltzmann-Gleichgewicht nur etwa $0,2\mu m$ breit. Demgegenüber ist die Diffusionslänge L_p im Bereich von $1\mu m \dots 100\mu m$. Die Löcherdichte $p(x)$ setzt sich, von p_0 ausgehend, nach rechts in den Kristall fort, wie dies bei der Diffusion von Löchern als Minoritätsträger in eine n -Zone beschrieben wurde, sie klingt exponentiell auf $p_{\infty n}$ ab. Dann gilt rechts außerhalb der Raumladungszone für die Löcherdichte die Gl. (37.96)

$$p(x) = (p_0 - p_{\infty n}) e^{-x/L_p} + p_{\infty n}. \quad (39.34)$$

Im Maßstab der Diffusionslänge ergibt sich unter Zusammenfassung der Abb. 39.2 mit Abb. 37.9 die Gesamtdarstellung für den gesuchten Verlauf der Löcherdichte in Abb. 39.3, in welcher der Übergang in der Raumladungszone aus Maßstabsgründen abrupt von $p_{\infty n}$ auf p_0 fällt. Entsprechendes gilt für die Elektronendichte.

Den Abfall der Löcherdichte p_0 auf $p_{\infty n}$ erkennt man am besten aus der gleichzeitigen logarithmischen Darstellung, die das Streben nach $p_{\infty n}$ erkennen lässt, und der linearen Darstellung, die den Exponentialcharakter besser zeigt, in der aber $p_{\infty n}$, weil um Größenordnungen kleiner als p_0 , nicht mehr in Erscheinung tritt. Für die Elektronendichte gilt entsprechend Gl. (39.29)

$$U_D - U = U_T = \ln \frac{n_{\infty n}}{n_0}, \quad (39.35)$$

und man findet, wegen der Gleichheit der Spannungen

$$\begin{aligned} \ln \frac{n_{\infty n}}{n_0} &= \ln \frac{p_{\infty p}}{p_0} \quad \text{mit } n_{\infty n} = N_D \text{ und } p_{\infty p} = N_A, \\ n_0 &= p_0 \frac{N_D}{N_A}. \end{aligned} \quad (39.36)$$

Für den exponentiellen Abfall von $n(x)$, ausgehend von n_0 und asymptotisch $n_{\infty p}$ erreichend, ist zu beachten, dass die Diffusionslänge L_n der Elektronen wegen ihrer größeren Diffusionskonstanten D_n größer als L_p ist. Aus Gl. (37.97) ergibt sich bei gleicher Lebensdauer $\tau_p = \tau_n$

$$L_n = L_p \sqrt{\frac{D_n}{D_p}} = 1,7 L_p. \quad (39.37)$$

Ausgestattet mit der Kenntnis der Dichteveerteilungen ist es jetzt leicht, die $I(U)$ -Kennlinie zu finden:

Für die Diffusion von Löchern in die n -Zone gilt die in Abb. 37.9 schon gefundene Zuordnung des Löcherdiffusionsstroms $J_p(x)$ zur Dichteveerteilung $p(x)$ der Löcher. Ebenso gilt die in Abb. 37.9 gezeigte Übernahme von $J_p(x)$ in den dazu komplementären Rekombinationsstrom der Elektronen $J_n(x)$, so dass sich der Summenstrom nach Gl. (37.101)

$$J_p(x) + J_n(x) = J_{p0} \quad (39.38)$$

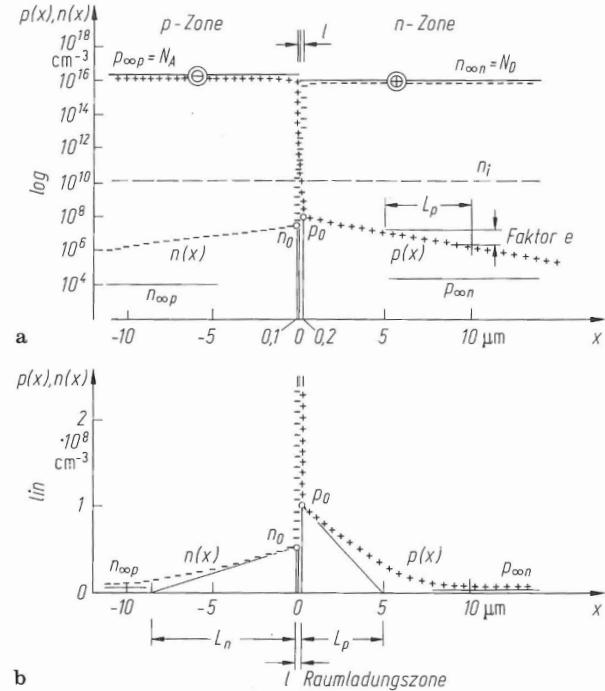


Abbildung 39.3. pn -Übergang im Durchlassbereich mit dem Maßstab in x -Richtung im Bereich $5\mu\text{m}$

ergibt.

Dieser ist nach Gl. (37.99) durch den Dichtegradienten gegeben

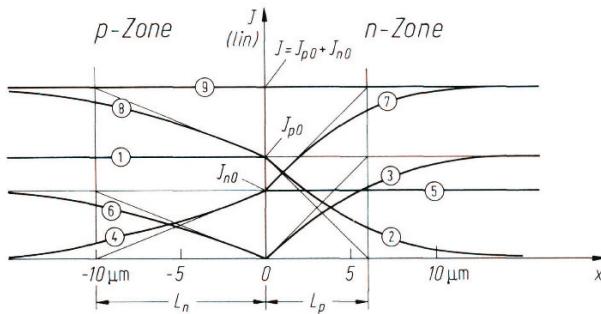
$$J_{p0} = eD_p \frac{p_0 - p_{\infty n}}{L_p}. \quad (39.39)$$

Fügt man hierin aus Gl. (39.33) $p_0 = p_{\infty n} \exp(U/U_T)$ ein, so erhält man die gesuchte Abhängigkeit der Stromdichte J_{p0} von der eingeprägten Spannung U zu

$$J_{p0} = eD_p \frac{p_{\infty n}}{L_p} \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right). \quad (39.40)$$

Der Strom J_{p0} wird nach seinem Eintritt in das linksseitige Kristallende in der p -Zone von den in hoher Zahl vorhandenen Löchern als Majoritätsträgerstrom

(Kurvenstück 1) an den Übergang herangetragen, geht als Minoritätsträgerstrom bestimmt durch den Dichtegradienten (Kurvenstück 2) nach Rekombination in einen am Ende der n-Zone von Elektronen getragenen Majoritätsträgerstrom (Kurvenstück 3) über und verlässt den Kristall am rechten Ende (Abb. 39.4).



- ① Majoritätsträgerstrom J_{p0} getragen von Löchern
- ② Minoritätsträgerstrom der Löcher. Dichtegradient bestimmt
- ③ Rekombinationsstrom getragen von Elektronen
- ④ Minoritätsträgerstrom der Elektronen. Dichtegradient bestimmt
- ⑤ Majoritätsträgerstrom J_{n0} getragen von Elektronen
- ⑥ Rekombinationsstrom getragen von Löchern
- ⑦ Elektronenstrom aus Addition von ③ und ⑤
- ⑧ Löcherstrom aus Addition von ① und ⑥
- ⑨ Gesamtstrom

Abbildung 39.4. Zusammensetzung des gesamten Diodenstromes J aus seinen Anteilen

Genau kontrapolar verhält sich ein zweiter Strom J_{n0} , der von Elektronen als Minoritätsträger (Kurvenstück 4) in der p-Zone getragen wird. Auch er wird vom Dichtegradienten

$$J_{n0} = eD_n \frac{n_0 - n_{\infty p}}{L_n} \quad (39.41)$$

bestimmt und ist mit

$$n_0 = n_{\infty p} e^{\frac{U}{V_T}} \quad (39.42)$$

von der Spannung abhängig

$$J_{n0} = eD_n \frac{n_{\infty p}}{L_n} \left(e^{\frac{U}{V_T}} - 1 \right). \quad (39.43)$$

Zusammengefaßt ergibt sich die Stromdichte der *pn*-Diode zu

$$J = J_{p0} + J_{n0} \quad (39.44)$$

$$= \left(\frac{eD_p p_{\infty n}}{L_p} + \frac{eD_n n_{\infty p}}{L_n} \right) \left(e^{\frac{U}{V_T}} - 1 \right).$$

Daraus ergibt sich der Strom zu $I = AJ$ mit dem konstanten Strom

$$I_S := AJ_S = A \left(\frac{eD_p p_{\infty n}}{L_p} + \frac{eD_n n_{\infty p}}{L_n} \right) \quad (39.45)$$

führt dann zur wichtigen Kennliniengleichung der *pn*-Diode

$$I = I_S \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right). \quad (39.46)$$

Die *pn*-Diode kann in der Schaltungstechnik sehr vielseitig eingesetzt werden. Einen Überblick über die wichtigsten Schaltungstechniken mit Dioden geben Hinsch [120], Wupper [312], Davidse [61], Horowitz und Hill [124], Tietze und Schenk [276]; die wichtigsten Ideen der Schaltungstechnik werden bei O'Dell [218] geschildert.

39.1.3 *pn*-Übergang im Sperrbereich

Polt man die Spannung an der *pn*-Diode um, so dass der *p*-Zone ein tieferes Potenzial φ_1 als im stromlosen Zustand aufgeprägt wird, so wird sich gemäß Abb. 39.2, Teil a der Spannungspfeil umdrehen, die Potenzialschwelle wird größer als die Diffusionsspannung, nämlich $U_D + U$ werden. Das Boltzmann-Gleichgewicht *Diffusionsstrom* = *Feldstrom* wird erhalten bleiben, und zur größeren Potenzialschwelle wird ein größerer Dichteunterschied der Träger gehören, das heißt, es wird $p_0 < p_{\infty n}$ und $n_0 < n_{\infty p}$ werden. Da die Voraussetzungen sich durch den Polarisationswechsel von U nicht geändert haben, gilt nach wie vor Gl. (39.33) und Gl. (39.36)

$$p_0 = p_{\infty n} e^{U/U_T}, \quad n_0 = p_0 \frac{N_D}{N_A} \quad (39.47)$$

nur ist eben $U < 0$, damit $e^{U/U_T} < 1$ und damit $p_0 < p_{\infty n}$. Ebenso gilt dies für n .

Die Dichteverteilungen von Abb. 39.3 für den Durchlassbereich gehen mit diesen Werten für die Randdichten p_0 und n_0 über in die in Abb. 39.5 gezeigten Dichteverteilungen für den Sperrbereich. Man erkennt vor allem die schon für kleine Sperrspannungen äußerst kleine Dichte frei beweglicher Löcher und Elektronen in den Diffusionszonen beiderseits des Übergangs. Ohne frei bewegliche Träger ist über diese Sperrsicht kein Stromfluss möglich.

Der äußerst kleine Reststrom ist schon als I_s in der Kennliniengleichung (39.46) enthalten, die ja für beliebiges Vorzeichen von U gilt. Als Zahlenwert ergibt sich aus Gl. (39.45) $J_s = 150 \text{ pA/cm}^2$.

39.1.4 Kapazität des *pn*-Überganges

Wie in Abb. 39.1, Teil b und c gezeigt, stehen sich in der Raumladungszone die Ladungen Q_A und Q_D gegenüber. Dazwischen liegt für alle Diodenspannungen im Sperrbereich die von freien Trägern ausgeräumte Zone, es bildet sich ein Kondensator mit der Sperrsichtkapazität C_{Sp} .

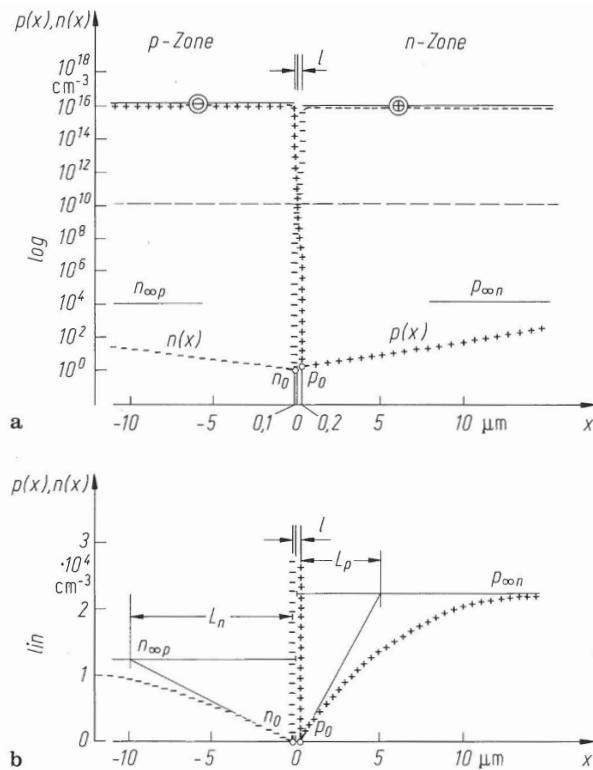


Abbildung 39.5. pn -Übergang im Sperrbereich. Der Maßstab in der linearen Darstellung ist 10^4 mal kleiner als in Abb. 39.3!

Ist die Potenzialstufe im Sperrbereich $U_D + U$, die an die Diode angelegte Spannung also $-U$, so ist die Dicke l des „Kondensatordielektrikums“ nach Gl. (39.16) mit U_D nach Gl. (37.114)

$$l = \frac{2(U_D + U)}{E_{max}} \quad (39.48)$$

und damit

$$C_{Sp} = \varepsilon_0 \varepsilon_r s_i \frac{A}{l} = \varepsilon_0 \varepsilon_r s_i \frac{AE_{max}}{2(U_D + U)}. \quad (39.49)$$

Daraus wird mit E_{max} nach Gl. (39.17)

$$C_{Sp} = A \sqrt{\frac{e \varepsilon_0 \varepsilon_{rSi}}{2} \frac{N_A N_D}{N_A + N_D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U + U_D}}, \quad (39.50)$$

$$C_{Sp} = \frac{K}{\sqrt{U + U_D}}, \quad (39.51)$$

die Sperrsichtkapazität einer *pn*-Diode mit abruptem Störstellenübergang ist umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Diodenspannung (Abb. 39.6).

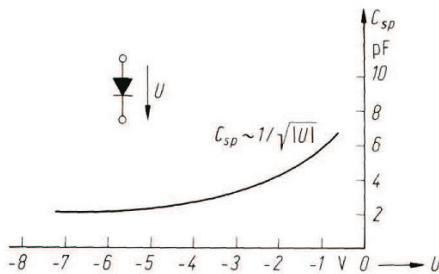


Abbildung 39.6. Typischer Verlauf der Sperrsichtkapazität C_{Sp} über der Vorspannung U einer *pn*-Diode

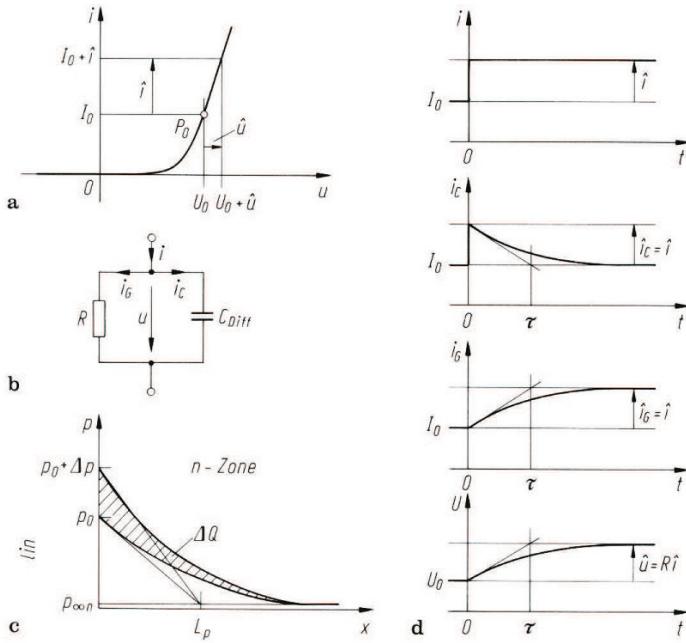
Zahlenbeispiel: Mit $N_A = 2 \cdot 10^{16}/cm^3$, $N_D = 10^{16}/cm^3$, $A = 150\mu m \times 150\mu m$, $U = 5V$ ergibt sich ein Wert von

$$C_{Sp} = \frac{2,25}{10^4} cm^2 \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} As \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} S \cdot 12 \cdot 2 \cdot 10^{16}}{5,688 V \Omega \cdot 2 \cdot 3 \cdot 100 cm \cdot cm^3}} \quad (39.52)$$

$$= 2,25 \cdot 10^{-4} \cdot 9,98 \cdot 10^{-9} \frac{S}{\Omega} = 2,25 pF. \quad (39.53)$$

Im Durchlassbereich ist die Diode ebenfalls kapazitiv, da der Umbau der Ladungsträgerkonzentration die Zufuhr, die Speicherung und die Abfuhr von Ladungen erfordert. Die zugehörige Kapazität wird Diffusionskapazität C_{Diff} genannt. Die vorläufige Betrachtung der Löcherkonzentration allein liefert die in Abb. 39.7 dargestellten Zusammenhänge.

Die Diode sei zunächst im Arbeitspunkt P_0 , die Löcherkonzentration fällt in der *n*-Zone vom Randwert p_0 , der zu U_0 gehört, exponentiell mit L_p auf $p_{\infty n}$ ab. Der Diodenstrom I_0 ist proportional zum Gradienten p_0/L_p . Nun werde der Strom sprungförmig um \hat{i} erhöht, der neue Gradient muss sich sprungförmig einstellen, der neue Randwert der Konzentration $(p + \Delta p)$, der zur Spannung $U_0 + \hat{u}$ gehört, kann sich erst mit der neuen Konzentrationsverteilung bilden, das heißt, wenn über den Diodenstrom die Ladung ΔQ zugeführt worden ist. Diese ist

Abbildung 39.7. Diffusionskapazität einer *pn*-Diode

$$\Delta Q = eA \left(\int_0^\infty (p_0 + \Delta p) e^{-\frac{x}{L_p}} dx - \int_0^\infty p_0 e^{-\frac{x}{L_p}} dx \right) \quad (39.54)$$

$$\Delta Q = eA \Delta p L_p. \quad (39.55)$$

Zu der sich einstellenden Spannung $U_0 + \hat{u}$ nach Gl. (39.33)

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{\infty n} \left(e^{\frac{U_0 + \hat{u}}{U_T}} - e^{\frac{U_0}{U_T}} \right) \\ &= p_{\infty n} e^{\frac{U_0}{U_T}} \left(e^{\frac{\hat{u}}{U_T}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (39.56)$$

Für kleine Aussteuerung \hat{u} ist eine Reihenentwicklung erlaubt

$$e^{\frac{\hat{u}}{U_T}} - 1 = \frac{\hat{u}}{U_T} + \dots \quad (39.57)$$

also ist

$$\Delta p = p_{\infty n} e^{\frac{U_0}{U_T}} \cdot \frac{\hat{u}}{U_T} \quad (39.58)$$

und damit

$$\Delta Q = \frac{eAL_p p_{\infty n}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}} \cdot \hat{u} =: C_{Diff} \hat{u}, \quad (39.59)$$

$$C_{Diff} = \frac{eAL_p p_{\infty n}}{U_T} e^{\frac{U_0}{U_T}}. \quad (39.60)$$

Für den Umbau der Elektronenkonzentration gelten dieselben Gedankengänge. Die gesamte Diffusionskapazität ist dann

$$C_{Diff} = \frac{eA}{U_T} (L_p p_{\infty n} + L_n n_{\infty p}) e^{\frac{U_0}{U_T}}. \quad (39.61)$$

Sie steigt exponentiell mit der Diodenspannung U_0 und erreicht deshalb große Werte. Bei $U_0 = 0$ ist sie mit den früheren Zahlenwerten der Diode schon $C_{Diff} \approx 400 \mu F$.

Der Diffusionskapazität liegt stets der differentielle Leitwert oder Diffusionsleitwert G_{Diff} parallel, der sich aus der Kennliniengleichung (39.46) ergibt. Er steigt mit demselben Exponentialfaktor $\exp(U/U_T)$ mit der Diodenspannung. Die Zeitkonstante

$$\tau = \frac{C_{Diff}}{G_{Diff}} \quad (39.62)$$

ist also vom Arbeitspunkt U_0 unabhängig und gleich der Trägerlebensdauer, die sich ergibt, wenn man die Gleichungen (39.45), (39.46), (39.61) und (37.97) in (39.62) einsetzt.

Der Umbau der Trägerkonzentration vom Durchlassbereich (Abb. 39.3) in den Sperrbereich (Abb. 39.5) kann nicht augenblicklich erfolgen. Wird die Diode vom Sperrbereich in den Durchlassbereich geschaltet, so bestimmen die Sperrsichtkapazität und die Diffusionskapazität wie erwartet den Anstieg von Diodenspannung $u_D(t)$ und Diodenstrom $i_D(t)$.

Man misst diesen Schaltvorgang in einer Anordnung nach Abb. 39.8. Ein Impulsgenerator gibt eine Spannung ab, die von $-\hat{u}_0$ nach $+\hat{u}_0$ und wieder zurückspringt. Sein Innenwiderstand R ist viel kleiner als der Diodensperrwiderstand. Der Diode wird also im Sperrbereich eine Spannung $u_A = \hat{u}_0$ eingeprägt, im Durchlassbereich wird der Arbeitspunkt $B(u_B, i_B)$ erreicht.

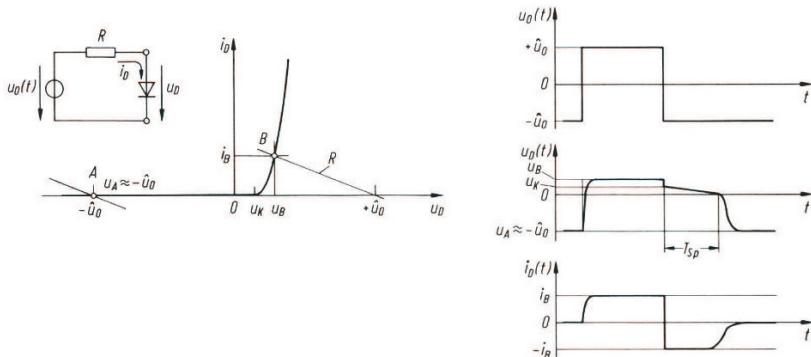


Abbildung 39.8. Sperrträgheit von pn -Dioden

Schaltet man vom Durchlassbereich in den Sperrbereich zurück, so wird die hohe Trägerkonzentration (Abb. 39.3) zunächst beibehalten - „gespeichert“ -

werden und einen Strom in negativer Richtung ermöglichen. Erst der innere Abbau der Trägerkonzentration während der Speicherzeit T_{Sp} auf die Konzentration im Sperrbereich (Abb. 39.5) erlaubt es, die Sperrfähigkeit der Diode wieder herzustellen. Der letzte Teil, die Rückflanke der Zeitfunktionen $u_D(t)$ und $i(t)$, wird durch die spannungsabhängige Kapazität bestimmt.

Der Speichereffekt ist für die Schaltgeschwindigkeit von Dioden äußerst unerwünscht. Man schafft deshalb durch Golddiffusion Rekombinationszentren und drückt so T_{Sp} auf Werte unter 1ns . Andererseits wird der Speichereffekt in Speicherschaltdioden (*step recovery diodes*) ausgenutzt. Dort wird durch ein besonderes Dotierungsprofil erreicht, so dass nach Ablauf der Speicherzeit T_{Sp} eine sehr steile Rückflanke der Diodenspannung $u_D(t)$ entsteht, die dann für die Erzeugung kurzer Impulse genutzt wird. Die Abfallzeit T_{A1} des Eingangsimpulses darf dann groß sein und die Speicherzeit erreichen $T_{A1} \leq T_{Sp}$, die Ausgangsabfallzeit T_{A2} kann dann viel kleiner T_{A1} sein ($T_{A2} \ll T_{A1}$) und Werte bis herab zu etwa $T_{A2} = 20\text{ps}$ werden erreicht.

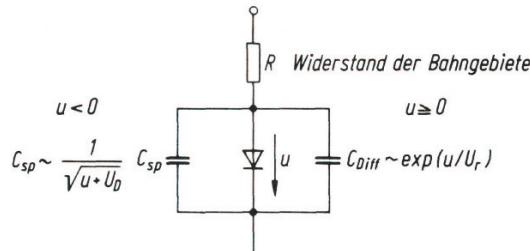


Abbildung 39.9. Ersatzschaltbild der Diode

Im Ersatzschaltbild der Diode (Abb. 39.9) legen sich die Sperrsichtkapazität C_{Sp} und die Diffusionskapazität C_{Diff} parallel zur trägeheitslosen Diode mit der Exponentialkennlinie. In Serie muss – nur bei großen Strömen – der endliche Zuleitungswiderstand R_B über die Bahngebiete, d.h., die *p*-Zone und die *n*-Zone bis zum *pn*-Übergang eingefügt werden.

Die über das Wurzelgesetz (39.51) nur wenig von der Diodenspannung abhängige Sperrsichtkapazität C_{Sp} bestimmt das dynamische Verhalten im Sperrbereich $u < 0$. Sobald die Spannung $u > 0$ wird, wächst parallel zum Durchlassstrom die Diffusionskapazität C_{Diff} ebenfalls exponentiell mit der Spannung an und wird im Durchlassbereich allein bestimmt.

39.2 Der bipolare *n-p-n*-Transistor

Die Elektronenröhre war seit den ersten praktischen Anwendungen in Verstärker- und Oszillatorschaltungen um 1912 über viele Jahrzehnte das einzige universelle aktive Bauelement in der elektronischen Schaltungstechnik.

Nachteilig waren jedoch die begrenzten Möglichkeiten zur Verringerung des Bauvolumens und die Notwendigkeit einer geheizten Kathode. Trotz erster Ideen in Richtung halbleiterbasierter aktiver Bauelemente in den 1920er Jahren gelang es Bardeen und Brattain erst im Jahre 1947 mit den sogenannten Spitzentransistoren erste funktionsfähige Bauelemente dieser Art herzustellen. Sie erwiesen sich jedoch als zu instabil, so dass erst der von Shockley erfundene Bipolartransistor den entscheidenden Durchbruch brachte. Eine hervorragende Darstellung der historischen Entwicklung des Transistors bis hin zu den frühen integrierten Schaltungen findet man bei Hillmer [119]. Im folgenden soll der bipolare *npn*-Transistor näher diskutiert werden.

In einem Si-Kristall sind die drei Zonen wie in Abb. 39.10 angeordnet und so beschaltet, dass der linke *np*-Übergang in Durchlassrichtung arbeitet, der rechte *pn*-Übergang in Sperrrichtung. Die linke *n*-Zone heißt Emitter, die mittlere *p*-Zone Basis, die rechte *n*-Zone heißt Kollektor. Die Wirkungsweise wird wesentlich vom Verhalten der Elektronen als Minoritätsträger in der mittleren Basiszone bestimmt.

Der rechte *pn*-Übergang, die Kollektordiode, ist im Sperrbereich. Elektronen, die in ihre von frei beweglichen Trägern entblößte Raumladungszone (Abb. 39.1, Teil b) aus der Basis einfließen, werden sofort abgesaugt. Am Rande des Kollektors ist die Elektronendichte fast null, der Elektronendiffusionssstrom über den Kollektorrand ist von der Spannung U_{CB} so lange unabhängig, solange die ausgeräumte Zone von Abb. 39.1, Teil b existiert, dies ist aber für $U_{CB} \geq 0$ immer der Fall.

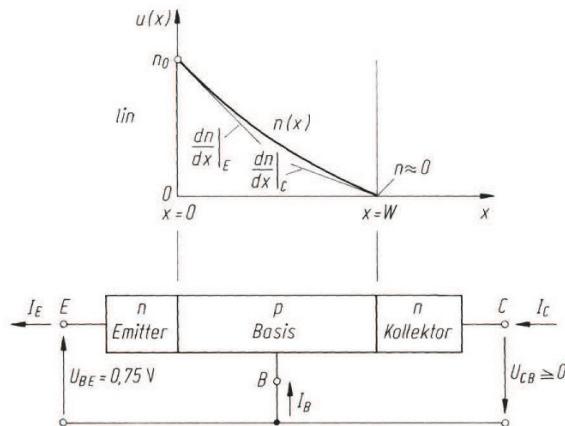


Abbildung 39.10. Beschaltung eines bipolaren *npn*-Transistors. Dichte $n(x)$ der Elektronen als Minoritätsträger in der Basis. Diffusionsdreiecks.

Der linke *np*-Übergang, die Emitterdiode, führt einen Strom in die Basis, der, wie aus Abb. 39.3 und Abb. 39.4 bekannt, aus einem Löcherstrom und

einem Elektronenstrom besteht. Der Anteil des Elektronendiffusionsstroms kann jedoch durch hohe Donatorenkonzentration des Emitters sehr groß gemacht werden, so dass in der Basis der bekannte Vorgang der Minoritätsträgerdiffusion von Elektronen vorliegt.

Der eintretende Elektronenstrom ist proportional zum linksseitigen Gradienten der Elektronendichte $n(x)$

$$I_E = eD_n A \frac{dn}{dx} \Big|_E. \quad (39.63)$$

Wäre der Kollektor sehr weit vom Emitter entfernt, so würde die Elektronendichte $n(x)$, durch Rekombinationsprozesse bedingt, exponentiell mit der Diffusionslänge L_n abnehmen. Die Basisdicke W wird nun aber so klein $W \ll L_n$ gewählt, dass fast alle Elektronen den Kollektor erreichen. Lediglich ein kleiner Teil rekombiniert mit Löchern, die durch den Basisstrom I_B herangetragen werden. Am Kollektorrand bestimmt dann ein etwas kleinerer Dichtegradient den Kollektorstrom

$$I_C = eD_n A \frac{dn}{dx} \Big|_C. \quad (39.64)$$

Da die Kurve $n(x)$ nur wenig durchhängt, spricht man auch vom „Diffusionsdreieck“.

Für die drei Anschlüsse des Transistors muss die Kirchhoff'sche Knotenregel erfüllt sein, der Basisstrom muss also immer die Differenz

$$I_B = I_E - I_C \quad (39.65)$$

von Emitter- und Kollektorstrom sein.

Bei kleiner Rekombination in der Basis ist der Kollektorstrom fast gleich dem Emitterstrom

$$I_C = \alpha_0 I_E \quad (39.66)$$

mit einem typischen Wert von

$$\alpha_0 = 0,99. \quad (39.67)$$

Man nennt α_0 den Stromverstärkungsfaktor in der „Basisschaltung“. Die Basis ist dabei gemeinsame Elektrode für Eingang und Ausgang.

Alle beschriebenen Eigenschaften des Transistors kommen in seiner Ersatzschaltung zum Ausdruck, die in Abb. 40.2 angegeben wird. Die *pn*-Übergänge werden durch die Emitterbasis-Diode, welche normalerweise im Durchlassbereich betrieben wird, und die Kollektordiode, welche normalerweise gesperrt ist, beschrieben. Ihre Kennlinien bestimmen auch die Transistorkennlinien. Lediglich die Unabhängigkeit des Kollektorstromes von der Kollektorspannung muss durch eine Stromquelle zusätzlich in der Ersatzschaltung berücksichtigt werden.

Wird diese Ersatzschaltung einmal als richtig erkannt, so kann mit den Mitteln des Schaltungsentwurfs und insbesondere des *Feedback-Prinzips* (siehe auch Abschnitt 40.4) jede andere Grundschaltung erzeugen, wie dies bei z. B. bei Davidse ([61], S. 118) geschieht.

39.2.1 Der Aufbau

39.2.2 Die Ersatzschaltung

Errengt man den bipolaren Transistor in Basisschaltung gemäß Abb. 39.11 am Emitter durch einen eingeprägten Stromsprung, so wird damit am Emitter der Gradient der Elektronendichte in der Basis ebenfalls sprungförmig eingeprägt. Die endgültige, in Abb. 39.10 gezeigte Trägerdichte kann sich erst im Laufe der Zeit nach Auffüllung der Basis mit Elektronen einstellen. Erst nach Ablauf dieses Diffusionsprozesses kann auch am Kollektor der Gradient $dn/dx|_C$ entstehen, der zum Kollektorstrom $\hat{i}_C = \alpha_0 \hat{i}_E$ gehört. Der Aufbau des Gradienten und der Aufbau des Kollektorstromes ergibt sich im Experiment, wie in Abb. 39.11 dargestellt. Man hat sich dann den Aufbau der Elektronenverteilung in der Basis so vorzustellen, wie dies für die Zeiten t_1, t_2, t_3 bis t_∞ gezeigt ist. Erst nach t_∞ hat sich das Diffusionsdreieck voll ausgebildet.

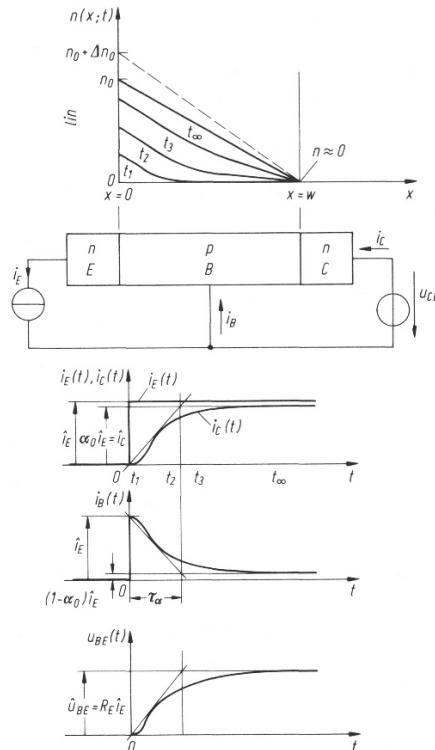


Abbildung 39.11. *npn*-Transistor. Aufbau der Basisladung beim Schaltvorgang

Da für den ganzen Transistor die Kirchhoffsche Knotenregel in jedem Zeitpunkt t erfüllt sein muss, muss stets als Differenz der Basisstrom

$$i_B(t) = i_E(t) - i_C(t) \quad (39.68)$$

fließen.

Die zugehörige Basisemitterspannung $u_{BE}(t)$ hat den gezeigten Verlauf und berechtigt zur Beschreibung des gesamten Diffusionsvorganges durch eine RC-Schaltung.

Sucht man eine zur Diffusionsgleichung analoge Ersatzschaltung, so wird man auf einen RC-Kettenleiter geführt. Man erkennt aber aus Abb. 39.11, dass schon eine Exponentialfunktion näherungsweise sehr gut die Vorgänge wiedergibt und dass der kompliziertere Kettenleiter durch ein einfaches RC-Glied ersetzt werden kann.

Dieses ist in der nur den Aufbau der Trägerkonzentration beschreibenden Ersatzschaltung Abb. 39.12 geschehen.

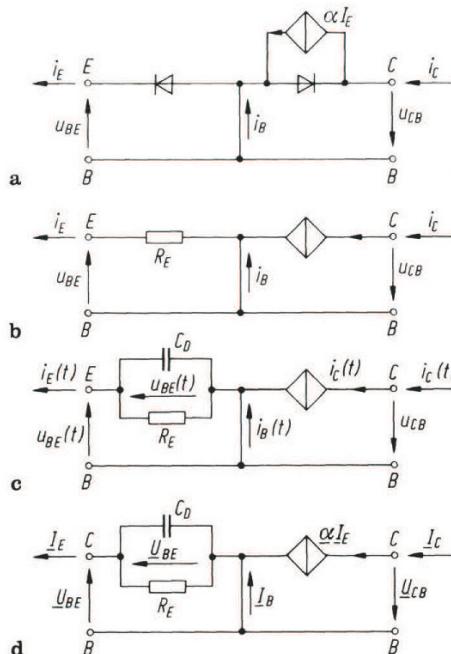


Abbildung 39.12. Ersatzschaltbild für den Trägertransport in der Basis eines *npn*-Transistors. a Ausgangsschaltung; b Gleichstromfall; c Schaltvorgang; d Wechselstromfall

Die Diffusionskapazität C_D ergibt sich aus folgender Überlegung: Die Ladung Q_B in der Basis folgt aus dem Diffusionsdreieck zu

$$Q_B = \frac{A w e n_0}{2}. \quad (39.69)$$

Führt man entsprechend Gl. (39.33) für

$$n_0 = n_{\infty n} e^{\frac{U_{EB}}{U_T}} \quad (39.70)$$

ein, so kann man die Diffusionskapazität aus Ladung und Spannung bestimmen

$$C_D = \frac{dQ_B}{dU_{EB}} = \frac{A w n_{\infty n} e^{\frac{U_{EB}}{U_T}}}{2 U_T} = \frac{1}{2} \frac{A w n_0}{U_T}. \quad (39.71)$$

Andererseits ist der Emitterstrom proportional zum Dichtegradienten der Elektronen

$$I_E = -A e D_n \frac{dn}{dx}, \quad (39.72)$$

im Diffusionsdreieck ist dabei

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n_0}{w}, \quad (39.73)$$

also

$$I_E = A e D_n \frac{n_0}{w}. \quad (39.74)$$

Damit lässt sich die Diffusionskapazität C_D sehr leicht zum Emitterstrom in Beziehung setzen

$$C_D = \frac{w^2}{2 D_n} \frac{I_E}{U_T}, \quad (39.75)$$

wobei

$$\frac{I_E}{U_T} =: G_{Diff} = \frac{1}{R_E} \quad (39.76)$$

der differentielle Widerstand der statischen Kennlinie der Emitterbasisdiode ergibt.

Man kann damit die Zeitkonstante für den Aufbau der Trägerkonzentration auf die Parameter der Kennlinie, die Basisschichtdicke w und die Diffusionskonstante D_n zurückführen

$$\tau_\alpha = \frac{w^2}{2 D_n} = R_E C_D. \quad (39.77)$$

Eine möglichst kleine Einschaltzeitkonstante τ_α des Transistors erfordert, da sie zu w^2 proportional ist, eine äußerst dünne Basis, und sie erfordert eine möglichst große Diffusionskonstante, d. h., eine möglichst große Beweglichkeit μ_n der Elektronen.

Die Diffusionskapazität C_D der Emitter/Basis-Diode ist viel kleiner als C_{Diff} einer normalen Diode, da die Basisdicke $w \ll L$ viel kleiner als die Diffusionslänge sein muss, sonst wäre ja wegen der Rekombination von Elektronen mit Löchern keine Stromverstärkung $\alpha = 0,99$ in der Nähe von Eins möglich.

Zur Aufstellung des Ersatzschaltbildes der Basisschaltung geht man gemäß Abb. 39.12, Teil a von der schon früher bekannten Ersatzschaltung mit Dioden

und Stromquellen nach Abb. 40.2 aus. Man ersetzt später alle Trägheiten der Dioden durch ihre Ersatzschaltungen (Abb. 39.9) und betrachtet zunächst nur die Ersatzschaltung für den Transportvorgang allein, um die Übersicht zu wahren.

In Abb. 39.12, Teil c muss zwischen Emitter und Basis das RC-Glied C_D, R_E eingefügt werden. Es bewirkt den auf den Emitterstromsprung folgenden exponentiellen Anstieg der Basis-Emitterspannung $u_{BE}(t)$

$$u_{BE}(t) = R_E \hat{i}_E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\alpha}} \right). \quad (39.78)$$

Die Stromquelle im Kollektorkreis muss nach Abb. 39.11 den exponentiell ansteigenden Strom

$$i_C(t) = \alpha_0 \hat{i}_E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_\alpha}} \right) \quad (39.79)$$

führen.

Im Rahmen der Beschreibung des Diffusionsvorganges durch ein RC-Glied lässt sich dann auch

$$i_C(t) = S \cdot u_{BE}(t) \quad (39.80)$$

schreiben, mit der Steilheit

$$S := \alpha_0 G_{Diff} = \frac{\alpha_0}{R_E}. \quad (39.81)$$

Der Basisstrom $i_B(t)$ ergibt sich richtig als die in Abb. 39.11 dargestellte Exponentialfunktion. Man beachte, dass der Basisstrom im ersten Augenblick nach dem Einschalten die volle Größe des Emitterstromes besitzt und dass erst nach unendlich langer Zeit sein kleiner Endwert $i_{B\infty} = (1 - \alpha_0)\hat{i}_E$ erreicht wird.

Mit Kenntnis des Schaltverhaltens des RC-Gliedes ergibt sich ganz zwangsläufig sein Wechselstromverhalten, wobei die Ströme und Spannungen sowie ggf. die Parameter ohne gesonderte Bezeichnung komplexe Größen sind. Insbesondere wird auch die Stromverstärkung α , jetzt komplex und frequenzabhängig, Abb. 39.12, Teil d. Bei eingeprägtem Emitterwechselstrom I_E ist der zugehörige Kollektorstrom I_C

$$I_C = \alpha I_E = \frac{\alpha_0}{1 + j\omega\tau_\alpha} I_E = \frac{\alpha_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_\alpha}} I_E \quad (39.82)$$

mit

$$\omega_\alpha = \frac{1}{\tau_\alpha}. \quad (39.83)$$

Durch diese Beziehung muss die Gleichstrombeziehung Gl. (40.4) ersetzt werden. Die komplexe Stromverstärkung läuft über der Frequenz auf einem Halbkreis als Ortskurve, wie Abb. 39.14 zeigt. Auch hier ist die Abweichung der Näherung vom Experiment sehr gering. Die zugehörige komplexe Emitterspannung U_{BE} folgt einer ähnlichen Ortskurve gemäß

$$U_{BE} = \frac{R_E I_E}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha}}. \quad (39.84)$$

Durch Umzeichnen der Abb. 39.12, Teil d erhält man das Wechselstromersatz-

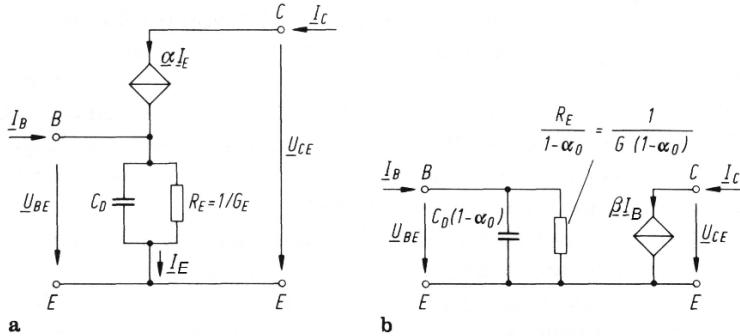


Abbildung 39.13. Wechselstrom-Ersatzschaltbild für den *npn*-Transistor in Emitterschaltung

schaltbild für die Emitterschaltung Abb. 39.13, Teil a. Aus der Kirchhoff'schen Knotenregel folgt direkt

$$I_E = I_B + I_C \quad (39.85)$$

und daraus

$$I_C = \frac{\alpha_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha}} (I_B + I_C) \quad (39.86)$$

$$= \frac{\frac{\alpha_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_\alpha}}}{1 - \frac{\alpha_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_\alpha}}} I_B. \quad (39.87)$$

Den Stromverstärkungsfaktor $\beta := \alpha/(1-\alpha)$ führt man in Anlehnung an Gl. (40.14) auch in der Emitterschaltung ein, der jetzt komplex wird

$$I_C = \beta I_B, \quad (39.88)$$

$$\beta = \frac{\alpha_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha} - \alpha_0} \quad (39.89)$$

$$= \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha(1-\alpha_0)}},$$

$$= \beta_0 \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_\alpha}}$$

$$\omega_\beta = (1 - \alpha_0) \omega_\alpha. \quad (39.90)$$

Die Stromverstärkung β der Emitterschaltung legt nahe, das Ersatzschaltbild so umzuzeichnen, dass an seinem Ausgang die gesteuerte Stromquelle βI_B entsteht, Abb. 39.13, Teil b.

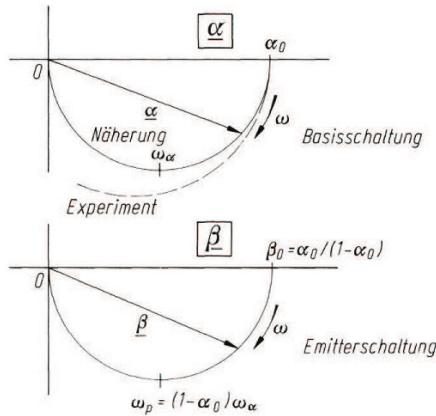


Abbildung 39.14. Ortskurven der komplexen Stromverstärkung

Dabei wird aus

$$U_{BE} = \frac{1}{G_E + j\omega C_D} I_E \quad (39.91)$$

durch Erweiterung mit $(1 - \alpha_0)$ und

$$I_B = (1 - \alpha_0) I_E, \quad (39.92)$$

$$U_{BE} = \frac{1}{G_E(1 - \alpha_0) + j\omega C_D(1 - \alpha_0)} I_B. \quad (39.93)$$

Damit ist der Eingangswiderstand in der Emitterschaltung um den Faktor $1/(1 - \alpha_0)$ größer als in der Basisschaltung, und die Eingangskapazität hat den viel kleineren Wert $C_D(1 - \alpha_0)$. Die Emitterschaltung hat also die $\beta_0 = 100$ fache Stromverstärkung und die um etwa denselben Faktor größere Eingangsimpedanz als die Basisschaltung. Diese Vorteile müssen damit erkauft werden, dass der Frequenzgang der Stromverstärkung gemäß der in Abb. 39.14 dargestellten Ortskurve verläuft. Sie ist zwar ebenfalls ein Kreis, hat aber die um den Faktor $(1 - \alpha_0)$ kleinere Grenzfrequenz.

Aus Abb. 39.13 gewinnt man leicht durch einfaches Umzeichnen die Ersatzschaltung des Emitterfolgers, der Kollektorschaltung Abb. 39.15. Man erkennt, dass der Ausgangsstrom I_E im wesentlichen durch die Stromquelle $\beta \cdot I_B$ getragen wird. Nimmt man den steuernden Basisstrom I_B hinzu, so wird die Stromverstärkung γ in Kollektorschaltung

$$\gamma = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad (39.94)$$

sie ist also wie die der Emitterschaltung groß. Groß ist ebenfalls die Eingangsimpedanz, die sich mit der Lastimpedanz aus Abb. 39.15 bestimmen lässt. Die dort enthaltene Spannungsquelle U_{Batt} hat in dem Wechselstrom-Ersatzschaltbild keine Bedeutung und ist nur eingefügt, um die Masse 0 zu motivieren.

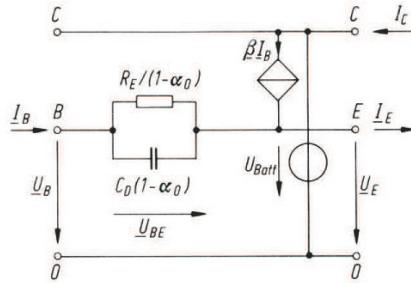


Abbildung 39.15. Wechselstrom-Ersatzschaltbild für den *npn*-Transistor in Kollektorschaltung. Emitterfolger

Fügt man den beschriebenen Ersatzschaltbildern für den Stromtransport des inneren Transistors noch die Diodenkapazitäten und den Basisbahnwiderstand hinzu, so erhält man die Gesamtersatzbilder des bipolaren Transistors in seinen Grundschaltungen. Der beschriebene Weg bringt die wesentlichen Effekte in einen geordneten Zusammenhang. Für die Berücksichtigung aller Details verwendet man Computerprogramme wie SPICE und andere; weitere Einzelheiten über Schaltkreissimulatoren finden man z. B. in Vladimirescu [289], Kielkowski [140], Heinemann [109], Attia [11], Rashid [236].

39.3 Der MOSFET

Der Feldeffekttransistor ist aus dem Bemühen entstanden, den Widerstandswert eines Ohmschen Widerstandes dadurch zu steuern, dass man durch Anlegen einer negativ geladenen Metallelektrode Elektronen aus dem Kanal abstoßt und dadurch die Leitfähigkeit verringert (*Depletion-Mode*), oder umgekehrt, dass man durch Anlegen einer positiven Spannung an die Steuerelektrode Elektronen heranzieht, um die Leitfähigkeit des stromführenden Kanals zu vergrößern (*Enhancement-Mode*). Der heute übliche Feldeffekttransistor ist entsprechend Abb. 39.16 planar aufgebaut. Eine wenig *p*-dotierte Siliziumscheibe enthält zwei stark *n*-dotierte Kontakte, die als Kathode = Source und als Anode = Drain des zu steuernden Widerstandes dienen. Auf der Halbleiteroberfläche ist eine etwa $0,1\mu m$ dicke Oxidschicht SiO_2 aufgewachsen, die die metallische Steuerelektrode, das Gate, trägt.

Zwischen Source und Drain besteht ein hoher ohmscher Widerstand, der durch die flache „Ohmgerade“ $I_D(U_{GS})$ (Abb. 39.16) beschrieben wird. Legt man nun an die Steuerelektrode die positive Spannung U_{GS} an, dann werden durch Influenzwirkung freie Elektronen aus dem Halbleitermaterial an die Oberfläche gezogen und erhöhen dadurch die Leitfähigkeit. Man kann also erwarten, dass eine steile $I_D(U_{GS})$ -Gerade entsteht und dass der stromführende n-Kanal von einer kleinen Leitfähigkeit auf eine große Leitfähigkeit durch die

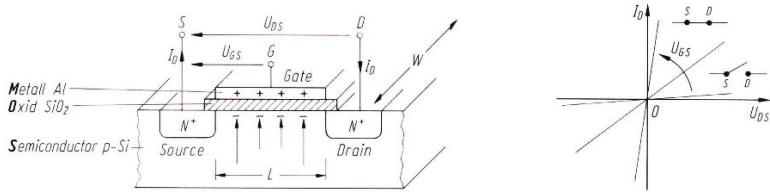


Abbildung 39.16. Aufbau des MOS-Feld-Effekt-Transistors MOSFET. Durch die Gatespannung U_{GS} gesteuerten Widerstand

Gatespannung umgesteuert werden kann. Dies ist auch gleichzeitig der Ansatz, den Feldeffekttransistor als gesteuerten Schalter verwenden zu können.

Leider kann man den Feldeffekttransistor nur in nächster Nähe des Nullpunktes auf diese einfachste Weise beschreiben. Sobald nämlich ein Strom I_D fließt, hat er einen Spannungsabfall längs des Kanals $D - S$ zur Folge, und man sieht sofort, dass sich die in Abb. 39.17, Teil a gezeichnete prinzipielle Potenzial- und Spannungsverteilung einstellen muss. Die metallische Gateelektrode bleibt Äquipotenzialfläche. Das Potenzial an der Halbleiteroberfläche steigt von der Source-Elektrode bis zur Drain-Elektrode an, d. h. aber, dass zwischen Gate und Kanal am Source-seitigen Rand eine große Spannungsdifferenz und damit eine große Influenzwirkung entsteht, während am Drain-seitigen Rand die Spannungsdifferenz über dem Oxid zu Null geworden ist und dadurch auch am Drain-seitigen Rand keine Elektronen aus dem Kristall an die Oberfläche durch Influenzwirkung gezogen werden können. Welche Abhängigkeit des Drainstromes $I_D(U_{DS})$ von der Drainspannung ist unter diesen Verhältnissen bei festgehaltener Gatespannung U_{GS} zu erwarten?

Eine detaillierte Modellierung der physikalischen Eigenschaften von Transportvorgängen in MOS-Transistoren führt auf das EKV-Modell, das der Hütte [126] (Teil Elektrotechnik, Kapitel 27) näher beschrieben wird. Dort findet man auch weiterführende Literatur zum EKV-Modell. Hier setzt man zur Bestimmung der Transistorkennlinie von MOS-Transistoren gemäß Abb. 39.17, Teil b die Feldgrößen an und bestimmt insbesondere an der Oberfläche am Abstand x von der Source-Elektrode das Potenzial $\varphi(x)$, das E-Feld E und das D-Feld D . Auf der Länge dx wird an der Halbleiteroberfläche die Ladung dQ für den leitenden Kanal bereitgestellt. Sie ist proportional zu dem dort herrschenden D-Feld

$$dQ = D_y W dx. \quad (39.95)$$

Die D-Feldstärke ist im SiO_2 gleich groß wie im Silizium

$$D_{yOx} = D_{ySi} = D_y, \quad (39.96)$$

also muss sie sich aus

$$D_{yOx} = \epsilon_0 \epsilon_{rOx} E_{yOx} \quad (39.97)$$

ergeben, d. h. aufgrund des Potenzialgefälles im Oxid gilt

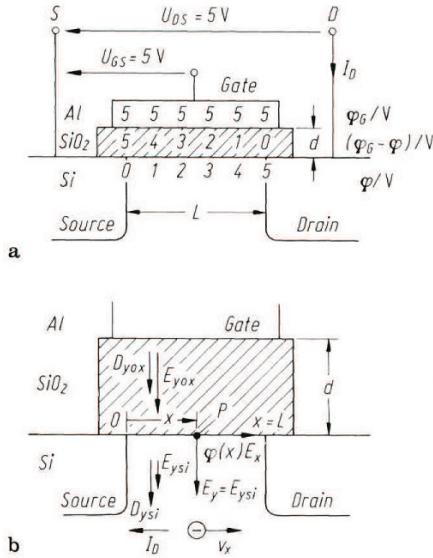


Abbildung 39.17. a Prinzipielle Potenzial- und Spannungsverteilung; b Ansatz Feldgrößen

$$E_{yOx} = \frac{d\varphi}{dx} = (\varphi_G - \varphi(x)) \frac{1}{d}, \quad (39.98)$$

$$D_{yOx} = \epsilon_0 \epsilon_{rOx} (\varphi_G - \varphi(x)) \frac{1}{d}. \quad (39.99)$$

Damit wird

$$dQ = \epsilon_0 \epsilon_{rOx} (\varphi_G - \varphi(x)) \frac{W}{d} dx. \quad (39.100)$$

Die Konstanten lassen sich zur statischen Kapazität C_G zwischen Gate und Halbleiter zusammenfassen

$$C_G = \epsilon_0 \epsilon_{rOx} \frac{WL}{d}. \quad (39.101)$$

Ist das Potenzial der Sourceelektrode Bezugspunkt $\varphi_S = 0$, so wird

$$U_{GS} = \varphi_G - \varphi_S = \varphi_G, \quad (39.102)$$

und es lässt sich schreiben

$$\frac{dQ}{dx} = C_G \frac{1}{L} (U_{GS} - \varphi(x)). \quad (39.103)$$

Der Drainstrom hängt ab von der zu transportierenden Ladung, deren Beweglichkeit μ und deren Geschwindigkeit

$$v = \frac{dx}{dt} = -\mu \frac{d\varphi}{dx}, \quad (39.104)$$

somit ist

$$\begin{aligned} I_D &= -\frac{dQ}{dt} = -\frac{dQ}{dx} \frac{dx}{dt} \\ &= C_G \frac{\mu}{L} (U_{GS} - \varphi(x)) \frac{d\varphi}{dx}. \end{aligned} \quad (39.105)$$

Zur Integration separiert man

$$LI_D \int_{x=0}^{x=L} dx = \mu C_G U_{GS} \int_{\varphi=0}^{\varphi=U_{DS}} d\varphi - \mu C_G \int_{\varphi=0}^{\varphi=U_{DS}} \varphi d\varphi \quad (39.106)$$

und man erhält

$$LI_DL = \mu C_G U_{GS} U_{DS} - \mu C_G \frac{1}{2} U_{DS}^2 \quad (39.107)$$

Die Kennliniengleichung

$$I_D(U_{GS}, U_{DS}) = \frac{\mu C_G}{L^2} \left(U_{GS} U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right). \quad (39.108)$$

Die Kennlinie $I_D(U_{GS}, U_{DS})$ mit Parameter U_{GS} sind Parabeln durch den Ursprung. Ihre Anfangstangenten entsprechen der Primitivvorstellung von der Steuerung eines Ohmschen Widerstandes.

Die Parabeln erreichen ihre Scheitel auf einer Ortskurve, für die gelten muss

$$\left. \frac{dI_D}{dU_{DS}} \right|_{U_{GS}} = \frac{\mu C_G}{L^2} (U_{GS} - U_{DS}) = 0, \quad (39.109)$$

die Scheitelortskurve genügt also

$$I_D(U_{DS}) = \frac{\mu C_G}{2L^2} U_{DS}^2. \quad (39.110)$$

Im Parabelscheitel ist stets $U_{DS} = U_{GS}$. Das bedeutet, dass bei dieser Spannung die Influenzwirkung am kollektorseitigen Rand aufhört. Man bezeichnet die Ortskurve für die Scheitelpunkte deshalb auch als Abschnürparabel (siehe Abb. 39.17, Teil a). Für Drainspannungen, die größer sind als die Abschnürparabel, gilt ein neuer Mechanismus für den Stromtransport. Der Strom bleibt konstant auf dem Wert des Parabelscheitels, auch wenn die Drainspannung erhöht wird. Es tritt der gleiche Effekt ein wie am Kollektorrand des bipolaren Transistors: Die positiv gegenüber dem Siliziumkörper vorgespannte Drainelektrode umgibt sich mit einer von Trägern weitgehend entblößten Sperrsicht. In diesen stromlosen pn -Übergang werden Elektronen aus dem n -Kanal injiziert und von der positiven Drainelektrode als Kollektor angezogen und aufgenommen (Abb. 39.19). Der Strom behält seinen Wert

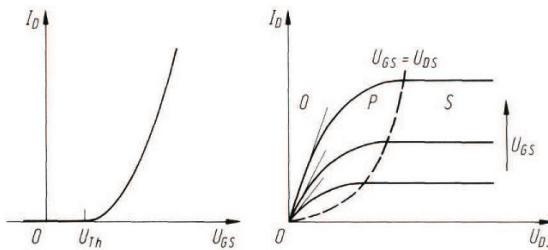


Abbildung 39.18. Kennlinien des Feldeffekttransistors. O Ohmscher Bereich; P Parabel-Bereich; S Sättigungs-Bereich

bei, den er im Abschnürpunkt hatte, unabhängig von der Höhe der Drainspannung. Dies entspricht dem Bild eines Wasserstromes, der über die Krone eines Staudamms fließt und dessen Größe völlig unabhängig von der Tiefe ist, in der die Talsohle unter der Dammkrone liegt (siehe Abb. 40.1).

Der pn -Übergang setzt sich unter dem ganzen Transistor bis zur Sourceelektrode fort, wenn das Siliziumsubstrat negativ vorgespannt wird. Auf diese Weise ist gleichzeitig der gesamte Transistor vom Substrat isoliert. Bei einer bestimmten Drainspannung U_{DS} ist der Drainstrom eine Funktion der Gate-Source-Spannung (Abb. 39.18). Man könnte erwarten, dass der Drainstrom aus dem Ursprung heraus ansteigt. Dies ist nicht der Fall, vielmehr muss die Gatespannung erst eine Schwellenspannung U_{TH} überwinden, ehe der Drainstrom zu fließen beginnt. Der Grund dafür sind nicht zu beseitigende Ionen im Oxid und an der Halbleiteroberfläche. Der Einfluss ihrer festen Ladung muss erst von der Gatespannung überwunden werden. Die Steilheit der $I_D(U_{GS})$ -Kennlinie erreicht beim normalen Feldeffekttransistor nur etwa $S = 1\text{mA/V}$, ist also deutlich kleiner als beim bipolaren Transistor.

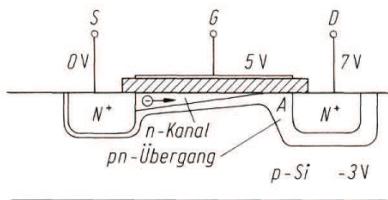


Abbildung 39.19. pn -Übergang in Sperrrichtung zwischen n -Kanal und p -Si-Körper

Die $I_D(U_{DS}, U_{GS})$ -Kennlinien des Feldeffekttransistors gleichen den Ausgangskennlinien des bipolaren Transistors. Der Eingangsstrom des Feldeffekttransistors ist statisch gleich Null, sein Eingangswiderstand ist im Gegensatz zum bipolaren Transistor unendlich groß. Selbstverständlich müssen bei allen

Schaltvorgängen und im Wechselstrombetrieb die Kapazitäten berücksichtigt werden.

Schaltungen und Netzwerke

40.1 Grundbegriffe der Schaltungstechnik

Eine detaillierte Kenntnis der inneren Vorgänge in Halbleiterbauelementen wie dem Bipolartransistor oder dem Feldeffekttransistor, wie wir sie in Abschnitt 39 behandelt haben, ist für seinen Einsatz in Schaltungen oft ebenso wenig notwendig wie die detaillierte Kenntnis der Stromtransportvorgänge im Ohmschen Widerstand. Wichtig sind die Abhängigkeiten von Spannungen und Strömen an seinen Klemmen, die durch einfache Ersatzschaltungen oder Kennlinienfelder ganz brauchbar repräsentiert werden können.

Dennoch ist es auch für den Schaltungstechniker ganz zweckmäßig, wenigstens eine ungefähre Vorstellung über die physikalischen Verhältnisse zu haben. Dazu kann auch eine physikalische Analogie dienen, die natürlich nicht alle Effekte in sinnvoller Weise darstellen kann, so dass man solche Analogievorstellungen nur mit einiger Vorsicht benutzen kann. Außerdem sind solche Analogien immer auch eine Frage des Geschmacks. Ein Beispiel einer solchen Analogie für den Bipolartransistor wurde von G. Kohn in das Küpfmüller-Buch eingebracht und trotz gewisser Bedenken auch in die neubearbeitete 16. und spätere Auflagen übernommen. Dabei wird der Bipolartransistor durch eine sehr einfache hydromechanische Analogie veranschaulicht. Ein Stausee (Abb. 40.1) sei vollgefüllt und werde von einem Gebirgsbach als Zufluss gespeist. Im wesentlichen verlässt der Zufluss den See als Überlauf über die Dammkrone. Nur ein kleiner Rest geht als Sickerstrom verloren, und es gilt die Bilanz Zufluss = Überlauf + Sickerstrom. Der talseitige Abfluss ist gleich dem Überlaufstrom, und zwar völlig unabhängig davon, wie hoch der Damm und wie groß die Differenz der potenziellen Energie zwischen den Punkten *B* und *C* ist. Beim *npn*-Transistor entspricht der Basisraum dem Seebecken. Der Emitterstrom I_E entspricht dem Zufluss von Elektronen, der nur in einer Richtung über die Emitter/Basis-Diode erfolgt. Der Kollektorstrom I_C entspricht dem Überlauf oder dem talseitigen Abfluss, der restliche Basisstrom I_B entspricht dem Sickerstrom. Es gilt dann für die Summe der Ströme

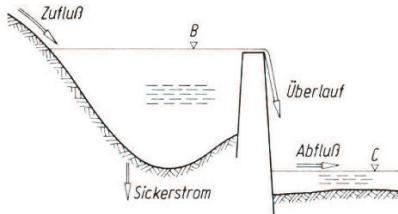


Abbildung 40.1. Hydromechanisches Analogon zur grundsätzlichen Wirkungsweise des Bipolartransistors

$$I_E = I_C + I_B. \quad (40.1)$$

Der Sickerstrom $I_B \ll I_E$ ist sehr klein, und der abfließende Kollektorstrom ist ein fester, nahe bei 1 liegender Bruchteil des Emittorstroms mit

$$I_C = \alpha I_E. \quad (40.2)$$

mit

$$\alpha \leq 1. \quad (40.3)$$

Genauso wie der überlaufende Wasserstrom völlig unabhängig von der Fallhöhe $B \rightarrow C$ ist, so ist auch der Kollektorstrom völlig unabhängig von der Spannung zwischen Kollektor und Basis. Die Ausgangsseite des Transistors kann dementsprechend durch eine Stromquelle mit spannungsunabhängig eingeprägtem Strom I_C dargestellt werden.

Dieses Modell ist direkt auf die Basisschaltung des Transistors übertragbar. Tatsächlich stand diese Schaltung auch historisch gesehen am Anfang, woraus sich die Bezeichnung rechtfertigt. Da in der Emitterschaltung und in der Kollektorschaltung nur die Klemmen vertauscht werden, müssen sich durch Umzeichnung und Anwendung der Kirchhoff-Gesetze auch dort die Beziehungen zwischen Spannungen und Strömen ergeben. In der Emitterschaltung und in der Kollektorschaltung erfolgt die Steuerung des großen Ausgangsstroms durch den kleinen Basisstrom, es tritt also eine *Stromverstärkung* ein.

Vernachlässigt wurde in dem sehr einfachen hydrodynamischen Modell u. a. die Tatsache, dass beim bipolaren *n-p-n*-Transistor der Basisstrom durch Defektelektronen (Löcher) getragen wird, die im Basisraum mit Elektronen rekombinieren. Auch der später angesprochene sogenannte Early-Effekt kann damit natürlich erklärt werden. Hinsichtlich einer detaillierteren Darstellung der Eigenschaften von Bipolartransistoren muss damit ausdrücklich noch einmal auf Abschnitt 39.2 verwiesen werden.

Vom Standpunkt der Bipolarschaltungstechnik ist die Basisschaltung kein zweckmäßiger Ausgangspunkt. Legt man nämlich die Emitterschaltung zugrunde, dann kann man zeigen, dass sich die beiden anderen Grundschaltungen mit Hilfe zusätzlicher schaltungstechnischer Maßnahmen aus der Emitterschaltung ableiten lassen. Das wird deutlich, wenn man sich klar macht,

dass die Emitterschaltung die einzige Grundschaltung ist, bei der eine Strom- und eine Spannungsverstärkung auftritt, während bei der Basisschaltung die Stromverstärkung etwa gleich 1 und bei der Kollektorschaltung die Spannungsverstärkung etwa gleich 1 ist. Die *Hauptaufgabe der Schaltungstechnik* besteht nun darin, die Eigenschaften einer vorgegebenen Schaltung – im einfachsten Fall einer Grundschaltung – so zu verändern, dass die neue Schaltung gewünschte Eigenschaften besitzt. Trotz der unübersehbaren Menge von elektronischen Schaltungen gibt es dazu nur wenige *Grundprinzipien der Schaltungstechnik*: (vgl. Davidse [61])

- Das *Prinzip der Kaskadierung* von Schaltungen,
- Das *Feedback- oder Rückkopplungs-Prinzip*,
- Das *Feedforward- oder Kompensations-Prinzip*.

Alle drei Schaltungsprinzipien gehen bereits auf die Frühzeit der elektronischen Schaltungstechnik zurück. Das zuletzt genannte Feedforward-Prinzip benötigt sehr genaue Kenntnisse über das zu verändernde System, während das zuletzt genannte Feedback-Prinzip mit reduzierten Kenntnissen über das System auskommen kann.

Häufig werden diese schaltungstechnischen Prinzipien im Sinne der Regelungs- und Steuerungstechnik diskutiert, was zu Schwierigkeiten führen kann, weil man im Gegensatz zur Regelungstechnik in der elektronischen Schaltungstechnik bidirektionale Bauelemente verwendet. Daraus folgt, dass in vielen Schaltungen das Feedforward- und das Feedback-Prinzip gewollt oder ungewollt in Kombination angewendet wird. Eine wesentlich bessere Beschreibung gelingt mit Hilfe der Zweitorttheorie, die in Abschnitt 4.5 behandelt wird. Dabei ist aber darauf zu achten, dass die Verwendung der Matrizenrechenregeln für Zweitore von der Gültigkeit der Torbedingungen auch nach der Zusammenschaltung der Zweitore abhängt.

Geht man von der Emitterschaltung aus, dann kann man mit Hilfe der Reihen-Parallel- bzw. Parallel-Reihen-Schaltung mit einem einfachen Zweitör, bei dem die Ein- und Ausgangsklemmen direkt verbunden sind, auf die Kollektor- bzw. Basisschaltung kommen; vgl. Davidse [61]. Die kombinierten Feedforward-/Feedback-Kombinationen besitzen dann, wie oben bereits erwähnt, gegenüber der Emitterschaltung veränderte Eigenschaften (z. B. Spannungs- bzw. Stromverstärkung gleich 1). Auf die drei Grundschaltungen gehen wir im folgenden Abschnitt näher ein. In entsprechender Weise kann mit jede andere elektronische Schaltung durch Einsatz der drei schaltungstechnischen Prinzipien in ihren Eigenschaften gezielt verändert werden. Insbesondere in der integrierten Schaltungstechnik sind dazu auch sehr detaillierte Kenntnisse der für die Realisierung der Schaltungen verwendeten Technologien erforderlich. Eine sehr anregende Diskussion über den Zusammenhang von Technologie und Schaltungstechnik findet man bei O'Dell [218].

Anhand der Schaltungstechnik integrierter Operationsverstärker und der darauf basierenden Schaltungstechnik mit Operationsverstärkern kann man den Einsatz der obengenannten drei schaltungstechnischen Prinzipien sehr gut

demonstriert werden; vgl. O'Dell [218]. So wird beim Entwurf solcher linearen Analogschaltungen mit hoher Spannungs- und Leistungsverstärkung das Prinzip der Kaskadierung verwendet, wobei alle drei Grundschatungen zum Einsatz kommen. Die hohe Leerlaufspannungsverstärkung von Operationsverstärkern wird genutzt, um mit Hilfe des Feedback-Prinzips Schaltungen mit Operationsverstärkern zu konstruieren, bei denen diese Leerlaufspannungsverstärkung, die stark toleranzbehaftet ist, das Verhalten der Gesamtschaltung kaum beeinflusst. Dazu darf nur die Inverse der Leerlaufspannungsverstärkung in das Übertragungsverhalten der Gesamtschaltung eingehen. In ähnlicher Weise geht man beim Entwurf anderer Schaltungen vor.

In Abschnitt 40.4 wird auf Anwendungen des Feedback-Prinzips in der nichtlinearen Schaltungstechnik – insbesondere Oszillatoren – näher eingegangen. Ist der Leser an weiteren Transistorschaltungen mit Bipolartransistoren oder Schaltungen mit MOS-Transistoren interessiert, verweisen wir auf Lehrbücher und Monographien der elektronischen Schaltungstechnik; vgl. z. B. Tietze und Schenk [276], Horowitz und Hill [124], Davidse [61].

40.2 Der Bipolartransistor und seine Grundschaltungen

40.2.1 Die Basisschaltung

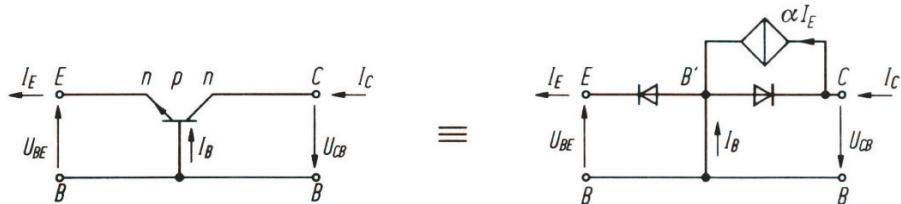


Abbildung 40.2. *npn*-Bipolartransistor in Basisschaltung mit seiner Ersatzschaltung

Wenn Eingangs- und Ausgangsspannung auf die Basiselektrode des Transistors bezogen werden, spricht man von der Basisgrundschatzung (im folgenden auch Basisschaltung) oder von der Schaltung mit geerdeter Basis. Sie schließt sich direkt an das hydromechanische Modell an. Für sie gilt die Ersatzschaltung Abb. 40.2. Sie beschreibt und trennt die wesentlichen physikalischen Vorgänge im Inneren des Transistors. Man erkennt die Emitter/Basis-Diode und die Kollektor/Basis-Diode eines *npn*-Transistors, sie haben je die aus Abb. 40.3 bekannte Kennlinie eines *pn*-Übergangs. Der Transistoreffekt, d.h. die von der Kollektorspannung unabhängige Steuerung des Kollektorstromes I_C durch den Emitterstrom I_E wird durch die gesteuerte Stromquelle im Kollektorkreis beschrieben. Gelegentlich wird der *npn*-Transistor dem technolo-

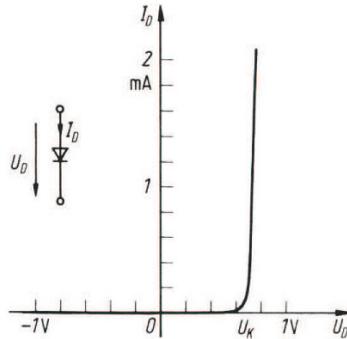
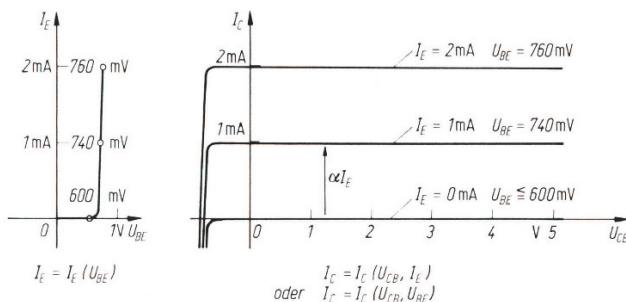


Abbildung 40.3. Kennlinie einer Silizium-np-Diode

gischen Aufbau dieses Bauelementes entsprechend vereinfacht nur durch zwei *pn*-Dioden repräsentiert. Das ist zunächst nicht grundsätzlich falsch, denn wenn die *n*-Schicht „sehr breit“ wäre, dann hätte man es tatsächlich nur mit zwei Dioden zu tun. Der *Transistoreffekt* kommt erst dadurch zustande, dass die beiden *pn*-Schichten durch eine extrem geringe Basisweite eng zusammenrücken und dadurch die beiden Schichten „wechselwirken“. Diese Ursache des Transistoreffektes wird besonders deutlich, wenn man den am Anfang der Entwicklung des Transistor-Bauelementes stehenden *Spitzentransistor* betrachtet. Dort tritt dieser Effekt nur dann auf, wenn die „Nadeln“ sehr dicht aneinander gesetzt werden und dadurch zwei eng zusammenliegende *pn*-Schichten zustande kommen. Beim Spitzentransistor wird das durch zwei eng beieinanderliegende Spitzen erreicht, während das bei den anderen Bipolartransistortypen durch eine sehr dünne „Trennschicht“ erreicht wird.

Abbildung 40.4. Kennlinie eines *npn*-Bipolartransistor in Basisschaltung

Aus der Ersatzschaltung in Abb. 40.2 folgen mit Hilfe der Kirchhoffsschen Sätze unmittelbar die Kennlinien (Abb. 40.4). Die Eingangskennlinie ist eine Diodenkennlinie $I_E = I_E(U_{BE})$. Für $I_E = 0$ ergibt sich als unterste Ausgangs-

kennlinie $I_C(U_{CB}, 0)$ die Kennlinie einer umgekehrt gepolten pn -Diode. Fließt ein Emitterstrom, so addiert sich zu dieser Grundkennlinie bei allen Spannungen der Strom αI_E , d.h. die Grundkennlinie wird parallel zu sich selbst um αI_E nach oben verschoben. Die Kennlinienknicke bleiben links der I_C -Achse im Abstand von etwa 0,7 V.

Rechts vom Knick gilt

$$I_C = \alpha I_E, \quad (40.4)$$

wobei α im Intervall $0,99 < \alpha < 1$ liegt.

Wählt man im Ausgangskennlinienfeld als Parameter U_{BE} anstelle von I_E , so ist die Bezifferung aus der Eingangskennlinie zu gewinnen und mit dieser nichtlinear.

Dieses idealisierte Bild des Transistors erlaubt es, alle seine Grundschatungen nur mit Hilfe der Kirchhoffsschen Sätze, der Diodenkennlinie und der Gl. (40.4) auf einheitliche Weise zu beschreiben.

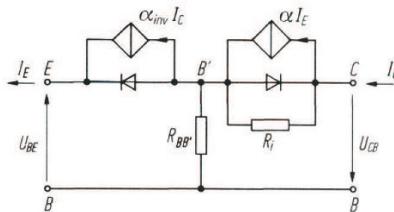


Abbildung 40.5. Ergänzte Ersatzschaltung des Transistors (Ebers-Moll-Ersatzschaltung)

Nichtideale Effekte stören die Übersichtlichkeit, sie sollten dem Idealbild erst nach erreichtem Verständnis der Grundschatungen zugefügt werden. Zwischen dem äußeren Basiskontakt B und dem aktiven inneren Basisraum liegt ein Basisbahnwiderstand $R_{BB'}$; er liegt bei ca. 20Ω . Er muss insbesondere dann beachtet werden, wenn der Spannungsabfall $I_B \cdot R_{BB'}$ in die Größenordnung von U_{BE} kommt, hauptsächlich aber in der Hochfrequenztechnik. Bei großen Kollektorspannungen reicht die Kollektorschotterschicht weiter in die Basiszone hinein, dadurch wird α etwas größer, und der Kollektorstrom I_C steigt etwas mit U_{CB} an (Early-Effekt). Dies lässt sich durch Einfügen eines differentiellen Innenwiderstandes R_i ins Ersatzschaltbild berücksichtigen. Die „Sättigung“ des Transistors tritt ein, wenn die Kollektordiode leitend wird. Dann fließen Elektronen vom Kollektor in Richtung zum Emitter, was in der Ersatzschaltung durch eine zweite Stromquelle mit dem Urstrom $\alpha_{inv} I_C$ beschrieben werden muss (Abb. 40.5). Abhängig von Betriebszustand der Dioden können vier Arbeitsbereiche des Transistors unterschieden werden:

- Emitterdiode leitend, Kollektordiode gesperrt: \otimes „Aktiver Verstärkungsbereich“

- Emitterdiode leitend, Kollektordiode leitend: \odot „Sättigungsbereich“
- Emitterdiode gesperrt, Kollektordiode gesperrt: \bigcirc „Ausschaltbereich“
- Emitterdiode gesperrt, Kollektordiode leitend: „Inverser Bereich“

Für den aktiven Verstärkerbereich ist das Ausgangskennlinienfeld für $I_C > 0$, $U_{CB} > 0$ linear, die Eingangskennlinie kann im Arbeitspunkt für kleine Signale durch den differentiellen Eingangsleitwert

$$G_E = \frac{\partial I_E}{\partial U_{BE}} \quad (40.5)$$

oder den Eingangswiderstand

$$R_E = \frac{1}{G_E} \quad (40.6)$$

angenähert werden. Es ergibt sich dann aus Abb. 40.5 die lineare Ersatz-

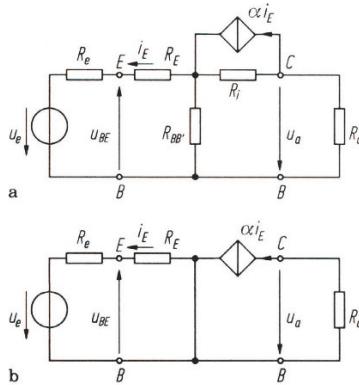


Abbildung 40.6. Kleinsignalersatzschaltbilder (a) und (b) des Transistors in Basisschaltung mit Signalquelle und Lastwiderstand

schaltung Abb. 40.6, Teil a. Der Transistor ist dort mit einer Signalquelle (U_e, R_e) und einem Außenwiderstand R_a beschaltet. Nimmt man idealisierend $R_{BB'} \geq 0$ und $R_i = \infty$ an (Abb. 40.6, Teil b), so ergibt sich für die Signale

$$-i_E = \frac{U_e}{R_e + R_E}, \quad (40.7)$$

$$U_a = -\alpha i_E R_a = \alpha \frac{R_a}{R_e + R_E} U_e. \quad (40.8)$$

und die Spannungsverstärkung wird

$$V_u = \frac{\hat{U}_a}{\hat{U}_e} = \alpha \frac{R_a}{R_e + R_E}. \quad (40.9)$$

Während die Stromverstärkung α in Basisschaltung auch für die Signalamplituden immer

$$\alpha = \frac{\hat{i}_C}{\hat{i}_E} < 1 \quad (40.10)$$

ist, kann die Spannungsverstärkung V_u durch Wahl von $R_a \gg (R_e + R_E)$ große Werte annehmen. Der Transistor in Basisschaltung ist ein Spannungsverstärker. Die Basisschaltung ist für die Hochfrequenztechnik wichtig, aber auch, um aus ihr die anderen Grundschaltungen abzuleiten.

Anmerkung: Man berechne V_u mit $R_{BB'}$ und R_i und überzeuge sich von der Zweckmäßigkeit der angenommenen Idealisierung. Durch Mitschleppen aller Elemente wird die Analyse von Transistorschaltungen unhandlich, und das Wesentliche wird verdeckt!

40.2.2 Die Emitterschaltung

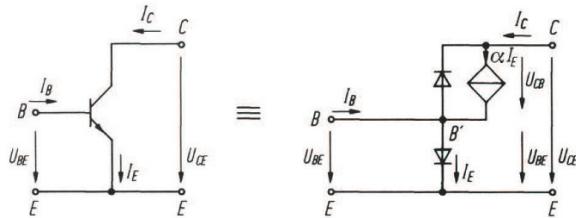


Abbildung 40.7. *npn*-Transistor in Emitterschaltung mit seiner Ersatzschaltung

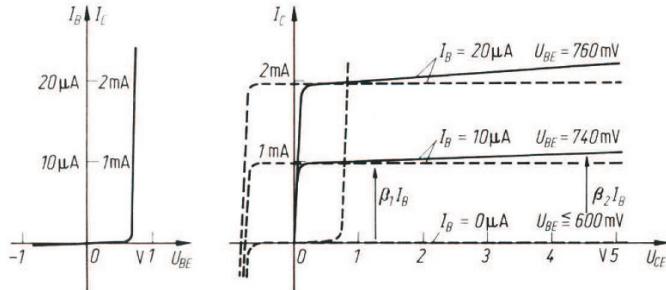
Eingangs- und Ausgangsspannung werden auf die Emitterelektrode bezogen. So entsteht durch einfaches Umzeichnen aus Abb. 40.2 die Ersatzschaltung Abb. 40.7. Man erkennt, dass

$$U_{CE} = U_{CB} + U_{BE}, \quad (40.11)$$

dass man also bei jedem Kollektorstrom I_C die aus den Kennlinien der Basisschaltung bekannte Kollektor-Basis-Spannung U_{CB} zur Basis-Emitterspannung U_{BE} addieren muss, um das Kennlinienfeld $I_C(U_{CE}, I_E)$ zu erhalten: Das Kennlinienfeld für die Emitterschaltung geht aus dem der Basisschaltung durch Rechtsverschiebung um eine Diodenkennlinie hervor, die Knicke liegen nun alle rechts der I_C -Achse (Abb. 40.8).

Die Kirchhoffsche Knotenregel an B' ergibt den Basisstrom

$$I_B = (1 - \alpha)I_E. \quad (40.12)$$

Abbildung 40.8. Kennlinien des *npn*-Transistors in Emitterschaltung

Da der Basisstrom proportional zum Emitterstrom ist, lässt sich zur bekannten Kennlinie der Emitterdiode $I_E(U_{BE})$ eine zweite Stromskala beifügen, so wird die Diodenkennlinie zur Eingangskennlinie $I_B(U_{BE})$. Weiter lässt sich das Ausgangskennlinienfeld statt mit dem Parameter I_B auch mit dem Parameter U_{BE} beziffern. Man beachte die Linearität bei I_B und die Nichtlinearität über die Diodenkennlinie bei der U_{BE} -Bezifferung.

Mit $I_C = \alpha I_E$ und mit Gl. (40.9) ergibt sich die Stromverstärkung $\beta = I_C/I_B$ der Emitterschaltung aus

$$I_C = \alpha I_E = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_B = \beta I_B. \quad (40.13)$$

zu

$$\beta := \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (40.14)$$

Sie ist also wesentlich größer als 1. Typische Werte sind $\alpha = 0,99$ und $\beta = 100$. Man kann sich die Ausgangskennlinien auch um $\beta \cdot I_B$ aus der Grundkennlinie für $I_B = 0$ nach oben entstanden denken. Wird durch den Early-Effekt aus $\alpha_1 = 0,99$ bei größerer Kollektorspannung $\alpha_2 = 0,991$, so ist dies in der Basisschaltung kaum zu bemerken, in der Emitterschaltung gehören dazu aber die deutlich unterschiedlichen Werte $\beta_1 = 99$ und $\beta_2 = 110$. Dies führt zur Auffächerung des Ausgangskennlinienfeldes und zu kleineren Werten des Innenwiderstandes R_i , im Beispiel zu $R_{iB} = 5M\Omega$ in der Basisschaltung, dagegen zu $R_{iB} = 50k\Omega$ in der Emitterschaltung bei $I_C = 1mA$.

Eine Verstärkerschaltung zeigt Abb. 40.9, das dazugehörige Kennlinienfeld mit beliebigen Signalen Abb. 40.9. Die Vorspannung U_{BE0} , die Batteriespannung U_{Batt} und der Kollektorwiderstand R_C bestimmen den Arbeitspunkt P . Die Signale lassen sich bei beliebiger Form und Größe an den Kennlinien spiegeln. Die Ausgangssignale haben die umgekehrte Polarität wie die Eingangssignale: Transistorverstärker in Emitterschaltung sind gleichzeitig Inverter.

Nur bei Ansteuerung mit kleinen Amplituden $U_{BE} \leq 10mV$ werden die Signale formgetreu und proportional übertragen. Im ganzen aktiven Bereich erkennt man eine mit zunehmender Aussteuerung zunehmende Verzerrung

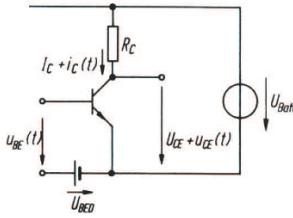


Abbildung 40.9. Einfacher Inverter/Verstärker in Emitterschaltung

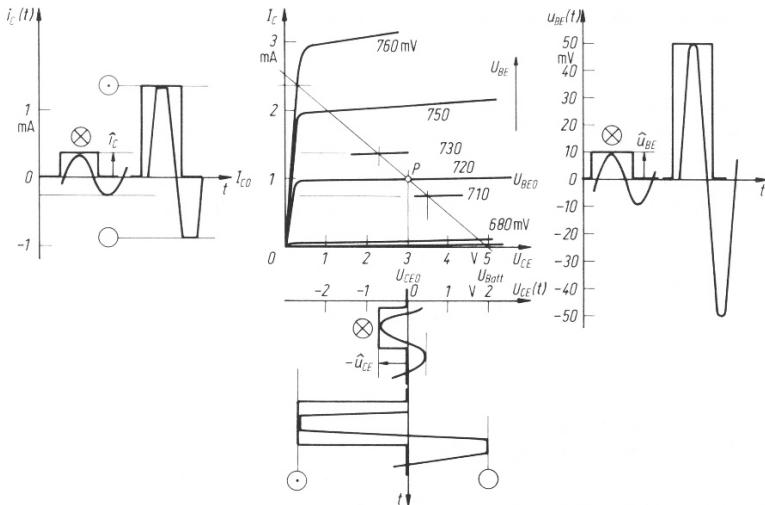


Abbildung 40.10. Spiegelung beliebiger Signale an den Kennlinien

durch die nichtlineare $I_B(U_{BE})$ -Beziehung. Begrenzung und damit starke Verzerrung tritt ein, wenn über den Kennlinienknick in die Sättigung \odot ausgesteuert wird oder wenn der Transistor stromlos \bigcirc wird. Wie man aus Abb. 40.10 weiter erkennt, eignet sich der Transistor unmittelbar zur invertierenden Impulsverstärkung in der Digitaltechnik. In der Analogtechnik müssen die Verzerrungen durch besondere Schaltmaßnahmen, hauptsächlich durch Gegenkopplung, klein gehalten werden.

Kleine Signale kann man rechnerisch durch lineare Gleichungen verknüpfen. Der Ausgangsstrom ist nach Gl. (40.14) zum Eingangsstrom über die Stromverstärkung β direkt proportional

$$i_C(t) = \beta i_B(t). \quad (40.15)$$

Er ist aber auch näherungsweise zu u_{BE} proportional

$$i_C(t) = S u_{BE}(t), \quad (40.16)$$

die Proportionalitätskonstante S wird *Steilheit* genannt (englisch: mutual transconductance $g_m = S$). Man gewinnt sie aus $I_C(U_{CE}, U_{BE})$ durch Bilden des Differentialquotienten im Arbeitspunkt P

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}} \Big|_P. \quad (40.17)$$

Da $I_C = \alpha I_E$ und $I_E(U_{BE})$ eine Diodenfunktion nach Gl. (39.46) mit $1 \ll \exp(U_{BE}/U_T)$

$$I_E(U_{BE}) = I_S e^{U_{BE}/U_T} \quad (40.18)$$

ist, hängt die Steilheit direkt mit dem Kollektorgleichstrom I_C und der Temperaturspannung U_T aber auch mit dem differentiellen Leitwert

$$G_E = \frac{1}{R_E} = \frac{\partial I_E}{\partial U_{BE}} \quad (40.19)$$

zusammen:

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}} = \alpha \frac{\partial I_E}{\partial U_{BE}} = \alpha \frac{1}{U_T} e^{U_{BE}/U_T} = \alpha \frac{I_E}{U_T} = \frac{I_C}{U_T}, \quad (40.20)$$

$$S = \frac{I_C}{U_T}, \quad (40.21)$$

$$S = \alpha G_E = \frac{\alpha}{R_E}. \quad (40.22)$$

Aufbauend auf die Stromverstärkungen α und β oder auf die Steilheit S kann man also zwei vollständig gleichwertige Sätze linearer Gleichungen zur Kleinsignalverknüpfung in der Emitterschaltung angeben. Sie führen zu den untereinander äquivalenten Ersatzschaltungen der Abb. 40.11.

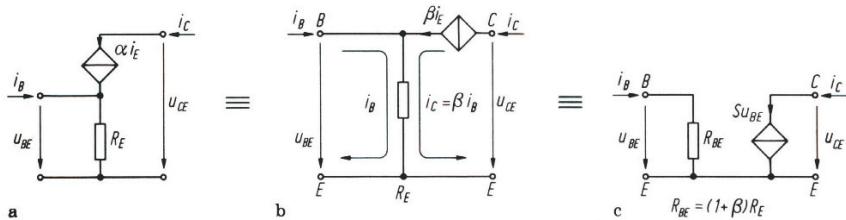


Abbildung 40.11. Äquivalente Kleinsignalersatzschaltbilder des npn -Transistors in Emitterschaltung

40.2.3 Die Kollektorschaltung (Emitterfolger)

Der Kollektor liegt am Pluspol der Batterie, die Eingangsspannung U_B zwischen der Basis und dem Minuspol der Batterie, die Ausgangsspannung U_E

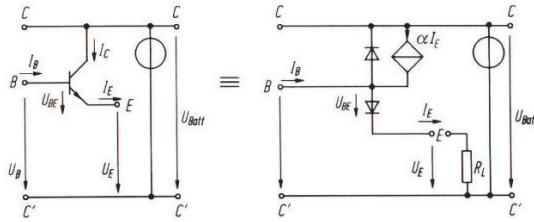


Abbildung 40.12. *npn*-Transistor in Kollektorschaltung (Emitterfolger) mit seiner Ersatzschaltung

zwischen dem Emittor und dem Batterieminuspol. Da über der Batterie keine Signalspannung liegen kann, die Batterie also ein Kurzschluss für Signale sein muss, sind CC und $C'C'$ gleichberechtigte Bezugslinien. Das Eingangssignal $u_B(t)$ kann von B nach C' oder gleichberechtigt von B nach C definiert werden. Das gleiche gilt für das Ausgangssignal $u_E(t)$.

In der Ersatzschaltung Abb. 40.12 erkennt man zwischen Eingang und Ausgang die Emittorbasisdiode, an der bei jedem entnommenen Emittorstrom I_E der zugehörige Spannungsabfall U_{BE} auftritt. Der Emittorstrom I_E wird im wesentlichen von der gesteuerten Stromquelle im Kollektorkreis geliefert, der Eingangsstrom I_B ist nur die Differenz

$$I_B = (1 - \alpha) I_E. \quad (40.23)$$

Der Emittorförger hat damit die Stromverstärkung

$$\gamma = \frac{I_E}{I_B} = \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (40.24)$$

Er wird meist als Impedanzwandler eingesetzt, denn während sich Ausgangsspannung U_E und Eingangsspannung U_B nur um die kleine Diodenspannung $U_{BE} \approx 0,7V$ unterscheiden, gehört zum Ausgangsstrom I_E der um den Faktor γ , also etwa 100mal kleinere Eingangsstrom. Mithin ist der Eingangswiderstand um den Faktor γ , also etwa 100mal größer als der Lastwiderstand R_L . Den Aussteuerbereich und die Signalübertragung des Emittorförgers zeigt sein Ausgangskennlinienfeld $I_E(U_E)$ mit der Eingangsspannung U_B als Parameter (Abb. 40.13). Bei einem angenommenen Emittorstrom I_E ist

$$U_E = U_B - U_{BE}(I_E). \quad (40.25)$$

Man hat also jeweils von einem Wert U_B der Eingangsspannung eine zu I_E gehörige Diodenspannung abzuziehen. Das Ausgangskennlinienfeld besteht also aus einer Reihe parallel zu sich selbst verschobenen Diodenkennlinien. Da für alle drei Grundschaltungen die Pfeilung von Spannungen und Strömen einheitlich gewählt wurde, fallen die Emittorströme mit zunehmenden Ausgangsspannungen. Dies hat mit „negativen Widerständen“ nichts zu tun.

Das Kennlinienfeld wird rechtsseitig dadurch begrenzt, dass die Kollektordiode bei zu großer Eingangsspannung leitend und damit der Transistor gesättigt wird. Linksseitig ist das Kennlinienfeld dadurch begrenzt, dass die Sperrgrenze der Kollektorbasisdiode bei zu großen negativen Werten U_B überschritten wird. Die Kennlinie eines Lastwiderstandes R_L lässt sich leicht als Arbeitsgerade ins Kennlinienfeld einzeichnen. Damit lässt sich jede Signalübertragung punktweise verfolgen.

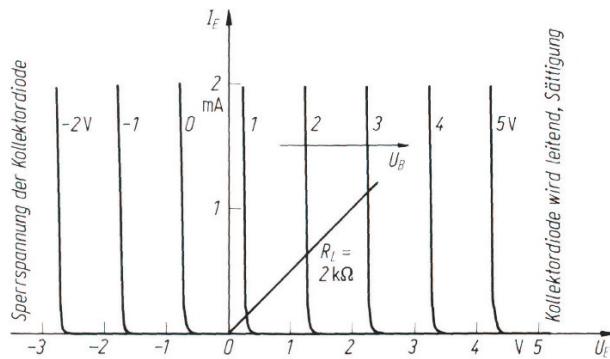


Abbildung 40.13. Kennlinienfeld des *n*p*n*-Transistors in Kollektorschaltung

40.3 Grundaufbau von Operationsverstärkern

Wie bereits in Abschnitt 40.1 ausgeführt, werden viele elektronische Schaltungen wenigstens teilweise mit Hilfe des Prinzips der Kaskadierung von Grundschaltungen aufgebaut. Das gilt insbesondere für Operationsverstärkerschaltungen (Ops), deren Hauptmerkmale die Linearität und die sehr hohe Spannungsverstärkung sind. Das Prinzip der Kaskadierung hat man bereits in der Frühzeit elektronischer Schaltungen – vgl. [7] – benutzt, um eine hohe Spannungsverstärkung zu erreichen. Weiterhin sollen Operationsverstärker in einem breiten Frequenzband unter Einschluss von 0 Hz (Gleichspannung) verstärken, so dass nur eine Gleichstromkopplung der einzelnen Verstärkerstufen in Frage kommt. Eine weitere Besonderheit ist, dass eine Spannungsdifferenz am Eingang verstärkt werden soll, die erst am Ausgang in unsymmetrischer Weise ausgekoppelt werden soll. Um eine gute Leistungsverstärkung zu erreichen, wird eine niedrigere Ausgangsimpedanz benötigt. Dazu wird eine Grundschaltung mit einer sehr guten Stromverstärkung benötigt. Im Gegensatz zum Eingang ist der Ausgang unsymmetrisch bezüglich der Masse.

Wenn man an einem Spannungsverstärker interessiert ist, könnte man beispielsweise einen Bipolartransistor in Emitterschaltung verwenden, aber die

entsprechende Spannungsverstärkung reicht nicht aus und außerdem handelt es sich nicht um eine Differenzverstärkerstufe. Eine Verstärkerschaltung mit den für Operationsverstärker üblichen Eigenschaften kann man im einfachsten Fall durch Kaskadierung von Transistorgrundschaltungen erhalten, wobei wir uns an dieser Stelle auf Operationsverstärkerschaltungen in Bipolartechnik beschränken. Beim Übergang auf MOS- oder CMOS-Technik gibt es bezüglich der Schaltungsstruktur keine wesentlichen Unterschiede. Hinsichtlich weiterer Einzelheiten über die Transistorschaltungstechnik mit Bipolartransistoren oder Schaltungen mit MOS-Transistoren verweisen wir auf Lehrbücher und Monographien der elektronischen Schaltungstechnik; vgl. z. B. Tietze und Schenk [276], Horowitz und Hill [124], Davidse [61]. In diesem Abschnitt soll nur auf einige wichtige Prinzipien zum Entwurf von Operationsverstärkerstrukturen eingegangen werden. Die entsprechenden Überlegungen basieren auf der schon erwähnten Monographie von O'Dell [218].

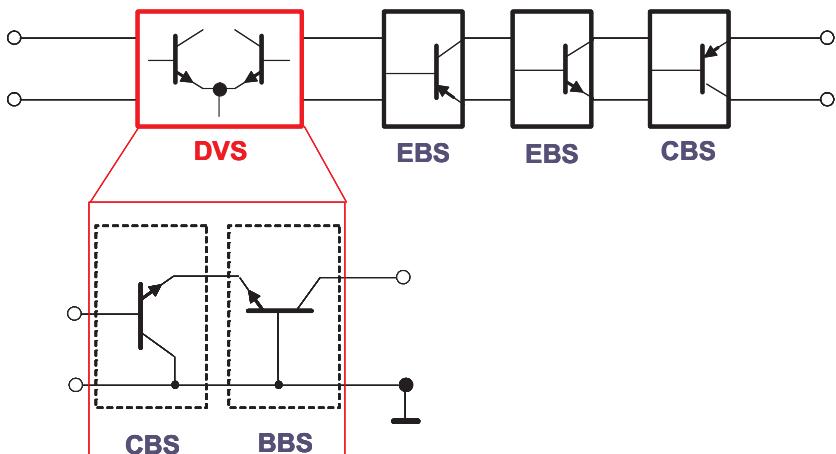


Abbildung 40.14. Aufbau eines Operationsverstärkers nach dem Kaskadenprinzip

Bei der ersten Stufe eines Op handelt es sich notwendigerweise um eine Differenzverstärkerstufe, die man als Kaskade einer Emitter- oder Kollektorgeschaltung mit einer Basisgrundschaltung auffassen kann. Die zusammengeschalteten Emitter der Bipolartransistoren der beiden Grundschaltungen werden über einen Widerstand oder besser noch über eine unabhängige Stromquelle versorgt. Ideale Stromquellen besitzen bekanntlich einen verschwindenden Leitwert. Der sehr große Innenwiderstand realer Stromquellen führt dazu, dass die Gleichtaktverstärker des Differenzverstärkers sehr gering ist. Anschließend kann eine Differenzverstärkerstufe oder eine Emittergrundschaltung als weiterer Spannungsverstärker in Kaskade geschaltet werden. Die Wahl ist davon abhängig, ob der Übergang von der differentiellen oder symmetrischen auf die unsymmetrische Signalübertragung nach der ersten

oder erst nach einer zweiten Differenzverstärkerstufe erfolgt. Daran schließen sich weitere Emittergrundschaltungen an, bis eine genügend hohe Spannungsverstärkung erreicht wird. Schließlich wird eine Kollektorschaltung verwendet, um die Stromverstärkung der Gesamtschaltung zu erhöhen bzw. einen niedrigen Ausgangswiderstand zu erzielen.

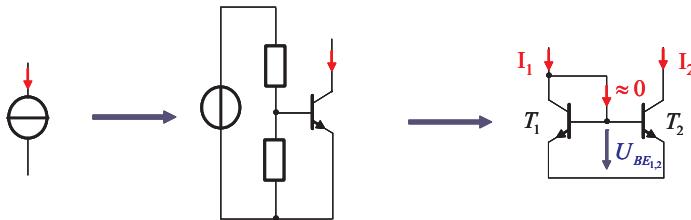


Abbildung 40.15. Schaltungsgrundstruktur eines Stromspiegels

Eine grundlegende Verbesserung der Eigenschaften von analogen Schaltungen in integrierter Technologie wurde erreicht, als Widlar um 1965 mit dem *Stromspiegel* eine neue Grundschaltung einführte und damit die Klasse der sogenannten *translinearen Schaltungen* begründete. Ursprünglich hatte Widlar eine Stromquelle aus einem Bipolartransistor konstruiert, bei dem der Strom mit einem Basisspannungsteiler eingestellt wurde. Zur Temperaturkompensation wurde der parallel zur Basis geschaltete Widerstand durch eine Diode ersetzt, die aus einem Transistor mit kurzgeschlossener Basis-Kollektor-Strecke gebildet wurde und die mit dem Transistor thermisch gekoppelt war. Etwas später erkannte Widlar die Bedeutung dieser Transistorkombination als neue Schaltungsstruktur, die nur in integrierte Technologie realisierbar ist. Um den translinearen Zusammenhang der beiden Ströme I_1 und I_2 an den Enden der Schaltungsgrundstruktur des Stromspiegels in Abb. 40.15 (rechts) zu ermitteln, geht man von der Näherung (40.18) für den Emitterstrom I_E und der Beziehung zum Kollektorstrom $I_C = \alpha I_E$ des Bipolartransistors in Abhängigkeit von U_{BE} aus

$$I_C \approx I_{C_s} e^{\frac{U_{BE}}{U_T}}, \quad (40.26)$$

wobei $I_{C_s} := \alpha I_S$ der Kollektorschwellenstrom und U_T die Temperaturspannung ist. Durch die Art der Zusammenschaltung der beiden Transistoren sind die beiden Basis-Emitter-Spannungen gleich, so dass man durch logarithmische Abbildung vom Strom I_1 auf U_{BE1} und durch die Exponentialfunktion – Umkehrabbildung der Logarithmusfunktion – von U_{BE2} zu I_2 gelangt. Sind die Temperaturen der beiden Transistoren gleich, dann kommt man zu einem linearen Übertragungsverhalten von I_1 auf I_2 , obwohl die Kollektorströme nichtlinear mit den Basis-Emitter-Spannungen zusammenhängen; vgl. Abb. 40.16. Mit Hilfe von Stromspiegeln kann man in einer Operationsverstärkerschaltung auf praktisch alle Widerstände verzichten, die in integrierter Tech-

nologie sehr flächenintensiv sind. Hinsichtlich weiterer interessanter Einzelheiten wollen wir auf O'Dell [218] verweisen.

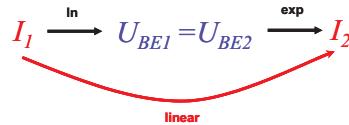


Abbildung 40.16. Translinearer Zusammenhang der Kollektorströme eines Stromspiegels

40.4 Systeme mit Rückkopplung

40.4.1 Stabilitätsbedingungen

Der stabile Betrieb eines Stromkreises, in dem durch eine konstante Quellenspannung U_0 ein Strom erzeugt werden soll, ist dadurch gekennzeichnet, dass die Stromstärke einen konstanten eindeutigen Wert hat. Den einfachsten Fall bildet ein Gleichstromkreis mit konstantem Widerstand R . Der Spannungsbedarf IR des Stromkreises wächst proportional mit der Stromstärke, so dass sich die in Abb. 40.17 dargestellten Verhältnisse ergeben. Im Punkt P sind Quellenspannung und Spannungsverbrauch einander gleich. Dies ist der stabile Betriebspunkt des Kreises. Würde die Stromstärke aus irgendeinem Grunde größer werden, so wäre die Quellenspannung zu klein, die Stromstärke müsste daher wieder bis zum Punkt P sinken. Entsprechend würde sich ein Überschuss der Quellenspannung ergeben, wenn die Stromstärke zu klein wäre, so dass die Stromstärke wachsen müsste, bis der Punkt P wieder erreicht ist.

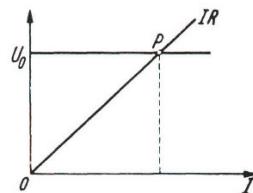


Abbildung 40.17. Gleichgewicht der Spannungen in einem Gleichstromkreis

Ein Beispiel eines labilen Betriebes ist in Abschnitt 37.1 durch den Punkt P_1 für den Fall eines Stromkreises mit einem Lichtbogen dargestellt. Hier deckt zwar auch die zur Verfügung stehende Spannung gerade den Spannungsverbrauch; irgendeine zufällig entstehende Abweichung vergrößert sich aber fortgesetzt, wie dies im Abschnitt 37.1 ausgeführt ist.

In diesen einfachen Fällen kann also die Frage, ob ein stabiler oder labiler Betriebspunkt vorliegt, aus der Betrachtung der Kennlinien beantwortet werden. Diese Betrachtungsweise ist jedoch im allgemeinen nicht zulässig. Schon im Falle der einfachen Kippschaltung, vgl. Abschnitt 37.1, führt sie zu einem Fehlschluss. Aus der Kennlinie der Glimmentladung, Abb. 40.18, folgt als Betriebspunkt der Punkt P_0 , in dem sich Spannungsbedarf und zur Verfügung stehende Spannung decken. Eine geringe Verkleinerung des Stromes ergibt einen Überschuss der letzteren, so dass der Strom wieder wachsen muss, und umgekehrt führt eine Vergrößerung des Stromes zu einem Fehlbetrag der Spannung, so dass der Strom wieder sinken muss. Der Punkt P_0 erscheint also danach als stabiler Betriebspunkt. Trotzdem ist die Anordnung nicht stabil, sondern es stellen sich die in Abschnitt 37.1 behandelten Kippschwingungen ein.

Die Ursache dafür, dass hier die Stabilitätsbetrachtung versagt, liegt darin, dass die Kennlinien nur die stationären Verhältnisse beschreiben und daher keinen Aufschluss über das Verhalten des Systems bei irgendwelchen Abweichungen geben können. Für die Untersuchung der Stabilität ist es vielmehr erforderlich, die bei Abweichungen vom Betriebspunkt entstehenden Ausgleichsvorgänge zu betrachten.

Beim Punkt P_0 , Abb. 40.18 ist die Wirkung des Kondensators zu berücksichtigen. Nehmen wir z. B. an, dass sich die Quellenspannung U_0 etwas erniedrigt. Dann verschiebt sich die Widerstandsgerade ein wenig nach unten (gestrichelt eingezeichnet). Der Kondensator hält aber die Spannung u zunächst aufrecht. Damit behält auch der Strom i in der Glimmröhre zunächst noch seinen alten Wert (P_0). Der Strom i_R ist aber kleiner geworden (P'_0). Der Fehlbetrag ($P_0 P'_0$) wird durch den Kondensator gedeckt, der sich nun entlädt, u wird kleiner, der Fehlbetrag $i - i_R$ wird damit aber immer größer, so dass die Entladung des Kondensators fortschreitet bis die Löschspannung erreicht ist. Auch bei einer geringen Vergrößerung von U_0 erweist sich der Punkt P_0 als nicht stabil.

Stabile Betriebsverhältnisse liegen vor, wenn bei einer Störung der Ströme oder Spannungen die Abweichungen mit der Zeit abklingen. Wachsen die Änderungen ständig an, dann ist der betrachtete Betriebspunkt labil. Für die Untersuchung der Stabilität von Stromkreisen genügt es im allgemeinen, die Wirkung von sehr kleinen Änderungen der Ströme und Spannungen zu betrachten. Dies vereinfacht die Stabilitätsuntersuchungen, da bei kleinen Schwankungen der Ströme und Spannungen alle Stromkreise angenähert als lineare Systeme angesehen werden können. Bei Stromkreisen mit sehr stark nichtlinearen Elementen kann allerdings auch der Fall vorkommen, dass der Stromkreis bei kleinen Schwankungen stabil ist, aber bei großen Strom- oder Spannungsstößen instabil wird; diesen Sonderfall lassen wir im folgenden unberücksichtigt.

Um die Stabilität eines Stromkreises zu untersuchen, muss der zeitliche Verlauf des Vorganges verfolgt werden, der bei einer plötzlichen kleinen Änderung einer Spannung oder eines Stromes entsteht. Unter Benutzung der Be-

zeichnungen aus Netzwerk- und Systemtheorie gilt nun folgendes: Die einzelnen Komponenten des transienten Vorganges, der bei einer plötzlichen Änderung einer Spannung oder eines Stromes entsteht, klingen exponentiell aus, wenn die Eigenwerte des Netzwerkes bzw. Systems negative reelle Anteile haben. Das Polynom zur Bestimmung dieser Eigenwerte nennt man auch *charakteristisches Polynom*. In bestimmten Fällen kann man diese Eigenwerte auch als Nullstellen oder Pole einer entsprechenden Übertragungsfunktion (siehe Abschnitt 4.4) ermitteln. Sind die Realteile von Eigenwerten positiv, dann wachsen die Exponentialfunktionen ständig an; der betrachtete Betriebszustand ist nicht stabil; vgl. z. B. Mathis ([180], Abschnitt 4.12.2) und 2. Die Bedingung für die Stabilität eines Stromkreises lautet daher:

Ein Stromkreis ist stabil, wenn alle Nullstellen der charakteristischen Gleichung einen negativen Realteil haben.

Um die Stabilität eines Stromkreises zu untersuchen, muss also die charakteristischen Gleichung für kleine Änderungen der Ströme und Spannungen aufgestellt werden, oder was in bestimmten Fällen auf das gleiche hinausläuft, eine geeignete Übertragungsfunktion.

40.4.2 Negativer Widerstand

Labile Betriebszustände können immer dann auftreten, wenn die Spannungs-Strom-Kennlinie $u = u(i)$ einen fallenden Bereich enthält; vgl. z. B. Abschnitt über die Glimmentladung 37.1 und den nächsten Abschnitt 40.4.3. In solchen Bereichen der Kennlinie ist du/di negativ. Man kann, dies so ausdrücken, dass man sagt, ein Bauelement wirkt in einem solchen Bereich bei kleinen Änderungen des Stromes oder der Spannung wie ein *negativer Widerstand* vom Betrage

$$R_n = \left| \frac{du}{di} \right|. \quad (40.27)$$

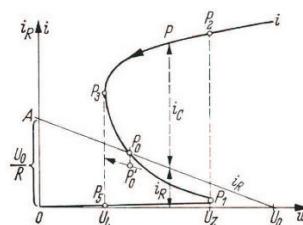


Abbildung 40.18. Entstehung einer Kippschwingung

Wir betrachten ein Bauelement (z. B. Glimmröhre, Kippdiode; vgl. Abschnitt 40.4.3) mit einer Spannungs-Strom-Kennlinie $u = u(i)$ entsprechend 40.18, schalten eine Kapazität C parallel und betreiben diese Parallelschaltung mit einer idealen Spannungsquelle U_0 mit einem in Reihe geschalteten

Innenwiderstand R . Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens solcher Oszillatoren mit *einem* dynamischen Element (Oszillatoren 1. Ordnung) kann man keine geschlossene Differentialgleichung aufstellen, sondern man muss das Verhalten bereichsweise betrachten; vgl. Andronov, Witt und Chaikin [5], Verhoeven [285]. Wir gehen darauf weiter unten ein.

Um das Kleinsignalverhalten zu studieren, kann für eine solche Kippschaltung das in Abb. 40.19 dargestellte „Kleinsignalersatzbild“ gezeichnet werden, wobei das nichtlineare Bauelement im Bereich der fallenden Kennlinie durch einen negativen Widerstand repräsentiert wird. Es ist sehr lehrreich, diese Schaltung genauer zu betrachten.

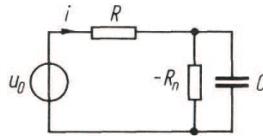


Abbildung 40.19. Ersatzbild zur Untersuchung der Stabilität im Punkt P_0 bei Abb. 40.18

Im Kleinsignalersatzbild kann R_n wegen der Voraussetzung kleiner Änderungen der Spannungen und Ströme als konstant angesehen werden. Während aber ein gewöhnlicher positiver Widerstand R die Leistung $|I|^2 R$ aufnimmt, gibt der negative Widerstand die Leistung $|I|^2 R_n$ ab. Die Energie wird von der Gleichspannungsquelle geliefert, die die notwendige Vorspannung erzeugt.

Um die Eigenwerte des linearisierten Netzwerkes zu ermitteln, ersetzen wir die Gleichspannungsquelle gedanklich durch eine Wechselspannungsquelle und bestimmen mit Hilfe der Laplace-Transformation (vgl. z. B. Kisacanin und Agarwal [143] oder Abschnitt 2) die entsprechende *inverse* Übertragungsfunktion $F(s) = U_0(s)/I_R(s)$ und deren Nullstellen, wobei s die komplexe Frequenz ist; vgl. Deseor und Kuh [63] (S. 634: *Soldering Iron-* bzw. *Pliers Entry*-Methode). Mit den Laplace-Transformierten $U_0(s)$ und $I_R(s)$ (vgl. z. B. Kisacanin und Agarwal [143]) der Zeitfunktionen $u_0(t)$ und $i_R(t)$ gilt für die Abb. 40.19

$$U_0(s) = I_R(s) \left(R - \frac{R_n}{1 - R_n C s} \right). \quad (40.28)$$

Die Übertragungsfunktion $F(s) = U_0(s)/I_R(s)$ ist

$$F(s) = R - \frac{R_n}{1 - R_n C s}, \quad (40.29)$$

und die Gleichung für die Nullstelle $F(s) = 0$ liefert

$$s_1 = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R} \right). \quad (40.30)$$

Die Anordnung ist also stabil, wenn

$$R < R_n, \quad (40.31)$$

da nur dann s_1 negativ ist. In Abb. 40.18 ist jedoch im Punkt P_0 : $R > R_n$. Daher ist der Stromkreis nicht stabil, und es stellen sich die dort besprochenen Kippschwingungen ein.

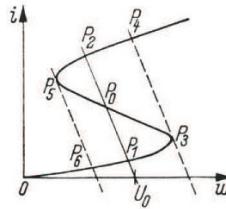


Abbildung 40.20. Widerstandsgerade mit 3 Schnittpunkten

Die Bedingung (40.31) für die Stabilität besagt, dass die Widerstandsgerade im Punkt P_0 eine Lage haben sollte wie sie als Beispiel in Abb. 33.2 angegeben ist. Aber auch hier erweist sich der Punkt P_0 nicht als ein stabiler Betriebspunkt. Wird nämlich die Quellenspannung U_0 von Null beginnend allmählich vergrößert, so verschiebt sich die Widerstandsgerade parallel zu sich selbst und der Schnittpunkt mit der Kennlinie durchläuft als Betriebspunkt zunächst den Abschnitt $0P_6P_1P_3$. Hier zündet die Gasentladung und der Strom steigt rasch zu dem stabilen Betriebspunkt P_4 . Verkleinert man jetzt U_0 , dann nehmen Spannung und Strom entsprechend der Kennlinie ab bis zum Punkt P_5 , wo die Glimmentladung erlischt, so dass sich der Betriebspunkt P_6 einstellt. Von den 3 Schnittpunkten $P_1P_0P_2$ ist also der mittlere nicht für einen stabilen Betrieb zugänglich, so dass es so scheint als ob der Abschnitt der Kennlinie zwischen P_3 und P_5 überhaupt nicht gemessen werden könnte. Dies ist jedoch ein Fehlschluss; die Überlegungen bedürfen noch einer weiteren wichtigen Ergänzung.

Der Übergang von der Spannung U_L zur Spannung U_Z in Abb. 40.18 vollzieht sich unter Vernachlässigung des geringen Reststromes gemäß der Gleichung (U_0 ist nun wieder die Gleichspannung)

$$u(t) = U_L(U_0 - U_L) \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad (40.32)$$

da $u = U_L$ für $t = 0$ und, wenn keine plötzliche Spannungsänderung im Punkt P_1 eintreten würde, $u = U_0$ für $t = \infty$ sein muss. Bezeichnet man mit t_Z den Zeitpunkt, in dem die Spannung U_Z erreicht ist, so gilt

$$U_Z = U_L(U_0 - U_L) \left(1 - e^{-\frac{t_Z}{RC}} \right). \quad (40.33)$$

Daraus folgt für den Zeitabschnitt zwischen P_5 und P_1

$$t_Z = RC \ln \frac{U_0 - U_L}{U_0 - U_Z}. \quad (40.34)$$

Die Periodendauer der Schwingung wächst daher mit wachsendem Widerstand, wachsender Kapazität und abnehmender Quellenspannung, da die Zeiten des Überganges von P_1 nach P_2 und P_3 nach P_5 vernachlässigt werden können.

Verkleinert man also bei $R > R_n$, die Kapazität C des Kondensators, so wächst zunächst gemäß den gerade ausgeführten die Frequenz der Kippschwingungen. Bei einem bestimmten Kapazitätswert C_m reißen aber die Schwingungen ab, und es stellt sich nun der Punkt P_0 als ein stabiler Betriebspunkt ein. Durch entsprechendes Verschieben oder Schwenken der in Abb. 40.18 gezeichneten Widerstandsgeraden kann nunmehr jeder Punkt der Kennlinie auch im fallenden Teil gemessen werden. Der Widerspruch zu der oben gefundenen Stabilitätsbedingung (40.31) löst sich dadurch, dass dort vorausgesetzt wurde, die Kennlinie des nichtlinearen Widerstands bleibe auch bei raschen Vorgängen erhalten. Dies ist bei den obengenannten Bauelementen nicht der Fall. Bei einer plötzlichen Änderung der Spannung kann sich die gespeicherte Energie und damit die Stromstärke nicht plötzlich ändern; der neue Zustand bildet sich allmählich aus. Dies kann im Ersatzbild durch eine in Reihe mit dem negativen Widerstand liegende Induktivität L berücksichtigt werden; diese Idee findet man erstmals in Barkhausens Dissertation von 1907 [14]. Das Kleinsignalersatzbild des modifizierten Netzwerkes wird also durch Abb. 40.21 dargestellt. Hier lautet nun die inverse Übertragungsfunktion

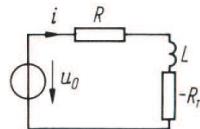


Abbildung 40.21. Wechselstromersatz der Glimmröhre

$$F(s) = R - R_n + L s = 0 \quad (40.35)$$

mit der Nullstelle

$$s_1 = \frac{R_n - R}{L}, \quad (40.36)$$

und die Bedingung für die Stabilität,

$$R < R_n, \quad (40.37)$$

ist bei der in Abb. 40.18 angenommenen Lage der Widerstandsgeraden erfüllt.

Das Kleinsignalersatzbild Abb. 40.19 der Kippschaltung muss durch die Induktivität L in Reihe mit dem negativen Widerstand ergänzt werden. Dann wird die in

$$F(s) = R + \frac{-R_n + Ls}{1 - R_n Cs + LCs^2}, \quad (40.38)$$

und durch Auflösen von $F(s) = 0$ folgen die beiden Nullstellen

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{RC} - \frac{R_n}{L} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{RC} - \frac{R_n}{L} \right)^2 + \frac{R_n - R}{RLC}}. \quad (40.39)$$

Nun lässt sich leicht zeigen, dass der Punkt P_0 ein *stabiler* Betriebspunkt ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$1. \quad C < C_m = \frac{L}{RR_n}, \quad (40.40)$$

$$2. \quad R > R_n. \quad (40.41)$$

Infolge der ersten Bedingung ist nämlich der erste Summand in s_1 und s_2 immer negativ. Infolge der zweiten Bedingung ist entweder die Nullstellen imaginär oder kleiner als der Betrag des ersten Summanden, so dass die Realteile von s_1 und s_2 immer negativ sind.

Zahlenbeispiel: Bei einer Neon-Glimmröhre mit etwa 10mbar Gasdruck und einigen cm^2 Kathodenoberfläche liegt der negative Widerstandswert R_n bei etwa $20k\Omega$. Die Zeitkonstante bei Änderungen der Spannung beträgt einige Zehntel ms . Daher hat die Induktivität der Glimmstrecke die Größenordnung $L = 10\text{H}$. Macht man $R = 40k\Omega$, dann wird nach Gl. (40.40)

$$C_m = \frac{10\text{H}}{2 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^4 \Omega^2} = 12,5 \text{nF}. \quad (40.42)$$

Zur Erzeugung von Kippschwingungen muss die Kapazität C größer als dieser Wert sein.

40.4.3 Die beiden Typen von negativen Widerständen

Eine ähnliche Kennlinienform wie bei der Glimmröhre findet man auch beim Lichtbogen. Hier gelten im Prinzip die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Lichtbogenschaltungen wurden früher zur Herstellung von Hochfrequenzschwingungen verwendet (die Bezeichnung „Funk“ röhrt davon her). Negative Widerstände dieser Art werden nach der Form der i, u -Kennlinie auch als S-Typ bezeichnet.

Ein weiteres Beispiel eines Zweipols vom S-Typ bilden die *Halbleiter-Vierschicht-Dioden* („*Kippdioden*“). Gemäß Abb. 40.22 werden in einem Halbleiterkristall vier Zonen $P_1 N_1 P_2 N_2$ hergestellt, die der Reihe nach $p-$, $n-$, $p-$ und $n-$ leitend sind. Wird die Spannung u von Null beginnend vergrößert, z. B. dadurch, dass ein hoher Vorwiderstand in Reihe mit einer Gleichspannung U_0 allmählich verkleinert wird, dann findet man wegen des in Sperrrichtung betriebenen Überganges von N_1 nach P_2 etwa die gleichen Verhältnisse

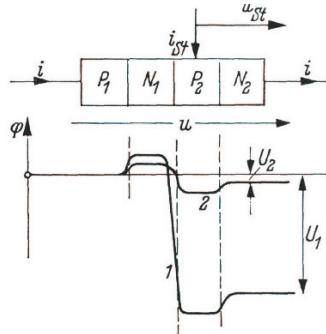


Abbildung 40.22. Potenzialverteilung in der Kippdiode

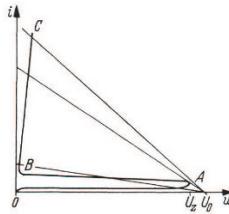


Abbildung 40.23. Kennlinie der Kippdiode

wie bei einer in Sperrrichtung betriebenen einfachen Diode. Dies entspricht dem Abschnitt OA der Kennlinie in Abb. 40.23. Die Potenzialverteilung im Kristall ist dabei durch die Kurve 1 in Abb. 40.22 veranschaulicht. Bei weiterem Verkleinern des Vorwiderstandes findet in der Grenzschicht N_1P_2 ein Durchschlag statt (Lawinen-Durchschlag, Zener-Spannung U_Z siehe Abschnitt 40.4.2). Jetzt steigt der Strom i stark an und es stellt sich ein neuer Leitungsmechanismus dadurch ein, dass aus P_1 über N_1 Defektelektronen und aus N_2 über P_2 Elektronen die Grenzschicht N_1P_2 überfluten (Leitung durch „Trägerinjektion“). Damit verschwindet die hohe Sperrspannung an dieser Grenzschicht, und die zur Aufrechterhaltung der großen Stromstärke notwendige Gesamtspannung sinkt entsprechend der Potenzialverteilung nach Kurve 2, Abb. 40.22, auf einen niedrigen Wert. Diesem Leitungsmechanismus entspricht der Abschnitt BC der Kennlinie Abb. 40.23. Die Kippdiode wirkt also ähnlich wie ein Schalter mit großem Widerstand im geöffneten Zustand (Kurvenstück OA) und mit kleinem Widerstand im geschlossenen Zustand (Kurvenstück BC). Nach dem oben Ausgeführten kann das Übergangsstück AB der Kennlinie nur dann gemessen werden, wenn die Widerstandsgerade die Kennlinie nur in einem einzigen Punkt schneidet und wenn die Schaltungskapazitäten hinreichend gering sind (Gl.(40.40)).

Bemerkung: Bei den Anwendungen der Kippdiode als Schalter wird davon Gebrauch gemacht, dass das Umschalten von dem einen in den anderen Leitungszustand besonders ökonomisch mit Hilfe eines Steuerstromes i_{St} in der mit P_2 bezeichneten Zone geschehen kann (Kipp-Triode, Thyristor; siehe z. B. Böhmer [34]). Mit einem relativ niedrigen positiven Strom i_{St} kann die Zündspannung U_z erheblich herabgesetzt werden. Mit einem geringen negativen Strom i_{St} kann die Trägerinjektion und damit der Durchflußbetrieb unterbrochen werden.

Bei den negativen Widerständen vom S-Typ ist die Spannung eindeutig durch den Strom bestimmt, während bei ein- und derselben Spannung mehrere Stromstärkenwerte auftreten können. Es gibt nun noch einen zweiten Typ von negativen Widerständen, die durch einen spiegelbildlichen Verlauf der Kennlinie gekennzeichnet sind. Ein Beispiel bildet das *Dynatron*. Dies ist eine Hochvakuum-Triode, die mit hoher positiver Gittervorspannung betrieben wird. Der dadurch entstehende Zusammenhang zwischen Anodenstrom i_a und Anodenspannung u_a ist in Abb. 40.24 gezeigt.

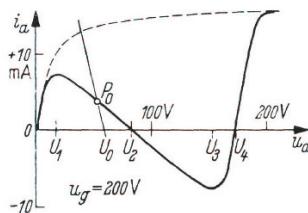


Abbildung 40.24. Kennlinie des Dynatrons

Da mit wachsender Anodenspannung ein immer größerer Teil des Kathodenstromes durch das Gitter hindurch auf die Anode übergeht, so wäre hier zunächst die gestrichelt gezeichnete Kurve zu erwarten. Der tatsächlich beobachtete Abfall des Anodenstromes beim Überschreiten einer bestimmten Anodenspannung U_1 erklärt sich dadurch, dass die auf die Anode auftreffenden Elektronen dort sogenannte „Sekundärelektronen“ auslösen. Die je auftreffendes Primärelektron erzeugte Zahl von Sekundärelektronen wächst mit der Anlauf Spannung der Primärelektronen und kann das Mehrfache der Anzahl der Primärelektronen betragen. Solange das Anodenpotenzial niedriger ist als das Gitterpotenzial, fließt der Sekundärelektronenstrom von der Anode zum Gitter, so dass der äußere Anodenstrom als Differenz zwischen dem primären und dem sekundären Elektronenstrom aufzufassen ist. Übertrifft der Strom der Sekundärelektronen den Primärelektronenstrom, so wird der Anodenstrom negativ wie in dem Gebiet zwischen U_2 und U_4 .

Bei Anodenspannungen, die zwischen U_1 und U_3 liegen, stellt die Strecke zwischen Anode und Kathode einen negativen Widerstand dar. Bei einer

Anodenspannung von 80V entspricht die Strecke Anode-Kathode für kleine Spannungs- und Stromschwankungen in dem Beispiel der Abb. 40.24 einem negativen Widerstand von rund 8000Ω .

Hier ist der Zustand des Zweipols Anode-Kathode also eindeutig durch die Spannung bestimmt, während zu einer Stromstärke mehrere Spannungswerte gehören können. Diese Form der Kennlinie wird auch als N-Typ bezeichnet. In Abb. 40.24 ist als Beispiel eine Widerstandsgerade eingezeichnet für den Fall, dass der Vorwiderstand R kleiner als der negative Widerstand R_n ist. Dies führt hier zu einem stabilen Betrieb, da das Kleinsignalersatzbild eine Kapazität C parallel zu dem negativen Widerstand aufweist: Bei einer plötzlichen Änderung der Anodenvorspannung U_0 bleibt zunächst wie bei einem Kondensator die Spannung u_a konstant wegen der endlichen Laufzeit der Elektronen zwischen Gitter und Kathode und wegen der Kapazität zwischen den Elektroden. Dadurch stellt sich im Gegensatz zu Abb. 40.18 wieder ein stabiler Betriebspunkt ein.

Einen negativen Widerstand vom N-Typ zeigt auch die Tunnel-Diode, Abb. 37.11. Auch hier kann auf der ganzen Kennlinie mit einem Vorwiderstand $R < R_n$ ein stabiler Betriebspunkt eingestellt werden. Das Kleinsignalersatzbild enthält im wesentlichen die Kapazität der Übergangsschicht parallel zu dem negativen Widerstand.

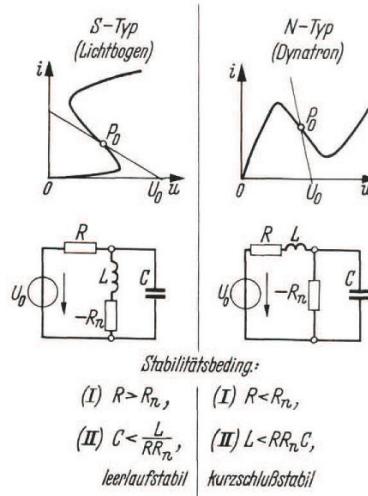


Abbildung 40.25. Eigenschaften negativer Widerstände

Die beiden Typen von negativen Widerständen sind in der Abb. 40.25 einander gegenübergestellt. Wegen der Bedingung (I) werden Anordnungen mit S-Kennlinie auch als *leerlaufstabil*, Anordnungen mit N-Kennlinie auch als *kurzschlußstabil* bezeichnet. Die Bedingung (II) kann für den N-Typ durch

eine ähnliche Betrachtung wie beim S-Typ aus dem Kleinsignalersatzbild abgeleitet werden; sie zeigt ebenfalls das gegensätzliche Verhalten der beiden Typen.

Mit negativen Widerständen können andauernde periodische Schwingungen dadurch hergestellt werden, dass die Stabilitätsbedingung (II) nicht eingehalten wird. Die Kreisfrequenz der erzeugten Schwingung ist, wie z. B. Gl. (40.39) lehrt, angenähert $1/\sqrt{LC}$, wenn die Stabilitätsbedingung (I) möglichst reichlich und die Stabilitätsbedingungen (II) möglichst knapp erfüllt wird.

40.4.4 Rückkopplung

Rückkopplung – in der neueren Literatur auch Feedback genannt – liegt vor, wenn bei einer verstärkenden Einrichtung die Ausgangsgröße auf die Eingangsgröße zurückwirkt. Das wohl älteste Beispiel der Elektrotechnik für eine Rückkopplung ist die selbsterregte Gleichstrommaschine: das *dynamoelektrische Prinzip* von W. Siemens (1866); vgl. Lindner [167]. In Abb. 29.37 kann als Ausgangsgröße die erzeugte Spannung U_0 , als Eingangsgröße der Erregerstrom I_e angesehen werden, der selbst wieder durch die Ausgangsgröße U_0 bestimmt wird. Dadurch stellt sich der in Abb. 29.37 mit P bezeichnete stabile Betriebspunkt ein. Das wesentliche der Rückkopplung ist der geschlossene Wirkungskreis oder Rückkopplungskreis.

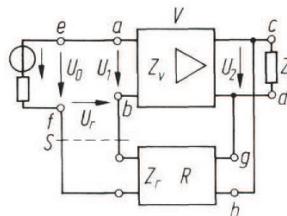


Abbildung 40.26. Beispiel eines Verstärkers mit Spannungsrückkopplung

In Abb. 40.26 ist das allgemeine Schema eines rückgekoppelten Verstärkers dargestellt. V ist der eigentliche Verstärker mit den Eingangsklemmen ab und den Ausgangsklemmen cd . R ist der Rückkopplungsvierpol, dessen Ausgangsspannung U_r zu der von der Quelle herrührenden Eingangsspannung U_0 addiert wird:

$$U_1 = U_0 + U_r. \quad (40.43)$$

Am Eingang von R wirkt die Ausgangsspannung U_2 des Verstärkers. Besonders einfache Verhältnisse entstehen, wenn man dafür sorgt, dass der Rückkopplungsvierpol nur von rechts nach links überträgt. Dies kann z. B. dadurch angenähert erreicht werden, dass seine von links her betrachtete Impedanz Z_r klein gegen die Impedanz Z_v des Verstärkereingangs gemacht wird:

Die in Abb. 40.26 dargestellte Form bezeichnet man als *Spannungsrückkopplung*, da die rückgekoppelte Größe U_r von der Ausgangsspannung abgeleitet wird. *Stromrückkopplung* entsteht, wenn der Eingang gh von R mit dem Ausgang cd des Verstärkers in Reihe geschaltet wird.

Die Eigenschaften des rückgekoppelten Verstärkers können auf die Eigenschaften seiner beiden Bestandteile V und R zurückgeführt werden. Dazu denkt man sich den Rückkopplungskreis an einer Stelle aufgeschnitten, besonders einfach bei S . Nun können die folgenden komplexen Übertragungsfunktionen definiert und gemessen werden:

1. Der *komplexe Spannungsverstärkungsfunktion des eigentlichen Verstärkers V* :

$$v_0 = \frac{U_2}{U_1}. \quad (40.44)$$

2. Der *komplexe Spannungsübertragungsfunktion des Rückkopplungsvierpols R* :

$$r_0 = \frac{U_r}{U_2}. \quad (40.45)$$

3. Der *komplexe Rückkopplungsfunktion*

$$A = \frac{U_r}{U_1} = v_0 r_0. \quad (40.46)$$

Im rückgekoppelten Verstärker gilt die Gl. (40.43); setzt man dort ein $U_1 = U_2/v_0$ und $U_r = r_0 U_2$, so folgt

$$U_2 = U_0 \frac{v_0}{1 - r_0 v_0}. \quad (40.47)$$

Der *Verstärkfaktor des rückgekoppelten Verstärkers* ist also

$$v = \frac{U_2}{U_0} = \frac{v_0}{1 - r_0 v_0} = \frac{v_0}{1 - A} = \frac{1}{1/v_0 - r_0}. \quad (40.48)$$

Die Größen v_0, r_0 und A können allgemein als Funktionen der komplexen Frequenz s aufgefasst werden.

Der durch Gl. (40.48) ausgedrückte Zusammenhang kann nun für verschiedene Zwecke ausgenutzt werden. Macht man in dem interessierenden Bereich der Frequenzen A positiv reell, so liegt positive Rückkopplung oder Mitkopplung vor. Ist A dabei kleiner als 1, dann wird der Verstärkfaktor durch die Rückkopplung vergrößert. Mit A größer als 1 können Schwingungen erzeugt werden. Negative Rückkopplung oder Gegenkopplung entsteht, wenn A negativ reell gemacht wird. Der Verstärkfaktor wird dann zwar verkleinert, aber er wird, wie man der letzten Darstellung in Gl. (40.48) entnimmt, für $v_0 \gg 1$ weitgehend unabhängig von v_0 und damit von Änderungen oder Nichtlinearitäten des eigentlichen Verstärkers.

Der Grundregelkreis

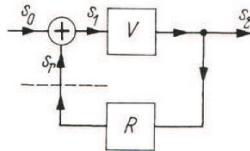


Abbildung 40.27. Der allgemeine Rückkopplungskreis oder Grundregelkreis

Der allgemeine Rückkopplungs- oder Grundregelkreis lässt sich durch das Blockbild Abb. 40.27 veranschaulichen. Die Struktur des Grundregelkreises ist die Basis für die *Regelungstheorie* und *Regelungstechnik*, die sich u.a. auf der Grundlage des Studiums elektronischer Rückkopplungssysteme (z.B. Verstärker) als eigenständige Disziplin herausgebildet hat. Die Regelungstheorie befasst sich längst nicht mehr nur mit elektronischen Systemen, wie es Küpfmüller bereits in seiner ersten Arbeit von 1924 vorausgesehen hat [153] (siehe auch Bissell [31]), sondern hat sich bei der Betrachtung vieler anderer physikalischer Systeme und sogar nichtphysikalischer Systeme sehr gut bewährt. An dieser Stelle sollen nur die in der Regelungstheorie üblichen Bezeichnungen eingeführt werden, so dass ein Vergleich mit den in der Netzwerktheorie üblichen Bezeichnungen möglich wird. Aus der Fülle der Monographien und Lehrbücher seien (z. B. Kisacanin und Agarwal [143], Ludyk [173]) stellvertretend genannt.

Hier seien $s_0(t)$, $s_1(t)$ und $s_r(t)$ Zeitfunktionen beliebiger physikalischer Größen gleicher Art, z.B. Spannungen. Dann soll entsprechend Gl. (40.43) in jedem Zeitpunkt gelten

$$s_0(t) + s_r(t) = s_1(t). \quad (40.49)$$

Ferner sei $s_2(t)$ die Zeitfunktion einer beliebigen anderen physikalischen Größe, z. B. eines Stromes. Unter der Voraussetzung linearer Systeme sollen die großen Buchstaben $S_0(s)$, $S_1(s)$, $S_2(s)$ und $S_r(s)$ die *Laplace-Transformierten* (auch *Spektralfunktionen* genannt) der entsprechenden Zeitfunktionen sein. Dann sei entsprechend Gl. (40.44) der Übertragungsfunktion von V :

$$v_0 = \frac{S_2}{S_1}, \quad (40.50)$$

und entsprechend Gl. (40.45) der Übertragungsfunktion von R :

$$r_0 = \frac{S_r}{S_2}, \quad (40.51)$$

sowie entsprechend Gl. (40.46) der Rückkopplungsfunktion

$$A = \frac{S_r}{S_1} = v_0 r_0. \quad (40.52)$$

Dann folgt ähnlich wie oben

$$S_2 = S_0 \frac{v_0}{1 - v_0 r_0} = S_0 \frac{v_0}{1 - A} \quad (40.53)$$

und

$$S_r = S_0 \frac{v_0 r_0}{1 - v_0 r_0} = S_0 \frac{A}{1 - A}. \quad (40.54)$$

Die Gl. (40.53) ist gleichbedeutend mit Gl. (40.47). Die Gl. (40.54) bildet ein wichtiges *Grundgesetz der automatischen Regelung*: Wenn nämlich A negativ reell gemacht wird, dann folgt die *Regelgröße* $s_r(t)$ umso genauer der *Führungsgröße* $s_0(t)$ je größer $-A$ gegen 1 ist.

Für die Stabilitätsuntersuchungen können die gleichen Überlegungen angewendet werden wie oben. Die charakteristische Gleichung lautet

$$F(s) = 1 - A(s) = 0. \quad (40.55)$$

Die Anordnung ist stabil, wenn alle Nullstellen einen negativen Realteil haben, besitzt. Es handelt sich allerdings nur um die sogenannte Input-Output-Stabilität (auch Bounded-Input-Bounded-Output- oder BIBO-Stabilität genannt), die nur das nach außen beobachtbare Systemverhalten charakterisiert. Da die Stabilität nichtbeobachtbarer Teile eines Systems damit nicht bestimmt werden kann, muss neben der BIBO-Stabilität auch vollständige Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eines Systems gefordert werden, um die asymptotische Stabilität eines Systems sicherzustellen. Nähere Einzelheit dazu findet man bei z. B. bei Ludyk [173] oder Mathis [180].

Es gibt weitere Möglichkeiten, die Stabilität eines linearisierten Systems zu untersuchen; die wichtigsten Verfahren verwenden die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms bzw. eine zugeordnete Ortskurve. Stabilitätskriterien für die Polynomkoeffizienten findet man in älteren Büchern der Regelungstechnik ebenso wie das Ortskurvenkriterium, das sehr sorgfältig angewandt werden muss, damit es brauchbare Aussagen liefert; vgl. Strecker [271]. Da man heute die Pole und Nullstellen eines linearisierten Systems sehr leicht mit Hilfe numerischer Algorithmen (z. B. auf der Basis von MATLAB; siehe Pratap [228]) bestimmen kann, werden die analytischen Kriterien nur noch sehr selten benötigt und sollen daher nicht näher betrachtet werden; vgl. aber Küpfmüller und Kohn [155].

40.4.5 Erzeugung von Schwingungen in Oszillatoren

Periodische Schwingungen können wie mit negativen Widerständen auch mit positiver Rückkopplung erzeugt werden. Das wesentliche erkennt man aus der Betrachtung der Schaltungsstruktur eines Oszillators zur Erzeugung von sinusförmigen Schwingungen, Abb. 40.28, der bereits im Jahre 1912 von A. Meissner vorgeschlagen wurde; Einzelheiten zur Geschichte elektrischer Oszillatoren und der positiven Rückkopplung findet man bei Mathis [185]. Schon

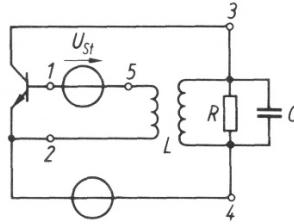


Abbildung 40.28. Meissner-Oszillator

jetzt sollte aber darauf hingewiesen werden, dass mit linearen Analysemethoden nur bestimmte Teilespektren von sinusförmigen Oszillatoren studiert werden können. Grundsätzlich sind nur nichtlineare Schaltungen in der Lage, sinusförmige oder allgemeinere periodische Schwingungen zu erzeugen. Daher sollen einige grundlegende Aspekte nichtlinearer Netzwerkmodelle für Oszillatorschaltungen vorangestellt werden. Weitere Einzelheiten findet man bei Mathis und Russer [190].

Betrachten wir nun die Schaltung des Meissner-Oszillators. Die Klemmen 1,2 stellen den Eingang, die Klemmen 3,4 den Ausgang des aus einem Transistor gebildeten Verstärkers dar. Im Kollektorkreis des Transistors liegt ein Schwingkreis. Seine Spannung wird mit dem Übersetzungsverhältnis \ddot{u} über eine Koppelpule auf die Basis zurückgekoppelt. Bei der Resonanzfrequenz des Schwingkreises ist $\ddot{u} S R$ die Ringverstärkung. Von einer kleinen Störspannung U_{St} angefacht, kann sich die Schaltung selbst erregen, wenn die Polung der Koppelpule die verstärkte Spannung phasenrichtig zu U_{St} addiert. Dazu ist notwendig, dass die Ringverstärkung ≥ 1 ist. Die genaueren Zusammenhänge erkennt man wieder aus der Betrachtung der charakteristischen Gleichung für kleine Störungen. Die Abb. 40.29 zeigt den vollständigen Stromkreis unter Benutzung des vereinfachten Kleinsignalersatzbildes des Transistors, wobei eine kleine Störspannung U_{St} im Basiskreis angenommen ist.

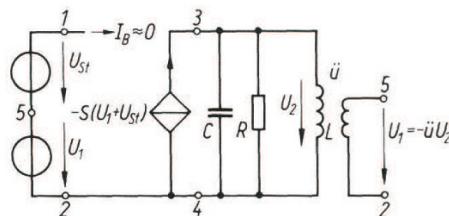


Abbildung 40.29. Kleinsignalersatzbild des Meissner-Oszillators

Natürlich besitzt ein Oszillatator keine anregende Spannung U_{St} , auch wenn diese Vorgehensweise den Anschwingvorgang nachzubilden scheint. Die eigentliche Bedeutung dieses Verfahrens besteht in der Ermittlung der Systemeigen-

genwerte des linearisierten Oszillatornetzwerkes. Wie bei der Untersuchung der absoluten Stabilität eines linearen Systems mit Hilfe der BIBO-Stabilität muss vollständige Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems vorausgesetzt werden; vgl. Abschnitt 40.4.4. Im Fall des linearisierten Oszillatornetzwerkes müssen diese Eigenschaften bezüglich der Spannungen U_2 und U_{St} gelten, was bei den in der Literatur diskutierten Oszillatorschaltungen praktisch immer erfüllt ist, jedoch üblicherweise ohne nähere Hinweise stillschweigend vorausgesetzt wird.

Für die Spannung U_2 erhält man mit Hilfe einer einfachen Netzwerkanalyse

$$U_2 = -SR(U_1 + U_{St}) \frac{sL/R}{1 + sL/R + s^2LC}. \quad (40.56)$$

Die über die Koppelpule ausgekoppelte Spannung U_1 ist ein Bruchteil \ddot{u} von U_2 nach

$$U_1 = -\ddot{u}U_2. \quad (40.57)$$

Durch Auflösen nach U_2 gewinnt man

$$\left(1 + s\frac{L}{R}(1 - \ddot{u}SR) + s^2LC\right)U_2 = -s\frac{L}{R}SRU_{St}. \quad (40.58)$$

Die charakteristische Gleichung lautet daher

$$\left(1 + s\frac{L}{R}(1 - \ddot{u}SR) + s^2LC\right) = 0. \quad (40.59)$$

Sie hat die Nullstellen

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC}(1 - \ddot{u}SR) \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}(1 - \ddot{u}SR)\right)^2}. \quad (40.60)$$

Selbsterregung kann eintreten, wenn der Realteil der Nullstellen $s_{1,2}$ verschwindet, d. h. wenn Schwingbedingung

$$\ddot{u}SR \geq 1 \quad (40.61)$$

erfüllt ist. Würde man die Koppelpule umpolen, dann würde sich in Gl. (40.60) das Vorzeichen von \ddot{u} umkehren und der reelle Teil von p wäre immer negativ. Die Schaltung wäre (absolut) stabil.

Ist dagegen die Schwingbedingung (40.61) erfüllt, dann wird das Verhalten einer Oszillatorschaltung in der schaltungstechnischen Literatur (z. B. Tietze und Schenk [276]) meistens so erläutert, dass dann jede kleine Störung U_{St} zu einer aufklingenden Schwingung mit wachsender Amplitude führt. Das Anwachsen der Amplitude wird durch die Krümmung der Röhrenkennlinien begrenzt. Diese bewirkt, dass die mittlere Steilheit $S(U_2)$ mit wachsender Amplitude sinkt, bis schließlich

$$\ddot{u}RS(U_2) = 1 \quad (40.62)$$

wird. Dann bleibt die Amplitude der Oszillatorschwingung konstant, ihre Kreisfrequenz ist unter den vereinfachten Annahmen

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (40.63)$$

die Resonanzfrequenz des LC-Schwingkreises.

Durch Berechnen von $A = \dot{u}SR$ kann man sich davon überzeugen, dass die Gl. (40.55) zu den gleichen Nullstellen s_1 und s_2 führt:

$$v_0 = -SR \frac{sL/R}{1sL/R + s^2LC}, \quad (40.64)$$

$$r_0 = -\ddot{u}. \quad (40.65)$$

Die *allgemeinen Bedingungen für die Erzeugung von Sinusschwingungen durch Rückkopplung* lassen sich daher folgendermaßen formulieren:

1. Zwecks Erzeugung einer bestimmten Kreisfrequenz ω_1 muss die charakteristische Gleichung (40.55) für „kleine“ Schwingungsamplituden ein komplexes Nullstellenpaar von der Form

$$s_{1,2} = \sigma \pm j \sqrt{\omega_1^2 - \sigma^2} \quad (40.66)$$

aufweisen, wobei σ positiv und möglichst klein gegen ω_1 sein soll.

2. Damit sich ein stationärer Schwingungszustand einstellt, muss mit wachsender Schwingungsamplitude das Wuchsmaß σ für die Grundschwingung auf Null abnehmen.

Das Anschwingverhalten von Oszillatorschaltungen mit Hilfe des linearen Netzwerkmodells wurde schon zu Beginn der Oszillatorschaltungstechnik verwendet. Eine erste systematische Ableitung einer Schwingbedingung findet man in Arbeiten von Vallauri aus dem Jahre 1917. Danach wurde zahlreiche Varianten (z. B. die bekannte *Barkhausensche Schwingbedingung* aus dem Jahre 1919) entwickelt und publiziert; vgl. Mathis [185]. Eine kurze Darstellung der verschiedenen Schwingbedingung und einen Vergleich findet man bei Kurz und Mathis [159].

Die auf der Grundlage der linearisierten Schaltung abgeleiteten Selbsterregungs-Bedingungen machen jedoch nicht klar, dass ein (asymptotisch) stabiles oszillatorisches Verhalten eines Oszillators nur möglich ist, wenn eine Nichtlinearität in die Beschreibung der Schaltung einbezogen wird. Anstatt eine Schwingbedingung mit Hilfe der linearen Netzwerktheorie abzuleiten, präsentierte van der Pol [283] im Jahre 1920 erstmals eine nichtlineare Differentialgleichung für den Meissner-Oszillator vor, aus er das Verhalten dieses Oszillatortyps analysieren konnte; weitere Oszillatortypen (Colpitts- und Hartley-Oszillator) behandelt Joos [138] wenig später. Die van der Polsche Differentialgleichung ist eng verwandt mit einer Differentialgleichung, die Rayleigh

in den 1880er Jahren abgeleitet hatte. Tatsächlich war die von der Polsche Differentialgleichung in Form einer Energiebilanzgleichung einschließlich einer Näherungslösung schon in einer Arbeit von Zenneck [315] über Lichtbogenschwingungen enthalten; vgl. Mathis [185], aber ihre Bedeutung erkannte erst van der Pol, der auf der Basis von mathematischen Methoden der Theoretischen Physik neue Lösungsverfahren entwickelte und damit ein neues Gebiet der angewandten Mathematik eröffnete; eine Übersicht gibt Guckenheimer [96]. Erst ab Ende der 1920er Jahren konnten Mandelstam, Papalexi und vor allem Andronov in einer Reihe von Arbeiten eine vollständige Theorie von nichtlinearen Oszillatoren entwickeln, die in umfassender Form in einer Arbeit aus dem Jahre 1935 beschrieben wurde [176]. Leider sind diese Ergebnisse, die auf den Arbeiten von Poincaré basierten und in das sogenannte Andronov-Hopf Theorem (Hopf hat diesen Satz in Unkenntnis im Jahre 1944 im Zusammenhang mit hydrodynamischen Studien erneut abgeleitet) mündeten, lange Zeit nicht beachtet worden; vgl. Mathis [185]. Auf weitere Einzelheiten zur Geschichte der Methoden der Analyse von Oszillatorschaltungen geht Mathis [185] sein.

Die obengenannte „lineare“ Vorgehensweise steht in engem Zusammenhang mit dem Andronov-Hopf Theorem, das die Eigenschaften von Differentialgleichungen charakterisiert, die von einem Systemparameter λ (z. B. ein Lastwiderstand) abhängen. Wenn die Schwingbedingung für einen bestimmten Wert λ erfüllt werden kann, ist das System *nicht-hyperbolisch*, d. h. das linearisierte System besitzt in dem betrachteten Arbeitspunkt (Gleichgewichtszustand) Eigenwerte auf der imaginären Achse (mit verschwindendem Realteil). Damit ist die Schwingbedingung eine *notwendige* Voraussetzung dafür, dass bei einem Oszillator stabile Schwingungen (man spricht von einem *Grenzzyklus*) auftreten können. Nur im nicht-hyperbolischen Fall können bei (einen Oszillator beschreibenden) nichtlinearen Differentialgleichungen Lösungen – wie Grenzzyklen – auftreten, die nicht schon durch das in einem Arbeitspunkt linearisierte System i. w. festgelegt sind; vgl. Theorem von Hartman und Grobman (z. B. Arrowsmith und Place [9]). Diese Bedeutung der Schwingbedingung (z. B. in der Form der Barkhausenschen Schwingbedingung) ist vom Standpunkt der Theorie mathematischer dynamischer Systeme naheliegend, jedoch findet man sie in der schaltungstechnischen Literatur erstmals bei Mathis [186]. Stattdessen wird die Verwendung der Kleinsignalansätze und der Einsatz der Wechselstromrechnung meistens damit begründet, dass die Schwingungsform bei vielen Oszillatoren „fast“ sinusförmig ist, was für die Analyse nicht-hyperbolischer Systeme offensichtlich bedeutungslos ist.

Neben der Schwingbedingung muss noch eine *Transversalitätsbedingung* (auf diese Bedingung wurde schon von Strecker [271] hingewiesen) erfüllt sein. Somit können aufgrund der gewünschten technischen Eigenschaften elektronischer Oszillatoren nur Grenzzyklen dem oszillatorischen Verhalten solcher Systeme entsprechen. Eine umfassende Übersicht über die Methoden der Oszillatoranalyse geben Mathis und Russer [190]. Ein illustratives Beispiel für die Analyse einer Oszillatorschaltung mit einer Tunnelelektrone (Tunneldiode) nach dem Andronov-

Hopf Theorem findet man bei Mees [194]; vgl. auch Kurz und Mathis [159] und Mathis und Russer [190].

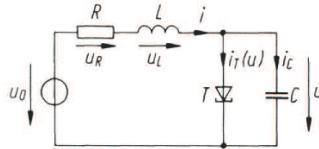


Abbildung 40.30. Netzwerkmodell eines Tunneldioden-Oszillators

Beispiel: Die nichtlinearen Gleichungen eines Tunneldioden-Oszillators in Abb. 40.30 können in folgender Weise formuliert werden (wenn $R \approx 0$)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (1/C)g(U_0 - \tilde{u}) \end{pmatrix} \quad (40.67)$$

wobei $\tilde{u} := U_0 - u$; die Tunneldioden-Kennlinie wird in Abb. 40.31 gezeigt. Die Gleichgewichtslösung (Arbeitspunkt) kann sehr leicht berechnet werden

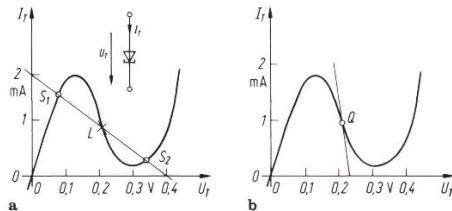


Abbildung 40.31. Kennlinie einer Tunneldiode

$$i^0 = g(U_0), \quad \tilde{u}^0 = 0 \quad (u = U_0). \quad (40.68)$$

Man kann die linearisierten Gleichungen (Kleinsignalersatzbild) ableiten um die Gleichgewichtslösung ableiten, wobei die Kleinsignalströme und -spannungen nicht unterschieden werden; g' ist die Ableitung von g nach dem Argument. Transformiert man diese Gleichungen in den Frequenzbereich, dann erhält man die folgende charakteristische Gleichung (des entsprechenden Eigenwertproblems)

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/L \\ -1/C & -(1/C)g'(U_0) - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{C}g'(U_0)\lambda + \frac{1}{LC} = 0. \quad (40.69)$$

Die Nullstellen dieser quadratischen Gleichung lauten

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2C}g'(U_0) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2C}g'(U_0)\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (40.70)$$

Wir erhalten rein imaginäre Eigenwerte und damit die Schwingbedingung

$$\frac{1}{2C}g'(U_0) = 0. \quad (40.71)$$

In diesem Fall haben wir die Oszillatorkreisfrequenz $\omega_0^2 = 1/(LC)$. Mit Hilfe der Tunneldioden-Kennlinie erkennt man, dass die Schwingbedingung erfüllt ist, wenn der Arbeitspunkt im Maximum oder im Minimum liegt, wo $g'(U_0)$ verschwindet. An der Kennlinie einer Tunneldiode in Abb. 40.31 erkennt man, dass das Vorzeichen des Realteils des Eigenwertpaars wechselt und somit von der linken in die rechte Halbebene der komplexen Ebene \mathbb{C} übertritt; damit ist die notwendige Transversalitätsbedingung erfüllt. Schließlich muss nach dem Andronov-Hopf-Theorem noch die asymptotische Stabilität für diejenigen U_0 erfüllt sein, in denen die Schwingbedingung erfüllt ist; das kann man in diesem Fall zeigen. Weitere Einzelheiten und zusätzliche Literatur findet man bei Mathis und Russer [190]. Ein alternative Vorgehensweise im Frequenzbereich („Frequenz-Hopf“) wurde von Mees [194] vorgeschlagen.

A

Mathematische Felder

A.1 Differentialoperatoren und Rechenregeln

In diesem Anhang soll noch einmal in detaillierter Weise auf den Unterschied zwischen physikalischen und mathematischen Feldern hingewiesen werden. Auf die Einzelheiten der Modellbildung physikalischen Felder gehen Falk und Ruppel [76] und Jodl [137] näher ein. Etwas unscharf ausgedrückt sprechen wir von einem nichtlokalisierten physikalischen System, wenn sämtliche physikalischen Eigenschaften nicht nur in einer „kleinen Umgebung“ eines Punktes im Beschreibungsraum oder Konfigurationsraum von null verschieden sind. Der Konfigurationsraum ist in der klassischen Physik häufig der Ortsraum, aber es sind durchaus auch andere Konfigurationsräume denkbar. Beispielsweise ist der Konfigurationsraum eines elektrischen Netzwerkes ein Raum, dessen Koordinaten die Ströme und Spannungen des Netzwerkes sind; vgl. z. B. Mathis [180]. Im folgenden wollen wir uns der Einfachheit halber aber auf den 3-dimensionalen Ortsraum beschränken und ihn mit Hilfe eines \mathbb{R}^3 modellieren; in der Theorie elektromagnetischer Felder ist eine solche Beschränkung völlig ausreichend. Dabei wollen wir annehmen, dass sich diese Eigenschaften zumindest im Prinzip jeweils auf einer Messskala experimentell darstellen lassen¹. Eine Messskala kann mit Hilfe eines passenden Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ der reellen Zahlen \mathbb{R} modelliert werden. Man unterscheidet Eigenschaften eines physikalischen Systems, die mit Hilfe **einer** Messskala festgelegt werden können von denjenigen, für die **mehrere** Messskalen benötigt werden. Daraus ergibt sich, dass bestimmte Systemeigenschaften mit *Skalaren* und andere mit *Vektoren* charakterisiert werden müssen. Insbesondere bei den obengenannten nichtlokalisierten physikalischen Systemen, die man auch als verteilte Systeme oder physikalische Felder bezeichnen kann, werden die entsprechenden Eigenschaften vektoriell repräsentiert. Daher werden wir im folgenden auf die wichtigsten Aspekte eingehen.

¹ vgl. Gerlich [88]

Betrachtet man nichtlokalierte physikalische Systeme, dann verwenden wir geeignete Funktionen oder Abbildungen, die auf Teilmengen des Ortsraummodells \mathbb{R}^3 definiert sind, um die skalaren oder richtungsabhängigen Eigenschaften solcher Systeme mathematisch zu charakterisieren. Dabei handelt es sich reellwertige und vektorwertige Funktionen, die den nichtlokalisierten Systemen zugeordnet sind. Einige Beispiele seien genannt

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: skalare Eigenschaften (z.B. Massenverteilung, Energie, etc.)
2. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$: vektorwertige Eigenschaften (z.B. Kraft, Geschwindigkeitsverteilung, etc.)

Die begriffliche Unterscheidung von physikalischen und mathematischen Feldern, die auf Falk zurück geht (vgl. Falk [78], S. 104 und Falk und Ruppel [76], S. 133ff), sollte unbedingt beachtet werden, da es sonst schwierig wird, zwischen physikalischem System und seinem mathematischen Modell zu unterscheiden. In diesem Sinne handelt es sich bei der Elektrostatik, der Theorie des quasistationären Feldes und den anderen Teiltheorien der Maxwell'schen Theorie (einschließlich der vollständigen Theorie) immer um mathematische Beschreibungen desselben *physikalischen* elektromagnetischen Feldes. Je nach Art der betrachteten Anwendungen wird allerdings mit unterschiedlichen *mathematischen* Feldern und das heißt mit *unterschiedlichen* mathematischen Modellen gearbeitet. Zumindest in älteren Lehrbüchern und Monographien über das „physikalische“ elektromagnetische Feld wird eine solche Unterscheidung nicht konsequent eingehalten. Diese Identifikation von „physikalischer Wirklichkeit“ und „physikalischem Modell“ findet man auch in anderen Bereichen der Naturbeschreibung. Wie bei der Maxwell'schen Theorie elektromagnetischer Felder erklärt sich dies häufig durch den großen Erfolg des entsprechenden mathematischen Modells, denn man macht dabei keine Fehler, solange man den Anwendungsbereich eines Modells einhält. Die oder der an diesen, in die Erkenntnistheorie reichenden Fragen interessierte Leserin bzw. Leser kann insbesondere auf die hochinteressanten Ausführungen von Ludwig [171] verwiesen werden.

Bei vielen physikalischen Systemen und insbesondere bei physikalischen Feldern interessiert man sich für die Änderungen ihrer Eigenschaften, welche durch skalare oder vektorielle mathematische Felder beschrieben werden. Änderungen mathematischer Felder, die gewisse mathematische Anforderungen erfüllen (z. B. Differenzierbarkeit), werden im Rahmen der Analysis untersucht, die in diesem Zusammenhang als „Vektoranalysis“ bezeichnet wird. Eine gute Einführung in die Vektoranalysis insbesondere im Hinblick auf die Theorie elektromagnetischer Felder gibt das Lehrbuch von Wunsch und Schulz [310]. Eine mathematische Einführung in die Vektoranalyse findet man z. B. bei Meyberg und Vachenauer [201]. Die allgemeinere Tensorrechnung wird einführend in dem Lehrbuch von Lippmann [168] vorgestellt. Wenn man an einer breiten und tiefergehenden Darstellung der Vektor- und Tensorrechnung interessiert ist, sollte man jedoch immer noch den meisterhaft geschriebenen

Klassiker von Duschek und Hochrainer [69] berücksichtigen, der im Teil III auch die Theorie elektromagnetischer Felder behandelt.

Die vor allem auf Heaviside und Gibbs zurückgehende Vektoranalysis ist aus heutiger mathematischer Sicht inkonsistent und wenig elegant, wie man den lesewerten Ausführungen des Regensburger Mathematikers Jähnich in seiner „Vektoranalysis“ [134] sowie der Monographie von Marsden und Tromba [177]) entnehmen kann, aber sie soll dennoch in diesem Buch verwendet werden. Alternative Darstellungen, die mit Hilfe (orientierter) Differentialformen formuliert werden, sind jedoch verfügbar; vgl. u. a. die Monographien von Meetz und Engl [195] sowie von Hehl [108] oder auch Russer [253]. Inzwischen konnten u. a. Bossavit [36], Hiptmair [121] nachweisen, dass man von diesem geometrischen Standpunkt aus gesehen auch neuartige Einblicke in die Numerik elektromagnetischer Felder gewinnen kann. Diese Aspekte gehen jedoch weit über den Rahmen dieses einführenden Buches hinaus, und wir müssen daher auf diese Literatur verweisen.

Betrachtet man ein (mathematisches) skalares Feld oder kurz auch Skalarfeld $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, wobei φ hinreichend oft differenzierbar sein soll, lassen sich Änderungen von φ in einem Punkt $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ mit Hilfe der Taylorreihe

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\tilde{\mathbf{x}})(x_1 - \tilde{x}_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\tilde{\mathbf{x}})(x_2 - \tilde{x}_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(\tilde{\mathbf{x}})(x_3 - \tilde{x}_3) + \\ &+ \text{Restglied}(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{A.1}$$

angeben, wobei das Restglied nicht explizit angegeben wurde, da wir zunächst nur an der linearen Approximation im Sinne der ersten Ableitung interessiert sind. Die drei Terme von Gl. (A.1), die in der zweiten Zeile stehen, werden als Differential $d\varphi(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ von φ an der Stelle $\tilde{\mathbf{x}}$ bezeichnet.

Fassen wir die Ableitungen $\partial \varphi / \partial x_i$ ($i = 1, 2, 3$) in einem (Spalten-)Vektor zusammen

$$\nabla \varphi := \text{grad } \varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix},\tag{A.2}$$

dann kann man das Differential von φ mit Hilfe des Standard-Skalarproduktes im \mathbb{R}^3 formulieren

$$\begin{aligned}d\varphi(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) &= \text{grad } \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.3}$$

In der Definitionsgleichung für den Gradientenoperator (A.2) haben wir eine häufig verwendete alternative Bezeichnung mit Hilfe des sogenannten Nabla-Symbol angegeben, die auch zur Definition des Divergenz- und Rotationsoperators herangezogen werden kann; siehe z. B. Bronstein [44].

Der Gradient $\text{grad } \varphi(\tilde{\mathbf{x}})$ kann als der Wert einer verallgemeinerten Ableitung im Punkt $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ aufgefasst werden, ebenso wie aus den Werten $\dot{\varphi}(x)$ der Ableitung $\dot{\varphi}$ einer Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ eine neue Funktion gebildet wird. Bei dem Gradient $\text{grad } \varphi$ handelt es sich um eine neues vektorielles mathematisches Feld.

Mit den partiellen Ableitungen $\partial/\partial x_i$ ($i = 1, 2, 3$), die koordinatenweise Veränderungen in x, y, z -Koordinaten anzeigen, lassen sich weitere mathematische Felder bilden, wobei man sich anstatt auf ein Skalarfeld auf ein Vektorfeld bezieht. Entsprechende Beziehungen gibt es auch in anderen Koordinatensystemen, wobei auf die entsprechende Literatur verwiesen werden soll; vgl. z. B. [310]. Eine Ausnahme bildet der Laplaceoperator, der auch in anderen Koordinatensystemen diskutiert werden soll (Abschnitt B.2).

Seien $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (mathematische) Felder mit den Komponenten $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})$ bzw. $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x})$, die in einer geeigneten Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^3$ differenzierbar sind. Dann kann man die folgenden (mathematischen) Skalar- und Vektorfelder definieren:

- Das skalare mathematische Feld *Divergenz* von \mathbf{f} :

$$(\nabla \cdot \mathbf{f})(\mathbf{x}) := (\text{div } \mathbf{f})(\mathbf{x}) := \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.4})$$

- Das vektorielle mathematische Feld *Rotation* von \mathbf{f} :

$$(\nabla \times \mathbf{f})(\mathbf{x}) := (\text{rot } \mathbf{f})(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

- Das vektorielle mathematische Feld *Vektorgradient* von \mathbf{f} bezüglich \mathbf{g}

$$(\mathbf{g} \cdot \text{grad}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \mathbf{g} \cdot \text{grad } f_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g} \cdot \text{grad } f_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{g} \cdot \text{grad } f_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Ein wesentlicher Zweck dieser Felder, welche lokale Veränderungen repräsentieren, ist die Klassifikation vektorieller mathematischer Felder:

- Ein Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennt man divergenzfrei, wenn das mathematische Feld $\text{div } \mathbf{f}$ für alle $\mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^3$ gleich null ist.
- Ein Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennt man rotationsfrei, wenn das mathematische Feld $\text{rot } \mathbf{f}$ für alle $\mathbf{x} \in G \subset \mathbb{R}^3$ gleich null ist.

In der Vektoranalysis können eine Reihe Beziehungen und Identitäten für die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation abgeleitet werden, die für die Rechnungen sehr nützlich sind und mit Hilfe derer u. a. zusammengesetzte skalare und vektorielle mathematische Felder gebildet werden können.

Dabei soll noch einmal der Standpunkt der mathematischen Feldtheorie durch die Bezeichnungen hervorgehoben werden. In den Anwendungen wird man natürlich statt von einem skalaren Feld von einem Skalarfeld sprechen und vektorielle Felder werden als Vektorfelder bezeichnet.

Die beiden wichtigsten Identitäten für mathematische Felder sind:

- Sei f ein skalares Feld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}f) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.7})$$

- Sei \mathbf{F} ein vektorielles Feld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Wie in der Differentialrechnung einer Veränderlichen gibt es auch für die Differentialoperatoren der Vektoranalysis einige nützliche Rechenregeln (wie etwa die Produktregel). Da es sich um lineare Operatoren handelt, brauchen die Rechenregeln, die sich daraus ergeben nicht besonders betont werden. Man kann folgende Produktregeln ableiten:

Seien f, g skalare Felder $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und \mathbf{F}, \mathbf{G} vektorielle Felder $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dann gilt:

- Die Produktregeln für den Gradienten:

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad}g + g \operatorname{grad}f, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= (\mathbf{F} \operatorname{grad})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \operatorname{grad})\mathbf{F} + \\ &\quad + \mathbf{F} \times \operatorname{rot}(\mathbf{G}) + \mathbf{F} \times \operatorname{rot}(\mathbf{G}), \end{aligned}$$

mit dem *Vektorgradient*: $(\mathbf{A}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{A} \operatorname{grad})(\mathbf{B}) &= \operatorname{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + \operatorname{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \operatorname{div}\mathbf{B} - \\ &\quad - \mathbf{B} \operatorname{div}\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{rot}(\mathbf{B}) - \mathbf{B} \times \operatorname{rot}(\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

- Die Produktregeln für die Divergenz:

$$\operatorname{div}(f \mathbf{F}) = f \operatorname{div}\mathbf{F} + (\operatorname{grad}f) \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -F \operatorname{rot}\mathbf{G} + G \operatorname{rot}\mathbf{F}. \quad (\text{A.12})$$

- Die Produktregeln für die Rotation:

$$\operatorname{rot}(f \mathbf{F}) = f \operatorname{rot}\mathbf{F} + (\operatorname{grad}f) \times \mathbf{F} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\mathbf{G} \operatorname{grad})(\mathbf{F}) - (\mathbf{F} \operatorname{grad})(\mathbf{G}) - \\ &\quad - \mathbf{F} \operatorname{div}\mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div}\mathbf{F}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

- Hintereinanderschaltungen von Differentialoperatoren:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f =: \Delta f, \quad (\text{A.15})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}, \quad (\text{A.16})$$

wobei Δf die Anwendung des skalaren Laplace-Operators auf f und $\Delta \mathbf{F}$ die Anwendung des vektoriellen Laplace-Operators auf \mathbf{F} ist; vgl. Anhang B.2. Auf den skalaren Laplace-Operator wird im Anhang B.1 eingegangen.

- „Vertauschungsregeln“ für die Operatoren der Vektoranalysis: (vgl. Wunsch, Schulz ([310], S. 101))

$$\operatorname{grad} \Delta \varphi = \Delta \operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{A.17})$$

$$\operatorname{div} \Delta \mathbf{F} = \Delta \operatorname{div} \mathbf{F}, \quad (\text{A.18})$$

$$\operatorname{rot} \Delta \mathbf{F} = \Delta \operatorname{rot} \mathbf{F}, \quad (\text{A.19})$$

wobei für Δ der skalare bzw. der vektorielle Laplace-Operator einzusetzen ist. Ein allgemeiner Beweis gelingt mit dem Tensorkalkül; vgl. Duschek, Hochrainer [69], Lippmann [168].

Weiterhin gibt es sogenannte *Umkehrprobleme* zu den obengenannten Identitäten: (siehe z. B. Merziger und Wirth [198])

- Sei \mathbf{f} ein vektorielles Feld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$, dann gibt es unter gewissen Einschränkungen ein \tilde{f} mit $\mathbf{f} = \operatorname{grad} \tilde{f}$. Insbesondere muss das betrachtete Gebiet G , in dem \mathbf{f} rotationsfrei ist, einfach zusammenhängend² sein.
- Sei \mathbf{f} ein vektorielles Feld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$, dann gilt unter gewissen Einschränkungen $\mathbf{f} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{f}}$.
- Sei f ein skalares Feld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dann wird nach einem vektoriellen Feld $\tilde{\mathbf{f}}$ mit $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ gesucht, das unter gewissen Einschränkungen bis auf $\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$ festgelegt.

Für viele Rechnungen sind die beiden folgenden Integralsätze sehr nützlich, wobei ein Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit bestimmten Eigenschaften betrachtet wird. Weitere Einzelheiten bezüglich dieser Eigenschaften und einen Beweis dieser Sätze auf der Grundlage der Differentialformen findet man z. B. bei Jähnich ([136]; Band 2, S. 212f); klassische Beweise für die beiden Sätze findet man z. B. bei Bourne und Kendall [39].

- *Gaußscher Integralsatz:*

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{f} dV = \iint_{\partial \mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A}, \quad (\text{A.20})$$

wobei $\partial \mathcal{V}$ die Berandung des Volumens \mathcal{V} ist.

² Ein Gebiet G ist einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve K in G auf einen Punkt aus G zusammenziehen lässt.

- *Stokes'scher Integralsatz:*

$$\iint_{\mathcal{A}} \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial\mathcal{A}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{A.21})$$

wobei $\partial\mathcal{A}$ die Berandung der Fläche \mathcal{A} ist. Mit Hilfe dieses Satzes kann man folgende Beziehung nachweisen

$$\iint_{\mathcal{A}} (d\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{f} = \oint_{\partial\mathcal{A}} d\mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (\text{A.22})$$

die in der Theorie des stationären Magnetfeldes nützlich ist. Der Nachweis geht von einem Linienintegral aus, wobei das Vektorfeld $\mathbf{g} := \mathbf{f} \times \mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$) zwischendurch als Abkürzung eingeführt wird, und nutzt dann den Stokes'schen Satz in Standardform. Weiterhin werden einige einfache Rechenregeln der Vektoralgebra und Vektoranalysis verwendet. Insbesondere werden Vektor- und Operatorvarianten des Spatproduktes $\mathbf{u}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ benutzt.

Die gewünschte Beziehung ergibt sich dann aufgrund des folgenden Rechenganges

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oint_{\partial\mathcal{A}} d\mathbf{r} \times \mathbf{f} &= \oint_{\partial\mathcal{A}} (d\mathbf{r} \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{a} = \oint_{\partial\mathcal{A}} (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint_{\partial\mathcal{A}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{A}} \operatorname{rot} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} \\ &= \iint_{\mathcal{A}} d\mathbf{A} \cdot (\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{a})) \\ &= \iint_{\mathcal{A}} (d\mathbf{A} \times \nabla) \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{a}) = \iint_{\mathcal{A}} ((d\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot \iint_{\mathcal{A}} (d\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt insbesondere für $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, woraus die Behauptung (A.22) folgt.

Weitere Hilfen und Formeln zur höheren Mathematik und insbesondere zur Vektoranalysis finden die interessierten LeserInnen bei Merziger et al. [199].

A.2 Das Satz von Helmholtz

Nach den allgemeinen Beziehungen der Vektoranalysis wollen wir schließlich noch auf einen Satz eingehen, der für den Aufbau Theorie elektromagnetischer Felder eine zentrale Bedeutung besitzt. Im Grundsatz besagt dieser Satz, dass ein vektorielles Feld (bis auf ein konstantes Feld) in eine Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Teils zerlegt werden kann. Eine erste Fassung des Satzes besagt also:

Zu jedem im \mathbb{R}^3 stetig differenzierbaren vektoriellen Feld \mathbf{F} existiert ein skalares Feld Ω und ein vektorielles Feld \mathbf{A} , so dass gilt

$$\mathbf{F} = \text{grad}\Omega + \text{rot}\mathbf{A}, \quad (\text{A.23})$$

wenn $\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\|$ für $\|\mathbf{r}\| \gg 0$ wie $1/\|\mathbf{r}\|^2$ abfällt.

Der Nachweis dieser Aussage ist nicht sehr schwierig. Man gibt die Divergenz von \mathbf{F} vor: $\text{div}\mathbf{F} = f(\mathbf{r})$ und verwendet sie als rechte Seite einer Poissonschen PDGl.

$$\Delta\Omega = f(\mathbf{r}) = \text{div}\mathbf{F}, \quad (\text{A.24})$$

für die unter der Voraussetzung, dass $\Omega(\mathbf{r})$ für $\|\mathbf{r}\| \gg 0$ wie $1/\|\mathbf{r}\|$ abfällt, eine spezielle Lösung existiert

$$\Omega(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{f(\mathbf{r})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \quad (\text{A.25})$$

Wegen $\Delta\Omega = \text{div}\text{grad}\Omega$ erhält man aus Gl. (A.24)

$$\text{div}(\mathbf{F} - \text{grad}\Omega) = 0. \quad (\text{A.26})$$

Aus dem zweiten obengenannten Umkehrproblem folgt, dass ein vektorielles Feld \mathbf{A} existiert mit

$$\mathbf{F} - \text{grad}\Omega = \text{rot}\mathbf{A}, \quad (\text{A.27})$$

womit der Satz bewiesen wäre.

Eine explizite Darstellung von \mathbf{A} ergibt sich, wenn man die Rotation von \mathbf{F} mit $-\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{f}$ vorgibt und \mathbf{f} als rechte Seite einer Vektor-Poisson-PDGl. verwendet. Man erhält dann folgende Integraldarstellung für \mathbf{A}

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{f}(\mathbf{r})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \quad (\text{A.28})$$

Diese Form des Satzes von Helmholtz findet man in der Literatur sehr häufig (z. B. Bourne, Kendall [39]), aber sie ist selbst für die Anwendungen in der Theorie elektromagnetischer Felder zu einschränkend. Man muss nämlich fordern, dass \mathbf{F} im Unendlichen wie $1/\|\mathbf{r}\|^2$ gegen null geht. Das ist aber, worauf Blumenthal [33] in einer Arbeit aus dem Jahre 1905 hingewiesen hat, „außerordentlich beschränkend und besonders auch deshalb unzulässig, weil bei einem z. B. durch Differentialgleichungen definierten Felde a priori nichts über die Ordnung des Verschwindens ausgesagt werden kann.“³ Daher bewies Blumenthal eine Form des Satzes von Helmholtz, der ausschließlich auf das Verschwinden des vektoriellen Feldes mitsamt sämtlicher Ableitungen im Unendlichen begründet ist. Das hat auch den Vorzug, dass man diese Voraussetzung physikalisch im Sinne einer energetischen Deutung interpretieren kann.

³ Einen Hinweis auf diese Arbeit findet man in dem Hydrodynamik-Band von Sommerfeld ([265], S. 142f)

B

Der Laplace-Operator

B.1 Skalare Felder

Bei der Ableitung der skalaren Potenzialgleichungen wird für die aufeinander folgende Anwendung der beiden Operatoren div und grad als Abkürzung das Zeichen $\Delta(\cdot) := \text{div grad}(\cdot)$ verwendet. Führt man konkrete Koordinaten ein, so erhält man für die Laplacesche Potenzialgleichung

$$\Delta\varphi = 0 \quad (\text{B.1})$$

eine partielle Differentialgleichung in den entsprechenden Koordinaten. Beispielsweise ergeben sich in x, y, z -Koordinaten

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Wählt man *Zylinderkoordinaten* (r, α, z) , dann ergibt sich

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (\text{B.3})$$

während man in *Kugelkoordinaten* (r, ϑ, α) die folgende Form erhält

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (\text{B.4})$$

Ableitung: zu diesen Ausdrücken gelangt man, wenn man den Gradienten durch Komponenten ausdrückt, in x, y, z -Koordinaten gemäß Gl.(A.2):

$$\text{grad}_x\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (\text{B.5})$$

Betrachtet man diese als die Komponenten eines Vektors und wendet den Divergenz-Operator in x, y, z -Koordinaten an

$$\operatorname{div}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\cdot)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\cdot)_z}{\partial z}, \quad (\text{B.6})$$

dann ergibt sich die Laplace-PDG. in x, y, z -Koordinaten.

In entsprechender Weise geht man bei Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{B.7})$$

und bei Kugelkoordinaten vor

$$\operatorname{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \operatorname{grad}_\vartheta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, \quad \operatorname{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (\text{B.8})$$

Anschließend muss der Divergenz-Operator in den entsprechenden Koordinaten angewendet werden.

B.2 Vektorielle Felder

In Abschnitt 18 wie auch in weiteren Abschnitten wird der Laplace-Operator Δ auf ein vektorielles mathematisches Feld $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ angewendet. Bei der Bildung der entsprechenden Differentialquotienten muss beachtet werden, dass bei (differentiellen) Änderungen von \mathbf{A} auch die Einheitsvektoren des verwendeten Koordinatensystems berücksichtigt werden müssen. Bezeichnen wir beispielsweise die Zylinderkoordinaten mit r, α, z sowie die Einheitsvektoren mit $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha$ und \mathbf{e}_z , dann kann man ein Vektorfeld \mathbf{A} in diesen Koordinaten in folgender Weise darstellen

$$\mathbf{A}(r, \alpha, z) = A_r \mathbf{e}_r + A_\alpha \mathbf{e}_\alpha + A_z \mathbf{e}_z. \quad (\text{B.9})$$

Anhand der partiellen Ableitung nach der Koordinate α soll die Berücksichtigung der Einheitsvektoren demonstriert werden; grundsätzlich ist der folgende Ausdruck auszuwerten

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha} = \mathbf{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} A_r + \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} A_\alpha + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \alpha} A_z. \quad (\text{B.10})$$

Die Frage ist, was unter den Differentialquotienten der Einheitsvektoren (z.B.

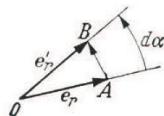


Abbildung B.1. Zur Differentiation eines Einheitsvektors

$\partial \mathbf{e}_r / \partial \alpha$) zu verstehen ist. Die Abb. B.1 veranschaulicht als Beispiel, wie die Vergrößerung des Winkels um $d\alpha$ der Einheitsvektor \mathbf{e}_r von der Lage \overline{OA} in die Lage \overline{OB} gedreht wird. Der neue Vektor \mathbf{e}'_r unterscheidet sich von \mathbf{e}_r um den Vektor \overline{AB} . Nun kann man formal schreiben

$$\mathbf{e}'_r \approx \mathbf{e}_r + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (\text{B.11})$$

Der Vektor \overline{AB} ist also näherungsweise durch $(\partial \mathbf{e}_r / \partial \alpha) d\alpha$ gegeben. Um im Rahmen einer Plausibilitätsbetrachtung Betrag und Richtung dieses Vektors zu ermitteln, gehen wir von der für kleine Winkeländerungen $d\alpha$ näherungsweise Gültigkeit der folgenden Beziehung aus

$$\overline{AB} = \mathbf{e}'_r - \mathbf{e}_r \approx \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} d\alpha = \mathbf{e}_\alpha d\alpha. \quad (\text{B.12})$$

Nach Betragsbildung folgt daraus sofort

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} \right\| = 1, \quad (\text{B.13})$$

während die Richtung von $\partial \mathbf{e}_r / \partial \alpha$ die von \mathbf{e}_α ist. Daher gilt

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \alpha} = \mathbf{e}_\alpha. \quad (\text{B.14})$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{e}_r}{\partial \alpha^2} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\alpha}{\partial \alpha^2} = -\mathbf{e}_\alpha. \quad (\text{B.15})$$

So ergibt sich allgemein für beliebige Koordinatensysteme mit den 3 senkrecht aufeinander stehenden Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ für ein Vektorfeld \mathbf{A} :

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \Delta A_1 + \mathbf{e}_2 \Delta A_2 + \mathbf{e}_3 \Delta A_3 + \mathbf{K}. \quad (\text{B.16})$$

Dabei bedeutet A_1, A_2, A_3 die 3 skalaren Koordinatenwerte des Vektorfeldes \mathbf{A} , auf die der Laplace-Operator skalar angewendet wird. Das Vektorfeld \mathbf{K} ist ein durch die Krümmung der Koordinaten bedingter Vektor.

Für *xyz-Koordinaten* $\mathbf{x} = (x, y, z)$ folgt:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (\text{B.17})$$

Für *Zylinderkoordinaten* $\mathbf{x} = (r, \alpha, z)$ ergibt sich:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_r \left(-\frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{A_\alpha}{r^2} \right), \quad (\text{B.18})$$

und für *Kugelkoordinaten* $\mathbf{x} = (r, \vartheta, \alpha)$ wird

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(\mathbf{x}) = & \mathbf{e}_r \left(-\frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \tan \vartheta} A_\vartheta - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) + (\text{B.19}) \\
 & + \mathbf{e}_\vartheta \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta \tan \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \right) + \\
 & + \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta \tan \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} - \frac{2}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\alpha \right).
 \end{aligned}$$

Weitere Einzelheiten zur Darstellung des Laplace-Operators in allgemeinen Koordinatensystemen findet man z. B. in den Monographien von Moon und Spencer [203] oder von Wunsch und Schulz [310].

Literatur

1. Abraham, M.; A. Föppl: Theorie der Elektrizität, Bd. I (5. Aufl.), B.G. Teubner, Leipzig 1917
2. Abramowitz, M.; I. E. Stegun: Handbook of Mathematical Functions. John Wiley& Sons, New York 1993
3. Adler, R.B.; L.J. Chu; R.M. Fano: Electromagnetic energy, transmission and radiation. John Wiley, New York 1960
4. Alt, H. W.: Lineare Funktionalanalysis - Eine anwendungsorientierte Einführung 5. Aufl. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 2006
5. Andronov, A.A., A.A. Witt, S.E. Khaikin, Theory of Oscillators. Pergamon, Oxford, 1966 (erste Auflage 1937 in russischer Sprache)
6. Arnol'd, V.I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen(2. Aufl., Übers. aus d. Russ.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2001
7. Armstrong, E. H.: Some recent developments in the audion receiver. Proc. IEEE Vol. 49, August 1963, S. 1083-1097. Reprint from: Proc. Inst. Radio Engrs. 3, 1915, S. 215-247
8. Arnold, L., Random dynamical systems. Berlin-Heidelberg-New York 1998
9. Arrowsmith, D.K.; C.M. Place: An Introduction to Dynamical Systems. Cambridge University Press. Cambridge - New York - Port Chester - Melbourne - Sydney
10. Ascher, U. M.; L. R. Petzold: Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM, 1998
11. Attia, J. O.: PSPICE and MATLAB. CRC press, Boca Raton - London - New York 2002
12. Baerwald, H.: Der Geltungsbereich der Strecker-Feldkellerschen Matrixgleichungen von Vierpolsystemen. ENT 9 (1932), S. 31
13. Bai, C.: Scanning Tunneling Microscopy and Its Applications. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg 2000
14. Barkhausen, H.: Das Problem der Schwingungserzeugung mit besonderer Berücksichtigung schneller elektrischer Schwingungen. Dissertation, Göttingen 1907
15. Balabanian, N.; T. A. Bickart; S. Seshu: Electrical Network Theory. John Wiley & Sons, Inc., New York 1969
16. Becker, R.: Unipolar-Induktion als Folge des relativistischen Zeitbegriffs. Die Naturwissenschaften 20 (1932), S. 917-919

17. Becker, R.: Theorie der Elektrizität. Band 1, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1949
18. Becker, K.-D.: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1974
19. Belevitch, V.: Four-Dimensional Transformations of 4-Poles Matrices with Applications to the Synthesis of Reactance 4-Poles. IRE CT-3 (1956), S. 105-111
20. Belevitch, V.: Classical network theory. Holden Day, San Francisco 1968
21. Belevitch, V.: On the realizability on non-rational positive real functions. Intern. Journ. Circuit Theory and its Appl. 1 (1973), S. 17-30
22. Behnke, H.; Sommer, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (Studienausg. d. 3. Aufl.). Springer-Verlag 1976, Berlin - Heidelberg
23. Behnke, J.; W. Muschik; M. Päsler: Ringvorlesung zur theoretischen Physik: Theorie der Elektrizität. F. Vieweg+Sohn, Braunschweig 1971
24. Berg, L.: Operatorenrechnung - I. Algebraische Methoden. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972
25. Berg, L.: Operatorenrechnung - II. Funktionentheoretische Methoden. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974
26. Bergeron, L.: Variations de régime dans le conduits d'eau. C. R. Trav. Soc. Hydrotechn. France. 31 (1932), S. 605-623
27. Bergeron, L.: Propagation d'ondes le long des lignes électriques. Méthodes graphique. Bull. Soc. Franç. Electr. 5. Ser., 7 (1937), S. 979-1004
28. Bergeron, L.: D coup de belier en hydraulique et coup de foudre en électricité. Dunod, Paris 1949 (Engl. Übersetzung: Water hammer in hydraulics and wave surges in electricity. Wiley, New York 1961)
29. Bersch, H.-J.; K.H. Wiederkehr: Klassische Experimente der Physik. Rowohlt Taschenbuchverlag, Hamburg 1970; 48
30. Bhushan, B.: Tribology and Mechanics of Magnetic Storage Devices. Springer-Verlag, Berlin - New York 1996
31. Bissell, C.: Karl Küpfmüller: a German contributor to the early development of linear systems theory. Int. J. Control, Vol. 44, No. 4 (1986), S. 977-989
32. Bloch, A.: On Methods for the Construction of Networks Dual to Non-Planar Networks. Proc. Phys. Soc. 58 (1946), S. 677-694
33. Blumenthal, O.: Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder. Mathem. Annalen 61 (1905), S. 235-250
34. Böhmer, E.: Elemente der angewandten Elektronik. 11. Aufl., Friedr. Vieweg& Sohn, Braunschweig - Wiesbaden 1998
35. Bopp, F.: Prinzipien der Elektrodynamik. Zeitschr. f. Phys. 169 (1962), S. 45-52
36. Bossavit, A.: Computational Electromagnetism. Academic Press, San Diego - London 1998
37. Bosse, G.; G. Wiesemann: Grundlagen der Elektrotechnik I + II. 4. Aufl., VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1996
38. Bosse, G.; A. Glaab: Grundlagen der Elektrotechnik III. 3. Aufl., VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1996
39. Bourne, D. E.; P. C. Kendall: Vektoranalysis. B. G. Teubner, Stuttgart 1968
40. Braess, D.: Finite Elemente. Springer Verlag, Berlin 1992
41. Brand, H.: Schaltungslehre linearer Mikrowellennetzwerke. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1970
42. Branin, F.H.: Transient analysis of lossless transmission lines. Proc. IEEE 55 (1967), S. 2012-2013

43. Breisig, F.: Theoretische Telegraphie. Vieweg Verlag, Braunschweig 1910
44. Bronstein, I. N.; K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. 25. Aufl. (G. Grosche, V. Ziegler, D. Ziegler), B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart - Leipzig 1991
45. Cauer, W.: Ideale Transformatoren und lineare Transformationen. Elektr. Nachr.-Techn. (ENT) 9 (1932), S. 157-174
46. Cauer, W.: Topologische Dualitätssätze und Reziprozitätstheoreme. Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 349-350
47. Cauer, W.: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. I. Band, Akademische Verlagsgesellschaft Becker& Erler, Leipzig 1942
48. Cauer, W.: Theorie der lineaeren Wechselstromschaltungen. Akademie-Verlag, Berlin 1954
49. Cauer, E.; W. Mathis: Wilhelm Cauer (1900 – 1945). Archiv f. Übertragungstechn. 49 (1995), S. 243-251
50. Calahan, D.A.: Rechnergestützter Schaltungsentwurf. R. Oldenbourg Verlag, München - Wien 1973
51. Canavero, I.; Maio, F. (Ed.s): Proc. 6th IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects (SPI02), S. 93-96, Politecnico di Torino, Torino 2002
52. Carlin, H.J. ; D.C. Youla: Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, London 49 (1961), S. 907-920
53. Carlin, H.J.: Singular network elements. IEEE Trans. CT 11 (1964), S. 67-72
54. Chari, M. V. K.; S. J. Salon: Numerical Methods in Electromagnetism. Academic Press, San Diego - San Francisco 2000
55. Chew, W. C.; J.-M. Jin; E. Michielssen; J. Song: Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Artech House, Boston - London 2001
56. L. O. CHUA, D. GREEN, Graph-theoretic properties of dynamic nonlinear networks, IEEE Trans. CAS-23(1976), S. 292 - 312
57. Chua, L.O.; P.-M. Lin: Computer-aided analysis of electronic circuits. Prentice-Hall, Englewood Cliffs - New Jersey 1975
58. Chua, L. O.; C. A. Desoer; E. S. Kuh: Linear and Nonlinear Circuits. McGraw-Hill Inc., New York 1987
59. Courant, R.; D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik I + II. 3. bzw. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1968
60. Lopez Davalos, A.; D. Zanette: Fundamentals of Electromagnetism. Springer-Verlag, Berlin - Heidleberg 1999
61. Davidse, J.: Analog Electronic Circuit Design. Prentice hall, New York - London 1991
62. Davis, W.A.; W. P. Overstreet: S parameters: a practical education. IEEE Transactions on Education, Vol. 32, 1989, S. 18-24
63. Desoer, C. A.; E. S. Kuh: Basic Circuit Theory. McGraw-Hill Book comp. New York 1969
64. Deuflhard, P.; F. Bornemann: Numerische Mathematik I. 3. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin und New York 2002
65. Deuflhard, P.; F. Bornemann: Numerische Mathematik II. 2. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin und New York 2002
66. Dobrinski, P.; G. Krakau; A. Vogel: Physik für Ingenieure. 10. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart - Leipzig . Wiesbaden 2003
67. Döring, W.: Einführung in die theoretische Physik II: Das elektromagnetische Feld. Walter de Gruyter& Co, Berlin 1968 (Sammlung Göschen, Band 77a)

68. Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace- und Z-Transformation (3., neu bearb. Aufl.). Oldenbourg-Verlag, München 1967
69. Duschek, A.; A. Hochrainer: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Teil I: Tensoralgebra, Teil II: Tensoranalysis. Teil III: Anwendungen in Physik und Technik. Springer-Verlag, Berlin 1960 (4. Aufl.)
70. Ebert, H.: Magnetische Kraftfelder. Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1905
71. Eder, G.: Elektrodynamik. Bibliogr. Institut Mannheim 1967
72. Engin, A. E.; W. Mathis; W. John; G. Sommer: Lumped skin-effect model for interconnects. Proc. 2004 International Symposium on Signals, Systems, and Electronics ISSSE04, Linz, Austria, August 2004
73. Entenmann, W.; J.A. Nossek : Zur Problematik der Leitungsersatzschaltungen. In: Proc. ITG-Diskussionsitzung Entwicklung von Analogschaltungen mit CAE-Methoden. Paderborn 1991
74. Euler, L.: Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie. Junius, Leipzig 1769; neu hrsgg. von K. Reich, Vieweg Verlag, Braunschweig 1986
75. Fache, N.; F. Olyslager; D. deZutter: Electromagnetic and circuit modelling of multiconductor transmission lines. Clarendon Press, Oxford 1993
76. Falk, G.; W. Ruppel: Mechanik – Relativität – Gravitation. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1989
77. Falk, G.: Theoretische Physik I: Punktmechanik. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1966
78. Falk, G.: Theoretische Physik II: Thermodynamik. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1968
79. Zurmühl, R.; Falk, S.: Matrizen - Klassiker der Technik. Springer-Verlag 2012
80. Feldtkeller, R.: Einführung in die Vierpoltheorie. S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1962 (erste Auflage 1937)
81. Fetzer, J.; M. Haas; S. Kurz: Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder. 1. Aufl., Expert-Verlag, Renningen-Malmsheim 2002
82. Flügge, S.: Rechenmethoden der Elektrodynamik - Aufgaben und Lösungen. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1986
83. Fodor, G.: Laplace transforms in engineering. Akademiai Kiado, Budapest 1965
84. Föppl, L.: Elementare Mechanik vom höheren Standpunkt. Oldenbourg Verlag, München 1959
85. Fritscher, T.; W.-U. Zammert: FEM-Praxis mit ANSYS. Verlag Vieweg, Wiesbaden 1993
86. Gardiol, F.: Lossy transmission lines. Artech House, Dedham, Ma. 1987
87. Gerlich, G.: Vektor- und Tensorrechnung für die Physik. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1977
88. Gerlich, G.: Eine neue Einführung in die statistischen und mathematischen Methoden der Quantentheorie. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1977
89. Goldstein, H.; C. Poole; J. Safko: Classical Mechanics. 3. Aufl., Addison Wesley, San Francisco - Boston 2002
90. Goser, K.; P. Glösekötter; J. Dienstuhl: Nanoelectronics and Nanosystems. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 2004
91. Grabinski, H.: Theorie und Simulation von Leitbahnen. Springer-Verlag, Berlin 1991
92. Grabinski, H.; U. Arz (Eds.): Proc. 8th IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects (SPI04), Heidelberg 2004

93. Gray, C. G.: Multipole expansions of electromagnetic fields using Debye potentials. Amer. Journ. Phys. 46 (1978), S. 169-179
94. Grivet-Talocia, S.; H.-M. Huang; A.E. Ruehli; F. Canavero, I.M. Elfadel: Transient analysis of lossy transmission lines: An efficient approach based on the method of characteristics. IEEE Trans. on Advanced Packaging 27(2004), S. 45-56
95. Grotelüschen, E.; H. Grabinski; S. Rochel; T.-M. Winkel: LOSSYWIRE - A model implementation for transient and AC analysis of lossy coupled transmission lines in the circuit simulator ELDO. AEÜ 49 (1995), S. 37-43
96. Guckenheimer, J.: Dynamics of the van der Pol Equation. Trans. IEEE Circuits and Systems CAS-27 (1980), S. 983-989
97. Haack, C.R.: Comment on „Transient analysis of lossy transmission lines“. Proc. IEEE 29 (1971), S. 1022-1023
98. Haase, H.; J. Nitsch: Generalized transmission-line theory for the treatment of nonuniform multiconductor transmission lines. J. of Appl. Electromagnetics and Mechanics, 17(2003), S. 149-156
99. Haase, H.: Full-wave interactions of nonuniform transmission lines. Diss., Otto-von-Guericke-Universität-Magdeburg, Magdeburg 2005
100. Haase, H.; H. Garbe; H. Gerth: Grundlagen der Elektrotechnik. Schöneworth Verlag, Hannover 2004
101. Hager, W.H.: Swiss contribution to water hammer theory. J. of Hydraulic Research 39 (2001), S. 3-10
102. Hairer, E.; G. Wanner: Solving Ordinary Differential Equations II (Stiff and Differential-Algebraic Problems), 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1996
103. Hasler, M.; J. Neirynck: Nonlinear Circuits. Artech House, Inc., Norwood 1986
104. Hasler, M.; J. Neirynck: Electric filters. Artech House, Dedham, Ma. 1986
105. Heaviside, O.: Electrical papers, Vol. I, II. (2nd Ed.), Chelsea Publ. Comp., New York 1970
106. Heaviside, O.: Electromagnetic theory. Vol. I, II, III (3rd Ed.). Chelsea Publ. Comp., Bronx - New York 1971
107. Heber, G.: Mathematische Hilfsmittel der Physik II. Akademie-Verlag, Berlin 1967
108. Hehl, F. W., Y. Obukhov: Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric. Birkhauser, Boston (MA) 2003
109. Heinemann, R.: PSPICE. Carl Hanser Verlag, München - Wien 1998
110. Helm, G.: Das dynamische Verhalten realer Mehrfachleitungen. Diss. B, TH Karl-Marx-Stadt, Karl-Marx-Stadt 1975
111. Helm, G.; W. Manthey; G. Thiem: Ein Beitrag zur Berechnung der Signalverformung auf verlustbehafteten Leitungen. Nachrichtentechnik-Elektronik 25 (1975), S. 126-130
112. Hellwig, K.; Wegner, B.: Mathematik und Theoretische Physik - Ein integrierter Grundkurs für Physiker und Mathematiker I, II. Walter de Gruyter, Berlin - New York 1992, 1993
113. Hendry, J.: James Clark Maxwell and the Theory of the Electromagnetic Field. Adam Hilger Hilger Ltd., Bristol - Boston 1986
114. Henke, H.: Elektromagnetische Felder - Theorie und Anwendungen. 3. Aufl., Springer Verlag, Berlin - Heidelberg 2007
115. Henrici, P.: Applied and computational complex analysis. Vol. I., J. Wiley, New York - London 1974

116. Hertz, H.: Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Nachr. von der Königl. Ges. der Wissenschaft. u. der G.-A.-Universität Göttingen (1890) S. 106-149 (s. auch Gesammelte Werke Bd. II, A. Barth, Leipzig 1894)
117. Heuermann, H.: Hochfrequenztechnik. – Lineare Komponenten hochintegrierter Schaltungen. Vieweg-Verlag,
118. Hilberg, W.: Impulse auf Leitungen. R. Oldenbourg Verlag, München - Wien 1981
119. Hillmer, H.: Der Transistor – die Entwicklung von den Anfängen bis zu den frühen integrierten Schaltungen. Der Feldmelde-Ingenieur, 54. Jahrgang, Heft 1-3, S. 1-107, Erlangen 2000
120. Hinsch, H.: Elektronik: Ein Werkzeug für Naturwissenschaftler. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1996
121. Hiptmair, R.: Boundary Element Methods for Eddy Current Computation, Computational Electromagnetics, Vol. 28 of Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 2003, S. 103-126
122. Hözel, M.; J. Haase: Simulation nichtlinearer Netzwerke mit Mehrfachleitungen. Proc. 3. GME/ITG-Diskussionssitzung „Entwicklung von Analogschaltungen mit CAE-Methoden“, Bremen 1994, S. 105-110
123. Hoffmann, M. H. W.: Hochfrequenztechnik Ein systemtheoretischer Zugang. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1997
124. Horowitz, P.; W. Hill: The Art of Electronics. Cambridge University Press, Cambridge 1989. Auch in deutscher Sprache mit dem Titel *Die hohe Schule der Elektronik 1 + 2*. Elektor Verlag, Aachen 2002 + 1996
125. Hoy, C.; H. Koettitz; M.V. Kostenko: Wellenvorgänge auf Hochspannungsleitungen - Berechnungsgrundlagen mit Anwendungen. Verlag Technik, Berlin 1988
126. Hütte (Herausg. H. Czichos): Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften; 34. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 2012
127. Hui, C.-Y.; J. L. A. Yeh; N. C. Tien: Calculation of electrostatic forces and torques in MEMS using path-independent integrals. Journ. Micromech. Microeng. 10 (2000), S. 477-482
128. Humphries, S.: Field Solutions on Computers. CRC Press, Boca Raton 1998
129. Ibach, H.; H. Lüth: Einführung in die Grundlagen der Festkörperphysik. 6. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 2002
130. Jackson, J.D.: Klassische Elektrodynamik (3. Aufl.). Walter de Gruyter, Berlin-New York 2002
131. Jacobs, H. O.; H. F. Knapp; S. Müller; A. Stemmer: Surface potential mapping: A qualitative material contrast in SPM. Ultramicroscopy 69 (1997), S. 39-49
132. Jänich, K.: Analysis für Physiker und Ingenieure. 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 2001
133. Jänich, K.: Mathematik 1. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 2001
134. Jänich, K.: Vektoranalysis. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1993
135. Jänich, K.: Lineare Algebra (4. Aufl.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1991
136. Jänich, K.: Mathematik 1, 2. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2001
137. Jodl, H.: Felder. Akadem. Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1976
138. Joos, G.: Theorie des Elektronenröhrengenerators. Annalen d. Physik 69 (1922), S. 505-547

139. Kacher, H.; H. Meyer: Skriptum Atomphysik. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1988
140. Kielkowski, R.: Inside SPICE – Overcoming the Obstacles of Circuit Simulation. McGrawHill, New York 1994
141. Kirchhoff, G.: Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. Poggendorfs Ann. Phys. Chem. 64 (1845), S. 497-514
142. Kirchhoff, G.: U" ber die Auflösung von Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. Poggendorf Ann. Phys. 72, S. 497-508
143. Kisacanin, B.; G. C. Agarwal: Linear Control Systems. Kluwer Academic/Plenum Publ., New York - Boston 2001
144. Klinkenbusch, L.: Recent Applications of Multipole Expansions in Computational Electromagnetics. In: A. Buikis, R. Ciegis, A. D. Fitt (Eds.): Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2002, Springer-Verlag, Berlin 2004, S. 309-313
145. Klein, W.: Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen. Akademie-Verlag, Berlin 1961
146. Klein, W.: Vierpole. Bibliographisches Inst., Mannheim 1972
147. Klein, W.: Mehrtortheorie (3. Aufl.). Akademie-Verlag, Berlin 1976
148. Kong, J.A. (Ed.): Proc. PIERS 2004 (Progress in electromagnetic research symposium). Editioni Plus, Universita di Pisa, Pisa 2004
149. Kost, A.: Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1994
150. Krabs, W.: Mathematical Foundations of Signal Theory. Heldermann Verlag, Berlin 1995
151. Kröger, R.; R. Unbehauen: Elektrodynamik. B. G. Teubner, Stuttgart 1993
152. Kronenberg, L.; W. Mathis; L. Trajkovic: Analysis of feedback structures and their effect on multiple dc operating points. Proc. ECCTD99, Stresa, Italien 1999
153. Küpfmüller, K.: Einschwingvorgänge in Wellenfiltern. Elektr. Nachrichtentech. 1 (1924), S. 141
154. Küpfmüller, K.: Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. 3. Aufl., S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1968
155. Küpfmüller, K., G. Kohn: Theoretische Elektrotechnik und Elektronik. 15. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 2000
156. Küpfmüller, K., W. Mathis, A. Reibiger: Theoretische Elektrotechnik. 18. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 2008
157. Kuh, E. S.; R. A. Rohrer: Theory of Linear Active Networks. Holden-Day, Inc., San Francisco - Cambridge 1967
158. Kunkel, P.; V. Mehrmann: Differential-Algebraic Equations. EMS Textbooks in Mathematics, EMS Publishing House, Zürich. 2006
159. Kurz, G.; W. Mathis: Oszillatoren. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg 1994
160. Kuznetsov, P.I.; R.L. Stratovich: The propagation of electromagnetic waves in multiconductor transmission lines. Pergamon Press, Oxford 1964
161. Landolt, M.: Komplexe Zahlen und Zeiger in der Wechselstromlehre. Springer-Verlag, Berlin 1936
162. Lehner, G.: Elektromagnetische Feldtheorie - für Ingenieure und Physiker (7. Aufl.). Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 2010
163. Leimkuhler, B.; Reich, S.: Simulating hamiltonian dynamics. Cambridge University Press, Cambridge 2004

164. Leuchs, G.; T. Beth (Hrsg.): Quantum Information Processing. Wiley-VCH, Weinheim 2003 (2. erweiterte Auflage 2005)
165. Leuchtmann, P.: Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie, Pearson Studium, München 2005.
166. Lin, S.; E.S. Kuh: Transient simulation of lossy interconnecs based on the recursive convolution formulation. IEEE Trans. CAS-I 39 (1992), S. 879-892
167. Lindner, H.: Strom - Erzeugung, Verteilung und Anwendung der Elektrizität. Kulturgeschichte der Naturwissenschaften und Technik, Band 16, Reinbek b. Hamburg 1985
168. Lippmann, H.: Angewandte Tensorrechnung. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1996 (2. Aufl.)
169. Lewin, W.I.; J.I. Grosberg: Differentialgleichnungen der mathematischen Physik (Übers. aus dem Russ.). Verlag Technik, Berlin 1952
170. Longair, M. S.: Theoretische Konzepte der Physik. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1991
171. Ludwig, G.: Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Band 1: Raum, Zeit, Mechanik. Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1974
172. Ludwig, G.: Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Band 2: Elektrodynamik, Zeit, Raum, Kosmos. Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1974
173. Ludyk, G.: Theoretische Regelungstechnik 1 + 2. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1995
174. Lunze, J.: Regelungstechnik 1+2. Springer Verlag, Heidelberg - Berlin
175. Mahr, H.: Ein Beitrag zur Theorie der im Grundwellentyp angeregten Koaxialleitung. Der Fernmeldeingenieur 23 (1969) S. 5-7
176. Mandelstam, L.; N. Papalexii; A.A. Andronov; S. Chaikin; A. Witt: Exposé des Recherches Récentes, sur les Oscillations Non Linaires. Zeitschr. f. Techn. Physik 4 (1935) 81-134
177. Marsden, J. E.; A. J. Tromba: Vektoranalysis. Spektrum Akadem. Verlag, Heidelberg - Berlin - Oxford 1995
178. Marko, H.: Systemtheorie. 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1995
179. Marten, W.; W. Mathis: Zur algebraischen Lösung von Wechselstromaufgaben. Frequenz 46 (1992) 95-101
180. Mathis, W.: Theorie nichtlinearer Netzwerke. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1987
181. Mathis, W.; W. Marten: On the Structure of Networks and Duality Theory. Proc. 31th Midwest Symposium on Circuits and Systems, St. Louis, Missouri (USA), 9.-12. August 1988, North-Holland, New York-Amsterdam-London 1989
182. Mathis, W.: Recent Developments in Numerical Integration of Differential Equations. Intern Journ. Numer. Model. 7 (1994), S. 99-125
183. Mathis, W.: Warum und zu welchem Zweck betreibt ein Ingenieur Theorie? Wiss. Zeitschr. Techn. Univers. Dresden 44 (1995), S. 41-46
184. Mathis, W.: Die begrifflichen Grundlagen der Netzwerk- und Systemtheorie – ein Beitrag zur Mathematisierung der Elektrotechnik. Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 431, Westdeutscher Verlag 1997
185. Mathis, W.: Historical remarks to the history of electrical oscillators. Proc. MTNS98, Padova (Italy), July 6-10, 1998
186. Mathis, W.: Nonlinear electronic Circuits - An overview. Proc. 7th MIXDES 2000, Gdynia (Poland), 15.-17. Juni 2000

187. Mathis, W.: Nanoelektronische Aspekte und GigaHz-Anwendungen integrierter Analogschaltungen. *Tele Kommunikation Aktuell*, 60. Jahrg., Heft 07-12, 2006, S. 1-15
188. Mathis, W.; L.O. Chua: Applications of Dimensional Analysis in Network Theory. Proc. ECCTD'91, Kopenhagen (Dänemark), 4.-6. Sept.1991
189. Mathis, W.; R. Pauli: Network Theorems. In: J.G. Webster (Ed.): *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Vol. 14 1999, S. 227-240
190. Mathis, W.; P. Russer: Oscillator Design. In: K. Chang Webster (Ed.): *Wiley Encyclopedia of RF and Microwave Engineering*, Vol. 4. John Wiley& Sons, New York - Chichester - Weinheim 2005
191. Mathis, W.; L. Weiss: Noise Analysis of Nonlinear Electrical Circuits and Devices. In: K. Antreich; R. Bulirsch; A. Gilg; P. Rentrop: Modeling, Simulation and Optimization of Integrated Circuits (Eds.), Intern. Series of Num. Math. Vol. 46, S. 269-282, Birkhäuser Verlag, Basel 2003
192. Mayergoz, I.: *Nonlinear Diffusion of Electromagnetic Fields - with Applications to Eddy Currents and Superconductivity*. Academic Press, San Diego - London - Boston 1998
193. Maxwell, J.C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Vol. 1 + 2. Dover Publ., New York 1954 (Nachdruck von 1891)
194. Mees, A.I.: *Dynamics of Feedback Systems*. John Wiley & Sons, Chichester 1981
195. Meetz, K.; W.L. Engl: *Elektromagnetische Felder*. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1980
196. Mie, G.: Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten. *Ann. Phys.* 2 (1900), S. 201-249
197. Minty, G. J.: On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network-programming. *J. Math. Mech.*, vol. 15, S. 485-520, 1966.
198. Merziger, G.; T. Wirths: *Repetitorium der Höheren Mathematik*. 2. Aufl., Bino Verlag, Springer (Hannover) 1993
199. Merziger, G.; G. Mühlbach; D. Wille; T. Wirth: *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik*. 2. Aufl., Binomi Verlag, Springer (Hannover) 1996
200. Grehn, J.; J. Krause: *Metzler Physik*. 3. Aufl., Schroedel Verlag, Hannover 1998
201. Meyberg, K.; P. Vachenauer: *Höhere Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1997 (4. Aufl.)
202. Möller, H. G.: *Grundlagen und mathematische Hilfsmittel der Hochfrequenztechnik*, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1945
203. Moon, P.; D.E. Spencer: *Field Theory Handbook* (2. ed., corr. 3. printing) Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1988
204. Mrozyński, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie - Eine Aufgabensammlung*. B. G. Teubner, Stuttgart - Leipzig - Wiesbaden 2003
205. Müller, C.: *Grundprobleme der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen*. Springer-Verlag, Berlin - Göttingen 1957
206. Müller, G.: Die dynamische Analyse der Übertragungsleitungen in elektrischen Netzwerken mit Hilfe von Differenzenverfahren. Diss. (B), TU Dresden 1982
207. Müller, G.; B. Ponick: *Grundlagen elektrischer Maschinen*, 9. Aufl. Wiley-VCH, Berlin 2005
208. Müller, G.; B. Ponick: *Theorie elektrischer Maschinen*, 6. Aufl. Wiley-VCH, Berlin 2009

209. Müller, G.; K. Vogt; B. Ponick: Berechnung elektrischer Maschinen, 6. Aufl. Wiley-VCH, Berlin 2007
210. Nähring, T.: Non-transversal electrostatic fields in infinitely long cable models. Proc. ISTET'03, vol. 2, Warsaw, Poland 2003
211. Nähring, T.: Non-transversal electrostatic fields in cable models. Proc. Proc. 8th IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects (SPI'04), Heidelberg 2004
212. Neundorf, D.; R. Pfendtner; H.-P. Popp: Elektrophysik. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1997
213. Nguyen, T.V.: Recursive convolution and discrete time domain simulation of lossy coupled transmission lines. IEEE Trans. CAD 13 (1994), S. 1301-1305
214. Nitsch, J.; F. Gronwald: Analytical Solutions in Multiconductor Transmission Line Theory. IEEE Trans. Electromagn. Compatibility 41(1999), S. 469-479
215. Nitsch, J.; S. Tkachenko: Telegrapher equations for arbitrary frequencies and modes: Radiation of an infinite, lossless transmission line. Radio Science 39(2004) RS2026, S. 1-8
216. Nomizu, K.: Fundamentals of Linear Algebra. McGraw-Hill Book, New York 1966
217. O'Dell, T. H.: Magnetic-bubble domain devices. Rep. Progr. Phys. 49 (1986), S. 589-620
218. O'Dell, T. H.: Die Kunst des Entwurfs elektronischer Schaltungen. Deutsche Ausgabe bearbeitet von W. Mathis und J. Krehnke. Springer-Verlag, Berlin 1990
219. Ohm, G.S.: Die Galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989 (Originalausgabe von 1827)
220. Paul, C.R.: Analysis of Multiconductor Transmission Lines. John Wiley, New York 1994
221. Pauli, R.: The algebra of 2n-port transformations. In: C.I. Byrnes, C.F. Martin (Ed.): Linear Circuits, Systems and Signal Processing. North Holland, Amsterdam 1988, S. 81-86
222. Pauli, R.: Differential geometric models for nonlinear manifolds and multiport models for linear physical systems. In: F. Breiteneker, I. Troch: Proc. 3rd IMACS Conf. of Math. Modelling (MATHMOD 2000), Wien (Österreich), 2.-4. Februar, S. 297-302
223. Penfield Jr., Paul, R. Spence, S. Duinker: Tellegen's Theorem and Electrical Networks. Research Monograph No. 58, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts 1970
224. Peschl, H.: HF-Leitung als Übertragungsglied und Bauteil. Hüthig & Pflaum Verlag, München - Heidelberg 1979
225. Pichler, F.: CAST: Computergestützte Systemtheorie – Perspektiven für Forschung, Entwicklung und Ausbildung. Elektrotechnik u. Informationstechnik 106 (1989), S. 333-341
226. Polderman, J. W. ; Willems, J.C.: Introduction to mathematical systems theory - a behavioral approach, Springer 1998
227. Pozar, D. M.: Microwave Engineering. 3. Auflage. John Wiley & Sons, New York 2004
228. Pratap, R.: MATLAB. Oxford University Press, New York - Oxford 2002
229. Prinz, H.; W. Zaengl, O. Völcker: Das Bergeronverfahren zur Lösung von Wanderwellenaufgaben. Bulletin SEV 53 (1962), S. 725-739

230. Prinz, H.: Hochspannungsfelder. R. Oldenbourg Verlag, München - Wien 1969
231. Priestley, J.: Geschichte und der gegenwärtige Zustand der Elektrizität. Gottlieb August Lange, Berlin und Stralsund 1772 (Nachdruck: Th. Schäfer GmbH, Hannover 1983)
232. Prassler, H.: Energiewandler in der Starkstromtechnik. Bibliographisches Institut, Mannheim 1969
233. Quade, W.: Mathematische Begründung der komplexen Wechselstromrechnung. Deutsch. Math. 2 (1937), S. 18-31
234. Raff, S. J.: Ampere's Law and the Vector Potential. Amer. J. Phys. 26 (1958), S. 454-460
235. Ramo, S.; J.R. Whinnery: Felder und Wellen in der modernen Funktechnik. Verlag Technik, Berlin 1960
236. Rashid, M. H.: PSPICE Using OrCAD. Pearson, Prentice Hall, Upper Saddle River 2004
237. Reibiger, A.: Über das Klemmenverhalten von Netzwerken. Wiss. Z. TU Dresden 35 (1986), S. 165-173
238. Reibiger, A.; H. Loose: Bond Graphs and Matroids. Mathematics and Computers in Simulation 53 (2000), S. 323-332
239. Reibiger, A.; W. Mathis; T. Nähring; Lj. Trajkovic: Mathematical Foundations of the TC-Method for Computing Multiple DC-Operating Points, Int. Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 17, 2003, S. 169-191
240. Reibiger, A.: Field theoretic description of TEM waves in multiconductor transmission lines. In: Canavero, I.; Maio, F. (Ed.s): Proc. 6th IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects (SPI'02), S. 93-96, Politecnico di Torino, Torino 2002
241. Reibiger, A.: On the matrices of capacitance and inductance coefficients for homogeneous multiconductor transmission lines. Advances in Radio Science 1(2003) S. 63-66
242. Reibiger, A.: Terminal behaviour of networks, multipoles and multiports. Proc. Mathmod'03, Vienna 2003
243. Reibiger, A.: Networks, decomposition and interconnection of networks. Proc. ISTET'03, Warsaw 2003, Polen
244. Reibiger, A.: Generalizations of Blakesley's voltage source shift theorem, Proc. NDES'2010, volume Full Papers CD, 2010
245. Reich, S.: Transmission line equations as hamiltonian partial differential equations: theory and implications for circuit simulation. Kleinheubacher Berichte, Vol. 40 (1996).
246. Reich, S.: Differential-Algebraic Equations and Applications in Circuit Theory, AEÜ 46(1992), S. 298-304
247. Reinschke, K.; P. Schwarz: Verfahren zur rechnergestützten Analyse linearer Netzwerke. Akademie-Verlag, Berlin 1976
248. Richter, R.: Das magnetische Feld in den Lufträumen elektrischer Maschinen. Archiv f. Elektrotech. 11 (1922), S. 85-108
249. Rogowski, W.; W. Steinhaus: Die Messung der magnetischen Spannung. Archiv f. Elektrotechik 1 (1912), S. 141-150
250. Rohrer, R. A.: Circuit Theory – An Introduction to the State-Variable Approach, McGraw-Hill, New York 1970
251. Roychowdhury, J.S.; D.O. Pederson: Efficient transient simulation of lossy interconnect. Proc. 28th ACM/IEEE Design Automation Conference, S. 740-745, San Francisco 1991

252. Roychowdhury, J.S.; A.R. Newton; D.O. Pederson: Algorithms for the transient simulation of lossy interconnect. IEEE Trans. CAD 13(1994), S. 96-104
253. Russer, P.: Electromagnetics, Microwave Circuit and Antenna Design for Communications Engineering. Artech House, Boston - London 2003
254. Salazar-Palma, M.; T. K. Sarkar; L.-E. Garcia-Castillo; T. Roy; A. Djordjevic: Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling. Artech House, Boston - London 1998
255. Schiek, B.: Grundlagen der Hochfrequenz-Messtechnik Springer-Verlag, Berlin 1999
256. Schnackenberg, J.: Elektrodynamik. Wiley-VCH GmbH& Co. KGaA, Weinheim 2003
257. Schreier, W.: Geschichte der Physik - Ein Abriß. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988
258. Schunk, H.: Stromverdrängung. Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg 1975
259. Schutt-Aine, J.E.; R. Mittra: Scattering parameter transient analysis of transmission lines loaded with nonlinear terminations. IEEE Trans. MTT 36(1988), S. 529-536
260. Sigl, R.: Potentialtheorie. 2. Aufl., Wichmann, Karlsruhe 1989
261. Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik (10. Aufl.), Barth Verlagsgesellschaft, Leipzig 1993
262. Simonyi, K.: Kulturgeschichte der Physik. Verlag Harri Deutsch (3. Aufl.), Thun-Frankfurt/M. 2001
263. Smale, S.: On the mathematical foundations of electrical circuit theory. Journ. Diff. Equat. 7 (1972), S. 193-210
264. Sommerfeld A.: Elektrodynamik. Verlag Harri Deutsch, Thun-Frankfurt/M. 1988
265. Sommerfeld, A.: Mechanik der deformierbaren Medien. Akademische Verlagsgesellschaft Becker& Erler, Leipzig 1945
266. Spektrum der Wissenschaften (Deutsche Ausgabe von Scientific American), Biographie *Der Begründer der Elektrodynamik: Maxwell*, Heft 2, Spektrum der Wissenschaften Verlag 2000
267. Steinmetz, C. P.: Die Anwendung complexer Größen in der Elektrotechnik. ETZ 14 (1893) S. 597-599, 631-635, 641-643, 653-654
268. Steinmetz, C. P.: Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. Verlag Reuther& Reinhard, Berlin 1900
269. Stern, Th. E.: On the Equations of Nonlinear Networks, IEEE Trans. CT-13(1966), pp. 74 - 81
270. Stratonovich, R.L.: Nonlinear Thermodynamics I. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992
271. Strecker, F.: Die elektrische Selbsterregung. Hirzel-Verlag, Stuttgart 1947
272. Swaminathan, M.; A. E. Engin: Power Integrity Modeling and Design for Semiconductors and Systems. Prentice Hall, Boston MA, 2007
273. Tellegen, B.D.H.: The gyrator, a new electric network element. Philips Research Reports, Vol. 3 (1948), S. 81-101
274. Thiem, G.; E. Pöttrich: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung des Übertragungsverhaltens von Mehrfachleitungen mit beliebigen Abschlußschaltungen. Nachrichtentechnik-Elektronik 27 (1977), S. 514-516
275. Thiem, E.: Berechnung verlustbehafteter Leitungen mit von Null verschiedenen Anfangswerten. Nachrichtentechnik-Elektronik 29 (1979), S. 239-242

276. Tietze, U.; C. Schenk: Halbleiter-Schaltungstechnik. 15. Aufl., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 2016
277. Tricker, R.A.R.: Frühe Elektrodynamik: Das erste Stromgesetz. Friedr. Vieweg& Sohn, Braunschweig 1974
278. Uhle, M.: Leitungsmodelle für allgemeine Netzwerkanalyseprogramme. Zeitschr. f. elektr. Inform.- u. Energietechnik 12 (1982) 427-436
279. Uhle, M.: Verfahren zur Analyse nichtlinearer Netzwerke, die lineare zeitinvariante Unternetzwerke enthalten. Diss., TU Dresden, Dresden 1983
280. Uhle, M.: Die Streumatrix homogener Leitungsmodelle und ihre Berechnung im Zeitbereich. Proc. 32. Int. Wiss. Koll. TH Ilmenau, Reihe Mikrowellentechnik, S. 221-224, Ilmenau 1987
281. Unbehauen, R.: Grundlagen der Elektrotechnik 1, 2 (5. neubearb. u. erw. Aufl.). Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1999, 2000
282. Unger, H.-G.: Elektromagnetische Wellen auf Leitungen (4. Aufl.). Hüthig Buch Verlag, Heidelberg 1996
283. Van der Pol, B.: A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. Radio Review 1 (1920), S. 701-710
284. van Kampen, N.G., Stochastic Processes in Physics and Chemistry. 2. Aufl., North Holland, Amsterdam 1992
285. Verhoeven, C. J. M.: First order oscillators. Ph.D. thesis, TU Delft 1990
286. Verhoeven, C. J. M.; A. van Staveren; G. L. E. Monna; M. H. L. Kouwenhoven; E. Yildiz: Structured Electronic Design: Negative-Feedback Amplifiers. Kluwer Academic Publ., Boston - Dordrecht - London 2003
287. Vielhauer, P.: Theorie der Übertragung auf elektrischen Leitungen (2. Aufl.). Verlag Technik, Berlin 1970
288. Vlach, J.; K. Singhal: Computer Methods for Circuit Analysis and Design. 2. Auflage. John Wiley& Sons, Inc. New York 1993
289. Vladimirescu, A.: The SPICE Book. John Wiley& Sons, New York - Chichester 1994
290. Voll, I.; J. Haase: Rekursives Faltungsmodell für ein allgemeines Netzwerkssimulationsprogramm. Proc. 40. Intern. Wiss. Koll. der TU Ilmenau, Band 3, S. 269-274. Ilmenau 1995
291. Wagner, D.: Einführung in die Theorie des Magnetismus. Friedr. Vieweg& Sohn, Braunschweig 1966
292. Wagner, K. W.: Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen, ETZ 35, (1914), S. 639-643, 677-680, 705-708.
293. Wagner, K. W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation. Johann Ambrosius Barth Verlag, Leipzig 1950
294. Walter, W.: Gewöhnliche Differentialgleichungen (6. Aufl.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1996
295. Walter, W.: Analysis 2. (7. Aufl.). Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1996
296. Weber, E.: Elektrotechnik und Maschinenbau 48(1930), S. 943
297. Weber, M.: Zeitbereichsmodellierung der Wellenausbreitung in leitfähigen Schichtstrukturen. Diss. Uni Karlsruhe 1999
298. Weiss, L.; W. Mathis: A Thermodynamical Approach Approach to Noise in Nonlinear Networks. Intern. Journ. Circuit Theory Appl. 26 (1998), S 147-165
299. Weiss, L.; W. Mathis: A thermodynamic noise model for nonlinear resistors. IEEE Trans. Electr. Device Lett. 20 (1999), S. 402-404
300. Weizel, W.: Lehrbuch der Theoretischen Physik. 2. Aufl., Erster Band, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1955

301. Wessel, W.: Über den Einfluss des Verschiebungsstromes auf den Wechselstromwiderstand einfacher Schwingkreise. Ann. d. Physik 28 (1937). S. 59-70
302. Wiederkehr, K.H.: Wilhelm Eduard Weber. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft m.b.H., Stuttgart 1967
303. Willems, J.C.: Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems, IEEE Trans. Automatic Control AC-36 (1991). S. 259-294
304. Willson, A. N. Jr.: Nonlinear Networks: Theory and Analysis. IEEE Press, New York 1975
305. Wijn, H. P. J.; P. Dullenkopf: Werkstoffe der Elektrotechnik. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1967
306. Wolff, I.: Maxwellsche Theorie (4. Aufl.). Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1997. Inzwischen ersetzt durch: I. Wolff: Maxwellsche Theorie, Band 1: Elektrostatik und Band 2: Strömungsfelder, Magnetfelder und Wellenfelder, Verlagsbuchhandlung Dr. Wolff GmbH, 2005 und 2007
307. Wüllenweber, M.: Albert Physik Interaktiv (Version 4.0, 2002, CD-ROM, mit Handbuch IX) Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 2002
308. Wunsch, G.: Moderne Systemtheorie. Akademische Verlagsgesellschaft Geest& Portig, Leipzig 1962
309. Wunsch, G.: Geschichte der Systemtheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1985
310. Wunsch, G.; H.-G. Schulz (1996) Elektromagnetische Felder. Verlag Technik, Berlin
311. Wunsch, G.: Grundlagen der Prozesstheorie. B. G. Teubner, Stuttgart - Leipzig - Wiesbaden 2000
312. Wupper, Horst; U. Niemeyer: Elektronische Schaltungen 1 + 2. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1996
313. Yosida, K.: Operational Calculus: A theory of hyperfunctions. Springer-Verlag, Berlin - New York 1984
314. Zapsolsky, H. S.: Does charge conservation imply the displacement current? American Journ Phys. 55 (1987) S. 1140
315. Zenneck, J.: Die Entstehung der Schwingungen bei der Lichtbogenmethode. Annalen der Physik 43 (1914) 481-524
316. Zhou, P.-b.: Numerical Analysis of Electromagnetic Fields. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg 1993
317. Ziemer, R.E.; W. H. Tranter; D. R. Fannin: Signals and Systems: Continuos and Discrete. Prentice Hall Eng., New York 1998
318. Zinke, O.; H. Brunswig (herausgeg. Vlcek, A.; H.L. Hartnagel; K. Mayer): Hochfrequenztechnik 1 - Hochfrequenzfilter, Leitungen, Antennen (6., neubearb. Aufl.), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 2000
319. Zueco, E.; W. Rave; R. Schäfer; A. Hubert; L. Schultz: Combined Kerr-/magnetic force microscope on NdFeB crystals of different crystallographic orientation. Journ. Magnetism and Magnetic Material 190 (1998) S. 42-47

Index

- Äther, 123
Übereinanderlagerung, 275
Übergangswiderstand, 252, 267
Überlagerungssatz, 271
Übersetzungsverhältnis, 61, 493
Übertrager, idealer, 102, 468, 476
- A-Matrixform, 68
Ablösevorgang, Antenne, 545
AC-Kalkül, 44
Admittanz, 50, 57
Admittanzform, 65
Admittanzform der Spannungs-Strom-
Relation, 634
Akzeptoren, 675
Algebro-Differentialgleichungen, 40
Andronov-Hopf Theorem, 754
Anfangspermeabilität, 320
Ansatz von d'Alembert, 572
Antennenstrahlung, 542
Arbeitsgerade, 734
Arbeitspunkte, 38
Arbeitspunktproblem, 38
Asynchronmaschine, 491
Ausbreitungskonstante, **627**
auslaufende Spannungswelle, 621
Avogadro-Konstante, 667
- Barkhausen-Effekt, 316
Barkhausensche Schwingbedingung, 753
Barkhausenschen Schwingbedingung,
754
Belevitch-Darstellung der Spannungs-
Strom-Relation, 633
- Belevitch-Form für Zweitore, 67
Beobachtbarkeit, 750
Beobachtungsgleichung, 14
Bergeron-Verfahren, 620
Besselsche Funktionen, 437
Betatron, 526
Betragfläche, 62
Beweglichkeit, 662
Bezifferung, 57
Bezugsleiter, 567
Bezugswiderstand, 70
BIBO-Stabilität, 750
Bindung, , 671
Blindwiderstand, 92
Blochwände, 457
Bodediagramm, 62
Boltzmann-Gleichgewicht, 693
Brannin-Modell, 618
Braunsche Röhre, 421
Brechung, 551
Bremsmoment, 427
Bremsscheibe, 416
Bündelfluss, 369
Bündelleiter, 182
- Coulomb-Eichung, 291, 326, 410, 521
Coulombsche Kraftgesetz, 109
- D'Alembertsche Lösung, 550
Defektelektronen, 674
Deltafunktion, 523
Depletion-Mode, 716
diamagnetisch, 308
dielektrischen Verluste, 84, 85

- Dielektrizitätskonstante, 122
 Dielektrizitätskonstante, relativ, 123
 Dielektrizitätstensor, 125
 Differentialgleichungen, stochastische, 668
 Differentialoperator, 11
 Differenzenformeln, 591
 Diffusionsdreieck, 710
 Diffusionsgleichung, 434, 442
 Diffusionskapazität, 711, 712
 Diffusionskonstante, 680, 684
 Diffusionslänge, 684
 Diffusionsstrom, 678, 679
 Dipol, 173
 Dipol, elektrisch, 174
 Dipol, kurz, 542
 Dipol, kurzer, 543, 548
 Dipol, magnetisch, 306
 Dipolmoment, elektrisches, 138, 157, 173, 233
 Dispersion, 620
 Dissipations-Fluktuations-Theorem, 668
 Distributionen, 41
 Divergenz, 760
 divergenzfrei, 760
 divergenzfreie, 290
 Donatoren, 675
 Drehkondensator, 197, 198
 Drehstromleitung, 226
 Dreiecksspannungen, 94
 Dreiecksternumwandlung, 95
 Dreiphasensystem, 94
 Driftgeschwindigkeit, 417
 Driftstrom, 678, 679
 dualityer Netzwerkgraph, 32
 Durchflutung, 303, 355
 Durchflutungsgesetz, 304, 325, 351, 407, 435, 441, 443, 446, 521
 dynamoelektrisches Prinzip, 483, 747
 Dämpfungsbelag, 652
Dämpfungskonstante, 627
 Early-Effekt, 723, 727, 730
 Eigenfunktionen, Entwicklung nach, 433
 Eigenleitfähigkeit, 673
 Eigenleitungsdichte, 673
 Eindringmaß, 434, 445
 eingeprägte Spannung, 28
 eingeprägter Strom, 28
 einlaufende Spannungswelle, 621
 Einstein-Relation, 680
 Eisenverluste, 465
 elektrisch kurze Leitung, 617
 elektrische Maschinen, 445
 elektrische Polarisation, 123
 elektrische Spannung, 112
 elektrische Verluste, 84
 elektrischer Dipol, 137
 elektrisches Potenzial, 110, 112
 elektromagnetische Pumpe, 428
 Elektronenröhre, 187, 190
 Elektronenspin, 307
 Elektronik, 8
 Elementardipol, 308
 Energie, elektrische, 240, 480
 Energie, magnetische, 392, 480
 Energiedichte, magnetische, 380
 Energiefunktion, 19
 Energiemethode, 386
 Energietechnik, 7
 Enhancement-Mode, 716
 Entmagnetisierungsfaktor, 362
 Erdseil, 158
 Erhaltungsgrößen, 18, 19
 exaktes Matrizenpaar, 33
 explizite Eulerformel, 592
 Faltungsintegral, 41
 Faltungsprodukt, 41
 Feedback-Prinzip, 709, 724
 Feedforward-Prinzip, 724
 Feldverdrängung, 434, 449
 Feldwellenwiderstand, 540
 Fernwirkung, 109
 ferromagnetische Stoffe, 311, 376
 feste Kopplung, 476
 Fluss, elektrischer, 118
 Flächenladungsdichte, 117
 Fortpflanzungskonstante, 552
 Fortpflanzungsmaß, 561, 645
 Fortpflanzungsrichtung, 549
 Freiraumlichtgeschwindigkeit, 568
 Freiraumwellenwiderstand, 568
 Funktion, holomorph, 177
 Gaußschen Zahlenebene, 177
 Gegeninduktion, 420

- Gegeninduktivität, 374, 392
 Gegenkopplung, 748
 Generation, 672
 Generator, 427
 Generator, magnetohydrodynamische (MHD), 429
 gesteuerte Quellen, 36
 gesteuerte Quellen, nichtlineare, 37
 Gleichstrommaschine, 747
 Gleichtaktansteuerung, 570
 Glimmentladung, 148
 Graph, orientierter, 32
 Gravitationsgesetz, 107
 Gravitationskraft, 20
 Greensche Funktion, 11, 12, 171, 431
 Greensche Funktion, avancierte, 523
 Greensche Funktion, retardierte, 523
 Grenzbedingungen, 531
 Grenzwellenlänge, 649
 Grenzzyklus, 754
 Grundprinzipien der Schaltungstechnik, 724
 Grundwelle, 564
 Gyrorator, 101, 310
- H-Feld, 304
 H-Matrixform, 69
 Hall-Effekt, 416
 Hall-Konstante, 417
 Harms-Goubaу-Wellenleiter, 575
 Hauptaufgabe der Schaltungstechnik, 724
 Hauptwelle, 565
 Heaviside-Modell, 622
 Heaviside-Transformation, 70, 610
 Heavisidesche Leitungsgleichungen, 602
 Heringsche Versuche, 424
 Hertzscher Dipol, 534
 hinlaufende Spannungswelle, 607
 Hochspannungsleitung, 551
 HY-Kalkül, 41
 Hybridform, 69
 Hybridform der Spannungs-Strom-Relation, 634
 Hyperbelfunktionen, 447
 Hysterese, 312, 457
 Hystereseschleife, 312, 457, 458, 462
 Hystereseverluste, 457, 460–462
 Hystereseverlustleistung, 458
- Hysteresewiderstand, 462
 idealer Übertrager, 32, 33, 103
 Impedanz, 50, 57, 94
 Impedanz, irrationale, 562
 Impedanzform der Spannungs-Strom-Relation, 634
 implizite Eulerformel, 592
 Impulsantwort, 10–12, 41
 Induktionsgesetz, 414, 420, 435, 441, 457
 Induktionskonstante, 307
 Induktionsmaschine, 61, 491
 Induktionsspannung, 406, 419
 Induktionsvariometer, 463
 Induktivität, 39
 Induktivität, Energiemethode, 377
 Induktivität, inneren, 382
 Induktivität, komplexe, 465
 Induktivität, Ringspule, 369
 Induktivität, äußere, 371
 Induktivitätsbelag, 568
 Inertialsystem, 515
 Influenz, 130
 Innenwiderstand, 28
 innere Induktivität, 600
 Isolationswiderstand, 79, 263
- Joulesches Gesetz, 33, 261
- Kapazität, 39, 76, 195, 196
 Kapazität, Einfachleitung, 205
 Kapazität, Einzeldraht, 203
 Kapazität, elliptischer Zylinderkondensator, 205
 Kapazität, Kreiszylinderkondensator, 206
 Kapazität, parallele Zylinder, 204
 Kapazität, Reihenschaltung, 207
 Kapazität, Vertikalantenne, 202
 Kapazitätsbelag, 568
 Kettenbepfeilung, 66
 Kettenform, 68
 Kettenform der Spannungs-Strom-Relation, 632
 Kettenmatrix, 102
 Kinematik, 17
 Kippschwingungen, 738
 Kirchhoffintegral, 171

- Kirchhoffsche Spannungsgesetz, 31
 Kirchhoffsche Stromgesetz, 29
 Kirchhoffsches Verbindungselement, 33
 Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix, 32
 Knotenorientierung, 29
 Knotenpotenziale, 34
 Knotenpotenzialgleichungen, 35
 Knotenregel, 32
 Koerzitivfeldstärke, 316
 komplexe Amplitude, 49
 komplexe Struktur, 44
 Kondensator, 195
 Konfigurationsraum, 15
 konforme Abbildung, 340
 Kopplungsfaktor, 377, 474
 kopplungssymmetrische Zweitore, 101
 kovalente, 672
 Kraft 1. Art, 20
 Kraft 2. Art, 20
 Kraft, Plattenkondensator, 241
 Krarup, 636
 Kugelelektrode, 133
 Kugelkoordinaten, 535, 765
 Kurzschlussläufer, 491
 kurzschlussstabil, 746
 Kurzschlusswiderstand, 642
- Ladungserhaltung, 407
 Ladungsvariable, 77
 Lamor-Frequenz, 309
 Lamor-Präzession, 310
 Laplace-Operator, Kugelkoordinaten, 767
 Laplace-Operator, Zylinderkoordinaten, 767
 Laplace-Transformation, 41
 Lautsprecher, 498
 leerlaufstabil, 746
 Leerlaufwiderstand, 642
 Legendre-Polynome, 173, 336
 Leistung, komplexe, 49
 Leistung: Blindleistung, 49
 Leistung: Scheinleistung, 49
 Leistung: Wirkleistung, 48
 Leistungsanpassung, 468, 643
 Leitfähigkeit, 80, 248
 Leitfähigkeitstensor, 249
 Leitungsband, 672
- Leitungsgleichungen, 565, **584**, 596, 599, 602
 Leitungskonstanten, 602
 Leitungssegment, 592
 Leitwert, 26
 Leitwertbelag, 597–599
 Leitwertform, 35
 Leuchtdioden, 690
 Lichtgeschwindigkeit, 124
 lineare Systeme, 497
 linearer Impuls, 19
 Linearer zeitinvariante Systeme (LTI), 14
 Liniendipol, 156
 Linienladung, 135, 142
 Linienleiter-Näherung, 372
 Linienquelle, 182, 201
 Linksschraube, 422
 Lorentz-Kraft, 289
 Lorenz-Eichung, 522
 LTI-Systeme, 10
 Löcherleitung, 417, 674
- magnetische Drehmoment, 306
 magnetische Energie, 88
 magnetische Feldkonstante, 307
 magnetische Widerstand, 374
 magnetischen Spannungsmesser, 301
 magnetischer Schwund, 419, 435
 Magnetisierungskennlinie, 467
 Magnetisierungskurve, 93, 312, 353
 Magnetron, 298
 Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix, 32
 Maschenorientierung, 31
 Maschenregel, 32
 Maschenstromgleichungen, 35
 Maschenströme, 34
 Maschensumme, 31
 Massenwirkungsgesetz, 673, 682
 Maxwellsche Ergänzung, 519
 Maxwellsche Formel, 394
 Maxwellsche Gleichungen, 521
 Maxwellsche Spannung, 238
 Maxwellscher Spannungstensor, 237
 Maxwellscher Verschiebungsstrom, 521
 Mehrleitersysteme, 341
 Messtechnik, 7
 Mikusinski-Kalkül, 41
 Minoritätsträger, 681, 690

- Mitkopplung, 748
- modifizierte Heavisidesche Leitungsgleichungen, 632
- Molekularmagnete, 457
- Monopol, 173
- Monopol, magnetischer, 336
- Monopol-Moment, 173
- Motor, 428
- Multipolentwicklung, 134, 233, 296
- Multipolmethode, 171, 172
- Möbiustransformation, 57, 640
- N-Typ, 746
- Nachrichtentechnik, 7
- Nachwirkungerscheinungen, 463
- Nadelektrometer, 241
- Nahwirkungsprinzip, 109, 113, 325
- Nahwirkungstheorie, 122, 236, 293
- Netzwerkelement, 26
- Netzwerkgraph, 32
- Neukurve, 312
- Neumannsche Funktion, 172
- Neumannsches Randwertproblem, 266
- Newton'sche Mechanik, 18
- Newton'sche Relation, 20, 108
- Newton'schen Bewegungsgleichungen, 108
- nichtkonzentriertes Netzwerk, 622
- nichtkonzentriertes System, 608
- Nichtleiter, 82
- nichtlokalisiertes System, 16
- Norator, 594
- Nullator, 594
- Nuten, 445
- Oberflächenwiderstand, 263
- Ohmsches Gesetz, 26, 51, 435
- Operatormethode, 41
- Ortskurve, 56, 57
- Ortskurvenkriterium, 750
- Ortsraum, 15, 17
- Pauli-Prinzip, 672
- Peltier-Effekt, 689
- Permeabilität, 290, 353, 376
- Permeabilität, effektive, 359
- Permeabilität, komplexe, 465
- Permeabilität, reversible, 319
- Permeabilität, totale, 394
- Permeabilitätszahl, 307, 311
- Permittivität, 122
- Permittivitätszahl, 123
- Phasengeschwindigkeit, 442, 649
- Phasenkonstante, 627
- Phasenwinkel, 85
- Photodiode, 690
- Photoeffekt, innerer, 690
- Plattenkondensator, 81, 134, 168, 232
- Poisson-PDgl., 111
- Potenzial, 25
- Potenzial, elektrisches, 164
- Potenzial, logarithmisches, 146
- Potenzialfläche, 254
- Poynting-Vektor, 547
- Probekörper, 108
- Punktladung, 134, 173
- Pupin, 636
- Quadrupol-Moment, 173
- Quasi-TEM-Welle, 565
- Randbedingungen, natürliche, 171, 174
- Randwertproblem, Dirichletsche, 165
- Randwertproblem, Neumannsche, 165
- Raumladungsdichte, 119
- Rauschen, thermisches, 667
- Rauschen, weißes, 668
- RC-Glied, 76
- Rechteckhohlleiter, 649
- Rechtsschraube, 308, 419
- Rechtsschraubensinn, 368
- Reflektionsfaktor, 553
- Reflexion, 551
- Reflexionsfaktor, 612, 639
- Reflexionskoeffizienten, 71
- Regelungstechnik, 7
- Rekombination, 673
- Remanenz, 312
- reziprok, 65
- reziproke Zweitore, 101
- Reziprozität, 68
- Riemannsche Zahlenkugel, 640
- Ringverstärkung, 751
- Ruhemasse, 660
- Rückkopplung, negative, 748
- Rückkopplung, positive, 748
- rücklaufende Spannungswelle, 607

- S-Matrixform, 71
 S-Typ, 743
 Satz von Helmholtz, 17, 290, 295, 325, 408, 764
 Satz von Weyl-Tellegen, 34
 Schalter, ideal, 70
 Schaltkreissimulator, 716
 Schirmwirkung, 340, 455, 563
 Schlupf, 61
 Seebeck-Spannung, 689
 Selbsterregung, 752
 Selbstinduktion, 368
 Separationsansatz, 266, 646
 Separationsmethode, 192, 433
 Separationsverfahren, 436
 Skalarfeld, 16
 Smith-Diagramm, 641
 Spannung, 23
 Spannung, elektrische, 231
 Spannungsquelle, 28
 Spannungsrückkopplung, 748
 Spannungsverteilung, 577
 Spartransformator, 478
 Sperrschicht, 693
 Sperrschichtkapazität, 702
 spezifischer Widerstand, 248
 Spiegelladung, 174
 Spiegelung am Einheitskreis, 57
 Spiegelung, Kugel, 175
 Spiegelungsmethode, 137, 143, 170, 174
 stabil, 750
 stehende Wellen, 638
 Steilheit, 732
 Sternpunkt, 96
 Sternspannung, 94
 Steuerbarkeit, 750
 Strahler, isotroper, 548
 Strahlungsleistung, 543, 548
 Strahlungswiderstand, 543, 544, 559
 Streufaktor, 474
 Streufluss, 354, 375
 Streuinduktivität, 469
 Streuparameterdarstellung, 610
 Streuvariablen, 71
 Strom, 23
 Stromlinien, 255
 Stromrückkopplung, 748
 Stromspiegel, 736
 Stromsumme, 30
 Stromverdrängung, 434, 445
 Stromverteilung, 578
 Sturm-Liouville-Problem, 433
 Supraleitung, 384
 Suszeptibilität, 123
 Symmetrieargument, 145
 Symmetrieargumenten, 176
 symmetrische Komponenten, 100
 symmetrische Zweitor, 68
 symplektische Integrationsverfahren, 595
 Synchronmaschine, 485
 Systemtheorie, 10
 TE-Wellen, 645
 Teilkapazität, 221, 225, 229
 Telegraphengleichung, 565, 589, **602**
 TEM-Welle, 569
 TEM-Wellen, 645
 Temperaturkoeffizient, 27
 Temperaturspannung, 686
 Thermospannung, 689
 TM-Wellen, 645
 Torbedingung, 63, 73
 Transformator, 466
 Transistoreffekt, 726
 translineare Schaltungen, 736
 Transmissionsfaktor, 613
 Transmissionsmatrix, 72
 transversale Welle, 569
 Trapezregel, 592
 Trennung der Veränderlichen, 77, 87
 Trennzeitor, 104, 310
 Tunnel-Diode, 746
 Umkehrungssatz, 101
 Umlaufspannung, 368
 Ummagnetisierungsverluste, 465
 Unipolar-Induktion, 416
 Unipolarmaschinen, 416
 Urspannung, 28
 Valenzband, 672
 Valenzelektronen, 674
 Vektorfeld, 17
 Vektorpotenzial, 289
 verallgemeinerte Verbindungselemente, 33

- verallgemeinerten Kirchhoffsschen
 Gleichungen, 33
 Verbraucherzählpfeilsystem, 81
 verketteter Fluss, 374
 Verlustleistung, 92
 Verlustwinkel, 85
 Verschiebungsstrom, Maxwellscher, 506,
 544
 verteiltes System, 608
 Vertikalantenne, 544
 verzerrungsfreie Leitung, 624
 Vierpoltheorie, 64
 virtuelle Verschiebung, 391

 Wanderwellen, 604, **605**
 Wechselfeldpermeabilität, 464
 Wechselstrommessbrücke, 463
 Wechselstromzähler, 456
 Wechselwirkungsenergie, 233
 Welle, hinlaufende, 550
 Welle, rücklaufende, 550
 Wellengrößen, 71
 Wellenleiter, 652
 Wellenmoden, 564
 Wellenwiderstand, 552, 562, **627**
 Wellenwiderstand, leerer Raum, 540
 Wellenwiderstandsanpassung, 643
 Wicklungsfaktor, 92
 Wicklungsübersetzung, 467
 Widerstand, 26
 Widerstand, magnetischer, 359
 Widerstand, negativ, 733
 Widerstand, negativer, 739
 Widerstandsbelag, 601

 Widerstandsform, 35
 Widerstandsgerade, 690, 741, 742
 Widerstandsnetzwerke, 23
 widerstandsreziproke Netzwerke, 32
 Windungszahl, 89
 wirbelfrei, 261
 Wirbelstrom, 416, 449
 Wirbelstromverluste, 452, 461
 Wirbelstromwiderstand, 462

 Y-Matrixform, 65

 Z-Matrix, normiert, 71
 Z-Matrixform, 67
 Zahntflanke, 446
 Zeiger, 56, 85
 Zeigerdiagramm, 84, 459, 467, 489
 Zeitkonstante, 77
 Zener-Spannung, 744
 Zugspannung, 236
 Zustandsgleichung, 14
 Zustandsgleichungen, 14
 Zustandsraum, 38
 Zweitore, 63
 Zweitorgleichungen, 65
 Zweitortheorie, 64
 Zyklotron, 299
 Zyklotronfrequenz, 298
 Zylinderkondensator, 146, 264
 Zylinderkoordinaten, 536, 765
 Zylinderspule, 348, 374
 Zylinderspule, Induktivität, 370
 Zählpfeil, 24, 25