

Domino Tilings auf dem Torus

Bachelorarbeit
bei Prof. Dr. Stefan Felsner

Vorgelegt von Tobias Buchwald
am Fachbereich Mathematik der
Technischen Universität Berlin

Berlin, 14. Juni 2013

Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und eigenhändig sowie ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 14. Juni 2013

Tobias Buchwald

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Einführende Definitionen	4
3	Thurston's Höhenfunktion für Domino Tilings	10
4	Verallgemeinerung: α-Orientierungen	15
5	Situation auf dem Torus	22
5.1	Gegenbeispiele	23
5.2	Einschränkung der benötigten Kreisklassen	31
6	Fazit	34
	Literaturverzeichnis	36

1 Einleitung

Der Gegenstand dieser Bachelorarbeit sind Domino Tilings. Pflasterungen/Tilings von Flächen mit regelmäßigen Polygonen kann man in der Mathematik aus unterschiedlichen Blickpunkten betrachten. Domino Tilings sind ein spezieller Fall von regulären Tilings - ein regelmäßiger Gittergraph (dreieckig, quadratisch oder hexagonal) soll durch eine Menge von entsprechenden Polyominos überdeckt werden, in unserem Fall geht es also um die Überdeckung eines quadratischen Gitters mit Dominos.

Man kann Tilings aus unterschiedlich Blickwinkeln betrachten. So haben Kasteleyn [5] sowie Temperley und Fisher [10] die Anzahl möglicher Domino Tilings (bzw perfekter Matchings auf dem Gittergraphen) durch die Forschung über Dimere (Zweiatomige Moleküle) motiviert berechnet, während sich z.B. Conway und Lagarias dem kombinatorischen Problem der Existenz von Tilings in [1] mittels gruppentheoretischen Mitteln nähern. Bestimmte Varianten von Tiling-Problemen sind sogar als NP-vollständig oder gar unberechenbar (Wang-Tilings).

Ein bekanntes Resultat über Domino Tilings einer einfach zusammenhängenden Region in der Ebene ist, dass diese die algebraische Struktur eines distributiven Verbands tragen (siehe [9]). Dabei sind die Übergänge lokale Transformationen (Flips) bei denen zwei benachbarte Dominos gedreht werden. Es wurden auch bereits Verallgemeinerungen davon untersucht, so z.B. die Struktur von Domino Tilings in der Ebene, die nicht beschränkt sind, siehe [4]. Insbesondere tritt dort auch das Problem auf, dass die lokalen Flips aus dem einfachen planaren Fall nicht mehr ausreichen um jede Orientierung zu erzeugen.

Es gibt für Domino Tilings verschiedene Verallgemeinerungen, so werde ich die Beziehung zu Matchings und zu α -Orientierungen betrachten, für die man im planaren Fall ebenfalls einen distributiven Verband erhalten kann. Betrachtet man Domino Tilings auf dem Torus, stellt man fest dass die lokalen Flips hier leider nicht mehr ausreichen, um überhaupt jede Orientierung zu erzeugen. In einem ähnlichen Spezialfall torischer α -Orientierungen (in dem Fall dass jeder Knoten im Gitter Ausgrad 2 hat) hat Kolja Knauer in [6] gezeigt, dass dort schon eine Basis des Kreisraumes genügt. Das motiviert die Frage, ob man in ähnlicher Weise eine möglichst kleine Menge von Transformationen auf torischen Domino Tilings angeben kann, durch die man jede Orientierung erhält. Ich zeige einige Beispiele auf, die zeigen dass bestimmte Klassen von Kreisen dazu ungeeignet/nicht ausreichend sind, und gebe ein Kriterium an mit dem man dies nachweisen kann.

2 Einführende Definitionen

Wir betrachten das zweidimensionale ganzzahlige Gitter, d.h. den (unendlichen) planaren Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ mit den Knoten $V = \mathbb{Z}^2$ und Kanten $E = \{e = \{x, y\} | x, y \in V, (|x_1 - y_1| = 1 \wedge x_2 = y_2) \vee (x_1 = y_1 \wedge |x_2 - y_2| = 1)\}$.

Wir nennen den Raum zwischen den vier benachbarten Punkten $(x, y), (x+1, y), (x, y+1), (x+1, y+1)$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ eine *Zelle* dieses Gitters, die Verbindungsgerade zwischen zwei ganzzahligen Punkten eine *Seite* der entsprechenden Zelle. Ein *Domino* ist nun die Vereinigung von genau zwei Zellen, die sich eine gemeinsame Seite teilen. Mit anderen Worten ist ein Domino ein achsenparalleles Rechteck mit ganzzahligen Ecken und Seitenlängen 1 und 2.

Ein *Domino Tiling* ist nun die Überdeckung einer Menge \mathcal{Z} von Zellen durch Dominos

mit disjunktem Inneren, wobei keine Zelle $z \notin \mathcal{Z}$ überdeckt sein darf. Wir werden im Folgenden immer davon ausgehen, dass die Menge \mathcal{Z} die einem Tiling zugrundeliegt endlich ist.

Es gibt von diesen Domino Tilings eine Äquivalenz zu perfekten Matchings von Gittergraphen:

Sei ein Domino Tiling T gegeben. Konstruiert man einen Graphen, dessen Knoten jeweils in der Mitte der Zellen der Dominos aus T liegen, und verbindet diese Knoten jeweils mit den direkten horizontalen und vertikalen Nachbarn, so erhält man einen Gittergraphen G .

Beobachtung 2.1

Die Kanten von G , die komplett innerhalb eines Dominos liegen, sind die Kanten eines perfekten Matchings. Ist andererseits ein Gittergraph G gegeben mit einem perfekten Matching M , lässt sich daraus ein eindeutiges Domino Tiling konstruieren.

Beweis. Jeder Knoten von G gehört per Definition zu einem Domino, also hat jeder Knoten mindestens eine Kante aus G , die eine Matchingkante ist. Andererseits ist laut der Definition der Domino Tilings das Innere der Dominos disjunkt, also kann jeder Knoten nur zu einem Domino aus T gehören. Somit gehört zu jedem Knoten genau eine Matchingkante. Ist ein Gittergraph mit einem perfekten Matching gegeben, dann können wir andererseits die Zellen so pflastern, dass ein Domino immer eine Matchingkante überdeckt. Dabei sind die Dominos disjunkt, da jeder Knoten nur eine Matchingkante hat, und sie decken alles ab, da in einem perfekten Matching jeder Knoten eine Matchingkante hat. \square

Beobachtung 2.2

(Notwendige Bedingung) Wenn $|\mathcal{Z}|$ ungerade ist, dann kann es kein Domino Tiling für \mathcal{Z} geben.

Beweis. Da ein Matching immer genau eine Kante zu genau zwei Knoten zuordnet, muss ein perfektes Matching eine gerade Anzahl Knoten haben. Dementsprechend muss auch die Anzahl der Zellen, auf denen der Gittergraph G definiert ist gerade sein. \square

Dementsprechend gilt für Domino Tilings, dass z.B. bei einer rechteckigen Region nicht beide Seitenlängen ungerade sein dürfen, damit ein Tiling der Region existiert. Eine weitere Äquivalenz kann man zu den α -Orientierungen des gleichen, nun aber gerichteten, Gittergraphen \vec{G} finden.

Eine α -Orientierung ist eine Orientierung der Kanten eines Graphen, so dass zu einer Abbildung $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$ der Ausgrad $out(v) = \alpha(v) \forall v \in V$ ist, α gibt also die Anzahl der ausgehenden Kanten an. Die Frage ob es für einen gegebenen Graphen eine α -Orientierung gibt, lässt sich in polynomieller Zeit beantworten indem man auf einem leicht modifiziertem Graphen einen maximalen Fluss berechnet, siehe dazu [2].

Wir haben oben G bzw. \vec{G} so definiert, dass die Knoten in der Mitte der Zellen $z \in \mathcal{Z}$ liegen. Daher haben alle Knoten von G den Wert $n + \frac{1}{2}$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Die Summe zweier Koordinaten ist daher immer ganzzahlig.

Sei k die Anzahl der benachbarten Zellen, die nicht in der zu überdeckenden Region liegen. Dann können wir unser α definieren als:

$$\alpha(v) = \begin{cases} 1 & v_1 + v_2 \text{ ungerade, wir sagen } v \text{ ist ungerader Knoten} \\ 3 - k & v_1 + v_2 \text{ gerade, wir sagen } v \text{ ist gerader Knoten} \end{cases}$$

Jeder Knoten (im Inneren) des Graphen hat nun entweder eine eingehende und 3 ausgehende oder eine ausgehende und 3 eingehende Kanten, am Rand entsprechend weniger. Insbesondere gibt es für jeden Knoten eine eindeutige Kante, die einzige eingehende oder einzige ausgehende Kante des Knotens. Im folgenden wird eine solche α -Orientierung als $(3, 1)$ -Orientierung bezeichnet.

Abbildung 1: Ein Domino Tiling, das zugehörige Matching und die $(3, 1)$ -Orientierung

Lemma 2.3

Sei $G = (A \cup B, E)$, $A \cap B = \emptyset$ ein bipartiter Graph mit festgelegten Bipartitionsklassen A, B . Dann gibt es eine Bijektion zwischen den perfekten Matchings von G und den α -Orientierungen mit

$$\alpha(v) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } v \in A \\ \deg(v) - 1 & \text{wenn } v \in B \end{cases}$$

Beweis. Betrachte eine entsprechende α -Orientierung auf \vec{G} . Durch die Definition von α ist für jeden Knoten v genau eine eindeutige Kante gegeben. Wenn $v \in A$, ist es die

einzig ausgehende Kante (ansonsten ist es die einzige eingehende Kante in v). Diese Kante wählen wir als Matchingkante m_v von v . Nimm an, v ist in A . Dann sind alle Nachbarn von v in B . Daher ist die Kante m_v die eindeutige eingehende Kante für einen Knoten in B . Dadurch können wir diese Kanten als Matchingkanten wählen und wählen tatsächlich auch höchstens eine Matchingkante für jeden Knoten aus, kein Nachbar kann eine weitere zu v inzidente Kante als Matchingkante wählen. Das gleiche Argument mit umgekehrter Kantenrichtung gilt falls $v \in B$.

Betrachte andererseits ein perfektes Matching M auf G . G ist ein bipartiter Graph mit den Bipartitionsklassen A und B . Orientiere die Kanten folgendermaßen:

Falls $e \in M$, dann orientiere e von A nach B , falls $e \notin M$ orientiere e von B nach A . Da jeder Knoten zu genau einer Matchingkante gehörte, hat nun jeder Knoten $v \in A$ genau eine ausgehende Kante und jeder Knoten $v \in B$ hat genau eine eingehende Kante, wir haben also eine $(deg(v) - 1, 1)$ -Orientierung auf G konstruiert, in der jeder Knoten aus A genau eine ausgehende und jeder in B genau eine eingehende Kante hat. \square

Korollar 2.4

Zwischen den Domino Tilings einer Region und den $(3, 1)$ -Orientierungen des zugehörigen Graphen \vec{G} existiert eine Bijektion.

Beweis. Wir wissen bereits, dass Domino Tilings in Bijektion zu den perfekten Matchings auf dem zugehörigen Gittergraph G stehen. Zeige also noch, dass G die Voraussetzungen für das obige Lemma erfüllt.

Wähle als Bipartitionsklassen $A :=$ “gerade Knoten“ und $B :=$ “ungerade Knoten“ und

$$\alpha(v) = \begin{cases} 1 & v_1 + v_2 \text{ gerade, wir sagen } v \text{ ist gerader Knoten} \\ 3 - k & v_1 + v_2 \text{ ungerade, wir sagen } v \text{ ist ungerader Knoten} \end{cases}$$

Dies erfüllt die Bedingungen des Lemmas, wir bekommen daher eine Bijektion zwischen den Domino Tilings, perfekten Matchings und $(3, 1)$ -Orientierungen. \square

α -Orientierungen sind insofern also eine Verallgemeinerung von Matchings. Nun lassen sich verschiedene Fragen zu diesen Tilings/Matchings/ α -Orientierungen stellen. Die Existenz kann man, wie bereits erwähnt, einfach (polynomiell) überprüfen, auch schon für allgemeine α -Orientierungen auf beliebigen Graphen. Betrachtet man rechteckige Gittergraphen, so muss man aber noch nicht mal diesen Algorithmus ausführen, um herauszufinden ob eine $(3, 1)$ -Orientierung existiert - sofern die notwendige Bedingung erfüllt ist, dass höchstens eine der beiden Seitenlängen ungerade ist (siehe Beob. 2.2), existiert auch ein entsprechendes Domino Tiling: Und zwar kann man an einer Ecke anfangen die Fläche zu pflastern, so dass die längere Seite der Dominos jeweils zu der geraden Seite zeigt. Da jede Schicht so lückenlos ausgefüllt werden kann, erhalten wir immer ein zulässiges Domino Tiling.

In dieser Arbeit soll es insbesondere auch um Domino Tilings auf dem Torus gehen. Ein Torus entsteht, wenn man die gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks jeweils miteinander identifiziert. Dementsprechend wollen wir ein torisches Domino Tiling bzw. einen torischen Gittergraphen definieren. Betrachte in dem zu Beginn definierten Gittergraphen \mathcal{G} der ganzzahligen Punkte in der Ebene eine rechteckige Region von $n \times m$ Zellen, formaler:

Die Knotenmenge sei gegeben als

$$V = \{(x_1 + i, x_2 + j) \in V(\mathcal{G}) | i = \{1 \dots n\}, j = \{1 \dots m\}\}$$

für ein festes $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{N}$, definiere \mathcal{R} als den von V in \mathcal{G} induzierten Graph. Identifiziere die Punkte folgendermaßen: $(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2)$ falls $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ und $(x_1 + n, x_2) \in \mathcal{R}$, genauso $(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + m)$ falls $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ und $(x_1, x_2 + m) \in \mathcal{R}$, nenne den entstandenen torischen Gittergraphen \mathcal{R}^T .

Auch hier besteht ein Domino wieder aus der Vereinigung zweier Zellen, die eine gemeinsame Kante teilen, ein *torisches Domino Tiling* ist eine vollständige Überdeckung von \mathcal{R}^T durch Dominos mit disjunktem Innern.

Der Gittergraph G des zugehörigen perfekten Matchings bzw. \vec{G} der zugehörigen $(3, 1)$ -Orientierung wird hier ebenfalls konstruiert, indem in die Mitte der Zellen von \mathcal{R}^T Knoten gesetzt werden und die Knoten benachbarter Zellen verbunden (hier ergibt dies tatsächlich den Dualgraph). Eine $(3, 1)$ -Orientierung so dass jede Bipartitionsklasse Ausgrad 1 oder 3 hat, ist hier allerdings nur möglich, wenn sowohl m als auch n gerade ist. Aus der Existenz von Domino Tilings einer rechteckigen Region folgt mit dieser Definition auch unmittelbar die Existenz von torischen Domino Tilings, da das Tiling einer rechteckigen Region \mathcal{R} direkt zu einem Tiling von \mathcal{R}^T wird.

Eine natürliche Frage in diesem Zusammenhang ist die der Anzahl möglicher Tilings. Für Domino Tilings quadratischer Regionen sowie aus solchen entstandene torische Domino Tilings wurde diese Frage bereits 1961 durch Pieter Kasteleyn beantwortet (siehe [5]).

Worum es hier aber im Kern gehen soll, ist die Transformierbarkeit von Tilings mittels Flips, insbesondere Face-Flips.

Definition 2.5. Eine (*kreuzungsfreie*) Einbettung des Graphen G auf eine orientierbare Fläche S ist eine Abbildung $\phi : G \rightarrow S$ so dass für Knoten $v \neq v' \Rightarrow \phi(v) \neq \phi(v')$ gilt, und Kanten $e = \{v, w\}$ auf einfache Kurven $\gamma_e : [0, 1] \rightarrow S$ mit $\gamma_e(0) = \phi(v)$, $\gamma_e(1) = \phi(w)$, $\gamma_e(x) \cap \gamma_f = \emptyset \forall f \in E, x \in (0, 1)$ abgebildet werden.

Dabei betrachten wir 2-Zell-Einbettungen, d.h. solche Einbettungen, in denen $S \setminus \phi(G)$ zu der Vereinigung einer Menge offener Kreisscheiben homöomorph ist. Der Rand des Bildes einer solchen Kreisscheibe ist insbesondere ein einfacher Kreis in $\phi(G)$. Wir nennen diesen Kreis (bzw. sein Urbild) einen Face-Kreis, sein Inneres ein Face von G . Ein *Flip* ist nun die Operation, die einen gerichteten Kreis in einer α -Orientierung in \vec{G} umdreht, d.h. jede Kante des Kreises wird umgedreht. Ein *Face-Flip* ist der Flip eines Face-Kreises. In der Ebene kann man das G umgebende Äußere als unbeschränktes Face definieren, dieses erlauben wir aber ausdrücklich nicht zu flippen.

Es ist von der konkreten festen Einbettung abhängig, was die Faces eines Graphen sind! Flips sind mit der α -Orientierung des Graphen verträglich, das α bleibt bei einem Flip in jedem Knoten gleich. Genauer:

Lemma 2.6

Zwei Orientierungen eines Graphen G gehören genau dann zum gleichen α , d.h. sie haben in jedem Knoten den gleichen Ausgrad, wenn sie durch Flips einfacher Kreise ineinander zu überführen sind.

Beweis. Betrachte zwei α -Orientierungen X_1, X_2 in G zum gleichen α und den Differenzgraph der beiden Orientierungen: das ist der Graph, in dem nur Kanten enthalten sind, die in X_1 und X_2 unterschiedlich gerichtet sind, wir geben den Kanten dabei die Orientierung von X_1 . Dieser Graph hat in jedem Knoten gleich viele eingehende wie ausgehende Kanten, denn für jede Kante die in X_2 ausgehend statt eingehend zu einem Knoten v gerichtet ist, muss eine andere eingehend statt ausgehend gerichtet sein um

den selben Wert $\alpha(v)$ zu erreichen. Der Differenzgraph von X_1 und X_2 ist somit eulersch. Eulersche Graphen lassen sich in kantendisjunkte einfache Kreise zerlegen: (\rightarrow Algorithmus: Laufe auf vorwärts gerichteten Kanten durch den Graph bis ein Knoten zum zweiten Mal besucht wurde. Der Weg vom ersten zum zweiten Besuch des Knotens ergibt einen Kreis C . Es gibt keine Sackgassen außer schon besuchten Knoten, denn wenn wir zum ersten mal einen Knoten besuchen, hat der ja immer noch eine unbenutzte ausgehende Kante. Da es aber nur endlich viele Knoten und Kanten gibt, kommen wir immer zu einem schon besuchten Knoten. Lösche die Kanten des Kreises C , dann ist der Restgraph wieder eulersch, da wir einen endlichen Graph haben können wir rekursiv fortfahren bis der Graph leer ist. Die jeweils in einem Schritt gelöschten Kreise ergeben eine kantendisjunkte Zerlegung des Graphen in einfache Kreise.) Für jeden Kreis aus dieser Kreiszerlegung können wir nun die Richtung jeder Kante umdrehen, damit wird das α nicht verändert da für jeden Knoten eine ausgehende und eine eingehende Kante geflippt wird. Nachdem wir alle diese Kreise geflippt haben, haben wir X_1 in X_2 überführt.

Für die Rückrichtung sind wieder X_1 und X_2 gegeben, dazu eine Menge von einfachen Kreisen, deren Flips X_1 in X_2 überführen.

Behauptung: Das flippen eines einfachen Kreises ändert in keinem Knoten den Ausgrad. Grund: In einem einfachen gerichteten Kreis hat jeder Knoten eine eingehende und eine ausgehende Kante. Wenn alle Kanten des Kreises umgedreht werden, dann tauschen die beiden nur ihre Rolle, der Ausgrad des Knotens bleibt aber unverändert. Wenn wir aber bei keinem Flip das α verändern, dann sind X_1 und X_2 Orientierungen zum gleichen α . \square

Wir können Flips auch direkt für Tilings oder Matchings definieren. Ein Face-Flip ist dabei die Operation, die zwei benachbarte, sich die lange Seite teilende Dominos um 90 Grad dreht, bzw die Matchingkanten in einem Facekreis mit den Nichtmatchingkanten austauscht. In der zugehörigen $(3, 1)$ -Orientierung entspricht dies gerade dem umdrehen eines gerichteten Face-Kreises.

Für planare Graphen ist es möglich, alle Tilings einer Fläche mittels solchen Face-Flips zu erreichen. Mehr noch, man kann den Tilings einer planaren Fläche eine Ordnungsrelation geben, die einen distributiven Verband bildet.

Definition 2.7. Sei $P = (X, \leq)$ ein Poset/Halbordnung. P ist ein distributiver Verband, wenn $\forall x, y \in X \exists x \vee y, x \wedge y \in X$ so dass gilt

- $x \vee y \geq x \geq x \wedge y$ und $x \vee y \geq y \geq x \wedge y$
- $\forall z \in X : z \geq x, y \Rightarrow x \vee y \leq z$
- $\forall z \in X : z \leq x, y \Rightarrow x \wedge y \geq z$
- $\forall x, y, z \in X : x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (Distributivität)

Satz 2.8

Auf der Menge der Domino Tilings einer einfach zusammenhängenden Region in der Ebene wird durch die Operation des Drehens benachbarter Dominos, also durch Face-Flips, ein distributiver Verband induziert.

Es gibt verschiedene Beweise für diesen Satz von unterschiedlicher Allgemeinheit, die sich jeweils auf eine bestimmte Verallgemeinerung beziehen. Beispielsweise haben

wir gesehen, dass perfekte Matchings und auch α -Orientierungen als Verallgemeinerung von Domino Tilings verstanden werden können. Für perfekte Matchings planarer Graphen wurde die Struktur des distributiven Verbandes direkt in [7] bewiesen, für allgemeinere k -Faktoren in [8]. Den Beweis für α -Orientierungen aus [2] werde ich später direkt angeben. Auch für noch allgemeinere Strukturen als α -Orientierungen lässt sich noch dieser distributive Verband definieren, in [3] wird dies durch Δ -Bonds bewerkstelligt.

Ich zeige hier zunächst einen direkt auf Domino Tilings zugeschnittenen Beweis.

3 Thurston's Höhenfunktion für Domino Tilings

Der hier angegebene Beweis ist aus [9] übernommen. Die dort benutzte Höhenfunktion stammt von William Thurston in [11], wo allerdings nicht der Zusammenhang mit distributiven Verbänden betrachtet wird, sondern nur die Existenz von Tilings einer Region.

Erinnerung: Wir haben Domino Tilings über das Gitter der ganzzahligen Punkte in der Ebene definiert. Wenn man ein Tiling gegeben hat, kann man so die Ränder der Dominos als Kanten interpretieren und die Ecken als Knoten. Auch in der Mitte der langen Seiten eines Dominos liegt jeweils ein Knoten des Graphen, und eine Kante zwischen diesen beiden Knoten für jedes Domino.

Man erhält so einen Gittergraphen in der Größe der überdeckten Fläche. Wir orientieren die Kanten so, dass die an einer Gitterzelle anliegenden Kanten immer einen gerichteten Kreis bilden, abwechselnd im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn und wir nennen diesen gerichteten Graphen $D = (V, A)$. Stellt man sich das Gitter als Schachbrett vor, dann kann man sagen links von einer Kante liegt ein schwarzes Feld und recht ein weißes.

Abbildung 2: Beispiel eines Graphen aus einem planaren Domino Tiling

Bis hierhin ist die Konstruktion noch unabhängig vom konkreten Domino Tiling. Definiere daher eine Höhenfunktion $h_T : V \rightarrow \mathbb{Z}$ auf den Knoten dieses Graphen D :

- Wähle einen beliebigen Knoten v_0 und setze $h_T(v_0) = 0$.
- Falls Kante (v, v') ein Domino schneidet, also zwischen zwei Zellen des gleichen Dominos liegt, setze $h_T(v') = h_T(v) - 3$.
- Sonst setze für die Kante (v, v') iterativ den Wert $h_T(v') = h_T(v) + 1$.

Bemerkung: Die Wahl von $v_0 = 0$ ist beliebig, da nur die relativen Höhendifferenzen eine Bedeutung haben. Im Zusammenhang mit Flips ist es aber sinnvoll, einen Knoten v_0 auf dem Rand von D zu wählen, da er dort nicht durch Flips verändert werden kann.

Abbildung 3: Ein Domino Tiling mit der oben definierten Höhenfunktion

Nun muss natürlich noch überprüft werden, ob diese Definition auch immer konsistent ist, und dass sie ein Domino Tiling eindeutig kodiert. Wir brauchen noch eine kleine Definition:

Definition 3.1. Ein Weg in D ist ein *legaler Weg* bezüglich eines Domino Tilings T , wenn er keine Kanten benutzt, die ein Domino in T schneiden. Seien $v, v' \in V$ beliebige Knoten in D . Die *Höhendifferenz* von v zu v' ist definiert als *Anzahl vorwärts gerichteter Kanten auf einem legalen Weg von v zu v' - Anzahl rückwärts gerichteter Kanten auf einem legalen Weg von v zu v'* .

Lemma 3.2

Die Höhenfunktion h_T zu einem zusammenhängenden Domino Tiling T ist (bei gleicher Wahl von v_0) unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Höhe der Knoten berechnet wird.

Beweis. Betrachte den Graphen D' , der entsteht wenn wir aus D alle Kanten löschen, die Dominos schneiden. Da das Domino Tiling zusammenhängend ist, ist D' ebenfalls zusammenhängend. Um für jeden Knoten des Graphen einen Wert der Funktion h_T zu berechnen genügt also die Bedingung, dass für jede gerichtete Kante $(v, v') \in V$ gilt $h_T(v') = h_T(v) + 1$. Weiterhin sieht man leicht, dass die zweite Bedingung (falls Kante (v, v') ein Domino schneidet, setze $h_T(v') = h_T(v) - 3$) hieraus bereits folgt: Da jede Zelle von einem gerichteten Kreis umschlossen wird und zu genau einem Domino gehört, hat jede Zelle auch genau eine Kante die ihr Domino schneidet. Die anderen 3 Kanten haben zusammen eine Höhendifferenz von 3 (in Kreisrichtung), so dass die Differenz für die das Domino schneidende Kante automatisch -3 ist. \Rightarrow Es genügt also zu zeigen, dass die Konstruktion über Randkanten der Dominos konsistent ist. Als Höhe eines Knotens v definieren wir dann genau die Höhendifferenz von v_0 zu v , dies erfüllt die lokalen Bedingungen für eine Höhenfunktion. Wir müssen nun noch zeigen, dass dieser Wert unabhängig davon ist, welcher legale Weg zur Berechnung gebraucht wurde.

Behauptung: Ein Kreis in D ohne die Kanten, welche ein Domino schneiden, hat Höhendifferenz 0.

Beweis der Behauptung: Induktion - man sieht leicht an einem einzelnen Domino dass die Höhendifferenz 0 ist, da je 3 Kanten vorwärts und 3 Kanten rückwärts gerichtet sind. Hat man einen größeren Kreis, findet man darin einen Weg, an dem man den Kreis in zwei kleinere aufteilen kann. Die Summe der Höhendifferenzen der beiden kleinen Kreise ergibt die Höhendifferenz des großen Kreises - da die kleineren nach Induktionsvoraussetzung Höhendifferenz 0 haben, gilt dies auch für den großen Kreis.

Betrachte zwei legale Wege p_1 und p_2 von v_0 zu v . Dann ist p_1 mit $\overleftarrow{p_2}$ (p_2 rückwärts) ein legaler Kreis. Die Höhendifferenz des Kreises ist die Differenz beider Höhendifferenzen der beiden Pfade. Da die Höhendifferenz in Kreisen immer 0 beträgt, muss sie also bei beiden Pfaden gleich groß sein. \square

Da sich die Höhenfunktion über relative Höhendifferenzen im Graphen berechnet, der Startknoten und im Prinzip auch der Startwert aber beliebig sind, kann es zu einem Domino Tiling T mehrere Höhenfunktionen geben. Diese unterscheiden sich aber nur um eine additive Konstante, d.h. für alle Höhenfunktionen h_T, h'_T gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so dass gilt $h_T(v) + c = h'_T(v) \forall v \in V$.

Wir können ebenfalls zeigen, dass zu jeder konsistenten Höhenfunktion des Graphen ein Domino Tiling gehört:

Lemma 3.3

Sei eine Funktion $h : V \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben, so dass

- Es gibt einen Knoten $v_0 \in V$, so dass v_0 auf dem Rand von D liegt, d.h. das unbeschränkte Face berührt, und den Wert $h(v_0) = 0$ besitzt.
- Für jede gerichtete Kante (v, v') gilt entweder $h(v') = h(v) + 1$ oder $h(v') = h(v) - 3$
- Für jede Kante auf dem Rand von D gilt die Beziehung $h(v') = h(v) + 1$.

Dann ist h tatsächlich die Höhenfunktion h_T für ein Domino Tiling T .

Beweis. Da in D jede Zelle von einem gerichteten Kreis (der Länge 4) umgeben ist, gibt es in jeder Zelle genau eine Kante $e = (v, v')$ mit $h(v') = h(v) - 3$. Wegen der dritten Bedingung kann diese nicht auf dem Rand des Graphen liegen. Auf der anderen Seite dieser Kante liegt deshalb eine weitere Zelle, für die ebenfalls e die eindeutige Kante mit $h(v') = h(v) - 3$ ist. Beide zusammen bilden ein Domino. Dieses Argument kann man nun für jede einzelne Zelle anwenden, und erhält daraus ein eindeutiges Domino Tiling T . \square

Korollar 3.4

Zwischen der Menge der Höhenfunktionen zu einem festen $v_0 \in V$, das auf dem Rand von D liegt, und den Domino Tilings von D gibt es eine Bijektion.

Beweis. Aus Lemma 3.2 wissen wir, dass man zu einem Domino Tiling T mit festem v_0 eine eindeutige Höhenfunktion konstruieren kann. In Lemma 3.3 haben wir hingegen bewiesen, dass mit einer solchen Höhenfunktion ein eindeutiges Domino Tiling gegeben ist. \square

Man kann beobachten, dass die Werte eines Knotens in Höhenfunktionen zu verschiedenen Tilings sich nur um Vielfache von 4 unterscheiden:

Lemma 3.5

Seien T, T' Domino Tilings, und die Höhenfunktionen bezüglich des gleichen Wertes für v_0 definiert. Dann ist für jeden Knoten v die Differenz $h_T(v) - h_{T'}(v)$ ein Vielfaches von 4.

Beweis. Für jede Kante (v, v') gilt $h_T(v') = h_T(v) + 1$ oder $h_T(v') = h_T(v) - 3$. Wenn also der Unterschied für v ein vielfaches von 4 ist, dann muss das auch für seinen Nachbarn v' gelten. Laut Voraussetzung ist aber $h_T(v_0) = h_{T'}(v_0)$, was ein Vielfaches von 4 ist. Induktiv muss diese Aussage also auch für alle andern Knoten gelten. \square

Die Höhenfunktion für Domino Tilings ist also wohldefiniert und legt intuitiv nahe, folgende Ordnung auf Domino Tilings zu definieren:

$$T \leq T' \iff h_T(v) \leq h_{T'}(v) \forall v \in V$$

Wir wollen zeigen, dass das tatsächlich ein distributiver Verband ist.

Satz 3.6

Seien T, T' Domino Tilings und die Höhenfunktion so dass v_0 auf dem Rand liegt und $h_T(v_0) = h_{T'}(v_0)$. Dann sind die Funktionen $\min(h_T, h_{T'})$ und $\max(h_T, h_{T'})$ ebenfalls Höhenfunktionen von Domino Tilings.

Beweis. Wir werden hier nur die Aussage für $\min(h_T, h_{T'})$ zeigen, der Beweis für $\max(h_T, h_{T'})$ funktioniert analog. Zu zeigen ist, dass $\min(h_T, h_{T'})$ und $\max(h_T, h_{T'})$ eine Höhenfunktion wie in Lemma 3.3 ergeben, dann ist dies auch sofort die Höhenfunktion eines Domino Tiling.

Betrachte ein Paar v, v' von benachbarten Knoten mit der gerichteten Kante (v, v') . Wenn nun gilt

$$h_T(v) < h_{T'}(v)$$

dann folgt sofort $h_T(v) \leq h_{T'}(v) - 4$. Andererseits muss im jeweiligen Tiling die Höhenfunktion konsistent sein, d.h. es gilt insbesondere $h_T(v') \leq h_T(v) + 1$ und $h_{T'}(v') \geq h_{T'}(v) - 3$. Zusammen erhalten wir:

$$h_T(v') \leq h_T(v) + 1 \leq h_{T'}(v) - 4 + 1 \leq h_{T'}(v') + 3 - 4 + 1 = h_{T'}(v')$$

Das bedeutet $h_T(v) < h_{T'}(v) \Rightarrow \min(h_T(v'), h_{T'}(v')) = h_T(v')$, die Höhenfunktion setzt sich also auf die Nachbarn von v fort, wenn die Werte in v ungleich sind (der Fall $h_T(v) > h_{T'}(v)$ ist analog), dies sichert die Konsistenz der zweiten Bedingung aus Lemma 3.3. Wo die beiden Höhenfunktionen die gleichen Werte annehmen, ist die Konsistenz sowieso klar, da $h_T, h_{T'}$ Höhenfunktionen sind. \square

Lemma 3.7

Sei eine Menge von Vektoren $W \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, so dass W unter komponentenweiser Minimums- bzw. Maximumsbildung abgeschlossen ist. Mit der Dominanzordnung

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \forall i \in \{1 \dots n\}$$

ist dann (W, \leq) ein distributiver Verband mit $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$ (komponentenweise).

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften aus Definition 2.7 nachweisen. Seien also $x, y \in W$ beliebig. Es gilt

- $\max(x, y) \geq x \geq \min(x, y)$ und $\max(x, y) \geq y \geq \min(x, y)$ gilt nach Definition des komponentenweisen Maximums und Minimums. Das Maximum und Minimum von Vektoren aus W sind laut Voraussetzung ebenfalls in W enthalten, existieren also.
- Sei $z \in W$ gegeben so dass $z \geq x, y$. Dann gilt komponentenweise $z_i \geq x_i$ und $z_i \geq y_i$, also auch $z_i \geq \max(x_i, y_i) \Rightarrow z \geq \max(x, y)$
- Sei $z \in W$ gegeben so dass $z \leq x, y$. Dann gilt komponentenweise $z_i \leq x_i$ und $z_i \leq y_i$, also auch $z_i \leq \min(x_i, y_i) \Rightarrow z \leq \min(x, y)$
- Distributivität: Komponentenweise gilt für $x, y, z \in W$:

$$\max(x_i, \min(y_i, z_i)) = \min(\max(x_i, y_i), \max(x_i, z_i)),$$

dies lässt sich mit einer einfachen Fallunterscheidung über die Größe von x, y, z überprüfen.

□

Korollar 3.8

Die oben definierte Ordnung auf planaren Domino Tilings

$$T \leq T' \iff h_T(v) \leq h_{T'}(v) \forall v \in V$$

induziert einen distributiven Verband.

Beweis. Fasse die Höhenfunktion eines Domino Tilings als Vektor w über $\mathbb{N}^{|V|}$ auf. Aus Satz 3.6 folgt, dass die Menge dieser Vektoren bezüglich Minimums-/Maximumsbildung abgeschlossen ist. Die hier definierte Ordnung $T \leq T' \iff h_T(v) \leq h_{T'}(v) \forall v \in V$ entspricht genau der in Lemma 3.7 benutzten Ordnung, da die einzelnen Knoten $v \in V$ genau den Komponenten des Vektors w entsprechen. Da wir von den Höhenfunktionen eine Bijektion zu den Domino Tilings hergestellt haben (Korollar 3.4), bilden die Domino Tilings also ebenfalls einen entsprechenden distributiven Verband. □

Nun kann man sich die Frage stellen, wie denn der Übergang zu einem jeweils nächstgrößeren/kleineren Element in diesem Verband aussieht. Die Antwort lautet: Die Übergänge sind die Face-Flips, wie wir sie auch in dem Beweis für allgemeine α -Orientierungen verwenden werden.

Bei einem solchen Face-Flip wird genau der Wert des Knotens in der Mitte der beiden geflippten Dominos um ± 4 verändert, auf allen anderen Knoten bleibt die Höhenfunktion dabei konstant - die Höhenfunktion ist ja für jeden Knoten v durch die Höhendifferenz auf einem legalen Weg von v_0 zu v definiert, der bis auf den Knoten in der Mitte der beiden Dominos ja unberührt bleibt. Im Bild ist angenommen, dass die schraffierten Zellen von den Kanten des Graphen gegen den Uhrzeigersinn und die weißen im Uhrzeigersinn umlaufen werden. Macht man sich klar, wie dann die Höhendifferenz auf dem letzten Stück zum Mittelknoten sich ändert, sieht man dass die dargestellten Flips in Pfeilrichtung "aufwärts" gehen.

Abbildung 4: Darstellung der Flips von benachbarten Dominos, links ist der jeweils kleinere

Da sich diese Arbeit mit “Domino Tilings auf dem Torus“ beschäftigen will, muss man hier natürlich fragen ob dieser Ansatz sich auf torische Domino Tilings ebenfalls anwenden lässt. Wo wurde die Planarität explizit ausgenutzt? Wo ergeben sich Probleme, wenn man die Höhenfunktion auf den Torus übertragen will?

- Zum einen ist nicht klar, ob die Höhenfunktion noch wohldefiniert ist. Bei ungerader Breite/Höhe, gemessen in Anzahl der Zellen, ist die Höhendifferenz eines legalen Weges nicht mehr unabhängig vom Weg! Die Definition müsste also angepasst werden.
- Die Azyklizität der Ordnungsrelation ist auf dem Torus nicht mehr gegeben, siehe Abbildung. In planaren Graphen wurde die Azyklizität dadurch erreicht, dass es verboten ist, das äußere Face zu drehen. Man könnte dies also beheben, indem man auch hier ein bestimmtes Face wählt, welches nicht geflippt werden darf, und den Knoten in dessen Mitte als v_0 wählen.
- Der Flipzusammenhang ist allein mit Facekreisen nicht mehr gegeben, siehe dazu das Kapitel 5. Wir werden sehen, dass man Beispiele konstruieren kann, in denen kein einziger Face-Kreis flipbar ist.

Abbildung 5: Eine Folge von Flips auf einem torischen Domino Tiling, die wieder zum ursprünglichen Tiling bei echt größerer Höhenfunktion führt

4 Verallgemeinerung: α -Orientierungen

Wir haben bereits α -Orientierungen von Graphen definiert und gesehen, dass diese ebenso wie Höhenfunktionen Domino Tilings kodieren können. Darüber hinaus ist

das Konzept der α -Orientierungen ohne Probleme auf den Torus zu übertragen, $(3, 1)$ -Orientierungen zumindest für torische Gitter gerader Breite und Höhe. Deshalb scheint es sinnvoll, auch den Beweis für allgemeine Domino Tilings zu betrachten. Der hier angegebene Beweis folgt dem von Stefan Felsner in [2] angegebenen.

Wir beweisen in diesem Abschnitt, dass allgemeine α -Orientierungen von planaren Graphen mit einer festen planaren Einbettung einen distributiven Verband bilden. Wir betrachten daher für dieses Kapitel auch nur planare Graphen $\vec{G} = (V, A)$ zusammen mit einer festen kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene.

Definition 4.1. Ein Kreis $C \subseteq A$ heißt essentiell, wenn er folgende Eigenschaften hat: Er ist

- ein einfacher Kreis
- hat keine Sehne/keinen gerichteten Pfad im Inneren
- die Kanten, die vom Rand ins Innere des Kreises gehen sind in allen α -Orientierungen gleich gerichtet, also nie in einem gerichteten Kreis enthalten
- Es gibt eine α -Orientierung auf \vec{G} , in der C gerichtet ist

Bemerkung: In stark zusammenhängenden Graphen \vec{G} sind die essentiellen Kreise gerade die Face-Kreise.

Zunächst ein kleines Lemma, das wir auch später noch benötigen werden.

Lemma 4.2

Jeder einfache gerichtete Kreis C in \vec{G} kann umgedreht werden, indem eine Folge von Drehungen/Flips essentieller Kreise im Inneren von C ausgeführt wird. Erfolgt die Drehung von “gegen den Uhrzeigersinn“ (ccw, counterclockwise) zu “im Uhrzeigersinn“ (cw, clockwise), dann sind auch Drehungen der essentiellen Kreise von “gegen den Uhrzeigersinn“ zu “im Uhrzeigersinn“.

Beweis. Wir nutzen Induktion über die Anzahl der im Inneren enthaltenen essentiellen Kreise:

Falls C ein essentieller Kreis ist, sind wir fertig, da C nach Voraussetzung gerichtet ist und somit selbst gedreht werden kann.

Falls C kein essentieller Kreis ist, dann muss es einen gerichteten Pfad im Inneren geben (möglicherweise der Länge 1), d.h. ein Pfad P von u nach v , so dass u, v auf C liegen und der Rest von P im Inneren von C :

Angenommen, es gibt in einer α -Orientierung keinen gerichteten Pfad im Inneren von C . Dann betrachte die Menge der Kanten, die von Knoten auf C ins Innere gehen. Da es keinen Pfad zurück oder aus C hinaus gibt, muss diese Menge ein gerichteter Schnitt sein. Für die Menge der Kanten die aus dem Inneren zu einem Knoten auf C gehen gilt das gleiche. Es muss Kanten zum Inneren oder aus dem Inneren geben, da der Kreis nicht essentiell ist, somit ist mindestens einer dieser Schnitte nichtleer. Wenn diese Kanten aber in jeder α -Orientierung gleich gerichtet sind, dann ist der Kreis essentiell. Wenn ein Kreis also nicht essentiell ist, dann gibt es einen gerichteten Pfad im Inneren.

An diesem gerichteten Pfad p im Inneren von u nach v , $u, v \in C$ können wir nun unseren Kreis aufspalten. Sei $p_1 \subset C$ der Pfad in C von v zu u und $p_2 \subset C$ der Pfad

in C von u nach v . Zerlege C an diesem Pfad in $C_1 = p + p_1$ und $C_2 = \overleftarrow{p} + p_2$. Das Drehen von C_1 und anschließend C_2 ergibt dann den gleichen Graphen wie das Drehen von C , da alle Kanten von C genau einmal umgedreht werden, und alle Kanten auf p genau zweimal. Nach Induktionsvoraussetzung können wir die kleineren Kreise durch in ihrem Inneren enthaltene essentielle Kreise drehen. Wenn die Drehung von C von ccw zu cw geht, dann ist offenbar auch C_1 und C_2 zu dem Zeitpunkt, wo sie gedreht werden jeweils ccw, und das gleiche gilt nach Induktionsvoraussetzung auch für die kleineren Kreise bis zu den essentiellen. Wie man erkennen kann, wird jeder essentielle Kreis im Inneren dabei übrigens genau einmal gedreht. \square

Man kann sich also tatsächlich darauf zurückziehen, nur essentielle Kreise zu betrachten, dies ist nach obigem Lemma keine Einschränkung. Wir werden im folgenden ein α -Potential definieren, dessen Werte von der Länge einer Flipsequenz bis zum Minimum (Orientierung ohne gegen den Uhrzeigersinn gerichtete Kreise) abhängen. Dafür brauchen wir die Eindeutigkeit einer solchen Sequenz.

Wir nennen eine Folge von essentiellen Kreisen C_i eine *zulässige Flipsequenz* für eine α -Orientierung X , wenn C_1 in X ccw gerichtet ist, und C_i in $X^{C_1 \dots C_{i-1}}$ jeweils ccw gerichtet ist, wobei $X^{C_1 \dots C_{i-1}}$ der Graph ist, der durch die sukzessiven Flips von C_1, \dots, C_i aus X entsteht.

Lemma 4.3

Eine Kante kann zu höchstens zwei verschiedenen essentiellen Kreisen gehören, eine Kante am Rand des Graphen kann zu höchstens einem gehören.

Beweis. Angenommen eine Kante $e \in A$ gehört zu zwei essentiellen Kreisen, die beide auf der gleichen Seite, zum Beispiel links von e liegen. Dann würden sich diese beiden Kreise mindestens die Kante $e = (u, v)$ teilen. Da sie auch beide auf der gleichen Seite liegen, muss das Innere eines der beiden zumindest teilweise im Inneren des anderen enthalten sein. Somit gibt es aber einen gerichteten Pfad (von v nach u) im Inneren und des anderen, dieser kann somit nicht essentiell sein. \square

Lemma 4.4

Sei eine zulässige Flipsequenz $(C_1 \dots C_k)$ für eine α -Orientierung X gegeben. Nenne für eine Kante e in X den essentiellen Kreis links von e $C^{l(e)}$ und den rechts von e $C^{r(e)}$. Dann kommen $C^{r(e)}$ und $C^{l(e)}$ in der Flipsequenz nur alternierend vor. Formaler: wenn $C_{i_1} = C_{i_2} = C^{l(e)}$, $i_1 < i_2$ dann existiert i_3 mit $i_1 < i_3 < i_2$ und $C_{i_3} = C^{r(e)}$, analog wenn rechts und links vertauscht sind.

Beweis. Wenn der Kreis $C^{l(e)}$ geflippt wird, ändert sich seine Drehrichtung von ccw zu cw. Damit ein zweiter Flip ausgeführt werden kann, müssen also erst wieder alle Kanten von $C^{l(e)}$ umgedreht werden, insbesondere die Kante e . Nach dem vorherigen Lemma kann e aber nur umgedreht werden, indem $C^{r(e)}$ geflippt wird. \square

Lemma 4.5

Für jede Kante $e \in \vec{G}$ existiert eine natürliche Zahl t_e , so dass in einer zulässigen Flipsequenz e höchstens t_e mal umgedreht wird. Jeder essentielle Kreis C wird in einer zulässigen Flipsequenz maximal $\frac{\min_{e \in C} t_e}{2} + 1$ mal geflippt. Andererseits kann, wenn ein essentieller Kreis in einer Flipsequenz s mal geflippt wird, jede Kante in diesem Kreis höchstens $2s + 1$ mal umgedreht werden.

Folglich gilt für jeden essentiellen Kreis, dass der Wert t_e seiner Kanten um maximal 2 auseinanderliegen kann.

Beweis. Kanten, die in keinem essentiellen Kreis enthalten sind, lassen sich nicht drehen, haben also den Wert $t_e = 0$. Dass jeder essentielle Kreis in einer zulässigen Flipsequenz maximal $\frac{\min_{e \in C} t_e}{2} + 1$ oft geflippt wird, folgt aus Lemma 4.4 : Für jede Kante im Kreis müssen die beiden essentiellen Kreise in denen sie maximal enthalten ist alternierend geflippt werden. Für jeden Flip, bis auf den letzten möglicherweise, muss also die Kante ein weiteres mal umgedreht werden, und der Kreis kann nicht häufiger geflippt werden als jede seiner Kanten. Da dies auch für die Nachbarkreise gilt, kann jede Kante nur höchstens $2s + 1$ mal gedreht werden, was das Maximum der Summe seiner beiden benachbarten Kreise ist (nur einer der beiden kann der letzte in der Flipsequenz sein).

Nun können wir vom Rand des Graphen her eine Obergrenze für den Wert t_e jeder Kante e konstruieren. Kanten, die auf dem Rand des Graphen liegen, können höchstens einmal gedreht werden. Kanten, die nicht auf dem Rand liegen, aber in einem essentiellen Kreis wo mindestens für eine Kante t_e festgelegt ist, können höchstens den Wert $t_e + 2$ bekommen. Da es nur endlich viele essentielle Kreise gibt und da der Dualgraph zusammenhängend ist, so dass man jedes Face betrachtt, bekommt jede Kante einen endlichen Wert zugeordnet. \square

Da die Anzahl der essentiellen Kreise sowie die Anzahl der Flips selbiger also begrenzt sind, folgt direkt dass auch die Länge jeder zulässigen Flipsequenz begrenzt ist. Dies sichert die Azyklizität, welche aber später auf dem Torus nicht mehr so einfach gegeben ist, wie wir bereits in dem Beispiel am Ende des letzten Kapitels gesehen haben.

Lemma 4.6

Es gibt eine eindeutige α -Orientierung in \vec{G} , so dass alle Kreise cw, also “im Uhrzeigersinn“ gerichtet sind.

Beweis. Solange es noch einen Kreis gibt, der ccw gerichtet ist, können wir diesen mittels essentieller Kreise flippen. Da wir aber gezeigt haben, dass die Länge einer solchen zulässigen Flipsequenz begrenzt ist, muss es mindestens eine Orientierung geben, so dass kein Kreis mehr ccw gerichtet ist. Angenommen es gäbe zwei unterschiedliche Orientierungen, so dass darin alle Kreise cw gerichtet sind. Die in beiden unterschiedlich gerichteten Kanten müssen dann in jeder Orientierung eine Menge von gerichteten Kreisen bilden, da in jedem Knoten das α gleich ist (\Rightarrow für jede eingehende Kante die gedreht wird muss auch eine ausgehende gedreht werden und andersherum - dies setzt sich auf den Nachbarknoten fort bis man einen Kreis schließt). Da es nur zwei Möglichkeiten gibt, wie Kreise gerichtet sein können, müsste in einem Graph der Differenzkreis ccw gerichtet sein ζ .

Also kann es nur eine Orientierung geben, in der alle Kreise cw gerichtet sind. \square

Lemma 4.7

Seien zwei α -Orientierungen X, Y gegeben, so dass es eine zulässige Flipsequenz gibt, die X in Y überführt. Dann wird jeder essentielle Kreis C in allen zulässigen Flipsequenzen gleich oft geflippt.

Beweis. Wir zeigen, dass die Orientierung einer Kante in X und in Y bereits festlegt, wie oft die beiden benachbarten essentiellen Kreise geflippt werden müssen.

- Falls die Kante e in beiden Orientierungen gleich gerichtet ist, muss sie gerade viele Male umgedreht werden. Aus Lemma 4.4 folgt, dass die Anzahl der Drehungen der beiden benachbarten Kreise sich um höchstens 1 unterscheiden kann \Rightarrow also müssen beide Kreise gleich oft gedreht werden.
- Falls e in beiden unterschiedlich gerichtet ist: $C^{l(e)}$ ist der Kreis, der in X links von e liegt. Das heißt insbesondere, dass $C^{l(e)}$ ccw gerichtet ist und deshalb zuerst gedreht werden muss. Folglich ist es auch $C^{l(e)}$, der einmal häufiger als $C^{r(e)}$ geflippt wird.

Das äußere Face kann nie geflippt werden, und bekommt daher den Wert 0 zugewiesen, von diesem Startpunkt aus können wir nun jedem essentiellen Kreis iterativ den Wert zuweisen, wie oft er in der Flipsequenz vorkommen muss - je nach Orientierung der Kanten können wir die Werte aller Nachbarkreise berechnen. Da der Dualgraph immer zusammenhängend ist, wird dabei auch kein Kreis ausgelassen. \square

Nun können wir das α -Potential definieren.

Definition 4.8. Sei \mathcal{E} die Menge der essentiellen Kreise in einer α -Orientierung X . Eine Abbildung $\mathcal{P} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$, die jedem essentiellen Kreis eine natürlich Zahl zuweist, ist ein α -Potential, wenn

- $\mathcal{P}(C) \leq 1$ wenn es eine Kante gibt, für die C der einzige essentielle Kreis ist
- $|\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(C')| \leq 1$ falls C und C' eine gemeinsame Kante haben
- Seien $C^{l(e)}$ bzw. $C^{r(e)}$ der in der minimalen Orientierung (in der alle Kreise cw gerichtet sind) links bzw rechts von e liegende essentielle Kreis. Dann gilt $\mathcal{P}(C^{l(e)}) \leq \mathcal{P}(C^{r(e)})$

Wir definieren $z_X : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{N}$, $z_X(C) = \text{Anzahl der Flips von } C \text{ in einer zulässigen Flipsequenz die von } X \text{ zu der Orientierung ohne ccw gerichtete Kreise führt.}$ Das vorherige Lemma sichert die Konsistenz dieser Definition.

Wir sehen sofort, dass die ersten beiden Bedingungen von z_X wegen der Alternierung (Lemma 4.4) erfüllt werden. Auch die dritte Bedingung gilt:

Da in X_{min} $C^{l(e)}$ links von e liegt, muss der letzte Flip, von dem e betroffen war der von $C^{r(e)}$ gewesen sein. Also gilt $z_X(C^{l(e)}) \leq z_X(C^{r(e)})$. Für die Bijektion benötigen wir noch die andere Richtung:

Lemma 4.9

Für jedes α -Potential \mathcal{P} gibt es eine α -Orientierung X mit $z_X = \mathcal{P}$.

Beweis. Wir definieren eine Orientierung $X_{\mathcal{P}}$ der Kanten von \vec{G} ausgehend von unserem α -Potential \mathcal{P} .

- Kanten, die in keinem essentiellen Kreis enthalten sind, müssen in allen Orientierungen gleich gerichtet sein, diese bekommen also die gleiche Orientierung wie in der eindeutigen minimalen Orientierung X_{min} .
- Falls eine Kante e in genau einem essentiellen Kreis C enthalten ist, und dieser Kreis das Potential $\mathcal{P}(C) = 0$ hat, orientiere e genau wie in X_{min} , ansonsten (im Fall $\mathcal{P}(C) = 1$, da auf jeden Fall $\mathcal{P}(C) \leq 1$) orientiere e genau andersherum.

- Falls Kante e in zwei essentiellen Kreisen $C^{l(e)}$ und $C^{r(e)}$, links und rechts bezüglich X_{min} , ist, dann wird e wie in X_{min} gerichtet, falls $\mathcal{P}(C^{l(e)}) = \mathcal{P}(C^{r(e)})$, andernfalls genau andersherum.

Es ist nun zu zeigen, dass dies tatsächlich eine α -Orientierung ist:

Betrachte einen Knoten v und das Potential \mathcal{P} . Wenn wir in einer beliebigen inzidenten Kante starten und im Uhrzeigersinn um v herumlaufen, sehen wir jede zu v inzidente Kante und alle ihre benachbarten essentiellen Kreise. Aufgrund der Bedingungen $\mathcal{P}(C^{l(e)}) \leq \mathcal{P}(C^{r(e)})$ und $|\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(C')| \leq 1$ für benachbarte Kreise gilt: wenn wir im Uhrzeigersinn eine in X_{min} von v ausgehende Kante überqueren, kann das Potential des Kreises in dem wir uns dann befinden nur gleich oder um eins höher sein als im vorherigen, wenn wir eine in X_{min} eingehende Kante überqueren kann das Potential gleich oder um eins kleiner sein. Da wir wieder am Ausgangspunkt ankommen (also beim gleichen Potential), muss es in \mathcal{P} gleich viele Kanten geben, an denen sich das Potential für uns erhöht oder senkt. Daraus folgt, dass es genauso viele eingehende Kanten gibt, an denen das Potential der beiden benachbarten Kreise unterschiedlich ist, wie es ausgehende Kanten mit unterschiedlichem Potential auf beiden Seiten gibt. Genau diese Kanten werden nach unserer Konstruktion aber umgedreht \Rightarrow also werden gleich viele eingehende wie ausgehende Kanten im Vergleich zu X_{min} umgedreht. Da X_{min} eine zulässige α -Orientierung ist, muss $X_{\mathcal{P}}$ ebenfalls eine solche sein. \square

Satz 4.10

Sei ein planarer Graph \vec{G} mit einer festen, kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene gegeben. Auf der Menge der α -Orientierungen von \vec{G} definieren die Flips von essentiellen Kreisen einen distributiven Verband.

Beweis. Wir haben gesehen, dass es eine Bijektion zwischen den α -Orientierungen und den α -Potentialen gibt. Es reicht also zu zeigen, dass die α -Potentiale einen distributiven Verband bilden. α -Potentiale lassen sich als Vektoren darstellen, definiere $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 = \max\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$ und $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 = \min\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\}$, Maximum und Minimum sind dabei jeweils komponentenweise definiert. Die Distributivität des komponentenweisen Maximums und Minimums folgt aus 3.7, wir müssen also nur zeigen, dass das komponentenweise Maximum und Minimum wieder ein α -Potential ist.

Betrachte eine Kante e und dazu $C^{l(e)}$ und $C^{r(e)}$. Da in \mathcal{P}_1 sowie \mathcal{P}_2 jeweils $C^{l(e)} \leq C^{r(e)}$ gilt, gilt das gleiche auch für $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$.

Sei nun oBdA $\mathcal{P}_1(C^{r(e)}) = \max\{\mathcal{P}_1(C^{r(e)}) \vee \mathcal{P}_2(C^{r(e)})\}$, dann ist $(\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2)(C^{l(e)}) \geq \mathcal{P}_1(C^{l(e)}) \geq \mathcal{P}_1(C^{r(e)}) - 1$. Demnach gilt die Bedingung $|\mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(C')| \leq 1$ für benachbarte Kreise. Die Bedingung " $\mathcal{P}(C) \leq 1$ wenn es eine Kante gibt, für die C der einzige essentielle Kreis ist" folgt sofort aus der Definition. Der Beweis für das Minimum ist analog. \square

Die planaren α -Orientierungen bilden also einen distributiven Verband. Wie verhält dieser sich zu dem aus dem ersten Beweis speziell für Domino Tilings? Es ist genau der selbe, wenn wir die (3, 1)-Orientierung des selben Graphen betrachten! Wenn wir beim ersten Beweis annehmen, dass die in den Bildern schraffierten Flächen diejenigen sind, dessen Knoten in der zugehörigen α -Orientierung genau eine ausgehende Kante haben, dann sind die dort definierten "aufwärts gerichteten" Flips genau die hier von ccw zu cw gerichteten, andernfalls sind es genau die von cw zu ccw gehenden. In jedem Fall ergibt sich bis auf Umkehrung der Relation der genau gleiche distributive Verband.

Auch hier müssen wir uns fragen, wie sich der Beweis auf den Torus verallgemeinern lässt oder warum nicht. Die Antworten sind wiederum ähnlich: genau wie im ersten Beweis benötigt die Azyklizität der Relation einen Rand des Graphen, der (als äußeres Face möglicherweise durchaus gerichtet) nicht geflippt werden darf. Dieser Rand ist auf dem Torus nicht natürlich vorhanden, man müsste das entsprechende Face also willkürlich festhalten.

Auf dem Torus gibt es aber insbesondere auch Orientierungen, die keine gerichteten Facekreise besitzen, der Flipzusammenhang fehlt also. Mit eben diesem beschäftigt sich das nächste Kapitel.

5 Situation auf dem Torus

Wie wir gesehen haben, ist es auf planaren α -Orientierungen, also auch auf planaren Domino-Tilings möglich, nur mittels drehen von essentiellen Kreisen (in Domino-Tilings tatsächlich Face-Flips) jede mögliche Konfiguration zu erreichen.

Dabei stellt sich die Frage, ob und wie man dieses Resultat verallgemeinern kann. α -Orientierungen lassen sich problemlos auf dem Torus definieren. Eine $(3, 1)$ -Orientierung wie im vorherigen Kapitel können wir zumindest auf torischen Gittergraphen gerader Breite und Höhe definieren - eine ungerade Breite oder Höhe macht ähnlich wie bei der Höhenfunktion Probleme, da es dann benachbarte Knoten geben müsste, die den gleichen Ausgrad haben. Wir betrachten hier daher nur torische Gittergraphen, die sowohl gerade Höhe als auch Breite haben.

Eine besondere Rolle spielt auf dem Torus die topologische Struktur.

Definition 5.1. Wir können Kreise in \vec{G} als Vektoren des Kreisraums in $\{-1, 0, 1\}^{|A|}$ betrachten, wobei die i -te Komponente des Vektors der Kante e_i entspricht und den Wert 1 hat, falls die Kante im Kreis enthalten und bezüglich einer festen Orientierung X gleich gerichtet ist, 0 falls e_i nicht im entsprechenden Kreis enthalten ist und -1 sonst.

Wenn v_C der Vektor einer Menge von gerichteten Kreisen ist und sich als Linearkombination von Vektoren in $\{-1, 0, 1\}$ von Face-Kreisen schreiben lässt, nennen wir C nullhomolog.

Abbildung 6: Betrachte die beiden roten Kreise: gemeinsam sind sie in dem linken Bild nullhomolog, im rechten sind sie es nicht mehr

Kolja Knauer hat in [6] gezeigt, dass es für einen torischen Gittergraphen mit $\alpha(v) = 2\forall v \in V$ ausreicht, wenn man alle Faces bis auf eines, und zusätzlich noch zwei nicht nullhomologe Kreise erlaubt, um den Zusammenhang und die Poset-Struktur zu erreichen. Durch das Festhalten eines Faces schafft man es insbesondere, die Azyklizität zu sichern. Zugleich muss die benötigte Menge von Kreisen eine Basis des Kreisraumes enthalten, daher ist diese Menge in seinem Beispiel auch optimal.

Wir wollen das "erzeugen einer Orientierung" formaler machen: Definiere eine *zulässige Flipsequenz* in einer Orientierung X von \vec{G} auf dem Torus als eine Folge C_1, \dots, C_n von Kreisen, so dass C_1 in X gerichtet ist, und $C_i, i = \{2, \dots, n\}$ jeweils in dem Graphen gerichtet ist, der entsteht wenn man nacheinander die Kreise C_1, \dots, C_{i-1} flippt. Wir erlauben hier also beliebige Kreise mit beliebiger Drehrich-

tung zu flippen. Wenn durch eine Folge von Flips von $C_1 \dots C_n$ genau die Kantenmenge eines Kreises C umgedreht wird, der selber nicht geflippt wurde, sagen wir dass C sich aus $C_1 \dots C_n$ zusammensetzen oder erzeugen lässt.

Beispielsweise haben wir bereits gesehen, dass sich jeder Kreis in planaren α -Orientierungen durch Folgen von Face-Flips erzeugen lässt. Teilt ein Kreis C die Fläche S auf der \vec{G} eingebettet ist in zwei Regionen, von denen eine homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe ist, dann ist der C mit dem auf dieser Region eingebetteten Teil des Graphen ein planarer Teilgraph von \vec{G} , und wir können C wie bereits gezeigt durch Face-Flips in seinem Inneren zusammensetzen.

Kann man also ähnliches auch für den Fall der torischen Domino Tilings, also der $(3, 1)$ -Orientierungen auf dem Torus zeigen? Kann man eine Menge von Kreisen auswählen, mit denen man tatsächlich jede Orientierung auf dem Graphen mittels Kreisflips erzeugen kann, sozusagen eine Art Erzeugendensystem für alle Orientierungen? Wir werden sehen, dass wir hier eine deutlich größere Menge von Kreisen brauchen, eine Basis des Kreisraumes also nicht ausreicht.

Betrachten wir also eine $(3, 1)$ -Orientierung auf dem Torus. Lässt man tatsächlich das Drehen aller denkbaren Kreise zu, so ist es sofort möglich alle Orientierungen ausgehend von einer beliebigen Orientierung zu erzeugen, wie wir in Lemma 2.6 gezeigt haben.

Da wir gerade gesehen haben, dass Face-Flips auch hier größere Kreise erzeugen können, ist klar dass nicht alle Kreise nötig sind. Kann man also möglichst kleine Kreismengen finden um alle Orientierungen zu erzeugen?

5.1 Gegenbeispiele

Hier soll es darum gehen, welche Klassen von Kreisen sich nicht eignen bzw nicht ausreichen um überhaupt den Flipzusammenhang zu gewährleisten - und wie man das jeweils beweisen kann.

Zur Notation: Je nachdem was man zeigen will, eignen sich verschiedene Modelle besser um zu verstehen, was geschieht. Ich werde hier im wesentlichen von den α -Orientierungen ausgehen, die auf dem zugrundeliegenden torischen Gittergraphen das Domino Tiling des Torus eindeutig bestimmen. Immer wenn von Kanten die Rede ist, sind daher Kanten in diesem Graph gemeint. "Matchingkanten" sind darin die Kanten, die komplett in einem jeweiligen Domino liegen, d.h. die für ihre inzidenten Knoten die jeweils einzige ausgehende bzw einzige eingehende Kante bilden. In den Bildern sind die jeweils gegenüberliegenden Ränder identifiziert sofern nicht explizit etwas anderes angegeben ist, so dass Dominos/Kanten des Graphen "über den Rand" gehen können.

Als einfaches Beispiel dafür, dass allein Face-Kreise nicht ausreichen kann das Muster einer "Ziegelmauer" dienen. Dabei sind die Matchingkanten im Graphen horizontal angeordnet, aber wie bei einer Mauer um jeweils eins versetzt. Bei dieser Anordnung gibt es allerdings keinen einzigen gerichteten Face-Kreis, bzw. für Tilings keine zwei nebeneinanderliegenden Dominos, die man drehen könnte. Allein mit Face-Flips kommt man hier also nicht weiter, es braucht also offensichtlich mehr Kreise. Für dieses Beispiel sticht eine Lösung sofort ins Auge - man kann gerade horizontale (und wegen Rotationssymmetrie vertikale) Kreise erlauben, d.h. Kreise in denen alle Kanten in die gleiche Richtung zeigen. Damit kann man zumindest andere Orientierungen erzeugen, es ist jedoch nicht klar ob man alle erhält. (Tatsächlich erhält man nicht alle wie wir gleich sehen werden!)

Abbildung 7: Ein Domino Tiling des Torus (gegenüberliegende Seiten identifiziert) , bei dem kein Face-Flip möglich ist

Wenn man erlaubt, einen nicht nullhomologen Kreis umzudrehen, kann dies durchaus das Flippen weiterer Kreise ermöglichen wenn der Kreis denn gerichtet ist. Betrachtet man allerdings den gleichen Graph, allerdings etwas verschoben, dann ist dieser Kreis im allgemeinen nicht mehr gerichtet und kann deshalb nicht umgedreht werden. Aus diesem Grund werde ich hier im weiteren Kreisklassen behandeln:

Definition 5.2. Eine Kreisklasse ist eine Menge von Kreisen, für die es für jeden Kreis C darin einen Knoten v_0^C gibt, so dass von v_0^C ausgehend die Folge der Kantenrichtungen ($\in \{\text{Hoch, Runter, Links, Rechts}\}$) die gleiche ist. Wir erlauben also eine bestimmte Form von Kreisen mit jedem möglichem Startpunkt im Graphen zu flippen, wenn wir davon sprechen eine Kreisklasse zu erlauben.

Welche natürlichen Kreise bieten sich noch an, nachdem Face-Flips, wie wir gesehen haben, nicht reichen? Reicht es beispielsweise aus, wenn man gerade und treppenförmige Kreise wählt? Auch hier ist die Antwort nein. Nehmen wir ein quadratisches Gitter, horizontale und vertikale gerade Kreise und dazu die folgenden beiden Kreistypen (“Treppen“):

Erlauben wir nun das Flippen dieser drei Kreisklassen. Im Gegensatz zu dem obigen Beispiel kann man hier aufgrund der Form der Kreise nicht mehr erwarten, eine Orientierung/ein Tiling zu finden in der alle in Frage kommenden Kreise (insbes. Faces) nicht gerichtet sind. Betrachte beispielsweise folgendes Beispiel: in Abb 7 sind zwar einzelne Faces flipbar, allerdings ist nicht klar ob man hiermit alle anderen Orientierungen/Tilings erreichen kann. Jedoch sind sämtliche nun erlaubten nicht nullhomologen Kreise in diesem Beispiel nicht gerichtet, also nicht flipbar.

Das folgende Beispiel zeigt uns, dass auch mit Face-Flips mitunter nur sehr wenige Orientierungen erreichbar sind. Wir können also nicht einfach durch Face-Flips immer in eine günstigere Position kommen, in der wir größere nicht nullhomologe Kreise

Abbildung 8: Beispiel, in dem Faces (gelb markiert) drehbar sind. Lassen sich hieraus mit den obigen Kreisen alle Orientierungen erzeugen?

gerichtet haben, sondern es kann passieren, dass wir immer wieder in ähnlich schlechte Orientierungen kommen (Abb 8).

Abbildung 9: Die Ausgangskonfiguration und die Endkonfiguration sind bis auf eine Verschiebung gleich.

Da wir offenbar viele Beispiele finden können, bei denen man nicht sofort sehen kann ob alle Orientierungen erreicht werden können, brauchen wir eine aussagekräftige Bedingung, mit der man (möglichst mit geringem Aufwand) prüfen kann, ob man wirklich nicht alle anderen Orientierungen mit den gegebenen Kreisen erzeugen kann. Das heißt wir wollen prüfen, ob man an einer konkreten Orientierung sehen kann, dass die gegebenen Kreisklassen nicht ausreichen um den Flipzusammenhang herzustellen.

Definition 5.3. Sei ein Kreis C und ein Knoten v auf diesem Kreis gegeben. Sind die beiden in C zu v inzidenten Kanten in Durchlaufrichtung des Kreises entgegengesetzt gerichtet, so nennen wir diesen Knoten eine Konfliktstelle von C .

Lemma 5.4

Sei ein Kreis C in einer torischen $(deg - 1, 1)$ -Orientierung gegeben. Sei M_{ein} die Anzahl der (in Durchlaufrichtung) auf der rechten Seite in C eingehenden Matchingkanten des Graphen und M_{aus} die Anzahl der auf dieser Seite aus C ausgehenden Matchingkanten an Konfliktstellen.

Dann ist für jede Folge von Face-Flips im Graphen die Differenz $M_{ein} - M_{aus}$ für C konstant.

Da in einem gerichteten Kreis die Differenz $M_{ein} - M_{aus} = 0$ ist, führt uns dies direkt zu folgendem, äußerst nützlichem Korollar:

Korollar 5.5

Wenn zu einer Seite des Kreises, oBdA in Durchlaufrichtung rechts, die Anzahl der in diese Richtung an den Konfliktstellen ausgehenden Matchingkanten ungleich der aus dieser Richtung an Konfliktstellen eingehenden Matchingkanten ist, so kann man den Kreis nicht durch flippen einer Folge von Face-Kreisen in einen gerichteten überführen.

Beweis des Lemmas. Betrachte einen Face-Flip. Falls das Face keinen Knoten mit C gemeinsam hat, so ist die Behauptung klar. Andernfalls betrachten wir also ein gerichtetes Face, das zur rechten Seite von C liegt und mindestens einen gemeinsamen Knoten mit C hat. Der Teil vom Face, der nicht zu C gehört, ist ein Pfad der zur rechten Seite von C ein- und ausgeht und auf dem die Richtung der Kanten geflippt wird. Da er gerichtet ist, wechseln sich auf ihm Matchingkanten mit Nichtmatchingkanten ab.

1. Fall 1: Der Pfad hat eine gerade Anzahl von Kanten:
Dann ist entweder die erste oder die letzte Kante eine Matchingkante - egal wiederum der Pfad gerichtet ist. Ist vor dem flippen des Kreises die erste Kante des Pfades eine Matchingkante, so ist es danach die (nun erste) Kante, die vorher letzte des Pfades war. Das flippen ändert also nichts an den Werten M_{ein} und M_{aus} .
2. Fall 2: Der Pfad hat ungerade Anzahl Kanten:
Dann sind beide oder keine der zu C inzidenten Kanten im Matching. Wenn es beide sind, dann sind sie auf dem Pfad gleich gerichtet, und deshalb ist eine von C aus gesehen eine eingehende und die andere eine ausgehende Kante. Die Differenz $M_{ein} - M_{aus}$ bleibt also genauso wie wenn keine der beiden Kanten im Matching ist.
3. es bleibt noch zu zeigen, warum wir nur Matchingkanten an Konfliktstellen betrachten:
Ist in einem Knoten eine Kante im Matching, dann sind die restlichen Kanten entweder alle im Bezug zum Knoten ausgehend oder alle eingehend. Dadurch sind sie aber entgegengesetzt gerichtet, wenn also von einem Knoten auf C die Matchingkante nicht zu C gehört, dann ist dieser Knoten immer ein Konfliktstelle. Man würde also auch wenn man es nicht explizit sagt nur die Matchingkanten an Konfliktstellen zählen.

□

Was hilft uns nun dieses Lemma? Wir haben nun ein leicht zu überprüfendes Kriterium an der Hand, um zu entscheiden ob eine gegebene Menge von Kreisen *nicht* ausreicht um alle Domino-Tilings mittels Flips zu erzeugen. Dazu reicht es, ein Beispiel anzugeben, in dem sämtliche gegebenen Kreise nicht gerichtet sind, und nachzuweisen dass außerdem für jeden dieser Kreise $M_{ein} - M_{aus} \neq 0$ ist. Es gibt uns also eine notwendige Bedingung dafür, dass man ungerichtete Kreise mittels Face-Flips in gerichtete überführen kann.

Nun stellt sich natürlich die Frage nach konkreten Beispielen, die diese Bedingung erfüllen. Wir haben bereits einige kleine Beispiele gesehen, aber konnten noch nicht beweisen, welche Kreise in diesen Beispielen jeweils nicht ausreichend sind. Der nächste Abschnitt wird sich daher genauer damit beschäftigen.

Einige konkrete Gegenbeispiele

Um konkrete Beispiele zu finden gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man kann zum Beispiel ein beliebiges Domino Tiling hernehmen und alle möglichen Kreise überprüfen ob sie die Bedingungen des Lemmas erfüllen. Die Wahrscheinlichkeit ist hoch, dabei einige Kreisklassen oder Kreise zu entdecken. Man kann sich andererseits auch eine Menge von Kreisen/Kreisklassen definieren, die man ausschließen will. Anschließend konstruiert man ein entsprechendes Domino Tiling per Hand (falls das möglich ist) und überprüft es dann mit Hilfe des Lemmas. Auf diese Weise bin ich bei den folgenden Beispielen vorgegangen:

Abbildung 10: Beispiel 1

Abbildung 11: Beispiel 2

Folgende Klassen von Kreisen sind in diesem Domino-Tiling nicht flipbar:

Zur Überprüfung habe ich ein kleines Java-Programm genutzt.

Sind diese Beispiele aber auch aussagekräftig für allgemeinere Fälle, oder können es möglicherweise nur Ausnahmen sein, die auf besonders kleinen Instanzen auftreten?

Auch hierfür hilft uns unser Lemma weiter.

Definition 5.6. Sei ein torisches Domino Tiling T gegeben. Wir haben torische Domino Tilings definiert über Domino Tilings einer rechteckigen Region, bei der die jeweils gegenüberliegenden Seiten identifiziert werden. Bezeichne die Ränder dieser rechteckigen Region als a, b, c, d wobei a, c und b, d jeweils die gegenüberliegenden Seiten sind, die ursprünglich identifiziert wurden. Konstruiere nun folgendermaßen ein doppelt so großes Domino Tiling aus T : Erstelle eine Kopie T' von T , mit den Seiten a', b', c', d' , wobei a' die Kopie von a ist usw. Identifiziere nun die Seitenpaare: $(b, d), (b', d'), (a, c'), (a', c)$. Das entstandene torische Domino Tiling nenne T^2 .

Nun können wir folgendes beobachten:

Abbildung 12: nochmal Beispiel 2 mit dem zugehörigen gerichteten Graph

Abbildung 13: Kreisklassen die in Bsp 2 nicht durch Face-Flips gerichtet gemacht werden können

Lemma 5.7

Sei ein torisches Domino Tiling T gegeben, so dass k Kreise die Bedingung aus Lemma 5.4 nicht erfüllen, um durch Face-Flips in gerichtete Kreise überführt zu werden, die also an Konfliktstellen ungleich viele eingehende und ausgehende Kanten haben. Dann hat T^2 mindestens genauso viele Kreise mit dieser Eigenschaft.

Beweis. Durch die Konstruktion ergibt sich, dass jeder Kreis der über den Rand (a, c) verläuft, zu einem größeren Kreis aus zwei gleichartigen Kopien verlängert wird. Die Anzahl der ein- bzw. ausgehenden Matchingkanten an Konfliktstellen wird dabei jeweils verdoppelt, da ja der gleiche Kreis mit der gleichen Orientierung nun zwei mal durchlaufen wird. Insbesondere bleiben die Zahlen unterschiedlich, wenn sie es vorher waren. \square

Haben wir also mit Hilfe des Lemmas 5.4 ein Beispiel gefunden bei dem wir mindestens k verschiedene Kreise benötigen, so finden wir auch beliebig größere Beispiele die mindestens k verschiedene Kreise benötigen. In der Tat scheint es plausibel, dass die Anzahl der benötigten Kreisklassen mit der Größe der Fläche monoton wachsend ist.

Es ist, zumindest wenn man das Wachstum der benötigten Kreise betrachtet, dafür wie gesagt nötig sich ganze Kreisklassen anzuschauen, da wir nach obiger Beobachtung auf jeden Fall immer größere Beispiele mit im Prinzip den gleichen Kreisklassen bauen können. Die Anzahl der Kreise in einer Kreisklasse ist aber offensichtlich monoton wachsend, da bei einer größeren Fläche natürlich auch mehr Startpositionen zur Verfügung stehen, an denen gleichgeformte Kreise beginnen können.

Proposition 5.8

Die Anzahl der Kreisklassen, für die man zeigen kann, dass sie gemeinsam mit Face-Flips nicht genügen um alle Orientierungen zu erzeugen, ist unbeschränkt, d.h. sie wächst mit der Größe des Gitters.

Beweis. Wir haben im Beweis des vorherigen Lemmas gesehen, dass man die Lücke zwischen der Zahl der eingehenden Matchingkanten und der ausgehenden Matchingkanten auf einer Seite des Kreises beliebig groß machen kann. Die Idee ist: Wenn eine lokale Änderung an der Kreisklasse klein genug und die Differenz $M_{ein} - M_{aus}$ groß genug ist, dann kann es durch die lokale Änderung nicht genug Matchingkanten geben, um den Unterschied auf 0 zu bringen.

Da wir die Differenz $M_{ein} - M_{aus}$ beliebig groß machen können, müssen wir nur zeigen, dass es immer eine lokale Änderung einer Kreisklasse gibt, durch die eine noch nicht verwendete Kreisklasse entsteht. Dies können wir folgendermaßen erreichen:

Sei K die Menge der Kreisklassen, für die wir wissen dass sie in einer gegebenen Orientierung T die Bedingung $M_{ein} - M_{aus} \neq 0$ erfüllen und deren Kreise horizontal verlaufen (d.h. formell: in der Folge der Kantenrichtungen der Kreisklasse kommt für ein Gitter der Breite n die Richtung "Rechts" r mal auf für ein $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$ und die Richtung "Links" nur $r - n$ mal). Analog zu der in 5.6 beschriebenen Methode erzeuge eine Orientierung T^3 die aus 3 Kopien von T besteht, jeweils an der selben Stelle mit der Nachbarkopie identifiziert. Die Identifizierung soll so erfolgen, dass die horizontalen Kreise aus K jeweils zu einer neuen Kreisklasse verschmelzen. Die Menge der hierdurch entstandenen Kreisklassen nennen wir K' . In T^3 hat jede Kreisklasse aus K' nun $|M_{ein} - M_{aus}| \leq 3$ in allen enthaltenen Kreisen. Führe folgende lokale Änderung für eine Kreisklasse durch: Da die Kreise horizontal sind, gibt es eine Kante $e = (u, v)$, so dass die Kante zwischen den beiden Knoten, die von u, v jeweils in Richtung "Runter" liegen, nicht zu der Kreisklasse gehört. Ersetze nun in der Folge

der Kantenrichtungen “Richtung von e “ durch “Runter, Richtung von e , Hoch“. Dies ist tatsächlich eine neue horizontale Kreisklasse, denn alle in K' haben die gleiche Richtungsfolge 3 mal hintereinander, während die neue Kreisklasse als einzige eine Variation enthält. Da nur vier benachbarte Knoten betroffen sind, die als nur insgesamt zwei Matchingkanten haben können, kann sich $M_{\text{ein}} - M_{\text{aus}}$ höchstens um ± 2 verändern, somit folgt $|M_{\text{ein}} - M_{\text{aus}}| \leq 1$ und wir haben nun mindestens $|K| + 1$ viele Kreisklassen die Probleme machen.

□

5.2 Einschränkung der benötigten Kreisklassen

Wie wir nun wissen, kann man nicht unbedingt erwarten mit wenigen Kreisklassen den Flipzusammenhang wieder herzustellen. Allerdings wissen wir auch, dass sich bestimmte Kreisflips durch mehrere andere erzeugen lassen. Wir betrachten deshalb die Kombination von Faces und anderen Kreisklassen. Dabei ist das, was in diesem Kapitel zu finden ist, nur ein Anfang, in dem per Hand einige Kreise aus anderen konstruiert werden. Wünschenswert wäre natürlich eher ein Ergebnis, dass allgemein angibt wie viele Kreise man sparen kann wenn man eine bestimmte Menge von Kreisen zu flippen erlaubt - leider ist mir so etwas nicht gelungen. Außerdem ist zu beachten, dass nicht klar ist, ob eine Menge von Kreisen mit denen man den Flipzusammenhang nachweisbar nicht herstellen kann auch bedeutet, dass man dies nicht doch mit einer kleinen Menge von Kreisen bewerkstelligen kann.

Face-Flips sind sehr natürlich und ermöglichen uns bereits eine sehr große Anzahl von Kreisklassen zu flippen, außerdem ein natürlicher Teil der Kreisraumbasis. Deshalb werden wir immer Face-Flips zulassen. Da diese wie gezeigt nicht ausreichen, brauchen wir mindestens eine weitere Klasse von Kreisen deren Flips wir erlauben. Das einfachste Beispiel hierfür sind die Kreise, die ohne einen Knick immer geradeaus gehen, aus Symmetriegründen nehmen wir gleich sowohl die horizontalen als auch die vertikalen Kreise.

Definition 5.9. Die Menge der Knoten (x, y) , die im torischen Gittergraphen der $(3, 1)$ -Orientierung die jeweils gleiche Koordinate x oder die gleiche Koordinate y haben, nennen wir horizontale oder vertikale Achse des Graphen. Ein Kreis in diesem Graphen heißt gerade, wenn alle seine Knoten auf der gleichen Achse liegen.

Als Beule (bezüglich einer Achse) bezeichnen wir einen Pfad P , so dass P nur Start- und Endknoten auf der Achse hat und mit Kanten des geraden Kreises dieser Achse zu einem einfachen nullhomologen Kreis erweitert werden kann. Die Länge der Beule ist dabei der maximale Abstand eines Punktes auf P zur Achse bezüglich der Seite, zu der die P die Achse verlässt und betritt. Die Breite ist die Anzahl der Kanten, die auf dem geraden Achsenkreis benötigt werden, um P zu einem einfachen nullhomologen Kreis zu erweitern.

Was bringt uns das nun? Wir werden sehen, dass sich Kreise mit schmalen Beulen sich durch gerade und Face-Kreise erzeugen lassen.

Betrachte als Hauptkreis einen geraden Kreis mit einer Beule der Breite 1, der gerichtet ist, also theoretisch im ganzen flipbar wäre. Im folgenden Bild sieht man sehr gut, wie leicht sich diese aus Facekreisen und dem Hauptkreis zusammensetzen lässt.

Gleiches funktioniert nicht nur in diesem Beispiel, sondern für Beulen der Breite 1 bei beliebiger Länge: die Beule an sich ist ja ein nullhomologer Kreis, der bis auf die mit dem Hauptkreis geteilte Kante gerichtet sein muss. Diese Kante kann wenn sie entgegen den anderen gerichtet ist durch das flippen des Hauptkreises umgedreht werden, andernfalls ist sie für den Hauptkreis ungerichtet und wird durch den Flip des nullhomologen Kreises gedreht. Dabei muss man natürlich die Reihenfolge beachten, das ganze ist in Abbildung 15 schematisch dargestellt.

Dieses Vorgehen wird schwieriger, wenn die Breite der Beulen zunimmt. Die hier rot gemalte Zwischenkante wird zu einem Pfad von mehreren Zwischenkanten. Diese sind

Abbildung 14: Beispiel wie eine Ausstülpung durch eine Kombination mit nullhomo-
logenen Kreisen geflippt wird

Abbildung 15: Unterschiedliche Reihenfolge des der Flips, abhängig von der Richtung
der (roten) Zwischenkante

dann aber möglicherweise nicht gerichtet! Abbildung 16 verdeutlicht das Problem:

Wie es scheint können wir bei dieser Form von Beulen zumindest mit der obigen Me-
thode nichts erreichen. Die gute Nachricht ist aber: Wir sind nicht bei allen größeren
Ausstülpungen verloren. Häufig ist es möglich, zumindest einen Teil des Kreises über
Faceflips zu drehen. Betrachte die Situation in einer Ecke (Abb 17)

Analog dazu ist das Bild, wenn der Eckknoten 3 eingehende und eine ausgehende Kan-
te hat, nur dass die Wege dann jeweils in die andere Richtung laufen. Es genügt also,
einen kleineren Kreis zuzulassen um den größeren zu erzeugen. Dieses Argument kann
man nun induktiv immer weiter fortführen, da in der Regel auch der entsprechende
kleinere Kreis eine solche Ecke besitzt. Wie weit kann man die Größe der Beulen so
einschränken? Leider kann das Domino Tiling durchaus so aussehen, dass ein großer
Teil der Beule übrig bleibt. Wir können also damit nur Ecken ausschließen, die aus “
hoch, hoch, rechts, rechts“ oder entsprechend gedrehten/gespiegelten Kanten bestehen.
Betrachte dazu Abbildung 18

sie zeigt ein Beispiel an dem keine solchen Ecken mehr vorhanden sind. Mit dem ge-
raden Kreis als Grundkreis sind wir an dieser Stelle also auch am Ende, da wir im
Gegensatz zu den Beulen der Breite 1 diese breiteren nicht durch Facekreise zusam-
mensetzen können. Bei Breite 2 kommt es bereits auf die Länge an: ist die Länge

Abbildung 16: Bei dieser 2×1 Beule ist es nicht mehr direkt möglich, entlang des schwarz eingezeichneten Kreises einen Flip aus dem geraden Kreis und einem nullhomologen Kreis zusammenzusetzen. Im Domino Tiling (rechte Darstellung) erkennt man, dass es nicht mal klar ist ob überhaupt Face-Flips möglich sind.

Abbildung 17: Eine der beiden grünen Kanten muss eine eingehende Kante in den gemeinsamen Knoten sein. Alle nichtgrünen Kanten folgen zwangsweise aus der Form des Pfades. Je nachdem wie man die Kantenrichtung wählt, erhält man entweder eine Abkürzung des großen Kreises, oder man erhält einen kleinen nullhomologen Kreis aus zwei Faces den man flippen kann. In beiden Fällen reduziert sich die Größe des benötigten Kreises.

gerade, dann lassen sie sich ebenso wie Beulen der Breite 1 durch Facekreise und den Grundkreis zusammensetzen, ist die Länge ungerade funktioniert das allerdings auch schon nicht mehr.

Abbildung 18: Beispiel einer Beule, in der man keinen Face-Flip mehr anwenden kann um die Größe zu reduzieren

6 Fazit

Wie wir gesehen haben, lassen sich die positiven Resultate aus dem planaren Fall hier nicht direkt auf den Fall der torischen Domino Tilings erweitern. Insbesondere steigt die Zahl der benötigten Kreisklassen von einer (Face-Kreise) auf möglicherweise beliebig viele abhängig von der Gittergröße. Dadurch ist insbesondere nicht klar, wie man möglichst günstig Flipzusammenhang konstruieren kann. Gleichzeitig konnte ich nicht zeigen, dass eine große Menge ungünstiger Kreisklassen auch implizieren, dass es keine kleinen Mengen gibt die ausreichend sind. Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass man durchaus Kreise aus anderen zusammensetzen kann, zumindest für den Fall von Faces und einem Grundkreis der nicht nullhomolog ist.

Eine interessante Fragestellung wäre nun zum Beispiel, ob durch das Zusammenspiel mehrerer nicht nullhomologer Kreise mit Facekreisen deutlich mehr zu erreichen ist. Auf allgemeinen α -Orientierungen stimmt es leider auch nicht, dass alle nullhomologen Kreise sich immer durch Faces zusammensetzen lassen, es wäre interessant zu sehen ob das auch für die Orientierungen gilt, die durch Domino Tilings induziert werden. Ebenfalls konnte ich für aus Domino Tilings entstandene Graphen nicht zeigen, ob die Bedingung aus Lemma 5.4 auch hinreichend ist.

Dank

An Kolja Knauer, der sich persönlich wie per Mail die Zeit genommen hat um mich zu betreuen, sich immer wieder meine Ideen angehört und dazu wertvolle Ideen entwickelt und mir Hinweise gegeben hat, insbesondere Lemma 5.4 betreffend - Danke!

Literatur

- [1] J.H Conway and J.C Lagarias, *Tiling with polyominoes and combinatorial group theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **53** (1990), no. 2, 183 – 208.
- [2] Stefan Felsner, *Lattice structures from planar graphs*, Elec. J. Comb **15** (2004), 15.
- [3] Stefan Felsner and Kolja B. Knauer, *ULD-Lattices and Delta-Bonds*, Combinatorics, Probability & Computing **18** (2009), 707–724.
- [4] Thomas Fernique, Eric Rémila, and Olivier Bodini, *Characterizations of Flip-Accessibility for Domino Tilings of the Whole Plane*.
- [5] P.W. Kasteleyn, *The statistics of dimers on a lattice: I. the number of dimer arrangements on a quadratic lattice*, Physica **27** (1961), no. 12, 1209 – 1225.
- [6] Kolja Knauer, *Partial orders on orientations via cycle flips*, Diplomarbeit, <http://page.math.tu-berlin.de/~knauer/diplom.pdf>, 2007.
- [7] PeterCheBor Lam and Heping Zhang, *A distributive lattice on the set of perfect matchings of a plane bipartite graph*, Order **20** (2003), 13–29.
- [8] J. Propp, *Lattice structure for orientations of graphs*, ArXiv Mathematics e-prints (2002).
- [9] Eric Rémila, *The lattice structure of the set of domino tilings of a polygon*, Theoretical Computer Science **322** (2004), no. 2, 409 – 422.
- [10] H. N. V. Temperley and Michael E. Fisher, *Dimer problem in statistical mechanics-an exact result*, Philosophical Magazine **6** (1961), no. 68, 1061–1063.
- [11] William P. Thurston, *Conway’s tiling groups*, The American Mathematical Monthly **97** (1990), no. 8, pp. 757–773.