FYS3150 Prosjekt 1

tobias

September 2017

1 Introduction

2 Metode/Fremgangsmåte

Differensialligningen vi vil løse ser slik ut:

$$-u''(x) = f(x) \tag{1}$$

Differensialligningen vår (Poisson-ligningen) kan omgjøres til et lineært ligningsett, som deretter kan løses ved Gauss-eliminasjon. Først diskretiserer vi (1). Den andrederiverte av u kan da tilnærmes som:

$$-\frac{v_{i+1} + v_{i-1} - 2v_i}{h^2} = f_i \tag{2}$$

hvor $i = 1, ..., n$, $f_i = f(x_i)$ og vi har definert steglengden $h = \frac{1}{n+1}$ (fra oppgaveteksten). Ligning (2) kan da skrives som matriseligningen

$$\mathbf{A}\vec{v} = \vec{b} \tag{3}$$

hvor $b_i = h^2 f_i$.

2.1 Gauss eliminasjon

Ligning (3) gir oss følgende system (gitt et 4x4-tilfelle):

$$a11v1 + a12v2 + a13v3 + a14v4 = b1$$

$$a21v1 + a22v2 + a23v3 + a24v4 = b2$$

$$a31v1 + a32v2 + a33v3 + a34v4 = b3$$

$$a41v1 + a42v2 + a43v3 + a44v4 = b4$$

Den generelle ideen bak Gauss eliminasjon er så å bruke den første ligningen til å eliminere den første ukjente v_1 fra de siste n-1 ligningene, for så å bruke den nye (andre) ligningen til å eliminere den andre ukjente v_2 fra de gjenværende n-2 ligningene. Med n-1 slike eliminasjoner vil man sitte igjen med et såkalt øvre triangulært ligningssett (bare nuller under hoveddiagonalen). Dette kalles også en framover-substitusjon. Det andre trinnet i metoden er en bakoversubstitusjon som vil gi oss løsningen.

2.2 Generell framover-substitusjon

Algoritmen vår for framover-substitusjon (for et generelt system) er altså basert på Gauss eliminasjon, og blir implementert i koden vår med en for loop over elementene i. For hver i oppdateres så diagonalelementene b_i med de nye diagonalelementene $\tilde{b_i}$:

$$\tilde{b_i} = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\tilde{b_{i-1}}} \tag{4}$$

Den nye høyresiden $\tilde{f_i}$ er da gitt ved:

$$\tilde{f_i} = f_i - \frac{a_i \tilde{f_{i-1}}}{\tilde{b_{i-1}}} \tag{5}$$

2.3 Generell bakover-substitusjon

Bakover-substitusjonen gir oss så den endelige løsningen:

$$u_{i-1} = \frac{\tilde{f_{i-1}} - c_{i-1} u_i}{\tilde{b_{i-1}}} \tag{6}$$

hvor $u_n = \tilde{f_n}/\tilde{b_n}$ når $i = n$.

2.4 Spesiell framover-substitusjon

Som nevnt tidligere så svarer ligning (nummer) for den andrederiverte av u til matrisen A i (3). Denne matrisen har identiske elementer langs hele hoveddiagonalen samt identiske (men forskjellige) elementer både på diagonalen rett ovenfor og rett nedenfor hoveddiagonalen. Dette faktum kan brukes til å lage en algoritme spesifikt for A, som også består av en framover- og bakover-substitusjon henholdsvis. Framover-substitusjonen gir oss matrisens nye diagonalelementer $\tilde{d_i}$:

$$\tilde{d_i} = 2 - \frac{1}{\tilde{d_{i-1}}} = \frac{i+1}{i} \tag{7}$$

samt den nye høyresiden $\tilde{f_i}$ av ligningen:

$$\tilde{f_i} = f_i + \frac{(i-1)\tilde{f_{i-1}}}{i} \tag{8}$$

2.5 Spesiell bakover-substitusjon

Bakover-substitusjonen gir oss nok en gang den endelige løsningen:

$$u_{i-1} = \frac{i-1}{i}(\tilde{f_{i-1}} + u_i) \tag{9}$$

med $u_n = \tilde{f_n}/\tilde{b_n}$.

2.6 Relativ feil

Vi er også interesserte i å kalkulere den relative feilen i resultatene for å kunne sammenligne den numeriske løsningen vår v med den analytiske løsningen $u(x)$. Den relative feilen er gitt ved:

$$\epsilon_i = log_{10}\left(\left|\frac{v_i - u_i}{u_i}\right|\right) \tag{10}$$

hvor $u(x) = 1 - (1 - e^{-10})x - e^{-10x}$.