Trigonometrie

1 Sätze

1.1 Satz 1 bis 4

$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$

$\sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha)$

$\cos(90 + \alpha) = -\sin(\alpha)$

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

1.2 Additionstheoreme (Reihenfolge=Beweise)

1.2.1 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

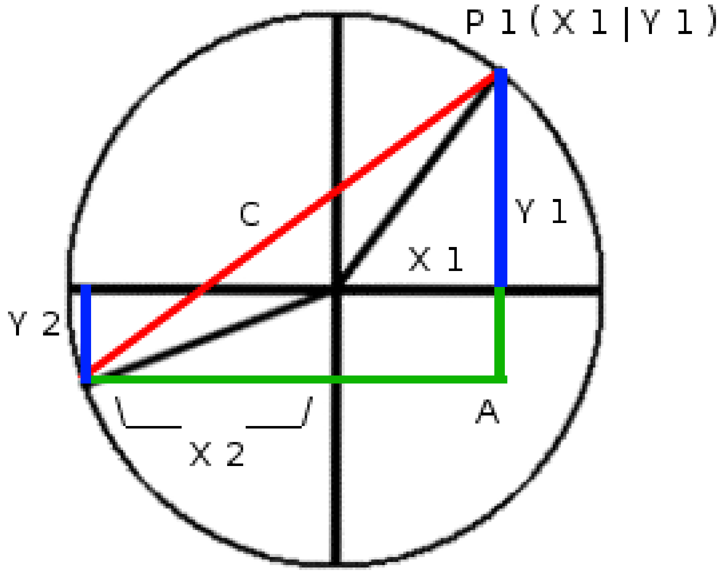

Abbildung 1:

$P_1AP_2\,rechtwinklig$

$P_2A = x_1 - x_2$

$P_1A = y_1 - y_2$

$c^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2$

$c^2 = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 \;+\; x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

$c^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \;-\; 2 * (x_1x_2 + y_1y_2)$

$c^2 = 1 + 1 \;-\; 2 * (x_1x_2 + y_1y_2)$

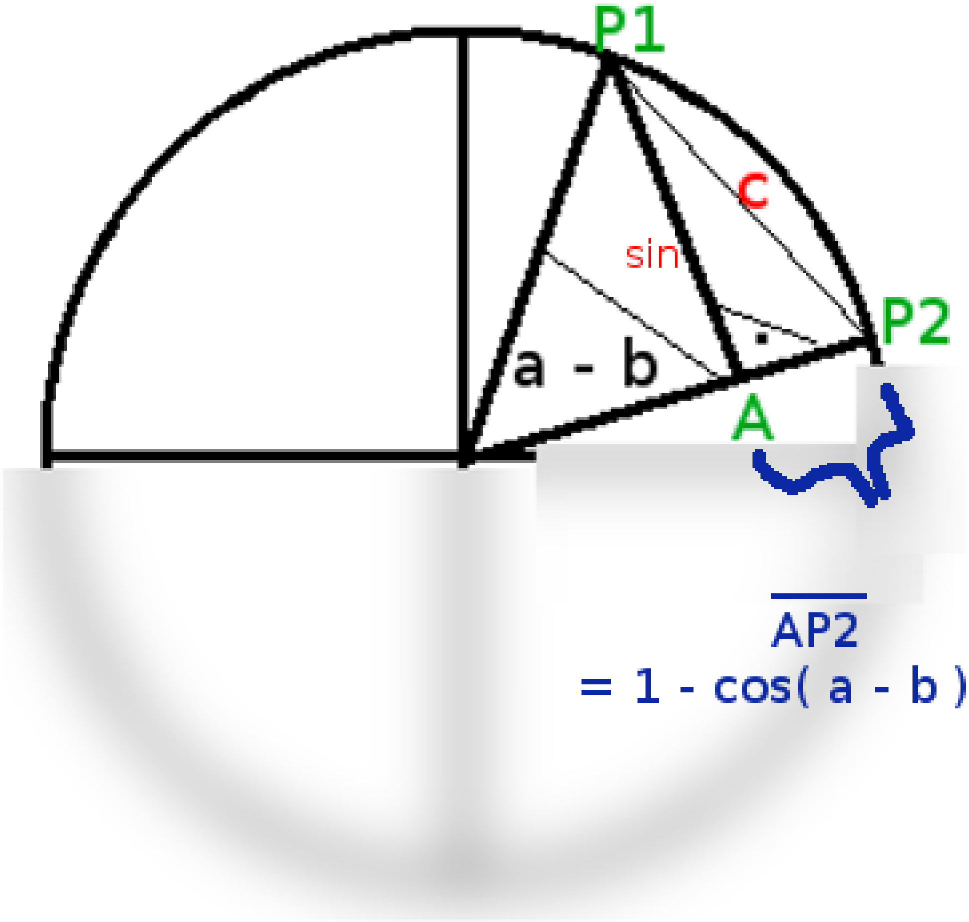

Abbildung 2:

$c^2 = \overline{P_1A}^2 + \overline{P_2A}^2$

Definition: $\varphi = \alpha - \beta$

$c^2 = \sin^2(\varphi) + (1 - \cos(\varphi))^2$

2. Binomische Formel:

$c^2 = \sin^2(\varphi) + 1 - 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)$

$c^2 = 2 - 2\cos(\varphi)$

Ergebnis:

$c^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$ | - 2 | : (-2)

$c^2 = \cos(\alpha - \beta) = x_1x_2 + y_1y_2$

1.2.2 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) * \cos(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta)$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$	»+« entspricht »- -«
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta)$	Anwendung von Satz aus 1.2.1
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	Anwendung von Satz 1 und 4

1.2.3 $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) * \sin(\beta) + \cos(\beta) * \sin(\alpha)$

Satz 3:

$\cos(\varphi + 90°) = -\sin(\varphi)$	| * (-1)
$-\cos(\varphi + 90°) = \sin(\varphi)$	

$\varphi = \alpha + \beta$	Definition (wegen Übersicht)
$\sin(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha + \beta + 90°)$	
$\sin(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha)\cos(\beta + 90°) + \sin(\alpha)\sin(\beta + 90°)$	
$\sin(\alpha + \beta) = -\cos(\alpha) * -\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(-\beta)$	Anwendung von Satz 2 und 3
$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$	Anwendung von Satz 1

1.2.4 $\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) * \sin(\beta) - \cos(\beta) * \sin(\alpha)$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$	»+« entspricht »+ -«
$\sin(\alpha + (-\beta)) = \cos(-\beta) * \sin(\alpha) + \cos(\alpha) * \sin(-\beta)$	
$\sin(\alpha + (-\beta)) = \cos(\beta)\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$	Anwendung Satz 1 und 4

1.2.5 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)*\tan(\beta)}$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \qquad \text{tan entspricht } \frac{\sin}{\cos}$$

Anwendung der bisher bewiesenen Sätze:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha)*\sin(\beta)+\cos(\beta)*\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)-\sin(\alpha)*\sin(\beta)}$$

Nun wird im Zähler und im Nenner durch $\cos(\alpha)*\cos(\beta)$ dividiert, da in dem zu beweisenden Term im Nenner ein $1-$ steht.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\cos(\alpha)*\sin(\beta)+\cos(\beta)*\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)*\cos(\beta)-\sin(\alpha)*\sin(\beta)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}} \qquad \text{Division im Zähler und im Nenner}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\cos(\alpha)*\sin(\beta)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}+\dfrac{\cos(\beta)*\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}-\dfrac{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}+\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-\dfrac{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}} \qquad \text{Kürzen}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\beta)+\tan(\alpha)}{1-\tan(\beta)*\tan(\alpha)} \qquad \frac{\sin}{\cos} \text{ entspricht tan}$$

1.2.6 $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) * \tan(\beta)}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$ tan entspricht $\dfrac{\sin}{\cos}$

Anwendung der bisher bewiesenen Sätze:

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\cos(\alpha) * \sin(\beta) - \cos(\beta) * \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta) + \sin(\alpha) * \sin(\beta)}$

Nun wird im Zähler und im Nenner durch $\cos(\alpha) * \cos(\beta)$ dividiert, da in dem zu beweisenden Term im Nenner ein 1+ steht.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\cos(\alpha) * \sin(\beta) - \cos(\beta) * \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha) * \cos(\beta) + \sin(\alpha) * \sin(\beta)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta)}}$$ Division im Zähler und im Nenner

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\cos(\alpha) * \sin(\beta)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta)} - \frac{\cos(\beta) * \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha) * \cos(\beta)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta)} + \frac{\sin(\alpha) * \sin(\beta)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta)}}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1 + \frac{\sin(\alpha) * \sin(\beta)}{\cos(\alpha) * \cos(\beta)}}$$ Kürzen

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\beta) + \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta) * \tan(\alpha)}$$ $\dfrac{\sin}{\cos}$ entspricht tan

1.2.7 $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot(\alpha)*\cot(\beta)-1}{\cot(\beta)-\cot(\alpha)}$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad \text{cot entspricht } \frac{\cos}{\sin}$$

Anwendung der bisher bewiesenen Sätze:

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha)*\cos(\beta)-\sin(\alpha)*\sin(\beta)}{\cos(\alpha)*\sin(\beta)+\cos(\beta)*\sin(\alpha)}$$

Nun wird im Zähler und im Nenner durch $\sin(\alpha)*\sin(\beta)$ dividiert, da in dem zu beweisenden Term im Zähler ein -1 steht.

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\cos(\alpha)*\cos(\beta)-\sin(\alpha)*\sin(\beta)}{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)*\sin(\beta)+\cos(\beta)*\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}} \qquad \text{Division im Zähler und im Nenner}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\cos(\alpha)*\cos(\beta)}{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}-\frac{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)*\sin(\beta)}{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}+\frac{\cos(\beta)*\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)*\sin(\beta)}}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot(\alpha)*\cot(\beta)-1}{\cot(\alpha)+\cot(\beta)} \qquad \text{Kürzen}$$

1.2.8 $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot(\alpha) * \cot(\beta) + 1}{\cot(\beta) - \cot(\alpha)}$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} \qquad \text{cot entspricht } \frac{\cos}{\sin}$$

Anwendung der bisher bewiesenen Sätze:

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cos(\alpha) * \cos(\beta) + \sin(\alpha) * \sin(\beta)}{\cos(\alpha) * \sin(\beta) - \cos(\beta) * \sin(\alpha)}$$

Nun wird im Zähler und im Nenner durch $\sin(\alpha) * \sin(\beta)$ dividiert, da in dem zu beweisenden Term im Zähler ein $+1$ steht.

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\dfrac{\cos(\alpha) * \cos(\beta) + \sin(\alpha) * \sin(\beta)}{\sin(\alpha) * \sin(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha) * \sin(\beta) - \cos(\beta) * \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) * \sin(\beta)}} \qquad \text{Division im Zähler und im Nenner}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\dfrac{\cos(\alpha) * \cos(\beta)}{\sin(\alpha) * \sin(\beta)} + \dfrac{\sin(\alpha) * \sin(\beta)}{\sin(\alpha) * \sin(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha) * \sin(\beta)}{\sin(\alpha) * \sin(\beta)} - \dfrac{\cos(\beta) * \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) * \sin(\beta)}}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot(\alpha) * \cot(\beta) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\beta)} \qquad \text{Kürzen}$$

1.2.9 $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)$
$\sin(2\alpha) = 2 * \sin(\alpha)\cos(\alpha)$

1.2.10 $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha)$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
Addition von: $+\sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 0$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
$\rightarrow \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
$\Rightarrow \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

1.2.11 $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

Gegeben: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

$$\alpha = 2 * \frac{\alpha}{2}$$
$$\cos(2\frac{\alpha}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$$
$$\cos(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2}) \qquad |-1$$
$$\cos(\alpha) - 1 = -2\sin^2(\frac{\alpha}{2}) \qquad |/(-2)$$
$$\frac{\cos(\alpha)-1}{-2} = \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \qquad \text{Umformen}$$
$$\frac{1-\cos(\alpha)}{2} = \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \qquad |\text{Quadratwurzel}$$
$$\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} = \left|\sin(\frac{\alpha}{2})\right| \qquad |\text{Quadratwurzel}$$

1.2.12 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

Gegeben: $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$

$\alpha = 2 * \frac{\alpha}{2}$

$\cos(2\frac{\alpha}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$

Ersetzen der »1«, weil:

$$1 = \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)$$

$\cos(\alpha) = \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$

$\cos(\alpha) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\frac{\alpha}{2})$ Weil: $x - 2x = -x$

Anwendung der zuletzt bewiesenen Formel:

$$\cos(\alpha) = \cos^2(\beta) - \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$$

Quadrat alleine rechts, weil im zu beweisenden Term eine Quadratwurzel vorkommt:

$$\cos(\alpha) + \frac{1-\cos(\alpha)}{2} = \cos^2(\beta)$$

Gleicher Nenner:

$$\frac{2\cos(\alpha) + 1 - \cos(\alpha)}{2} = \cos^2(\beta)$$

Zusammenfassen:

$$\frac{1+\cos(\alpha)}{2} = \cos^2(\beta)$$

Wurzel ziehen:

$$\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}} = \cos(\beta)$$

1.2.13 $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$

$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha)$

$$= \cos(2\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(2\alpha)$$

Vertauschen, kommutativ:

$$= \cos(\alpha)\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)\sin(\alpha)$$

Anwendung der letzten beiden Formeln:

$$= \cos(\alpha) * [2\sin(\alpha)\cos(\alpha)] + \sin(\alpha) * [1 - 2\sin^2(\alpha)]$$

Umformen:

$$= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha) - 2\sin^3(\alpha)$$

Ausklammern: (Hintergrund: Es darf kein »cos« vorkommen, nächster Schritt...)

$$= 2\sin(\alpha) \; * \; [\; \cos^2(\alpha) \; - \; \sin^2(\alpha) \;] \; + \sin(\alpha)$$

Anwenden: $-y = y - 2y$

$$= 2\sin(\alpha) \; * \; [\; \cos^2(\alpha) \; + \; \sin^2(\alpha) \; - \; 2\sin^2(\alpha) \;] \; + \sin(\alpha)$$

Anwenden: $1 = \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)$

$$= 2\sin(\alpha) \; * \; [\; 1 \; - \; 2\sin^2(\alpha) \;] \; + \sin(\alpha)$$

$$= 2\sin(\alpha) * 1 \; - \; 4\sin^3(\alpha) \; + \sin(\alpha)$$

$$= 3\sin(\alpha) * 1 \; - \; 4\sin^3(\alpha)$$