

Horário Escolar com Maximização de Aulas Geminadas

José Tobias Alfenas, Brazil
a16007@bcc.unifal-mg.edu.br

I. INTRODUÇÃO

NESTE relatório, espero consertar alguns erros cometidos na última modelagem, bem como trazer a modelagem para a maximização de aulas geminadas para os horários. Sabendo que o próximo passo é minimizar as janelas de horários dos professores, algo que é muito requisitado neste tipo de modelagem que visa o lucro da escola, bem como o bem estar de professores e alunos.

Alguns resultados serão apresentados, comparados e pontos importantes apontados. Fica então a noção de que a minha modelagem do relatório passado está errada, além de trazer um peso imenso e desnecessário ao modelo.

II. MODELAGEM

DEFINEM-SE as variáveis utilizadas, temos suas seguintes especificações como:

- $p \in [0, 1, 2, \dots, 26]$ - Quantidade de professores
- $d \in [0, 1, 2, 3, 4]$ - Quantidade de dias letivos por semana
- $c \in [0, 1, 2, \dots, 14]$ - Quantidade de classes
- $s \in [0, 1, 2, 3, 4, 5]$ - Quantidade de aulas por dia
- Y_{pd} - Variáveis auxiliares para contagem de aulas de um professor em um determinado dia
- $G_{pdc s} \in [-5, 1]$ - Variáveis auxiliares para maximização de aulas geminadas
- $I_{dsp} \in [1, 0]$ - Horários onde os professores não poderão estar em aula
- $O_{pc} \in [0, 30]$ - Quantidade obrigatória de aulas que os professores devem dar por semana para uma classe
- $X_{pdc s} \in [1, 0]$ - Horário final formado
- $z(\dots)$ - Função objetivo

A. Diferenças nas variáveis

Repare que a variável Q foi retirada do modelo, ela foi então substituída por expressores lineares. Por exemplo, a variável Q_{pd} serve apenas para nos indicar a soma de aulas de um professor p num determinado dia d , assim sendo:

$$\begin{aligned} \forall p, d; \quad Q_{pd} &= \sum_c \sum_s X_{pdc s} \\ \forall p, d; \quad Y_{pd} &= \begin{cases} 1, & \text{se } Q_{pd} = 1 \\ 0, & \text{senão.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

E agora temos que:

$$\forall p, d; \quad Y_{pd} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_c \sum_s X_{pdc s} = 1 \\ 0, & \text{senão} \end{cases} \quad (2)$$

Estando afim de reduzir a complexidade do modelo em número de variáveis.

Duas novas variáveis foram adicionadas, sendo elas I_{pds} e O_{pc} , estas variáveis são de total importância para o modelo e passaram despercebidas por mim no último trabalho. Elas serão aqui tratadas com rigor e darão a forma base do modelo com restrições diretamente ligadas as mesmas.

B. Correções no modelo

Diversas correções serão feitas no modelo final, em se tratando da integridade do mesmo e suas restrições. Como já dito, teremos agora novas restrições para cumprimentos de uma quantidade aulas que os professores devem estar dispostos a comparecer (O_{pc}), bem como horários e dias da semana combinados onde os mesmo não poderão comparecer (I_{pds}). Essas duas restrições são dadas como a seguir:

- Restrição em I_{pds}

$$\forall d, s, p; \quad \sum_c X_{pdc s} = \begin{cases} 0, & \text{se } I_{dsp} = 1 \\ [0, 1], & \text{senão} \end{cases} \quad (3)$$

- Restrição em O_{pc}

$$\forall p, c; \quad \sum_d \sum_s X_{pdc s} = O_{pc} \quad (4)$$

Assim então temos as exigências do contrato sendo atendidas, bem como as restrições de horários especificadas pelos professores.

Temos ainda, a restrição feita errada por mim da restrição de número de aulas por dia. Anteriormente, pensei que está restrição se dava em aulas consecutivas, mas de fato, ela é dada pelo número de aulas por dia de um determinado professor a uma certa classe, e este valor devendo ser menor ou igual a dois. Assim sendo, temos:

$$\forall p, d, c; \quad \sum_s X_{pdc s} \leq 2 \quad (5)$$

Sendo esta então uma restrição imposta e não otimizável para melhoria de qualidade da distribuição das aulas no geral.

C. A nova maximização de aulas geminadas

Nota-se pelos resultados da última implementação, que as aulas não estavam sendo de fato geminadas. Isso se dá pelo fato de que a minha geminação ocorria de qualquer horário para qualquer horário seguinte, ou seja, poderíamos ter uma geminação do segundo e terceiro horários, deixando-se necessariamente uma aula não geminada no primeiro horário. Esse horário não geminado por sua vez não trazia peso negativo consigo, o que acarretava na não otimização do modelo.

Desta vez então, após aula, se fará a otimização como deve ser feita, ou seja, fazendo-se a ligação dos horários de indexes pares com indexes ímpares. Então, geminamos o horário de índice 0 (primeiro horário) com o horário de índice 1 (segundo horário), o horário de índice 2 (terceiro horário) com o horário de índice 3 (quarto horário) e assim por diante. Bem como, damos um valor negativo caso os mesmos não estejam geminados.

Temos assim então que:

$$\forall p, d, c; G_{pdc} = \begin{cases} \text{em } s/2 = r + d, \text{ se } d = 0 \text{ então:} \\ -5, \text{ se } \sum_s^{s+1} X_{pdc} = 2 \\ +1, \text{ se } \sum_s^{s+1} X_{pdc} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Temos assim então o modelo para ser minimizado e se ter a maior quantidade possível de aulas geminadas.

D. O modelo final

Como já discutimos anteriormente, temos agora o modelo final:

Minimize:

$$z(p, d, c, s) = \sum_p \sum_d Y_{pd} + \sum_p \sum_d \sum_c \sum_s G_{pdc}$$

Sujeito a:

$$\forall d, s, p; \sum_c X_{pdc} = \begin{cases} 0, \text{ se } I_{dsp} = 1 \\ [0, 1], \text{ senão} \end{cases}$$

$$\forall p, c; \sum_d \sum_s X_{pdc} = O_{pc}$$

$$\forall p, d, c; \sum_s X_{pdc} \leq 2$$

$$\forall p, d; Y_{pd} = \begin{cases} 1, \text{ se } \sum_c \sum_s X_{pdc} = 1 \\ 0, \text{ senão} \end{cases}$$

$$\forall p, d, c; G_{pdc} = \begin{cases} \text{em } s/2 = r + d, \text{ se } d = 0 \text{ então:} \\ -5, \text{ se } \sum_s^{s+1} X_{pdc} = 2 \\ +1, \text{ se } \sum_s^{s+1} X_{pdc} = 1 \end{cases} \quad (7)$$

III. RESULTADOS E CONCLUSÃO

OS resultados para as aulas geminadas são visíveis e satisfatórios, diferente do que tínhamos anteriormente com a modelagem feita de maneira errada. Temos na Figura 1 os horários das três primeiras turmas, e percebe-se que a geminação de aulas trás um aspecto muito mais realista do que os modelos anteriores para os horários, como pode ser observado no caso da não geminação de aulas no modelo para a Figura 2.

Schedule - CPLEX

Class Vision

Professor Vision

Class 0

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
8	15	1	8	13
8	15	1	8	13
22	13	13	22	0
22	13	13	22	0
0	3	12	15	8
0	3	12	15	8

Class 1

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
13	13	8	13	0
13	13	8	13	0
15	3	12	0	15
15	3	12	0	15
22	8	22	8	1
22	8	22	8	1

Class 2

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
22	8	22	0	8
22	8	22	0	8
8	1	3	12	13
8	1	3	12	13
13	15	0	13	15
13	15	0	13	15

Previous

Next

Figura 1. Resultado do modelo com aulas já geminadas. Observa-se uma melhor distribuição e aspecto realista dos horários.

Schedule - CPLEX

Class Vision

Professor Vision

Class 0

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
13	12	1	0	8
8	15	22	13	0
8	13	8	0	15
22	3	12	13	8
1	8	22	15	0
22	13	13	15	3

Class 1

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
22	8	13	22	1
15	13	12	0	15
13	1	22	13	22
8	8	0	15	13
8	12	8	0	3
0	15	3	8	13

Class 2

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
3	15	0	13	0
22	8	13	22	8
22	3	13	8	13
15	1	1	22	15
13	0	12	13	15
8	12	8	0	8

Previous

Next

Figura 2. Resultado do modelo sem aulas geminadas. Observa-se que não há realidade na junção das aulas, como se as mesmas fossem alocadas de maneira aleatória, sem se pensar na qualidade para professores e alunos.

Porém, ainda fica evidente a presença de janelas nos horários dos professores, a sua visão revela isso como mostrado na Figura 3. Fica visível então, na visão dos horários de professores, que o professor 8 possui janelas nos horários 3 e 4 na quinta-feira e sexta-feira. A minimização dessas janelas é o próximo passo do trabalho.

O código fonte do projeto pode ser acessado em:
<https://github.com/tobiasjc/SchoolSchedule-CPLEX>

Schedule - CPLEX

Class Vision

Professor Vision

Professor 6

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
	14	14		14
	14	14		14

Professor 7

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
12		13	7	8
12		13	7	8
11			10	10
11				
14				
14				

Professor 8

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri
0	2	1	0	2
0	2	1	0	2
2	3		3	
2	3		3	
	1	3	1	0
	1	3	1	0

Previous

Next

Figura 3. Visão dos horários por professor, onde fica visível o objetivo da nossa próxima evolução do modelo. Devemos tirar as chamadas janelas dos horários dos professores, sendo este um dos principais objetivos das escolas na compra deste tipo de software.