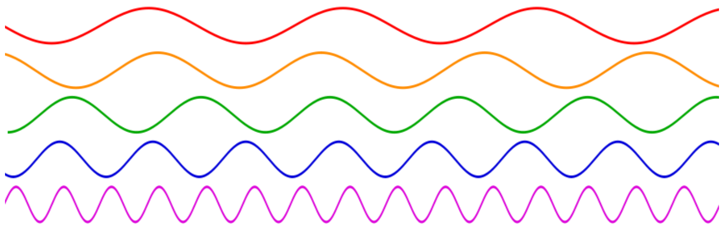
Frequenzdarstellung durch Fourier-Transformation

Frequenzbereich

→ Bisher Signal nur im *Zeitbereich* betrachtet,
- Amplitude (Signalstärke) als Funktion der Zeit dargestellt

→ Signal im *Frequenzbereich*,
- Welche Frequenzanteile im Signal in welcher „Stärke“ vorkommen
- Nützlich für Signalverarbeitung
- Hilft beim Verstehen des Signals
- Frequenzrepräsentation eines Signals: Spektrum
  - Hier erst einmal: Amplitudenspektrum, Phase: Später

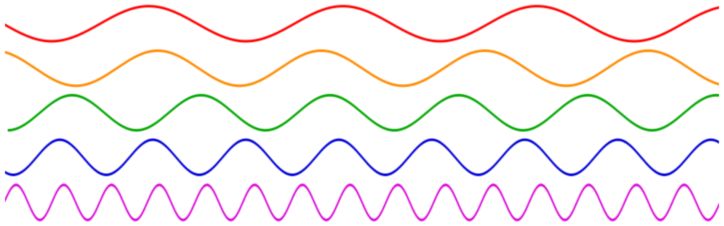


Quelle: Wikipedia (englisch, "Frequency")

Frequenzbereich

→ Frequenz: "Schwingungen pro Zeiteinheit",
  - Bei Zeiteinheit 1 Sekunde: Einheit Hertz
  - 1 Hertz = 1 Schwingung pro Sekunde.

→ Beispiel: Die Frequenz der Sinuswellen steigt von oben nach unten. x ist die Zeitachse.



Quelle: Wikipedia (englisch, "Frequency")

Frequenzbereich

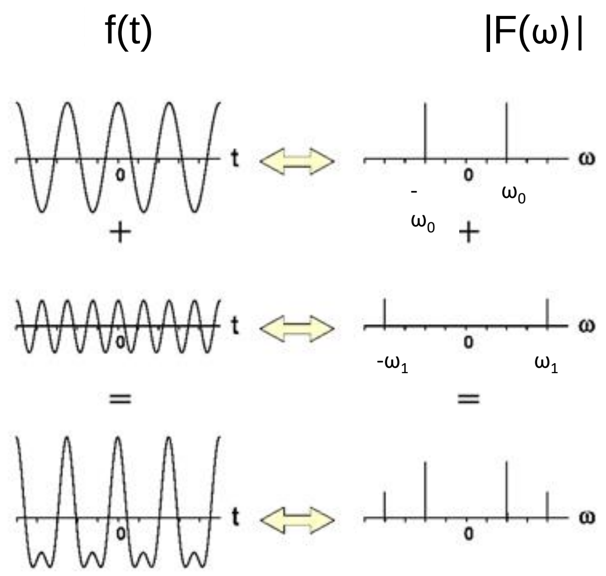
→ Beispiel: Links Signale im Zeitbereich, rechts Signale im Frequenzbereich.

- Oben: Frequenz ω_0
- Mitte: Frequenz ω_1.

→ Reelle Signale: Frequenzdarstellung symmetrisch.

→ Unten: Summe der Signale.

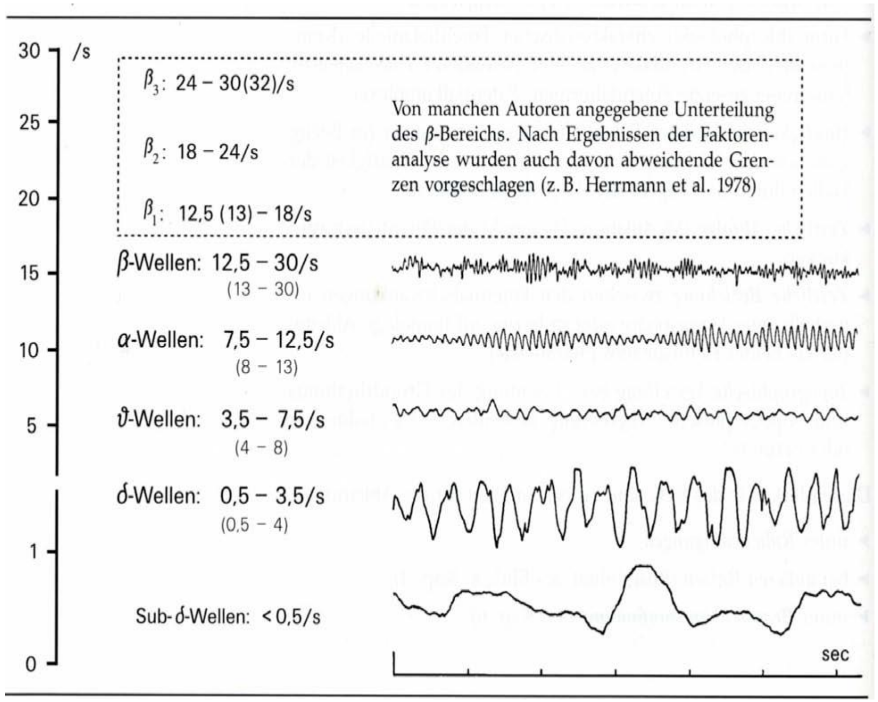
- Kompliziertes Signal besteht aus mehreren Frequenzen.
- Sinusschwingungen haben eine reine Frequenz.



→ Frequenzbereich: Die x-Achse zeigt die *Frequenz*! (rechts)

EEG-Frequenzbänder

- EEG wird häufig in Frequenzbereiche mit den Namen delta, theta, alpha, beta, und gamma bezeichnet (Nomenklatur)
- Frequenzeinteilung ist empirisch entstanden
- Synchronisierung der Gehirnpotentiale über größere Kortexareale
- Bänder haben unterschiedlichen neurowissenschafltichen Hintergrund (teilweise nicht vollständig bekannt)
- Anzahl der Bänder und genaue Grenzen variieren je nach Autor
- Grenzen und Intensität der Rhythmen sind personenspezifisch
- Amplituden werden relativ zum zugrundeliegenden Rhythmus betrachtet



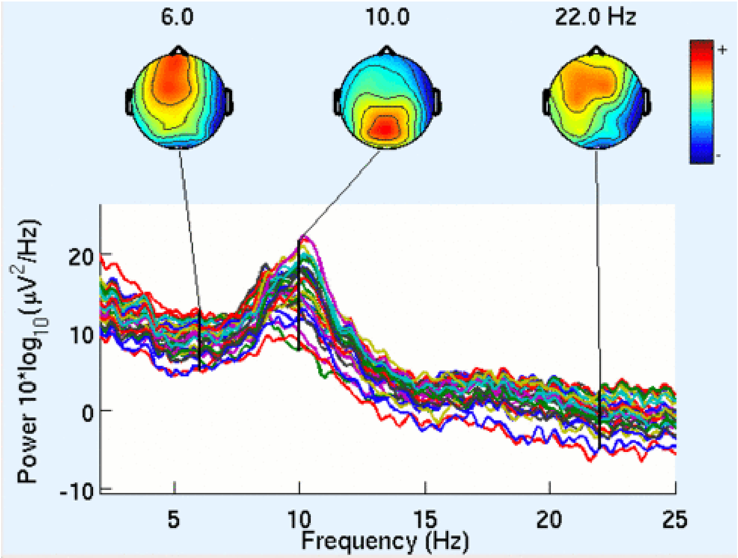
EEG-Frequenzbänder

→ Unterschiedliche Wachheitsgrade führen zu Änderungen des EEG Frequenz-Spektrums

Alpha	**8 – 13 Hz**	**20 – 120 μV**	**Wach, entspannt, Augen geschlossen**
Beta	13 – 30 Hz	5 – 50 μV	Augen offen, Aufmerksamkeit
Gamma	31 – 60 Hz	< 10 μV	Anspruchsvolle Tätigkeiten, Konzentration, Lernen
Theta	4 – 8 Hz	20 – 100 μV	Übergang zum Schlaf, leichte Schlafphase, Reaktion nur noch auf starke Umweltreize
Delta	0.5 – 4 Hz	5 – 250 μV	Traumlose Tiefschlafphase (ansonsten Hinweis auf patholog. Veränderungen)

Topographie von Gehirnaktivität im EEG

- EEG hat schlechte räumliche Auflösung
- Trotzdem häufig hilfreich die grobe topographische Struktur des EEG zu analysieren
- Scalp maps: Grafischen Darstellung der Hirnaktivität an der Kopfoberfläche (Energie interpoliert zwischen den Elektroden)
- Plot zeigt
  - Spektren der einzelnen Kanäle
  - Örtliche Energieverteilung bei 6, 10 und 22Hz durch scalp maps
- Komplexere Verfahren zur Quellenlokalisation aus EEG existieren haben aber eine räumliche Auflösung von einigen Zentimetern

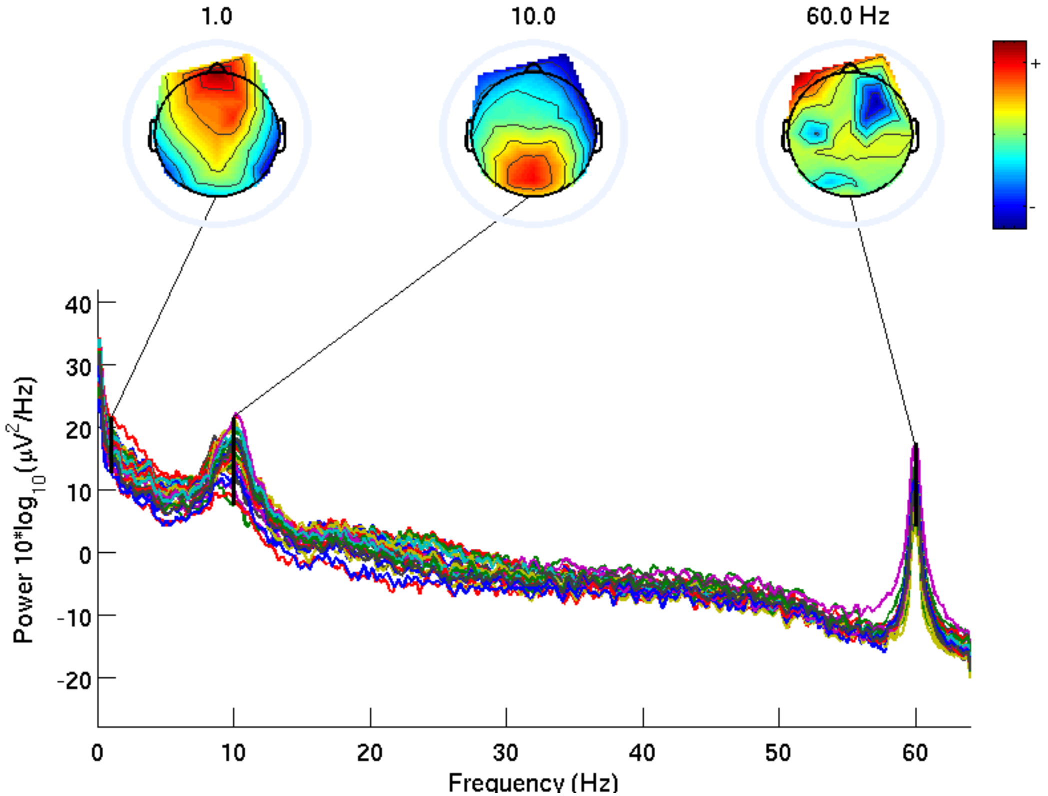


EEG im Frequenzbereich

→ Spektrale Leistung (d.h. Amplitude im Zeitbereich) nimmt mit steigender Frequenz ab (y-Achse ist logarithmisch)

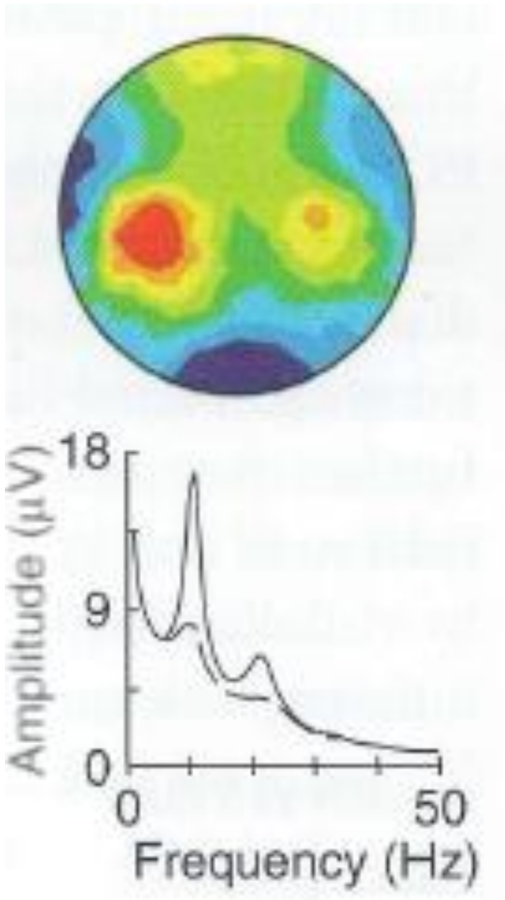
→ Deutlich im Spektrum erkennbar
- 1 Hz: stark Frontale Aktivität vmtl. Augenartefakte
- 10 Hz: okzipitale Alpha Aktivität
- 60 Hz: Netzbrummen (USA)

→ Beispiel: Visueller Aufmerksamkeitstask
(Makeig et al. J Neurosci. 19:2665-80, 1999)
- 128 Hz Sampling Rate
- 32 Kanäle



Spektrum EEG

- EEG
- Motor-Imagery
  - Versuchsperson stellt sich vor, Hand zu bewegen



Continuous-Time Fourier Transform (CTFT)

Sei *x(t)* ein Signal (eine Funktion) im Zeitbereich. Dann ist die Fourier-Transformierte gegeben durch

$$X(\omega) = F(x)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Die Umkehrung der Fourier-Transformation ist

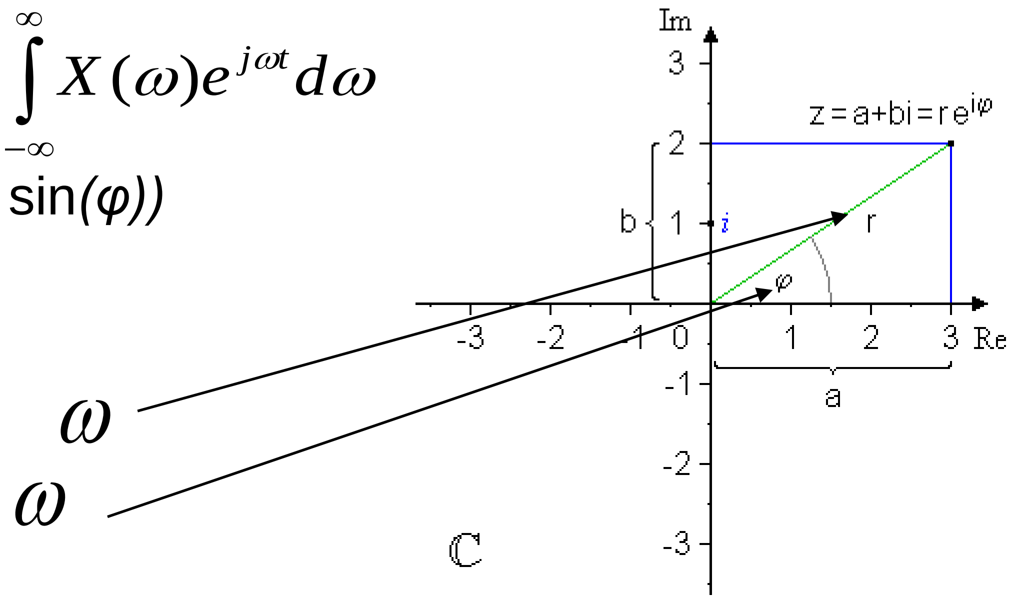
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

wobei komplexe Zahl $X(\omega)$ = $re^{j\varphi} = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$

und $j = \sqrt{-1}$

$|X(\omega)|$ = *Amplitude der Frequenz*

Winkel φ = Phase der Frequenz



Grafik: Wikipedia, „Komplexe Zahl“

Continuous-Time Fourier Transform (CTFT)

Die Fourier-Transformation ist:

- Linear: $F((x+y)(t)) = F(x(t)) + F(y(t)), F(a \cdot x(t)) = aF(x(t))$.
- Umkehrbar: Auf geeigneten Definitionsbereichen hat die Fourier-Transformation ein Inverses (siehe letzte Folie). Daraus folgt direkt, dass bei der Fourier-Transformation *keinerlei Information verlorengeht.*
- $X(\omega)$ ist ein Wert, der angibt, welchen "Anteil" die Frequenz ω am Eingabesignal hat.
- Die Fourier-Transformierte einer Funktion ist (i.a.) *komplex*: Der Betrag $|X(\omega)|$ ist die zur betreffenden Frequenz gehörende Amplitude, der Winkel zwischen Real- und Imaginärteil ist die *Phase*.
  - Entsprechend:
    - Punktweiser Betrag des Spektrums: „Betragsspektrum“
    - Punktweiser Winkel: „Phasenspektrum“
- Problem: Aus der Fourier-Transformation eines Signals kann man nicht direkt herauslesen, zu welcher Zeit ein bestimmter Frequenzanteil aufgetreten ist.

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

Fourier-Transformation ist eine kontinuierliche mathematische Funktion.

Wie können wir die Idee auf diskrete Signale übertragen?

Definiere *zeitdiskrete Fouriertransformation (DTFT)* mit Abtastzeit $t_A = 1/f_A$ eines diskreten Signals *x[n]* durch

$$X(\omega) = F(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n t_a}$$

mit der kontinuierlichen Umkehrung

$$x[n] = t_A \int_{-f_A}^{f_A} X(\omega) \cdot e^{\mathrm{j}\omega n t_A} \, \mathrm{d}\omega = \mathrm{DTFT}^{-1}\{X(\omega)\}$$

Wenn x[n] durch diskretes Sampling einer kontinuierlichen Funktion entstanden ist, dann approximiert die DTFT die kontinuierliche Fourier-Transformation.

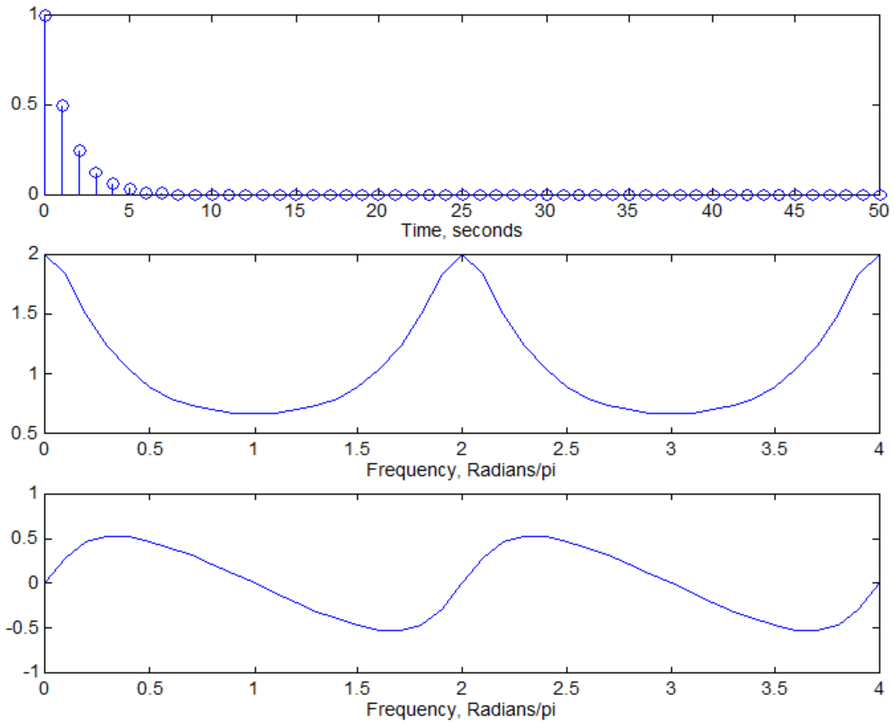
Achtung: die DTFT eines diskreten Signals ist (erst einmal) durch einen *kontinuierlichen* Parameter *ω* parametrisiert.

Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

- Die DTFT ist periodisch in ω mit Periode 2π, daher betrachtet man im Frequenzbereich nur die Frequenzen von $-\pi$ bis π .
  - In der DTFT sind nur Frequenzen unterhalb der *halben Abtastrate (Nyquist-Frequenz*) korrekt wiedergegeben. π entspricht dann der maximalen Frequenz.
- Es gibt einen schnellen Algorithmus (FFT), um die diskrete Fourier-Transformation auszurechnen. Daher kann man die DTFT in der Praxis sehr gut anwenden.
- Auch die DTFT ist komplex.
- Selbes Problem wie bei der CTFT: Aus der diskreten Fourier-Transformation eines Signals kann man nicht herauslesen, zu welcher Zeit ein bestimmter Frequenzanteil aufgetreten ist.

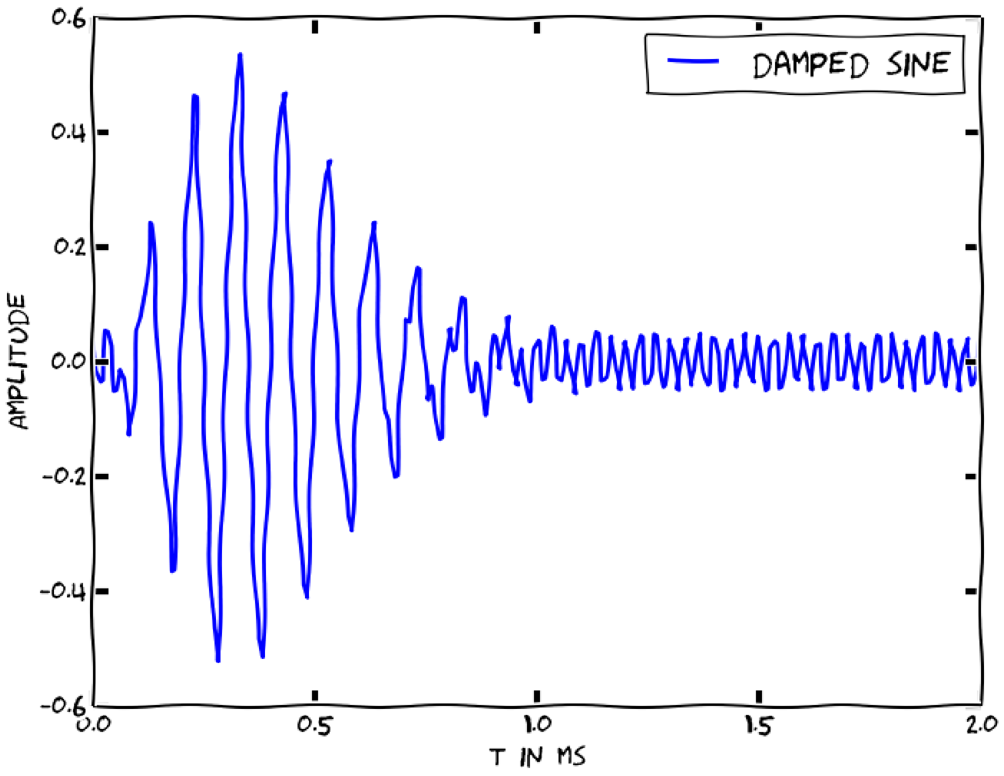
Beispiel für die DTFT

- Zugrundeliegendes Signal: Reellwertige Exponentialfolge (oberes Bild)
- Mittleres Bild: *Amplitude* (Betrag) der DTFT
- Unteres Bild: *Phase* (komplexes Argument) der DTFT



In der Praxis

- FFT Implementierungen wie Sand am Meer (Matlab, numpy, …)
- Meist nur Betrag betrachtet
- Phase ignoriert
- Wichtig sind
  - Abtastrate → Nyquist Rate
  - Fensterlänge



- Python:
  - numpy.fft.rfft
  - numpy.fft.rfftfreq

- Oder: MNE

- http://timeoff08.blogspot.de/2013/08/fouriertransformation-in-der-praxis.html

In der Praxis

- Ergebnis aus FFT so lang wie Fenster
- Negative und Positive Frequenzen
  – Nur hälfte interessant
  – (Fensterlänge / 2) = Anzahl Frequenzbins
- Nyquist-Frequenz / Frequenzbins entspricht Bin-Breite
- Fenstergröße kritisch
  – tradeoff zwischen zeitlicher - / Frequenzauflösung
- Also:
  – Sampling-Rate: 80 Kilo Hz
  – Nyquist-Frequenz: 40 KHz
  – 20 ms Fenster = 0.02 * 80000 = 1600 Sample → 800 Frequenzbins
  – Bin-Breite = 40000 / 800 = 50 Hz