

INTRODUCCIÓN AL MODELADO EL CONTINUO

Segundo Cuatrimestre 2023

Ejercicios de laboratorio N° 1: Resolución de EDOs.

Clase 1

Ejercicio 1. Consideremos la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= \lambda y \\ y(0) &= 1 \end{cases},$$

- (a) Resolver utilizando el método de Euler para distintos valores de λ y de h . Incluir valores positivos y negativos y de módulo pequeño y grande de λ .
- (b) Para cada λ , graficar las soluciones arrojadas por distintos valores de h . ¿Qué se observa?
- (c) Elegir una combinación de h y λ en donde los resultados sean malos. Graficar conjuntamente la solución arrojada por el método de Euler para el dato inicial $y(0) = 1$ y las soluciones exactas para distintos datos iniciales. Interpretar.

Ejercicio 2. Considerar la ecuación: $\dot{y}(t) = -50(y + \cos(t))$.

- (a) Resolverla utilizando el método de Euler, con dato inicial $y(0) = 0.15$, en el intervalo $[0, 1]$ y con $h = 0.1, 0.05, 0.04, 0.03, 0.01$. ¿Parece correcta la solución?
- (b) El siguiente código muestra soluciones de la ecuación con distintos datos iniciales:

```
import GLMakie
f(t,y) = GLMakie.Point2(1,-50(y-cos(t)))
streamplot(f,0:1,0:2)
```

`streamplot` grafica el campo de velocidades usando curvas, como si se tratara de la corriente de un río.

Ejercicio 3. La ecuación logística es un modelo simple para el crecimiento de una población P , dada su tasa de crecimiento r y la capacidad de carga del ambiente K . Puede expresarse del siguiente modo:

$$\dot{P} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

- (a) Resolver la ecuación para distintos datos iniciales e interpretar el resultado obtenido.
- (b) La solución exacta de la ecuación viene dada por:

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}$$

Elegir algún valor de P_0 y graficarla junto con las soluciones aproximadas para distintos valores de h .

- (c) Para estudiar el orden de convergencia del método, escribir una rutina que resuelva para distintos valores de h (por ejemplo $h_m = 2^{-m}$ con $m = 0, \dots, M$) y para cada uno de estos valores almacene el error en el último paso: $|y_N - y(5)|$ en un vector $\mathbf{e} = (e_0, \dots, e_M)$. Observar que si suponemos que $e_i \sim kh_m^r$, entonces $\log(e_m) \sim c + r \log(h_i)$; por lo tanto, el gráfico de $\log(\mathbf{e})$ en función de $\log(\mathbf{h})$ debe ser una lineal de pendiente r . Realizar este gráfico. Operando con los vectores $\log(\mathbf{e})$ y $\log(\mathbf{h})$ estimar numéricamente el valor de r . Comparar de este modo el método de Euler con el método de Euler modificado, dado por la iteración:

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right).$$

Ejercicio 4. Notamos y a la cantidad de individuos de una población de animales silvestres. Supongamos que y se rige por una ecuación de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= r(t)y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - my(t), \\ y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

donde $r(t) = 0.2 + 0.2 \cos(2\pi t)$, $K = 1000$ y $m = 0.1$.

- (a) Interpretar el significado de $r(t)$, K y m .
- (b) Estimar la evolución de la población a lo largo de 50 años, utilizando el siguiente esquema, debido a Heun:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left\{ f(t_i, y_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hf(t_i, y_i)\right) \right\}.$$

Debe medir el tiempo en años, y tomar un paso temporal $h = 1/365$ (un día).

- (c) Graficar, superpuestas, las soluciones al problema con los valores iniciales $y_0 = 100$, $y_0 = 500$ e $y_0 = 1000$.

Ejercicio 5. Adaptar algún método de Runge-Kutta para que reciba como dato inicial un vector de longitud k y almacene la solución en una matriz de $k \times n$, de manera tal que cada columna corresponda a la solución del sistema en un instante de tiempo.

Ejercicio 6. Se arroja una bolita de vidrio verticalmente, imprimiéndole una velocidad inicial v_0 . Suponiendo que la fuerza de rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad, la ecuación para la velocidad es:

$$\dot{v} = g - \frac{c_r}{m}v^2,$$

donde $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ es la aceleración gravitatoria, c_r es un coeficiente de rozamiento y m es la masa de la bolita. Se asume que la velocidad es positiva cuando apunta hacia abajo.

Consideramos el caso de una bolita de dos centímetros de diámetro, cuya masa es de 0.084Kg, y para la cual el coeficiente de rozamiento es: $c_r = 0.028\text{Kg/m}$.

- a) Resolver la ecuación para distintos valores de v_0 (positivos y negativos), asumiendo que la altura inicial es suficientemente alta (es decir: la bolita nunca llega al piso). Graficar simultáneamente todas las soluciones obtenidas. ¿Qué se observa?
- b) Si se quiere estudiar la dinámica completa de la bolita debe agregarse una ecuación para la posición (altura): $\dot{x} = -v$, con su correspondiente dato inicial $x(0) = x_0$. Aplicar el algoritmo del ejercicio anterior para resolver este problema y graficar la posición de la bolita en función del tiempo.

Clase 2

Ejercicio 7. Sistema predador-presa: Se tienen dos poblaciones, una de predadores y otra de presas, cuyo número a tiempo t denotamos $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente. La población de x en ausencia de presas tiende a decaer a una tasa α , mientras que la de y en ausencia de predadores tiende a crecer a una tasa β . Por otra parte, los encuentros de predadores y presas hacen crecer la población de los primeros y decrecer la de los segundos, de acuerdo a cierta proporción. De este modo, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\alpha x + \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta y - \delta xy, \end{cases}$$

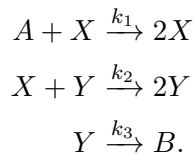
donde γy representa la tasa de crecimiento de x (mayor cuanto más presas haya) y δx representa la tasa de mortandad de presas (mayor cuanto más predadores haya). Se asume que los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son todos positivos.

- Observar que el sistema tiene un equilibrio en el origen y otro equilibrio en $(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta})$.
- Resolver el sistema para los siguientes conjuntos de datos:
 - $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.5$, probando datos iniciales cercanos (y no tanto) a los equilibrios.
 - $\alpha = 0.25, \beta = 1, \gamma = \delta = 0.01, x_0 = 80$ e $y_0 = 30$.

Graficar x e y en función del tiempo en una misma figura. Graficar también y en función de x . Interpretar.

- Resolver usando la librería `DifferentialEquations.jl`. Para ello implementar una función `predpresa(u,p,t)` que devuelva `du`, la derivada de u en t . p es un vector que puede usarse (o no), para darle a la función los valores de los parámetros.

Ejercicio 8. Considerar el sistema de reacciones químicas dado por:



Las primeras dos reacciones se llaman *autocatalíticas* porque X e Y aceleran su propia producción.

- Escribir las ecuaciones.
- Resolver para alguna elección de valores de $0 < k_1, k_2, k_3 < 1$ y de datos iniciales adecuados. Tener en cuenta que como las ecuaciones son sobre las concentraciones de los componentes debería tenerse que: $A_0 + X_0 + Y_0 + B_0 = 1$. Constatar si esta igualdad se cumple para todo tiempo en la solución numérica obtenida.
- Supongamos ahora que el compuesto A es inyectado en la reacción y el compuesto B es eliminado, de manera de garantizar que sus respectivas concentraciones se mantengan constantes. Reescribir el sistema resultante para X e Y . ¿Suena conocido? Resolver. ¿Qué se observa en la evolución de X e Y ?

Ejercicio 9. Para modelar la evolución de una infección en una población se la puede dividir en tres grupos: los *susceptibles* de contraer la enfermedad (S), los *infectados* (I) y los *recuperados* (R). La relación entre el número de personas en cada grupo está definida por el siguiente sistema de ODEs:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{S I}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \frac{S I}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$

con β y γ las tasas de infección y recuperación respectivamente.

- Considerar que la población de $N = 10000$ habitantes e inicialmente todas las personas son susceptibles. Supondremos una tasa de transmisión $\beta = 0.2$ y un tiempo medio de recuperación de 10 días. Si inicialmente hay una única persona enferma, discutir de qué forma deberían evolucionar las poblaciones de cada grupo.
- Simular y graficar la solución a partir de una función `sir(u,p,t)` que compute la derivada `du` aplicando las ecuaciones.
- Assumiendo que no se producen fallecimientos, verificar que la población de la ciudad se mantiene constante a lo largo de la simulación.
- Determinar el tiempo a partir del cual, sin acciones externas, la cantidad de infecciones comienza a descender.
- Computar el tiempo de resolución utilizando el macro `@time`. Repetir la simulación pero definiendo una función `sir!(du,u,p,t)` que asigne los valores de `du` directamente sobre el parámetro correspondiente. Repetir el experimento y comparar tiempos y ocupación de memoria.

Ejercicio 10. Hallar la solución del modelo de Hutchinson:

$$\dot{N}(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right).$$

Para ello debe definirse el problema como:

```
prob = DDEProblem(f,u0, h, tspan, p; constant_lags=[tau])
```

donde `h=h(p,t)` es la función de historia, tal que: $u(t) = h(t)$ para $t < t_0$ y `constant_lags` define los lags a aplicar.

Elegir valores de los parámetros r y K y graficar simultáneamente para varios valores de τ . Comparar con la solución del modelo sin delay ($\tau = 0$).

Ejercicio 11. Proponer un modelo SIR, como el del ejercicio 9 pero con un delay en el paso de *susceptible* a *infectado*. Resolver y comparar con el modelo del Ejercicio ??.

Ejercicio 12. : Problema de tres cuerpos: Se quiere resolver el problema de tres cuerpos, sujetos a atracción gravitatoria mutua. Para simplificar, supondremos que los cuerpos se mueven en un mismo plano. Si notamos $r_i = (x_i, y_i)$ la posición del cuerpo i -ésimo, y m_i su masa ($i = 1, 2, 3$), las ecuaciones (vectoriales) que rigen el movimiento de los cuerpos son:

$$\ddot{r}_1 = Gm_2 \frac{r_2 - r_1}{\|r_1 - r_2\|^3} + Gm_3 \frac{r_3 - r_1}{\|r_3 - r_1\|^3}, \quad (1)$$

para el primer cuerpo, y las análogas para los otros dos. G es la constante de gravitación universal, $G = 0.4982 \frac{\text{m}^3}{\text{dia}^2 \text{Kg}}$.

- a) Formular el problema como un sistema de orden uno de la forma:

$$\dot{u} = f(u).$$

Observar que deben obtenerse doce ecuaciones ($u \in \mathbb{R}^{12}$): cada una de las tres ecuaciones vectoriales de la forma (1) debe escribirse como dos ecuaciones escalares (una por coordenada), y a su vez, estas ecuaciones de segundo orden se convierten en dos de orden uno. Para la implementación, tener en cuenta que no es necesario mantener la forma de vector. Es decir: puede tomarse $u \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, por ejemplo, sin que esto genere inconvenientes para el solver.

- b) Implementar una función `tres_cuerpos!(du,u,p,t)`, donde `p` contiene las masas m_1, m_2, m_3 .
- c) Se desea resolver el problema para el sistema Sol (S) - Tierra (T)- Luna (L). Las masas de estos cuerpos (en Kg) son: $m_T = 5.97 \times 10^{24}$, $m_L = 7.3477 \times 10^{22}$ y $m_S = 1.9891 \times 10^{30}$. La distancia Tierra-Sol es $d_{TS} = 1.49597887 \times 10^{11}$ m, y la distancia Tierra-Luna: $d_{TL} = 3.844 \times 10^8$ m. Supondremos que inicialmente el Sol se encuentra en el origen de coordenadas, la Tierra en el punto $(d_{TS}, 0)$ y la Luna en el punto (d_{TS}, d_{TL}) .

La velocidad tangencial de la Tierra en torno del Sol, en metros/día, está dada por $v_T = \frac{2\pi d_{TS}}{365}$. Análogamente, la velocidad de la Luna tiene dos componentes: una correspondiente a la rotación en torno al Sol, que se puede aproximar por $v_{LS} = v_T$, y otra correspondiente a su rotación entorno a la Tierra, dada por: $v_{LT} = \frac{2\pi d_{TL}}{28}$. Así, dadas las posiciones iniciales asumidas, las velocidades iniciales pueden tomarse: $v_S = (0, 0)$, $v_T = (0, v_T)$ y $v_L = (-v_{LT}, v_{LS})$.

Con las masas y datos iniciales dados resolver las ecuaciones en un intervalo de tiempo que abarque 365 días.

- d) Realizar una animación a partir de los resultados obtenidos. Para esto, basta con seguir el siguiente modelo:

```
using Plots
@gif for i in 1:Tmax
    ...
    plot(...)
end
```

donde `plot` puede reemplazarse por cualquier comando de ploteo. El macro `@gif` toma las imágenes generadas en cada paso del `for` y las compagina en un *gif*.

Una alternativa es utilizar el macro `@animate` junto con la función `mp4`, que permite almacenar la animación en un archivo de video. La sintaxis sería como sigue:

```
anim = @animate for ...
    ...
end
mp4(anim, "nombre_de_archivo.mp4" [, fps=24])
```

Clase 3

Ejercicio 13. Consideramos los datos de población tomados del Banco Mundial (<https://data.worldbank.org/indicator/>). Elegir algunos países y para cada uno de ellos realizar el siguiente análisis.

- a) Graficar la evolución de la población.

- b) Plantear un modelo exponencial de la forma $\dot{x} = \lambda x$ y ajustar el valor de λ de manera tal que la solución x ajuste lo mejor posible los datos, en el sentido de cuadrados mínimos.
- c) Repetir utilizando un modelo logístico y ajustando los valores de la tasa de crecimiento y de la capacidad de carga del ambiente.

Ejercicio 14. Repetir el ejercicio anterior utilizando los datos de población en la ciudad más poblada del país.

Ejercicio 15. Un famoso estudio de la Hudson's Bay Company de Canada registró la recolección de pieles de liebres y lince en Canadá y Estados Unidos a lo largo de 90 años. Estos datos pueden considerarse una medida indirecta de la población de ambas especies.

- a) Graficar los datos. ¿Qué se observa?
- b) Ajustarlos utilizando un modelo de Lotka-Volterra. Graficar los datos junto con la solución del sistema con parámetros ajustados.
- c) Repetir el ajuste para un período de tiempo más acotado. Por ejemplo: los últimos 30 años de datos.
- d) Los datos contienen inevitablemente ruido proveniente de diversos factores (la imperfección del registro, el efecto de factores climáticos, etc.). Un posible camino para intentar atenuar el efecto de estas variaciones consiste en suavizar los datos, por ejemplo: promediándolos. Tomando los últimos 32 años de medición, generar 30 datos suavizados realizando promedios de tres años consecutivos y repetir el ajuste. ¿Qué se observa?

Ejercicio 16. Existen modelos más complejos para el sistema predador-presa. A continuación proponemos dos alternativas. En cada caso, interpretar el sistema propuesto y ajustar sus parámetros a los datos promediados. Comparar.

- a) Con factor de competencia intra-especie para las presas:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\alpha x + \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta y - \delta xy - \varepsilon y^2 \end{cases}$$

- b) Modelo de Holling para los predadores:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\alpha x + \gamma \frac{xy}{1+k_1 y} \\ \dot{y} &= \beta y - \delta \frac{xy}{1+k_2 y}, \end{cases}$$

Ejercicio 17. Consideramos los datos de la epidemia de gripe en Estados Unidos, correspondientes al invierno de 2022-2023 y a los virus de Influenza A y B, recabados en el archivo `flu.csv` (https://www.cdc.gov/flu/weekly/weeklyarchives2022-2023/data/whoAllregt_cl21.html).

- a) Ajustar mediante un modelo SIR las infecciones de Influenza A, Influenza B y los totales.
- b) En cada caso calcular la *tasa básica de reproducción* $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.

- c) Volver a ajustar los datos mediante el modelo SEIR, que incluye un grupo de personas *expuestas*:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta \frac{S I}{N} \\ \frac{dE}{dt} &= \beta \frac{S I}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$

donde σ^{-1} es el tiempo medio de incubación de la enfermedad, es decir: el tiempo que se demora en pasar de expuesto a infectado. Calcular el R_0 y el tiempo medio de incubación según este ajuste.

Clase 4

Ejercicio 18. Galileo: Leer el siguiente párrafo:

– Pero, Simplicio, tengo la esperanza de que no seguirás el ejemplo de muchos otros que desvían la discusión de un punto principal y dicen que algunas de mis afirmaciones se apartan de la verdad por un cabello, y por este cabello esconden las faltas de otras teorías tan gruesas como un cable de navío. Aristóteles dice que ‘una esfera de hierro de 100 libras, cayendo desde una altura de 100 codos, llega a la tierra antes que una bola de 1 libra haya caído un simple codo’. Yo digo que las dos llegan al mismo tiempo. Tú encuentras, al hacer la experiencia, que la más pesada adelanta a la más ligera en 2 ó 3 dedos ...; ahora, no puedes esconder detrás de estos dos dedos los 99 codos de Aristóteles, ni puedes mencionar mi error y, al mismo tiempo, pasar en silencio el tuyo, mucho mayor.

Salviati, en *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* - Galileo Galilei.

Viviani, estudiante de Galileo, afirma que su maestro realizó efectivamente el experimento descrito en el párrafo anterior, arrojando desde lo alto de la torre de Pisa una bala de cañón y una bala de mosquete. El objetivo de este ejercicio es reproducir numéricamente la experiencia de Galileo. La Torre de Pisa mide 55.8 mts. La masa de una bala de cañón es de 16 Kg, y la de una bala de mosquete 0.0082 Kg. Las constantes de rozamiento para cada bala son: $\gamma_c = 0.0058$ Kg/m y $\gamma_m = 3.74 \times 10^{-5}$ Kg/m, respectivamente (la diferencia se debe a la diferencia de tamaños).

- Escribir la ecuación de movimiento asumiendo, como en el Problema 6, que el rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad.
- Implementar un programa para obtener la dinámica de la caída de ambas balas y que utilice una `ContinuousCallback` y la función `terminate!` para finalizar la simulación cuando la bala toca el piso. Graficar en una misma figura la posición de cada bala en función del tiempo.
- ¿Cuánto tiempo tarda cada bala en tocar el suelo?
- ¿Cuán lejos del suelo está la bala de mosquete cuando la bala de cañón llega al piso? [*No debe cometerse el mismo error que Simplicio al juzgar los resultados. La bala de cañón es alrededor de 2000 veces más pesada que la de mosquete. Consecuentemente, Aristóteles hubiese pronosticado que al llegar la bala de cañón al piso, la de mosquete habría descendido apenas 2 cm.*]

Ejercicio 19. Consideremos un problema similar al Ejercicio 6. Nos interesa estudiar la dinámica de una pelota que cae en caída libre y rebota cuando llega al suelo. En principio, supondremos que el rebote no implica pérdida de energía y que la caída es sin rozamiento, por lo cual:

$$\ddot{x} = -g.$$

- (a) Definir una `DiscreteCallback` que detecte cuando la pelota *atravesó* el suelo y realice la corrección correspondiente, poniendo $x = -x$ y $v = -v$. Resolver el problema con este enfoque para un tiempo suficientemente largo como para ver cuatro o cinco rebotes.
- (b) Repetir el ítem anterior pero a través de una `ContinuousCallback`, que nos permitirá detectar el momento en que la pelota toca el piso. En este caso, sólo hace falta corregir la velocidad.
- (c) Repetir las simulaciones anteriores pero asumiendo rozamiento con el aire y/o una pérdida de energía en el choque (es decir: la velocidad post-choque es una fracción de la velocidad pre-choque). ¿Qué se observa? ¿Hay alguna diferencia perceptible entre ambos métodos?

Ejercicio 20. Compliquemos un poco el ejercicio anterior. Supongamos ahora que tenemos una pelota que arrojamamos en tiro oblicuo dentro de una habitación. La pelota rebotará contra las paredes y el piso.

- (a) Formular las ecuaciones para las coordenadas x e y de la posición y de la velocidad.
- (b) Simular el problema asumiendo que el rozamiento es proporcional a la velocidad y utilizando callbacks discretas.
- (c) Hacer una animación del movimiento de la pelota, mostrando un punto que se mueve en pantalla. Para graficar un punto se puede utilizar el comando:

`scatter([x],[y])`

donde x e y son las coordenadas del punto.

Ejercicio 21. Las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa m cargada con una carga q en un campo magnético \vec{B} son las ecuaciones de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ que pueden descomponerse en términos de posición y velocidad como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \\ \dot{z}(t) &= v_z(t) \\ \dot{v}_x(t) &= \frac{q}{m} \cdot (v_y B_z - v_z B_y) \\ \dot{v}_y(t) &= \frac{q}{m} \cdot (v_z B_x - v_x B_z) \\ \dot{v}_z(t) &= \frac{q}{m} \cdot (v_x B_y - v_y B_x),\end{aligned}$$

donde los subíndices x, y, z indican la coordenada del vector correspondiente (\vec{v} ó \vec{B}).

Considerar una partícula de masa $m = 0.5\text{Kg}$ cargada con carga $q = 1\text{C}$ sometida a un campo magnético estático a lo largo del eje Z $\vec{B} = (0, 0, B)$ con $B = 0.11\text{Kgs}^{-1}\text{C}^{-1}$. Supongamos que la velocidad inicial de la partícula es $\vec{v} = (v, 0, 0)$ con $v = 0.1\text{ms}^{-1}$.

- (a) Simular el sistema.
- (b) Verificar que la partícula describe una trayectoria circular en el plano $z = 0$.

- (c) Se desea conocer el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta. Hallarlo haciendo uso de una `ContinuosCallback` y de la función `terminate!`.
- (d) ¿Qué sucede si se cambia el signo de la velocidad inicial?
- (e) Realizar experimentos y conjeturar cómo cambia el período en función de la velocidad inicial.

Ejercicio 22. Considerar la ecuación del oscilador armónico amortiguado:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t, x),$$

donde $m > 0$ es la masa atada al resorte de constante $k > 0$, $b > 0$ es el coeficiente de rozamiento y f es un forzante. Asumimos que la condición inicial es $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$

- (a) Resolver numéricamente para $f = 0$ tomando valores de m , b y k tales que $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ y $\Delta = 0$, siendo $\Delta = b^2 - 4mk$. Graficar y corroborar que el comportamiento obtenido es el esperado.
- (b) Para el caso subamortiguado, $\Delta < 0$. Resolver numéricamente con $f(t, x) = \sin(t)$.
- (c) Repetir con $f(t, x) = \cos(\lambda t)$ donde $\lambda = \frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}$. ¿Qué se observa?
- (d) Resolver para $f = 0$ y $b = 0$, $k = m = 1$ para tiempo entre 0 y 1000. ¿Qué se observa? ¿Es correcto este comportamiento? Una propiedad importante de este caso es que, al no haber rozamiento, se conserva la energía, siendo $E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Para cada punto de la solución, calcular E y decidir si se mantiene constante. Volver a resolver fijando valores chicos para `abstol` y `reltol`. ¿Qué ocurre ahora?
- (e) En muchos contextos es importante que el método numérico preserve este tipo de propiedades físicas. Más allá de la reducción de las tolerancias, existe la posibilidad de forzar al solver a mantener la solución en un determinado subconjunto del espacio (es decir: a cumplir una restricción). Para ello podemos resolver utilizando una callback function de la forma:

```
cb = ManifoldProjection(g!)
sol = solve(prob, Tsit5(), save_everystep=false, callback=cb)
```

donde `g!=g!(res,u,p,t)` es una función definida por el usuario en la que `res` es el output y se asume que es tiene la misma forma que `u` (en nuestro caso, un vector de dos coordenadas, una de las cuales valdrá siempre 0 y la otra debe contener la ecuación). Con esta sintaxis el método procura que la solución cumpla que `res=0` para todo punto. Implementar una función `g` adecuada, tal que cuando $g = 0$ se tenga que E es constante. Resolver.

Clase 5

Ejercicio 23. Considerar las ecuaciones:

- $\dot{x} = \mu - x^2$
- $\dot{x} = \mu x - x^2$
- $\dot{x} = \mu x - x^3$

Utilizando la librería `BifurcationKit` realizar un diagrama de bifurcación de cada uno de estos problemas. Luego, tomar valores de μ representativos de las distintas situaciones que puede presentar la ecuación y para cada uno de ellos realizar diagramas de fase en el plano (t, x) .

Ejercicio 24. Realizar un diagrama de bifurcación del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \mu x - xy^2, \\ \dot{y} &= \mu y - x - y^3. \end{cases}$$

Graficar diagramas de fases para valores significativos de μ .

Ejercicio 25. Considerar el modelo de Holling-Tanner

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(1 - \frac{x}{7} \right) - \frac{xy}{7+7x} \\ \dot{y} &= 0.2y \left(1 - \frac{Ny}{x} \right). \end{aligned}$$

- Realizar un diagrama de bifurcaciones en el parámetro N .
- Hallar los equilibrios para $N = 0.5$. Linealizar en torno a los equilibrios y esbozar los diagramas de fase del problema linealizado.
- Graficar un diagrama de fases del problema no lineal utilizando. Comparar.

Ejercicio 26. Consideramos el oscilador de de Van der Pol, dado por la ecuación: $\ddot{x} = \mu(1-x^2)\dot{x} + x$.

- Realizar un diagrama de bifurcación.
- Realizar un diagrama de fases en el plano (x, \dot{x}) para distintos valores de μ . ¿Qué se observa?

Ejercicio 27. Considerar la ecuación (escalada) $\dot{n} = (n+n_0)(1-n) - \frac{\alpha n^\gamma}{\beta+n^\gamma}$ utilizada por Boccara para modelar el crecimiento de pandillas callejeras (todos los parámetros son positivos). El primer término corresponde al crecimiento logístico con equilibrio desplazado del origen, mientras que el segundo corresponde a la respuesta social: es creciente con n , pero tiene un cierto límite. El parámetro γ modula la *dureza* de la respuesta social (¿Por qué?).

- Fijar un valor de γ y un valor de n_0 y graficar conjuntamente $p(n) = (n+n_0)(1-n)$ y $g(n) = \frac{\alpha n^\gamma}{\beta+n^\gamma}$ para distintos valores de $\alpha \in (0; 0.5)$ y $\beta \in (0; 0.5)$. ¿Qué se observa? ¿Será posible que el sistema tenga dos equilibrios?
- Realizar diagramas de bifurcación en α y en β .
- Elegir combinaciones de α y β que representen distintos comportamientos y realizar los diagramas de fase correspondientes. Interpretar.

Ejercicio 28. Péndulo: Se considera el problema del péndulo:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -A \sin(\theta(t)) - b\dot{\theta} & \text{en } [0, T] \\ \dot{\theta}(0) = v_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

donde θ representa el ángulo que forma la vara del péndulo con la vertical.

- Formular el problema como un sistema de ecuaciones de orden uno.
- Realizar diagramas de bifurcación respecto de cada parámetro.
- Graficar diagramas de fase y comparar con el caso lineal (e.g.: el Ejercicio 22).

Ejercicio 29. Realizar diagramas de bifurcación del sistema predador-presa del ejercicio 7, en cada uno de los parámetros. Realizar diagramas de fases para distintos valores de los parámetros y observar las variaciones.

Ejercicio 30. Considerar un sistema formado por dos especies que compiten por un mismo recurso:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\beta - \delta x - \gamma y) \\ \dot{y} &= y(b - dy - cx),\end{aligned}$$

que tiene cuatro equilibrios en los puntos:

$$O = (0, 0) \quad P = \left(0, \frac{b}{d}\right) \quad Q = \left(\frac{\beta}{\delta}, 0\right) \quad R = \left(\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}\right),$$

donde $C_1 = \gamma c - \delta d$, $C_2 = \gamma b - \beta d$ y $C_3 = \beta c - \delta b$. Observar que para que R esté en el primer cuadrante es necesario que C_1 , C_2 y C_3 tengan todos el mismo signo.

- Interpretar el significado de los parámetros.
- Realizar diagramas de fases y graficar el campo de velocidades para valores de C_i positivos para todo i y negativos para todo i . ¿Qué se observa?
- Realizar diagramas de bifurcación respecto de cada parámetro.

Ejercicio 31. Considerar el siguiente sistema, propuesto por Rössler:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz, \end{cases}$$

donde a, b, c son constantes. Tomar $a = b = 0.2$ y $x_0 = y_0 = z_0 = 1$.

- Para $c = 2.3$, hallar y graficar un ciclo límite. Para ello, resolver el sistema para un tiempo relativamente largo y luego volver a resolver tomando como dato inicial el último punto de la trayectoria anterior. Graficar las tres componentes de la solución y graficar el ciclo en \mathbb{R}^3 . De yapa, puede calcularse el período del ciclo a través de una callback function.
- Repetir el experimento para $c = 3.3$.
- Repetir el experimento para $c = 6.3$. ¿Se alcanza un ciclo límite en este caso?
- Para $c = 6.3$ resolver también para $x_0 = 1.01$, $y_0 = z_0 = 1$ y comparar (por separado) las componentes x , y y z de esta solución perturbada con la solución original, con dato $x_0 = y_0 = z_0 = 1$.

Ejercicio 32. El sistema de Lorenz está dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{cases}$$

donde asumiremos $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$.

- Observar que para $0 < r < 1$ hay un único punto crítico, en el origen. Realizar algunos diagramas de fase para este caso.

- (b) Realizar un diagrama de fases para el caso $r = 1$ y para $r = 2$.
- (c) Para $r = 15$ buscar un ciclo límite inestable. Para ello, invertir el tiempo tomando por ejemplo `tspan=(10.0,0.0)`.
- (d) Resolver para $r = 25$ y graficar la solución. Como en el ejercicio anterior: de ser necesario reiniciar la resolución a partir del final de la simulación previa para así encontrar el atractor de Lorenz.
- (e) De yapa: hacer una animación en la que un punto se mueva a lo largo de la trayectoria al tiempo que la va dibujando.