CHỦ ĐỀ: HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 1

1.1. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU BẰNG BBT – ĐỒ THỊ

NỘI DUNG CẦN NẮM VỮNG

Bài toán bổ trợ 1: Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)]=0$.

Phương pháp :

+ Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x=x_i$ của phương trình $f(x)=0$.

+ Khi đó phương trình $f[u(x)]=0 \Leftrightarrow u(x)=x_i$. Giải các phương trình $u(x)=x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)]=0$.

Nhận xét : Đôi khi chỉ tìm ra được các nghiệm gần đúng x_i hoặc chỉ tìm ra được số nghiệm của phương trình $f[u(x)]=0$.

Bài toán bổ trợ 2: Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)]+p(x)=0$.

Phương pháp :

+ Đặt $t=u(x)$, biểu diễn $p(x)=\varphi(t)$.

+ Biến đổi phương trình $f[u(x)]+p(x)=0 \Leftrightarrow f(t)=-\varphi(t)$

+ Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x=x_i$ từ phương trình $f(x)=-\varphi(x)$.

+ Khi đó phương trình $f[u(x)]+p(x)=0 \Leftrightarrow t=u(x)=x_i$. Giải các phương trình $u(x)=x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)]=0$.

Nhận xét : Bài toán bổ trợ 1 là trường hợp đặc biệt của bài toán bổ trợ 2.

Bài toán 1: Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f'(x)$. Xét tính đơn điệu hàm số $y=f[u(x)]$.

Phương pháp :

+ Xác định $y'=u'(x).f'[u(x)]$. Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'(x)=0 \\ f'[u(x)]=0 \end{array}\right.$

(Dựa vào bài toán toán bổ trợ 1 để tìm các nghiệm phương trình $y'=0$).

+ Lập bảng xét dấu của y'.

+ Từ đó kết luận được về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f\left[u(x)\right]$ và có thể phát triển bài toán thành tìm số cực đại, cực tiểu của hàm số.

Bài toán 2: Cho đồ thị hàm số $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f'(x)$. Xét tính đơn điệu hàm số $y=f\left[u(x)\right]+p(x)$.

Phương pháp :

+ Xác định $y'=u'(x)f'\left[u(x)\right]+p'(x)$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\ f'\left[u(x)\right]=-\dfrac{p'(x)}{u'(x)},\ u'(x)\neq 0\end{array}\right.$

(Dựa vào bài toán toán bổ trợ 2 để tìm các nghiệm phương trình $y'=0$).

+ Lập bảng xét dấu của y'.

+ Từ đó kết luận được về khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số và có thể phát triển bài toán thành tìm số cực đại, cực tiểu của hàm số.

BÀI TẬP

Câu 1. Cho hàm số $f\ x$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y=3f\ x+2\ -x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $1;+\infty$. **B.** $-\infty;-1$. **C.** $-1;0$. **D.** $0;2$.

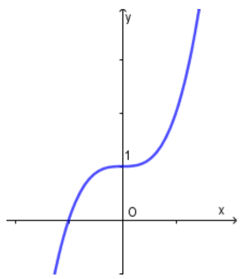
Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(2x)+2e^{-x}$ nghịch biến trên khoảng nào cho dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

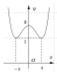
Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=-2f\left(x\right)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-4;2\right)$. **B.** $\left(-1;2\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(2;4\right)$.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây



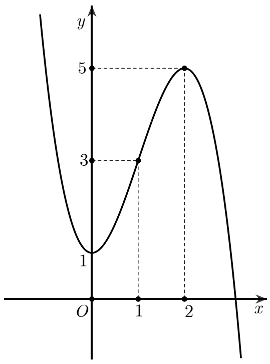
Hàm số $g\left(x\right)=\ln\left(f\left(x\right)\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f\left(-1\right)=f\left(3\right)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ có dạng như hình dưới đây. Hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

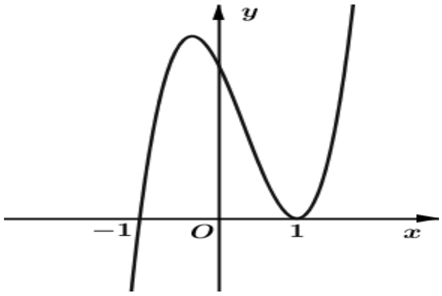
A. $\left(-2;2\right)$. **B.** $\left(0;4\right)$. **C.** $\left(-2;1\right)$. **D.** $\left(1;2\right)$.

Câu 7. Cho $y=f\ \ x$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y=f'\ \ x$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\ \ 5-2x\ \ +4x^2-10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?



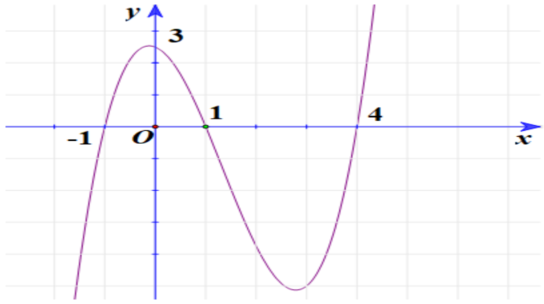
A. $3;4$. **B.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+x-1\right)$ đồng biến trên khoảng



A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

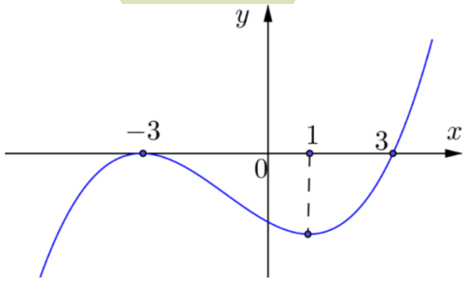
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f\left(|3-x|\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

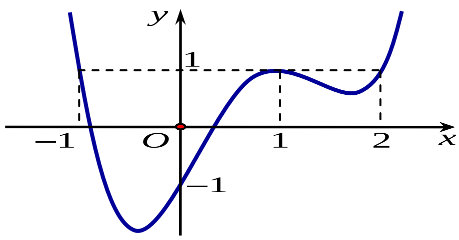
A. $(4;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=[f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2\,;3)$. **B.** $(0\,;1)$. **C.** $(-1\,;0)$. **D.** $(1\,;2)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	0	−	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$ **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

và hàm số $g(x)=f(1-2x)$. Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau

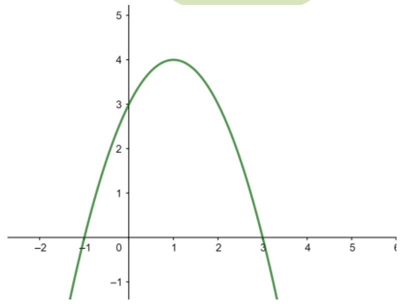
A. $x=\frac{1}{2}$ là một điểm cực đại và $x=0$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$ và $x=2$.

D. $x=-1$ là một điểm cực đại và $x=2$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=f(2x^4-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

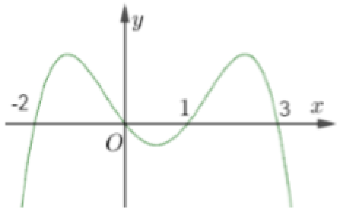
Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

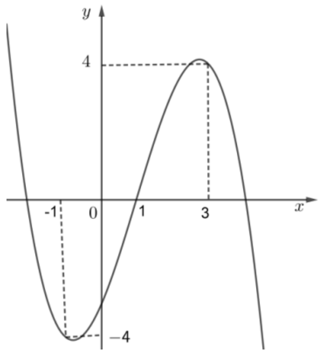
Câu 17. Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y = f\left(x^2+2x+3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x^2-x-2)$. Hỏi hàm số $g(x) = f\left(x-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

Hàm số $y = g(x) = f\left(x^2\right) + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{2x^3}{3} - 6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-4;-3)$. **D.** $(-6;-5)$.

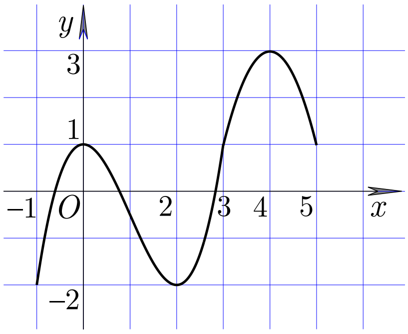
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $y = f\left(x^2-2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

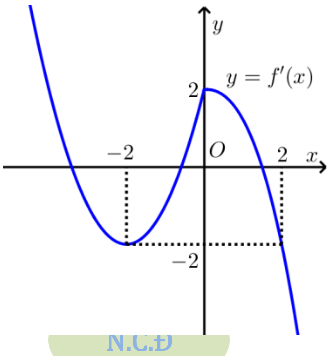
A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



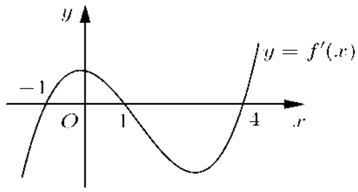
A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 23. Cho $f\ \ x$ mà đồ thị hàm số $y=f'\ \ x$ như hình bên. Hàm số $y=f\ \ x-1\ \ +x^2-2x$ đồng biến trên khoảng



A. $1;2$. **B.** $-1;0$. **C.** $0;1$. **D.** $-2;-1$.

Câu 24. Cho hàm số y=f(x) có đồ thị y=f ‘(x) như hình vẽ bên. Hỏi hàm số y=f(3-2x)+2019 nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi $g(x)=2f(1-x)+\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-5$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5x+3$ và hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=g\left(f(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;4)$.

Câu 27 . Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(x^2-2x+2\right)+x^3-3x^2-6x$.

Xét các khẳng định

1) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

2) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

3) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in(0;2020)$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2016. **D.** 2015.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(2x+1)+\dfrac{2}{3}x^3-8x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;7)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x+1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

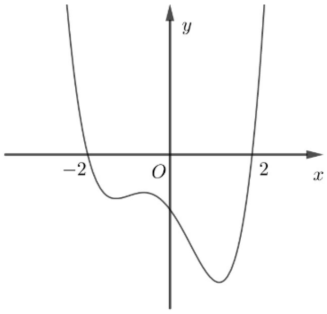
Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(-2)<0$, hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\sqrt[2018]{3};\sqrt[2018]{3}\right)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt[2018]{3};0\right)$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2\right)+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{2x^3}{3}-6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

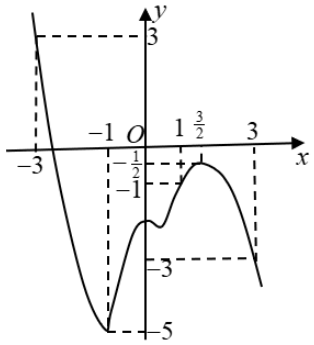
A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-6;-5)$. **D.** $(-4;-3)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-2;0)$.

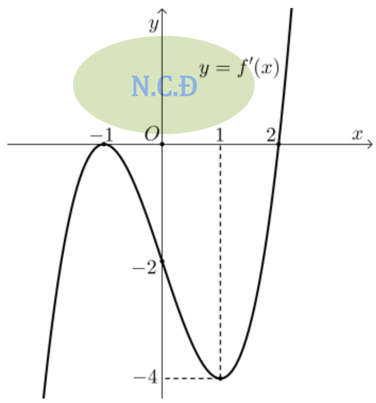
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

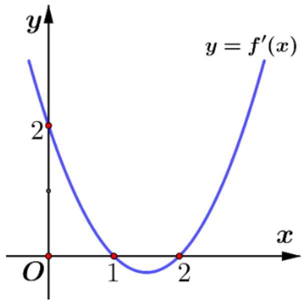
Cho hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(2;+\infty)$

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$. Hàm số $g(x)=-f\left(x^2-1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 2x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-4;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến $\forall x \in (a;b)$. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2-b;2-a)$. **B.** $(-\infty;2-a)$. **C.** $(a;b)$. **D.** $(2-b;+\infty)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $f\ \ x$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Hàm số $y=3f\ \ x+2\ -x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $1;+\infty$. **B.** $-\infty;-1$. **C.** $-1;0$. **D.** $0;2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'\left(x\right)$ thỏa mãn

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	0	+	

Hàm số $y=f\left(1-x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(-1;3\right)$. **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

Lời giải

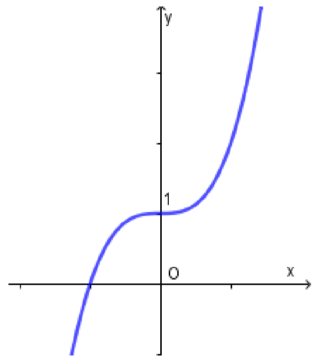
Chọn B

$y=f\left(1-x\right)\Rightarrow y'=-f'\left(1-x\right)$.

Hàm số $y=f\left(1-x\right)$ nghịch biến $\Rightarrow -f'\left(1-x\right)\le 0 \Leftrightarrow f'\left(1-x\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x\ge 1\\ -1\le 1-x\le 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 0\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$. Vậy hàm số $y=f\left(1-x\right)$ có nghịch biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(2x\right)+2e^{-x}$ nghịch biến trên khoảng nào cho dưới đây?

A. $\left(-2;0\right)$. **B.** $\left(0;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Chọn A

$y=f\left(2x\right)+2e^{-x}\Rightarrow y'=2f'\left(2x\right)-2e^{-x}=2\left(f'\left(2x\right)-e^{-x}\right)$

Từ đồ thị ta thấy $\left\{\begin{array}{l}f'\left(x\right)>1,\forall x>0\\ f'\left(x\right)=1,x=0\\ f'\left(x\right)<1,\forall x<0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}f'\left(2x\right)>1,\forall x>0\\ f'\left(2x\right)=1,x=0\\ f'\left(2x\right)<1,\forall x<0\end{array}\right.$

Mà $\begin{cases} e^{-x} < 1, \forall x > 0 \\ e^{-x} = 1, x = 0 \\ e^{-x} > 1, \forall x < 0 \end{cases}$ Suy ra $\begin{cases} f'(x) - e^{-x} > 0, \forall x > 0 \\ f'(x) - e^{-x} = 0, x = 0 \\ f'(x) - e^{-x} < 0, \forall x < 0 \end{cases}$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		↘		↗	

Vậy hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Xét $y = g(x) = -2f(x) + 2019$.

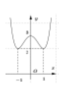
Ta có $g'(x) = (-2f(x) + 2019)' = -2f'(x)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$g'(x)=\left[\ln\left(f(x)\right)\right]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Vì vậy dấu của $g'(x)$ là dấu của $f'(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=f(3)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

N.C.Đ

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị và giả thiết, ta có bảng biến thiên của $y=f(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

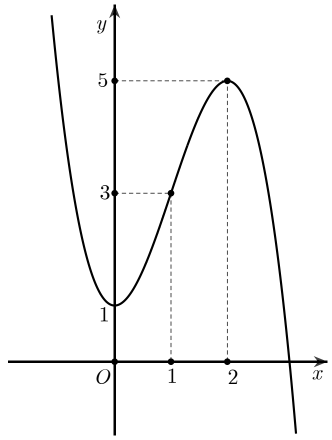
$y'=\left(\left(f(x)\right)^2\right)'=2f(x).f'(x)$.

Ta có bảng xét dấu của $y'=\left(\left(f(x)\right)^2\right)'$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	
$2f(x).f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	

Ta được hàm số $y=\left(f(x)\right)^2$ nghịch biến trên $(1;2)$.

Câu 7. Cho $y = f\ x$ là hàm đa thức bậc 4, có đồ thị hàm số $y = f'\ x$ như hình vẽ. Hàm số $y = f\ 5-2x\ + 4x^2 - 10x$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $3;4$.　　**B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$.　　**C.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$.　　**D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta suy ra $y = f'(x)$ có hai điểm cực trị $A(0;1), B(2;5)$.

Ta có $f''(x) = ax(x-2) = ax^2 - 2ax$, do đó $y = f'(x) = \frac{ax^3}{3} - ax^2 + b$ (1).

Thay tọa độ các điểm A, B vào (1) ta được hệ: $\begin{cases} b = 1 \\ \frac{8a}{3} - 4a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \end{cases}$.

Vậy $f'(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$.

Đặt $g(x) = f(5-2x) + 4x^2 - 10x$ hàm có TXĐ $\mathbb{R}$.

Đạo hàm $g'(x) = -2\left[f'(5-2x) - 4x + 5\right] = -4\left(4x^3 - 24x^2 + 43x - 22\right)$,

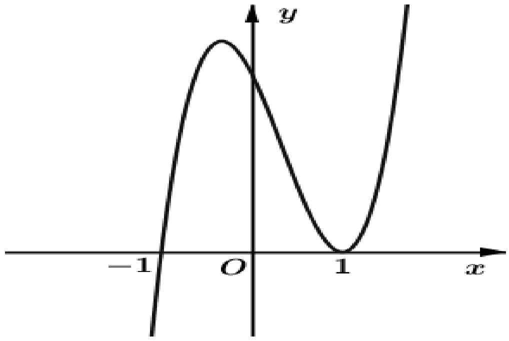
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{4 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{4+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ BBT ta chọn đáp án B.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f\left(x^2 + x - 1\right)$ đồng biến trên khoảng



A. $(0;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x)=a(x+1)(x-1)^2$ với $a>0$

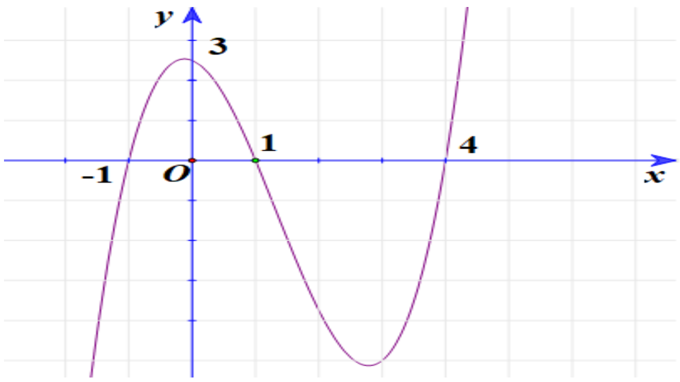
$$g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x-1)=a(2x+1)(x^2+x)(x^2+x-2)^2$$
$$=ax(2x+1)(x+1)(x-1)^2(x+2)^2$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{-1}{2}$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	+	
$g(x)$		↘		↘		↗		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên chọn A.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(4;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$y=f(|3-x|)\Rightarrow f'(|3-x|)=-\frac{(3-x)}{|3-x|}f'(|3-x|)\,(x\neq 3)$$

$$f'(|3-x|)=0\Leftrightarrow -\frac{(3-x)}{|3-x|}f'(|3-x|)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(|3-x|)=0\\3-x=0\end{array}\right.$$

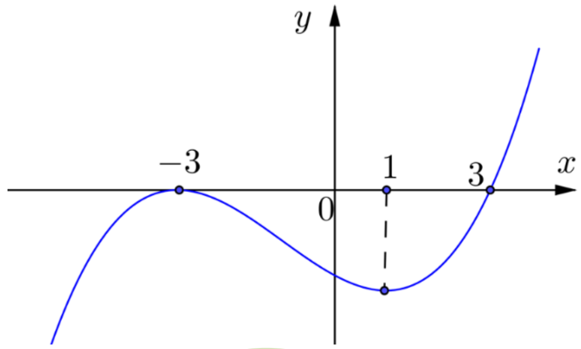
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3-x|=-1\,(L) \\ |3-x|=1\,(N) \\ |3-x|=4\,(N) \\ x=3\,(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=7 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(|3-x|)$:

x	$-\infty$		-1		2		3		4		7		$+\infty$
$f'\|3-x\|$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=[f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;3)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn B

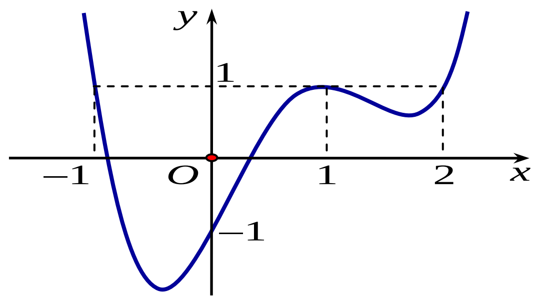
$g'(x)=2f'(x).f(x) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;3)$.

=> Chọn B.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2\,;3)$. **B.** $(0\,;1)$. **C.** $(-1\,;0)$. **D.** $(1\,;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)-1\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1\le -1 \\ x-1\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1\,;0)$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

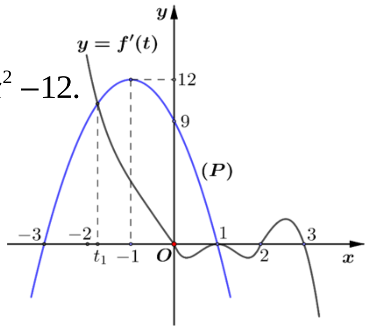
x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	0	$-$	0	+	0	$-$	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$ **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $g(x)=f(x-1)+x^3-12x+2019$, ta có $g'(x)=f'(x-1)+3x^2-12$.

Đặt $t=x-1 \Rightarrow x=t+1$

$\Rightarrow g'(x)=f'(t)+3t^2+6t-9=f'(t)-\left(-3t^2-6t+9\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(t)<-3t^2-6t+9$ (1).

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(t)$ và parabol(P): $y=-3t^2-6t+9$

(Hình bên) ta có:

$(1)\Leftrightarrow t_1<t<1 \Rightarrow -3<t<1 \Rightarrow -3<x-1<1 \Rightarrow -2<x<2$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên (-2;2)

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên (1; 2).

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	0	$-$	0	+	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=-2f'(1-2x)$

Cách 1:

$$y' = -2f'(1-2x) \ge 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x \le -3 \\ -2 \le 1-2x \le 1 \\ 1-2x \ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ 0 \le x \le \dfrac{3}{2} \\ x \le -1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

Cách 2:

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta có

$$y' = -2f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=-3 \\ 1-2x=-2 \\ 1-2x=0 \\ 1-2x=1 \\ 1-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$$ (trong đó nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm bội chẵn)

Bảng xét dấu y' như sau :

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

Cách 3(Trắc nghiệm)

Ta có : $y'\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -2f'\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$, mà $-\dfrac{1}{4} \in \left(-\dfrac{1}{2};1\right)$ và $-\dfrac{1}{4} \in \left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$ nên loại đáp án B và C.

$y'\left(\dfrac{7}{4}\right) = -2f'\left(-\dfrac{5}{2}\right) < 0$, mà $\dfrac{7}{4} \in \left(\dfrac{3}{2};3\right)$ nên loại đáp án D.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

và hàm số $g(x) = f(1-2x)$. Chọn khẳng định ***sai*** trong các khẳng định sau

A. $x=\dfrac{1}{2}$ là một điểm cực đại và $x=0$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)$.

B. Hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

C. Hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$ và $x=2$.

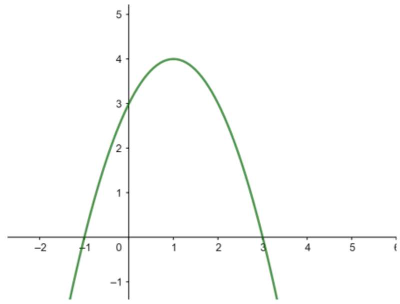
D. $x=-1$ là một điểm cực đại và $x=2$ là một điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)$.

Lời giải

Chọn A

Theo cách 2 của câu 34 kết luận hàm số có 2 cực đại là $x=-1$, $x=\dfrac{3}{2}$ và 2 điểm cực tiểu là $x=0$, $x=2$ nên chỉ có đáp án A sai.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=f(2x^4-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=8x^3f'(2x^4-1)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3=0\\ f'(2x^4-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 2x^4-1=-1\\ 2x^4-1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[4]{2}\\ x=-\sqrt[4]{2}\end{array}\right..$$

(Trong đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ (bội 7)).

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và dấu của $g'(x)$, ta có BBT như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{2}$		0		$\sqrt[4]{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$f(-\sqrt[4]{2})$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(\sqrt[4]{2})$	$\searrow$	

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty;-\sqrt[4]{2}\right)$ và $\left(0;\sqrt[4]{2}\right)$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};3\right)$.

Lời giải

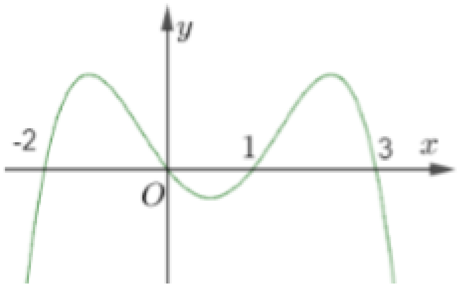
Chọn A

Ta có: $y'=-2f'(1-2x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(1-2x)\leq 0$

Từ bảng xét dấu ta có $f'(1-2x)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x\leq -3\\ -2\leq 1-2x\leq 1\\ 1-2x\geq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 2\\ 0\leq x\leq \frac{3}{2}\\ x\leq -1\end{array}\right.$

Từ đây ta suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Câu 17. Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Hàm số $y=f\left(x^2+2x+3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f\left(x^2+2x+3\right)\Rightarrow g'(x)=2(x+1)f'\left(x^2+2x+3\right)$.

Do $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có:

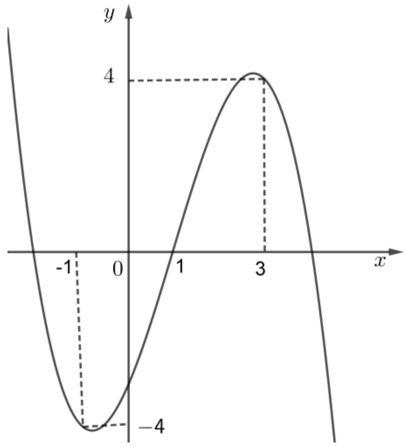
$$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\ f'\left(x^2+2x+3\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x^2+2x+3=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=-2\end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x+3\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2;-1)$ và $(0;+\infty)$ nên chọn D.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Hàm số $y=f(x)-x^2+2x$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;2)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

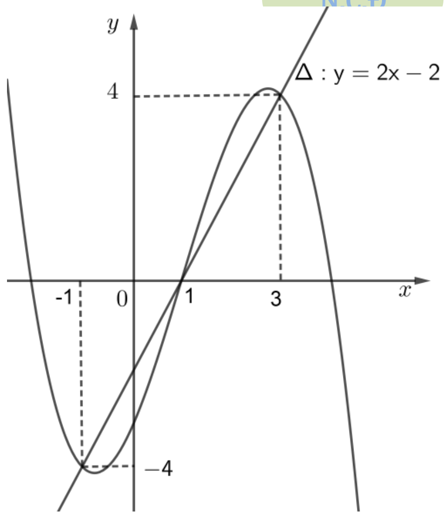
Chọn C.

Đặt $y=g(x)=f(x)-x^2+2x$.

Ta có: $g'(x)=(f(x)-x^2+2x)'=f'(x)-2x+2$.

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=2x-2$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ (như nhình vẽ dưới).



Dựa vào đồ thị ta thấy $g'\;x\;=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Dấu của $g'(x)$ trên khoảng $(a;b)$ được xác định như sau:

Nếu trên khoảng $(a;b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ thì $g'(x)\geq 0\ \ \forall x\in(a;b)$.

Nếu trên khoảng $(a;b)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ thì $g'(x)\leq 0\ \ \forall x\in(a;b)$.

Dựa vào đồ thị ta thấy trên $(-1;1)$ đồ thị hàm $f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y=2x-2$ nên $g'(x)\leq 0\ \ \forall x\in(-1;1)$.

Do đó hàm số $y=f(x)-x^2+2x$ nghịch biến trên $(-1;1)$ mà $(0;1)\subset(-1;1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x^2-x-2)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow (1-2x)f'(x-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=0 \\ f'(x-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x-x^2=-1 \\ x-x^2=1 \\ x-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f(x^2)+\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-4;-3)$. **D.** $(-6;-5)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Giải nhanh

Ta có: $y'=2x.f'(x^2)+2x^3+2x^2-12x$

+ Chọn $x=-5,5\in(-6;-5)$ $\Rightarrow$ $y'(-5,5)=-11f'(30,25)-\dfrac{825}{4}<0$

vì theo BBT $30,25>4\Rightarrow f'(30,25)>0\Rightarrow -11f'(30,25)<0$ nên loại bỏ đáp án **D.**

+ Tương tự chọn $x=-4,5$ ta đều được $y'(-4,5)<0$ nên loại bỏ đáp án **C.**

+ Chọn $x=1,5$ ta đều được $y'(1,5)=3f'(2,25)-\dfrac{27}{4}<0$

vì theo BBT $1<2,25<4\Rightarrow f'(2,25)<0\Rightarrow 3f'(2,25)<0$ nên loại bỏ đáp án **B.**

Cách 2: Tự luận

Ta có $y'=2x.f'(x^2)+2x^3+2x^2-12x=2x\left[f'(x^2)+x^2+x-6\right]$

$f'(x^2)=0\Leftrightarrow x\in\{\pm1;\pm2\}$

Mặt khác: $x^2+x-6=0\Leftrightarrow x=2\vee x=-3$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x^2)$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	0	−	0	+	
x^2+x-6		+	0	−	|	−	|	−	|	−	|	−	0	+	
$g'(x)$		−	0	kxđ	|	+	0	kxđ	0	kxđ	|	−	0	+	

(kxđ: không xác định)

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(x^2-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

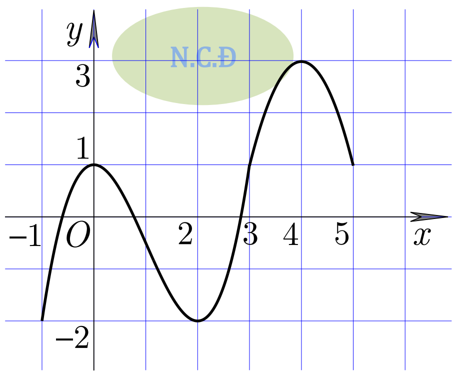
$$y'=(2x-2)f'(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ f'(x^2-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		0		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y=-2f(2-x)+x^2$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;-2)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Giải nhanh

Ta có : $y'=2f(2-x)+2x.$

+ Chọn $x=-2,1\in(-3;-2) \Rightarrow y'(-2,1)=2f'(4,1)-4,2>0$

vì theo đồ thị $f'(4,1)\approx 3 \Rightarrow 2f'(4,1)-4,2>0$ .Nên đáp án **A sai.**

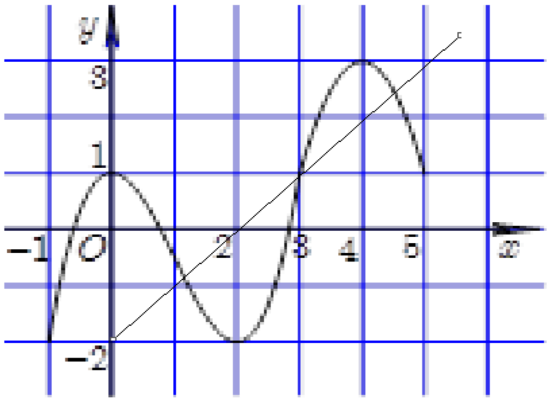
+ Chọn $x=-1,9\in(-2;-1) \Rightarrow y'(-1,9)=2f'(3,9)-3,8>0$

vì theo đồ thị $f'(3,9)\approx 3 \Rightarrow 2f'(3,9)-3,8>0$ .Nên đáp án **B sai.**

+ Chọn $x=1,5\in(0;2) \Rightarrow y'(1,5)=2f'(0,5)+3>0$

vì theo đồ thị $f'(0,5)>0 \Rightarrow 2f'(0,5)+3>0$ .Nên đáp án **D sai.**

Cách 2: Giải tự luận



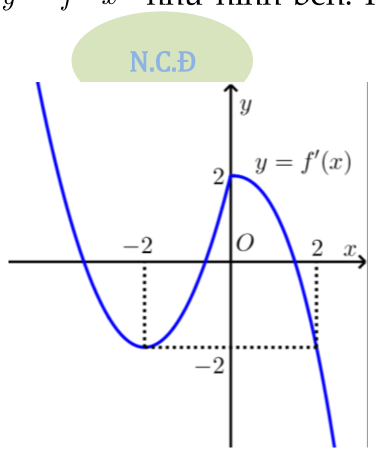
Ta có $y=-2f(2-x)+x^2 \Rightarrow y'=-(2-x)'\,2f'(2-x)+2x$

$y'=2f'(2-x)+2x \;\Rightarrow y'<0 \Leftrightarrow f'(2-x)+x<0 \Leftrightarrow f'(2-x)<(2-x)-2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=x-2$ cắt đồ thị $y=f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ nguyên liên tiếp là $\left[\begin{array}{l}1<x_1<2\\ x_2=3\end{array}\right.$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x)<x-2$ trên miền $2<x<3$ nên $f'(2-x)<(2-x)-2$ trên miền $2<2-x<3 \Leftrightarrow -1<x<0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;\,0)$.

Câu 23. Cho $f(x)$ mà đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $y=f(x-1)+x^2-2x$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

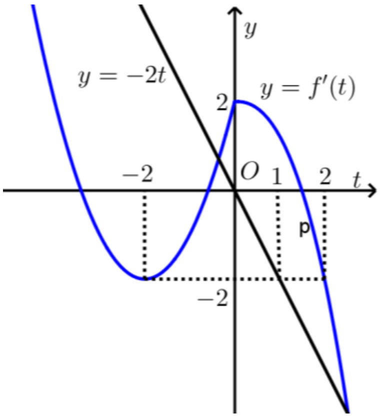
Ta có $y=f(x-1)+x^2-2x$

Khi đó $y'=f'(x-1)+2x-2$. Hàm số đồng biến khi $y'\geq 0$

$\Leftrightarrow f'(x-1)+2(x-1)\geq 0 \quad (1)$

Đặt $t=x-1$ thì (1) trở thành: $f'(t)+2t\geq 0 \Leftrightarrow f'(t)\geq -2t$.

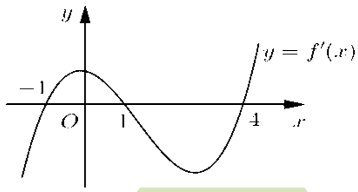
Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-2t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó ta thấy với $t \in (0;1)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(t)$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -2t$.

Suy ra $f'(t) + 2t > 0, \forall t \in (0;1)$. Do đó $\forall x \in (1;2)$ thì hàm số $y = f(x-1) + x^2 - 2x$ đồng biến.

Câu 24. Cho hàm số y=f(x) có đồ thị y=f ʹ(x) như hình vẽ bên. Hỏi hàm số y=f(3-2x)+2019 nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = f(3-2x) + 2019 \Rightarrow g'(x) = -2f'(3-2x)$.

Cách 1 : Hàm số nghịch biến khi $g'(x) = -2f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < 3-2x < 1 \\ 3-2x > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x < \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$. Chọn đáp án A

Cách 2 : Lập bảng xét dấu

$$g'(x) = -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x = -1 \\ 3-2x = 1 \\ 3-2x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		2		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Lưu ý : cách xác đinh dấu của g′(x). Ta lấy $3 \in (2;+\infty), g'(3) = -2.f'(3-2.3) = -2f'(-3) > 0$

(vì theo đồ thị thì f′(-3) nằm dưới trục Ox nên $f'(-3) < 0$)

Dựa vào bảng xét dấu, ta chọn đáp án A.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi $g(x)=2f(1-x)+\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2-5$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét $g'(x)=-2f'(1-x)+x^3-3x^2+2x=-2f'(1-x)-(1-x)^3+1-x$

Đặt $1-x=t$, khi đó $g'(x)$ trở thành $h(t)=-2f'(t)-t^3+t$

Bảng xét dấu

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$-2f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
t^3-t		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$	Không xác định		|	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta suy ra $h(t)$ nhận giá trị dương trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$,nhận giá trị âm trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

$\Rightarrow$ hàm số $g'(x)$ nhận giá trị dương trên $(2;3)$ và $(0;1)$,nhận giá trị âm trên $(1;2)$ và $(-\infty;0)$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+5x+3$ và hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=g(f(x))$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2-6x+5$; $f'(x)=3(x-1)^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

$y'=\left[g(f(x))\right]'=g'(f(x)).f'(x)$.

$y'<0 \Leftrightarrow g'(f(x))<0 \Leftrightarrow -6<f(x)<6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2+5x+9>0 \\ x^3-3x^2+5x-3<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x^2-4x+9)>0 \\ (x-1)(x^2-2x+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<1$.

Câu 27 . Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f(x^2-2x+2)+x^3-3x^2-6x$.

Xét các khẳng định

1) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

2) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

3) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x+2)+3x^2-6x-6$.

Do $g'\left(\frac{5}{2}\right)=3.f'\left(\frac{13}{4}\right)-\frac{9}{4}<0$ vì $f'\left(\frac{13}{4}\right)<0$ (dựa vào bảng dấu của $f'(x)$), do đó hàm số $g(x)$ không thể đồng biến trên khoảng $(2;3)$. Vậy mệnh đề 1) là sai.

Do $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-1.f'\left(\frac{5}{4}\right)-\frac{33}{4}<0$ vì $f'\left(\frac{5}{4}\right)>0$ (dựa vào bảng dấu của $f'(x)$), do đó hàm số $g(x)$ không thể đồng biến trên khoảng $(0;1)$. Vậy mệnh đề 2) là sai.

Với $x\in(4;+\infty)=E$, ta thấy:

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>10 \Rightarrow f'(x^2-2x+2)>0$ và $2x-2>0$ nên

$(2x-2).f'(x^2-2x+2)>0, \forall x\in(4;+\infty)$ (a);

Dễ thấy $3x^2-6x-6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1-\sqrt{3} \\ x>1+\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow 3x^2-6x-6>0, \forall x\in(4;+\infty)$ (b).

Cộng theo vế của (a) và (b) suy ra

$g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x+2)+3x^2-6x-6>0, \forall x\in(4;+\infty)$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$. Do đó 3) là mệnh đề đúng.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên $m\in(0;2020)$ để hàm số $g(x)=f(x^2-x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2018. **B.** 2017. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $g(x)=f(x^2-x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

$\Leftrightarrow g'(x)=(2x-1).f'(x^2-x+m)\le 0\ \forall x\in(-1;0)$

$\Leftrightarrow f'(x^2-x+m)\ge 0\ \forall x\in(-1;0)$ (do $2x-1<0\ \forall x\in(-1;0)$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+m\le 1 \\ x^2-x+m\ge 4 \end{array}\right.\ \forall x\in(-1;0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1\le -x^2+x \\ m-4\ge -x^2+x \end{array}\right.\ \forall x\in(-1;0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1\le \min\limits_{[-1;0]}\left(h(x)=-x^2+x\right)=h(-1)=-2 \\ m-4\ge \max\limits_{[-1;0]}\left(h(x)=-x^2+x\right)=h(0)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $m\in(0;2020)$, suy ra: $m\in[4;2020)$.

Vậy có 2016 giá trị m nguyên thỏa đề.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(2x+1)+\dfrac{2}{3}x^3-8x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;7)$.

Lời giải

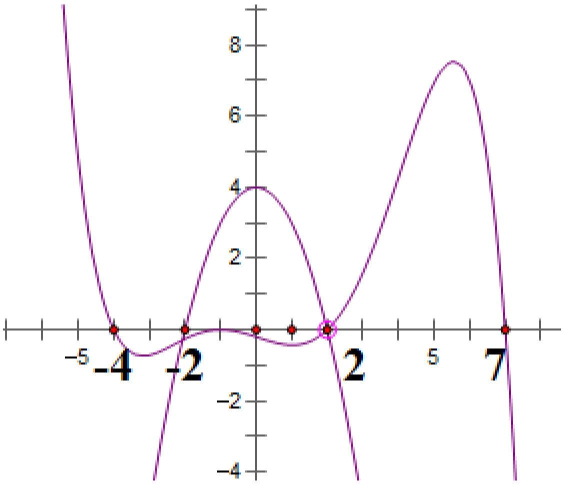
Chọn C

$g(x)=f(2x+1)+\dfrac{2}{3}x^3-8x+2019$.

$g'(x)=2f'(2x+1)+2x^2-8$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(2x+1)=4-x^2\ (1)$.

Hàm số $f'(2x+1)$ có bảng xét dấu như hàm số $f'(x)$ nên ta có:



$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=x_1\left(-4<x_1<-2\right) \\ 2x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{x_1-1}{2}\left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{-3}{2}\right) \\ x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{x_1-1}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	0	-	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x+1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+6x-9-3f'(2-x)$.

Hàm số y nghịch biến khi $y'\le 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3\le f'(2-x)$. Bất phương trình này không thể giải trực tiếp ta sẽ tìm điều kiện để

$$\begin{cases} x^2+2x-3\le 0 \\ f'(2-x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2-x\le -1 \\ 1\le 2-x\le 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\le x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ -3\le x\le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -3\le x\le 1.$$

Đối chiếu các đáp án chọn A.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-2;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Theo đề bài: $y'=\left[3f\left(-x+2\right)+x^3+3x^2-9x\right]'=-3f'\left(-x+2\right)+3x^2+6x-9$.

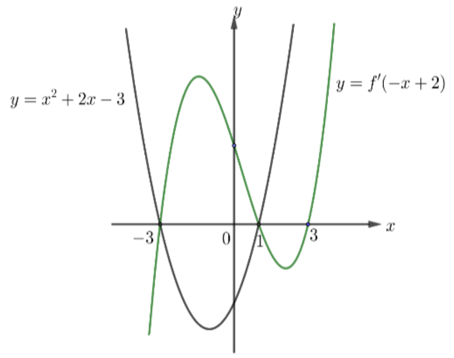
Để hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow y'<0 \Leftrightarrow -3f'\left(-x+2\right)+3x^2+6x-9<0$

$\Leftrightarrow f'\left(-x+2\right)>x^2+2x-3$

Từ BXD $f'\left(x\right)$ ta có BXD của $f'\left(-x+2\right)$ như sau:

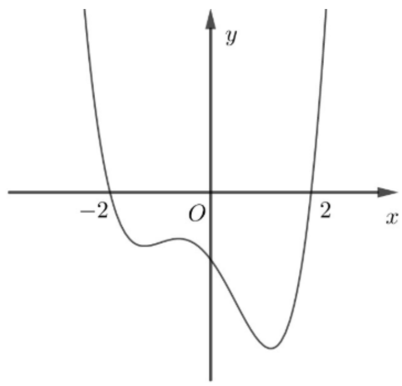
x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ BXD trên, ta có hình dạng đồ thị của hàm số $y'=f'\left(-x+2\right)$ và $y=x^2+2x-3$ được vẽ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên $\left(-3;1\right)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Biết $f\left(-2\right)<0$, hàm số $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\sqrt[2018]{3};\sqrt[2018]{3}\right)$. **B.** $\left(-1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\sqrt[2018]{3}\right)$. **D.** $\left(-\sqrt[2018]{3};0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đường thẳng hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $f\left(-2\right)<0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-2)<0$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $1-x^{2018}\le 1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ mà $\max\limits_{(-\infty;2)} f(x)=f(-2)<0\Rightarrow f\left(1-x^{2018}\right)<0$

Do đó $y=\left|f\left(1-x^{2018}\right)\right|=-f\left(1-x^{2018}\right)\Rightarrow y'=2018x^{2017}f'\left(1-x^{2018}\right)$.

Hàm số đồng biến $\Rightarrow y'>0\Leftrightarrow 2018x^{2017}f'\left(1-x^{2018}\right)>0$.

Trường hợp 1. Với $x>0$

$y'>0\Leftrightarrow f'\left(1-x^{2018}\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x^{2018}>2\\1-x^{2018}<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^{2018}<-1(loai)\\x^{2018}>3\end{array}\right.\Rightarrow x>\sqrt[2018]{3}$ (vì $x>0$).

Trường hợp 2. Với $x<0$

$y'>0\Leftrightarrow f'\left(1-x^{2018}\right)<0\Leftrightarrow -2<1-x^{2018}<2\Leftrightarrow -1<x^{2018}<3\Rightarrow -\sqrt[2018]{3}<x<0$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2\right)+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{2x^3}{3}-6x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-6;-5)$. **D.** $(-4;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có $y'=g'(x)=2xf'\left(x^2\right)+2x^3+2x^2-12x$.

Đặt $h(x)=2x^3+2x^2-12x$.

Bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đối với dạng toán này ta thay từng phương án vào để tìm ra khoảng đồng biến của $g(x)$.

Với $x\in(-2;-1)\Rightarrow\begin{cases}x^2\in(1;4)\Rightarrow f'\left(x^2\right)<0\\x<0\\h(x)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2xf'\left(x^2\right)>0\\h(x)>0\end{cases}$.

$\Rightarrow 2xf'\left(x^2\right)+2x^3+2x^2-12x>0\Leftrightarrow g'(x)>0$. Vậy $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-2;-1)$.

Với $x\in(1;2)\Rightarrow\begin{cases}x^2\in(1;4)\Rightarrow f'(x^2)<0\\ x>0\\ h(x)\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2xf'(x^2)<0\\ h(x)\le 0\end{cases}$.

$\Rightarrow 2xf'(x^2)+2x^3+2x^2-12x<0\Leftrightarrow g'(x)<0$. Vậy $g(x)$ nghịch biến trong khoảng $(1;2)$.

Kết quả tương tự với $x\in(-6;-5)$ và $x\in(-4;-3)$.

Cách 2:

Ta có $g'(x)=2x\left[f'(x^2)+x^2+x-6\right]$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$ trên các khoảng $(-6;-5)$, $(-4;-3)$, $(-2;-1)$, $(1;2)$

x	-6 … -5	-5 … -4	-4 … -3	-3 … -2	-2 … -1	-1 … 1	1 … 2
$2x$	$-$		$-$		$-$		$+$
x^2+x-6	$+$		$+$		$-$		$-$
$f'(x^2)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$g'(x)$	$-$		$-$		$+$		$-$

Từ bảng xét dấu ta chọn hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A $(1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng đạo hàm ta thấy $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<4\end{array}\right.$

$y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$

$\Rightarrow y'=-3.f'(2-x).e^{3f(2-x)+1}-f'(2-x).3^{f(2-x)}.\ln 3$

$\Leftrightarrow y'=-f'(2-x).\left(3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3\right)$

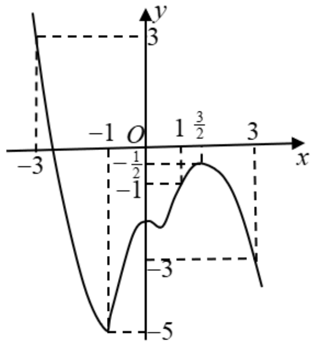
Để hàm số đồng biến thì $y'=-f'(2-x).\left(3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3\right)>0$

$\Leftrightarrow -f'(2-x)>0$ (Vì $3.e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3>0$)

$\Leftrightarrow f'(2-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x<-1\\1<2-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$

$\Rightarrow x\in(-2;1)$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f\left(1-x\right)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng

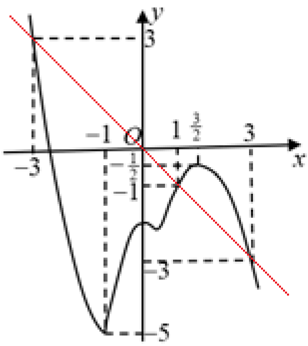
A. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g\left(x\right)= f\left(1-x\right)+\frac{x^2}{2}-x$. Ta có $g'\left(x\right)=-f'\left(1-x\right)-\left(1-x\right)$.

$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(1-x\right)=-\left(1-x\right)$ (*)



Dựa vào đồ thị ta có (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x=-3\\1-x=1\\1-x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		+	0	−	0	+	0	−	
$g\left(x\right)$		↗		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=g\left(x\right)= f\left(1-x\right)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-2;0\right)$ và $\left(4;+\infty\right)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Hàm số $y = f\left(x^2+2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$. Ta có $g'(x)=f'\left(x^2+2x\right).(2x+2)$.

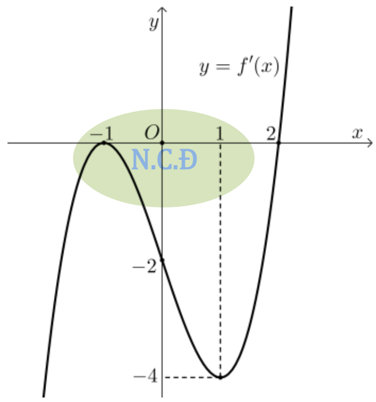
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x=-2 \\ x^2+2x=0 \\ x^2+2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2+2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$ đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 37. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau



Hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;3)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=\left[f\left(x^2-2\right)\right]'=\left(x^2-2\right)'.f'\left(x^2-2\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=0 \\ f'\left(x^2-2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right. .$$

$f'\left(x^2-2\right)>0 \Leftrightarrow x^2-2>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$, $f'\left(x^2-2\right)\le 0 \Leftrightarrow x^2-2\le 2 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Cho hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(0;2)$ **D.** $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x+3$ khi đó $y(t)=3f(t)-(t-3)^3+12(t-3)$ Ta có

$y'(t)=3f'(t)-3(t-3)^2+12=3f'(t)-(t-1)(t-5)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $t>5$ thì $f'(t)<0;-(t-1)(t-5)<0$ nên hàm số nghịch biến với $t>5$ hay $x>2$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$. Hàm số $g(x)=-f(x^2-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

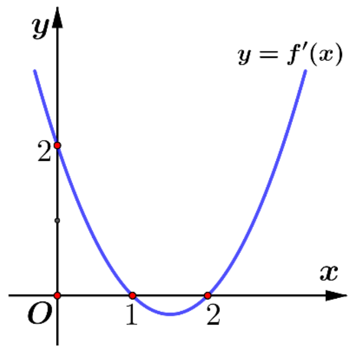
Ta có: $g'(x)=-2x.f'(x^2-1) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=0 \\ x^2-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g		↗		↘		↗		↘		↗		↘	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$.



Hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

• Từ đồ thị ta thấy: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

• Ta có: $g'(x)=\left[f\left(x-x^2\right)\right]'=\left(x-x^2\right)'.f'\left(x-x^2\right)=(1-2x).f'\left(x-x^2\right)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=0\\f'\left(x-x^2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x-x^2=1\\x-x^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

N.C.Đ

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

Vậy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Cách 2:

• Ta có: $g'(x)=\left[f\left(x-x^2\right)\right]'=\left(x-x^2\right)'.f'\left(x-x^2\right)=(1-2x).f'\left(x-x^2\right)$.

• Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$

$\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\ \forall x\in(a;b)$ và $g'(x)=0$ chỉ tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(a;b)$.

• Chọn $x=0$ ta có: $g'(0)=(1-2.0).f'(0)=f'(0)>0$.

Suy ra loại các đáp án $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$. Vậy chọn đáp án $\mathbf{C}$.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3-2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-4;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có $f'(x)=x^3-2x^2$ suy ra $f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3-2x^2)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+C$

+ Suy ra $y=g(x)=f(2-x)=\frac{(2-x)^4}{4}-\frac{2(2-x)^3}{3}+C$

+ Tính $g'(x)=f'(2-x)=\left(\frac{(2-x)^4}{4}-\frac{2(2-x)^3}{3}+C\right)'=-(2-x)^3+2(2-x)^2=(2-x)^2x$

+ Hàm số đồng biến suy ra $g'(x)>0\Leftrightarrow x>0$. Chọn A..

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $\forall x\in(a;b)$. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(2-b;2-a)$. **B.** $(-\infty;2-a)$. **C.** $(a;b)$. **D.** $(2-b;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến $\forall x\in(a;b)$ nên $f'(x)<0;\forall x\in(a;b)$.

+ Xét $y=g(x)=f(2-x)$ có $g'(x)=-f'(2-x)$

+ Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến thì $g'(x)>0\Leftrightarrow -f'(2-x)>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0$

Suy ra $a<2-x<b\Leftrightarrow 2-b<x<2-a$. Chọn A.

CHỦ ĐỀ: ĐƠN ĐIỆU

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 2

BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Kiến thức bổ sung 1: Biện luận nghiệm bất phương trình chứa tham số .

❶ $m \ge f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

❷ $m \le f(x)\ \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

❸ $m \ge f(x)$ có nghiệm trên $[a;b] \Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

❹ $m \le f(x)$ có nghiệm trên $[a;b] \Leftrightarrow m \le \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

Kiến thức bổ sung 2: So sánh 2 nghiệm của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với số thực α.

❶ $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow a.f(\alpha) < 0$.

❷ $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 2\alpha \\ a.f(\alpha) > 0 \end{cases}$.

❸ $\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 2\alpha \\ a.f(\alpha) > 0 \end{cases}$.

Bài toán 1: Tìm tham số *m* để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a \ne 0)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Phương pháp :

+ Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 có biệt thức Δ.

+ Để hàm số đồng biến trên R $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

+ Để hàm số nghịch biến trên R $\Leftrightarrow \begin{cases} a > a \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

Bài toán 2: Tìm tham số *m* để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a \ne 0)$ đơn điệu trên $(a;b)$.

Phương pháp :

+ Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 chứa tham số *m*.

+ Hàm số đồng biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' = f(x,m) \ge 0\ \forall x \in (a;b)$ (hoặc hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow y' = f(x,m) \le 0\ \forall x \in (a;b)$).

Cách 1: ($f(x,m)$ bậc nhất đối với m, hoặc $f(x,m)$ không có nghiệm "chẵn")

+ Biến đổi bpt $f(x,m) \ge 0\ \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow g(x) \ge h(m)\ \forall x \in (a;b)$ hoặc $g(x) \ge h(m)\ \forall x \in (a;b)$.

+ Tìm GTLN, GTNN của $y = g(x)$ trên $[a;b]$.

(Sử dụng kiến thức bổ sung 1 để kết luận tập nghiệm bất phương trình).

Cách 2: (tham số m trong $f(x,m)$ có chứa bậc 1 và bậc 2, hoặc $f(x,m)$ có nghiệm "chẵn")

+ Tìm các nghiệm của tam thức bậc hai, lập bảng xét dấu.

+ Gọi S là tập hợp có dấu "thuận lợi". Yêu cầu bài toán xảy ra khi $(a;b) \subset S$. Sau đó sử dụng kiến thức bổ sung 2 giải quyết bài toán.

Nhận xét: *Nên xét cụ thể trường hợp $a = 0$ nếu hệ số a có chứa tham số.*

Bài toán 3: Tìm tham số m để hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \ne 0)$ đơn điệu trên $(a;b)$.

Phương pháp :

+ Tính $y' = 4ax^3 + 2bx;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right.$.

N.C.Đ

+ Lập bảng xét dấu y', giả sử có S là tập "thuận lợi".

+ Yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi $(a;b) \subset S$. Sau đó sử dụng kiến thức bổ sung 2 giải quyết bài toán.

Nhận xét: *Nên xét cụ thể trường hợp $a = 0$ nếu hệ số a có chứa tham số.*

Bài toán 4: Tìm tham số m để hàm số phân thức $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad - bc \ne 0)$ đơn điệu trên $(m;n)$.

Phương pháp :

+ Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ đồng biến trên $(m;n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$.

+ Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên $(m;n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases}$.

Bài toán 5: Tìm tham số m để hàm số $y = f[u(x)]$ đơn điệu trên $(a;b)$.

Phương pháp :

Đặt $t = u(x)$ hàm số trở thành $y = f(t)$. Trường hợp này cần chú ý 3 vấn đề sau:

1. Tìm miền xác định của $t = u(x)$ cho chính xác.

2. Nếu $t = u(x)$ đồng biến trên thì $f[u(x)]$ và $f(t)$ cùng tính chất đồng biến hoặc nghịch biến.

3. Nếu $t=u(x)$ nghịch biến trên thì $f\left[u(x)\right]$ và $f(t)$ ngược tính chất, nghĩa là $f\left[u(x)\right]$ đồng biến thì $f(t)$ nghịch biến và ngược lại.

BÀI TẬP

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left(m^2-2m\right)x^3+mx^2+3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. **D.** $1<m\le 3$.

Câu 2. Số giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y=\frac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 3. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m\in[-1;1]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\frac{mx-4}{x+1}$ (với m là tham số thực) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-2 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ -2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Với $m=-2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B. Với $m=9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Với $m=3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Với $m=6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=(m+1)\sin x+(m+1)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le -1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m<-1$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+x^2-mx+2m-1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

A. $m\le -\frac{1}{6}$. **B.** $m\ge -\frac{1}{6}$. **C.** $m\le 8$. **D.** $m\ge 8$.

Câu 7. Tìm m để hàm số $y=\frac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $m<-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}<m\le 1$. **C.** $-\frac{1}{2}\le m<1$. **D.** $m\le 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y=\frac{mx^3}{3}-x^2+2x+1-m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\{0\}$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\varnothing$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m+1)x^2+(m^2+2m)x+1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000;1000)$ để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 999. **B.** 1001. **C.** 1998. **D.** 998.

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x-m}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;3]$.

A. $m>3$. **B.** $0<m<2$. **C.** $2<m\le 3$. **D.** $m\le 0$.

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

N.C.Đ

A. $[3;+\infty)$. **B.** $[48;+\infty)$. **C.** $[36;+\infty)$. **D.** $[12;+\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. Giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ là $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right]$ với $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Khi đó $T=2a+b$ bằng

A. 19. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 17.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=(x+m)^3-8(x+m)^2+16$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để hàm số $y=x^3-3mx+1$ đơn điệu trên khoảng $(1;2)$?

A. 37. **B.** 16. **C.** 35. **D.** 21.

Câu 16. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x-6m^3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Câu 17. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y=x^3-2mx^2-(m+1)x+1$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ là

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le\frac{11}{9}$. **C.** $m\ge\frac{11}{9}$. **D.** $m\le 2$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+3m-2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$.

A. $m\le 1$. **B.** $m\le 5$. **C.** $m<5$. **D.** $m<1$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Câu 20. Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-2mx+6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034. **B.** 2018. **C.** 2025. **D.** 2021.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 22. Hàm số $y=\dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi?

A. $m\le 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Câu 23. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

N.C.Đ

A. $m>1$. **B.** $m>\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\ge\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\sin^3x-3\cos^2x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2019.

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y=mx^4+x^3-(m+1)x^2+9x+5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 26. Cho hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 0.

Câu 27. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{8}{5}\right)$. **B.** $\left[-3;-\dfrac{8}{5}\right]$. **C.** $\left(-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19;19)$ để hàm số $y=\dfrac{\tan x-3m+3}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. 17. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 29. Cho hàm số $y=-2\sin^3 x+3\sin^2 x+6(2m-1)\sin x+2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2018.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 6.

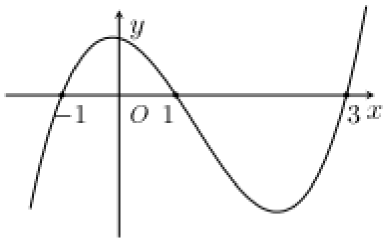
Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

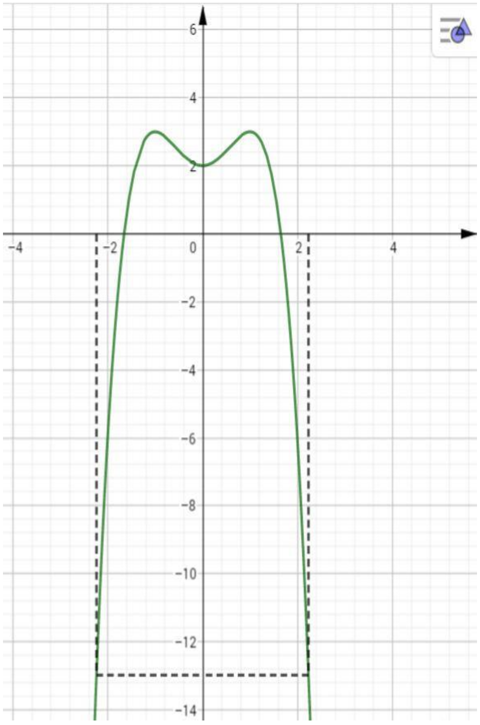
Câu 35. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x)=f\left(f\left(x^2+2\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

A. 1. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{x^4}{4}-\frac{mx^3}{3}+\frac{x^2}{2}-mx+2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m|\le 2020$.

A. 4041 . **B.** 2027 . **C.** 2026 . **D.** 2015 .

Câu 37. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x)\le 0$, $\forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ là

A. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$ **B.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **C.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)$. **D.** $m\ge\frac{2}{3}f(0)$.

Câu 38. Có bbao nhiêu số thực m để hàm số $y=\left(m^3-3m\right)x^4+m^2x^3-mx^2+x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 3 . **B.** 1 . **C.** Vô số. **D.** 2 .

Câu 39. Có bao nhiêu gia trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2019 . **B.** 2020 . **C.** 4038 . **D.** 1009.

Câu 40 Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 12. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $f\ x\ =x^3-3mx^2+3\ 2m-1\ x+1$. Với giá trị nào của m thì $f'\ x\ -6x>0$ với mọi $x\geq 2$?

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m<-\frac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\leq 0$.

Câu 43. Cho hàm số $f\ x\ =x^3-\ 2m-1\ x^2+\ 2-m\ x+2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'\ x\ >0$ với mọi $x\geq -1$?

A. $m\in\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$

C. $m\in\left(-\frac{7}{3};\frac{5}{4}\right)$ **D.** $m\in\left(-\frac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\frac{5}{4}\right)$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(2m-2019)x-(2018-m)\cos^2 x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m\leq 1$. **B.** $m\leq\frac{4037}{3}$. **C.** $m\geq 1$. **D.** $m\geq -1$.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y=\left|2x^3-2mx+3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2009. **C.** 2011. **D.** 2010.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^3(x^2-4x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$?

A. 2020. **B.** 2014. **C.** 2019. **D.** 2016.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	-4	0	4	0	$+\infty$

A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 50. Giá trị $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^4(x^2+mx+9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2+4x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

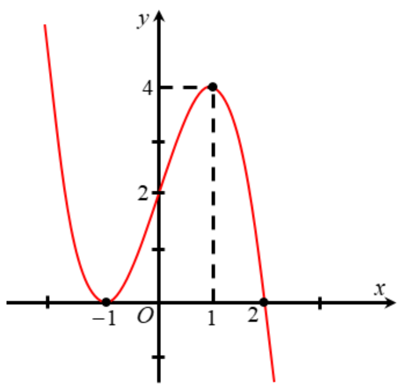
Câu 52. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(3x-1) - \frac{m}{x} + 2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};+\infty\right)$.

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ để hàm số $f(x) = x + a.\sin x + b.\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

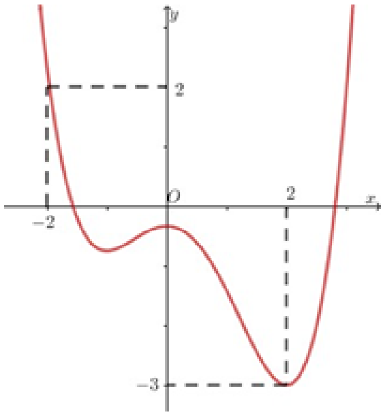
A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x+1) + \frac{20}{m}\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?



A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m \in (-20;20)$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{m(x^2+4)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 17. **D.** 18.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left(m^2-2m\right)x^3+mx^2+3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<0$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\m\geq 3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\m\geq 3\end{array}\right.$. **D.** $1<m\leq 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\left(m^2-2m\right)x^2+2mx+3$.

TH1: $m^2-2m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$.

Với $m=0$, $y'=3\Rightarrow y'>0,\forall x$. Do đó, $m=0$ thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $m=2$, $y'=4x+3$. Do đó, $m=2$ không thỏa mãn hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH2: $m^2-2m\neq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\m\neq 2\end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-2m>0\\\Delta'=m^2-3\left(m^2-2m\right)\leq 0\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-2m>0\\-2m^2+6m\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m\geq 3\\m\leq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 3\\m<0\end{array}\right..$$

N.C.Đ

Vậy $\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\m\geq 3\end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Số giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $y=\frac{mx-2}{-2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\frac{mx-2}{-2x+m}$ có tập xác định là $D=\left(-\infty;\frac{m}{2}\right)\cup\left(\frac{m}{2};+\infty\right)$

Ta có: $y'=\frac{m^2-4}{(-2x+m)^2},\forall x\neq\frac{m}{2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m^2-4<0\\\frac{m}{2}\leq\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-2<m<2\\m\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow -2<m\leq 1$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Câu 3. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $m\in[-1;1]$. **B.** $m\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6mx+3$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0\ \ \forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}3>0\\(-3m)^2-9\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 9m^2-9\leq 0\Leftrightarrow m\in[-1;1]$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x+1}$ (với m là tham số thực) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Với $m=-2$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

B. Với $m=9$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Với $m=3$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Với $m=6$ hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{m+4}{(x+1)^2}>0\Leftrightarrow m>-4$. Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{mx-4}{x+1}=m$.

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=-2$. Do đó: $m=-2$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=(m+1)\sin x+(m+1)x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\leq -1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m<-1$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn C

Khi $m=-1$: $f(x)=0$ nên không thỏa YCBT. Suy ra loại $A,\ C$.

Khi $m<-1$: $f'(x)=(m+1)(\cos x+1)$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)<0\quad\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+x^2-mx+2m-1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

A. $m\leq -\dfrac{1}{6}$. **B.** $m\geq -\dfrac{1}{6}$. **C.** $m\leq 8$. **D.** $m\geq 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 + 2x - m$.

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in [-1;1]$.

$\Leftrightarrow 6x^2 + 2x - m \le 0, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow 6x^2 + 2x \le m, \forall x \in [-1;1]$.

Xét hàm $g(x) = 6x^2 + 2x$ trên đoạn $[-1;1]$.

$g'(x) = 12x + 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$-\frac{1}{6}$		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	$\searrow$		$\nearrow$	8

Để $6x^2 + 2x \le m, \forall x \in [-1;1]$ thì đồ thị của hàm $g(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y = m$

.

Từ bảng biến thiên ta có $m \ge 8$.

Câu 7. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. $m < -\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2} < m \le 1$. **C.** $-\dfrac{1}{2} \le m < 1$. **D.** $m \le 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \ne m$.

Ta có $y' = \dfrac{-2m-1}{(x-m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì

$\begin{cases} y' < 0 \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-1 < 0 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < m \le 1$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{mx^3}{3} - x^2 + 2x + 1 - m$. Tập hợp các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\{0\}$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn D

$D = \mathbb{R}$

$y' = mx^2 - 2x + 2$.

TH1: $m=0$

Ta có: $y'=-2x+2$.Hàm số nghịch biến khi $y'\le 0 \Leftrightarrow x\ge 1$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}-x^2+2x+1-m$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Vậy $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m\ne 0$

Hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}-x^2+2x+1-m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y'=mx^2-2x+2\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \Delta'=1-2m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m\ge \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-(m+1)x^2+(m^2+2m)x+1$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $y=f(x)=\dfrac{x^3}{3}-(m+1)x^2+(m^2+2m)x+1$

$y'=x^2-2(m+1)x+m^2+2m$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$f(m)$				$+\infty$
	$-\infty$				$f(m+2)$		

Dựa vào bảng biến thiên trên để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;3)$ ta có $m\le 2<3\le m+2$ tức là : $1\le m\le 2$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn. Chọn A.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000;1000)$ để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 999. **B.** 1001. **C.** 1998. **D.** 998.

Lời giải

Chọn B

$y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Hàm số có $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$.

$y'=0 \Leftrightarrow 6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)=0$.

$\Leftrightarrow x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		$m+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;m)$ và $(m+1;+\infty)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi $(2;+\infty)\subset(m+1;+\infty) \Leftrightarrow m+1\le 2 \Leftrightarrow m\le 1$.

Mà m là số nguyên thuộc khoảng $(-1000;1000) \Rightarrow m\in\{-999\,;\,-998\,;\,...\,;1\}$.

Có tất cả 1001 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-m}$. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;3]$.

A. $m>3$. **B.** $0<m<2$. **C.** $2<m\le 3$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{-m+2}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(0;3] \Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in(0;3] \Leftrightarrow \dfrac{-m+2}{(x-m)^2}>0,\ \forall x\in(0;3]$

Hay $\begin{cases} -m+2>0 \\ m\notin(0;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m\le 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le 0$.

Câu 12. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $[3;+\infty)$. **B.** $[48;+\infty)$. **C.** $[36;+\infty)$. **D.** $[12;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-12x+m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $y'=3x^2-12x+m\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Suy ra $m\ge -3x^2+12x,\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Xét $g(x)=-3x^2+12x$ trên $(0;+\infty)$.

$g'(x)=-6x+12$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -6x+12=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$	
$g(x)$		0	$\nearrow$	12	$\searrow$	$-\infty$

Do đó: $\max\limits_{(0;+\infty)} g(x)=12 \Rightarrow m \ge \max\limits_{(0;+\infty)} g(x)=12$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. Giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ là $\left(-\infty;\frac{b}{a}\right]$ với $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Khi đó $T=2a+b$ bằng

A. 19. **B.** 14. **C.** 13. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0, \forall x\in(0;+\infty)$ và $y'=0$ chỉ tại hữu hạn điểm trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2+2(1-2m)x+(2-m)\ge 0, \forall x\in(0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow m\le \frac{3x^2+2x+2}{4x+1}, \forall x\in(0;+\infty).$$

Xét $g(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{4x+1}$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{12x^2+6x-6}{(4x+1)^2}$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2+2x+2}{4x+1}$ trên $(0;+\infty)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)\ge \frac{5}{4}, \forall x\in(0;+\infty)$.

Do đó $m\le g(x), \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow m\le \frac{5}{4}$ hay $m\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right]$.

Suy ra: $a=4$, $b=5$ nên $T=2a+b=13$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=(x+m)^3-8(x+m)^2+16$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + 3m^2 - 16x - 16m = 3x^2 + (6m-16)x + 3m^2 - 16m$.

Có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = \dfrac{16}{3} - m \end{array}\right.$ nên suy ra đồ thị hàm số nghịch biến trong khoảng

$\left(-m; \dfrac{16}{3} - m\right)$.

mà theo yêu cầu đề bài hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$ nên

$\Leftrightarrow (-1;2) \subset \left(-m; \dfrac{16}{3} - m\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{16}{3} - m \ge 2 \\ -m \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le m \le \dfrac{10}{3} \Rightarrow m \in \{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ đơn điệu trên khoảng $(1;2)$?

A. 37. **B.** 16. **C.** 35. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

N.C.Đ

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$.

+ Nếu $3m \le 0 \Leftrightarrow m \le 0 (1)$, khi đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đơn điệu tăng trên khoảng $(1;2)$.Suy ra: $m \le 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $m > 0$ thì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{m})$ và $(\sqrt{m}; +\infty)$ và hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\sqrt{m}; \sqrt{m})$.

* TH1: Hàm số đơn điệu tăng trên khoảng $(1;2)$ khi $\sqrt{m} \le 1 \Leftrightarrow 0 < m \le 1 (2)$.

* TH2 :Hàm số đơn điệu giảm trên khoảng $(1;2)$ khi $2 \le \sqrt{m} \Leftrightarrow m \ge 4 (3)$.

Kết hợp điều kiện $(1),(2),(3)$ suy ra: $m \le 1$ hoặc $m \ge 4$.

Đối chiếu điều kiện: $m \in (-20;20)$ suy ra: $\left[\begin{array}{l} -20 < m \le 1 \\ 4 \le m < 20 \end{array}\right.$

Do m là số nguyên nên $m \in \{-19;-18;...;-1;0;1;4;...;19\}$ (37 giá trị nguyên)

Câu 16. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x - 6m^3$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì $y' \ge 0, \ \forall x \in (0;+\infty)$.

Tức là: $y' = 3x^2 - 6mx + 3 \ge 0$; $\forall x \in (0;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{2x} \ge m$; $\forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \underset{(0;+\infty)}{Min}\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right)$

Đặt $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{2x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1(N) \vee x = -1(L)$.

Lập BBT ta thấy $\underset{(0;+\infty)}{Min}\left(\dfrac{x^2+1}{2x}\right) = f(1) = 1$.

Vậy $m \le 1$ hay $m \in (-\infty;1]$.

Câu 17. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ là

A. $m \ge 2$. **B.** $m \le \dfrac{11}{9}$. **C.** $m \ge \dfrac{11}{9}$. **D.** $m \le 2$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Xét phương trình $y' = 3x^2 - 4mx - (m+1) = 0$.

$\Delta' = (2m)^2 + 3(m+1) = 4m^2 + 3m + 3 = \left(2m + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{39}{16} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy $y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{2m - \sqrt{4m^2+3m+3}}{3}$,

$x_2 = \dfrac{2m + \sqrt{4m^2+3m+3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		0		2		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0			$-$			0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$			$\searrow$			$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ (I): $\begin{cases} x_1 \le 0 \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m - \sqrt{4m^2+3m+3}}{3} \le 0 \ (1) \\ \dfrac{2m + \sqrt{4m^2+3m+3}}{3} \ge 2 \ (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4m^2+3m+3} \ge 2m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ 4m^2+3m+3 \ge 4m^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in R$.

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{4m^2+3m+3}\ge 6-2m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6-2m<0 \\ \begin{cases} 6-2m\ge 0 \\ 4m^2+3m+3\ge 36-24m+4m^2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ \begin{cases} m\le 3 \\ m\ge \dfrac{11}{9} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m\ge \frac{11}{9}$$

.

Vậy $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} m\in R \\ m\ge \dfrac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow m\ge \dfrac{11}{9}$.

<u>Cách 2:</u>

$y' = 3x^2-4mx-(m+1)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;2)\Leftrightarrow y'\le 0, \forall x\in(0;2)$.

$y'\le 0, \forall x\in(0;2)\Leftrightarrow 3x^2-4mx-m-1\le 0, \forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m\ge \dfrac{3x^2-1}{4x+1}, \forall x\in(0;2)$.

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{[0;2]} f(x)$, trong đó $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{4x+1}, x\in[0;2]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{12x^2+6x+4}{(4x+1)^2}=\dfrac{12\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{4}}{(4x+1)^2}>0, \forall x\in[0;2]$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $[0;2]$

N.C.Đ

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=\dfrac{3.2^2-1}{4.2+1}=\dfrac{11}{9}$

Vậy $m\ge \dfrac{11}{9}$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+3m-2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$.

A. $m\le 1$. **<u>B.</u>** $m\le 5$. **C.** $m<5$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+3m-2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0$ với $\forall x\in(2;5)$

$\Leftrightarrow 4x^3-4(m-1)x\ge 0$ với $\forall x\in(2;5)$

$\Leftrightarrow 4x\left(x^2-(m-1)\right)\ge 0$ với $\forall x\in(2;5)$

$\Leftrightarrow x^2-(m-1)\ge 0$ với $\forall x\in(2;5)$

$\Leftrightarrow x^2+1\ge m$ với $\forall x\in(2;5)$

Xét $g(x)=x^2+1\Rightarrow g'(x)=2x+1>0$ với $\forall x\in[2;5]$

$\Rightarrow \min\limits_{[2;5]} g(x)=g(2)=5\ge m$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18 . **B.** 17 . **C.** 16 . **D.** 20 .

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $y'=(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)$.

Vì $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$. Do đó , để hàm số $y=f\left(x^2+3x-m\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

thì $f'\left(x^2+3x-m\right)\ge 0, \forall x\in(0;2)$ (*) .

Đặt $t=x^2+3x-m$. Vì $x\in(0;2)\Rightarrow t\in(-m;10-m)$.

(*) trở thành : $f'(t)\ge 0, \forall t\in(-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có : $\left[\begin{array}{l}10-m\le -3\\1\le -m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 13\\m\le -1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}13\le m\le 20\\-10\le m\le -1\end{array}\right.\\m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

N.C.Đ

$\Rightarrow m\in\{-10;-9;..;-1;3;4;..;20\}$.

Câu 20. Số các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-2mx+6m}{x-1}$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 2034 . **B.** 2018 . **C.** 2025 . **D.** 2021 .

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{\left[2(m+1)x-2m\right](x-1)-\left[(m+1)x^2-2mx+6m\right]}{(x-1)^2}=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$

$\Leftrightarrow y'=\dfrac{(m+1)x^2-2(m+1)x-4m}{(x-1)^2}\ge 0, \ \forall x\ge 4$.

$\Leftrightarrow (m+1)x^2-2(m+1)x-4m\ge 0, \ \forall x\ge 4 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-4\right)m+x^2-2x\ge 0, \ \forall x\ge 4$.

$\Leftrightarrow m\ge\dfrac{-x^2+2x}{x^2-2x-4}, \ \forall x\ge 4$ (Do $x^2-2x+4>0$ với mọi $x\ge 4$) (*)

Đặt $g(x)=\dfrac{-x^2+2x}{x^2-2x-4}$ có $g'(x)=\dfrac{8x-8}{\left(x^2-2x-4\right)^2}>0, \ \forall x\ge 4$.

Bảng biến thiên:

x	4		$+\infty$
y'		$+$	
y	-2	$\nearrow$	-1

Từ bảng biến thiên suy ra $(*) \Leftrightarrow m \ge -1$.

Mà $m \in \mathbb{Z};\ m \in [-2019;2019] \Rightarrow m \in \{-1;0;...;2019\}$

$\Rightarrow$Có 2021 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2+2}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$y' = 1 + m\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+2}+mx}{\sqrt{x^2+2}}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} + mx \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \ge 0 & , x = 0 \\ m \ge \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x}, & \forall x > 0 \\ m \le \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x}, & \forall x < 0 \end{cases} \quad (*)$$

Xét $g(x) = \dfrac{-\sqrt{x^2+2}}{x}$ có $g'(x) = \dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2+2}} > 0, \forall x \ne 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

Do đó, từ $(*)$ suy ra $\begin{cases} m \ge -1 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 1$.

Có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn là $-1;0;1$.

Câu 22. Hàm số $y = \dfrac{2x+m}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi?

A. $m \le 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m \le 2$. **D.** $m < 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'\ge 0,\forall x>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-mx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\ge 0,\forall x>0$

$\Leftrightarrow 2-mx\ge 0,\forall x>0$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{2}{x},\forall x>0 \Leftrightarrow m\le 0.$

Ta chọn đáp án A.

Câu 23. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là

A. $m>1$. **B.** $m>\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\ge \dfrac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\cos x=t$. Ta có $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$. Vì hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên yêu cầu bài toán tương đương với tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(t)=\dfrac{2t-1}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow y'=\dfrac{-2m+1}{(t-m)^2}<0$, $\forall t\in(0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2m+1<0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 1.$

N.C.Đ

Câu 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. 2028. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

$y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1 \Leftrightarrow y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4$.

$y'=\left(3\sin^2 x+6\sin x-m\right)\cos x$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ và hàm số đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 3\sin^2 x+6\sin x-m\ge 0\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x+6\sin x\ge m\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\ (1)$.

Đặt $t=\sin x,\ x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Xét hàm số $f(t)=3t^2+6t$ trên $(0;1)$ ta có bảng biến thiên sau

t	0	1
$f'(t)$	$+$	
$f(t)$	0 ↗	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có (1) xảy ra khi và chỉ khi $m \le 0$.

Suy ra có 2019 giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 25. Gọi S là tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

A. 3 **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$y' = 4mx^3 + 3x^2 - 2(m+1)x + 9$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ tại hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

TH1: $m = 0$, $y' = 3x^2 - 2x + 9 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, Suy ra $m = 0$ thỏa mãn.

TH2: $m > 0$, ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y' = -\infty$. Suy ra hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH3: $m < 0$, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y' = -\infty$. Suy ra hàm số $y = mx^4 + x^3 - (m+1)x^2 + 9x + 5$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $S = \{0\}$, số phần tử của S là 1.

Câu 26. Cho hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\cos x$. Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị hai phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của X bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$y' = 2m - 1 + (3m+2)\sin x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m - 1 + (3m+2)\sin x \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Nếu $m = -\dfrac{2}{3}$ thì (*) không thỏa.

Nếu $m > -\dfrac{2}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sin x \le \dfrac{1-2m}{3m+2},\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1-2m}{3m+2} \ge 1 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} < m \le -\dfrac{1}{5}$.

Nếu $m < -\dfrac{2}{3}$ thì (*) $\Leftrightarrow \sin x \ge \dfrac{1-2m}{3m+2},\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1-2m}{3m+2} \le -1 \Leftrightarrow -3 \le m < -\dfrac{2}{3}$.

Ta có $X = \{-3;-2;-1\}$.

Vậy $-3 - 1 = -4$.

Câu 27. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{8}{5}\right)$. **B.** $\left[-3;-\dfrac{8}{5}\right]$. **C.** $\left(-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{8}{5};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2mx-m-1}{(x-m)^2}$.

Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;-3)\Leftrightarrow m\notin(-\infty;-3)\Leftrightarrow m\ge -3$

Khi đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $y'\ge 0\quad \forall x\in(-\infty;-3)$.

$\Leftrightarrow x^2-2mx-m-1\ge 0\quad \forall x\in(-\infty;-3)\Leftrightarrow x^2-1\ge m(2x+1)$ với $\forall x\in(-\infty;-3)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{2x+1}\le m$ với $\forall x\in(-\infty;-3)$.

Đặt $g(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+1}$ ta có $g'(x)=\dfrac{2x^2+2x+2}{(2x+1)^2}>0$ với $\forall x\in(-\infty;-3)$.

BBT

x	$-\infty$		-3
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{8}{5}$

Vậy $m\ge -\dfrac{8}{5}$ (Thỏa mãn điều kiện $m\ge -3$).

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-19;19)$ để hàm số $y=\dfrac{\tan x-3m+3}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. 17. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t=\tan x$, khi x trong $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì t tăng trong $(0;1)$.

Do đó hàm số ban đầu đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Xét hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ có:

$y'=\dfrac{2m-3}{(t-m)^2}$

Hàm số $y=\dfrac{t-3m+3}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi $\begin{cases}2m-3>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$

Trong khoảng $(-19;19)$ có 17 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán!

Câu 29. Cho hàm số $y=-2\sin^3 x+3\sin^2 x+6(2m-1)\sin x+2019$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$?

A. 2019. **B.** 2017. **C.** 2021. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

$y'=\left[-6\sin^2 x+6\sin x+6(2m-1)\right]\cos x$

Ta có $\forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right):\cos x<0$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -6\sin^2 x+6\sin x+6(2m-1)\ge 0\ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\quad (1)$

Đặt $t=\sin x,\ \ \forall x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(-1;1)$

Điều kiện (1) trở thành tìm m thỏa mãn

$-6t^2+6t+6(2m-1)\ge 0\qquad \forall t\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow 2m-1\ge t^2-t\qquad \forall t\in(-1;1)$

Xét hàm số nghịch biến trên khoảng $f(t)=t^2-t,t\in(-1;1)$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

Ycbt $\Leftrightarrow 2m-1\ge 2\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3}{2}$ mà m thuộc khoảng $(-2016;2019)$ nên có 2017 giá trị thỏa mãn.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số thực m để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1?

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3 \Rightarrow y'=-3x^2+6x+m-1$.

Nếu $\Delta_{y'}\le 0$ thì hàm số luôn nghịch biến.

Nếu $\Delta_{y'}>0$ thì hàm số đồng biến trên $[x_1;x_2]$ với $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

Do vậy, hàm số đồng biến trên đoạn có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thoả mãn $|x_1-x_2|>1$.

+) $\Delta_{y'}>0 \Leftrightarrow 9+3(m-1)>0 \Leftrightarrow m>-2$ (1)

+) Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{m-1}{-3} \end{cases}$

+) $|x_1-x_2|>1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2>1 \Leftrightarrow 4+\dfrac{4(m-1)}{3}>1 \Leftrightarrow m>-\dfrac{5}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $m>-\dfrac{5}{4}$ mà m nguyên âm do đó $m=-1$.

Câu 31. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. 7. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1 \Rightarrow y'=4m^2x^3-4(4m-1)x$.

+ TH1: Nếu $m=0$ thì $y'=4x$.

BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Nhận $m=0$.

+ TH2: Nếu $m\ne 0$ thì $y'=0 \Leftrightarrow \left[m^2x^2-(4m-1)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{4m-1}{m^2}\ (1) \end{array}\right.$.

* Nếu $4m-1\le 0 \Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{4}$ thì phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$.

Ta có $a=m^2>0, \forall m\ne 0$ khi đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Nhận các giá trị $m \le \frac{1}{4}$.

Mà ta có $m \in (-10;10)$, $m \in \mathbb{Z}$ khi đó $\begin{cases} -10 < m \le \frac{1}{4} \\ m \ne 0,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên có 9 giá trị của m thỏa mãn.

* Nếu $4m-1>0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$ thì $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt là $x=0$ và $x=\pm\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$.

BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$		0		$\frac{\sqrt{4m-1}}{m}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y\left(-\frac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$y\left(\frac{\sqrt{4m-1}}{m}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $\frac{\sqrt{4m-1}}{m} \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2-\sqrt{3} \\ m \ge 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m \in (-10;10)$, $m \in \mathbb{Z}$, ta có: $\left[\begin{array}{l} -10 < m \le 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \le m < 10 \end{array}\right. \Rightarrow$ do m nguyên nên có 16 giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có 16 giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bổ sung cách 2 như sau:

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x \ge 0, \forall x>1$ và $y'=0$ có nghiệm hữu hạn trên $(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m^2x^2 - (4m-1) \ge 0, \forall x > 1$ (*)

\+ Với $m=0$: (*) $\Leftrightarrow -(-1) \ge 0, \forall x>1$ luôn đúng nên ta nhận $m=0$.

\+ Với $m \ne 0$: (*) $\Leftrightarrow x^2 \ge \frac{4m-1}{m^2}, \forall x>1 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{4m-1}{m^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 2-\sqrt{3} \\ m \ge 2+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Tổng hợp các điều kiện và trường hợp ta có: $m \in \{-9,-8,\ldots,0,4,5,\ldots,9\}$. Vậy có 16 giá trị m.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn A

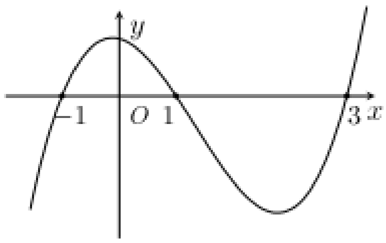
Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow(m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\ 2+m\le 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m\in[-5;5]$ để hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



A. 4. B. 3. C. 6. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$. Vì $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x)=f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy

$$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x+m)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+m<-1\\1<x+m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1-m\\1-m<x<3-m\end{array}\right..$$

Hàm số $g(x)=f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le -1-m\\ \begin{cases}3-m\ge 2\\1-m\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -3\\0\le m\le 1\end{array}\right..$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ nên ta có $S=\{-5;-4;-3;0;1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(-8;5)$?

A. 14. B. 13. C. 12. D. 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{6-x}$, $(t\ge 0)$ khi đó ta có hàm số $y=f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{-m^2+4m-3}{(t+m)^2}$.

Hàm số $y=\sqrt{6-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;6)$ nên với $-8<x<5$ thì $1<t<\sqrt{14}$.

Hàm số $y=\dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8;5)$ khi và chỉ khi hàm số

$f(t)=\dfrac{(4-m)t+3}{t+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;\sqrt{14})$ $\Leftrightarrow f'(t)<0,\forall t\in(1;\sqrt{14})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4m-3<0\\-m\notin(1;\sqrt{14})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<1\\m>3\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}m\ge -1\\m\le-\sqrt{14}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\-1\le m<1.\\m\le-\sqrt{14}\end{array}\right.$$

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-1;0;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 14 giá trị nguyên của m thoả mãn bài toán.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3+ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x)=f\left(f\left(x^2+2\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

N.C.Đ

A. 1. **B.** $1-\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\begin{cases}f(0)=c\\f(1)=a+b+c+\dfrac{1}{6}\\f(2)=4a+2b+c+\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

Theo giả thiết $f(0)=f(1)=f(2)\Rightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{-1}{6}\\4a+2b=\dfrac{-4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Suy ra : $f(x)=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+c$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi $g'(x)=2xf'\left(x^2+2\right)f'\left[f\left(x^2+2\right)\right]\le 0,\forall x\in(0;1)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{3}\Rightarrow f'(x)\le 0\Leftrightarrow 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le x\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta thấy $\forall x\in(0;1)$ thì $\begin{cases}2x>0\\f'\left(x^2+2\right)>0\end{cases}$.

Suy ra $\forall x\in(0;1), g'(x)\le 0\Leftrightarrow f'\left[f\left(x^2+2\right)\right]\le 0$

Xét $0<x<1 \Rightarrow 2<x^2+2<3$, vì $f'(x)>0$, $\forall x\in(2;3)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $(2;3)$.

Do đó: $f(2)<f(x^2+2)<f(3)$.

Suy ra $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le f(2)<f(3)\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)\ge 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ f(3)\le 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow 1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le c\le \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $\min c+\max c=1$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{mx^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-mx+2019$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$. Tính số phần tử của S biết rằng $|m|\le 2020$.

A. 4041. **B.** 2027. **C.** 2026. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0, \forall x\in(6;+\infty)$.

$y'=x^3-mx^2+x-m=x^3-m(x^2+1)+x\ge 0, \forall x\in(6;+\infty)$.

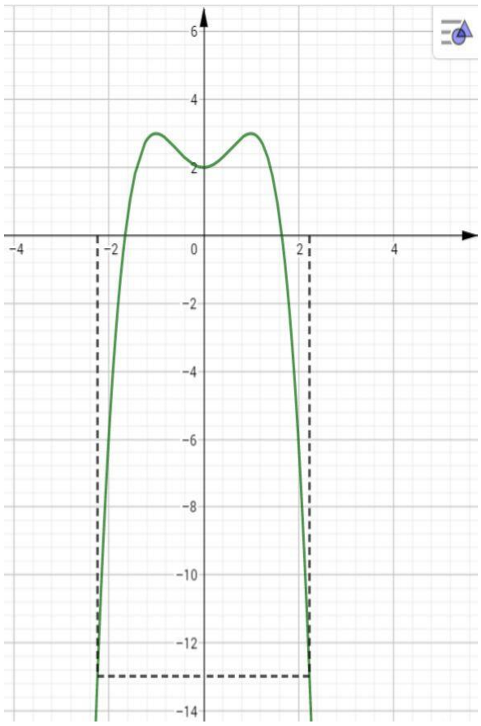
$\Leftrightarrow m\le \dfrac{x^3+x}{x^2+1}=x, \forall x\in(6;+\infty)$.

Đặt $f(x)=x$ thì $m\le f(x), \forall x\in(6;+\infty) \Leftrightarrow m\le \min f(x), \forall x\in(6;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\le 6$.

Mà $|m|\le 2020$ nên $m\in\{-2020;-2019;...;6\}$, có 2027 phần tử. Ta chọn B.

Câu 37. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Xét hàm số $g(x)=2f(x)+2x^3-4x-3m-6\sqrt{5}$ với m là số thực. Điều kiện cần và đủ để $g(x)\le 0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$ là

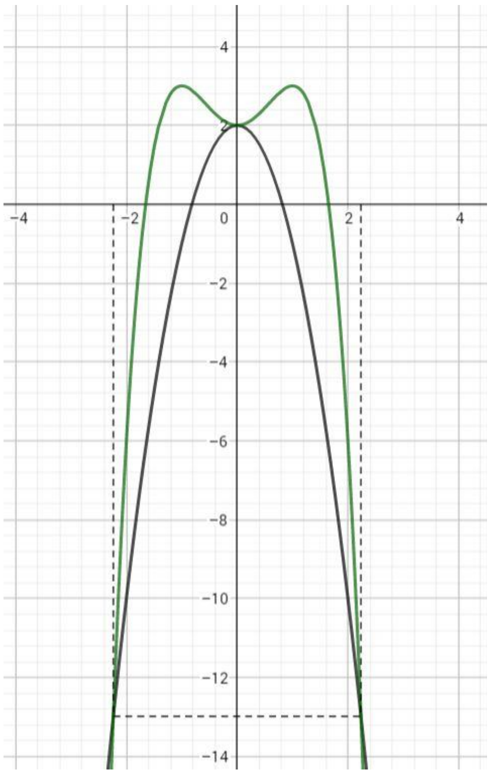
A. $m\le\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$ **B.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$. **C.** $m\ge\frac{2}{3}f\left(-\sqrt{5}\right)$. **D.** $m\ge\frac{2}{3}f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)+6x^2-4$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-3x^2+2=h(x)$.



Dựa vào đồ thị rõ ràng $f'(x)\ge h(x),\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. Suy ra $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Do đó, $g(x)$ đồng biến với mọi $x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. Khi đó,

$g(x)\le 0,\ \forall x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

$\Leftrightarrow \underset{x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]}{\text{Max}}\, g(x)\le 0\Leftrightarrow \underset{x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]}{\text{Max}}\, g(x)=g(5)=2f\left(\sqrt{5}\right)-3m\le 0\Leftrightarrow m\ge\frac{2}{3}f\left(\sqrt{5}\right)$.

Câu 38. Có bbao nhiêu số thực m để hàm số $y=\left(m^3-3m\right)x^4+m^2x^3-mx^2+x+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

• TH1: $m^3-3m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

+) Với $m=0$ thì hàm số đã cho trở thành $y=x+1$, hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $m=0$ thỏa mãn.

+) Với $m=\sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y=3x^3-\sqrt{3}x^2+x+1$ có $y'=9x^2-2\sqrt{3}x+1>0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m=\sqrt{3}$ thỏa mãn.

+) Với $m=-\sqrt{3}$ thì hàm số đã cho trở thành $y=3x^3+\sqrt{3}x^2+x+1$ có $y'=9x^2+2\sqrt{3}x+1>0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m=-\sqrt{3}$ thỏa mãn.

• TH2: $m^3-3m\neq 0$. Ta có: $y'=4\left(m^3-3m\right)x^3+3m^2x^2-2mx+1$.

Nhận thấy, với $m^3-3m\neq 0$ thì y' là hàm số bậc ba nên phương trình $y'=0$ có ít nhất 1 nghiệm và y' đổi dấu khi qua nghiệm đó.

Suy ra hàm số đã cho không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn là 0; $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$.

Câu 39. Có bao nhiêu gia trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 4038. **D.** 1009.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{2x}{x^2+2}-m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+2}-m\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\leq\dfrac{2x}{x^2+2}=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ trên $\mathbb{R}$.

$g'(x)=\dfrac{4-2x^2}{\left(x^2+2\right)^2}=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

Do $m\leq g(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\leq\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. Vì $m\in[-2019;2019]$ nên các giá trị m thỏa mãn là $m\in\{-2019;-2018,...,-2;-1\}$. Vậy có 2019 giá trị m thỏa mãn.

Câu 40 Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 12. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+m+\dfrac{1}{x^6},\forall x\in(0;+\infty)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0;+\infty)$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6}$ với $x \in (0;+\infty)$. Ta có

$3x^2 + \frac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2.x^2.x^2.\frac{1}{x^6}} = 4$, dấu bằng xảy ra khi $x = 1$ nên $\underset{(0;+\infty)}{Min}\, g(x) = 4$.

Mặt khác, ta có $-m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow -m \leq \underset{(0;+\infty)}{Min}\, g(x) \Leftrightarrow -m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m là $-1; -2; -3; -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -2. **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20)$.

N.C.D

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (*).

Ta có $f'(-1) = 0$ nên $f'(x) = (x+1)\left[m^2x^3 - m^2x^2 + (m^2 - m)x - m^2 + m + 20\right] = (x+1)g(x)$.

Nếu $x = -1$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua -1, suy ra $f(x)$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện cần để $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là $g(-1) = 0$

$$g(-1) = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{array}\right..$$

Với $m = -2 \Rightarrow f'(x) = (x+1)(4x^3 - 4x^2 + 6x + 14) = (x+1)^2(4x^2 - 8x + 14) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m = -2$ thoả mãn.

Với $m = \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x) = (x+1)\left(\frac{25x^3}{4} - \frac{25x^2}{4} + \frac{15x}{4} + \frac{65}{4}\right)$

$= \frac{(x+1)^2(25x^2 - 50x + 65)}{4} \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra $m = \frac{5}{2}$ thoả mãn.

Từ đó $S = \left\{-2; \frac{5}{2}\right\}$, suy ra tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$. Với giá trị nào của m thì $f'(x)-6x>0$ với mọi $x\geq 2$?

A. $m>\dfrac{1}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m\leq 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=3x^2-6mx+3(2m-1),\forall x\in\mathbb{R}$

Cách 1:

$f'(x)-6x>0,\forall x\geq 2\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(2m-1)-6x>0,\forall x\geq 2$

$\Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+(2m+1)>0,\forall x\geq 2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta\geq 0\\ (x_1-2)(x_2-2)>0\\ x_1+x_2<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2+2<0\\ \begin{cases}m^2+2\geq 0\\ -2m-1>0\\ 2(m+1)<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}.$$

Với $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-2(m+1)x+(2m+1)=0$

Lưu ý:

Đặt $g(x)=x^2-2(m+1)x+(2m+1)$. Ta có $g(x)$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a>0$

Nếu $\Delta<0$ thì $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)>0,\forall x\geq 2$

Nếu $\Delta\geq 0$ và $g(x)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ sao cho $x_1\leq x_2<2$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $g(x)>0,\forall x\geq 2$.

Cách 2.

$f'(x)-6x>0,\forall x\geq 2\Leftrightarrow 3x^2-6mx+3(2m-1)-6x>0,\forall x\geq 2$

$\Leftrightarrow x^2-2m(x-1)-2x-1>0,\forall x\geq 2$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-1)},\forall x\geq 2\ \Leftrightarrow m<\min\limits_{[2;+\infty)}g(x)$ với $g(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{2(x-1)}$

Vì $g'(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{2(x-1)^2}>0,\forall x\geq 2$ nên $\min\limits_{[2;+\infty)}g(x)=g(2)=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $m<-\dfrac{1}{2}$.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Với giá trị nào của tham số m thì $f'(x)>0$ với mọi $x\geq -1$?

A. $m\in\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{5}{4}\right)$

C. $m\in\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{5}{4}\right)$ **D.** $m\in\left(-\dfrac{7}{3};-1\right)\cup\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=3x^2-2(2m-1)x+2-m,\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)$ là một tam thức bậc hai có hệ số $a>0$

Nếu $\Delta < 0$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \ge -1$.

Nếu $\Delta \ge 0$ và $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho $x_1 < x_2 < -1$ thì theo định lí dấu tam thức bậc hai ta có $f'(x) > 0, \forall x \ge -1$.

$$f'(x) > 0, \forall x \ge -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' < 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \\ x_1 + x_2 < -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2 - m - 5 < 0 \\ \begin{cases} 4m^2 - m - 5 \ge 0 \\ 3m + 7 > 0 \\ 2m - 1 < -3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < \dfrac{5}{4} \\ \begin{cases} m \le -1 \vee m \ge \dfrac{5}{4} \\ m > -\dfrac{7}{3} \\ m < -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < \dfrac{5}{4} \\ -\dfrac{7}{3} < m < -1 \end{array}\right. .$$

Vậy $m \in \left(-\dfrac{7}{3}; -1\right) \cup \left(-1; \dfrac{5}{4}\right)$.

Sai lầm của học sinh dùng cách hàm số:

$f'(x) > 0, \forall x \ge -1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 2 - m(4x+1) > 0, \forall x \ge -1$

$\Leftrightarrow m < \dfrac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1}, \forall x \ge -1$

N.C.Đ

$\Leftrightarrow m < \min\limits_{(-1;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 2}{4x+1}$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m - 2019)x - (2018 - m)\cos^2 x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \le 1$. **B.** $m \le \dfrac{4037}{3}$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m \ge -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2m - 2019 + (2018 - m)\sin 2x$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = 2m - 2019 + (2018 - m)\sin 2x \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow (2018 - m)\sin 2x \le 2019 - 2m, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} g(x) \le 2019 - 2m \quad (1)$, Với $g(x) = (2018 - m)\sin 2x$.

Trường hợp 1: $2018 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2018$ thì $y' = 2017 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $m = 2018$ không là giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: $2018 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2018$.

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = 2018 - m$.

$(1) \Leftrightarrow 2018 - m \le 2019 - 2m \Leftrightarrow m \le 1$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $2018 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2018$.

$\max\limits_{\mathbb{R}} g(x) = m - 2018$.

$(1) \Leftrightarrow m - 2018 \le 2019 - 2m \Leftrightarrow m \le \dfrac{4037}{3}$ (loại).

Kết luận: $m \le 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 45. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \left|2x^3 - 2mx + 3\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 12. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $f(x) = 2x^3 - 2mx + 3$ có: $f'(x) = 6x^2 - 2m$; $\Delta' = 12m$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = \left|2x^3 - 2mx + 3\right|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

+ Trường hợp 1: $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow m \le 0$. Suy ra $f'(x) \ge 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ 5 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ m \le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10)$ ta được $m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$. Ta có 10 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (1)

+ Trường hợp 2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\dfrac{2m}{6} + 1 \ge 0 \\ 5 - 2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le \dfrac{5}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-10;10)$ ta được $m \in \{1;2\}$. Ta có 2 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán (2).

Từ (1) và (2) suy ra: có tất cả có 12 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

A. 2012. **B.** 2009. **C.** 2011. **D.** 2010.

Lời giải

Chọn C

$g'(x) = f'(1-x) = -(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2 - 6(1-x) + m\right]$

$= (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow g'(x) \le 0, \forall x < -1$ $(*)$, (dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm).

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \ge 0, \forall x < -1$

$\Leftrightarrow m \ge -x^2 - 4x + 5, \ \forall x < -1$.

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty;-1)$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \ge 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ và m nguyên nên $m \in \{9;10;11;...;2019\}$.

Vậy có 2011 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = (2x+1).f'(x^2+x-2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x) \ge 0 \ \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow f'(x^2+x-2) \ge 0 \ \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)\left((x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2)+5\right) \ge 0 \ \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2 + m(x^2+x-2) + 5 \ge 0 \quad (1) \ \forall x \in (1;+\infty)$.

Đặt $t = x^2+x-2$, $x \in (1;+\infty) \Rightarrow t > 0$.

Khi đó (1) trở thành $t^2 + mt + 5 \ge 0 \ \forall t \in (0;+\infty) \Leftrightarrow t + \dfrac{5}{t} \ge -m \quad (2) \ \forall t \in (0;+\infty)$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow (2)$ nghiệm đúng với mọi $t \in (0;+\infty)$.

Ta có $h(t) = t + \dfrac{5}{t} \ge 2\sqrt{5}$ với $\forall t \in (0;+\infty)$. Dấu bằng xảy ra khi $t = \dfrac{5}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{5}$.

Suy ra $\underset{t\in(0;+\infty)}{Min}\left(h(t)\right)=2\sqrt{5}$.

Vậy (2) nghiệm đúng với mọi $t\in(0;+\infty)\Leftrightarrow -m\le 2\sqrt{5}\Leftrightarrow m\ge -2\sqrt{5}$.

KL: Số giá trị nguyên âm của m là 4.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^3(x^2-4x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$?

A. 2020. **B.** 2014. **C.** 2019. **D.** 2016.

Lời giải

Chọn D

• Ta có: $g(x)=f(1-x)$

$\Rightarrow g'(x)=(1-x)'.f'(1-x)=(-1).(1-x)\left[(1-x)-1\right]^3\left[(1-x)^2-4(1-x)+m\right]$

$\Rightarrow g'(x)=-x^3(x-1)(x^2+2x+m-3)$

• Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x^2+2x+m-3=0\quad(1)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có $\Delta'=4-m$

Trường hợp 1: Nếu $4-m<0\Leftrightarrow m>4$ thì phương trình (1) vô nghiệm; $x^2+2x+m-3>0,\ \forall x$ ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ nên $m>4$ thỏa mãn ycbt.

Trường hợp 2: Nếu $m=4$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x=-1$.

Khi đó $g'(x)=-x^3(x-1)(x+1)^2$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ nên $m=4$ thỏa mãn ycbt.

Trường hợp 3: Nếu $m<4$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$

Mà $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-2$ nên tồn tại ít nhất 1 nghiệm x_1 thuộc khoảng $(-\infty;0)$

Khi đó $g'(x)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm x_1 nên hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Suy ra $m<4$ không thỏa mãn ycbt.

• Kết hợp 3 trường hợp ta được: $m\ge 4$.

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ nên $m\in\{4;5;6;\ ...\ ;2019\}$

Vậy có 2016 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$?

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0 $\searrow$	-4 $\nearrow$	0 $\nearrow$	4 $\searrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

A. 8. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số $y=f(3x-1)+x^3-3mx$ đồng biến biến trên khoảng $(-2;1)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(-2;1)$

$\Leftrightarrow 3f'(3x-1)+3x^2-3m\ge 0,\ \forall x\in(-2;1)$

$\Leftrightarrow m\le f'(3x-1)+x^2,\ \forall x\in(-2;1)\quad (*)$

Đặt $k(x)=f'(3x-1)$, $h(x)=x^2$ và $g(x)=f'(3x-1)+x^2=k(x)+h(x)$

Ta có $\min\limits_{(-2;1)} h(x)=h(0)=0$

Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(-2;1)} f'(x)=f'(-1)=-4$.

Do đó ta có: $\min\limits_{(-2;1)} f'(3x-1)=f'(-1)=-4$ khi $3x-1=-1\Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow \min\limits_{(-2;1)} k(x)=k(0)=-4$

Do đó $\min\limits_{(-2;1)} g(x)=g(0)=k(0)+h(0)=0-4=-4$

Từ (*) ta có $m\le f'(3x-1)+x^2,\ \forall x\in(-2;1)\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(-2;1)} g(x)\Leftrightarrow m\le -4$

Mà $m\in(-10;10)\Rightarrow m\in\{-9,...,-4\}$

Vậy có tất cả 6 số nguyên thoả mãn.

Câu 50. Giá trị $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^4(x^2+mx+9)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=(3-x)'\,f'(3-x)=-f'(3-x)$.

Hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty)$ hay $f'(3-x)\le 0,\forall x\in(3;+\infty)$.(Dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(3;+\infty)$)

$f'(3-x)=(3-x)(2-x)^4\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\le 0,\forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^4\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\le 0, \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)^2+m(3-x)+9\ge 0, \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{9+(x-3)^2}{x-3}, \forall x\in(3;+\infty)$.

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=\dfrac{9+(x-3)^2}{x-3} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{-9}{(x-3)^2}+1=\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\notin(3;+\infty) \\ x=6\in(3;+\infty)\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên:

x	3		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)=h(6)=6$. Ta có $\begin{cases} m\in\mathbb{Z}^+ \\ m\le 6\end{cases} \Leftrightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(x^2+4x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(x^2+4x+m)$.

Ta có: $y'=(2x+4)f'\left(x^2+4x+m\right)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1) \Leftrightarrow y'=(2x+4)f'\left(x^2+4x+m\right)\le 0, \forall x\in(-1;1)$

(chú ý rằng $2x+4>0, \forall x\in(-1;1)$)

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+4x+m\right)\le 0, \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow -2\le x^2+4x+m\le 8, \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge g(x)=-x^2-4x-2 \\ m\le h(x)=-x^2-4x+8\end{cases}, \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge \max\limits_{[-1;1]} g(x)=g(-1)=1 \\ m\le \min\limits_{[-1;1]} h(x)=h(1)=3\end{cases} \Rightarrow m\in\{1;2;3\}$

(do hàm số $y=-x^2-4x+c$ có $y'=-2x-4<0, \forall x\in(-1;1)$).

Câu 52. Tập các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\frac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=\ln(3x-1)-\frac{m}{x}+2$ trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $y'=\frac{3}{3x-1}+\frac{m}{x^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow y'=\frac{3}{3x-1}+\frac{m}{x^2}\geq 0,\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow m\geq\frac{3x^2}{1-3x},\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow m\geq\max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}\left(\frac{3x^2}{1-3x}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{3x^2}{1-3x},\forall x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=\frac{3x(2-3x)}{(1-3x)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\\ x=\frac{2}{3}\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\end{array}\right.$.

Ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2};\ f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3};\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\Rightarrow\max\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)}f(x)=-\frac{4}{3}$. Vậy $m>-\frac{4}{3}$.

Câu 53. Có tất cả bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ để hàm số $f(x)=x+a.\sin x+b.\cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số đồng biến trên R thì điều kiện là $f'(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Ta có

$f'(x)=1+a\cos x-b\sin x$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 1+a\cos x-b\sin x\geq 0$

$\Rightarrow a\cos x-b\sin x\geq -1$

$TH1: a=0,\ b=0.(TM)$

$TH2:\left[\begin{array}{l}a\neq 0\\ b\neq 0\end{array}\right.$

$1+a\cos x-b\sin x\geq 0\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\geq\frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow\exists\alpha:\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha;\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$

$\Rightarrow \sin(\alpha - x) \ge \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

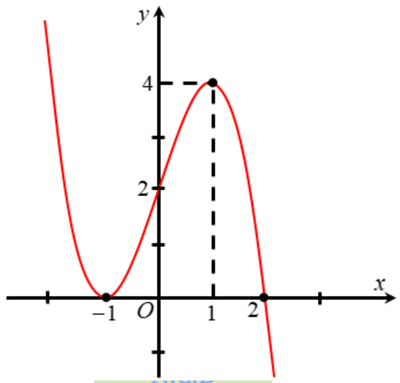
$f'(x) \ge 0, \forall x \in R \Rightarrow \sin(\alpha - x) \ge \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \forall x \in R \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{a^2+b^2}} \le -1$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \le 1 \Rightarrow a^2+b^2 \le 1$

Do a, b nguyên nên $(a;b) \in \{(\pm 1;0),(0;\pm 1)\}$

Vậy theo cả hai trường hợp ta có tất cả 5 bộ giá trị $(a;b)$

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x+1) + \dfrac{20}{m}\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?



A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = f'(x+1) + \dfrac{20}{m}.\dfrac{-4}{4-x^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi $y' \le 0, \forall x \in (-1;1)$

$\Rightarrow f'(x+1) - \dfrac{80}{m}.\dfrac{1}{4-x^2} \le 0, \forall x \in (-1;1) \quad (*)$.

Đặt $t = x+1$ khi đó $x \in (-1;1)$ suy ra $t \in (0;2)$.

Từ $(*)$ ta có $f'(t) - \dfrac{80}{m}.\dfrac{1}{(3-t)(t+1)} \le 0, \forall t \in (0;2) \Rightarrow \dfrac{80}{m} \ge f'(t).(3-t)(t+1), \forall t \in (0;2) \quad (1)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ thì ta có $f'(x) = -(x+1)^2(x-2)$.

Suy ra ta có $f'(t) = -(t+1)^2(t-2)$.

Xét hàm số $g(t) = -(t+1)^2(t-2)(3-t)(t+1), \quad \forall t \in (0;2)$.

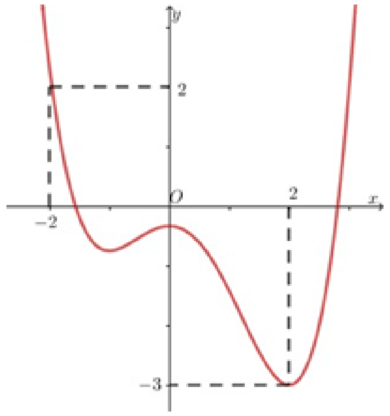
$g'(t) = -(t+1)^2(-5t^2+18t-13)$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -(t+1)^2(-5t^2+18t-13) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\dfrac{13}{5} \\ t=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	

Dựa vào bảng xét dấu và từ (1) ta có $\frac{80}{m} \geq \max\limits_{(0;2)} g(t) = g(1) \Leftrightarrow \frac{80}{m} \geq 16 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m \in (-20;20)$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{m(x^2+4)^2}{20}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = \frac{3x^2}{4} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) - \frac{mx(x^2+4)}{5}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$ ($g'(x) = 0$ chỉ tại hữu hạn điểm). Điều này tương đương với

$$\frac{3x}{4} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq \frac{m(x^2+4)}{5} \Leftrightarrow m \leq \frac{15x}{4(x^2+4)} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right),\ \forall x \in (0;+\infty).$$

Với $x > 0$ thì $\frac{x^3}{4} > 0 \Rightarrow f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq -3$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x^3}{4} = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có $0 < \frac{x}{x^2+4} \leq \frac{x}{4x} = \frac{1}{4},\ \forall x > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

Suy ra $\frac{15x}{4(x^2+4)} \cdot f'\left(\frac{x^3}{4}\right) \geq \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-3) = -\frac{45}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

Như thế, $m \leq -\frac{45}{16}$. Kết hợp với m nguyên âm và $m \in (-20;20)$ thì $m \in \{-19;-18;\cdots;-3\}$.

Vậy có 17 số nguyên âm của $m \in (-20;20)$ để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

CHỦ ĐỀ: HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU
VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3.1
BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Kiến thức quan trọng 1: Dùng tính đơn điệu để giải phương trình.

Phương pháp :

❶ Phương trình : $f(x)=c$ có nhiều nhất một nghiệm nếu $f(x)$ đơn điệu trên toàn bộ tập xác định.

❷ Phương trình : $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm nếu hai hàm số $f(x),g(x)$ có tính đơn điệu trái ngược nhau.

❸ Phương trình : $f\left[u(x)\right]=f\left[v(x)\right]\Leftrightarrow u(x)=v(x)$ nếu f đơn điệu trên miền xác định.

Kiến thức quan trọng 2: Dùng tính đơn điệu để giải bất phương trình.

Phương pháp :

❶ Bất phương trình : $f(x)>c=f(x_0)\Leftrightarrow x>x_0$ nếu $f(x)$ đồng biến trên toàn bộ tập xác định và $f(x)>c=f(x_0)\Leftrightarrow x<x_0$ nếu $f(x)$ nghịch biến trên toàn bộ tập xác định

❷ Bất phương trình : $f(x)>g(x)$ và số x_0 thỏa $f(x_0)=g(x_0)$:

+ Có nghiệm $x>x_0$ nếu $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến.

+ Có nghiệm $x<x_0$ nếu $f(x)$ nghịch biến và $g(x)$ đồng biến.

❸ Bất phương trình : $f\left[u(x)\right]>f\left[v(x)\right]\Leftrightarrow u(x)>v(x)$ nếu f đồng biến trên miền xác định và $f\left[u(x)\right]>f\left[v(x)\right]\Leftrightarrow u(x)<v(x)$ nếu f nghịch biến trên miền xác định.

Bài toán 1: Biện luận số nghiệm phương trình $h(m)=f(x)$.

Phương pháp :

+ Tìm miền giá trị của hàm số $f(x)$ là $(a;b)$.

+ Phương trình có nghiệm khi $a<h(m)<b$.

Bài toán 2: Biện luận số nghiệm bất phương trình $h(m)\geq f(x)$ hoặc $h(m)\leq f(x)$.

Phương pháp :

❶ $m\geq f(x)\ \forall x\in[a;b]\Leftrightarrow m\geq\max\limits_{[a;b]}f(x)$.

❷ $m\leq f(x)\ \forall x\in[a;b]\Leftrightarrow m\leq\min\limits_{[a;b]}f(x)$.

❸ $m \ge f(x)$ có nghiệm trên $[a;b] \Leftrightarrow m \ge \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

❹ $m \le f(x)$ có nghiệm trên $[a;b] \Leftrightarrow m \le \max\limits_{[a;b]} f(x)$.

Bài toán 3: Tìm tham số m để phương trình $h(m) = f(x)$ có nghiệm $x \in (a;b)$.

Phương pháp :

+ Giả sử $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f(a) < f(b)$.

+ Phương trình có nghiệm $x \in (a;b)$ thì $f(a) < h(m) < f(b)$.

BÀI TẬP

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x - m = 0$ có đúng 1 nghiệm?

A. $-27 \le m \le 5$. **B.** $m < -5$ hoặc $m > 27$.
C. $m < -27$ hoặc $m > 5$. **D.** $-5 \le m \le 27$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?

A. $m \ge 2$. **B.** $m \le 2$. **C.** $m \ge 3$. **D.** $m \le 3$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $-3 < m < \sqrt{5}$. N.C.Đ **C.** $-\sqrt{5} < m < 3$. **D.** $-3 \le m < 3$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình: $x^2 - 3x + 2 \le 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \ge 0$?

A. $m \le -1$. **B.** $m \le -\frac{4}{7}$. **C.** $m \ge -\frac{4}{7}$. **D.** $m \ge -1$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình: $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$?

A. $-1 \le m \le 3$. **B.** $0 \le m \le 2$. **C.** $0 \le m \le 3$. **D.** $-1 \le m \le 2$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực?

A. $m \ge -\frac{7}{2}$. **B.** $m \ge \frac{3}{2}$. **C.** $m \ge \frac{9}{2}$. **D.** $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$ có hai nghiệm thực?

A. $\frac{1}{3} \le m < 1$. **B.** $-1 \le m \le \frac{1}{4}$. **C.** $-2 < m \le \frac{1}{3}$. **D.** $0 \le m < \frac{1}{3}$.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x - 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[-\frac{1}{2};3\right]$?

A. $m > 1$. **B.** $m > 0$. **C.** $m < 1$. **D.** $m < 0$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$3\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\right)-2\sqrt{(1+x)(3-x)}\geq m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;3]$?

A. $m\leq 6$. **B.** $m\geq 6$. **C.** $m\geq 6\sqrt{2}-4$. **D.** $m\leq 6\sqrt{2}-4$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{18+3x-x^2}\leq m^2-m+1$ nghiệm đúng $\forall x\in[-3,6]$?

A. $m\geq -1$. **B.** $-1\leq m\leq 0$.

C. $0\leq m\leq 2$. **D.** $m\leq -1$ hoặc $m\geq 2$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m\leq 3$. **B.** $m\geq 1$. **C.** $-1\leq m\leq 4$. **D.** $m\geq 0$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình: $-x^3+3mx-2<-\dfrac{1}{x^3}$ nghiệm đúng $\forall x\geq 1$?

A. $m<\dfrac{2}{3}$. **B.** $m\geq\dfrac{2}{3}$. **C.** $m\geq\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\leq m\leq\dfrac{3}{2}$.

Câu 13. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình $2^{\cos^2 x}+3^{\sin^2 x}\geq m.3^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. $m=4$. **B.** $m=8$. **C.** $m=12$. **D.** $m=16$.

Câu 14. Bất phương trình $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16}-\sqrt{4-x}\geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a;b]$. Hỏi tổng $a+b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. -2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 15. Bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a;b]$. Hỏi hiệu $b-a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$$m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \text{ có nghiệm.}$$

A. $m\leq\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}-1\leq m\leq 1$. **C.** $m\geq 1$. **D.** $m\leq 1$.

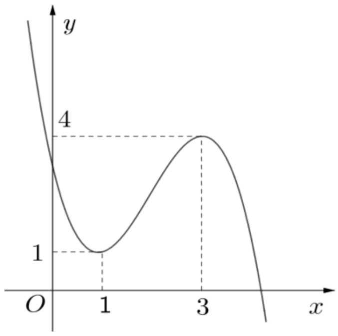
Câu 17. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m,(m\in\mathbb{R})$$

A. $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+6$ **B.** $2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+8$

C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+6$ **D.** $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m\leq 3\sqrt{2}+6$

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a, b, c, d; a\neq 0$ là các số thực, có đồ thị như hình bên.



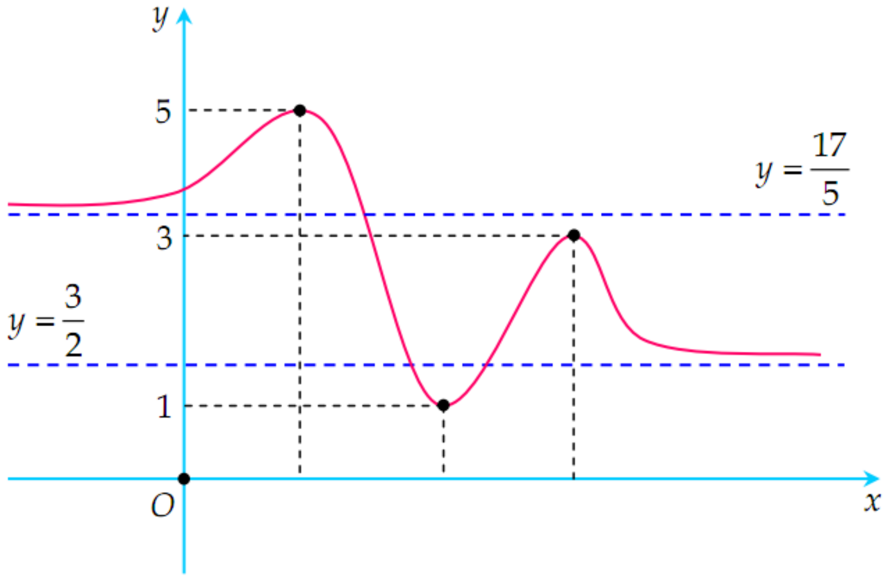
Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số

$g(x) = f\left(x^3 - 3x^2 + m\right)$

nghịch trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 2012 **B.** 2013 **C.** 4028 **D.** 4026

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình

$e^{f^3(x)+2f^2(x)-7f(x)+5} + \ln\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = m$ có nghiệm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Chọn C.

$(1) \Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x = f(x)$. Bảng biến thiên của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 2. Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \ge 0$. Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \ge 0; f'(t) = -2t + 2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \le 2$.

Câu 3. Chọn B

Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ *(1)*.

Nếu phương trình *(1)* có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \ge 1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$. Ta có $g'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in \left(1; \sqrt{5}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{5}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\sqrt{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4. Chọn C.

Bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$.

Bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \ge 0 \Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \ge -x - 2 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1 \le x \le 2$. Có $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x^2+x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{4}{7}$

Câu 5. Chọn B.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$. Điều kiện: $t \ge 1$.

Phương trình thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (*) . Khi $x \in \left[1; 3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t \in [1;2]$

$(*) \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t^2 + t - 2}{2} = m$. Bảng biến thiên :

t	1		2
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có : $0 \le m \le 2$

Câu 6. Chọn C

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2}$

Phương trình $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = mx$ (*)

Vì $x = 0$ không là nghiệm nên (*) $\Leftrightarrow m = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x}$

Xét $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 1}{x}$. Ta có $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2} > 0 \ \forall x \ge -\dfrac{1}{2}; x \ne 0$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \ge \frac{9}{2}$.

Câu 7. Chọn D.

Điều kiện : $x \ge 1$

Pt $\Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$

$t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ với $x \ge 1$ ta có $0 \le t < 1$. Thay vào phương trình ta được $m = 2t - 3t^2 = f(t)$

Ta có: $f'(t) = 2 - 6t$ ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	-1

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \le m < \frac{1}{3}$

Câu 8. Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x \in \left[-\frac{1}{2};3\right] \Rightarrow t \in \left[0;\frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

Từ bảng biến thiên ta có : $m < 0$

Câu 9. Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\Rightarrow t^2=4+2\sqrt{(1+x)(3-x)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)}=t^2-4$

Với $x\in[-1;3]\Rightarrow t\in[2;2\sqrt{2}]$. Thay vào bất phương trình ta được: $m\le -t^2+3t+4$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+3t+4$; $f'(t)=-2t+3$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}<2$

t	2	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	6 ↘	$6\sqrt{2}-4$

Từ bảng biến thiên ta có $m\le 6\sqrt{2}-4$ thỏa đề bài

Câu 10. Chọn D.

Đặt $t=\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}>0\Rightarrow t^2=\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}\right)^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}$

$\Rightarrow 9\le t^2=9+2\sqrt{(3+x)(6-x)}\le 9+(3+x)+(6-x)=18$

$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2}=\sqrt{(3+x)(6-x)}=\frac{1}{2}(t^2-9); t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{9}{2}$; $f'(t)=1-t<0;\forall t\in\left[3;3\sqrt{2}\right]\Rightarrow \max\limits_{\left[3;3\sqrt{2}\right]} f(t)=f(3)=3$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{\left[3;3\sqrt{2}\right]} f(t)=3\le m^2-m+1\Leftrightarrow m^2-m-2\ge 0\Leftrightarrow m\le -1$ hoặc $m\ge 2$

Câu 11. Chọn B

Đặt $t=2^x>0$ thì $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$, đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m.t^2+4(m-1).t+(m-1)>0,\forall t>0\Leftrightarrow m(t^2+4t+1)>4t+1,\forall t>0$

$\Leftrightarrow g(t)=\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}<m,\forall t>0$.

Ta có $g'(t)=\dfrac{-4t^2-2t}{(t^2+4t+1)^2}<0$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$

ycbt $\Leftrightarrow \max\limits_{t\ge 0} g(t)=g(0)=1\le m$

Câu 12. Chọn A.

Bpt $\Leftrightarrow 3mx<x^3-\dfrac{1}{x^3}+2,\forall x\ge 1\Leftrightarrow 3m<x^2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{2}{x}=f(x),\forall x\ge 1.$

Ta có $f'(x)=2x+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{2}{x^2}\ge 2\sqrt{2x\left(\dfrac{4}{x^5}\right)}-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{4\sqrt{2}-2}{x^2}>0$ suy ra $f(x)$ tăng.

Ycbt $\Leftrightarrow f(x)>3m,\forall x\ge 1\Leftrightarrow \min\limits_{x\ge 1} f(x)=f(1)=2>3m\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}>m$

Câu 13. Chọn A.

$(1)\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\cos^2 x}+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\cos^2 x}\ge m$. Đặt $t=\cos^2 x, 0\le t\le 1$

(1) trở thành $\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t\ge m$ (2). Đặt $f(t)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^t+3\left(\dfrac{1}{9}\right)^t$.

Ta có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t\in[0;1]\Leftrightarrow \mathrm{m}\le \mathrm{Max}_{t\in[0;1]} f(t)\Leftrightarrow m\le 4$

Câu 14. Chọn C

Điều kiện: $-2 \le x \le 4$. Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$ trên đoạn $[-2;4]$.

Có $f'(x) = \dfrac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2;4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2;4]$, bpt $\Leftrightarrow f(x) \ge f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \ge 1$.

So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1;4] \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 15. Chọn A.

Điều kiện: $1 \le x \le 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x}$

Xét $f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t}$ với $t \ge 0$. Có $f'(t) = \dfrac{t}{2\sqrt{t^2+2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$. (1) $\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x - 1 > 3 \Leftrightarrow x > 2$

So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2;3]$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$$m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \text{ có nghiệm.}$$

A. $m \le \sqrt{2} - 1$. **B.** $\sqrt{2} - 1 \le m \le 1$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $m \le 1$.

Lời giải

ĐK: $x \in [-1;1]$.

N.C.Đ

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Với $x \in [-1;1]$, ta xác định ĐK của t như sau:

Xét hàm số $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1;1]$.

Ta có:

$$t' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}, \text{ cho } t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta có $t(-1) = \sqrt{2}, t(0) = 0, t(1) = \sqrt{2}$

Vậy với $x \in [-1;1]$ thì $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$

Từ $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$.

Khi đó pt đã cho tương đương với: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2 + t + 2}{t+2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\dfrac{-t^2 + t + 2}{t+2} = m$ có nghiệm $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2 + t + 2}{t+2}$ với $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2} < 0, \forall t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$

Suy ra: $\max\limits_{t \in [0;\sqrt{2}]} f(t) = f(0) = 1, \min\limits_{t \in [0;\sqrt{2}]} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$.

Bây giờ yêu cầu bài toán xảy ra khi: $\min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f\left(t\right)\le m\le \max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f\left(t\right)\Leftrightarrow \sqrt{2}-1\le m\le 1$

Vậy với $\sqrt{2}-1\le m\le 1$ thảo yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Câu 17. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m,\left(m\in\mathbb{R}\right)$$

A. $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ **B.** $2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+8$

C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ **D.** $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$

Lời giải

ĐK: $0\le x\le 6$

Đặt vế trái của phương trình là $f\left(x\right),x\in\left[0;6\right]$.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{\left(2x\right)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{\left(6-x\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\left(2x\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{\left(6-x\right)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),x\in\left(0;6\right)$$

Đặt:

$$u\left(x\right)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\left(2x\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{\left(6-x\right)^3}}\right),v(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}- -\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),x\in\left(0;6\right)$$

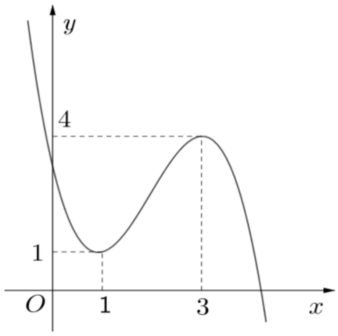
Ta thấy $u\left(2\right)=v\left(2\right)=0,x\in\left(0;6\right)\Rightarrow f'\left(2\right)=0$. Hơn nữa $u\left(x\right),v\left(x\right)$ cùng dương trên khoảng (0;2) và cùng âm trên khoảng (2;6).

BBT

x	0		2		6
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
$f\left(x\right)$	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}+6$	$\searrow$	$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Vậy với $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn A.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a,\, b,\, c,\, d;\, a\ne 0$ là các số thực, có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số

$g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$

nghịch trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 2012 **B.** 2013 **C.** 4028 **D.** 4026

Lời giải:

Chọn A

Ta có $g'(x)=(3x^2-6x)f'(x^3-3x+m)$.

Với mọi $x\in(2;+\infty)$ ta có $3x^2-6x>0$ nên để hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2+m\right)$ nghịch biến trên

khoảng $(2;+\infty)$ $\Leftrightarrow$ $f'(x^3-3x^2+m)\le 0,\forall x\in(2;+\infty)$.

Dựa vào đồ thị ta có hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$ nên

$f'(x)\le 0$ với $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Do đó: $f'(x^3-3x^2+m)\le 0,\forall x\in(2;+\infty)$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x^2+m\le 1,\forall x\in(2;+\infty)\\x^3-3x^2+m\ge 3,\forall x\in(2;+\infty)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -x^3+3x^2+1,\forall x\in(2;+\infty)\\m\ge -x^3+3x^2+3,\forall x\in(2;+\infty)\end{array}\right.$

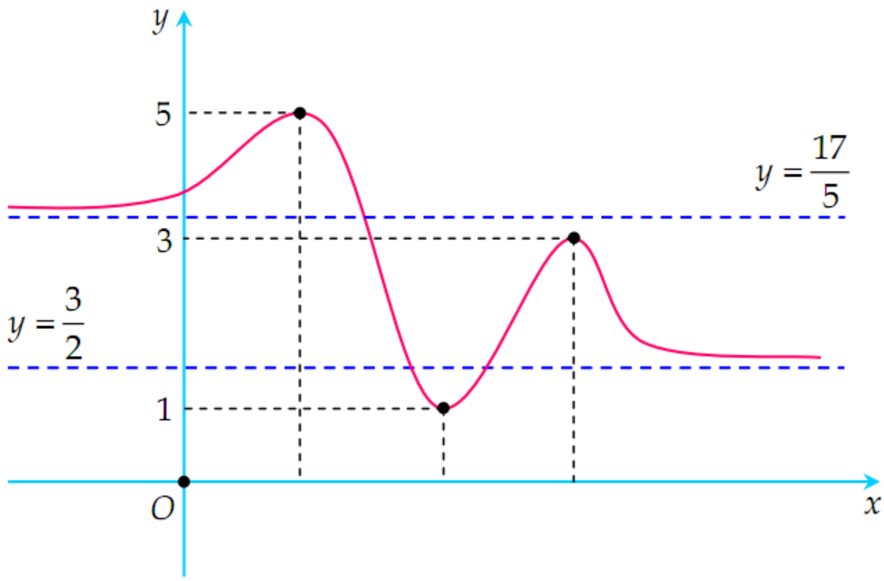
Nhận thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3+3x^2+1)=-\infty$ nên trường hợp $m\le -x^3+3x^2+1,\forall x\in(2;+\infty)$ không xảy ra.

Trường hợp: $m\ge -x^3+3x^2+3,\forall x\in(2;+\infty)$. Ta có hàm số $h(x)=-x^3+3x^2+3$ liên tục trên $[2;+\infty)$ và $h'(x)=-3x^2+6x<0,\forall x\in(2;+\infty)$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $[2;+\infty)$ suy ra $\max\limits_{[2;+\infty)}h(x)=h(2)$. Do đó $m\ge -x^3+3x^2+3,\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[2;+\infty)}h(x)=h(2)$ $\Leftrightarrow m\ge 7$.

Do m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ nên $m\in\{7;8;9;...;2018\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình

$e^{f^3(x)+2f^2(x)-7f(x)+5}+\ln\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=m$ có nghiệm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy $1\le f(x)\le 5,\forall x\in\mathbb{R}$, đặt $t=f(x)$ giả thiết trở thành

$e^{t^3+2t^2-7t+5}+\ln\left(t+\frac{1}{t}\right)=m$.

Xét hàm: $g(t)=t^3+2t^2-7t+5,\ t\in[1;5]$

$g'(t)=3t^2+4t-7\ge 0\,\forall t\ge 1\Rightarrow g(1)\le g(t)\le g(5)\Leftrightarrow 1\le g(t)\le 145$.

Mặt khác $h(t)=t+\frac{1}{t},h'(t)=1-\frac{1}{t^2}\ge 0\,\forall t\in[1;5]\Rightarrow 2\le h(t)\le\frac{26}{5}$.

Do đó hàm $u(t)=e^{t^3+2t^2-7t+5}+\ln\left(t+\frac{1}{t}\right)$ đồng biến trên đoạn $[1;5]$.

Suy ra: Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow e+\ln 2\le m\le e^{145}+\ln\frac{26}{5}$.

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m là 4.

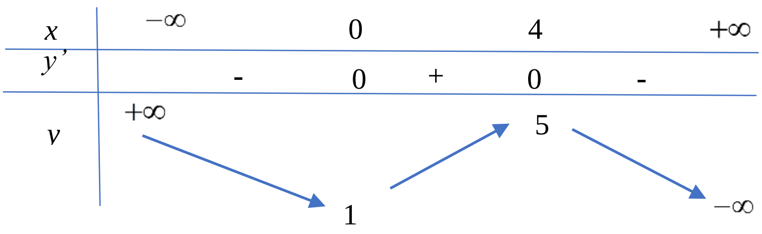
CHỦ ĐỀ: HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

DẠNG 3.2

BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x^2)=4$ là:



A. 4 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 8

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)\left(x^2-1\right)+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

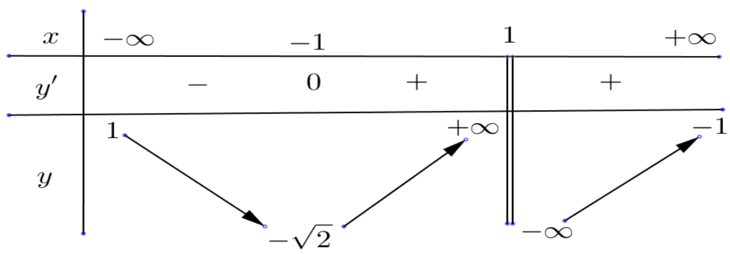
Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-3;1]$ thỏa mãn $f(-3)=1$, $f(0)=2$, $f(1)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $1<f(-2)<2$. **B.** $2<f(-2)<3$. **C.** $f(-2)<1$. **D.** $f(-2)>3$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4).u(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $u(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

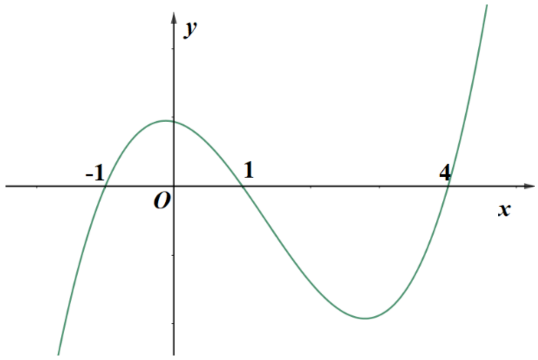
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-1=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Bất phương trình $f(1-x)<e^{x^2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi



A. $m \geq f\ 1\ -1$. **B.** $m \geq f\ 1\ -e^2$. **C.** $m > f\ -1\ -e^2$. **D.** $m > f\ 1\ -1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$. **B.** $m \geq f(1) - e$. **C.** $m > f(1) - e$. **D.** $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(2+x)(\sin x + 2) + 2019$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

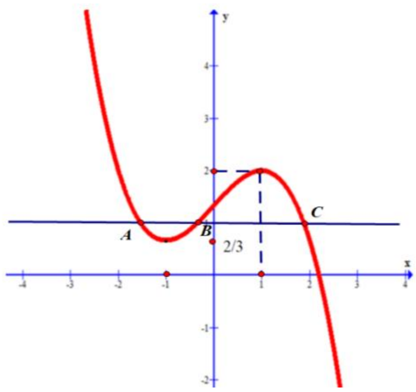
Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) + x.f'(x) = x(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = x.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

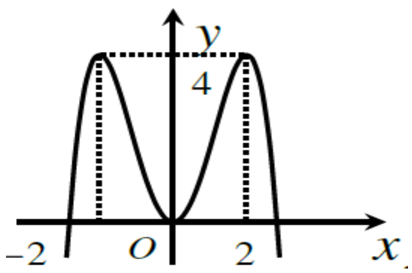
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x+2019) = 1$ là

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.



Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x\right)=\log_2 m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m<0$. **B.** $0<m<1;\ m=16$. **C.** $m<1;\ m=16$. **D.** $m=4$.

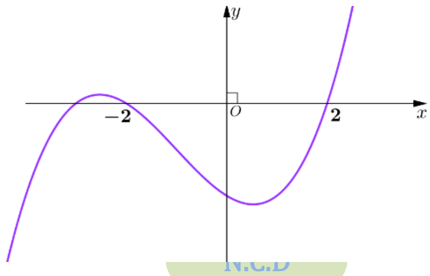
Câu 12. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Bất phương trình $x.f\left(x\right)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(1;2019\right)$ khi

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. $m\ge f\left(1\right)-1$. **B.** $m\le f\left(1\right)-1$.

C. $m\ge f\left(2019\right)-\dfrac{1}{2019}$. **D.** $m\le f\left(2019\right)-\dfrac{1}{2019}$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f\left(x\right)>x^2-2x+m$ đúng với mọi $x\in\left(1;2\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\le f\left(2\right)$. **B.** $m<f\left(1\right)-1$. **C.** $m\ge f\left(2\right)-1$. **D.** $m\ge f\left(1\right)+1$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Bất phương trình $f(x)<3e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in\left(-2;2\right)$ khi và chỉ khi:

A. $m\ge f\left(-2\right)-3$. **B.** $m>f\left(2\right)-3e^4$. **C.** $m\ge f\left(2\right)-3e^4$. **D.** $m>f\left(-2\right)-3$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f\left(x\right)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f\left(0\right)-1$. **B.** $m>f\left(-1\right)-e$. **C.** $m>f\left(0\right)-1$. **D.** $m\ge f\left(-1\right)-e$.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2\left(2x+m\right)-2\log_2 x=x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

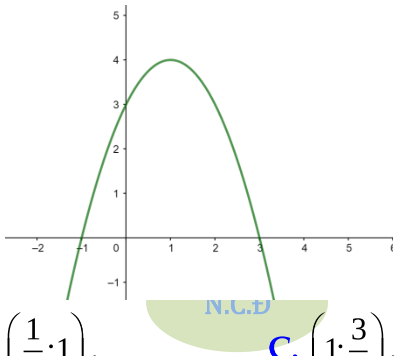
Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2019}}{2019!}-e^x & \text{khi } x\ge 0\\ -x^2-10x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương và chia hết cho 5 của tham số m để bất phương trình $m-f(x)\le 0$ có nghiệm?

A. 25. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 18. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để bất phương trình $(1-m^3)x^3+3(2-m^3)x^2+(13-m-3m^3)x+10-m-m^3\ge 0$ đúng với mọi $x\in[1;3]$. Số phần tử của tập S là

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(2x^4-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m<2^{2019}$. **B.** $m\le 2^{2018}$. **C.** $m<2^{2018}$. **D.** $m\le 2^{2019}$.

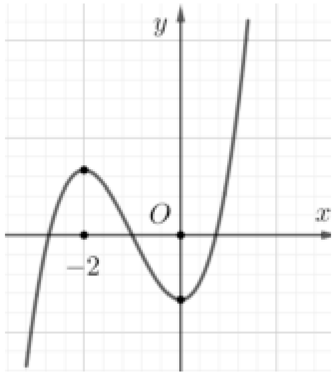
Do đó bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m\le 2^{2018}$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $m+x^2\le f(x)+\dfrac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x\in(0;3)$ khi và chỉ khi

x	-1		1		3
y''		$+$	0	$-$	
y'	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

A. $m<f(0)$. **B.** $m\le f(3)$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m<f(1)-\dfrac{2}{3}$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$.



A. $m\in\left(2\sqrt{6};\dfrac{11\sqrt{3}}{3}\right)$.
B. $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.
C. $m\in\left[2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.
D. $m\in\left(3\sqrt{3};\dfrac{11\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{6}\right\}$.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\left|2^{x+1}-8\right|=\dfrac{1}{2}x^2+m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

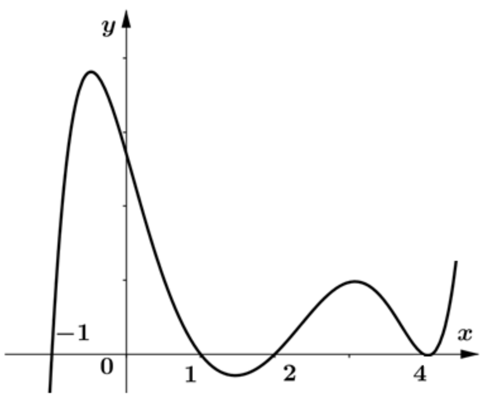
A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 24. Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x>1$.

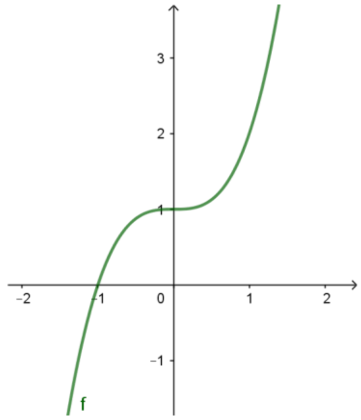
A. $m\ge\dfrac{1}{2}$. **B.** $m>1$. **C.** $m>\dfrac{1}{2}$. **D.** $m\ge 1$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

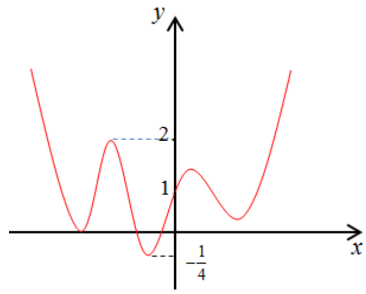


Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình sau có nghiệm $x\in\mathbb{R}$. $f\left(-16\sin^2 x+6\sin 2x+8\right)=f\left(n(n+1)\right)$



A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

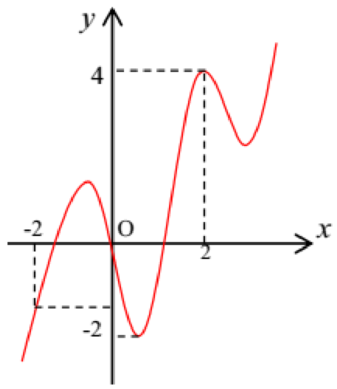
Câu 27 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây .



Số nghiệm của phương trình $\dfrac{f^3(x)+3f^2(x)+4f(x)+2}{\sqrt{3f(x)+1}} = 3f(x)+2$ là:

A. 6 . **B.** 9 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^3-3x^2+2) = m^2-3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;\ 3)$ là



A. $[-1;1)\cup(2;4]$. **B.** $(1;\ 2)\cup[4;\ +\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup(2;4)$. **D.** $(-1;1]\cup[2;4)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = -x^2-2\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(1)$. **B.** $m \ge f(0)$. **C.** $m > f(0)$. **D.** $m > f(1)$.

Câu 30. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thoả mãn $a_2 > a_1 \ge 0$, $b_2 > b_1 \ge 1$ và hàm số $f(x) = x^3-3x$ sao cho $f(a_2)+2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2)+2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Câu 31. Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x}+12\sqrt{1-x^2}\ge 16x+3m\sqrt{1+x}+2m+15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-9;9]$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 32. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=4a-\dfrac{1}{b}-\sqrt{2}$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm $x\in[1;2]$ biết $f(x)=x^5+3x^3-4m$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Câu 34. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $S=[a;b]$. Tính $a\sqrt{2}+8b$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

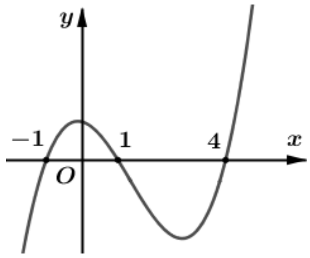
Câu 35. Biết rằng phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a,\,b,\,c,\,d,\,e\in\mathbb{R},\,a\ne 0,\,b\ne 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực?

$$\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)^2-2\left(6ax^2+3bx+c\right).\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)=0$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=x^3-4x^2-x+4$ có đồ thị như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có bốn nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$

$$2019f\left(\sqrt{15x^2-30x+16}\right)-m\sqrt{15x^2-30x+16}-m=0$$



A. 4541. **B.** 4542. **C.** 4543. **D.** 4540.

Câu 37. Có bao nhiêu số nguyên $x\in(-100;100)$ thỏa mãn bất phương trình

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2019}}{2019!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...-\frac{x^{2019}}{2019!}\right)<1.$$

A. 199 **B.** 0 **C.** 99 **D.** 198

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Số nghiệm của phương trình $f(x^2)=4$ là:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. 4 **B.** 6 **C.** 2 **D.** 8

Lời giải

Chọn A

Ta thấy phương trình $f(x)=4$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó có 2 nghiệm dương và 1 nghiệm âm.

Do đó phương trình $f(x^2)=4$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x\ ,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)-2x$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-2x=0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-3;1]$ thỏa mãn $f(-3)=1, f(0)=2, f(1)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $1<f(-2)<2$. **B.** $2<f(-2)<3$. **C.** $f(-2)<1$. **D.** $f(-2)>3$.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-3;1]$ và $-3<-2<0$ nên

$f(-3)<f(-2)<f(0) \Leftrightarrow 1<f(-2)<2$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\ x$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4).u(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $u(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2)=2x.(x^2)^2(x^2-1)(x^2-4).u(x^2)$.

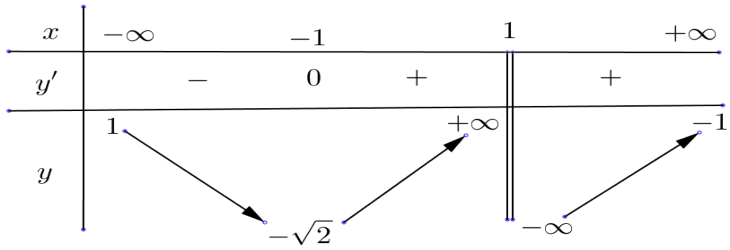
Thấy $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm1 \\ x=\pm2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-1=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

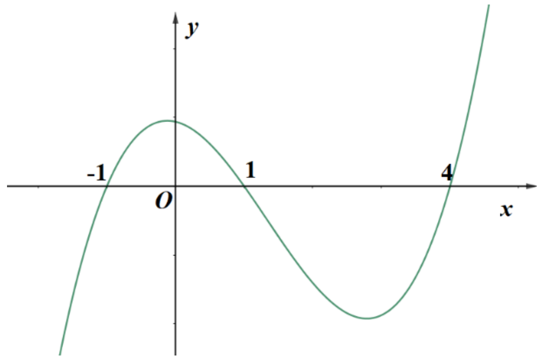
Lời giải

Chọn B.

Ta có : $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên thấy phương trình có hai nghiệm.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\ x$. Hàm số $y=f'\ x$ có đồ thị như hình vẽ sau. Bất phương trình $f\ 1-x<e^{x^2}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\ -1;1$ khi và chỉ khi



A. $m \geq f(1)-1$. **B.** $m \geq f(1)-e^2$. **C.** $m > f(-1)-e^2$. **D.** $m > f(1)-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(1-x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ tương đương với $m > f(1-x) - e^{x^2}$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$. Xét $g(x) = f(1-x) - e^{x^2}$ với $x \in (-1;1)$.

Ta có $g'(x) = -f'(1-x) - 2x.e^{x^2} = -\left(f'(1-x) + 2xe^{x^2}\right)$.

Nhận xét:

+) Với $-1 < x < 0$ thì $1 < 1-x < 2$ nên $f'(1-x) < 0$ và $xe^{x^2} < 0$ suy ra $g'(x) > 0$.

+) Với $0 < x < 1$ thì $0 < 1-x < 1$ nên $f'(1-x) > 0$ và $xe^{x^2} > 0$ suy ra $g'(x) < 0$.

+) Với $x = 0$ thì $1-x = 1$ nên $f'(1-x) = 0$ và $xe^{x^2} = 0$ suy ra $g'(x) = 0$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$			$f(1)-1$		
	$f(2)-e$ ↗			↘ $f(0)-e$	

Để $m > f(1-x) - e^{x^2}$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;1)$ suy ra $m > f(1)-1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$. **B.** $m \geq f(1) - e$. **C.** $m > f(1) - e$. **D.** $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có: $m > f(x) - e^x = g(x), \forall x \in (-1;1)$ $(*)$.

Xét hàm số $g(x)$ trên $(-1;1)$ ta có: $g'(x) = f'(x) - e^x$. Ta có hàm số $y = e^x$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ nên: $e^x > e^{-1} = \dfrac{1}{e} > 0, \forall x \in (-1;1)$. Mà $f'(x) < 0, \forall x \in (-1;1)$.

Từ đó suy ra $g'(x) = f'(x) - e^x < 0, \forall x \in (-1;1)$. Nghĩa là hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: $m \geq g(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \dfrac{1}{e}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(2+x)(\sin x + 2) + 2019$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = -f'(1-x) + 2019$

$$= -\left[1-(1-x)\right].(2+1-x)\left[\sin(1-x)+2\right] - 2019 + 2019$$

$$= -x(3-x)\left[\sin(1-x)+2\right].$$

Mặt khác $\sin(1-x) + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow -x(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Dấu của y' là dấu của biểu thức $-x(3-x)$.

Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(1-x) + 2019x - 2018$ nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) + x.f'(x) = x(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = x.f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=\left[x.f(x)\right]'=f(x)+x.f'(x)=x(x-1)(x-2)$

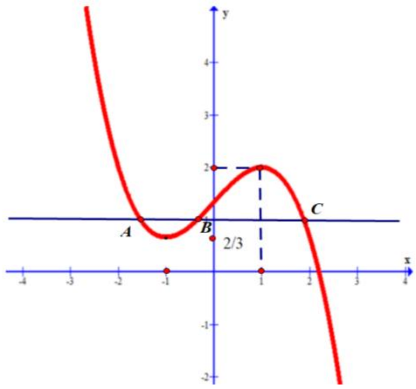
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x+2019)=1$ là

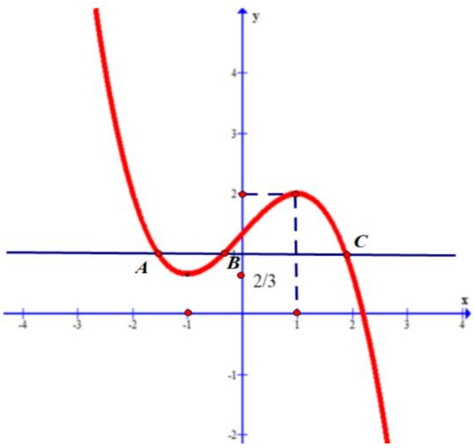


A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị, ta có đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt A,B,C.



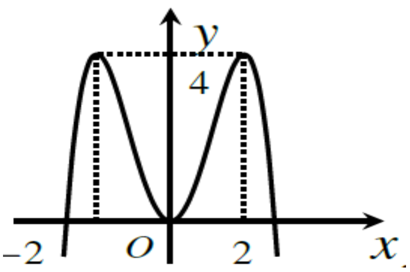
Do đó

$$f(x+2019)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2019=x_A\\x+2019=x_B\\x+2019=x_C\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_A-2019\\x=x_B-2019\\x=x_C-2019\end{array}\right.$$

Vậy số nghiệm thực của phương trình $f(x+2019)=1$ là 3.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=\log_2 m$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m<0$. **B.** $0<m<1;\ m=16$. **C.** $m<1;\ m=16$. **D.** $m=4$.

Lời giải

Chọn B

Số nghiệm của phương trình $f(x)=\log_2 m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ (hình vẽ) và đường thẳng $y=\log_2 m$.

Dựa vào hình vẽ ta có: phương trình $f(x)=\log_2 m$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 m=4\\ \log_2 m<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=16\\ 0<m<1\end{array}\right..$$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Bất phương trình $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$ khi

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. $m\ge f(1)-1$. **B.** $m\le f(1)-1$.

C. $m\ge f(2019)-\dfrac{1}{2019}$. **D.** $m\le f(2019)-\dfrac{1}{2019}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x.f(x)>mx+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in(1;2019)$

$\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{1}{x}>m$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Xét hàm số $h(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Ta có $h'(x)=f'(x)+\dfrac{1}{x^2}$.

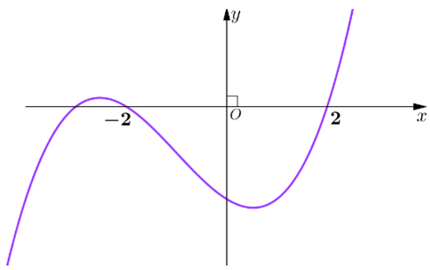
Vì $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in(1;2019)$ (dựa vào BBT) và $\dfrac{1}{x^2}>0$ với mọi $x\in(1;2019)$ nên $h'(x)>0$ với mọi $x\in(1;2019)$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2019)$

$\Rightarrow h(x)>h(1)$ với mọi $x\in(1;2019)$.

Mà $h(x)>m$ với mọi $x\in(1;2019)$ nên $m\le h(1)\Leftrightarrow m\le f(1)-1$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f(x) > x^2 - 2x + m$ đúng với mọi $x \in (1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m \le f(2)$. **B.** $m < f(1) - 1$. **C.** $m \ge f(2) - 1$. **D.** $m \ge f(1) + 1$.

Lời giải

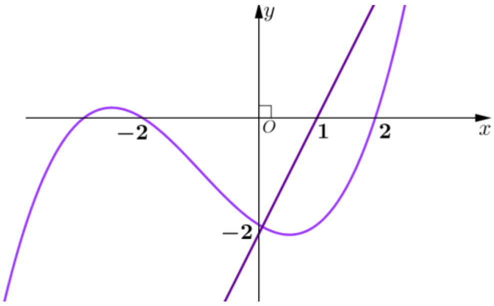
Chọn A

Ta có $f(x) > x^2 - 2x + m,\ \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow f(x) - x^2 + 2x > m,\ \forall x \in (1;2)$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^2 + 2x,\ x \in [1;2]$

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 = f'(x) - (2x - 2)$

Vẽ đường thẳng $y = 2x - 2$



Ta thấy $f'(x) < 2x - 2,\ \forall x \in (1;2)$ do đó $g'(x) < 0, \forall x \in (1;2)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Vậy $m < g(x),\ \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le g(2) = f(2) - 2^2 + 2.2 = f(2)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y	4	↘	1	↗	3	↘	1	↗	3

Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2;2)$ khi và chỉ khi:

A. $m \ge f(-2) - 3$. **B.** $m > f(2) - 3e^4$. **C.** $m \ge f(2) - 3e^4$. **D.** $m > f(-2) - 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) < 3e^{x+2} + m \Leftrightarrow f(x) - 3e^{x+2} < m$.

Đặt $h(x) = f(x) - 3e^{x+2} \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2}$.

Vì $\forall x \in (-2;2), f'(x) \le 3$ và $x \in (-2;2) \Rightarrow x + 2 \in (0;4) \Rightarrow 3e^{x+2} \in (3;3e^4)$

Nên $h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2} < 0, \forall x \in (-2;2) \Rightarrow f(2) - 3e^4 < h(x) < f(-2) - 3$.

Vậy bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2;2)$ khi và chỉ khi

$m > f(2) - 3e^4$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(0)-1$. **B.** $m > f(-1)-e$. **C.** $m > f(0)-1$. **D.** $m \geq f(-1)-e$.

Lời giải

Chọn C

Có $f(x) < e^{x^2} + m, \forall x \in (-1;1)$

$\Leftrightarrow m > g(x) = f(x) - e^{x^2}, \forall x \in (-1;1)$ (*)

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x.e^{x^2}$ có nghiệm $x = 0 \in (-1;1)$ và

$g'(x) > 0, \forall x \in (-1;0)$; $g'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$.

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	$f(0)-1$	↘	

Do đó $\max\limits_{(-1;1)} g(x) = g(0) = f(0) - 1$.

Ta được $(*) \Leftrightarrow m > f(0) - 1$.

Câu 16. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 2x + m > 0 \end{cases}$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$\log_2(2x+m) - \log_2 x^2 = x^2 - 4x - 2m - 1$.

$\Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 = \log_2(2x+m) + 4x + 2m + 1$.

$\Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 = \log_2(4x+2m) + 4x + 2m$ (1) .

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $D = (0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0$ $\forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên D.

Suy ra phương trình (1) tương đương với phương trình: $x^2 = 4x + 2m$ $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 2m = 0$ (2).

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2m > 0 \\ 4 > 0 \\ -2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0.$

Vậy có duy nhất số nguyên $m = -1$.

Câu 17. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+...+\dfrac{x^{2019}}{2019!}-\mathrm{e}^x & \text{khi } x\geq 0\\ -x^2-10x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương và chia hết cho 5 của tham số m để bất phương trình $m-f\left(x\right)\leq 0$ có nghiệm?

A. 25. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải.

Chọn D

+) Với $x\geq 0$: $f'\left(x\right)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^{2018}}{2018!}-\mathrm{e}^x$; $f''\left(x\right)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^{2017}}{2017!}-\mathrm{e}^x$;...

$f^{(2019)}\left(x\right)=1-\mathrm{e}^x\leq 0,\ \forall x\geq 0\ \Rightarrow f^{(2018)}\left(x\right)\leq f^{(2018)}\left(0\right)=0,\ \forall x\geq 0$;...

$\Rightarrow f'\left(x\right)\leq 0,\ \forall x\geq 0\ \Rightarrow f\left(x\right)\leq f\left(0\right)=0,\ \forall x\geq 0$.

Nên $\forall m\in\mathbb{Z}_+^*$ thì $m-f\left(x\right)>0,\forall x\geq 0$.

Do đó bất phương trình $m-f\left(x\right)\leq 0$ vô nghiệm trên $\left[0;+\infty\right)$, $\forall m\in\mathbb{Z}_+^*$.

+) Với $x<0$: Bpt: $m+x^2+10x\leq 0\Leftrightarrow x^2+10x\leq -m$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		0
x^2+10x	$+\infty$	$\searrow$	-25	$\nearrow$	0

Bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -m\geq -25\Leftrightarrow m\leq 25\Rightarrow m\in\left\{5;10;15;20;25\right\}$.

Câu 18. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-2019;2019\right]$ để bất phương trình $\left(1-m^3\right)x^3+3\left(2-m^3\right)x^2+\left(13-m-3m^3\right)x+10-m-m^3\geq 0$ đúng với mọi $x\in\left[1;3\right]$. Số phần tử của tập S là

A. 4038. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn B

$\left(1-m^3\right)x^3+3\left(2-m^3\right)x^2+\left(13-m-3m^3\right)x+10-m-m^3\geq 0,\forall x\in\left[1;3\right]$.

$\Leftrightarrow\left(x+2\right)^3+x+2\geq\left[m\left(x+1\right)\right]^3+m\left(x+1\right),\forall x\in\left[1;3\right]$. $\quad(*)$

Xét: $f\left(t\right)=t^3+t,\forall t\in\mathbb{R}$, ta có $f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$.

Hàm số $f\left(t\right)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases}u=x+2\\ v=m\left(x+1\right)\end{cases}$.

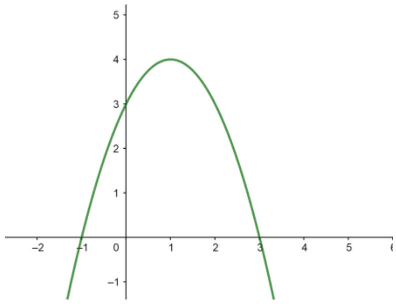
$(*)\Leftrightarrow f\left(u\right)\geq f\left(v\right)\Leftrightarrow u\geq v\Leftrightarrow x+2\geq m\left(x+1\right)$.

$ycbt\Leftrightarrow m\leq\dfrac{x+2}{x+1},\forall x\in\left[1;3\right]\Leftrightarrow m\leq\underset{x\in[1;3]}{Min}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)\Leftrightarrow m\leq\dfrac{5}{4}$.

Mà $\begin{cases} m \in [-2019;2019] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $\begin{cases} m \in \left[-2019;\dfrac{5}{4}\right] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-2019;-2018;...,-1;0;1\}$.

Vậy có 2021 giá trị cần tìm.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(2x^4 - 1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = \left(f(2x^4 - 1)\right)' = 8x^3 f'(2x^4 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 0 \\ f'(2x^4 - 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^4 - 1 = -1 \\ 2x^4 - 1 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[4]{2} \\ x = -\sqrt[4]{2} \end{array}\right..$$

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ và dấu của $g'(x)$, ta có BBT như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{2}$		0		$\sqrt[4]{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\sqrt[4]{2})$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(\sqrt[4]{2})$	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-\sqrt[4]{2})$ và $(0;\sqrt[4]{2})$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m < 2^{2019}$. **B.** $m \le 2^{2018}$. **C.** $m < 2^{2018}$. **D.** $m \le 2^{2019}$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x) = -2\sin 2x = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $f''(x) = -4\cos 2x = 2\cos\left(2x + 2\dfrac{\pi}{2}\right)$;...

$f^{(n)}(x) = 2^n\cos\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. Do đó $f^{(2019)}(x) = 2^{2019}\cos\left(2x + 2019\dfrac{\pi}{2}\right) = 2^{2019}\sin 2x$.

$x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow 2x \in \left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin 2x > \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$

$\Rightarrow f^{(2019)}(x) > 2^{2018}, \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

Do đó bất phương trình $f^{(2019)}(x) > m$ đúng với mọi $x \in \left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m \le 2^{2018}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $m + x^2 \le f(x) + \dfrac{1}{3}x^3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;3)$ khi và chỉ khi

x	-1		1		3
y''		$+$	0	$-$	
y'	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

A. $m < f(0)$. **B.** $m \le f(3)$. **C.** $m \le f(0)$. **D.** $m < f(1) - \dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$m + x^2 \le f(x) + \dfrac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow f(x) + \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 \ge m$.

Đặt $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{3}x^3 - x^2$. Theo bài ra, ta có: $g(x) \ge m, \forall x \in (0;3)$ (*).

Ta có $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x > 1 + x^2 - 2x = (x-1)^2 \ge 0, \forall x \in (0;3)$.

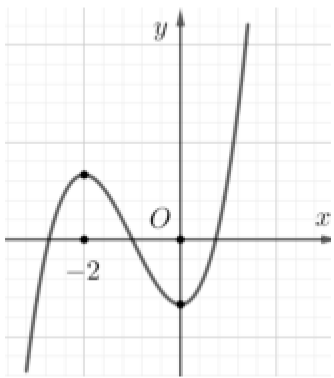
Do đó $g(0) < g(x) < g(3), \forall x \in (0;3)$. Mà: $g(0) = f(0); g(3) = f(3)$.

$\Rightarrow f(0) < g(x) < f(3), \forall x \in (0;3)$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow m \le f(0)$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn



$2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$.

A. $m\in\left(2\sqrt{6};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)$.
B. $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.
C. $m\in\left[2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.
D. $m\in\left(3\sqrt{3};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{6}\right\}$.

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019 \quad (1)$. Điều kiện: $x\ge -1$.

Đặt $\begin{cases}a=2x+\sqrt{x+1}\\ b=2+\sqrt{x+1}\end{cases}\Rightarrow a-b=2(x-1)\Rightarrow x-1=\frac{a-b}{2}$.

Bất phương trình (1) thành:

$$2018^a-2018^b+2019\frac{a-b}{2}\le 0\Leftrightarrow 2(2018)^a+2019a\le 2(2018)^b+2019b \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t)=2(2018)^t+2019t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=2.2018^t\ln 2018+2019>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow f(a)\le f(b)\Leftrightarrow a\le b\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Với $-1\le x\le 1$, ta có:

$$5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$$

N.C.Đ

$$\Leftrightarrow 3(x+2)^2+2(x^2+2)=m(x+2)\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow 3\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}+2\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2}=m \quad (3).$$

Đặt $t=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ với $x\in[-1;1]$.

$t'=\frac{2-2x}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}\ge 0,\forall x\in[-1;1]$ nên hàm t đồng biến trên $[-1;1]$, suy ra $\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{3}$.

Do hàm t đơn điệu trên $[-1;1]$ nên ứng với mỗi giá trị của $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$ ta tìm được đúng một giá trị của $x\in[-1;1]$ và ngược lại.

Viết lại phương trình (3) theo ẩn t:

$3t+\frac{2}{t}=m \quad (4)$ với $\frac{1}{\sqrt{3}}\le t\le\sqrt{3}$.

(3) có 2 nghiệm thực phân biệt $x\in[-1;1]$ $\Leftrightarrow(4)$ có 2 nghiệm thực phân biệt $t\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$ $(*)$.

Xét hàm số $g(t)=3t+\frac{2}{t}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

$g'(t)=3-\frac{2}{t^2}$. Cho $g'(t)=0\Leftrightarrow t^2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{2}{3}}\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right]$.

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{3}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có (*) $\Leftrightarrow m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$

Vậy $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 23. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\left|2^{x+1}-8\right|=\frac{1}{2}x^2+m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 8. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với: $m=\left|2^{x+1}-8\right|-\frac{1}{2}x^2 (*)$.

Xét hàm số:

$$f(x)=\left|2^{x+1}-8\right|-\frac{1}{2}x^2=\begin{cases}2^{x+1}-8-\frac{1}{2}x^2 & (x\ge 2)\\ 8-2^{x+1}-\frac{1}{2}x^2 & (x<2)\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g(x)=2^{x+1}\ln 2-x & (x>2)\\ h(x)=-2^{x+1}\ln 2-x & (x<2)\end{cases}.$$

(Hàm số không có đạo hàm tại điểm x = 2).

Ta có:

- $g'(x)=2^{x+1}\ln^2 2-1>2^{2+1}\ln^2 2-1>0,\forall x>2\Rightarrow g(x)>g(2)=2^3\ln 2>0,\forall x>2$ (1).
- $h'(x)=-2^{x+1}\ln^2 2-1<0,\forall x<2$ và $\begin{cases}h(-1)=-\ln 2+1>0\\ h(0)=-2\ln 2<0\end{cases}\Rightarrow h(0).h(-1)<0$ do đó $h(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0\in(-1;0)$. Dùng máy tính tìm được $x_0\approx -0,797563$ lưu nghiệm này vào biến nhớ A, ta có $f\left(x_0\right)=f(A)\approx 6,53131$.

Vậy ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0\in(-1;0)$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(x_0\right)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi: $-2<m<f\left(x_0\right)\approx 6,53131$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$.

Có tất cả 8 số nguyên thoả mãn yêu cầu.

Câu 24. Cho bất phương trình $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x>1$.

A. $m \geq \frac{1}{2}$. **B.** $m>1$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}+x^2\left(x^2-1\right)>1-m$

$\Leftrightarrow \left(x^4+x^2+m\right)+\sqrt[3]{x^4+x^2+m}-\sqrt[3]{2x^2+1}-\left(2x^2+1\right)>0$

$\Leftrightarrow \left(x^4+x^2+m\right)+\sqrt[3]{x^4+x^2+m}>\sqrt[3]{2x^2+1}+\left(2x^2+1\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\ t\in\mathbb{R}$.

Có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (1) có dạng $f\left(\sqrt[3]{x^4+x^2+m}\right)>f\left(\sqrt[3]{2x^2+1}\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4+x^2+m}>\sqrt[3]{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow x^4+x^2+m>2x^2+1 \Leftrightarrow m>-x^4+x^2+1$.

Xét hàm số $g(x)=-x^4+x^2+1$ với $x\in(1;+\infty)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x>1 \Leftrightarrow m>g(x), \forall x>1$.

$g'(x)=-4x^3+2x=-2x\left(2x^2-1\right)<0,\ \forall x>1$.

Bảng biến thiên:

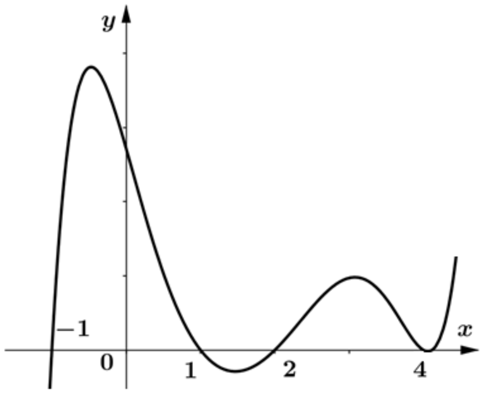
x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	1	$-\infty$

Tập giá trị của hàm số $g(x)$ trên $(1;+\infty)$ là $(-\infty;1)$.

Vậy $m>g(x), \forall x>1 \Leftrightarrow m\geq 1$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.



Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$.

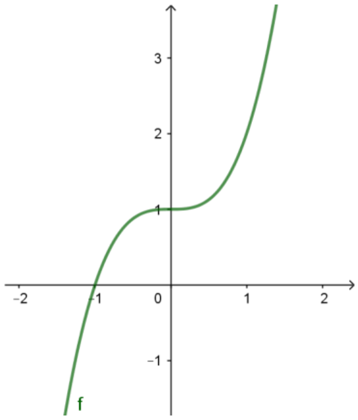
Xét hàm số $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$.

Ta có $g'(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}.(-2).f'(1-2x).\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\ln 2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}.f'(1-2x)$.

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x < -1 \\ 1 < 1-2x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -\dfrac{1}{2} < x < 0 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Chọn **D.**

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của n để phương trình sau có nghiệm $x \in \mathbb{R}$. $f\left(-16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8\right) = f\left(n(n+1)\right)$



A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$f\left(-16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8\right) = f\left(n(n+1)\right) \Leftrightarrow -16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8 = n(n+1)$

Ta xét

$-16\sin^2 x + 6\sin 2x + 8 = n(n+1)$

$\Leftrightarrow -8(1-\cos 2x) + 6\sin 2x + 8 - n(n+1) = 0$

$\Leftrightarrow 8\cos 2x + 6\sin 2x - n(n+1) = 0$

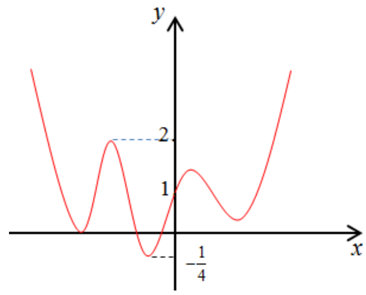
Để phương trình có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ thì

$8^2+6^2 \ge \left(n^2+n\right)^2 \Leftrightarrow \left(n^2+n\right)^2 \le 100 \Leftrightarrow -10 \le n^2+n \le 10$

$\Leftrightarrow n^2+n \le 10 \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2} \le n \le \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$ (do $n^2+n \ge -10, \forall n$).

Vì n nguyên nên $n \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 27 Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây .



Số nghiệm của phương trình $\dfrac{f^3(x)+3f^2(x)+4f(x)+2}{\sqrt{3f(x)+1}} = 3f(x)+2$ là:

A. 6 . **B.** 9 . **C.** 7 . **D.** 8 .

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)$ đưa phương trình về hàm đặc trưng $(t+1)^3+(t+1)=\left(\sqrt{3t+1}\right)^3+\sqrt{3t+1}$.

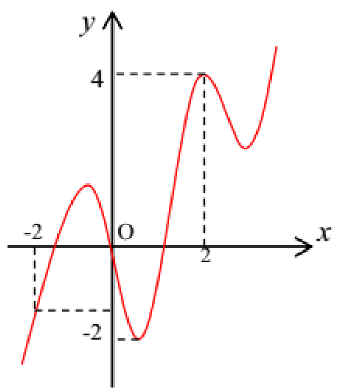
Xét hàm đặc trưng $f(x)=x^3+x$ đồng biến R nên ta được $t+1=\sqrt{3t+1} \Leftrightarrow t=0; t=1$.

Với $t=0$ ta có $f(x)=0$ từ đồ thị ta được số nghiệm là 3.

Với $t=1$ ta có $f(x)=1$ từ đồ thị ta được số nghiệm là 6.

Vậy phương trình có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^3-3x^2+2\right)=m^2-3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;\ 3)$ là



A. $[-1;1)\cup(2;4]$. **B.** $(1;\ 2)\cup[4;\ +\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup(2;4)$. **D.** $(-1;1]\cup[2;4)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3-3x^2+2 \Rightarrow t'=3x^2-6x$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;3) \\ x = 2 \in [1;3) \end{array}\right.$.

Ta có: $t(2) = -2;\ t(1) = 0;\ t(3) = 2 \Rightarrow t \in [-2;2)$.

Khi đó $f\left(x^3 - 3x^2 + 2\right) = m^2 - 3m$ (1) trở thành: $f(t) = m^2 - 3m$ (2)

Phương trình (1) có nghiệm thuộc $[1;\ 3)$ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [-2;2)$.

Dựa vào đồ thị ta có $-2 \le m^2 - 3m < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m^2 - 3m + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 1 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \le 1 \\ 2 \le m < 4 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc $[1;\ 3)$ khi $m \in (-1;1] \cup [2;4)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = -x^2 - 2\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(1)$. **B.** $m \ge f(0)$. **C.** $m > f(0)$. **D.** $m > f(1)$.

Lời giải

Chọn D

$f'(x) = -x^2 - 2 < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(0) > f(1)$

Bảng biến thiên

x	0	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$f(0)$ ↘	$f(1)$

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $f(x) < m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1) \Leftrightarrow$ $m > f(1)$.

Câu 30. Cho cấp số cộng (a_n), cấp số nhân (b_n) thoả mãn $a_2 > a_1 \ge 0$, $b_2 > b_1 \ge 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$

A. 17. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ với $x \in [0, +\infty)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ từ đó ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[0, +\infty)$ như sau:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Vì $a_2 > 0$ nên $f(a_2) \ge -2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) + 2 \ge 0$ (1)

Giả sử $a_1 \ge 1$, vì $f(x)$ đồng biến trên $[1,+\infty)$ nên $f(a_2) > f(a_1)$ suy ra $f(a_1)+2 > f(a_1)$ vô lý. Vậy $a_1 \in [0,1)$ do đó $f(a_1) \le 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} f(a_1)=0 \\ f(a_2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số cộng (a_n) là $a_n = (n-1)$.

Một cách tương tự, đặt $t_1 = \log_2 b_1$ và $t_2 = \log_2 b_2$ suy ra $f(t_2)+2 = f(t_1)$, vì $1 \le b_1 < b_2$ nên $0 \le t_1 < t_2$,

theo lập luận trên ta có:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \\ \log_2 b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số nhân (b_n) là $b_n = 2^{n-1}$.

Do đó $b_n > 2019a_n \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2019(n-1)$ (*). Trong 4 đáp án $n = 16$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa (*).

Câu 31. Cho bất phương trình $m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \ge 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-9;9]$ để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1]$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 10.

N.C.Đ

Lời giải

Chọn B

• Bpt: $m\sqrt{1-x} + 12\sqrt{1-x^2} \ge 16x + 3m\sqrt{1+x} + 2m + 15$

$\Leftrightarrow m\left(\sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x} - 2\right) \ge 2\left(8x - 6\sqrt{1-x^2}\right) + 15$ (1).

• Đặt $t = \sqrt{1-x} - 3\sqrt{1+x}$ với $x \in [-1;1]$.

$$t' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{3}{2\sqrt{1+x}} < 0 \quad \forall x \in (-1;1).$$

Suy ra t nghịch biến trên $[-1;1]$.

Nên $t(1) \le t \le t(-1) \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

• Ta có $t^2 = 8x + 10 - 6\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5 = 2\left(8x - 6\sqrt{1-x^2}\right) + 15$.

Khi đó (1) trở thành: $m(t-2) \ge 2t^2 - 5$ với $t \in \left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{2t^2-5}{t-2}$ (2) với $t \in \left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $t \in \left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ nên $(t-2) < 0$).

• Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2t^2-5}{t-2}$ trên đoạn $\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$$f'(t) = \frac{4t(t-2) - (2t^2-5)}{(t-2)^2} = \frac{2t^2 - 8t + 5}{(t-2)^2}.$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{4+\sqrt{6}}{2} \quad \text{(loại)} \\ t=\dfrac{4-\sqrt{6}}{2} \quad \text{(thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

$$f(-3\sqrt{2})=\frac{62-93\sqrt{2}}{14}\approx -4,97;\ f(\sqrt{2})=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\approx 1,7;\ f\left(\frac{4-\sqrt{6}}{2}\right)=8-2\sqrt{6}\approx 3,1$$

(1) nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1] \Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $t\in\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$$\Leftrightarrow m\le \min_{\left[-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right]} f(t)=f\left(-3\sqrt{2}\right)=\frac{62-93\sqrt{2}}{14}\approx -4,97.$$

Kết hợp với điều kiện bài toán ta có: $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-9;9] \\ m\le \dfrac{62-93\sqrt{2}}{14}\approx -4,97 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\{-9;-8;-7;-6;-5\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=4a-\dfrac{1}{b}-\sqrt{2}$ bằng

A. -4. **B.** -5. **C.** -3. **D.** 3.

N.C.Đ

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1\le \sin x\le 1 \Leftrightarrow 0\le 1+\sin x\le 2 \Leftrightarrow 0\le \sqrt{1+\sin x}\le \sqrt{2}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}$. Ta có $0\le t\le \sqrt{2}$ và $\sin x=t^2-1$.

Khi đó phương trình có dạng: $m+\sqrt{m+1+t}=t^2-1 \Leftrightarrow m+1+t+\sqrt{m+1+t}=t^2+t\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t,\ t>0$.

Ta có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t>0$.

Do đó hàm số $f(t)=t^2+t$ luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì thế $(*) \Leftrightarrow t=\sqrt{m+1+t} \Leftrightarrow m=t^2-t-1\ (**)$

Xét hàm số $g(t)=t^2-t-1,\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$g'(t)=2t-1$.

$g'(t)=0 \Leftrightarrow 2t-1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)=t^2-t-1,\ t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$1-\sqrt{2}$

Phương trình đề bài có nghiệm $\Leftrightarrow (**)$ có nghiệm $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow -\frac{5}{4}\le m\le 1-\sqrt{2}$.

Vậy $m\in\left[-\frac{5}{4};1-\sqrt{2}\right]$ nên $a=-\frac{5}{4};b=1-\sqrt{2}\Rightarrow T=-4$.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right)=x^3-m$ có nghiệm $x\in[1;2]$ biết $f(x)=x^5+3x^3-4m$.

A. 16. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt[3]{f(x)+m}\to t^3=f(x)+m$. Ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ t\ =f(x)+m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(t)=x^3-m \\ f(x)=t^3-m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(t)+t^3=f(x)+x^3 (*) \\ f(x)\quad =t^3-m \end{cases}.$$

Vì $f(x)=x^5+3x^3-4m, f'(x)=5x^4+9x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)=f(x)+x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó: $(*)\Leftrightarrow x=t$.

Khi đó ta được: $f(x)=x^3-m=x^5+3x^3-4m\Leftrightarrow x^5+2x^3=3m\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{3}x^3=m(**)$

.

Dễ thấy $g(x)=\frac{1}{3}x^5+\frac{2}{3}x^3$ đồng biến trên $[1;2]$ nên phương trình (**) có nghiệm trên đoạn $[1;2]$ khi và chỉ khi: $g(1)\le m\le g(2)\Leftrightarrow 1\le m\le 16$.

Vì m thuộc số nguyên nên có 16 số thỏa mãn bài toán.

Câu 34. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $S=[a;b]$. Tính $a\sqrt{2}+8b$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét bất phương trình: $x^4+1-x^2+x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0\ (*)$

$(*)$ xác định khi $2mx^4+2m\ge 0\Leftrightarrow 2m\left(x^4+1\right)\ge 0\Leftrightarrow 2m\ge 0\Leftrightarrow m\ge 0$.

Xét $x \ge 0$: $\begin{cases} x^4+1-x^2=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0 \\ x\sqrt{2mx^4+2m}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow (*)$ luôn đúng.

Xét $x<0$:

$(*)$ trở thành: $\sqrt{2m} \le \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}} - \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x}$.

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$, $t'=\dfrac{1-x^4}{\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}}$; $t'=0 \Leftrightarrow x=-1$

BBT

x	$-\infty$		-1		0
t'		$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	0

$\Rightarrow t \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$.

$(*)$ trở thành: $\sqrt{2m} \le f(t)$ với $f(t)=t-\dfrac{1}{t}$

$f'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}>0,\ t\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \sqrt{2m} \le \min\limits_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)} f(t) \Leftrightarrow \sqrt{2m} \le f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2m} \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{4}$.

Do đó $m \in \left[0;\dfrac{1}{4}\right] \Rightarrow a=0, b=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $a\sqrt{2}+8b=2$.

Câu 35. Biết rằng phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \ne 0, b \ne 0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực?

$$\left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)^2-2\left(6ax^2+3bx+c\right).\left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)=0$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là x_1, x_2, x_3, x_4.

Suy ra: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

$$\Rightarrow f'(x)=a(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Ta có: $g(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2-f''(x_i).f(x_i)=\left[f'(x_i)\right]^2>0,\ \forall x_i$.

$\Rightarrow g(x)=0$ không có nghiệm x_i.

Xét $x\neq x_i$, ta có $f'(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}\right)=f(x).\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{1}{x-x_i}$.

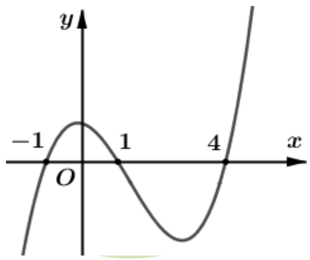
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}\Rightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x-x_i}\right)'.$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=-\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{(x-x_i)^2}<0,\ \forall x \text{ hay } \left[f'(x)\right]^2-f''(x).f(x)>0,\ \forall x\neq x_i.$$

Vậy trong mọi trường hợp phương trình $g(x)=0$ đều vô nghiệm.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)=x^3-4x^2-x+4$ có đồ thị như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình sau có bốn nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$

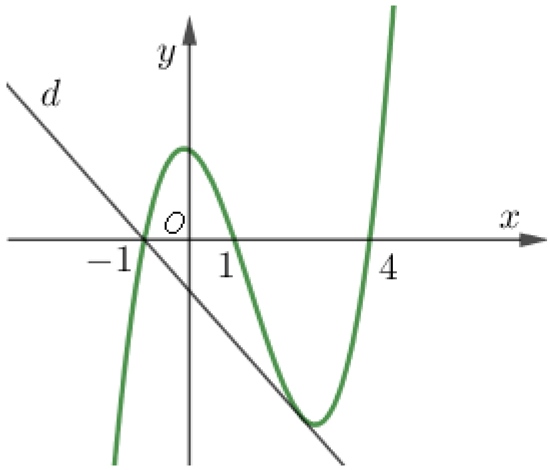
$$2019f\left(\sqrt{15x^2-30x+16}\right)-m\sqrt{15x^2-30x+16}-m=0$$



A. 4541. **B.** 4542. **C.** 4543. **D.** 4540.

Lời giải

Chọn B



Đặt $t(x)=\sqrt{15x^2-30x+16}\Rightarrow t'(x)=\dfrac{15x-15}{\sqrt{15x^2-30x+16}}$, $t'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		2
$t'(x)$		−	0	+	
$t(x)$	4	↘	1	↗	4

Vậy $1 \le t(x) \le 4$ và mỗi $t(x) \in (1;4]$, tồn tại hai giá trị của $x \in [0;2]$

Phương trình trở thành:

$2019(t^3 - 4t^2 - t + 4) - mt - m = 0 \Leftrightarrow 2019(t^3 - 4t^2 - t + 4) = (t+1)m$

Hay $\dfrac{t^3 - 4t^2 - t + 4}{t+1} = \dfrac{m}{2109} \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = \dfrac{m}{2019}$ (*) (vì $t+1>0$). Phương trình đã cho có 4 nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $t \in (1;4]$

Xét hàm $g(t) = t^2 - 5t + 4$ trên $[1;4]$ ta được $-\dfrac{9}{4} < \dfrac{m}{2019} < 0 \Leftrightarrow -4542,75 < m < 0$.

Vì $m \in Z$ nên có 4542 giá trị thỏa mãn.

Câu 37. Có bao nhiêu số nguyên $x \in (-100;100)$ thỏa mãn bất phương trình

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2019}}{2019!}\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^{2019}}{2019!}\right) < 1.$$

A. 199 **B.** 0 **C.** 99 **D.** 198

Lời giải

Chọn D

Đặt

$$\begin{cases} u(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2019}}{2019!} \\ v(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots - \dfrac{x^{2019}}{2019!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2018}}{2018!} = u(x) - \dfrac{x^{2019}}{2019!} \\ v'(x) = -1 + x - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots - \dfrac{x^{2018}}{2018!} = -v(x) - \dfrac{x^{2019}}{2019!} \end{cases}$$

Và đặt $f(x) = u(x).v(x)$. Ta có

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = \left(u(x) - \frac{x^{2019}}{2019!}\right)v(x) + \left(-v(x) - \frac{x^{2019}}{2019!}\right)u(x)$$

$$= -\frac{x^{2019}}{2019!}(u(x) + v(x))$$

Nhận xét: $u(x) + v(x) = 2\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2018}}{2018!}\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra

Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x^{2019}}{2019!}(u(x) + v(x)) = 0 \Leftrightarrow x^{2019} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ là

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	-	
y		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ne 0 \Rightarrow x \in \{-99, \ldots, -1, 1, \ldots, 99\}$. Có tất cả 198 số nguyên thoả mãn.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$. Số phần tử của S là?

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)=\sqrt[3]{7+3x}-\sqrt[3]{7-3x}+2019x$ là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<-f\left(2x-2x^2-5\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)<f\left(2x^2-2x+5\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|x^3-2x^2+3x-m\right|<2x^2-2x+5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2+3x-m<2x^2-2x+5 \\ x^3-2x^2+3x-m>-2x^2+2x-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-4x^2+5x-5<m \\ x^3+x+5>m \end{cases}$$

Xét $g(x)=x^3-4x^2+5x-5$ và $h(x)=x^3+x+5$ trên $(0;1)$ có bảng biến thiên là

x	0	1
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	-5 ↗	-3

x	0	1
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	5 ↗	7

Từ bảng biến thiên suy ra $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m\geq -3 \\ m\leq 5 \end{cases}\Rightarrow -3\leq m\leq 5$$