Domino Tilings auf dem Torus

Tobias Buchwald

March 1, 2013

Inhaltsverzeichnis

en

Definition
Wir betrachten das zweidimensionale ganzzahlige Gitter, d.h. den (unendlichen) planaren Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ mit den Knoten $V = \mathbb{Z}^2$ und Kanten $E = \{e = \{x, y\} | x, y \in V, (|x_1 - y_1| = 1 \wedge x_2 = y_2) \vee (x_1 = y_1 \wedge |x_2 - y_2| = 1)\}$.
Wir nennen den Raum zwischen den vier benachbarten Punkten $(x, y), (x + 1, y), (x, y + 1), (x + 1, y + 1)$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ eine *Zelle* dieses Gitters, die Verbindungsgerade zwischen zwei ganzzahligen Punkten eine *Seite* der entsprechenden Zelle. Ein *Domino* ist nun die Vereinigung von genau zwei Zellen, die sich eine gemeinsame Seite teilen.
Ein *Domino Tiling* ist nun die Überdeckung einer Menge $\mathcal{Z}$ von Zellen durch Dominos mit disjunktem Inneren, wobei keine Zelle $z \notin \mathcal{Z}$ überdeckt sein darf.

Perfekte Matchings in Gittergraphen

Es gibt von den Domino Tilings eine Äquivalenz zu perfekten Matchings von Gittergraphen:

Sei ein Domino Tiling T gegeben. Konstruiert man einen Graphen, dessen Knoten jeweils in der Mitte der Zellen der Dominos aus T liegen, und verbindet diese Knoten jeweils mit den direkten horizontalen und vertikalen Nachbarn, so erhält man einen Gittergraphen G.

Die Kanten von G, die komplett innerhalb eines Dominos liegen, sind die Kanten eines perfekten Matchings. Ist andererseits ein Gittergraph G gegeben mit einem perfekten Matching M, lässt sich daraus ein eindeutiges Domino Tiling konstruieren.

α-Orientierungen des Gittergraphen

Eine α-*Orientierung* ist eine Orientierung der Kanten eines Graphen, so dass zu einer Abbildung $\alpha : V \to \mathbb{N}$ der Ausgrad $out(v) = \alpha(v) \forall v \in V$ ist, α gibt also die Anzahl der ausgehenden Kanten an.
Sei k die Anzahl der benachbarten Zellen, die nicht in der zu berdeckenden Region liegen. Dann können wir unser α definieren als:

$$\alpha(v) = \begin{cases} 1 & v_1 + v_2 \text{ ungerade, wir sagen v ist ungerader Knoten} \\ 3 - k & v_1 + v_2 \text{ gerade, wir sagen v ist gerader Knoten} \end{cases}$$

Für jeden Knoten gibt es nun eine eindeutig Kante, die der Matchingkante im perfekten Matching entspricht. Im folgenden wird eine solche α-Orientierung als $(3, 1)$-Orientierung bezeichnet.

Motivation

- Face-Flips: lokale Transformationen (Drehen eines Face-Kreises der α-Orientierung)
- induzieren in einfach zsh. planaren Domino-Tilings/Matchings/α-Orientierungen einen distributiven Verband
- Frage: wie sieht es damit auf nichtplanaren Oberflächen aus? Zum Beispiel auf dem Torus? Ist hier überhaupt noch Flipzusammenhang gegeben?
- Ergebnis von Kolja Knauer: Man bentigt als flipbare Kreise eine Basis des Kreisraumes um den Flipzusammenhang zu erhalten. Auf torischen $(2, 2)$-Orientierungen des Gittergraphen ist dies auch ausreichend.
- Lässt sich das auf torische Domino Tilings verallgemeinern?

Die Beweise des planaren Falls (Thurstons Höhenfunktion sowie α-Orientierungen) lassen sich nicht auf den Torus übertragen, denn

- Auf dem Torus ist die Wohldefiniertheit nicht mehr gegeben, falls eine Seitenlänge ungerade ist
- Facekreise reichen für den Flipzusammenhang nicht mehr aus
- Um eine azyklische Relation zu erreichen muss ein Face fixiert werden (im planaren das äußere), hier ist aber nicht klar welches und ob das reicht

Es stellt sich die Frage mit welchen Kreisen wir den Flipzusammenhang wieder herstellen können!

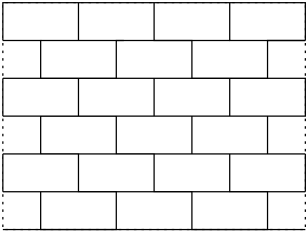


Figure: Ein Domino Tiling des Torus (gegenberliegende Seiten identifiziert) , bei dem kein Face-Flip mglich ist

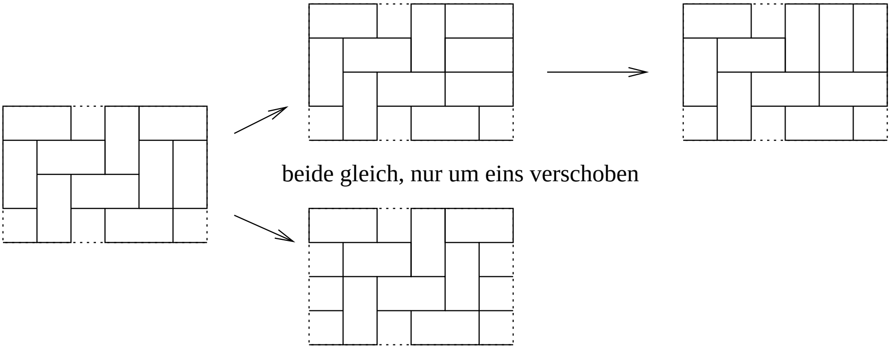


Figure: Die Ausgangskonfiguration und die Endkonfiguration sind bis auf eine Verschiebung gleich.

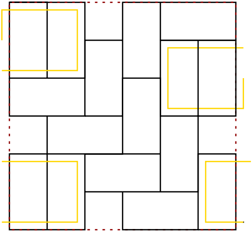


Figure: Beispiel, in dem Faces (gelb markiert) drehbar sind. Lassen sich hieraus mit den obigen Kreisen alle Orientierungen erzeugen?

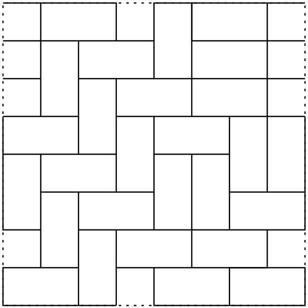


Figure: Beipiel 2

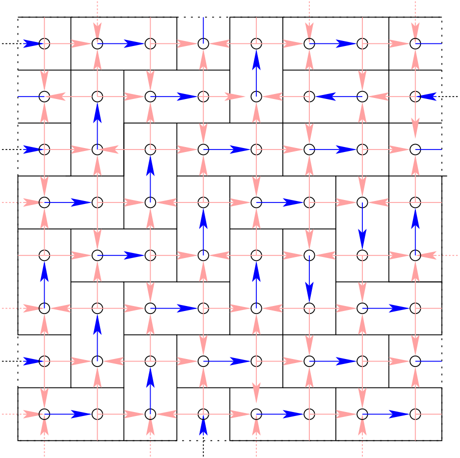


Figure: nochmal Beispiel 2 mit dem zugehrigen gerichteten Graph

Wie können wir also beweisen, dass bestimmte Kreisklassen oder Kreise NICHT jede Orientierung erzeugen?

- Idee: wir betrachten eine Orientierung, in der die Kreisklassen die uns interessieren bis auf einige Faces nicht gerichtet sind
- Es gibt eine Orientierung in der Kreise dieser Kreisklassen gerichtet sind
- Falls wir mittels Face-Flips keinen Kreis unserer Kreisklassen gerichtet machen können, haben wir gezeigt dass diese Klassen nicht reichen, um den Flipzusammenhang wieder herzustellen

Definition Sei ein Kreis C und ein Knoten v auf diesem Kreis gegeben. Sind die beiden in C zu v inzidenten Kanten in Durchlaufrichtung des Kreises entgegengesetzt gerichtet, so nennen wir diesen Knoten eine Konfliktstelle von C.

Lemma
Sei ein Kreis C in einer torischen $(deg-1,1)$-Orientierung gegeben. Sei M_{ein} die Anzahl der (in Durchlaufrichtung) auf der rechten Seite in C eingehenden Matchingkanten des Graphen und M_{aus} die Anzahl der auf dieser Seite aus C ausgehenden Matchingkanten an Konfliktstellen.
Dann ist für jede Folge von Face-Flips im Graphen die Differenz $M_{ein} - M_{aus}$ für C konstant.

Korollar
Wenn zu einer Seite des Kreises, oBdA in Durchlaufrichtung rechts, die Anzahl der in diese Richtung an den Konfliktstellen ausgehenden Matchingkanten ungleich der aus dieser Richtung an Konfliktstellen eingehenden Matchingkanten ist, so kann man den Kreis nicht durch flippen einer Folge von Face-Kreisen in einen gerichteten überführen.
[Beweis...]

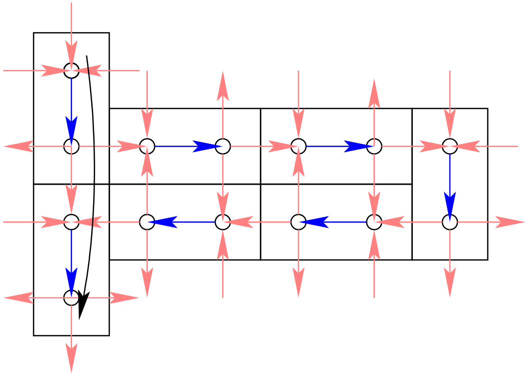
Was bringt das?

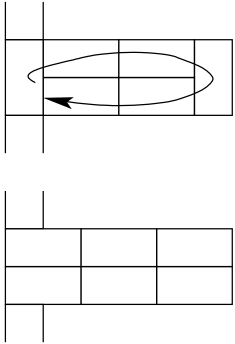
Sei ein torisches Domino Tiling T gegeben, so dass k Kreise die Bedingung aus dem Lemma nicht erfüllen, um durch Face-Flips in gerichtete Kreise überf ührt zu werden, die also an Konfliktstellen ungleich viele eingehende und ausgehende Kanten haben. Dann hat das "verdoppelte" Domino Tiling T^2 mindestens genauso viele Kreise mit dieser Eigenschaft. Hierdurch erhalten wir beliebig große Beispiele in denen bestimmte Kreisklassen nicht flipbar sind.

Die Anzahl der Kreisklassen, fr die man zeigen kann, dass sie gemeinsam mit Face-Flips nicht genügen um alle Orientierungen zu erzeugen, ist unbeschränkt, d.h. sie wächst mit der Größe des Gitters.

Wie kann man nun die benötigten Kreisklassen einschränken?
Welche Kreise lassen sich aus anderen zusammensetzen?

Wir betrachten als Grundmenge alle Face-Kreise des Graphen und nehmen an, dass es dazu einen Grundkreis gibt den wir flippen drfen und einen Kreis, der gerichtet (also flipbar) ist, den wir aber nicht direkt flippen wollen. Was kann passieren?





Wir sehen hier, dass man "Beulen" der Breite 1 aus dem Grundkreis und Face-Kreisen zusammensetzen kann.

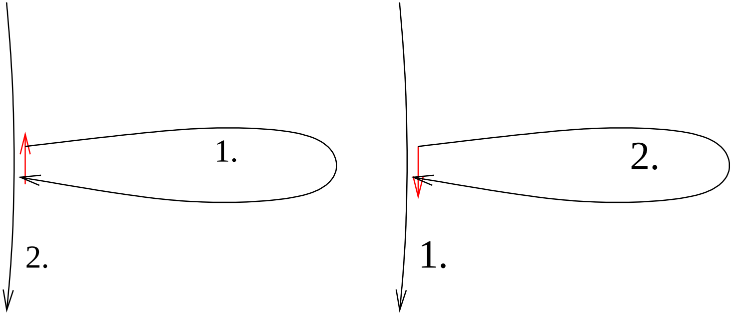


Figure: Unterschiedliche Reihenfolge des der Flips, abhängig von der Richtung der (roten) Zwischenkante

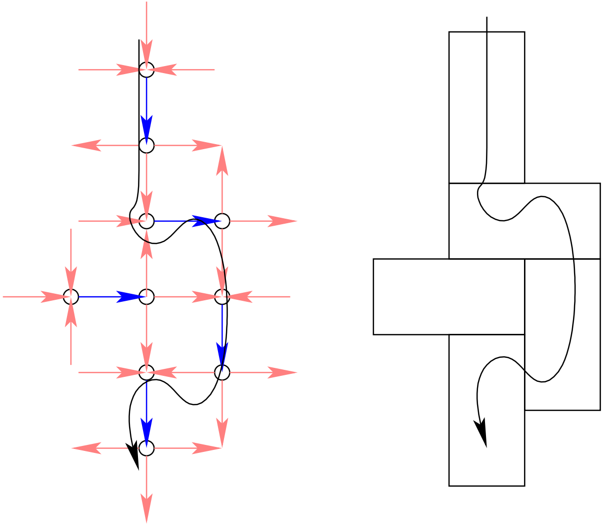


Figure: Bei dieser 2×1 Beule ist es nicht mehr direkt möglich, entlang des schwarz eingezeichneten Kreises einen Flip aus dem geraden Kreis und einem nullhomologen Kreis zusammenzusetzen. Im Domino Tiling (rechte Darstellung) erkennt man, dass es nicht mal klar ist ob überhaupt Face-Flips möglich sind.

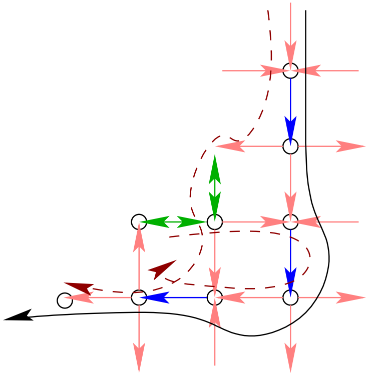


Figure: Eine der beiden gr ünen Kanten muss eine eingehende Kante in den gemeinsamen Knoten sein. Alle nichtgrünen Kanten folgen zwangsweise aus der Form des Pfades. Je nachdem wie man die Kantenrichtung whlt, erhält man entweder eine Abkürzung des großen Kreises, oder man erhält einen kleinen nullhomologen Kreis aus zwei Faces den man flippen kann. In beiden Fällen reduziert sich die Größe des benötigten Kreises.