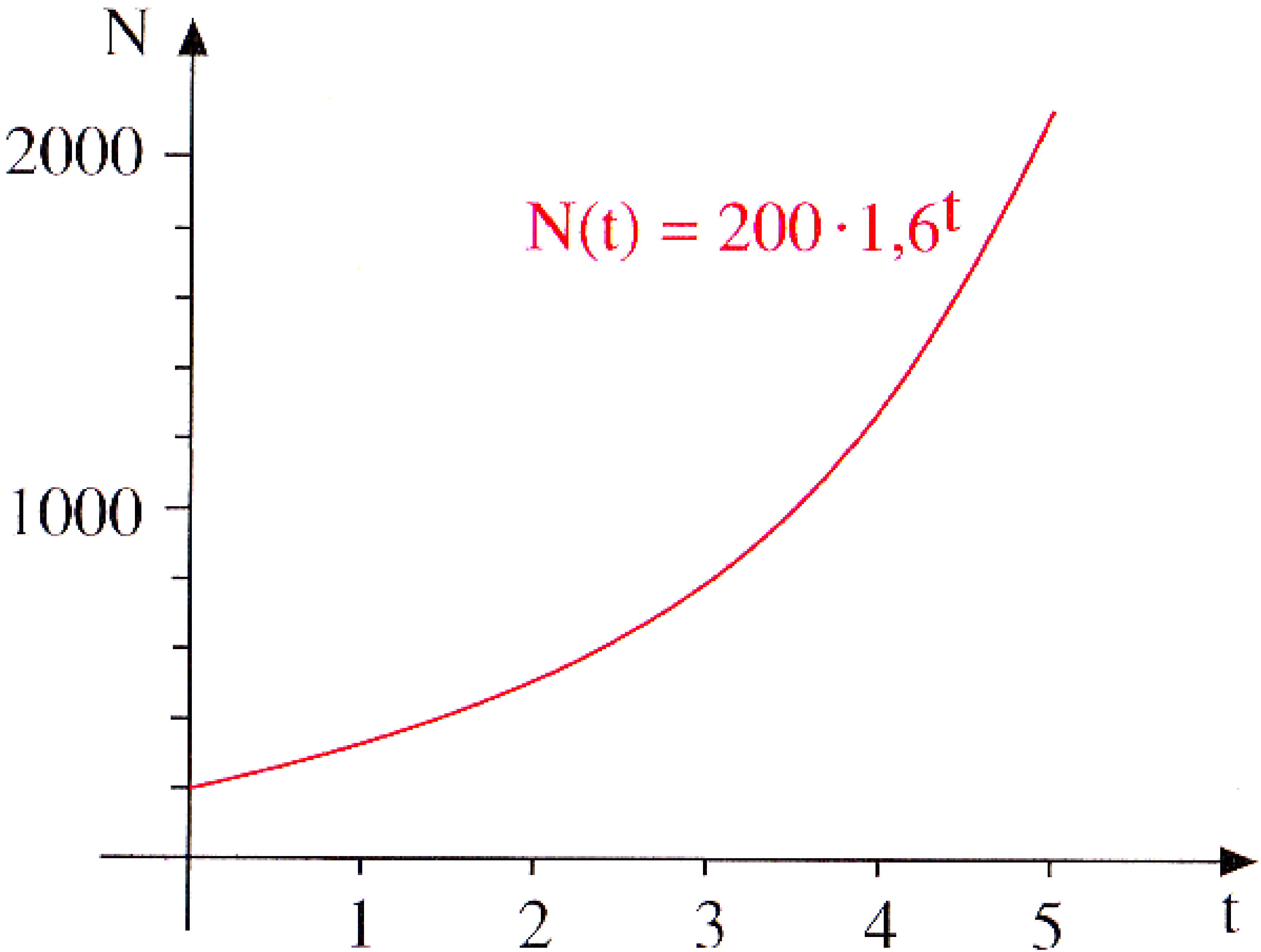
# Exponentialfunktionen

# Beispiel: Bakterienwachstum

- Gegeben:
  - Täglich: +60%
  - Beobachtungsbeginn: 200 Bakterien
- Gesucht:
  - Funktion N(t)
    - N: Population
    - t: Zeit in Tagen


N
2000
1000
$N(t) = 200 \cdot 1{,}6^t$
1
2
3
4
5
t

# Beispiel: Zinsrechnung

- Gegeben:
  - Jährlich: +5%
  - Startkapital: 500€
- Gesucht:
  - Wann beträgt das Kapital 20000€?

# Beispiel: Zinsrechnung

- Funktion:

$$K(t) = 500 * 1{,}05^{t}$$

- Umstellen:

$$\frac{K}{500} = 1{,}05^{t} \qquad t = \log_{1,05} \frac{K}{500}$$

$$t = \log_{1,05} \frac{20000}{500} = 75{,}6$$

# Differenzieren

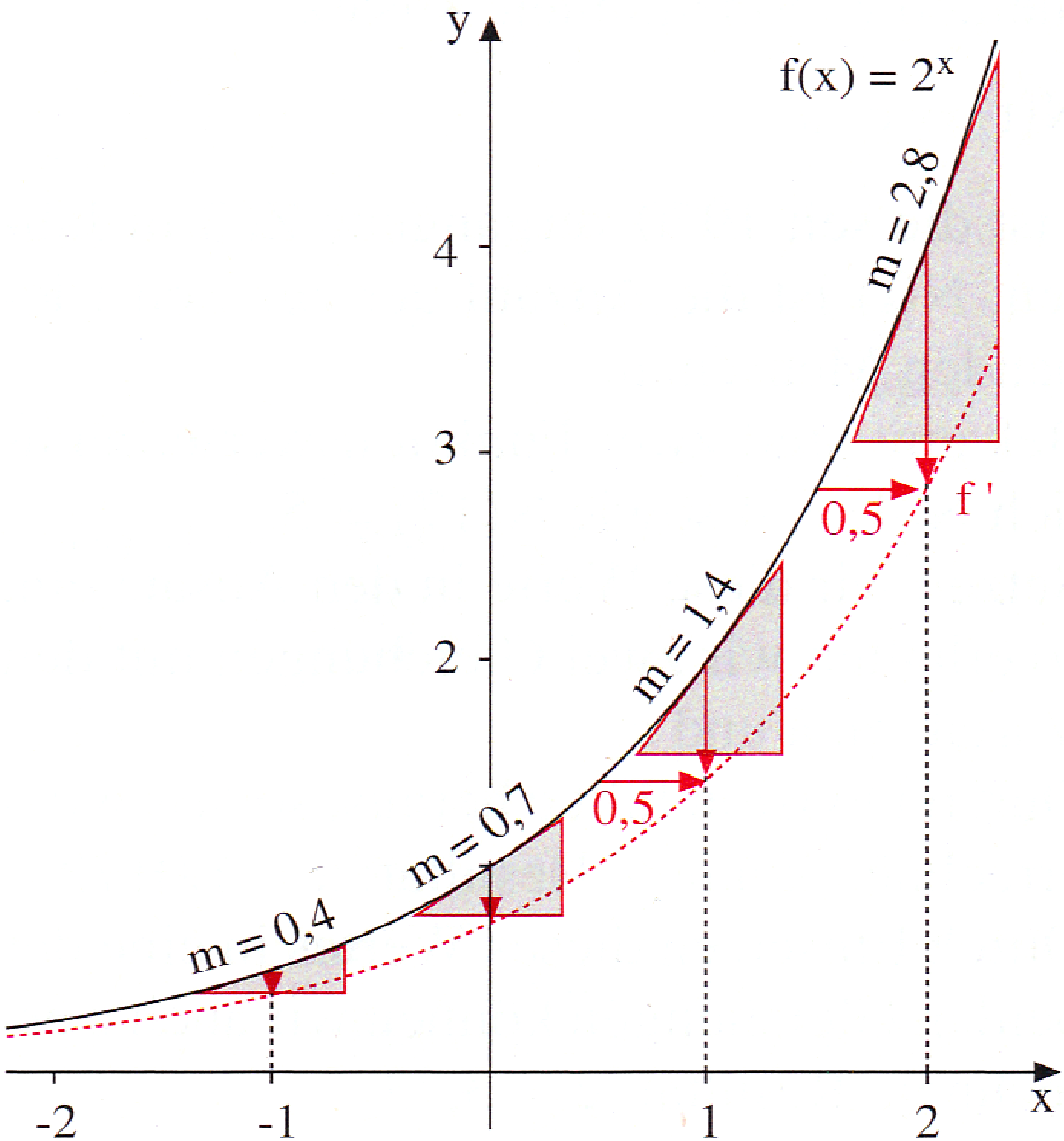
- Gegeben:

$$f(x) = x^2$$

- Gesucht:

$$f'(x) = ?$$

# Grafisches Differenzieren




- Die Ableitung scheint ebenfalls eine Exponentialfunktion zu sein
- Vermutung:

$$f'(x) = c * f(x)$$

$$f'(0) = c * f(0) = c = 0{,}7$$

=> $f'(x) = 0{,}7 * f(x)$

# Rechnerisches Differenzieren

- Differenzialquotient (Steigung einer Sekante an f):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{2^h - 1}{h} * 2^x\right)$$

=> $f'(x) \approx 0{,}693$

# Die Eulersche Zahl

- Gesucht ist eine Zahl e als Basis einer Exponentialfunktion, für die der eben berechnete Grenzwert den Wert 1 hat, für die also gilt:

$$e^x = (e^x)'$$

$$\lim_{h \to 0} \left( \frac{e^h - 1}{h} \right) = 1$$

# Die Eulersche Zahl

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1 \qquad \Rightarrow \frac{e^h-1}{h}\approx 1 \qquad \Rightarrow \frac{e^h}{h}-\frac{1}{h}\approx 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^h}{h}\approx 1+\frac{1}{h} \qquad \Rightarrow e^h\approx h+1 \qquad \Rightarrow h=\frac{1}{n},\, h\to 0,\, n\to\infty$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{n}}\approx \frac{1}{n}+1 \qquad \Rightarrow \sqrt[n]{e}\approx \frac{1}{n}+1 \qquad \Rightarrow e\approx \left(\frac{1}{n}+1\right)^n$$

$$\Rightarrow e=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^n$$

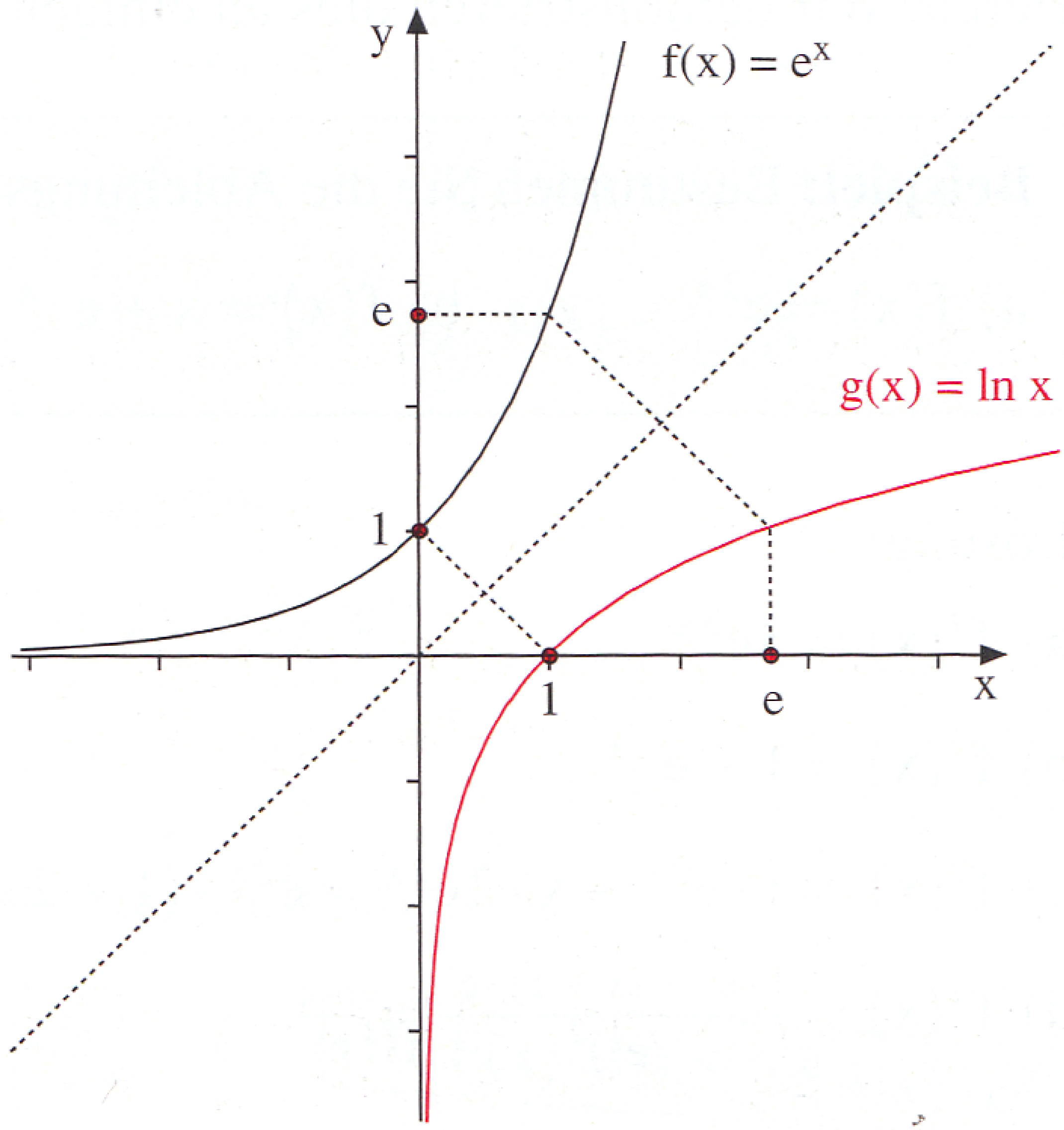
# Die Eulersche Zahl

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$$

| $n \to \infty$ | $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n$ |
|---|---|
| 1 | 2.0000000000 |
| 10 | 2.5937424601 |
| 1.000 | 2.71692393224 |
| 100.000 | 2.71826823719 |

$$\begin{aligned} e = 2{,}&71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995 \\ &95749\,66967\,62772\,40766\,30353\,54759\,45713\,82178\,52516\,64274 \\ &27466\,39193\,20030\,59921\,81741\,35966\,29043\,57290\,03342\,95260 \\ &59563\,07381\,32328\,62794\,34907\,63233\,82988\,07531\,95251\,01901\ldots \end{aligned}$$

# Der natürliche Logarithmus



# Der natürliche Logarithmus

- Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion:

$$\ln\left(e^{x}\right) = x$$

$$e^{\ln(x)} = x$$