

**Skript zur Vorlesung**

# **Verkehrsdynamik und -simulation**

**Dr. Martin Treiber**



Technische Universität Dresden  
Institut für Wirtschaft und Verkehr  
Lehrstuhl für Verkehrsmodellierung und -ökonometrie

## Skript zur Vorlesung

# Verkehrsdynamik und -simulation

Dr. Martin Treiber

Sommersemester 2018

© 2004-2018 Martin Treiber.

Dieses Skript darf nur zu Zwecken der Vorbereitung auf Vorlesung, Übungen oder Klausur des Faches “Verkehrsmodellierung und -simulation” der TU Dresden vervielfältigt oder an Kommiliton(inn)en weitergegeben werden. Jede darüber hinaus gehende Vervielfältigung oder Weitergabe des Skripts, oder von Teilen davon, ist nicht gestattet.

Dieses Skript ist der Vorläufer des Buches

M. Treiber und A. Kesting,  
Verkehrsdynamik und -simulation: Daten, Modelle und Anwendungen der Verkehrsflussdynamik  
Springer-Lehrbuch, 2010, XII, 368 S. 176 Abb., 56 in Farbe., Softcover  
ISBN: 978-3-642-05227-9.

Eine aktualisierte und erweiterte Fassung liefert das englische Lehrbuch

M. Treiber und A. Kesting,  
Traffic Flow Dynamics Springer, 2013, XII+503 pages, 194 illus. (54 in color), hardcover  
ISBN: 978-3-642-32459-8.

Einiges Material, wie das über Fußgängerströme,  
ist aber noch nicht in den Büchern zu finden.

# Contents

<b>1. Allgemeines</b>	<b>1</b>
1.1. Abgrenzung von verwandten Gebieten . . . . .	2
<b>I. Verkehrsdaten: Messverfahren und Datenkategorien</b>	<b>4</b>
<b>2. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>3. Trajektoriendaten und Floating-Car-Daten</b>	<b>7</b>
<b>4. Querschnittsdaten</b>	<b>10</b>
4.1. Mikroskopische Auswertung: Einzelfahrzeugdaten . . . . .	10
4.2. Aggregierung: Makroskopische Daten . . . . .	12
4.3. Schätzung der tatsächlichen Geschwindigkeit und de Dichte . . . . .	13
4.3.1. Verkehrsdichte . . . . .	14
4.3.2. Räumliches (“momentanes”) Geschwindigkeitsmittel. . . . .	18
4.3.3. Geschwindigkeit aus Einfach-Schleifendetektoren . . . . .	19
<b>5. Darstellung von Querschnittsdaten</b>	<b>21</b>
5.1. Zeitreihen . . . . .	21
5.2. Kumulierte Fahrzeugzahlen . . . . .	21
5.3. Geschwindigkeits-Dichte-Relation . . . . .	23
5.4. Fluss-Dichte-Diagramm . . . . .	25
<b>6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion</b>	<b>31</b>
6.1. Raumzeitliche Darstellungen von dynamischen Größen . . . . .	31
6.2. Datenfusion . . . . .	36
6.2.1. Gewichtung unterschiedlich zuverlässiger Daten . . . . .	36
<b>II. Modellierung der Verkehrsflussdynamik auf Richtungsfahrbahnen</b>	<b>40</b>
<b>7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung</b>	<b>41</b>
7.1. Historie und Abgrenzung von verwandten Gebieten . . . . .	41
7.2. Modellkategorien . . . . .	42
7.2.1. Inhaltliche Einteilung . . . . .	42
7.2.2. Mathematische Einteilung . . . . .	45
7.2.3. Einteilung gemäß weiterer Kriterien . . . . .	46

## Contents

7.2.4. Nichtmotorisierter Verkehr . . . . .	49
<b>8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung</b>	<b>51</b>
8.1. Verkehrsdichte und hydrodynamische Fluss-Dichte-Beziehung . . . . .	51
8.2. Die Kontinuitätsgleichung für verschiedene Streckenkonfigurationen . . . . .	53
8.2.1. Homogene Strecke . . . . .	53
8.2.2. Bereich von Zu- oder Abfahrten . . . . .	54
8.2.3. Zu- oder Abfahrten und Änderungen der Zahl der Fahrstreifen .	55
8.3. Diskussion der Kontinuitätsgleichung . . . . .	57
<b>9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell</b>	<b>60</b>
9.1. Ausbreitung kontinuierlicher Dichteschwankungen . . . . .	61
9.2. Ausbreitung von Schockwellen . . . . .	62
9.2.1. Zusammenfassung: Fahrzeug- und Ausbreitungsgeschwindigkeiten	66
9.3. Das LWR mit dreieckigem Fundamentaldiagramm . . . . .	68
9.3.1. Modellparameter und Eigenschaften . . . . .	68
9.3.2. Modellierung homogener und inhomogener Richtungsfahrbahnen	70
9.3.3. Beispiele . . . . .	77
9.3.4. Modellierung von Netzen im Section-Based-Model . . . . .	83
9.4. Diffusion und die Burgers-Gleichung . . . . .	85
<b>10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit</b>	<b>88</b>
10.1. Eigenschaften der Beschleunigungsfunktion . . . . .	90
10.2. Ein Beispiel: Das Payne-Modell . . . . .	92
10.3. Einheitliche Form der Makromodelle . . . . .	94
10.4. Übersicht über einige Makromodelle . . . . .	99
10.5. Entstehung von Stop-and-Go-Wellen . . . . .	100
10.6. Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	101
<b>11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle</b>	<b>104</b>
11.1. Ideale <i>vs.</i> reale Fahrer . . . . .	105
11.2. Modellierung von Beschleunigungs-, Folge- und Bremsstrategien . . . . .	106
11.2.1. Beispiel einer Fahrzeugfolgestrategie . . . . .	107
11.3. Beispiele von Fahrzeugfolgemodellen . . . . .	108
11.3.1. Das Optimal Velocity Model . . . . .	108
11.3.2. Das Newell Modell . . . . .	108
11.3.3. Das Gipps Modell . . . . .	109
11.3.4. Das Velocity Difference Modell . . . . .	110
11.3.5. Das Intelligent Driver Modell . . . . .	110
11.4. Fundamentaldiagramme von Mikromodellen . . . . .	111
11.5. Stabilität und Hysteresis von Mikromodellen . . . . .	115
11.6. Modellierung menschlichen Fahrverhaltens . . . . .	115
11.6.1. Modellierung der Reaktionszeit . . . . .	119
11.6.2. Modellierung von Schätzfehlern und unvollkommener Fahrweise .	120

## Contents

11.6.3. Mehrere Vorderfahrzeuge: Das Human Driver Model . . . . .	121
11.7. Kalibrierung von Fahrzeugfolgemodellen . . . . .	122
<b>12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten</b>	<b>123</b>
12.1. Allgemeines . . . . .	123
12.2. Das Nagel-Schreckenberg-Modell . . . . .	124
12.3. Zelluläre Automaten und Fahrzeugfolgemodelle im Vergleich . . . . .	125
<b>13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen</b>	<b>128</b>
13.1. Zeitlückenverteilung . . . . .	129
13.2. Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines Fahrstreifens . . . . .	130
13.3. Auswirkungen heterogenen Verkehrs im Fundamentaldiagramm . . . . .	131
13.4. Modelle für die Querdynamik (Fahrstreifenwechsel) . . . . .	133
13.4.1. Allgemeines zur Modellierung der Querdynamik . . . . .	133
13.4.2. Gap-acceptance Modelle . . . . .	135
13.4.3. Das Fahrstreifen-Wechselmodell MOBIL . . . . .	136
13.4.4. Bemerkung zum Thema Anreizkriterium zum Fahrstreifenwechseln	137
<b>14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger</b>	<b>139</b>
14.1. Makroskopische Modellierung . . . . .	139
14.1.1. Makroskopische Variable . . . . .	141
14.1.2. Fundamentaldiagramm . . . . .	142
14.2. Mikroskopische Modellierung: Das <i>Social-Force Model</i> . . . . .	143
14.2.1. Freie Kraft . . . . .	144
14.2.2. Wechselwirkungskraft durch andere Fußgänger . . . . .	145
14.2.3. Wechselwirkungskraft durch feste Hindernisse . . . . .	152
14.2.4. Modellparameter und Fundamentaldiagramm . . . . .	155
<b>III. Anwendungen der Verkehrsmodellierung</b>	<b>159</b>
<b>15. Allgemeines</b>	<b>160</b>
<b>16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose</b>	<b>161</b>
16.1. Wie entsteht ein Stau? . . . . .	161
16.2. Klassifikation von Staus nach ihrer raumzeitlichen Dynamik . . . . .	163
16.2.1. Der Stau aus dem Nichts . . . . .	165
16.3. Analyse und Kurzfrist-Prognose . . . . .	166
<b>17. Schätzung der Reisezeiten</b>	<b>169</b>
17.1. Modellgestützte Reisezeitschätzung . . . . .	169
17.1.1. Mikroskopische Bestimmung . . . . .	170
17.1.2. Makroskopische Bestimmung . . . . .	170
17.2. Direkte empirische Bestimmung . . . . .	171
17.2.1. Problemformulierung . . . . .	171

## **Contents**

17.2.2. Durchführung . . . . .	171
17.2.3. Auswertung . . . . .	173
<b>18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen</b>	<b>175</b>
18.1. Übersicht . . . . .	175
18.1.1. Makroskopischen Ansätze . . . . .	175
18.1.2. Mikroskopischen Ansätze . . . . .	176
18.2. Das physikbasierte Modell . . . . .	176
18.3. Fahrwiderstand . . . . .	177
18.4. Motorleistung . . . . .	178
18.5. Verbrauchsrate . . . . .	179
18.6. Motorkennfeld und instantane Verbrauchs- und Emissionsraten . . . . .	181
18.7. Auswertung . . . . .	182
18.7.1. Ermittlung des Gesamt-Treibstoffverbrauchs einer Verkehrssituation	184
18.8. Ermittlung des Treibstoffverbrauchs mit Makromodellen . . . . .	186
<b>19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses</b>	<b>188</b>
19.1. Geschwindigkeitsbeschränkungen . . . . .	189
19.2. Zuflussdosierung . . . . .	191
19.3. Effizientes Fahrverhalten und automatische Temporegler . . . . .	192
19.4. Überholverbot für LKW und andere lokale Verkehrsregeln . . . . .	195
19.5. Kriterien ("Zielfunktionen") für die Verkehrsoptimierung . . . . .	196
19.6. Vorgehen bei der Optimierung . . . . .	198
<b>20. Modellierung von Stadtverkehr</b>	<b>200</b>
<b>21. Verkehrssimulations-Software und weitere Anwendungen</b>	<b>201</b>
<b>A. Appendix</b>	<b>202</b>
A.1. Zur Herleitung eines Makromodells aus einem Fahrzeugfolgemodell . . . . .	202

# 1. Allgemeines

Was wir wissen, ist ein Tropfen; was wir nicht wissen, ein Ozean.

Isaac Newton

Grundlage jeder Modellierung sollte die Realität sein, von der Verkehrsdaten ein mehr oder weniger gutes Abbild geben können. Mit Hilfe von Verkehrsdaten

- werden Modelle entwickelt,
- die Modelle “kalibriert”, d.h. die Modellparameter so angepasst, dass die simulierten Ergebnisse den Daten möglichst gut entsprechen,
- die Modelle bewertet und “schlechtere” Modelle verworfen.

Erst ein in der Bewertung “für gut befundenes” und kalibriertes Modell kann für den eigentlichen Zweck der Modellierung eingesetzt werden, z.B. als

- Beitrag zum Verständnis der Verkehrsdynamik,
- Planung und Bewertung von Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen zur Steigerung der Verkehrsleistung, etc,
- Verkehrslageschätzung,
- Prognose von Verkehrsabläufen,
- Planungshilfe beim Design neuer Infrastruktur oder der Veränderung bestehender Infrastruktur,
- Optimierung von innerstädtischen Verkehr durch eine geeignete adaptive Steuerung der Lichtsignalanlagen,
- Fahrerassistenzsysteme, sowie allgemein die Simulation neuer ITS-Produkte und Anwendung (ITS: *intelligent traffic systems*),
- und schließlich: Wie kann sich der menschliche Fahrer verkehrseffizient verhalten?

## 1. Allgemeines

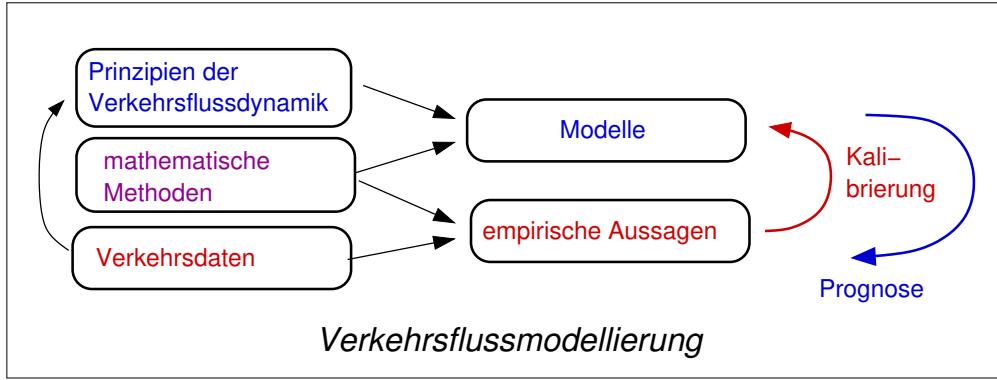


Figure 1.1.: Verkehrsflussmodelle beschreiben die Prinzipien des Verkehrsflusses mit Hilfe der Mathematik. Ihre Voraussagen werden mit empirischen Daten verglichen und damit die Modellparameter kalibriert.

### 1.1. Abgrenzung von verwandten Gebieten

Neben der Verkehrsflussmodellierung gibt es weitere Verfahren, bei denen Verkehrsmodellierung eine Rolle spielt:

- Die **Transportplanung** als Teilgebiet der Logistik unterscheidet sich von der Verkehrsmodellierung durch ihren Zweck: Güterströme einer bestimmten Firma sollen optimiert werden; der Verkehr spielt nur als (meist störende) Randbedingung eine Rolle,
- Die **Verkehrsplanung** untersucht die Verkehrsdynamik auf viel größeren Zeitskalen als die Verkehrsflussdynamik, deren typische Zeitskalen kaum über zwei Stunden hinausreichen (vgl. Abb. 1.2): Ziel der Verkehrsplanung ist es, die in der Verkehrsflussdynamik extern gegebene *Nachfrage* nach Verkehr und demzufolge die *Streckenbelastung* zu ermitteln. Dies wird meist mit dem klassischen *Vier-Stufen-Schema* durchgeführt, mit den Schritten *Verkehrserzeugung*, *Verkehrsverteilung*, *Verkehrsaufteilung* und *Umlegung*.

## 1. Allgemeines

Zeitskala	Verkehrlicher Aspekt	Modelle	Beispiele	Gebiet
0.1 s	Antrieb, Bremse, ESP etc.	sub-mikroskopisch	PELOPS	Fahrzeug-dynamik
1 s	Reaktionszeit Fahrzeug-Folgezeit	Fahrzeugfolge-modelle (mikroskopisch)	PTV-VISSLIM	
10 s	Zeit zum Beschleunigen, Bremsen	fluid-dynamische modelle	IDM, OVM	Verkehrs-dynamik
1 min	ÖV: Haltezeit Umlaufzeit (LSA)	(makroskopisch)		
10 min	IV: Periode Stop-and-Go-Verkehr ÖV: Taktzeit	Lighthill-Whitham-Modell		
1 h	"Zeitscheibe" einer Tagesganglinie	Umlegungsmodelle	PTV-Visum	
1 Tag	Bezugstag (Sa, So, Werktag)	Nachfrage-modellierung		Verkehrs-
1 Jahr	Umsetzung verkehrstechnischer Maßnahmen	(Erzeugung, Verteilung, Aufteilung)	PTV-Viseva	planung
5 Jahre	Umsetzung Infrastruktur-Maßnahmen Änderung der Raumstruktur	Statistik: Modellgestützte Prognose	Alterspyramide (stat. Bundesamt)	
50 Jahre	Demografie, z.B. "Mobilität im Alter"			

Figure 1.2.: Abgrenzung der Verkehrs(fluss-)modellierung von der Fahrzeugdynamik, Verkehrsplanung und Verkehrsstatistik.

## **Part I.**

# **Verkehrsdaten: Messverfahren und Datenkategorien**

## 2. Einleitung

*EDV-Systeme verarbeiten, womit sie gefüttert werden. Kommt Mist rein, kommt Mist raus.*

André Kostolany

Verkehrsdaten können mit den verschiedensten Methoden gewonnen werden. Jede Messmethode erschließt i.A. verschiedene Aspekte der Verkehrsdynamik. Die wichtigsten Datenkategorien sind:

1. **Trajektorien aus Video-Aufzeichnungen.** Man bestimmt Trajektorien  $x_\alpha(t)$  (Ort-Zeit-Verläufe) der einzelnen Fahrzeuge  $\alpha$  mit kamerabasierten Systemen, z.B. aus Flugzeugen oder mit Videokameras und Tracking-Software (Verfolgung von bestimmten Fahrzeugen), vgl. Abb. 3.1 auf Seite 8.

Dieses Verfahren liefert von den vorgestellten Verfahren die detailreichsten Verkehrsinformationen und erlaubt z.B. als einziges eine direkte Bestimmung der Dichte und des Spurwechselverhaltens. Es ist aber i.d.R. ein noch fehlerträchtiges und schwieriges Verfahren, da automatische Fahrzeug-Tracking-Algorithmen benötigt werden, und stellt oftmals die teuerste Lösung dar.

2. **Floating-Car-Daten (FC-Daten).** Man setzt einzelne Messfahrzeuge ein, die im Verkehrsstrom „mitschwimmen“: Sogenannte *floating cars*). Diese Fahrzeuge zeichnen die Geschwindigkeit  $v_\alpha(t)$  und teils auch GPS-basiert den Ort  $x_\alpha(t)$  auf. Ansonsten bestimmt man den Ort durch Integration der Geschwindigkeit. Steht beides zur Verfügung, kann man durch *Fusion* der beiden Ortsinformationen die Genauigkeit erhöhen. In neuester Zeit werden (anonymisierte) FC-Daten auch von Navigationsgeräten gesendet.

Manchmal haben die Messfahrzeuge zusätzliche Messsensoren (z.B. Radarsensoren), so dass sie auch Geschwindigkeits- und Abstandsunterschiede erfassen können. Eine solche spezielle Ausstattung ist allerdings recht kostenintensiv und oftmals sind die gelieferten Daten nicht repräsentativ.

3. **Querschnittsdaten** Die Daten werden stationär an Fahrbahnquerschnitten aufgenommen, welche mit Doppelinduktionsschleifen, Radar- oder Infrarotsensoren ausgestattet sein können. Man erhält sog. Querschnittsdaten. Diese liegen entweder für jedes Fahrzeug als **Einzelfahrzeugdaten** vor, oder als **aggregierte Daten**, d.h. Mittelwerte über meist feste Zeiträume von 30 s – 5 min. Hintergrund für die Verwendung aggregierter Daten sind die oft sehr großen Datenmengen der Einzelfahrzeugdaten und die nicht dafür ausgelegten Übertragungsmedien der Autobahnen.

## **2. Einleitung**

### **Verständnisfrage:**

Welche der folgenden Eigenschaften des Verkehrs kann man mit welcher der drei behandelten Datenkategorien erfassen: Geschwindigkeit, Verkehrsfluss ( $Fz/h$ ), Dichte, Staus, Fz-Abstände, Netto-Folgezeiten, Beschleunigungen, Fahrstreifenwechsel?

### 3. Trajektoriendaten und Floating-Car-Daten

Beide Datenkategorien enthalten den Ort  $x_\alpha(t)$  von Fahrzeugen  $\alpha$  als Funktion der Zeit, aber sie unterscheiden sich in mehreren Aspekten:

- Während Trajektoriendaten die **Fahrzeug-Trajektorien**, d.h. Orts-Zeit-Linien  $x_\alpha(t)$  von *allen* Fahrzeugen innerhalb eines raumzeitlichen Bereichs enthalten, erhält man im Falle von Floating-Car-Daten, auch **FC-Daten** genannt, nur Informationen über einen geringen Teil von Fahrzeugen, nämlich den ausgestatteten *Floating Cars*.
- Im Gegensatz zu Trajektoriendaten enthalten FC-Daten i.A. keine Information über den genutzten Fahrstreifen.
- Teilweise sind in FC-Daten weitergehende Informationen wie der Abstand zum Vorderfahrzeug, Gaspedalstellung, Bremsdruck, Informationen über gesetzte Blinker etc. enthalten, die natürlich in Trajektoriendaten aufgrund der Art der i.A. optischen Datenerfassung fehlen. Im Prinzip können in Floating Cars alle Daten als Zeitreihen aufgezeichnet werden, die über den sog. *CAN-Bus*, den alle modernen Fahrzeuge besitzen, bereitgestellt werden.

In Abb. 3.1 sind zwei Beispiele von Trajektoriendaten für jeweils eine Fahrstreifen in einem Raum-Zeit-Diagramm aufgetragen. Aus einem solchen Trajektorien-Diagramm kann man u.a. folgende Informationen entnehmen:

- Die lokale Geschwindigkeit am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  ist durch die Steigung der Trajektorien gegeben. Eine horizontale Trajektorie entspricht der Geschwindigkeit null.
- Die "echte" (d.h. durch räumliche Messung bestimmte) Verkehrsdichte ist gleich dem Inversen des vertikalen Abstands benachbarter Kurven.
- Die Brutto-Folgezeit  $\Delta t_\alpha$  ist gleich dem horizontalen Abstand benachbarter Kurven.
- Das Ende einer Trajektorie entspricht einem Spurwechsel auf einen anderen Fahrstreifen und entsprechend zeigt der Beginn einer Trajektorie einen Wechsel von einem anderen Fahrstreifen an.
- Die Steigung einer Verkehrsverdichtung als Ganzes gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Staus an. Bei der in Abb. 3.1 zu sehenden Verdichtung ist die Steigung negativ. Es handelt sich also hier um eine den Fahrzeugen entgegenkommende Stauwelle!

### 3. Trajektoriendaten und Floating-Car-Daten

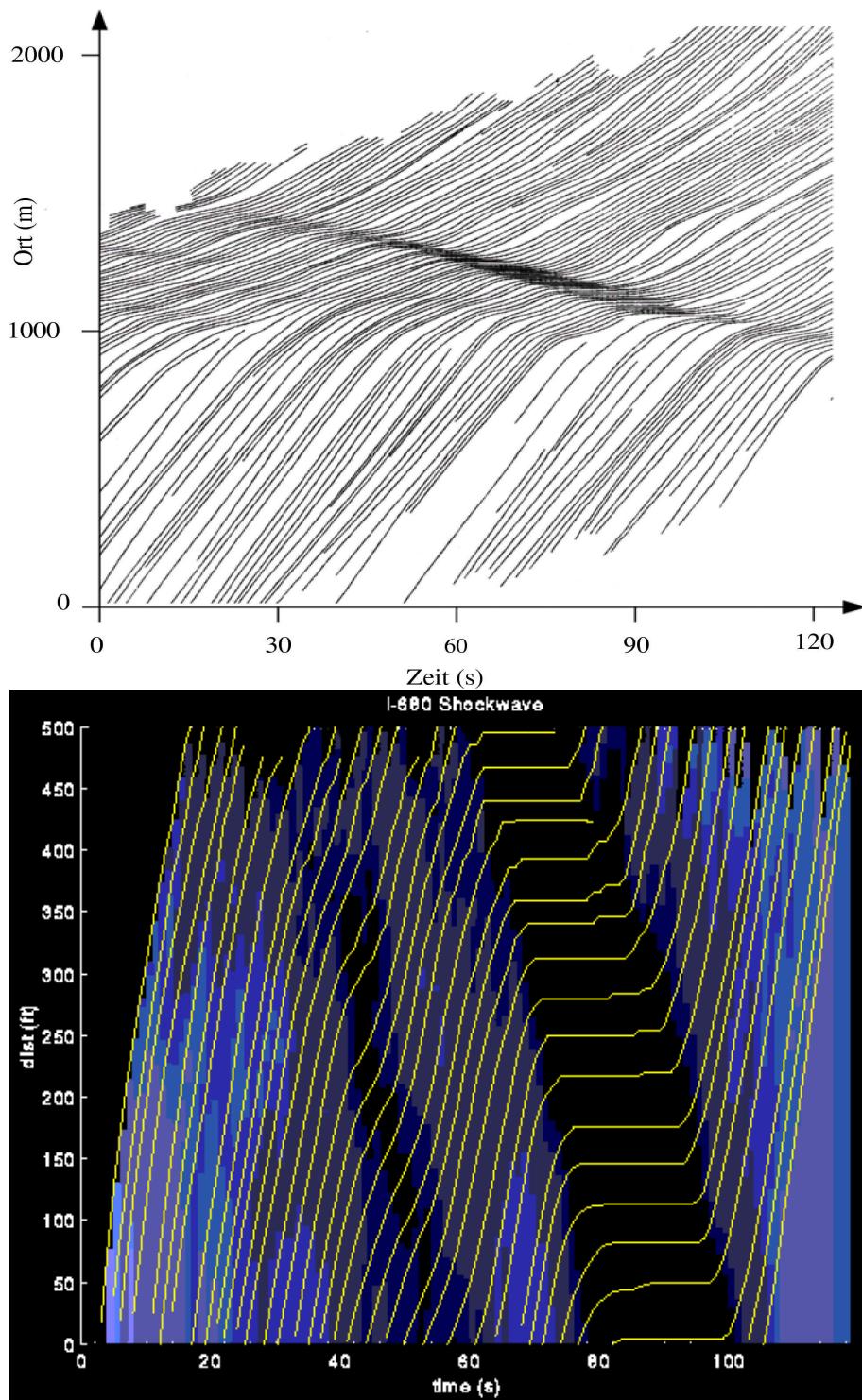


Figure 3.1.: Trajektorien von laufenden Stop-and-Go-Wellen auf einen britischen Autobahnabschnitts [Quelle: J. Treiterer et. al. (1966,1970,1974)] und auf der amerikanischen I-880 [Quelle: [www.ece.osu.edu/~coifman/shock/](http://www.ece.osu.edu/~coifman/shock/)].

### 3. Trajektoriendaten und Floating-Car-Daten

Vereinzelt liegen sogar **2D-Trajektoriendiagramme** vor, mit denen auch die Zeitdauern für das Vollziehen eines Spurwechsels sowie seitliche Beschleunigungen ermittelt werden können.

**Verständnisfrage:**

Kann man aus Trajektoriendaten die aktuelle Reisezeit zum Durchfahren einer Strecke bestimmen? Wie würde man ggf. eine staubedingte Reisezeitverlängerung berechnen?

**Verständnisfrage:**

Oft wird als Indikator für staubedingte volkswirtschaftliche Schäden der Zeitverlust aller durch den Stau fahrenden Personen angegeben. Wie und mit welchen Zusatzannahmen lässt er sich mit FC- oder Trajektoriendaten abschätzen?

# 4. Querschnittsdaten

*Statistik ist wie ein Bikini: Er zeigt das meiste, doch verbüllt das Wesentliche*  
Anonymus

## 4.1. Mikroskopische Auswertung: Einzelfahrzeugdaten

Bis heute spielen **Querschnitts-Detektoren** bei der automatisierten Erhebung von Verkehrsflussdaten bei Weitem die wichtigste Rolle. Diese messen das Verkehrsgeschehen jedes Fahrstreifens einer Richtungsfahrbahn (Querschnitt) an einer festen Stelle, weshalb sie auch stationäre Detektoren genannt werden.<sup>1</sup>

Querschnittsdetektoren können pneumatisch (über die Fahrbahn gelegte Schläuche), optisch (Lichtschranken oder IR-Detektion) oder durch **Induktionsschleifen** realisiert werden. Während die ersten Methoden für den temporären Einsatz sinnvoll sind, haben Induktionsschleifen bei permanentem Einsatz und auch insgesamt bei Weitem die größte Bedeutung.

Induktionsschleifen werden unter die Fahrbahndecke der Fahrstreifen positioniert (Abb. 4.1) und detektieren, ob sich metallische Gegenstände (Fahrzeuge) über ihnen befinden oder nicht. Eine einzelne Schleife kann damit direkt für jeden Fahrstreifen folgende verkehrlich relevante Größen erfassen:

- der Zeitpunkt  $t_\alpha = t_\alpha^0$ , zu der die Fahrzeugfront den Messquerschnitt überquert (Flanke des Spannungsabfalls in Abb. 4.1),
- und der Zeitpunkt  $t_\alpha^1$ , zu der das Fahrzeugheck den Messquerschnitt überquert (Flanke des Spannungsanstiegs).

Fahrzeuggeschwindigkeiten können Einfach-Induktionsschleifen jedoch nicht direkt messen. Man kann allenfalls mit Hilfe gewisser Annahmen über die mittleren Fahrzeuglängen und bei nicht zu stark schwankenden Geschwindigkeiten Mittelwerte der Geschwindigkeiten mit relativ großen Fehlern abschätzen (wie später in Abschnitt 4.3.3 gezeigt werden wird).

Deshalb sind in Europa überwiegend **Doppel-Induktionsschleifendetektoren** im Einsatz, also zwei (oder auch mehrere) Induktionsschleifen in einem Abstand von z.B. 1 m, welche eine direkte Messung der

- Geschwindigkeit  $v_\alpha$  des Fahrzeugs  $\alpha$

durch den Quotienten “Schleifenabstand geteilt durch Zeitversatz der Anstiegsflanken” erlauben.

#### 4. Querschnittsdaten

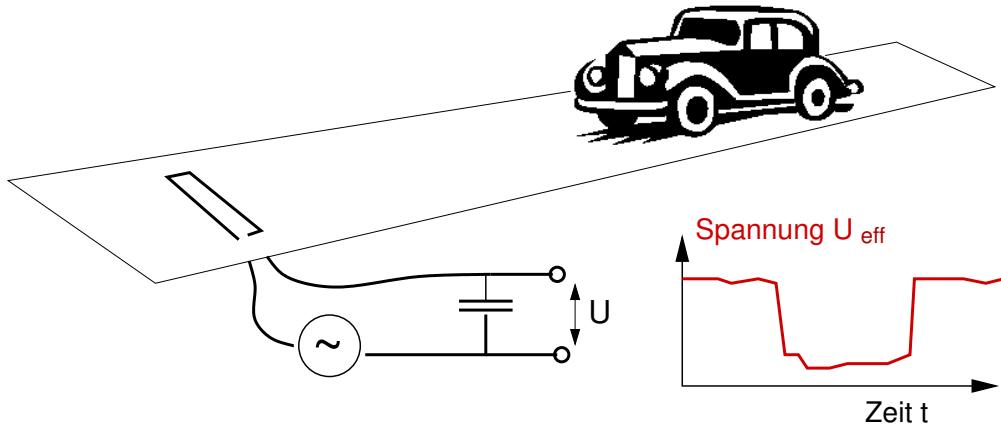


Figure 4.1.: Prinzip des Induktionsschleifendetektors. Ein elektrischer Schwingkreis (mit einer Wechselspannungsquelle, einem externen Kondensator als Kapazität und der Schleife als Induktivität) ist im “unbelegten” Zustand “in Resonanz”, d.h. es liegt eine hohe Wechselspannung  $U_{\text{eff}}$  an. Fährt ein Fahrzeug über die Schleife, vergrößert sich aufgrund der Metallteile die Induktivität, so dass der Schwingkreis “verstimmt” wird und die anliegende Spannung  $U_{\text{eff}}$  abnimmt.

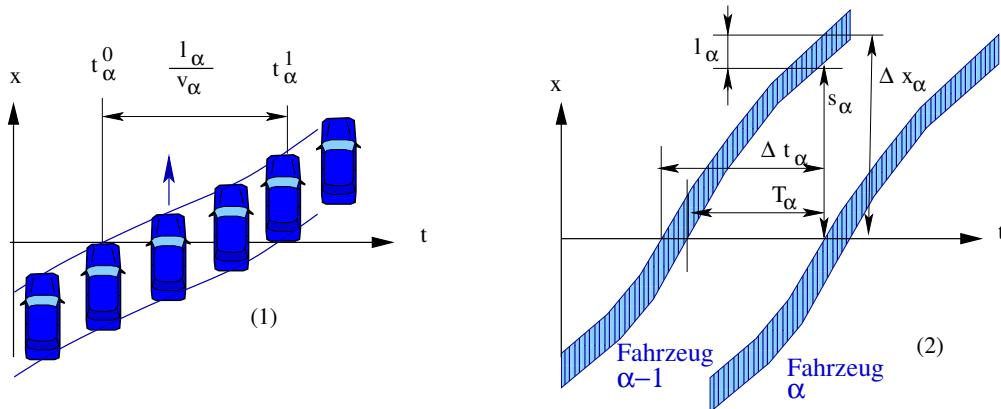


Figure 4.2.: Gewinnung von Einzelfahrzeugsgrößen direkt aus dem Induktionssignal von Doppelschleifendetektoren bzw. dem Signal anderer Querschnitts-Doppel detektoren. Die schraffierte Flächen geben den raumzeitlichen Bereich der Belegung an.

## 4. Querschnittsdaten

Aus den direkt gemessenen Größen lassen sich weitere **sekundäre mikroskopische Größen** ermitteln, wie aus Abb. 4.2 ersichtlich, beispielsweise:

- die Länge  $l_\alpha = v_\alpha(t_\alpha^1 - t_\alpha^0)$  der einzelnen Fahrzeuge  $\alpha$ ,
- eine Identifizierung verschiedener Kfz-Typen anhand der Länge, z.B. Zweirad für  $l_\alpha \leq 3$  m, PKW für  $3m < l_\alpha \leq 6$  m und LKW für  $l_\alpha > 6$  m,
- die Brutto-Zeitlücken  $\Delta t_\alpha = t_\alpha^0 - t_{\alpha-1}^0$  zwischen aufeinanderfolgenden Fahrzeugen, wobei das Vorderfahrzeug dabei den niedrigeren Index ( $\alpha - 1$ ) hat,
- die Nett0-Zeitlücke  $T_\alpha = t_\alpha^0 - t_{\alpha-1}^1 = \Delta t_\alpha - \frac{v_{\alpha-1}}{l_{\alpha-1}}$ ,
- die Bruttoabstände  $d_\alpha = v_{\alpha-1} \Delta t_\alpha$ ,
- die Nettoabstände  $s_\alpha = d_\alpha - l_{\alpha-1}$ .

Dabei wird bei der Bestimmung von räumlichen Größen (Längen, Abstände,...) implizit eine während der Messung konstante Geschwindigkeit angenommen. Ansonsten sind die Ergebnisse nicht exakt.

In der alltäglichen Praxis liegen diese hochwertigen Einzelfahrzeugdaten leider nur selten vor.

### 4.2. Aggregierung: Makroskopische Daten

*Das Wesen der Dinge hat die Angewohnheit, sich zu verbergen.  
Heraklit*

In den meisten Fällen werden die Einzelfahrzeugdaten bereits am Ort der Erfassung durch Mittelwertbildung über feste Zeitintervalle  $\Delta t$  oder feste Fahrzeugzahlen  $\Delta N$  **aggregiert** und nur die resultierenden **makroskopische Daten**, auch **aggregierte Daten** genannt, an die Leitstelle übertragen. Die mikroskopischen Daten gehen dann i.A. verloren. Auf europäischen Autobahnen beträgt das Mittelungsintervall häufig  $\Delta t = 60$  s, auf amerikanischen zwischen 30 s und 5 Minuten. Mittelungen über feste Fahrzeugzahlen (z.B. 50 Fahrzeuge) werden, obwohl sie statistisch sinnvoller wären, kaum übertragen.

#### Verständnisfrage:

Diskutieren Sie den Vorteil von Mittelungen über feste Fahrzeugzahlen anhand des Geschwindigkeitsmittels im Falle stark schwankender Verkehrsstrome

Folgende makroskopische Größen lassen sich ermitteln:

---

<sup>1</sup>Streng genommen ist letztere Bezeichnung ungenau, da auch Kamerapositionen für FC-Daten stationär sein können; Querschnittsdetektoren ist also die eindeutigere Bezeichnung.

## 4. Querschnittsdaten

- Der **Verkehrsfluss**

$$Q(x, t) = \Delta N / \Delta t, \quad (4.1)$$

wobei  $\Delta N$  die Anzahl der Fahrzeuge darstellt, die den am Ort  $x$  positionierten Querschnitt innerhalb eines Zeitintervalls  $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$  überqueren.

- Der **Belegungsgrad**(*occupancy*)

$$O(x, t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} (t_\alpha^1 - t_\alpha^0). \quad (4.2)$$

gibt den zeitlichen Anteil des Mittlungsintervalls an, in dem der Detektorquerschnitt von Fahrzeugen belegt ist.

- Das **Arithmetische Mittel** der Geschwindigkeit

$$V(x, t) = \langle v_\alpha \rangle = \frac{1}{\Delta N} \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} v_\alpha. \quad (4.3)$$

- Das **Harmonische Mittel** der Geschwindigkeit

$$V_H(x, t) = \frac{1}{\langle 1/v_\alpha \rangle} = \frac{\Delta N}{\sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} \frac{1}{v_\alpha}}. \quad (4.4)$$

- Und manchmal auch die **Geschwindigkeitsvarianz**

$$\Theta(x, t) = \langle (v_\alpha - \langle v_\alpha \rangle)^2 \rangle = \langle v_\alpha^2 \rangle - \langle v_\alpha \rangle^2. \quad (4.5)$$

### 4.3. Schätzung der tatsächlichen Geschwindigkeit und der Dichte

Tatsachen muß man kennen, bevor man sie verdrehen kann.  
Mark Twain

Während die bisherigen makroskopischen Größen Fluss  $Q$ , Belegungsgrad  $O$  und, im Falle von Doppelinduktionsschleifen, das zeitliche Mittel  $V$  der Geschwindigkeit problemlos bestimmbar sind, können weitere wichtige Größen nur unter bestimmten Annahmen geschätzt werden. Bei der Bestimmung der *Verkehrsfläche*  $\rho(x, t)$  besteht das Problem darin, dass die Dichte als *räumlichen* Mittel zu einer festen Zeit (“Schnappschuss”) definiert ist, während Querschnittsdetektoren nur *zeitliche Mittel* an einem festen Ort, eben den Querschnitt, liefern. Ferner ist man häufig an der makroskopischen Geschwindigkeit nicht als zeitliches, sondern als räumliches oder raumzeitliches Mittel interessiert, was bemerkenswerterweise selbst “im Mittel” im Allgemeinen nicht gleichwertig ist. Schließlich ist man auch im Falle von Einfach-Schleifendetektoren (welche v.A. in den USA verbreitet sind) an einer Abschätzung der Geschwindigkeit interessiert.

## 4. Querschnittsdaten

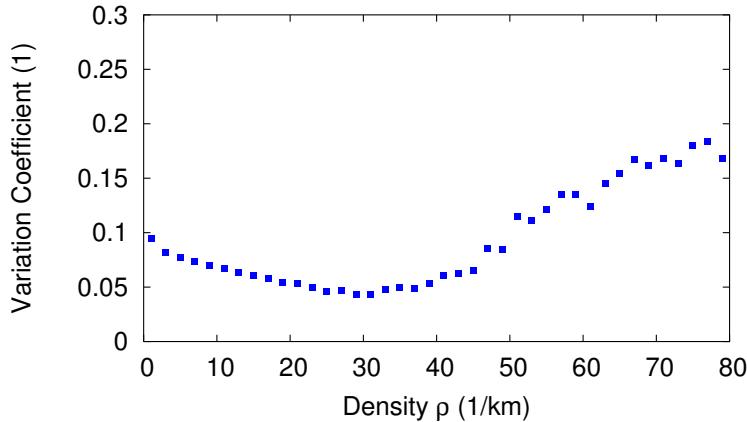


Figure 4.3.: Varianzkoeffizient  $\Theta/V^2$  (Geschwindigkeitsvarianz in Einheiten des Quadrats des arithmetischen Geschwindigkeitsmittels) in Abhängigkeit der Dichte. Aus einer mehrere Tage langen Zeitreihe von Einzelfahrzeugdaten eines Querschnittsdetektors wurde zunächst in Zeitintervallen  $\Delta t = 60$  s die Dichte und die Varianz gemäß (4.6) und (4.5) ermittelt, die Varianzwerte in Dichteklassen aufgeteilt und für jede Dichteklasse (jeden Datenpunkt) das arithmetische Mittel der Varianz geplottet.

### 4.3.1. Verkehrsdichte

Häufig schätzt man die Verkehrsdichte  $\rho(x, t)$  mit der "hydrodynamischen" Formel

$$\rho(x, t) = \frac{Q(x, t)}{V(x, t)} = \frac{\text{Verkehrsfluss}}{\text{Geschwindigkeit}} \quad (4.6)$$

ab.

Ein Problem bei der Anwendung der Formel (4.6) ist, dass sie nur für räumliche Geschwindigkeitsmittel  $V$ , nicht für die gemessenen zeitlichen, korrekt ist und die Umrechnung zeitlich  $\rightarrow$  räumlich systematische Fehler zur Folge hat.

Durch die höhere Begegnungsfrequenz der schnelleren Fahrzeuge mit einem stationären Messquerschnitt ist die mittlere Geschwindigkeit während eines Zeitintervalls größer als die mittlere Geschwindigkeit auf einem umgebenden Fahrbahnabschnitt der Länge  $\Delta x$  (vgl. den linken und rechten Fahrstreifen in Abb. 4.4), so dass das arithmetische Mittel einen systematischen Fehler in Richtung zu hoher Geschwindigkeit aufweist.

Zur Ermittlung von verbesserten Gleichungen der empirischen Dichtebestimmung definieren wir die Dichte  $\rho_i(x, t)$  auf einem gegebenen Fahrstreifen  $i$  – in Einklang mit der Definition "Dichte=Fahrzeuge pro Strecke" – exakt als Funktion mikroskopischer Größen: Das Inverse des mittleren Bruttoabstandes der betrachteten Fahrzeuge,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\langle d_\alpha \rangle} = \frac{\Delta N}{\sum_\alpha d_\alpha}. \quad (4.7)$$

## 4. Querschnittsdaten

Hier und im Folgenden lassen wir der Übersichtlichkeit halber den Fahrstreifen-Index  $i$  weg. Die folgenden Überlegungen gelten aber, im Gegensatz zu den Ausdrücken des Abschnitts 4.2, nur für einzelne Fahrstreifen. Für mehrere Fahrstreifen werden alle fahrstreifenbezogenen Dichten und Flüsse addiert.

Ferner drücken wir den Fluss ("Fahrzeuge pro Zeiteinheit") durch mikroskopische Größen, d.h. durch den Erwartungswert der Brutto-Folgezeiten aus: Bei einem gegebenen Zeitintervall

$$\Delta t = \sum_{\alpha=\alpha_0}^{\alpha_0+\Delta N-1} \Delta t_\alpha = \Delta N \langle \Delta t_\alpha \rangle,$$

gilt für den Fluss exakt

$$Q = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{\langle \Delta t_\alpha \rangle}. \quad (4.8)$$

Es gibt nun zwei Arten, die Dichte als Funktion der messbaren Größen  $d_\alpha$  und  $v_\alpha$  auszudrücken:

1. Wir gehen von der gerade hergeleiteten Erwartungswert-Definition (4.7) der Dichte aus, also  $\rho = 1/\langle d_\alpha \rangle$ , und setzen für die rechte Seite dieser Gleichung die Abschätzung aus Kapitel 4.1 ein:

$$\frac{1}{\rho} = \langle d_\alpha \rangle = \langle v_{\alpha-1} \Delta t_\alpha \rangle \approx \langle v_\alpha \Delta t_\alpha \rangle = \langle v_\alpha \rangle \langle \Delta t_\alpha \rangle + \text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha) = \frac{V}{Q} + \text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha),$$

also

$$\rho = \frac{1}{\frac{V}{Q} + \text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha)}. \quad (4.9)$$

Hierbei haben wir die **Kovarianz** eingeführt, welche für allgemeine Zufallsgrößen durch

$$\text{Cov}(x, y) = \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$$

definiert ist. Wichtig:

- Die Kovarianz ist positiv, wenn die beiden Größen "positiv korreliert" sind, also eine Zunahme von  $x$  tendenziell mit einer Zunahme von  $y$  einhergeht.
- Das Maß eines linearen Zusammenhangs wird dabei durch den **Korrelationskoeffizienten**

$$r_{x,y} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.10)$$

quantifiziert, der Werte von  $-1$  (exakt entgegengesetzter Zusammenhang) über  $0$  (kein *linearer* Zusammenhang) bis  $1$  (exakte Proportionalität) annehmen kann.

## 4. Querschnittsdaten

Damit kann man (4.9) auch ausdrücken als

$$\rho = \frac{Q}{V} \left( \frac{1}{1 + \frac{\sigma_V}{V} \frac{Q}{\sigma_Q} r_{v_\alpha, \Delta t_\alpha}} \right). \quad (4.11)$$

Dieses Ergebnis wird auch Wardrop-Formel genannt.<sup>2</sup>

Die reale Dichte ist also gleich der üblicherweise verwendeten Näherung “Fluss durch arithmetisches Geschwindigkeitsmittel”, multipliziert mit einem die Korrelation  $r_{v, \Delta t}$  zwischen den Bruttozeitlücken und der Geschwindigkeit, sowie die Variationskoeffizienten (relativen Schwankungen)  $\sigma_V/V$  sowie  $\sigma_Q/Q$  enthaltenden Faktor. Im freien Verkehr ist diese Korrelation offensichtlich nahe Null (da jeder unabhängig von den anderen seine eigene Geschwindigkeit wählen kann). In gebundenen Verkehr, hingegen, nimmt die Bruttozeitlücke  $\Delta t_\alpha$  in der Regel mit *sinkender* Geschwindigkeit zu, da sie für stehende Fahrzeuge ja unendlich ist. Damit ist die Korrelation negativ und der Nenner in (4.11) kleiner als 1. Bei gebundenen Verkehr wird also die wahre Dichte durch die Abschätzung  $Q/V$  systematisch *unterschätzt* (vgl. Abb. 5.9 weiter unten).

2. Eine weitere Art, die Dichte durch messbare Größen auszudrücken, geht von der in diesem Abschnitt hergeleiteten Erwartungswert-Definition (4.8) für den *Fluss* aus,  $Q = 1/\langle \Delta t_\alpha \rangle$ . Wieder wird für die rechte Seite die entsprechende Abschätzung aus Kapitel 4.1 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \langle \Delta t_\alpha \rangle = \langle \frac{d_\alpha}{v_{\alpha-1}} \rangle \\ &\approx \langle \frac{d_\alpha}{v_\alpha} \rangle = \langle d_\alpha \rangle \langle \frac{1}{v_\alpha} \rangle + \text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha}) \\ &= \frac{1}{\rho V_H} + \text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha}), \end{aligned}$$

also

$$\rho = \frac{1}{\frac{V_H}{Q} - V_H \text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha})}, \quad (4.12)$$

mit dem harmonischen Geschwindigkeitsmittel  $V_H = 1/\langle \frac{1}{v_\alpha} \rangle$ , das die kleinen Geschwindigkeiten (zum Ausgleich) stärker gewichtet. Mit der Definition des Korrelationskoeffizienten,  $\text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha}) = \frac{1}{\rho V_H} r_{d_\alpha, 1/v_\alpha}$ , lässt sich dies auch schreiben als (versuchen Sie, den Ausdruck herzuleiten!)

$$\rho = \frac{Q}{V_H} \left( 1 + r_{d_\alpha, 1/v_\alpha} \right). \quad (4.13)$$

---

<sup>2</sup>Nicht zu verwechseln mit dem Wardrop-Gleichgewicht der Verkehrsplanung, welches einem Nutzer-Gleichgewicht bei der Routenwahl entspricht.

#### 4. Querschnittsdaten

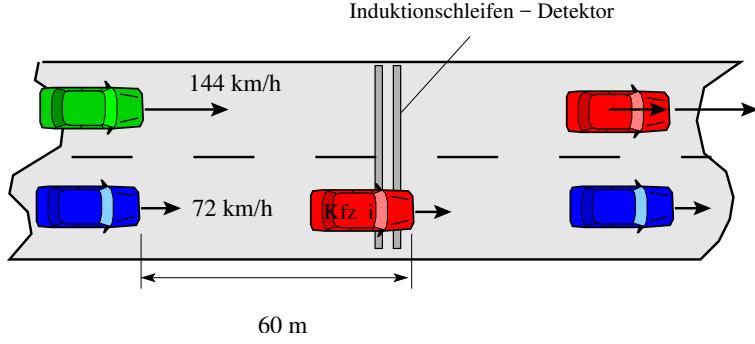


Figure 4.4.: Doppelte Geschwindigkeit bei gleicher Brutto-Folgezeit auf dem linken Fahrstreifen

Da der Abstand  $d_\alpha$  mit  $v_\alpha$  in der Regel steigt und damit mit  $1/v_\alpha$  sinkt, ist die Korrelation  $r_{d_\alpha, 1/v_\alpha}$  negativ und damit der Korrekturfaktor obiger Gleichung kleiner als 1. Damit *überschätzt* der Ausdruck  $\frac{Q}{V_H}$  im Allgemeinen die wahre Dichte.

In der Praxis setzt man die Kovarianzen näherungsweise gleich Null und verwendet die auch für mehrere Fahrstreifen anwendbaren Ausdrücke

$$\rho^{(1)} = \frac{Q}{V}$$

oder

$$\rho^{(2)} = \frac{Q}{V_H}.$$

#### Verständnisfrage:

Kann man mit stationären Detektoren die Verkehrsdichte bei einem Stau mit vollständigem Stillstand der Fahrzeuge berechnen?

Wir wollen nun die Fehler dieser Näherung diskutieren sowie die Situationen, bei denen  $\rho^{(1)}$  oder  $\rho^{(2)}$  zu bevorzugen sind:

- Falls die Brutto-Folgezeiten  $\Delta t_\alpha$  alle gleich sind (vgl. Abb. 4.4), gilt für beliebige Geschwindigkeiten und Abstände  $\text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha) = 0$  und damit  $\rho = \rho^{(1)} = Q/V$  exakt.
- Falls die räumlichen Abstände  $d_\alpha$  alle gleich sind (vgl. Abb. 4.4), gilt für beliebige Geschwindigkeiten und Folgezeiten  $\text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha}) = 0$  und damit  $\rho = \rho^{(2)} = Q/V_H$  exakt.
- Falls die Geschwindigkeiten  $v_\alpha$  alle gleich sind, gilt  $V = V_H$  und  $\rho = \rho^{(1)} = \rho^{(2)}$ .

#### 4. Querschnittsdaten

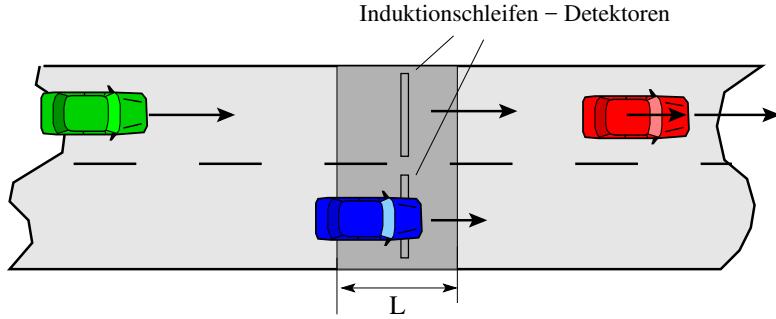


Figure 4.5.: Zur Herleitung der Formel (4.15) für das räumliche bzw. momentane Geschwindigkeitsmittel.

- Im Allgemeinen unterschätzt die Formel  $\rho^{(1)} = Q/V$  die tatsächliche Dichte  $\rho$ , da  $\text{Cov}(v_\alpha, \Delta t_\alpha)$  i.A. negativ ist. (Warum?)
- Im Allgemeinen überschätzt die Formel  $\rho^{(2)} = Q/V_H$  die tatsächliche Dichte, da  $\text{Cov}(d_\alpha, \frac{1}{v_\alpha})$  i.A. ebenfalls negativ ist. (Warum?)

##### Verständnisfrage:

Warum unterschätzt man im dichten oder gestauten Verkehr bei Verwendung des arithmetischen Geschwindigkeitsmittels i.A. die tatsächliche Dichte?

Warum wird sie bei Verwendung des harmonischen Mittels i.A. überschätzt?

Schätzen Sie dazu "mit dem gesunden Menschenverstand" die Vorzeichen der entsprechenden Kovarianzen ab.

#### 4.3.2. Räumliches ("momentanes") Geschwindigkeitsmittel.

Das räumliche bzw. momentane Geschwindigkeitsmittel  $\langle V(t) \rangle$  ist das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten aller Fahrzeuge, welche sich zur Zeit  $t$  in dem Streckenabschnitt befinden, auf welchen sich die Mittelung bezieht, im Bild 4.5 der Abschnitt der Länge  $L$  um den Detektor:

$$\langle V(t) \rangle = \frac{1}{n(t)} \sum_{\alpha=1}^{n(t)} v_\alpha(t) \quad (4.14)$$

Im allgemeinen Fall (mehrere Fahrstreifen, beliebige Geschwindigkeiten und Beschleunigungen) ist das räumliche momentane Mittel nicht sinnvoll aus Detektordaten zu bestimmen, da sich ja während des Messintervalls, z.B.  $\Delta t = 1$  Minute, ständig die Identität und Zahl der zur Mittelung nach (4.14) herangezogenen Fahrzeuge ändert. Insbesondere kann diese Zahl auch  $n(t) = 0$  sein.

## 4. Querschnittsdaten

Eine saubere Definition erhält man, wenn man dieses instantane Mittel auch noch zeitlich über das Aggregierungsintervall  $\Delta t$  mittelt und außerdem den relevanten Streckenabschnitt so klein macht, dass sich die Geschwindigkeit während der Passage-time  $\tau_{p\alpha} \approx L/v_\alpha$  kaum ändert. Dann erhält man durch Mittelung von (4.14) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\langle V \rangle &= \frac{\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt n(t) \langle V(t) \rangle}{\int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt n(t)} = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \int_{t_\alpha - t_{p\alpha}/2}^{t_\alpha + t_{p\alpha}/2} dt v_\alpha(t)}{\sum_{\alpha=1}^n t_{p\alpha}} \\ &\approx \frac{\sum_{\alpha=1}^n t_{p\alpha} v_\alpha}{\sum_{\alpha=1}^n t_{p\alpha}} \\ &\approx \frac{\sum_{\alpha=1}^n L}{\sum_{\alpha=1}^n L/v_\alpha} \\ &= \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{v_\alpha}},\end{aligned}$$

wobei  $n$  die Gesamtzahl der innerhalb  $\Delta t$  über den Detektor gefahrenen Fahrzeuge bezeichnet (nicht zu verwechseln mit der momentanen Fahrzeugzahl  $n(t)$  im Bezugsabschnitt!) und  $v_\alpha$  die jeweils dort gemessene Geschwindigkeit ist. Also ist die zeitlich über ein Aggregierungsintervall und räumlich über einen Streckenabschnitt gemittelte Geschwindigkeit durch das *harmonische Mittel* gegeben,

$$\langle V \rangle = V_H. \quad (4.15)$$

Häufig wird das harmonische Geschwindigkeitsmittel auch, etwas weniger exakt, direkt mit dem momentanen Mittel gleichgesetzt.

### 4.3.3. Geschwindigkeit aus Einfach-Schleifendetektoren

Liegen nur Einfachschleifen zur Datenerfassung vor, erhält man direkt nur zwei makroskopische Größen, den Verkehrsfluss  $Q = n/\Delta t$  und die Belegung (*occupancy*)  $O = \frac{1}{\Delta t} \sum (t_\alpha^1 - t_\alpha^0)$ .

Bei Kenntnis der Fahrzeulgänge  $l_\alpha$  wäre die Geschwindigkeit leicht aus  $v_\alpha = l_\alpha / ((t_\alpha^1 - t_\alpha^0))$  zu bestimmen, diese kann mit Einfachschleifen aber nicht ermittelt werden. Unter Annahme /Schätzung einer *mittleren* Fahrzeulgänge  $\langle l_\alpha \rangle$  kann man aber aus der Definition der Belegung dennoch eine Näherung für die mittlere Fahrzuegeschwindigkeit

## 4. Querschnittsdaten

herleiten:

$$\begin{aligned}
 O &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha} (t_{\alpha}^1 - t_{\alpha}^0) \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{\alpha} \frac{l_{\alpha}}{v_{\alpha}} \\
 &= \frac{n}{\Delta t} \left[ \langle l_{\alpha} \rangle \langle \frac{1}{v_{\alpha}} \rangle + \text{Cov} \left( l_{\alpha}, \frac{1}{v_{\alpha}} \right) \right] \\
 &= \frac{n}{\Delta t} \left[ \langle l_{\alpha} \rangle \frac{1}{V_H} + \text{Cov} \left( l_{\alpha}, \frac{1}{v_{\alpha}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

und damit nach Umstellung bzw. Isolation von  $V_H$ :

$$V_H = \frac{Q \langle l_{\alpha} \rangle}{O} \left( \frac{1}{1 - \frac{Q}{O} \text{Cov} \left( l_{\alpha}, \frac{1}{v_{\alpha}} \right)} \right). \quad (4.16)$$

Da “im Stau alle gleich” sind, ist für hohe Dichten die Korrelation  $r_{l_{\alpha}, 1/v_{\alpha}}$  zwischen Fahrzeuglängen und (inversen) Geschwindigkeiten und damit die Kovarianz nahezu =0 und man erhält mit dem Quotienten  $Q \langle l_{\alpha} \rangle / O$  direkt eine Abschätzung der *harmonischen* Geschwindigkeit . In Situationen freien Verkehrs hingegen fahren längere Fahrzeuge (LKW) meist langsamer als kürzere (PKW), so dass die Korrelation  $r_{l_{\alpha}, 1/v_{\alpha}}$  und damit die Kovarianz positiv ist. Damit ist der Korrekturfaktor in der großen Klammer größer als 1 und  $Q \langle l_{\alpha} \rangle / O$  unterschätzt das harmonische Geschwindigkeitsmittel systematisch. Da das harmonische Mittel aber immer höher als das arithmetische Mittel ist, gibt  $Q \langle l_{\alpha} \rangle / O$  möglicherweise für freien Verkehr eine gute Näherung für das arithmetische Mitel an. Man beachte, dass man für vernachlässigbare Korrelationen auch schreiben kann

$$V_H = \frac{Q}{\tilde{\rho}}, \quad \tilde{\rho} = \frac{O}{\langle l_{\alpha} \rangle} \quad (4.17)$$

mit der aus der Belegung geschätzten Dichte  $\tilde{\rho} = O / \langle l_{\alpha} \rangle$ .

# 5. Darstellung von Querschnittsdaten

## 5.1. Zeitreihen

Prognosen sind immer dann schwierig, wenn sie sich auf die Zukunft beziehen

Mark Twain

Trägt man die über einem Querschnitt aufgenommenen aggregierten Größen über der Zeit auf, erhält man sog. Zeitreihen. Diese enthalten z.B. folgende Informationen:

- Zeitreihen von Fluss, Geschwindigkeit und Dichte über ein Zeitintervall von wenigen Stunden geben z.B. Aufschluss über Verkehrszusammenbrüche, Art des Staus (Stillstand oder zähfließender Verkehr) und dem Flussabfall nach Verkehrszusammenbruch (sog. "capacity drop", s.u.).
- Ein-Tages-Zeitreihen des Verkehrsflusses, auch **Tagesganglinien** genannt, geben Aufschluss über die Verkehrsnachfrage und können zur Prognose verwendet werden. Man beachte, dass verschiedene Wochentage eigene Charakteristiken aufweisen. Typischerweise kann man zwischen Montag, Dienstag-Donnerstag, Freitag sowie Samstag und Sonntag unterscheiden. Weiterhin gibt es als Sonderfälle mit besonders hohem Verkehrsaufkommen Ferien- und Feiertage sowie "Brückentage".

Bei der Interpretation der Staudynamik anhand von einzelnen Zeitreihen muss man sich aber vor Fehlinterpretationen hüten, vgl. die folgende Verständnisfrage.

### Verständnisfrage:

Warum kann man von der in Abb. 5.1 gezeigten Zeitreihe nicht schließen, dass der Zusammenbruchszeitpunkt des Verkehrs etwa um 7:00 Uhr liegt? Kann man aus der Abbildung wenigstens folgern, dass die Fahrzeuge im Bereich der Detektorposition im Zeitbereich um 7:00 abbremsen oder dass die Fahrzeuge um etwa 8:30 an der Detektorposition wieder beschleunigen? Wenn nicht, was könnten für alternative Situationen vorliegen?

## 5.2. Kumulierte Fahrzeugzahlen

Diese Darstellungsart makroskopischer Daten ist die einzige, aus der man direkt die Reisezeit ablesen kann. Dazu wird für mehrere Querschnitte  $k$  das Flussintegral

$$n_k(t) = \int_{t_0^{(k)}}^t Q_k(t') dt'$$

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

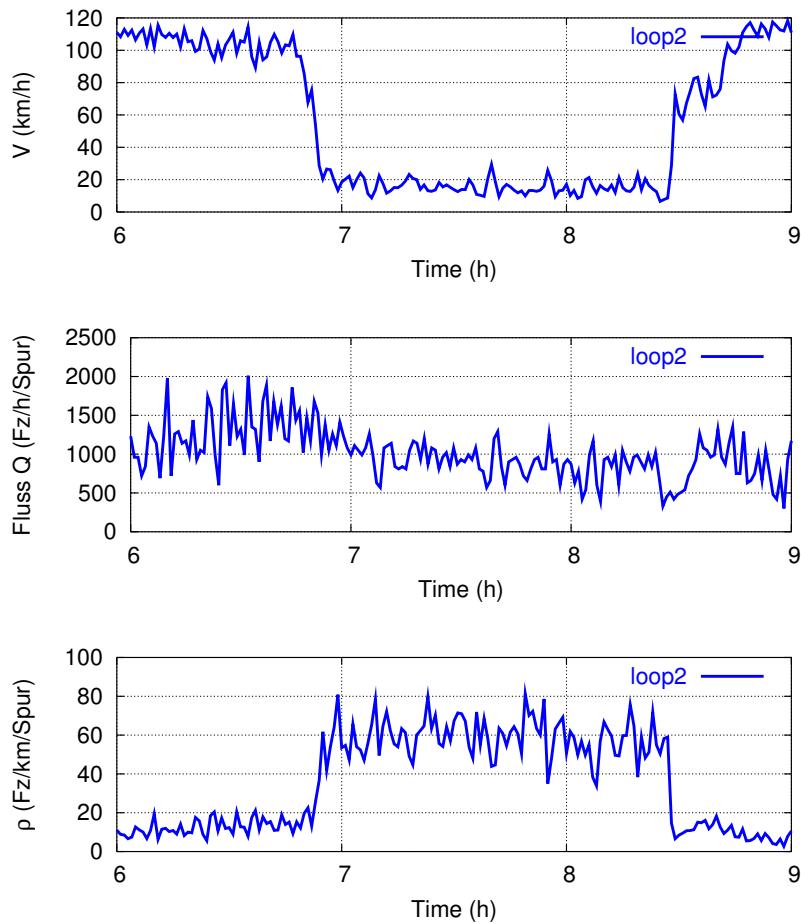


Figure 5.1.: Zeitreihen der arithmetisch gemittelten Geschwindigkeit  $v$ , des Flusses  $Q$  und der "Dichte"  $Q/v$  von 1-Minuten Daten.

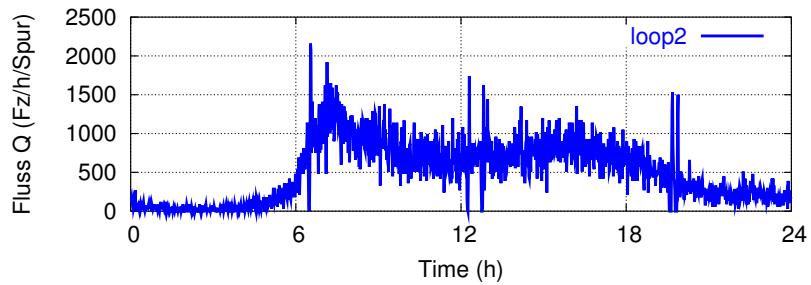


Figure 5.2.: Typische Tagesganglinie des Verkehrsflusses bzw. der Verkehrsnachfrage

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

Figure 5.3.: Schematische Zeitreihe der Geschwindigkeit und was sich dahinter verbergen könnte. **Martin: Abb. von Aufgaben/Folien holen!**

Figure 5.4.: Tatsächliche Zeitreihen der Geschwindigkeit  $V$  für die Querschnitte D14 und D20 der in Abb. 6.1 gezeigten Situation auf der A9-Süd. Sind um etwa 9:20 bei D14 bzw. knapp vor 10:00 bei D20 generell Beschleunigungen oder Verzögerungen zu beobachten? **Martin: Daten holen+plotten!**

über der Zeit aufgetragen und für jeden Querschnitt  $k$  die untere Integrationsgrenze  $t_0^{(k)}$  als Durchgangszeit eines "Testfahrzeugs" gewählt. Der horizontale Abstand zweier Kurven  $n_k(t)$  und  $n_l(t)$  gibt direkt die angenäherte Reisezeit zwischen den Querschnitten  $k$  und  $l$  an (vgl. Abb. 5.5).

### Verständnisfrage:

- (i) Unter welcher Bedingung gilt der Zusammenhang "Reisezeit gleich horizontaler Abstand" exakt?
- (ii) Wie kann man sich behelfen, wenn kein Testfahrzeug für die Bestimmung der Anfangszeiten  $t_0^{(k)}$  zur Verfügung steht?

## 5.3. Geschwindigkeits-Dichte-Relation

Mit einem Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm bekommt man einen schnellen Überblick über das mitlere Fahrverhalten eines Fahrer-Fahrzeug-Kollektivs: Wie wird es von dichtem Verkehr, von Umweltfaktoren, Tempolimits etc. beeinflusst? Generell gilt (vgl. Abb. 5.6):

- Für sehr kleine Dichten sind die Fahrer in der Regel ungehindert und eine durch die Punktfolge gezogene Fitkurve gibt für die Extrapolation  $\rho = 0$  die mittlere **freie Geschwindigkeit  $V_0$**  des Fahrerkollektivs an. Diese Geschwindigkeit ist dabei das Minimum aus
  - (i) der tatsächlich gewünschten Geschwindigkeit,
  - (ii) der durch die Motorisierung möglichen Geschwindigkeit (v.a. bei LKW am Berg relevant) und
  - (iii) ggf. einem Tempolimit (zuzüglich einer mittleren Überschreitung desselben von z.B. 10 km/h durch die Fahrer).

Häufig wird aber  $V_0$  auch direkt als **Wunschgeschwindigkeit** bezeichnet.

- Mit wachsender Dichte nimmt die mittlere Geschwindigkeit in der Regel ab. Je steiler der Gradient, desto eher können sich Störungen zu Verkehrszusammenbrüchen aufschaukeln (vgl. Stabilitätsanalysen in Abschnitt 10.6).

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

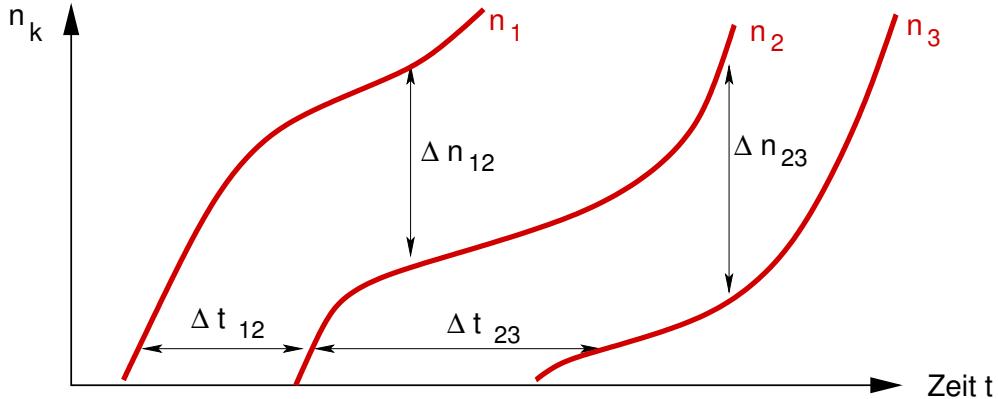


Figure 5.5.: Bestimmung der Reisezeiten zwischen je zwei Querschnitten mit Hilfe kumulierter Fahrzeugzahlen.

Bei der Interpretation dieses Diagramme ist zu beachten, dass durch die Elimination der Zeit möglicherweise heterogene Fahrerkollektive sowie unterschiedliche äußere Verhältnisse in einen Topf geworfen werden. Beispiele hierfür sind

- unterschiedliche LKW-Anteile zu unterschiedlichen Zeiten,
- unterschiedliche Witterungseinflüsse (Tag-Nacht, trocken-nass),
- im Falle von Verkehrsbeeinflussungsanlagen zeitabhängige Tempolimits.

Dies gilt auch für die im folgenden Abschnitt 5.4 diskutierten Fluss-Dichte-Diagramme.

### Verständnisfrage:

- (1) Im linken oberen Plot des  $(V, \rho)$ -Diagramms in Abb. 5.6 nimmt die mittlere Geschwindigkeit für sehr kleine Dichten wieder ab. Bedeutet dies, dass die Fahrer "Angst vor der freien Autobahn" haben? Erklären Sie den Sachverhalt mit statistischen Argumenten.
- (2) Im rechten oberen Plot der Abbildung gibt es bei Dichten von etwa 10 Fahrzeugen/km/Spur für die linke Spur (rote, offene Symbole) eine Anhäufung bei etwa 100 km/h und eine bei etwa 125 km/h. Können Sie eine mögliche Ursache dieser Bimodalität nennen? Vergleichen Sie hierzu auch den Plot links unten und berücksichtigen Sie, dass im betrachtete Abschnitt einer Verkehrsbeeinflussungsanlage aktiv ist.

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

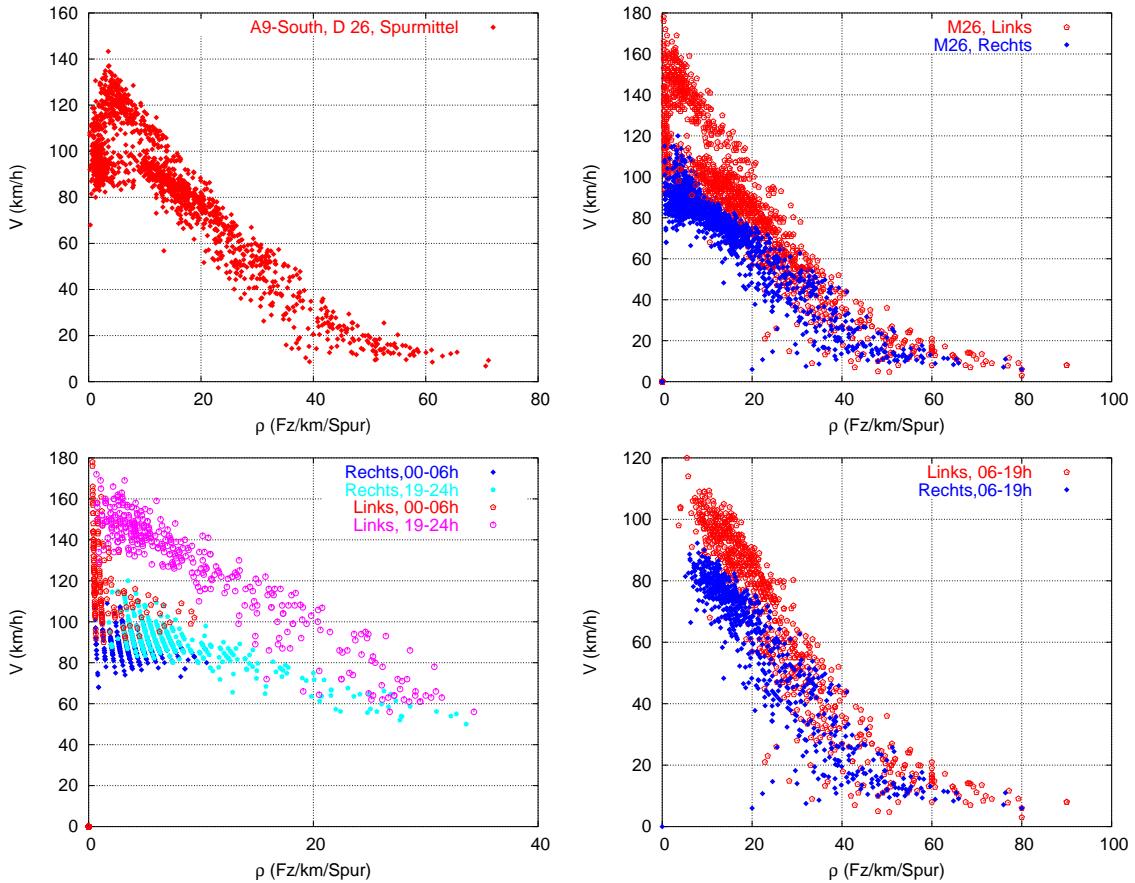


Figure 5.6.: Geschwindigkeits-Dichte-Relation aus 1-Minuten-Daten. Links oben: Mittel über alle Fahrstreifen; rechts oben: spuraufgelöst; links unten: 19h-06h; rechts unten: 06-19h

## 5.4. Fluss-Dichte-Diagramm

*Ich glaube nur an Statistiken, die ich selbst gefälscht habe.*  
Winston Churchill

Mit dem Fluss-Dichte Diagramm lassen sich so viele Aussagen über das "makroskopische", d.h., mittlere Verhalten eines Fahrer-Fahrzeug-Kollektivs treffen, dass es manchmal auch als **Fundamentaldiagramm** bezeichnet wird:

- Die Wunschgeschwindigkeit ist gleich der asymptotischen Steigung  $Q'(0)$  der Fitkurve  $Q(\rho)$  bei  $\rho = 0$  (genauer allerdings durch den Geschwindigkeits-Dichte-Plot bestimmbar).
- Die tatsächliche mittlere Geschwindigkeit bei gegebener Dichte ist die Steigung der Sekante,  $Q(\rho)/\rho$ .

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

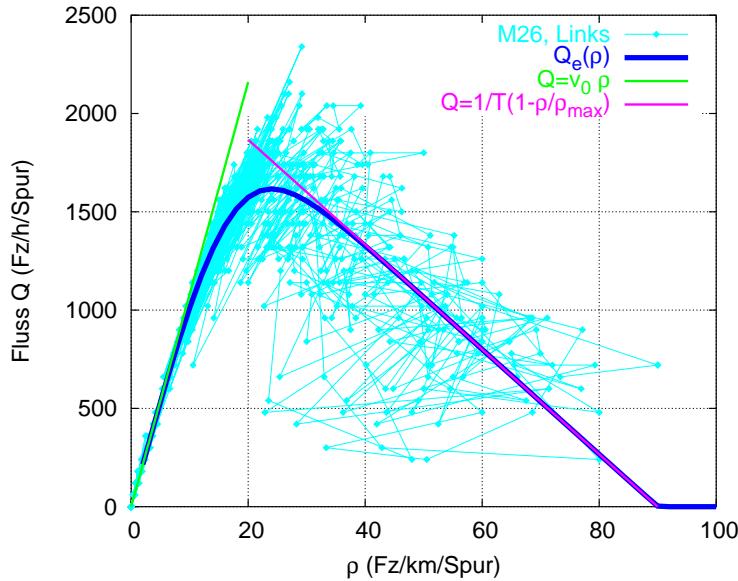


Figure 5.7.: Fundamentaldiagramm aus 1-Minuten-Daten (A9-Süd nördlich von München). Die dicke durchgezogene Linie ist ein Fit der Punkte-Wolke mit einem Mikromodell.

- Der maximale Wert von  $Q(\rho)$  gibt die **Kapazität** der Richtungsfahrbahn pro Fahrstreifen an.
- Das Inverse des von Null verschiedenen kleinsten Dichtewertes  $\rho_{\max}$ , bei dem  $Q(\rho_{\max}) = 0$ , ist gleich der mittleren Fahrzeuglänge zuzüglich des mittleren Abstands, der bei Stillstand eingehalten wird.
- Aus der negativen Steigung von  $Q(\rho)$  bei hohen Dichten lässt sich die mittlere **Netto-Folgezeit**  $T$  der Fahrer bestimmen.
- In Abschnitt über makroskopische Verkehrsmodellierung wird außerdem gezeigt, wie sich aus dem Fundamentaldiagramm Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von Staufronten sowie von kleinen Schwankungen makroskopischer Größen ablesen lassen.

Bisweilen wird beim Verkehrszusammenbruch eine abrupte Abnahme der Kapazität, also des möglichen Verkehrsflusses, beobachtet, der sogenannte **Capacity drop**, vgl. Abb. 5.8. In diesem Fall ist die Verkehrsdynamik **hysteretisch**, d.h. das Verhalten hängt bei gleicher Nachfrage von der Vorgeschichte ab: Bricht der Verkehr zusammen, geht der Verkehrszustand im Fundamentaldiagramm vom "freien Zweig"  $Q_f(\rho)$  in den "gestauten Zweig"  $Q_c(\rho)$  über und der maximal mögliche Durchfluss wird geringer. Dies hat die fatale Folge, dass ein einmal entstandener Stau sich erst bei sehr viel geringerer Nachfrage wieder auflösen kann.

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

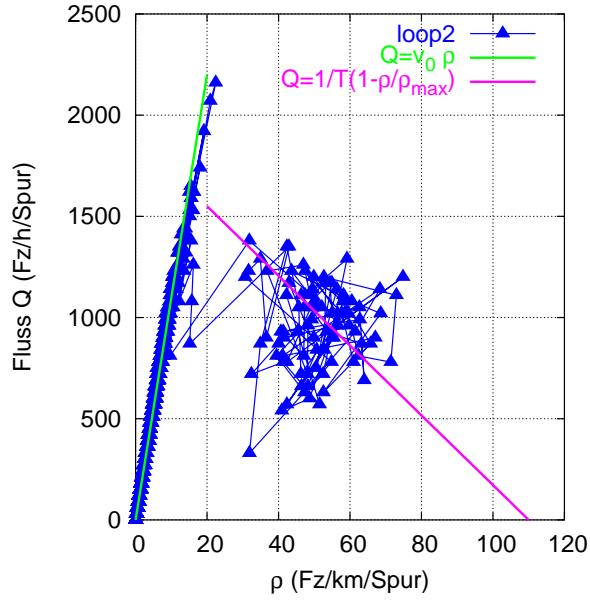


Figure 5.8.: Fundamentaldiagramm bei hysteretischer Verkehrsdynamik. Zeitreihen dieser Daten sind in Abb. 5.1 zu finden.

Bei der Interpretation von Fundamentaldiagrammen sollte man immer im Hinterkopf behalten, dass bei hohen Dichten das Ergebnis (i) stark von der verwendeten Mittelungsmethode abhängt und die Dichtebestimmung sehr fehlerhaft ist (vgl. Abb. 5.9).

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

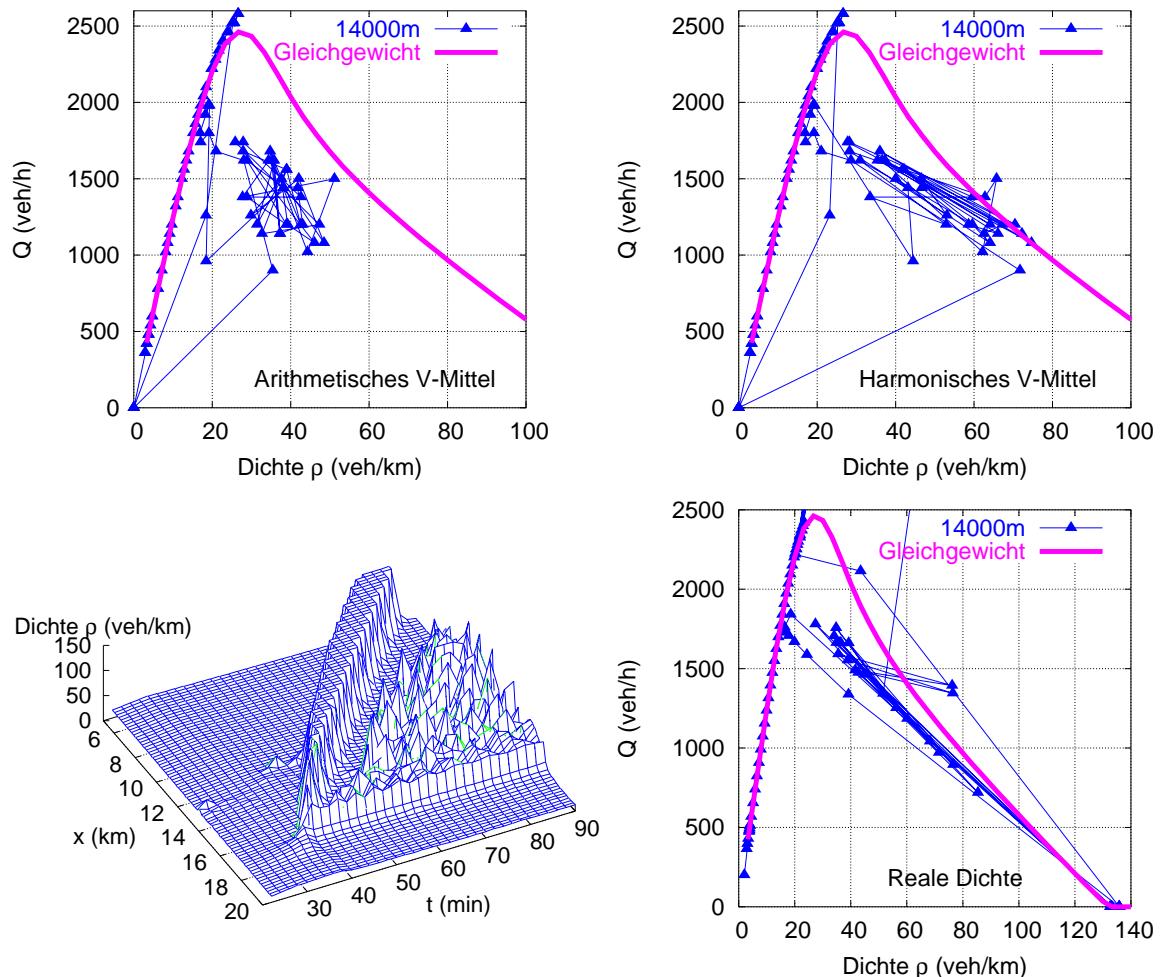


Figure 5.9.: Das Fundamentaldiagramm hängt bei hohen Dichten stark vom verwendeten Mittel ab (Simulationsbeispiel)

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

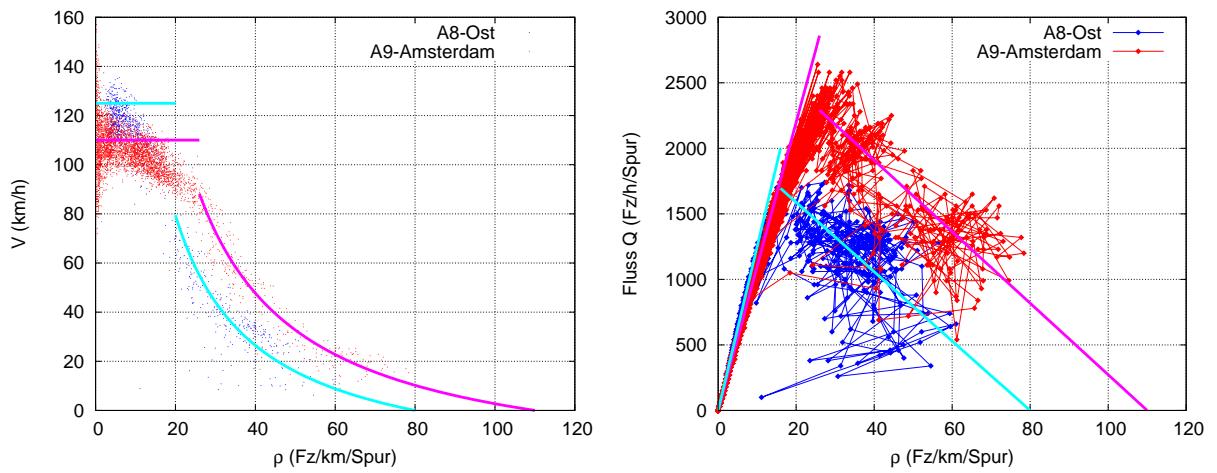


Figure 5.10.: Fahrstreifengemittelte Fundamentaldiagramme für Abschnitte der holländischen A9 von Haarlem nach Amsterdam und der A8-Ost im Bereich des Irschenbergs.

## 5. Darstellung von Querschnittsdaten

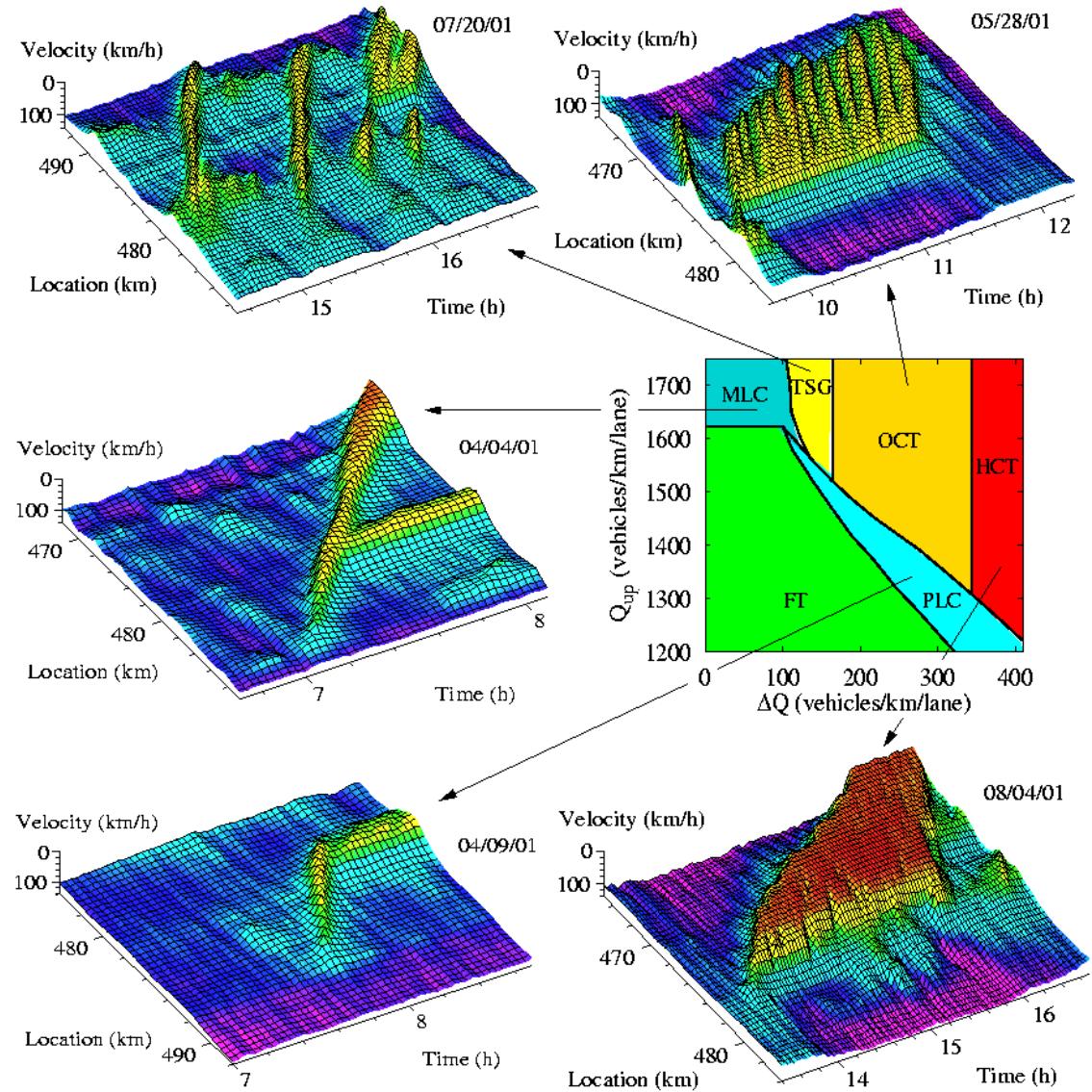


Figure 5.11.: Typische Beispiele der raumzeitlichen Dynamik von Staus.

# 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

Computer sind Genieprothesen

Dieter Hildebrandt

## 6.1. Raumzeitliche Darstellungen von dynamischen Größen

Verkehrsstaus zeigen ein komplexes raumzeitliches Verhalten. Manche breiten sich aus, oft ist die Staufront jedoch an eine Störstelle gebunden. Darüberhinaus gibt es Stop-and-Go-Wellen und sogar isolierte "stehende Stauwellen", vgl. Abb. 5.11.

Für eine Verkehrszustandsanalyse (z.B. für den Verkehrsfunk) benötigt man also eine raumzeitliche Darstellung des aktuellen Verkehrsgeschehens.

Hat man aggregierte Daten von mehreren benachbarten Querschnitten, kann man durch *raumzeitliche Mittelung* zu einer raumzeitlichen Darstellung (**3d-Plot** oder **Contourplot**) gelangen. Da man für diese Darstellungen Daten an allen Orten  $x$  und zu allen Zeiten  $t$  innerhalb des betrachteten raumzeitlichen Gebiets benötigt, diese aber nur als makroskopische Geschwindigkeiten  $V_{ki}$ , Flüsse  $Q_{ki}$  etc. an bestimmten Stellen  $x_k$  und zu bestimmten Zeitpunkten  $t_i$  vorliegen, benötigt man ein **Interpolationsverfahren**.

Zur einfacheren und gleichzeitig allgemeineren Formulierung einer solchen Mittelungsmethode unterscheiden wir nicht mehr explizit, von welchem Detektorindex ein Datenpunkt kommt, da es nur auf Orte und Zeit der Herkunft der Daten ankommt. Konsequenterweise fassen wir die je  $n$  Datenpakete von jedem der  $K$  Detektoren zu  $m = Kn$  Datenpakete mit einem gemeinsamen Index  $j = \{k, i\}$  zusammen. Jedes Datenpaket wird von einem gewissen Ort  $x_j = x_{k(j)}$  zu einer gewissen Zeit  $t_j = t_{i(j)}$  ausgesendet, wobei  $k(j)$  den Detektorindex und  $i(j)$  den Zeitindex des Datenpunktes  $j$  kennzeichnet. Dies ist aber im Weiteren nicht mehr wichtig. Wesentlich ist aber, dass die Darstellung mit dem gemeinsamen Index  $j$  eine **Datenfusion** mit anderen Arten von Verkehrsdaten erlaubt (vgl. Abb. 6.2), wie in Kapitel 6 auf S. 36 dargestellt werden wird.

Um z.B. die Geschwindigkeit  $V(x, t)$  am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  zu ermitteln, bilden wir nun ein *kernbasiertes* gewichtetes Mittel aller Geschwindigkeiten  $V_j = V_{ki}$

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_{ki}(x, t) V_{ki} = \sum_{j=1}^m w_j(x, t) V_j \quad (6.1)$$

wobei Geschwindigkeiten  $V_j$ , deren Herkunft  $(x_j, t_j)$  räumlich und zeitlich nahe an  $(x, t)$  liegt, verstärkt gewichtet werden, z.B. durch die Wichtungsfunktion

$$w_j(x, t) = \frac{\exp \left[ -\frac{|x-x_j|}{\sigma} - \frac{|t-t_j|}{\tau} \right]}{\sum_{l=1}^m \exp \left[ -\frac{|x-x_l|}{\sigma} - \frac{|t-t_l|}{\tau} \right]}. \quad (6.2)$$

## 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

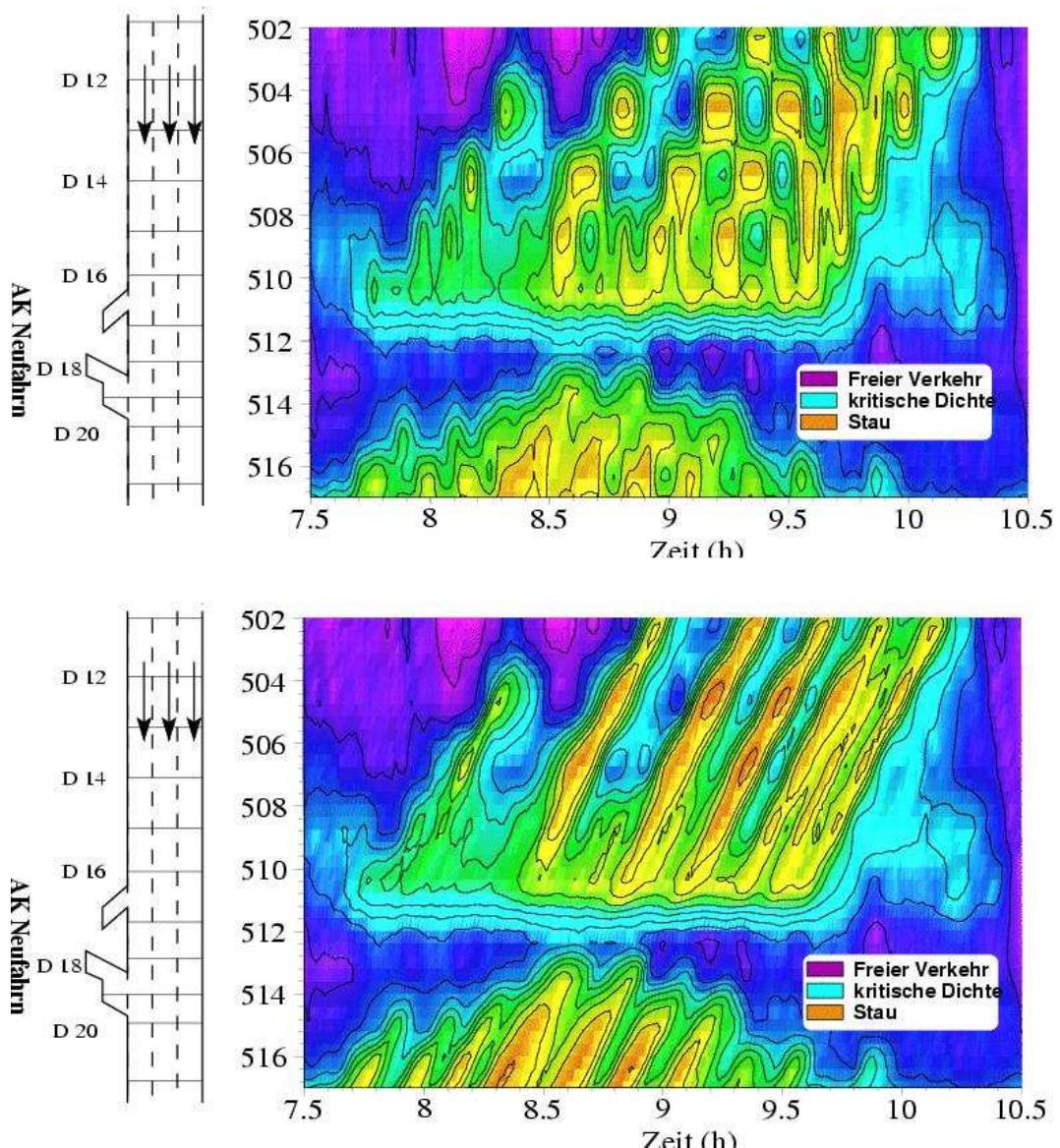


Figure 6.1.: Raumzeitliche Darstellung von Stop-and-Go-Wellen aus isotroper Mittelung von 1-Minutendaten nach Gl. (6.1)(oben) und mit einem speziellen adaptiven Mittelungsverfahren, dem ASM (unten) an realen Detektordaten der A9-Süd nördlich von München.

## 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

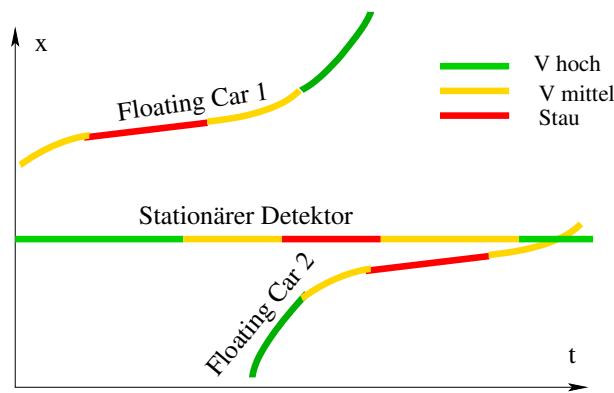


Figure 6.2.: Beispiel heterogener Datenquellen: Querschnittsdaten und FC-Daten.

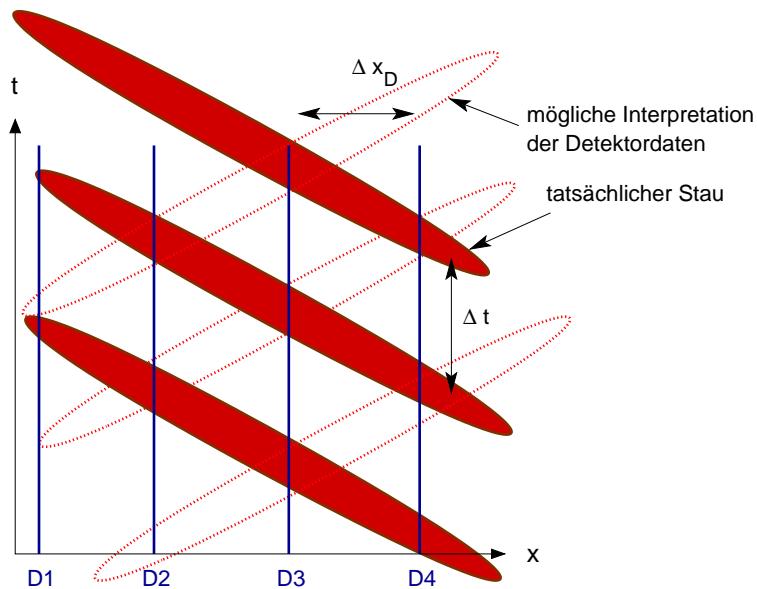


Figure 6.3.: Zweideutigkeit der Interpretation von Stop-and-Go-Wellen aus Querschnittsdaten. Neben den "wahren" Stop-and-Go-Wellen (ausgefüllt) ist auch die punktiert gezeichnete Interpretation denkbar. Die immer strohausträts gerichtete Ausbreitungsbewegung der Stauwellen schließt allerdings die letztere Interpretation aus.

## 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

Durch diese auch als **Wichtigkern** bezeichnete Funktion werden darüber hinaus Schwankungen mit Zeitskalen kleiner als  $\tau$  und Ausdehnungen kleiner als  $\sigma$  weggemittelt, da diese für die meisten Anwendungen (Angabe von Reisezeiten im Verkehrsfunk!) nicht relevant und auch nicht reproduzierbar sind.

Ist der Abstand zwischen zwei Detektorquerschnitten größer als der halbe räumliche Abstand zwischen zwei Stop-and-Go-Wellen, bekommt man mit dieser **isotropen Mitteilung** allerdings Artefakte wie das "Eierkarton-Muster" in Abb. 6.1 links, welche die Interpretation von Stauwellen zweideutig werden lässt (Abb. 6.3).

Mit verfeinerten adaptiven Glättungsverfahren kann man allerdings die Stop-and-Go-Wellen aus den Daten rekonstruieren wie in Abb. 6.1 (unterer Plot) und in Abb. 5.11 gezeigt. Eines dieser Rekonstruktionsverfahren ist die **Adaptive Smoothing Method** (ASM). Bei dieser wird berücksichtigt, dass sich Schwankungen im Verkehr mit einer vom jeweiligen Verkehrszustand abhängigen charakteristischen Geschwindigkeit  $v_g$  fortbewegen, was in Kap. 9 weiter ausgeführt wird. Die Hauptschritte in dieser Methode sind die Folgenden:

1. Bestimmung von raumzeitlich gemittelten Geschwindigkeiten und anderen interessierenden makroskopischen Größen mit zwei verschiedenen Wichtigkernen ("Filtern"): Einer berücksichtigt die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen im freien Verkehr, welche wegen der schwachen Wechselwirkungen der Fahrzeuge untereinander nahezu gleich der Fahrzeuggeschwindigkeiten sind. Der andere berücksichtigt die typische Ausbreitungsgeschwindigkeit von Stop-and-Go-Wellen und anderen Störungen im gebundenen Verkehr, welche *entgegen* der Fahrtrichtung gerichtet ist und betragsmäßig etwa 15 km/h beträgt. In den Wichtigkernen der Gl. (6.2) wird dabei die Zeitdifferenz  $t - t_j$  durch  $t - t_j - v_g(x - x_j)$  ersetzt, wobei  $v_g$  die jeweilige Ausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet (Abb. 6.4).
2. Bestimmung anhand der beiden Filter, ob am betrachteten Punkt  $(x, t)$  eher Stau oder eher freier Verkehr vorliegt und daraus Berechnung des "Stauungsgrades"  $w_{\text{cong}}$ , welcher zwischen 0 und 1 liegt.<sup>1</sup>
3. Das Endergebnis für die Geschwindigkeit oder einer anderen Größe ergibt sich nun durch die Summe aus den mit  $w_{\text{cong}}$  gewichteten Ergebnis des Filters für gestauten Verkehr und den mit  $(1 - w_{\text{cong}})$  gewichteten "freien" Filter.

### Verständnisfrage:

Begründen Sie die obige Aussage, dass man bei Detektorabständen größer als die halbe Wellenlänge im Falle gleichmäßiger Stop-and-Go-Wellen Artefakte wie *in die falsche Richtung laufender* Stop-and Go Wellen bekommt.

Verdeutlichen Sie die Situation, indem Sie idealisierte regelmäßige Stop-and-Go Wellen der Wellenlänge  $\lambda$  (vgl. Abb. 6.3) sowie die Positionen mehrerer Messquerschnitte mit gleichem Abstand  $\Delta x$  voneinander in ein Raum-Zeit-Diagramm zeichnen!

<sup>1</sup>Dies kann man auch im Sinne der *Fuzzy-Logik* interpretieren.

## 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

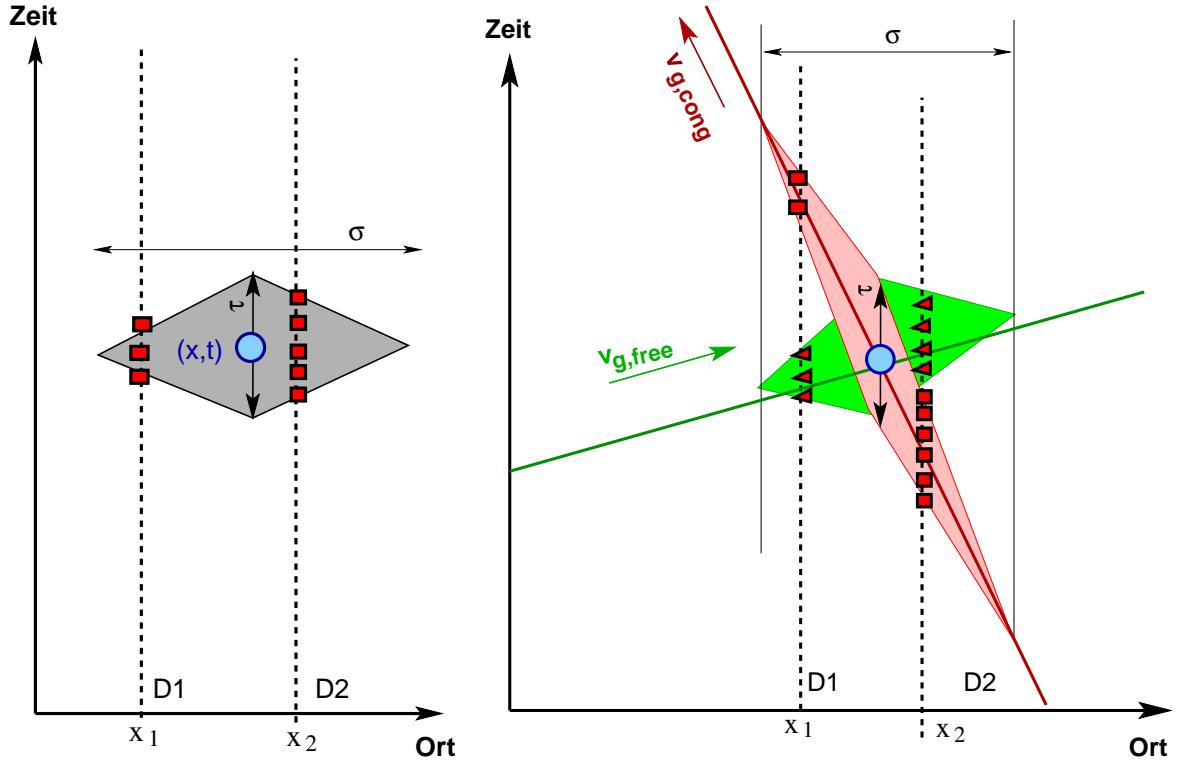


Figure 6.4.: Schema der raumzeitlichen Mittelung zur Rekonstruktion des Verkehrszustands am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  (blaue Punkte) mit der isotropen Gewichtung nach Gl. (6.2) (links) und anisotrop mit der Adaptive Smoothing Method (rechts). Die Rauten geben jeweils den raumzeitlichen Bereich an, in der die Wichtungsfunktion  $w_j$  in Gl. (6.2) Werte wesentlich ungleich Null annimmt. Im rechten Teilbild wird die grüne Raute für freien Verkehr und die rote Raute für gestauten Verkehr eingesetzt. Die Form der Rauten wird durch die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen ( $v_{g,free}$  im freien Verkehr und  $v_{g,cong}$  im gestauten Verkehr) bestimmt. Die roten Symbole auf den Raum-Zeit-Linien der Detektoren geben die Minutendaten der jeweiligen Detektoren an, die wesentlich zur Mittelung beitragen.

## 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

### 6.2. Datenfusion

*Auf der mir zugewandten Seite ist die Kuh braun*  
Mathematiker auf die Frage, welche Farbe die Kuh neben der Straße hat

Unter **Datenfusion** bezeichnet man die gemeinsame Berücksichtigung verschiedenartigster Daten aus heterogenen Datenquellen, z.B.

- Querschnittsdaten,
- FC-Daten,
- Floating-Phone-Daten
- Meldungen von Polizei und Straßenämtern, etc.

Jede dieser Datenkategorien beschreibt i.A. andere Aspekte des Verkehrszustands und die verschiedenen Datenquellen können sich sogar widersprechen. Die Kunst der Datenfusion ist, trotzdem den maximalen Nutzen aus der angebotenen Information zu ziehen, vgl. Abb. 6.2.

**Verständnisfrage:**

Wodurch können Inkonsistenzen bei heterogenen Datenquellen entstehen?  
Geben Sie ein Beispiel für die Daten der Abb. 6.2.

Ein Beispiel eines Algorithmus zur Datenfusion ist die Erweiterung der Glättungsformel Gl. (6.1) mit (6.2) auf Datenpunkte von "Floating Cars" und auf externe Informationen. Der "Sammelindex"  $j$  der beiden Formeln geht dann nicht nur über alle Querschnitte  $k$  und Zeitpunkte  $i$ , sondern auch über alle Floating-Car-Indices  $\alpha$  und Sendezeitpunkte  $t_\alpha^m$  des jeweiligen Floating-Cars sowie über Zeiten  $t_n$  von externen Nachrichten sowie die Orte  $x_n$ , auf die sich die Nachricht bezieht.

Alle Datenquellen  $j$  haben dabei gemeinsam, dass zum Zeitpunkt  $t_j$  am Ort  $x_j$  die Größe  $Y_j$  (z.B. die Geschwindigkeit  $V_j$  oder die Dichte  $\rho_j$ ) gemessen wird. Auch die Vielfalt der Datenquellen in folgender schematischer Abbildung kann durch Gl. (6.1) fusioniert werden!

Eine besondere Herausforderung stellen Realtime-Anwendungen der Verkehrslageschätzung (z.B. für Stauinformationen) dar, da dann natürlich Datenpunkte zu Zeiten in der Zukunft nicht verwendet werden können.

**Verständnisfrage:**

In welche Richtung fliegt der Hubschrauber in Abb. 6.5 ?

#### 6.2.1. Gewichtung unterschiedlich zuverlässiger Daten

In der Datenfusionsformel (6.1) hängt die Wichtung  $w_j(x, t) = w(x - x_j, t - t_j)$  gemäß (6.2) nur vom Abstand der betrachteten Stelle  $(x, t)$  von der des Datenpunktes  $(x_j, t_j)$

## 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

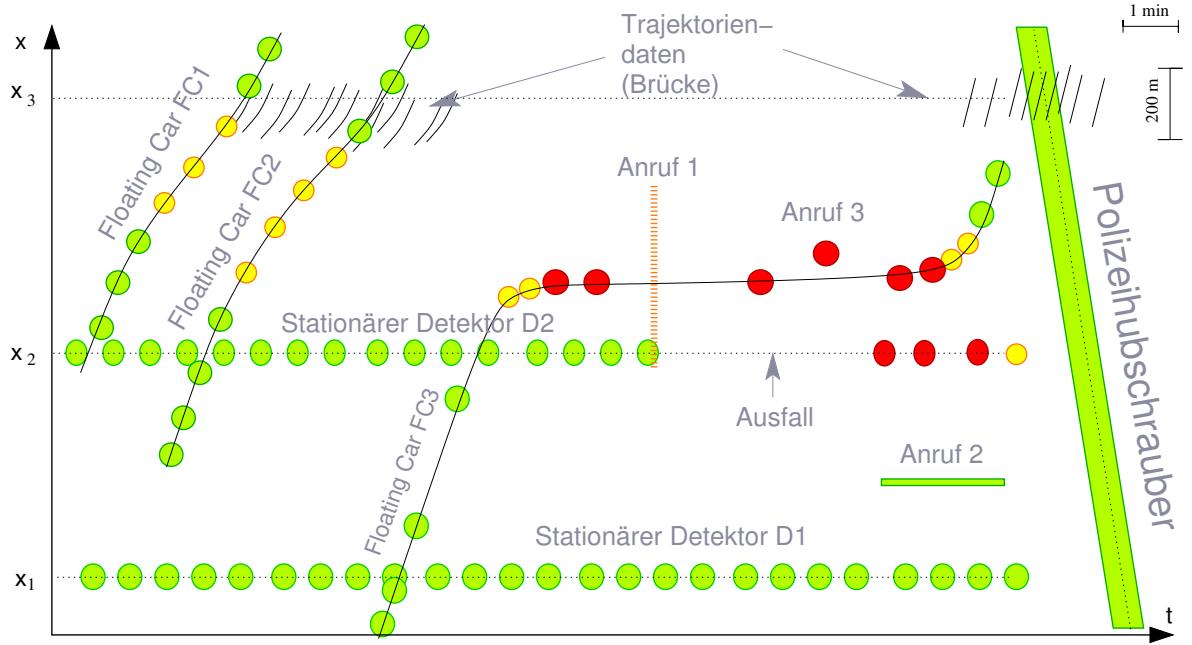


Figure 6.5.: Vielfalt möglicher Datenquellen im Raumzeit-Diagramm. Die senkrechten gepunkteten Linien stellen zwei stationäre Detektoren an den Positionen  $x_1$  und  $x_2$  dar, die minütlich Daten senden (grüne Kreise=freier Verkehr, gelbe=dichter Verkehr, rot=Stau). Drei Floating Cars durchqueren das raumzeitliche Gebiet und senden ebenfalls Daten, aber nicht in festen Abständen, sondern ereignisorientiert. Auf einer Brücke bei  $x = x_3$  ist eine Kamera samt Videoauswertung installiert, die in einem begrenzten Bereich Trajektoriendaten liefert (schwarze Kurvenstücke). Per Mobiltelefon wurde ein Unfall gemeldet (Anruf 1), der Anrufer konnte den Unfallort jedoch nur innerhalb des gestrichelten Bereichs lokalisieren. Anrufer 2 beobachtete von einer Brücke aus während eines Zeitraums freien Verkehr und Anrufer 3 sagte, dass er um 14:55 bei km 435.5 im Stau sitzt. Schließlich beobachtet ein darüberfliegender Hubschrauber freien Verkehr.

## 6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion

ab. Es werden also alle Datenpunkte prinzipiell als gleich “wichtig” betrachtet. Sicherlich ist es aber sinnvoll, neben dieser räumlichen Wichtung auch eine Wichtung nach Zuverlässigkeit durchzuführen, also zuverlässigere Datenquellen stärker zu gewichten, sonst kann in ungünstigen Fällen eine Fusion sogar zu einer Verschlechterung des Ergebnisses führen. Die Bestimmung entsprechender Wichtungskoeffizienten  $\alpha_m$  für verschiedene Datenkategorien (z.B.  $m = 1$  für Schleifendetektoren,  $m = 2$  für Infrarotdetektoren,  $m = 3$  für FCD ...) ist i.A. schwierig. Einen Anhaltspunkt kann aber das analytische Ergebnis unter folgenden idealisierten Bedingungen liefern:

1. Die verschiedenen Datenkategorien  $m$  weisen keine systematischen Fehler auf,
2. Die Varianz  $\theta_m$  der zufälligen Fehler ist bekannt,
3. Die Korrelation der Fehler verschiedener Datenkategorien verschwindet.

Entkoppelt man die Wichtung nach Zuverlässigkeit von der räumlichen Wichtung durch Produktbildung  $w_j(x, t)\alpha_{m(j)}$ , erhält man folgendes restringierte Optimierungsproblem für die Wahl der Wichtungskoeffizienten  $\alpha_m$ : Minimiere die Varianz der Fehler der Datenfusion,

$$\theta(\{\alpha_m\}) = \sum_m \alpha_m^2 \theta_m \stackrel{!}{=} \min_{\{\alpha_m\}} \quad (6.3)$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_m \alpha_m = 1. \quad (6.4)$$

Hierbei folgt die Fehlervarianz (6.3) direkt aus der Varianz einer Linearkombination unabhängiger Zufallsgrößen (siehe Statistik-Skript), während die Nebenbedingung schlicht bedeutet, dass sich die Gewichte zu 1 aufsummieren.

Solche restringierten Extremalwertaufgaben werden schnell und elegant mit dem Verfahren der **Lagrange-Multiplikatoren** gelöst:

- Jede Nebenbedingung wird in der Form  $B_n = 0$  formuliert und bekommt einen Lagrange-Multiplikator  $\lambda_n$
- Die Größe  $L = \theta - \sum_n \lambda_n B_n$  wird nach den unabhängigen Variablen (hier die  $\{\alpha_m\}$ ) minimiert.
- Die bis jetzt unbekannten Multiplikatoren  $\lambda_n$  werden durch direktes Einsetzen der Nebenbedingungen bestimmt.

Hier liegt nur eine Nebenbedingung vor und die zu minimierende Funktion ist gegeben durch  $L = \theta - \lambda (\sum_m \alpha_m - 1)$ . Minimierung ergibt

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_m} = 2\alpha_m \theta_m - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_m = \frac{\lambda}{2\theta_m}$$

Bestimmt man nun  $\lambda$  durch (6.4), erhält man als Endergebnis

$$\alpha_m = \frac{\frac{1}{\theta_m}}{\sum_{m'} \frac{1}{\theta_{m'}}} \quad (6.5)$$

## **6. Verkehrslageschätzung und Datenfusion**

Die Wichtung ist also proportional dem Inversen der Fehlervarianz.

## **Part II.**

# **Modellierung der Verkehrsflussdynamik auf Richtungsfahrbahnen**

# 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Gleichungen sind wichtiger für mich, weil die Politik für die Gegenwart ist, aber eine Gleichung etwas für die Ewigkeit.

Albert Einstein

## 7.1. Historie und Abgrenzung von verwandten Gebieten

Die Modellierung der Verkehrsdynamik begann bereits in den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts; der erste Pionier war wohl B.D. Greenshields (Abb. 7.1).

Erst ab etwa 1990 führten die steigende Verkehrsbelastung, die bessere Datenlage und der zunehmend einfachere Zugriff auf hohe Rechenleistung zu verstärkten Aktivitäten.

Sowohl die hier behandelte **Verkehrsflussdynamik** als auch die (in einer separaten Vorlesung behandelte) **Verkehrsplanung** untersuchen zeitlich veränderliche Verkehrsphänomene. Die beiden Gebiete unterscheiden sich jedoch in Folgendem deutlich:

- Während in der Verkehrs(fluss)dynamik meist wenige Stunden betrachtet werden, geht es bei der Verkehrsplanung um Tage bis Jahre (gl. Abb. 1.2).
- Die Verkehrsflussdynamik setzt i.A. eine extern gegebene Verkehrsnachfrage sowie eine feste Infrastruktur voraus, während die Verkehrsplanung die Dynamik der Nachfrage selbst sowie Auswirkungen einer Veränderung der Infrastruktur modelliert.
- In der Verkehrsflussdynamik wird das menschliche *Fahrverhalten* (Beschleunigen, Bremsen, Spurwechseln, Abbiegen etc.) untersucht, während die übergeordneten Aktionen wie Zahl und Art der zurückgelegten Wege einschließlich Zielwahl (Entfernung), Verkehrsmittelwahl und Routenwahl in das Gebiet der Verkehrsplanung fällt.

Dies spiegelt sich in den typischen Anwendungsbereichen der verschiedenen Modellierungsansätze. *Beispiel:* Man kann die Wahrscheinlichkeit von Staus u.a. verringern durch

1. adaptive Verkehrsbeeinflussung wie Tempolimits und LKW-Überholverbote,
2. indem man die Autofahrer zum Umsteigen auf andere Verkehrsmittel bewegt oder die angefahrenen Ziele (Arbeitsstätten, Läden etc) verkehrsgünstiger legt.

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

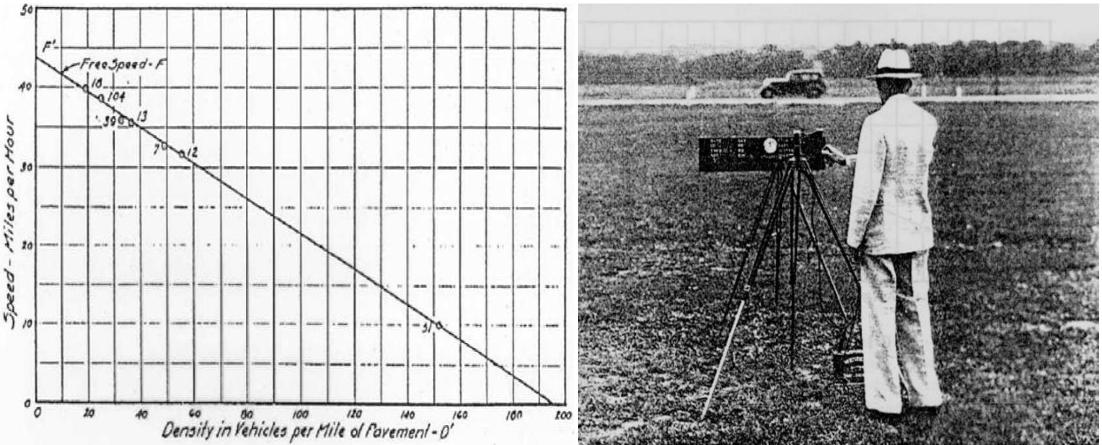


Figure 7.1.: Verkehrstheorie in den 1930-er Jahren: Historisches Geschwindigkeits-Dichte Diagramm und dazugehörige Messung von Greenshields [B.D. Green-shields, "The Photographic Method of Studying Traffic Behavior", Proc. 13. Annual Meeting Highway Research Board (1934), pp. 382.]

Im ersten Fall simuliert man mit Modellen der Verkehrs dynamik, im letzteren Fall wendet man Methoden der Verkehrsplanung an. Man beachte, dass "Dynamik" allein kein Unterscheidungsmerkmal ist, da auch in der Verkehrsplanung zunehmen eine *dynamische Verkehrsumlegung* (d.h. verkehrs- und zeitabhängige Routenwahl) modelliert wird. Der Begriff **Verkehrs dynamik** umfasst beide Ansätze, so dass man spezifischer von **Verkehrs fluss dynamik** spricht, wenn nur die Modellierung von Beschleunigungen, Verzögerungen, Fahrsteifenwechsel und Richtungsänderungen gemeint ist.

## 7.2. Modellkategorien

Verkehrs flussmodelle können nach verschiedenen Ordnungsprinzipien eingeteilt werden:

### 7.2.1. Inhaltliche Einteilung

Das reale Verkehrsgeschehen kann konzeptionell auf verschiedene Arten abstrahiert und damit modelliert werden:

**Makroskopische Modelle** betrachten den Verkehrs fluss in Analogie zu einer strömenden Flüssigkeit oder einem Gas. Die dynamischen Größen sind *lokal aggregierte* Größen wie lokale Verkehrs dichte  $\rho(x, t)$ , lokaler Fluss  $Q(x, t)$ , mittlere Geschwindigkeit  $V(x, t)$  und Geschwindigkeitsvarianz  $\theta(x, t)$ . Da die Aggregation nur lokal erfolgt, sind diese Größen räumlich und zeitlich veränderlich. Sie werden durch **partielle Differenzialgleichungen** oder **iterierte Abbildungen** beschrieben. Makromodelle sind geeignet

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

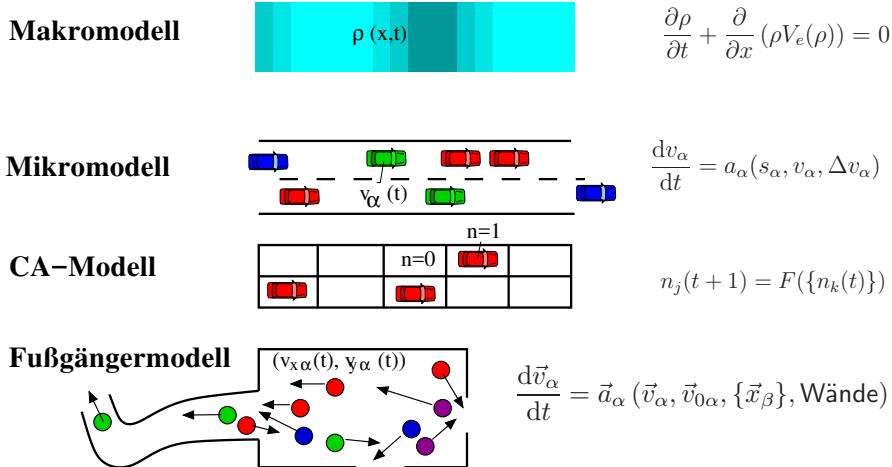


Figure 7.2.: Vergleich der verschiedenen Kategorien von Verkehrsmodellen mit jeweils einer repräsentativen Modellgleichung

- zum Verständnis der Verkehrs dynamik von Staus: Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Staufronten lassen sich makroskopisch viel leichter beschreiben,
- wenn Effekte, die sich nur schwer makroskopisch beschreiben lassen (z.B. Spurwechsel, verschiedene Fahrer-Fahrzeug-Typen), keine Rolle spielen,
- wenn man nur an makroskopischen Größen interessiert ist,
- wenn die Simulationsgeschwindigkeit kritisch ist, z.B. in Realtime-Anwendungen (spielt mit wachsender Rechnerleistung eine immer geringere Rolle),
- wenn die zur Verfügung stehenden Daten aus heterogenen Datenquellen kommen und/oder inkonsistent sind.

Die Anforderungen Realtimefähigkeit und Auswertung heterogener Datenquellen sind insbesondere beim Anwendungsbereich **Verkehrslageschätzung** gegeben. Dabei werden die Daten zu Informationen aufbereitet, welche z.B. über Verkehrsfunk weitergegeben werden oder als Basis für verkehrsadaptive Navigationssysteme (wie *TMC pro*) dienen.<sup>1</sup>

**Mikroskopische Modelle** oder **Fahrzeugfolgemodelle** gehen von den einzelnen "Fahrer-Fahrzeug-Teilchen"  $\alpha$  aus, die als Kollektiv den Verkehrsstrom ausmachen. Sie beschreiben die Reaktion eines jeden Fahrers (Beschleunigen, Bremsen, Spurwechseln) in Abhängigkeit der Nachbarn. Die entsprechenden Größen wie die Positionen  $x_\alpha(t)$ , Geschwindigkeiten  $v_\alpha(t)$  und Beschleunigungen  $\dot{v}_\alpha(t)$  werden durch gekoppelte

---

<sup>1</sup>In diesem Anwendungsbereich sind Verkehrsflussmodellierung und die zur Verkehrsplanung gehörige dynamische Routenwahl miteinander verzahnt: Die Verkehrsflussmodellierung bietet die Entscheidungsgrundlage für die Routenwahl.

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

gewöhnliche Differenzialgleichungen oder iterierte Abbildungen oder durch Zelluläre Automaten beschrieben. Mikromodelle sind die "Modellklasse der Wahl", falls

- die Problemstellung mikroskopische Größen impliziert, z.B. die Simulation von adaptiven Temporeglern und deren Auswirkung auf den sonstigen Verkehr,
- die Heterogenität des Verkehrs eine wichtige Rolle spielt wie bei Simulation der Auswirkung von Tempolimits, LKW-Überholverboten, etc. Wie in Abschnitt 19 noch gezeigt wird, ist dies bei der Simulation aller Maßnahmen zur Verkehrsbeeinflussung der Fall: Grundprinzip ist dabei nämlich immer die Homogenisierung des Verkehrs!
- das Fahrverhalten menschlicher Fahrer (einschließlich Schätzfehler, Reaktionszeiten, Zeiten der Unaufmerksamkeit sowie "Multi-Antizipation" über mehrere Fahrzeuge hinweg) detailliert analysiert werden soll,
- man die Interaktion mit anderen Verkehrsteilnehmern wie Bussen, Radlern, Fußgängern etc. darstellen will.

Mesoskopische Modelle verknüpfen sowohl mikroskopische als auch makroskopische Ansätze, z.B. indem (i) die Parameter des Mikromodells von makroskopischen Größen wie der Verkehrsdichte abhängen, (ii) makroskopische Größen wie Staubeginn und Stauende durch mikroskopische Ratengleichungen (z.B. "Mastergleichungen") für die ein- und ausfahrenden Fahrzeuge beschrieben werden, (iii) in gaskinetischen bzw. Boltzmannartigen Verkehrsmodellen die Änderungen des Verkehrsflusses durch idealisierte "Stoß-Wechselwirkungen" beschrieben werden.

Ansonsten stellen die mesoskopischen Modelle eine bunte Vielfalt ohne weitere Gemeinsamkeiten dar.

### Mikroskopische vs. makroskopische Modelle

Bei der Auswahl der Modellklasse sollte man auch beachten, dass man aus Mikromodellen durch lokale Aggregation häufig makroskopische Größen, also die Dynamik von Dichte, Fluss oder mittlerer Geschwindigkeit, gewinnen kann. Voraussetzung hierfür ist, dass sich in der mikroskopischen Verkehrsdynamik räumliche Bereiche definieren lassen, die

- *mikroskopisch groß* sind, also mehrere Fahrzeuge enthalten, über die gemittelt werden kann. Makroskopische Größen wie Dichte oder Geschwindigkeitsvarianz sind z.B. prinzipiell nur für mehrere Fahrzeuge definiert.
- Gleichzeitig müssen die Bereiche aber auch *makroskopisch klein* sein, d.h. kleiner als die typischen Ausdehnungen der Strukturen (Staus, Stop-and-Go Welen, Unterschiede im Verkehrsfluss etc), die man beschreiben möchte.

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Eine besondere Form der Aggregierung stellt eine simulative Nachbildung der empirischen Verkehrsmessung durch **virtuelle Detektoren** dar, dessen *virtuelle Messungen* man dann mit den Methoden aus den Abschnitten 4 und 5 weiter analysiert.

Die umgekehrte Richtung, d.h. die Gewinnung von Einzelfahrzeuginformationen aus makroskopischen Verkehrsgrößen durch die sogenannte **Disaggregierung** ist i.A. problematischer und nur mit sehr einschränkenden Annahmen möglich.

Eine Anwendung der Aggregierung und Disaggregierung stellt auch die **simultane Verwendung von Mikro- und Makromodellen** dar, bei der man z.B. kritische Stellen wie Streckeninhomogenitäten mikroskopisch modelliert und den Rest makroskopisch. Dazu benötigt man

- einen korrespondierenden Satz aus einem Mikro- und einem Makromodellen, wobei beide Modelle dieselben Modellparameter besitzen und die aggregierten Ergebnisse des Mikromodells möglichst gut denen des Makromodells entsprechen sollten,
- einen **Mikro-Makro Link** für Übergänge vom Mikro- zum Makromodell an einer ortsfesten Stelle (Aggregierung),
- und einen entsprechenden **Makro-Mikro-Link**, bei dem die Disaggregierung eingesetzt wird,

Martin: Bild mit 2 Pfeilen: Mikromodell “Pfeil Aggregierung” Makromodell “pfeil zurück” Disaggregierung

### 7.2.2. Mathematische Einteilung

Verkehrsflussmodelle können auch nach ihrer mathematischen Form unterschieden werden: Martin: siehe auch “traffic stream models” README-trafficStream-jun09.txt

- Bei als **partielle Differentialgleichungen** formulierten Modelle sind sowohl Ort  $x$  als auch Zeit  $t$  kontinuierlich und der ebenfalls kontinuierliche Zustand (z.B. Geschwindigkeit oder Verkehrsichte) wird als Funktion der unabhängigen Variablen  $x$  und  $t$  durch eine oder mehrere Gleichungen beschrieben, welche Ableitungen nach diesen Variablen enthalten. Partielle Differentialgleichungen sind eine geeignete Form zur Beschreibung makroskopischer Modelle. Trotz ihrer kompliziert erscheinenden Form erlauben sie die einfachste Darstellung vieler Sachverhalte wie das Fundamentaldiagramm oder die Ausbreitung von Stauwellen.
- Bei (gekoppelten) **gewöhnlichen Differentialgleichungen** liegen die kontinuierlichen Zustandsgrößen (z.B. Geschwindigkeit oder Index des Fahrstreifens) als Funktion der Zeit  $t$  als einziger unabhängigen Variable vor. Diese mathematische Form ist geeignet zur Beschreibung zeitkontinuierlicher Mikromodelle.
- (Gekoppelte) **Iterierte Abbildungen** (*iterated maps* oder *coupled maps*) zeichnen sich durch diskrete Zeitschritte und kontinuierliche Wertebereiche für den Zustand (z.B. Geschwindigkeit) aus. Die Zustandsgrößen im neuen Zeitschritt

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

sind dabei als Funktion dieser Größen im alten Zeitschritt und evtl. weiterer vergangener Zeitschritte gegeben. Iterierte Abbildungen werden sowohl für Mikro- als auch für Makromodelle eingesetzt. Im Falle von Makromodellen ist der Ort diskret und in Zellen eingeteilt, während er bei Mikromodellen zusammen mit der Geschwindigkeit eine kontinuierliche Zustandsvariable (die Fahrzeugposition) darstellt.

*Formal* sind sie identisch zu den Differenzialgleichungen in Verbindung mit einem (expliziten) numerischen Lösungsverfahren für die Zeitintegration. *Konzeptionell* hingegen besteht ein Unterschied: In iterierten Abbildungen ist die Zeitschrittweite  $\Delta t$  ein Modellparameter und die Genauigkeit der numerische Lösung wird nur durch die Rundungsfehler beschränkt. Bei der numerischen Integration von Differenzialgleichungen hingegen stellt ist der Zeitschritt kein Bestandteil des Modells, sondern eine Hilfsgröße des Lösungsverfahrens. Die mathematische Lösung wird für  $\Delta t \rightarrow 0$  erreicht<sup>2</sup>, während die reale Lösung für  $\Delta t > 0$  mehr oder weniger große Fehler aufweist.

- Bei **Zelluläre Automaten** liegen alle Größen diskretisiert vor:
  - Der *Ort* ist in feste "Zellen" untergliedert,
  - Der *Zustand* jeder Zelle ist entweder 0 (kein Fahrzeug) oder 1 (Zelle enthält ein Fahrzeug).
  - Die *Zeit* wird in festen Zeitschritten aktualisiert. In jedem Zeitschritt wird die Besetzung der Zellen aus den bisherigen Besetzungen neu bestimmt.
- Zelluläre Automaten werden hauptsächlich für mikroskopische Modelle eingesetzt, prinzipiell lassen sich aber auch makroskopische Modelle so beschreiben.
- Schließlich gibt es noch den Fall kontinuierlicher Zeit und diskreter Zustände. Dies ist die mathematische Form der weitaus meisten Spurwechsel-Submodelle, auch bei zeitkontinuierlichen Mikromodellen: Es wird nur ein ganzzahliger Fahrstreifenindex unterschieden, Der Wechsel der Fahrstreifen also (unrealistisch) als *instantaner Wechsel* dargestellt.<sup>3</sup>

### 7.2.3. Einteilung gemäß weiterer Kriterien

Martin: Übersichtsvortrag von Schadschneider!

Je nach Problemstellung werden Verkehrsmodelle auch gemäß weiterer Kriterien unterschieden bzw. eingeteilt:

- **Konzeptionelle Grundlage:** Man unterscheidet **heuristische Modelle** von aus allgemeinen Prinzipien hergeleiteten **First-Principles Modellen**.<sup>4</sup>

---

<sup>2</sup>Zumindest, wenn das Integrationsverfahren *konsistent* ist.

<sup>3</sup>Bei als iterierte Abbildung formulierten Mikromodellen hat das Spurwechsel-Submodell die mathematische Form eines zellulären Automaten.

<sup>4</sup>Da es sich nach wie vor um Verhaltensmodelle handelt, sind die hier gemeinten *first principles* allerdings nicht so universell und unveränderlich wie z.B. physikalische *first principles*.

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Heuristische Modelle bestehen aus einfachen mathematischen Ansätzen (z.B. multivariat-linear oder polynomial in den exogenen Variablen), deren Koeffizienten die Rolle von Modellparametern spielen und z.B. durch Regression an Daten angepasst werden.

First-Principles Modelle hingegen werden aus bestimmten geforderten Eigenschaften abgeleitet. Bei Fahrzeugfolgemodellen kann dies z.B. ein Fahrverhalten sein, welches durch Wunschgeschwindigkeit, Wunschbeschleunigung, komfortable Verzögerung, gewünschte Folgezeit und ein Mindestabstand sein. Idealerweise ist jeder dieser Forderungen ein Modellparameter zugeordnet, dessen Wert dadurch, im Gegensatz zu den heuristischen Modellen, anschaulich ist. Auch diese Modelle werden natürlich an die Daten angepasst. Bei "guten" First-Principles-Modellen bleiben aber auch die kalibrierten Werte im erwarteten Bereich, also z.B. 1 s bis 2 s bei der Folgezeit oder  $0.8 \text{ m/s}^2$  bis  $2.5 \text{ m/s}^2$  bei den Beschleunigungen.

- **Einfluss des Zufalls.** Zufallsterme sind eine Möglichkeit, Aspekte des Verkehrsflusses zu beschreiben, die nicht bekannt, nicht modellierbar, nicht messbar oder echt zufällig sind.<sup>5</sup> In der Implementierung der Modelle in Computern werden sie durch den Einsatz von (Pseudo-)Zufallsgeneratoren realisiert werden. Man unterscheidet **deterministische Modelle** ohne jede Zufallskomponente von **stochastischen Modelle** mit Zufallsanteilen, welche auch Rauschtermen oder stochastische Terme genannt werden. Der Zufall kann dabei an verschiedenen Stellen in das Modell eingreifen:
  - Mit *Beschleunigungsrauschen* kann man phänomenologisch eine gewisse Unvorhersehbarkeit bzw. Irrationalität des Fahrverhaltens abbilden, der Mensch ist ja keine Maschine. Die meisten zellulären Automaten benötigen solche Rauschanteile, um sinnvolle Ergebnisse zu liefern.
  - Mit *Parameterrauschen* kann man zur Beschreibung der menschlichen Unvorhersehbarkeit eine Stufe tiefer ansetzen: Während beim Beschleunigungsrauschen die Beschleunigung nachträglich verrauscht wird, hängen hier die Fahrverhaltensparameter, also die *Eingangsgrößen* der dann deterministischen Beschleunigungsfunktion zufällig von der Zeit ab. Parameterrauschen kann bei Mikro- und Makromodellen eingesetzt werden.
  - Schließlich können auch die Randbedingungen (Zuflüsse und Abflüsse), die Infrastruktur (Streckenkapazitäten) sowie die Zusammensetzung der Fahrzeugflotte stochastische Anteile enthalten.
- **Eigenschaften der Fahrzeugflotte.** Man unterscheidet Modelle mit identischen Fahrer-Fahrzeug-Einheiten von Modellen, welche **heterogenen Verkehr** beschreiben, bei denen also z.B.
  - mehrere Fahrzeugtypen (wie Krafträder, PKW, LKW)

---

<sup>5</sup>Man sagt auch, dass der Zufall nur eingeführt wird, um Unkenntnis vornehm zu beschreiben.

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

- und evtl. für jeden Fahrzeugtyp mehrere Parametrisierungen (z.B. vorsichtige/aggressive PKW-Fahrer oder volle/leere LKW)  
simuliert werden.
- **Berücksichtigung von Fahrstreifenwechseln.** Werden mehrere Fahrstreifen und entsprechende Wechsel zwischen ihnen berücksichtigt, besteht das Verkehrsflussmodell aus den Subkomponenten Längsdynamik (Beschleunigungsmodell) und Querdynamik (Spurwechselmodell).

### Verständnisfrage:

Welche Kategorie von Modellen sind für folgenden Aufgabenstellungen am geeignetsten:

1. Modellgestützte Verkehrszustandsbestimmung für Stauwarnungen oder Routing-Anwendungen,
2. Modellierung von menschlichen Fahrern, einschließlich verschiedener Fahrstile,
3. Entwicklung eines “adaptiven Temporeglers” (ACC, *adaptive cruise control*), also eines Reglers, welcher automatisch in Abhängigkeit von der eigenen Geschwindigkeit, dem Abstand sowie der Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs eine angepasste Beschleunigung ausgibt. (Solche Fahrerassistenzsysteme gibt es in Mittel- und Oberklassefahrzeugen zu kaufen.)
4. Modellierung der *verkehrlichen Auswirkungen* der adaptiven Temporegler und anderer Fahrerassistenzsystemen auf die übrigen (nichtausgestatteten) Fahrzeuge,
5. Modellierung sehr großer Netze, z.B. das Autobahnnetz von ganz Deutschland,
6. Modellierung komplizierter Netze wie Stadtverkehr
7. Abschätzung, ob die häufigen Staus auf Strecke X durch eine neu zu bauende Umgehungsstrecke Y vermieden werden können,
8. Modellierung der Auswirkungen von Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen wie Tempolimits oder Gebote, bestimmte Fahrstreifen zu nutzen.
9. Modellierung der verkehrlichen Auswirkungen von Ausfahrten.

## 7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung

Figure 7.3.: Schematische Skizze der Pilgerströme bei der Hadj in Mekka in den Jahren 2006 und 2008. [Martin: Bild, Zitat](#) Die geänderte Routenführung im Jahre 2008 geht teilweise auf die Ergebnisse der Fußgängermodellierung zurück.

### Verständnisfrage:

Es wird immer wieder für eine Einführung von Tempo 130 auf deutschen Autobahnen argumentiert. Dabei werden vor Allem folgende Gesichtspunkte betrachtet:

- *Sicherheitswirkung*: Bei Tempo 130 geht die Zahl der Unfälle zurück.
- *Verkehrsauswirkung*: Bei gleicher Verkehrsnachfrage wird durch Tempo 130 die dynamische Streckenkapazität erhöht bzw. die Verkehrsstaus reduziert.
- *Umweltauswirkung*: Tempo 130 reduziert den Treibstoffverbrauch, die CO<sub>2</sub>- Emissionen, den Lärm usw.
- *Makroökonomische Auswirkung*: Die volkswirtschaftlichen internen und externen Kosten (Zeitverbrauch, Treibstoffverbrauch, Kosten durch Unfälle usw.) gehen zurück.

Über welche dieser Aspekte kann man mit Verkehrsflussmodellen quantitative Aussagen machen? Gegebenenfalls mit welchen Modellkategorien?

### 7.2.4. Nichtmotorisierter Verkehr

Neben der Verkehrsdynamik von motorisierten Straßenverkehr wird auch die Dynamik von Fußgängerströmen mit meist mikroskopischen **Fußgängermodellen** abgebildet. Wie beim Straßenverkehr unterscheidet man dabei Modelle mit kontinuierlichen Größen, sogenannte **soziale Kräftemodelle**, und diskrete zellulären Automaten. Im Gegensatz zu Kfz-Verkehr können sich Fußgänger frei in *zwei* Raumdimensionen bewegen. Es gibt also zwei gleichwertige Ortskoordinaten *x* und *y* und z.B. neben der Wunschgeschwindigkeit auch eine Wunsch(ziel-)richtung. Anwendungen sind z.B.

- Dimensionierung und Design von Flughäfen, großen Plätzen, Einkaufszentren, Massenveranstaltungen,
- Simulieren von Evakuierungs-Szenarien (aus Gebäuden, Schiffen, etc)

Ein prominentes Beispiel einer Verkehrsflussmodellierung von Fußgängern ist die Modellierung der Pilgerströme bei der jährlichen Hadj von Mekka, bei der Hunderttausende von Pilgern insgesamt drei Säulen (Jamaraths), welche den Teufel darstellen, steinigen müssen. Hintergrund ist eine Verbesserung des Verkehrsflusses durch eine geeignete Routenführung der Pilger. Regelmäßig kam es nämlich in der Vergangenheit als Folge der Staus zu Dutzenden von Todesfällen durch zu Boden getrampelte Pilger.

## **7. Allgemeines zur Verkehrsflussmodellierung**

Für die Verkehrsflussmodellierung weiterer Verkehrsarten wie Radfahrer, Läufer oder Inline-Skater) existieren im Gegensatz zur Verkehrsplanung nahezu keine Verkehrsflussmodelle, obwohl dafür durchaus Bedarf besteht. [Martin: neues Radfahrmodell zitieren](#) Beispiele beinhalten die Modellierung von Radverkehr in Schwellenländern oder der Einsatz von Flussmodellen für Läufer und Inlineskater als Planungs- und Organisationstool für Großveranstaltungen wie Stadtmarathons oder das *Dresdner Nachtskaten* (Bewertung der Streckenführung, Erkennung von Engstellen, ggf. Teilnehmerbegrenzung).

# 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

Wer einen Fehler gemacht hat und ihn nicht korrigiert, begeht einen zweiten.  
Konfuzius

Die **Kontinuitätsgleichung** beschreibt die Tatsache, dass auf einem Streckenabschnitt keine Fahrzeuge “verloren gehen” oder “aus dem Nichts” entstehen. Die Fahrzeugzahl kann sich also nur durch stromaufwärts in den Abschnitt hineinfließenden Verkehr, durch stromabwärts abfließenden Verkehr sowie ggf. durch Zu- und Abflüsse an Ein- und Ausfahrten ändern. Die Kontinuitätsgleichung beschreibt diese Fahrzeugbilanz mit Hilfe der **Verkehrsdichte** sowie der **hydrodynamischen Fluss-Dichte-Beziehung**. Zunächst werden deshalb diese Größen für Richtungsfahrbahnen mit mehreren Fahrstreifen definiert.

## 8.1. Verkehrsdichte und hydrodynamische Fluss-Dichte-Beziehung

Allgemein wird die Verkehrsdichte wie im Abschnitt 4.3.1 durch die Zahl der Fahrzeuge pro Streckeneinheit definiert. Für die Beschreibung des Verkehrsflusses auf Richtungsfahrbahnen mit  $I > 1$  Fahrstreifen sind folgende Verkehrsdichten wichtig:

- Die *Einzeldichte*  $\rho_i(x, t)$  auf dem Fahrstreifen  $i$ ,
- die *Gesamtdichte*  $\rho_{\text{tot}}(x, t)$  der Richtungsfahrbahn,
- und die über alle Fahrstreifen  $i = 1, \dots, I$  gemittelte Dichte  $\rho(x, t)$ .

Diese Dichten hängen über die Beziehung

$$\rho_{\text{tot}}(x, t) = \sum_{i=1}^I \rho_i(x, t) = I\rho(x, t) \quad (8.1)$$

miteinander zusammen. Die mittlere Dichte ist also durch das arithmetische Mittel definiert. Je nach Aufgabenstellung ist mal die eine, mal die andere Dichtedefinition günstiger: Die Kontinuitätsgleichung ist für die Gesamtdichte  $\rho_{\text{tot}}$  besonders einfach formulierbar, da die Fahrzeugbilanz nur für die gesamte Richtungsfahrbahn und nicht für die einzelnen Fahrstreifen gilt. Hingegen lassen sich Eigenschaften von Makromodellen am einheitlichsten mit über alle Fahrstreifen gemittelte Größen formulieren, da die Verkehrsdynamik i.W. dadurch bestimmt ist, z.B. durch die Kapazität pro Fahrstreifen

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

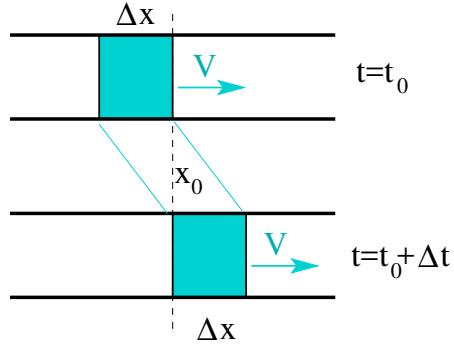


Figure 8.1.: Zur Veranschaulichung der hydrodynamischen Relation  $Q = \rho V$ . Im blauen Bereich sind  $\Delta n = \rho \Delta x$  Fahrzeuge. Innerhalb der Zeit  $\Delta t = \Delta x / V$  bewegt sich dieser Bereich komplett über einen festen Punkt  $x_0$ , so dass an diesem Punkt der Fluss  $Q = \Delta n / \Delta t = \rho \Delta x / \Delta t = \rho V$  herrscht.

oder durch das mit fahrstreifengemittelten Flüssen und Dichten formulierte Fundamentaldiagramm.

Da es sich bei allen in Makromodellen vorkommenden Dichte-Variablen um *echte* räumliche Dichtewerte handelt, gelten für jede Fahrstreifen getrennt exakt die in Abb. 8.1 veranschaulichten "hydrodynamischen" Fluss-Dichte-Beziehungen<sup>1</sup>

$$Q_i(x, t) = \rho_i(x, t) V_i(x, t), \quad (8.2)$$

wobei  $Q_i(x, t)$  die Flüsse auf Fahrstreifen  $i$  an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  sowie  $V_i(x, t)$  die entsprechenden, über einen gewissen räumlichen Bereich  $\Delta x$  um  $x$  *lokal* gemittelten Fahrzeuggeschwindigkeiten darstellen.

Definiert man die über die Fahrstreifen gemittelte Geschwindigkeit  $V(x, t)$  durch das mit den Dichten *gewichtete* arithmetische Mittel,

$$V(x, t) = \sum_{i=1}^I w_i V_i(x, t), \quad w_i = \frac{\rho_i(x, t)}{\sum_{j=1}^I \rho_j(x, t)} \quad (8.3)$$

und den mittleren Fluss durch das *einfache* arithmetische Mittel,<sup>2</sup>

$$Q(x, t) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Q_i(x, t) = \frac{Q_{\text{tot}}}{I} \quad (8.4)$$

so gelten formal die gleichen hydrodynamischen Relationen auch für die Mittelwerte und die Gesamtgrößen:

---

<sup>1</sup>Wenn man Diffusion außer Acht lässt, vgl. Abschnitt 9.4.

<sup>2</sup>Fluss und Dichte sind *extensive* Größen, bei denen eine Summenbildung sinnvoll ist, während dies für *intensive* Größen wie der Geschwindigkeit nicht gilt. Allgemein ergeben sich sinnvolle Mittelwerte extensiver Größen durch einfache arithmetische Mittel, während dies für intensive Größen nicht gilt.

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

$$Q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t) \quad \text{Hydrodynamische Flussbeziehung.} \quad (8.5)$$

bzw.

$$Q_{\text{tot}}(x, t) = \rho_{\text{tot}}(x, t)V(x, t). \quad (8.6)$$

### Verständnisfrage:

Zeigen Sie die Gültigkeit der hydrodynamischen Relationen (8.5) bzw. (8.6).

Zeigen Sie auch, dass diese z.B. bei ungewichteten oder flussgewichteten Geschwindigkeiten der einzelnen Fahrstreifen nicht gelten

## 8.2. Die Kontinuitätsgleichung für verschiedene Streckenkonfigurationen

Wir betrachten drei Fälle in der Reihenfolge steigender Komplexität: (i) Homogene Strecke, (ii) Bereich von Zu- oder Abfahrten, (iii) Bereiche mit Änderungen der Fahrstreifenzahl.

### 8.2.1. Homogene Strecke

Wir betrachten einen Streckenabschnitt der Länge  $\Delta x$  (Abb. 8.2) ohne Zufahrten, Abfahrten oder anderen Inhomogenitäten wie Änderung der Fahrstreifenzahl, Änderung des Tempolimits etc. Dabei soll die Länge  $\Delta x$  einerseits *mikroskopisch groß* sein, so dass genügend Fahrzeuge zur Gewinnung makroskopischer Größen enthalten sind. Andererseits sei  $\Delta x$  aber auch *makroskopisch klein*, so dass Dichten und Flussgradienten in diesem Bereich angenähert konstant sind.<sup>3</sup> Dann gilt für die Fahrzeugzahl  $n(t)$  zur Zeit  $t$  im betrachteten Bereich:

$$n(t) = \int_x^{x+\Delta x} \rho_{\text{tot}}(x', t) dx' \approx \rho_{\text{tot}}(x, t)\Delta x. \quad (8.7)$$

Da im Falle homogener Abschnitte eine Änderung der Fahrzeugzahl nur durch Zuflüsse  $Q_{\text{in}}$  und Abflüsse  $Q_{\text{out}}$  an den Abschnittsgrenzen erfolgen kann (vgl. Abb. 8.2) und diese Flüsse durch die Querschnittsflüsse  $Q_{\text{tot}}(x, t)$  bzw.  $Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t)$  an den jeweiligen Orten gegeben sind, ergibt sich folgende Fahrzeuggbilanzgleichung:

$$\frac{dn}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{out}}(t) = Q_{\text{tot}}(x, t) - Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t),$$

Kombiniert man diese Gleichung mit der nach der Zeit abgeleiteten Gleichung (8.7),  $\frac{dn}{dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\text{tot}}\Delta x) = \Delta x \frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t}$ , erhält man

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x} \frac{dn}{dt} = -\frac{Q_{\text{tot}}(x + \Delta x, t) - Q_{\text{tot}}(x, t)}{\Delta x} \approx -\frac{\partial Q_{\text{tot}}(x, t)}{\partial x},$$

<sup>3</sup>Beide Bedingungen sind typischerweise für einen Wert von etwa  $\Delta x = 100$  m erfüllt.

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

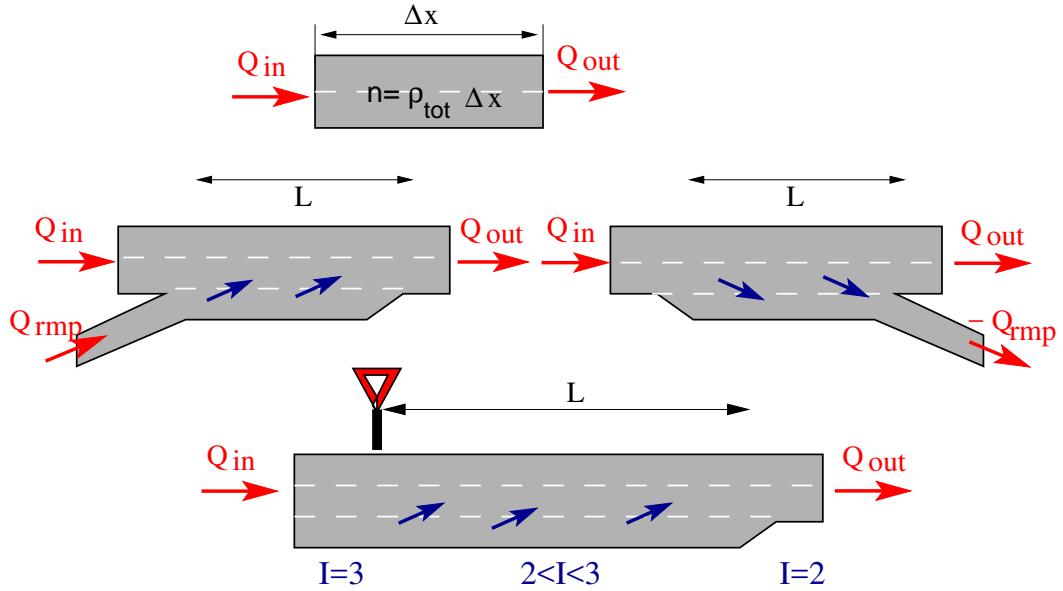


Figure 8.2.: Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichungen (8.8) - (8.13) in den drei Fällen (i) homogene Strecke, (ii) Zu- oder Abfahrten, (iii) Fahrstreifenzähländerung. Im letzten Fall bezieht sich Gl. (8.13) auf Mittelwerte über die  $I = 2$  durchgängigen Fahrstreifen.

oder mit der hydrodynamischen Fluss-Geschwindigkeits-Beziehung  $Q_{\text{tot}} = \rho_{\text{tot}} V$  und Weglassen der expliziten Kennzeichnung der Orts- und Zeitabhängigkeiten:

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{\text{tot}} V)}{\partial x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0. \quad (8.8)$$

Da  $\rho = \rho_{\text{tot}}/I$  und  $I$  hier konstant ist, sieht die Gleichung für  $\rho$  hier genauso wie die für  $\rho_{\text{tot}}$  aus.

### 8.2.2. Bereich von Zu- oder Abfahrten

Hier kommen zur Flussbilanz neben den Zu- und Abflüssen auf und von den Hauptfahrstreifen noch der Zufluss bzw. Abfluss  $Q_{\text{rmp}}(t)$  von bzw. zu den Rampen hinzu, also (vgl. Abb. 8.2)

$$\frac{dn}{dt} = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{out}}(t) + Q_{\text{rmp}}(t).$$

Der Rampenfluss  $Q_{\text{rmp}}$  ist positiv für eine Zufahrt und negativ für eine Abfahrt. Bei Zu- oder Abfahrten mit mehreren Fahrstreifen ist  $Q_{\text{rmp}}$  gleich der Summe der Flüsse über alle Fahrstreifen der Rampen. Nimmt man an, dass sich die Zu- bzw. Abflüsse gleichmäßig auf die gesamte Länge  $\Delta x = L_{\text{rmp}}$  der Rampe verteilen, erhält man innerhalb

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

des Rampenbereichs einen zusätzlichen Flussgradienten  $dQ_{\text{rmp}}/dx = Q_{\text{rmp}}/L_{\text{rmp}}$ , und damit

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{\text{tot}} V)}{\partial x} = \frac{Q_{\text{rmp}}}{L_{\text{rmp}}} := I\nu_{\text{rmp}}(x, t), \quad (8.9)$$

oder für die fahrstreifengemittelte Dichte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = \nu_{\text{rmp}}(x, t) \quad (8.10)$$

mit

$$\nu_{\text{rmp}}(x, t) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{rmp}}(t)}{I L_{\text{rmp}}} & \text{falls } x \text{ auf Höhe einer Rampe} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.11)$$

### 8.2.3. Zu- oder Abfahrten und Änderungen der Zahl der Fahrstreifen

Bei einer Fahrstreifenreduktion von  $I$  auf  $I - 1$  wechseln die Fahrer bereits im Vorfeld (typischerweise 200 m bis 1000 m vor der Position der Sperrung) auf die durchgehenden Fahrstreifen.<sup>4</sup> Steht ab einer gewissen Stelle ein neuer Fahrstreifen zur Verfügung, wird dieser hingegen mehr oder weniger sofort (innerhalb weniger 100 m nach der Erweiterung von  $I$  auf  $I + 1$ ) belegt.

Wie bisher betrachten wir bei der makroskopischen Modellierung nur die Dynamik der Gesamtdichte bzw. der mittleren Dichte, also sogenannte **effektive Einspurmodelle**. Gekoppelte makroskopische Modelle, welche Dichte und Fluss separat für jeden Fahrstreifen betrachten und bei denen die Einzelgrößen über ein Spurwechselmodell gekoppelt sind, werden nicht weiter betrachtet.

Im Rahmen von effektiven makroskopischen Modellen kann man diese Spurwechselaktivitäten dadurch modellieren, dass man nahe der Position einer Sperrung bzw. Erweiterung eine *nicht ganzzahlige* und *mit dem Ort veränderliche* Fahrstreifenzahl  $I(x)$  einführt (vgl. Abb. 8.2) und alle Mittelwerte extensiver (additiver) Variablen, also Fluss und Dichte und Fluss, *auf diese stetig veränderliche Fahrstreifenzahl* bezieht:

$$Q(x, t) = \frac{Q_{\text{tot}}(x, t)}{I(x)}, \quad \rho(x, t) = \frac{\rho_{\text{tot}}(x, t)}{I(x)}. \quad (8.12)$$

Die über die Fahrstreifen gemittelte Geschwindigkeit  $V(x, t)$  hingegen ist unverändert durch Gl. (8.3) gegeben und auch die hydrodynamische Beziehung (8.5),  $Q = \rho V$ , bleibt gültig. Das unterschiedliche Verhalten der Fahrer beim Verlassen einer nicht durchgehenden Spur bzw. beim Wechsel auf eine neue Spur lässt sich durch die Ortsabhängigkeit der reellwertigen Fahrstreifenanzahl modellieren: Eine Fahrstreifenzahl von z.B.  $I(x) = 2.5$  besagt beispielsweise

- im Falle einer Reduktion  $I = 3 \rightarrow 2$ , dass am Ort  $x$  die Hälfte der ursprünglichen Nutzer des zu sperrenden Fahrstreifens denselben bereits verlassen haben (z.B. 600 m stromaufwärts der eigentlichen Sperrung),

---

<sup>4</sup>Nach der StVO sollte man erst unmittelbar davor wechseln, den Fahrstreifen also “ausnutzen”.

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

- im Falle einer Erweiterung  $I = 2 \rightarrow 3$ , dass bereits die Hälfte der potenziell wechselnden Fahrzeuge auf den neuen Fahrstreifen gewechselt sind (z.B. 200 m stromabwärts der eigentlichen Erweiterung).

Die Kontinuitätsgleichung für die *Gesamtdichte*  $\rho_{\text{tot}}$  ist dieselbe wie (8.8) bzw. (8.9). Da die Fahrdynamik jedoch von *fahrstreifenbezogenen* Flüssen und Dichten abhängt, muss man die Kontinuitätsgleichung für die Fahrstreifen-Mittelwerte  $\rho = \rho_{\text{tot}}/I(x)$  und  $Q_{\text{tot}}/I(x)$  formulieren. Setzt man  $\rho_{\text{tot}} = I(x)\rho$  und  $Q_{\text{tot}} = I(x)Q$  in (8.9) ein, erhält man (die expliziten Orts- und Zeitabhängigkeiten der makroskopischen Größen werden wieder der Übersichtlichkeit halber weggelassen):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(I\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(IQ)}{\partial x} &= I\nu_{\text{rmp}} \\ I\frac{\partial\rho}{\partial t} + Q\frac{\partial I}{\partial x} + I\frac{\partial Q}{\partial x} &= I\nu_{\text{rmp}} \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{Q}{I}\frac{\partial I}{\partial x} + \nu_{\text{rmp}},\end{aligned}$$

und mit  $Q = \rho V$  schließlich

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = -\frac{\rho V}{I}\frac{\partial I}{\partial x} + \nu_{\text{rmp}}(x) \quad \text{Kontinuitätsgleichung.} \quad (8.13)$$

Die Kontinuitätsgleichung (8.13) beschreibt den allgemeinsten, hier behandelten Fall. Gegenüber (8.9) sieht man, dass zum Rampen-Quellterm  $\nu$  ein zusätzlicher Quellterm  $\nu_I = -\frac{Q}{I}\frac{\partial I}{\partial x}$  hinzugekommen ist, welcher die Nettoflüsse von/auf die zu sperrenden/neuen Fahrstreifen beschreibt.

### Verständnisfrage:

Das gewichtete Geschwindigkeitsmittel (8.3) über alle Fahrstreifen bleibt unverändert gültig, wenn man im Falle nichtganzzahliger Fahrstreifenzahlen die Summenobergrenze als die bezüglich  $I$  nächsthöhere *ganzen* Zahl definiert. Machen Sie sich für den Fall einer Fahrstreifenzahlreduktion  $3 \rightarrow 2$  klar, dass sich trotz des unstetigen Sprungs des maximalen Summationsindex (z.B. 3 bei  $I = 2.01$ , aber 2 bei  $I = 2$ ) das Geschwindigkeitsmittel (8.3) stetig verhält!

### Verständnisfrage:

Häufig wechseln die Autofahrer bereits am Anfang einer Auffahrt auf die Hauptstrecke, vor allem bei freiem Verkehr. Wie würde man das modellieren?

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

### Verständnisfrage:

Bei Auffahrten mit kurzen Beschleunigungsrampen müssen Fahrzeuge häufig mit vergleichsweise niedriger Geschwindigkeit auf die Hauptfahrbahnen wechseln. Kann man die dadurch verursachten Störungen im Rahmen der Kontinuitätsgleichung modellieren?

### 8.3. Diskussion der Kontinuitätsgleichung

Zunächst gilt folgende wichtige Bemerkung:

Aufgrund ihrer Herleitung allein aus der Fahrzeugerhaltung ist die Kontinuitätsgleichung Bestandteil aller (!) makroskopischen Modelle. Ihre Form hängt nur von der Infrastruktur ab.

Ohne Zu- oder Abfahrten gilt: Die Fahrzeugzahl kann sich nur durch Zu- und Abflüsse an den Streckengrenzen ändern. Fließen mehr Fahrzeuge heraus als herein, also  $\frac{\partial Q_{\text{tot}}}{\partial x} > 0$ , so ist die Dichteänderung  $\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial t}$  negativ. Ist, z.B. wegen einer plötzlichen Störung, der Abfluss über eine längere Zeit kleiner als der Zufluss, dann führt die dann positive Dichteänderung früher oder später zum Stau.

Bei konstanter Fahrstreifenzahl und ohne Zu- oder Abfahrten gilt die quellfreie Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$  auch für die über die Richtungsfahrbahn gemittelten Größen  $\rho$  bzw.  $Q$ .

Verringert sich die Fahrstreifenzahl und betrachtet man Dichte und Fluss als Mittel nur über die *durchgängigen* Fahrstreifen,<sup>5</sup> so bewirken die Wechsel von den zu sperrenden Fahrstreifen auf die betrachteten, denen keine entgegengesetzte Wechsel gegenüberstehen, einen Netto-Zufluss und damit über den dann positiven Term  $-\frac{Q}{I} \frac{\partial I}{\partial x}$  einen Dichteanstieg. Betrachtet man die Gesamtdichten und Flüsse, gibt es im Gegensatz dazu keine "Quellterme".

Mit Zu- oder Abfahrten bewirken neben den Flussgradienten auf der Hauptstrecke auch die Zu- bzw. Abflüsse einen Anteil an der Dichteänderung, der allerdings nur im Bereich der Rampen effektiv ist. Die Quellterme sind proportional zu den Rampenflüssen. Der Proportionalitätsfaktor  $\nu_{\text{rmp}}(x)$

- steigt mit sinkender Rampenlänge, da dann auf jedem Abschnitt fester Länge mehr Fahrzeuge wechseln müssen,
- sinkt mit steigender Fahrstreifenzahl, da sich dann der Rampenfluss auf mehrere Fahrstreifen aufteilen kann.

<sup>5</sup>Tatsächlich werden auch die zu sperrenden/neuen Fahrstreifen mit einem vom nichtganzzahligen Rest von  $I$  beschriebenen Bruchteil gewichtet, dies ändert aber nichts am Gedankengang.

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

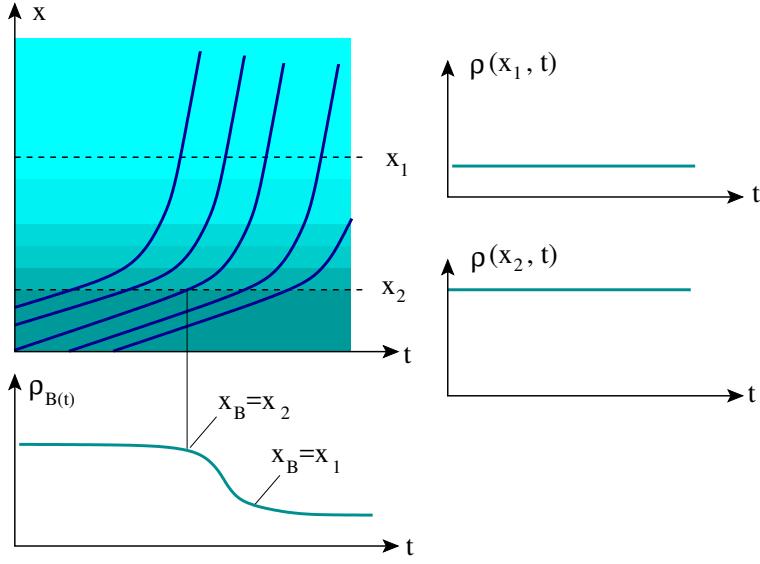


Figure 8.3.: Dichteänderung  $\frac{d\rho_B}{dt} = \frac{d\rho(x,t)}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + V \frac{d\rho}{dx}$  bei Ausfahrt aus dem Stau aus der Sicht eines ausfahrenden Autofahrers B (mittlere Trajektorie). Da hier eine stehende Stauwelle dargestellt ist, gilt  $\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = 0$ .

### Formulierung mit der konvektive Zeitableitung der Geschwindigkeit

Mit  $\partial(\rho V)/\partial x = \rho \partial V/\partial x + V \partial \rho/\partial x$  können wir die Kontinuitätsgleichung (8.8) auch in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x} \quad (8.14)$$

schreiben. Wir wollen nun die Bedeutung der linken Seite dieser Gleichung näher diskutieren, indem wir die Änderung der Dichte  $\frac{d\rho}{dt}\Big|_B$  vom Standpunkt des *Fahrers*, also eines sich auf einer Fahrzeug-Trajektorie  $x(t)$  mit  $\frac{dx}{dt} = V(x, t)$  bewegenden Beobachters B betrachten (vgl. Abb. 8.3): Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt}\Big|_B &= \frac{d\rho(x(t), t)}{dt} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial \rho}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die linke Seite von (8.14) entspricht also genau der vom Fahrer wahrgenommenen Änderung der Dichte mit der Zeit!

Dies kann man auf die Änderung beliebige Felder  $F(x, t)$  verallgemeinern, indem man die **substanzielle bzw. totale Zeitableitung**  $\frac{dF(x,t)}{dt}$  als Änderungsrate für einen mit

## 8. Makromodelle I: Die Kontinuitätsgleichung

der Geschwindigkeit  $V(x, t)$  mitbewegten Beobachter definiert und das Ganze durch die üblichen, für ortsfeste Beobachter gültigen partiellen Zeitableitungen  $\frac{\partial F(x, t)}{\partial t}$  ausdrückt. Analog wie oben ergibt sich die totale Zeitableitung durch

$$\frac{dF(x, t)}{dt} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}. \quad (8.15)$$

Für homogene Streckenabschnitte kann man die Kontinuitätsgleichung daher auch ausdrücken durch

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (8.16)$$

Gleichung (8.16) besagt, dass sich die Dichte erhöht, wenn der Geschwindigkeitsgradient  $\partial V / \partial x$  negativ ist, im mikroskopischen Bild also das Vorderfahrzeug langsamer ist. Dadurch verringert sich natürlich der Abstand, die mikroskopische Entsprechung einer erhöhten Dichte! Außerdem kann die Dichte nicht negativ werden, denn  $\rho(x, t) = 0$  impliziert  $d\rho/dt = 0$ . (Negative Autos wären aber auch eine absurde Vorstellung.)

### Verständnisfrage:

Zeigen Sie mit Hilfe einer der obigen Formen der Kontinuitätsgleichung, dass sich die Gesamt-Fahrzeugzahl auf einer Kreisstrecke mit variabler Fahrstreifenzahl  $I(x)$ , aber ohne Zu- und Abfahrten, nicht ändert.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

*Die Vorurteile eines Professors nennt man Theorie.*

Mark Twain

Die für alle Makromodelle gültige Kontinuitätsgleichung ist eine (partielle) Differenzialgleichung, in der zwei makroskopische Größen vorkommen: Die Dichte  $\rho(x, t)$  und die Geschwindigkeit  $V(x, t)$  bzw. der Fluss  $Q(x, t)$ . Für eine vollständige Beschreibung benötigt man noch eine zusätzliche Gleichung für den Fluss bzw. die Geschwindigkeit. *Die verschiedenen Makromodelle unterscheiden sich nur in der Art dieser zweiten Gleichung.*

1955/56 schlossen Lighthill und Whitham bzw. Richards die Kontinuitätsgleichung durch die statische **Gleichgewichtsannahme**

$$Q(x, t) = Q_e(\rho(x, t)) = \rho(x, t)V_e(\rho(x, t)) \quad \text{bzw.} \quad V(x, t) = V_e(\rho(x, t)). \quad (9.1)$$

Es wird also angenommen, der Verkehrsfluss  $Q(x, t)$  bzw. die mittlere Geschwindigkeit  $V(x, t)$  seien eindeutig durch die Fahrzeugdichte  $\rho(x, t)$  gegeben. Das sogenannte **Fundamentaldiagramm**  $Q_e(\rho)$  bzw. die Geschwindigkeits-Dichte-Relation  $V_e(\rho)$  werden dabei in der Regel als Fitfunktion an empirische Verkehrsdaten gewählt.

Setzt man die Gleichgewichtsannahme (9.1) in die Kontinuitätsgleichung (8.8) ein, so erhält man unter Verwendung der Kettenregel  $\frac{\partial Q_e}{\partial x} = \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$  das **Lighthill-Whitham-Richards-Modell (LW- bzw. LWR-Modell)**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{LWR-Modell.} \quad (9.2)$$

Da die Gleichung  $Q_e(\rho)$  für das Fundamentaldiagramm hier nicht festgelegt werden muss und viele (mehr oder weniger realistische) konkrete Beziehungen vorgeschlagen wurden, stellt Gl. (9.2) kein Modell im engeren Sinne, sondern eine ganze *Modellklasse* dar. Deshalb spricht man auch oft in der Mehrzahl von “den LWR-Moellen”. Die Gleichung (9.2) kann man auch in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( V_e + \rho \frac{dV_e}{d\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (9.3)$$

schreiben. Zu- und Abfahrten sowie Änderungen der Zahl der Fahrstreifen kann man durch die zusätzlichen Terme der allgemeinen Kontinuitätsgleichung (8.13) beschreiben, wobei auch in diesen Termen immer  $V(x, t) = V_e(\rho(x, t))$  gilt.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

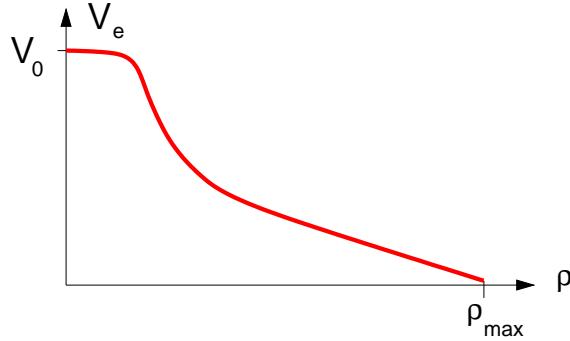


Figure 9.1.: Beispiel einer Gleichgewichtsrelation  $V_e = f(\rho)$  für die Geschwindigkeit im Lighthill-Whitham-Richards Modell. Vergl. auch die empirischen Daten in Abb. 5.6

### 9.1. Ausbreitung kontinuierlicher Dichteschwankungen

Die partielle Differenzialgleichung (9.2) bzw. (9.3) ist eine **nichtlineare Wellengleichung**, welche die Ausbreitung sogenannter **kinematischer Wellen** beschreibt. Wir ermitteln nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen bzw. von kontinuierlichen Dichteschwankungen allgemein für das LWR-Modell. Dazu setzen wir den allgemeinen Wellenansatz

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - ct)$$

in die Gleichung des LWR-Modells ein. Definieren wir mit  $\rho'_0(x)$  die Ableitung der (von einer Variablen) abhängneden Funktion  $\rho_0$  nach ihrem Argument, erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -c\rho'_0(x - ct),$$

und

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho'_0(x - ct)$$

Setzt man dies in Gl. (9.2) ein,

$$-c\rho'_0(x - ct) + \frac{dQ_e}{d\rho} \rho'_0(x - ct) = 0,$$

und “kürzt” den gemeinsamen Faktor  $\rho'_0(x - ct)$ , erhält man folgende einfache Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c(\rho)$  von Dichteschwankungen:

$$c = c(\rho) = \frac{dQ_e}{d\rho} = \frac{d(\rho V_e(\rho))}{d\rho}. \quad (9.4)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c(\rho)$  von Dichteschwankungen im festen Koordinatensystem hängt also von der Dichte ab und ist proportional zur Steigung der Fluss-Dichte

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

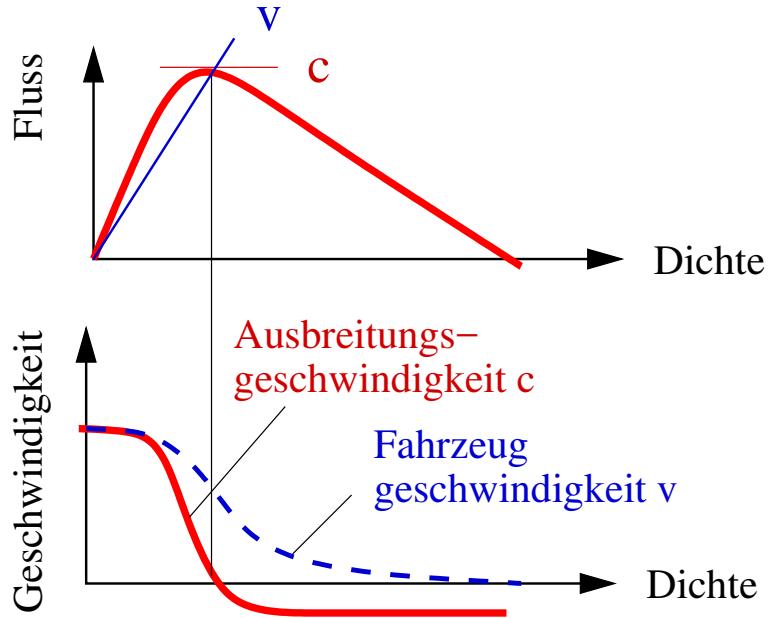


Figure 9.2.: Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \frac{dQ_e}{d\rho}$  von Dichteschwankungen im LWR-Modell im Vergleich mit der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$ .

Relation im Gleichgewicht (Fundamentaldiagramm). Insbesondere können sich Dichteschwankungen in Fahrtrichtung ausbreiten (freier Verkehr, linker Bereich des Fundamentaldiagramms, vgl. Abb. 9.2) oder auch gegen die Fahrtrichtung (gestauter Verkehr, rechter Bereich des Fundamentaldiagramms).

Wie hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der Fahrzeuggeschwindigkeit  $V$  zusammen? Dazu betrachten wird die auf die Fahrzeuggeschwindigkeit bezogene *relative* Ausbreitungsgeschwindigkeit und setzen (9.4) ein:

$$c_{\text{rel}} = c(\rho) - V = c(\rho) - V_e(\rho) = \rho \frac{dV_e}{d\rho}.$$

Hier wurde die Produktregel  $\frac{d}{d\rho}(\rho V_e(\rho)) = V_e(\rho) + \rho \frac{dV_e}{d\rho}$  berücksichtigt. Da  $\frac{dV_e}{d\rho}$  für alle "vernünftigen" Fälle negativ oder höchstens Null ist (Abb. 5.6) gilt  $c_{\text{rel}} \leq 0$ . Aus Fahrersicht gesehen können sich Dichtestörungen also nur *rückwärts* ausbreiten. Dies hat in vielen mikroskopischen Modellen seine Entsprechung darin, dass die Fahrer nur auf das *Vorderfahrzeug*, nicht jedoch auf das Hinterfahrzeug reagieren.

### 9.2. Ausbreitung von Schockwellen

Gleichungen der Form (9.2) beschreiben Dichtewellen, deren Amplitude sich nicht verändert, die sich aber lokal unterschiedlich schnell fortbewegen, und zwar umso schneller, je

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

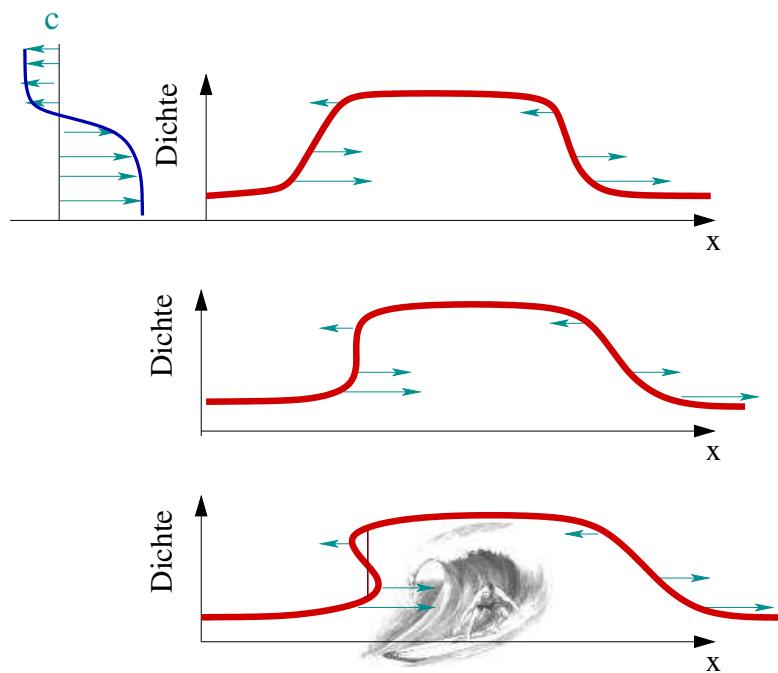


Figure 9.3.: Ausbildung von Schockfronten durch die Dichteabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeiten im LWR-Modell

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

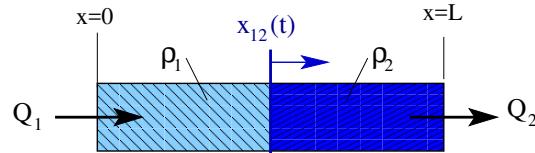


Figure 9.4.: Zur Herleitung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schockwellen

geringer die lokale Dichte ist. Genauer gesagt, kann man sich die über den Ort aufgetragene Verkehrsdichte als einen Stapel vieler horizontale Schichten vorstellen, wobei sich jede Schicht mit der der jeweiligen Dichte entsprechenden Ausbreitungsgeschwindigkeit (9.4) unabhängig von den anderen bewegt: Die höheren Schichten bewegen sich also langsamer oder gar rückwärts (Abb. 9.3 oben). Bei einer ‐Stop-and-Go-Welle‐ bedeutet dies, dass die stromaufwärtige Wellenfront immer steiler und die stromabwärtige immer flacher wird (Abb. 9.3 Mitte). Aus Sicht des Autofahrers bedeutet dies, dass der Übergang freier Verkehr → Stau immer abrupter wird, während die Fahrzeuge immer langsamer aus dem Stau heraus beschleunigen.<sup>1</sup>

Auf der stromaufwärtigen Seite kommt irgendwann der Zeitpunkt, in dem die Steigung  $\frac{d\rho}{dx}$  unendlich wird und sich mathematisch die Wellen danach überschlagen“ (Abb. 9.3 unten). Da ‐sich überschlagende“ Wellen natürlich sinnlos sind (an einer Stelle kann es zu einer gegebenen Zeit nur *eine* definierte Dichte geben), bildet sich stattdessen ein unstetiger Übergang aus, der in Abb. 9.3 unten durch die senkrechte Linie gekennzeichnet wird. Diese in allen LWR-Modellen entstehenden diskontinuierliche Dichtesprünge werden auch als **Schockwellen** bezeichnet. Sie entsprechen natürlich keinem realen Verkehrsgeschehen, so dass das Modell in dieser Hinsicht unrealistisch ist.

Während die Details der Übergänge frei → gestaut und auch gestaut → frei in LWR-Modellen unrealistisch sind,<sup>2</sup> beschreibt diese Modellklasse die Ausbreitung der Übergangszenen als *Ganzes* sehr realistisch, so dass diese Modelle für großräumige Betrachtungen dennoch nützlich sind. Insbesondere stellt die im Folgenden berechnete Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schockwellen auch eine gute Näherung für die Ausbreitung endlicher, realistischer Übergänge dar.

Wir betrachten einen unstetigen Übergang vom Zustand  $(\rho_1, Q_1)$  nach  $(\rho_2, Q_2)$  (vgl. Abb. 9.4). Nimmt man einen hinreichend kleinen ortsfesten Streckenabschnitt  $0 \leq x \leq L$  um die Lage der Schockfront  $x_{12}(t)$  an, so kann man die Flüsse und Dichten vor und nach der Front als konstant annehmen also

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1 & \text{für } x \leq x_{12}, \\ \rho_2 & \text{für } x > x_{12}. \end{cases}$$

<sup>1</sup>In der mathematischen Literatur wird diese Aufweichung der Wellenfront auch als *dispersion fan* bezeichnet.

<sup>2</sup>Die persönliche Erfahrung eines der Autoren zeigt, dass es bei großen Lauf- und Skilanglauf-Veranstaltungen nach dem Startschuss eine teils drastische Aufweichung der stromabwärtigen Front des vom Startfeld gebildeten ‐Riesenstaus‐ gibt; beim Kfz-Verkehr hingegen bleibt die Aufweichung eng begrenzt.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

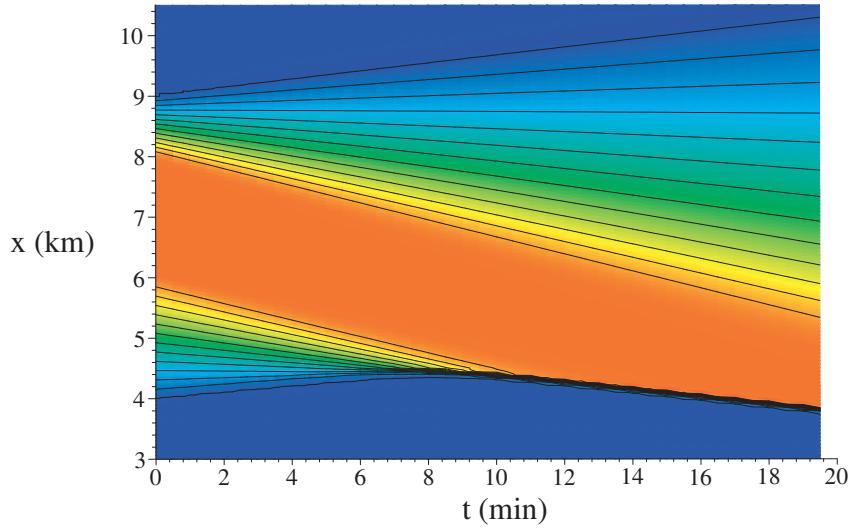


Figure 9.5.: Lösung des LWR-Modells mit einem Bereich gestauten Verkehrs (rot) mit freiem Verkehr (blau) davor und danach als Anfangsbedingung. Man sieht, dass sich beim Übergang freier Verkehr → Stau eine Schockfront ausbildet, beim Übergang Stau → frei aber nicht.

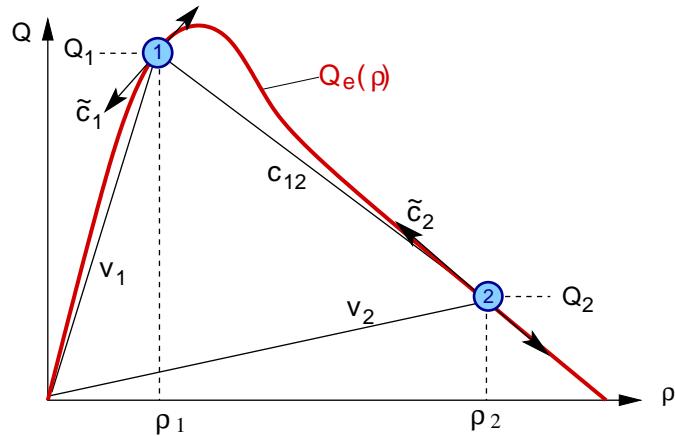


Figure 9.6.: Ablesen der Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c(\rho) = \frac{dQ_e}{d\rho}$  von Dichteschwankungen, der Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c_{12}$  von Schockfronten (hier vom Zustand "1" in den Zustand "2") und der Fahrzeuggeschwindigkeiten  $V_e = Q_e/\rho$  aus dem Fundamentaldiagramm  $Q = Q_e(\rho)$ .

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Die Lage  $x_{12}(t)$  der Schockfront *selbst* hingegen ist von der Zeit abhängig. Um nun die Geschwindigkeit  $C_{12} = \frac{dx_{12}}{dt}$  zu berechnen, wird die Änderung  $\frac{dn}{dt}$  der Fahrzeugzahl im Streckenabschnitt auf zweierlei Weise ausgedrückt.

- (i) Aus der Fahrzeugerhaltung ergibt sich die Bilanzgleichung

$$\frac{dn}{dt} = Q_1 - Q_2.$$

- (ii) Mit der Definition der Dichte kann man die Fahrzeugzahl ausdrücken durch

$$n = \rho_1 x_{12} + \rho_2 (L - x_{12}).$$

Ableiten nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \frac{d}{dt} (\rho_1 x_{12} + \rho_2 (L - x_{12})) \\ &= (\rho_1 - \rho_2) \frac{dx_{12}}{dt} \\ &= (\rho_1 - \rho_2) C_{12}\end{aligned}$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke für  $\frac{dn}{dt}$ , erhält man schließlich

$$C_{12} = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{Q_e(\rho_1) - Q_e(\rho_2)}{\rho_2 - \rho_1} \quad \text{Ausbreitung von Schockwellen.} \quad (9.5)$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für die LWR-Gleichung, sondern ganz allgemein immer dann, wenn Übergänge zwischen zwei Verkehrszuständen 1 und 2 hinreichend abrupt sind, so dass man die Übergangszonen vernachlässigen kann.

### 9.2.1. Zusammenfassung: Fahrzeug- und Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Eine wichtige Anwendung des Fundamentaldiagramms ist, dass man daraus im Rahmen des LWR-Modells alle relevanten Geschwindigkeiten herauslesen kann, wie in Abb. 9.6 gezeigt:

- Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c(\rho) = \frac{dQ_e(\rho)}{d\rho}$  von *Dichteschwankungen* ist durch die Tangentensteigung gegeben.
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $C_{12} = (Q_2 - Q_1)/(\rho_2 - \rho_1)$  von *Schockfronten* ergibt sich aus der Steigung der Sekante der Punkte  $(\rho_1, Q_1)$  und  $(\rho_2, Q_2)$  (Dichten und zugehörige Gleichgewichtsflüsse  $Q_1 = Q_e(\rho_1)$ ,  $Q_2 = Q_e(\rho_2)$ ) beiderseits der Grenzen.
- Die Fahrzeuggeschwindigkeit  $Q_e(\rho)/\rho$  selbst ist durch die Steigung der durch den Punkt  $(\rho, Q_e(\rho))$  gehenden Ursprungsgeraden gegeben.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

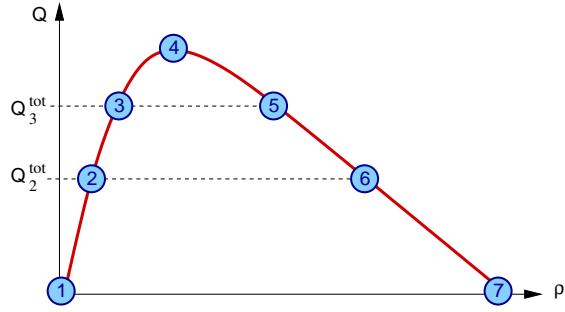


Figure 9.7.: Zur Verständnisfrage ‘‘Frontausbreitung’’: Schematisches Fundamentaldiagramm mit verschiedenen, durch LWR-Modelle beschriebenen Verkehrszuständen.

### Verständnisfrage:

In Abb. 9.7 sind verschiedene durch LWR-Modelle beschriebene Verkehrszustände durch die Zahlen 1-6 gekennzeichnet. Beschreiben Sie diese Verkehrszustände und folgende Übergänge (die erste Zahl bezieht sich jeweils auf den stromaufwärtigen Zustand, die nächsten auf weiter stromabwärts liegende):

2-3, 3-2, 3-6-3, 2-4, 3-5-2, 3-6-1-3, 6-3-1, 1-6.

Welche Übergänge würde ein im Übergangsbereich positionierter stationärer Detektor messen?

### Verständnisfrage:

Gegeben sind drei Querschnitts-Detektoren D1, D2 und D3 im Abstand von je etwa einen km (Nummerierung in Verkehrsflussrichtung aufsteigend). D1 misst freien Verkehr mit etwa konstanten Fluss (z.B. nahe Punkt 3 in Abb. 9.7). D3 misst ebenfalls freien Verkehr, wobei der Fluss aber nur anfangs dem von D1 entspricht, dann fällt er plötzlich ab (etwa auf den Punkt 2 in Abb. 9.7) bevor er plötzlich maximal wird und dann wieder auf den Wert von D1 absinkt. Detektor 2 misst nur anfangs freien Verkehr, dann (etwa zur Zeit des Flussabfalls von D3) einen Verkehrszusammenbruch, welcher schließlich (etwas nach dem Zeitpunkt des Flussmaximums bei D3) wieder in freien Verkehr übergeht. Zeichnen Sie qualitativ ein raumzeitliches Bild des Staus und interpretieren Sie die an den Detektoren D2 und D3 beobachteten Übergänge.

### 9.3. Das LWR mit dreieckigem Fundamentaldiagramm

Eine der schnellsten, realistischsten und flexibelsten Varianten des LWR-Modells ist das **LWR mit dreieckigem Fundamentaldiagramm** (vgl. Abb. 9.8), dessen kontinuierliche Version manchmal auch als **Section Based Model** bezeichnet wird, während die weitverbreitete raum- und zeitdiskrete Version (iterierte Abbildung) als **Cell-Transmission Model** (CTM) bezeichnet wird. Das dreieckige Fundamentaldiagramm (vgl. Abb. 9.8) lautet

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} V_0 \rho & \text{falls } \rho \leq \rho_c \\ \frac{1}{T} [1 - \rho(s_0 + l)] & \text{falls } \rho_c < \rho \leq \rho_{\max} \end{cases} \quad (9.6)$$

Die Bezeichnung ‘‘Section Based Model’’ hat es daher, da man dank seiner speziellen Eigenschaften – nur zwei feste Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Störungen, eine für freien und eine für gestauten Verkehr – die Kontinuitätsgleichung (8.8) nicht direkt für alle Orte  $x$  lösen muss, sondern sie auf Gleichungen für die Bewegung von Staufronten innerhalb und am Rande von homogenen Streckenabschnitten, sog. **road sections** reduzieren kann. Jede ‘‘road sections’’ ist stromabwärts durch Inhomogenitäten oder Engstellen begrenzt und ist stromaufwärts an andere ‘‘road sections’’ oder an stromaufwärtige Randbedingungen angebunden.

#### 9.3.1. Modellparameter und Eigenschaften

Das LWR mit dreieckigem Fundamentaldiagramm (FD) hat folgende vier Modellparameter:

Parameter	Typ. Wert Autobahn	Typ. Wert Stadtverkehr
Wunschgeschwindigkeit $V_0$	110 km/h	50 km/h
Folgezeit $T$	1.4 s	1.2 s
Mindestabstand $s_0$	3 m	1.5 m
Fahrzeulgänge $l$	4.5 m	4.5 m

Wie bei allen makroskopischen Modellen sind die Parameter als **Fahrzeugflossen-Mittel** zu verstehen. Im Fundamentaldiagramm (9.6) tauchen die Parameter  $s_0$  und  $l$  nur als Summe auf, so dass man sie als **effektive Fahrzeulgänge**  $l_{\text{eff}} = s_0 + l$  zusammenfassen kann (siehe Abb. 9.8).

Das LWR mit dreieckigem FD hat folgende Eigenschaften:

1. Die Geschwindigkeiten von Störungen im freien Verkehr, also auf dem freien ‘‘Zweig’’ des Fundamentaldiagramms, sind durch

$$v_g^{\text{free}} = \left. \frac{dQ_e}{d\rho} \right|_{\rho < \rho_c} = V_0 \quad (9.7)$$

gegeben. Dichte- und Fluss-Schwankungen innerhalb freien Verkehrs pflanzen sich also mit derselben Geschwindigkeit wie die Fahrzeuge selbst fort, und diese

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

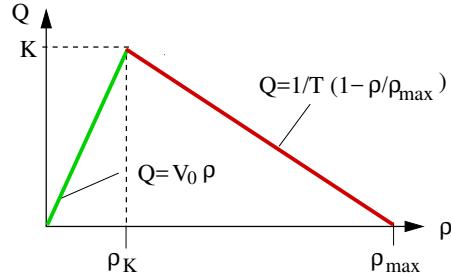


Figure 9.8.: Dreieckiges Fundamentaldiagramm.

Geschwindigkeit ist außerdem gleich der Wunschgeschwindigkeit. Im Rahmen dieser Modellklasse findet also im freien Verkehr keinerlei Wechselwirkung statt. (Andernfalls würden die Fahrer auf den Verkehr stromabwärts reagieren und sich damit Störungen relativ zur Fahrzeuggeschwindigkeit nach hinten fortpflanzen). Dies gilt auch für größere Störungen, so lange die Dichte nicht die Dichte  $\rho_c$  am Flussmaximum überschreitet.

2. Die Geschwindigkeiten von Störungen im gebundenen Verkehr, also auf der “gestauten” Seite des Fundamentaldiagramms, sind ebenfalls durch eine konstante Geschwindigkeit,

$$v_g^{\text{cong}} := v_g = \frac{dQ_e}{d\rho} \Big|_{\rho > \rho_c} = -\frac{l_{\text{eff}}}{T}, \quad (9.8)$$

gegeben. Diese konstante, gegen die Fahrtrichtung gerichtete Ausbreitungsgeschwindigkeit ist in Übereinklang mit den Beobachtungen. Darüber hinaus gibt diese Gleichung die wesentlichen Einflussfaktoren dieser Geschwindigkeit an: Eine effektive Fahrzeulgänge pro Folgezeit. Ihr Wert beträgt in Europa etwa 15-16 km/h und in den USA 18-20 km/h.

3. Das Flussmaximum, also die Kapazität  $K$  pro Fahrstreifen auf homogener Strecke, ergibt sich aus den gestauten und freien Zweigen des Fundamentaldiagramms so, dass keine Unstetigkeiten oder Hysteresis-Effekte auftreten, sind also durch den Schnittpunkt der Zweige gegeben:

$$K = \frac{1}{T + \frac{l_{\text{eff}}}{V_0}} = \frac{1}{T \left( 1 + \frac{|v_g|}{V_0} \right)}. \quad (9.9)$$

Die Kapazität ist also *immer kleiner als das Inverse der mittleren Folgezeit T*. Sie steigt mit  $V_0$  und sinkt mit  $T$  und  $l_{\text{eff}}$  (Abb. 9.9). Außerdem kann man zeigen, dass, bei gegebener Folgezeit, das dreieckige FD von allen Fundamentaldiagrammen die größte Kapazität aufweist.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Insbesondere bei den später behandelten Modellen mit dynamischer Geschwindigkeit kann sie durch Instabilitäten auch niedriger sein.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Figure 9.9.: Kapazität des LWR mit dreieckigem FD [Martin: Bild zu machen](#) Modells als Funktion der Folgezeit  $T$ , Wunschgeschwindigkeit  $v_0$  und effektive Länge  $l_{\text{eff}}$ . Die jeweils konstanten Größen wurden zu  $v_0 = 120 \text{ km/h}$ ,  $T = 1.2 \text{ s}$  und  $l_{\text{eff}} = 8 \text{ m}$  gewählt.

Der dazugehörige Wert  $\rho_c$  der Dichte bei maximalen Fluss ist

$$\rho_c = \frac{1}{V_0 T + l_{\text{eff}}}. \quad (9.10)$$

4. Eine zentrale Eingangs- und Kontrollgröße bei realen, d.h. offenen Systemen ist der Verkehrsfluss, während sich die Verkehrsdichte aus dem Fluss ergibt. Nun ist die Umkehrfunktion des Fundamentaldiagramms  $Q_e(\rho)$ , also die Dichte-Fluss-Relation  $\rho(Q)$ , nicht eindeutig, da zu gegebenen Verkehrsfluss der Verkehr frei oder gebunden sein kann. Dementsprechend gibt es zwei Dichtewerte, die als **freier Zweig**  $\rho_{\text{free}}(Q)$  und **gestauter Zweig**  $\rho_{\text{cong}}(Q)$  der Dichte-Fluss-Relation bezeichnet werden. Im dreieckigem FD ergeben sich die Gleichgewichtsdichten zu

$$\rho_{\text{free}}(Q) = \frac{Q}{V_0}, \quad (9.11)$$

$$\rho_{\text{cong}}(Q) = \frac{1 - QT}{s_0 + l} = \rho_{\max}(1 - QT). \quad (9.12)$$

### Verständnisfrage:

Diskutieren Sie die Beobachtung, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_g$  von Dichteschwankungen in gebundenem Verkehr in den USA (18-20 km/h) etwas größer ist als in Europa (15-16 km/h). Betrachten Sie dabei bekannte Unterschiede der Eigenschaften der Fahrzeugflotte in diesen Regionen.

### 9.3.2. Modellierung homogener und inhomogener Richtungsfahrbahnen

In diesem Unterabschnitt werden einzelne Richtungsfahrbahnen betrachtet. Die Verallgemeinerung auf Netzwerke erfolgt in Kap. 9.3.4. Im Rahmen dieses Modells wird eine Richtungsfahrbahn in mehrere Streckenabschnitte bzw. *road sections*  $k$  (Index in stromabwärtiger Richtung steigend) aufgeteilt, wie in Abb. 9.11 dargestellt:

Eine **road section**  $k$  ist ein homogener Streckenabschnitt der Länge  $L^{(k)}$  und Kapazität  $K^{(k)}$ , welcher stromabwärts durch eine *Streckeninhomogenität* oder **Engstelle** (engl. *bottleneck*) der Kapazität  $K_B^{(k)}(t)$  begrenzt ist.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Typische Streckeninhomogenitäten/Engstellen sind beispielsweise

- Änderung der Zahl von Fahrstreifen (Reduktion, aber auch neue Fahrstreifen),
- Änderung von anderen globalen Eigenschaften wie Steigungen, die Kurvigkeit, Tempolimits sowie Engstellen im engeren Sinn wie enge Fahrstreifen bei Baustellen,
- Ein- oder Ausfahrten,
- Kreuzungen mit oder ohne Ampeln im Stadtverkehr.

Allgemein liegt eine Streckeninhomogenität immer dann vor, wenn stromabwärts *oder* stromaufwärts eine größere Kapazität herrscht. In diesem Sinne sind auch Erweiterungen mit neuen Fahrstreifen und Bereiche mit Abfahrten Engstellen (Abb. 9.11). Zur Modellierung ist es wichtig, zwei Arten von Engstellen/Inhomogenitäten zu unterscheiden:

- Bei **flusserhaltenden Engstellen** gehen alle Fahrzeuge des Abschnitts  $k$  in den stromabwärtigen Abschnitt  $k+1$  über und Abschnitt  $k+1$  erhält keine Fahrzeuge von anderswoher, es gibt also keine Zu- oder Abfahrten oder Kreuzungen. In Abb. 9.11 sind dies die Engstellen zwischen  $k = 1$  und  $2$  sowie zwischen  $k = 4$  und  $5$ .
- Bei **nicht flusserhaltenden Engstellen** gibt es zusätzliche Quellen und Senken in Form von Zufahrten, Abfahrten oder Kreuzungen.

In jedem Fall ist die Engstellenkapazität  $K_B^{(k)}(t)$  definiert durch den maximalen Verkehrsfluss *innerhalb* des Abschnitts  $k$ , welchen die Engstelle gerade noch verkraften kann. Eine Zeitabhängigkeit der Engstellenkapazität ermöglicht die Modellierung temporärer oder veränderlicher Engstellen wie Blockaden/Fahrstreifensperrungen durch Unfälle oder Lichtsignalanlagen. Bei flusserhaltenden Engstellen ist  $K_B^{(k)}(t)$  direkt gleich dem Maximalfluss durch die Engstelle, bei Abfahrten ist es die gerade noch verkraftbare Summe von abfahrenden und auf der Hauptfahrbahn verbleibenden Flüssen. Bei Zufahrten hingegen ist es der maximale Fluss der Fahrzeuge auf der Hauptfahrbahn *ohne* die auffahrenden Fahrzeuge.

Da das LWR mit dreieckigem FD, wie alle LWR-Modelle, keinen Kapazitätsabfall (Abfall des Durchflusses) nach einem Verkehrszusammenbruch besitzt und stromabwärts von Staus immer der Maximalflusszustand herrscht, kann man die Engstellen-Kapazität völlig gleichwertig mittels der Flüsse durch die Engstelle *nach* einem Verkehrszusammenbruch definieren.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> stromabwärts muss natürlich freier Verkehr herrschen, so dass an der Engstelle der Zustand "Ausfluss aus dem Stau" vorliegt.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

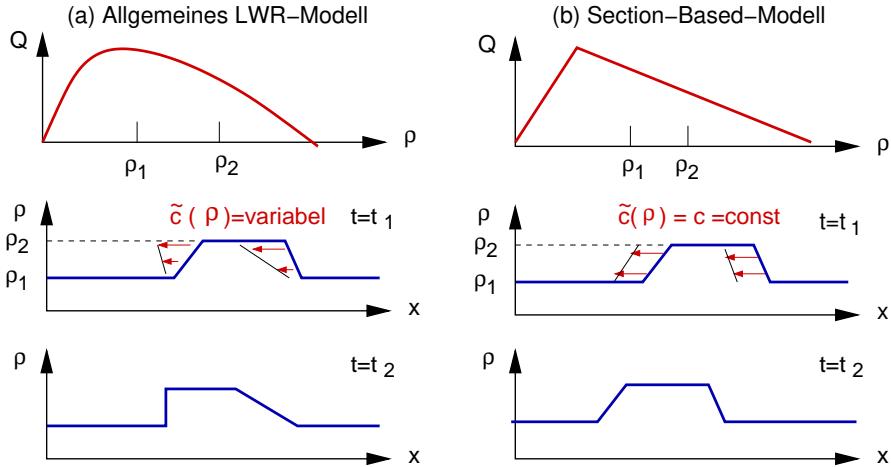


Figure 9.10.: Ausbreitung von Störungen in allgemeinen LWR-Modellen (linke Spalte) und im LWR mit dreieckigem FD (rechte Spalte). Gezeigt sind jeweils das Fundamentaldiagramm (oben), eine Anfangsstörung innerhalb gebundenen Verkehrs zur Zeit  $t_1$  (Mitte) und das Aussehen der Störungen einige Zeit später,  $t_2 > t_1$  (unten). Nur beim dreieckigem FD breiten sich Störungen mit konstanter Geschwindigkeit aus.

### Verständnisfrage:

Wie sieht die Engstellenkapazität  $K_B^{(k)}(t)$  aus

- (i) Bei einer Lichtsignalanlage (LSA, *vulgo* "Ampel") für Fußgängerüberquerungen in der Rot- und Grünphase (zwei Fahrstreifen),
- (ii) Bei einer unfallbedingten temporären Sperrung eines Fahrstreifens auf einer Richtungsfahrbahn mit drei Fahrstreifen.

Folgende spezielle Eigenschaften der Ausbreitung von Dichteschwankungen sind die Grundlage für die numerische Effizienz bei der Simulation des LWR mit dreieckigem FD:

1. Innerhalb der Bereiche "freier Verkehr" und "gebundener Verkehr" bleiben beliebige Dichteschwankungen in ihrer Form unverändert, während sie sich mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $V_0$  (gleich der Wunschgeschwindigkeit) und  $v_g$  fortpflanzen (vgl. Abb. 9.10). Da  $V_0 > 0$  und  $v_g < 0$ , wird damit der Bereich freier Verkehr nur von den stromaufwärtigen Randbedingungen (Zufluss) kontrolliert, während der gestaute Bereich ausschließlich vom stromabwärtigen Rand (Durchflusskapazität der dort vorhandenen Engstelle) dominiert wird (Abb. 9.12).
2. Eine eventuell vorhandene Grenze freier Verkehr  $\rightarrow$  gebundener Verkehr ist im-

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

mer unstetig und wird durch die Schockwellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit (9.5) beschrieben. Diese kann Werte zwischen  $v_g$  und  $V_0$  annehmen, also sowohl stromaufwärts als auch stromabwärts wandern.

3. Der Übergangsbereich gestaut → frei ist entweder stationär und dann zwingend an einer Engstelle (Kapazitätsengpass), also am stromabwärtigen Ende einer *road section* positioniert, oder er breitet sich mit der festen Geschwindigkeit  $v_g$  stromaufwärts aus. Der letztere Fall kann nur vorkommen, falls der Engpass plötzlich verschwindet (grüne Ampel oder Räumung einer Unfallstelle). Da dann außerdem der Ausfluss identisch zum maximalen Ausfluss ist, kann man den Ausflussbereich einer laufenden stromabwärtigen Staufront sowohl dem freien als auch dem gebundenen Verkehr zuordnen. Damit ergibt sich folgende Schlussfolgerung:

Ordnet man den “Maximalfluss-Zustand” an der “Spitze” des Fundamental-Diagramms dem gebundenen Verkehr zu, so kann es innerhalb jeder *road section* maximal einen Übergang frei → gestaut geben. Ein möglicher Übergang gestaut → frei ist *immer* stationär und befindet sich am stromabwärtigen Ende einer *road section*. Jede *road section* kann also genau einen der drei Zustände annehmen:

- (i) komplett frei,
- (ii) teilgestaut mit freiem Verkehr stromaufwärts vom gebundenen Verkehr,
- (iii) komplett verstaut.

Andere Möglichkeiten (wie mehrere Staus oder Übergänge gestaut → frei) *gibt es nicht*.

### Dynamik innerhalb eines Abschnitts bei gegebenen Zustand und Randbedingungen

Jede dieser drei Situationen lässt sich direkt durch die Randbedingungen und ggf. durch die Bewegungsgleichung einer Staufront beschreiben. Die explizite Lösung der Kontinuitätsgleichung des LWR-Modells (also einer partiellen Differenzialgleichung!) ist nicht nötig. Für alle Situationen sei zunächst der Zufluss  $Q_{\text{in}}^{(k)}(t)$  am stromaufwärtigen Ende bei  $x = x_{\text{up}}^{(k)}$  sowie der Ausfluss  $Q_{\text{out}}^{(k)}(t)$  am stromabwärtigen Ende  $x = x_{\text{down}}^{(k)}$  der Road Section  $k$  vorgegeben (vgl. Abb. 9.11), wobei, je nach Situation, eine der Bedingungen ggf. irrelevant sein kann.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

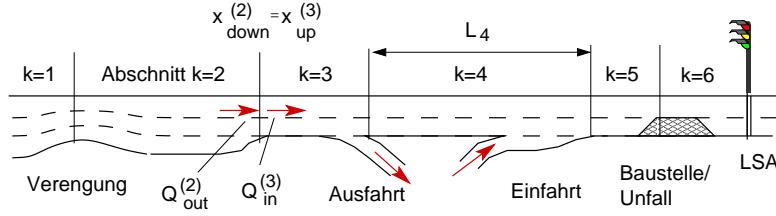


Figure 9.11.: Definitionen der Abschnitte im LWR mit dreieckigem FD (*Section Based Model*): Jede “Section” besteht aus einer homogenen Strecke mit einer Engstelle/Inhomogenität am stromabwärtigen Rand. Gezeigt sind Fahrstreifenzahlreduktion ( $k = 1$ ), Ausfahrt ( $k = 2$ ), Einfahrt ( $k = 3$ ) und eine lokale Fahrstreifenzahlreduktion ( $k = 4$ ). Die Engstellen  $k = 1$  und  $k = 4$  sind flusserhaltend, die beiden anderen nicht.

### Zustand 1: freier Verkehr auf der gesamten Road Section

Hier ist die stromaufwärtige Randbedingung relevant und man erhält innerhalb des Abschnitts  $k$  zunächst den Fluss und mit (9.11) die Dichte:

$$\begin{aligned} Q_f^{(k)}(x, t) &= Q_{\text{in}}^{(k)}(t'), \quad t' = t - \frac{x - x_{\text{up}}^{(k)}}{V_0}, \\ \rho_f^{(k)}(x, t) &= \rho_{\text{free}} \left( Q_f^{(k)}(x, t) \right). \end{aligned} \quad (9.13)$$

### Zustand 2: gestauter Verkehr auf der gesamten Road Section

Hier ist die stromabwärtige Randbedingung relevant und man erhält innerhalb des Abschnittes zunächst den Fluss und mit (9.12) die Dichte:

$$\begin{aligned} Q_c^{(k)}(x, t) &= Q_{\text{out}}^{(k)}(t'), \quad t' = t - \frac{x_{\text{down}}^{(k)} - x}{|v_g|}, \\ \rho_c^{(k)}(x, t) &= \rho_{\text{cong}} \left( Q_c^{(k)}(x, t) \right). \end{aligned} \quad (9.14)$$

### Zustand 3: freier und gestauter Verkehr

Hier sind beide Randbedingungen relevant und für die freien und gebundenen Anteile gelten die jeweiligen obigen Gleichungen. Zusätzlich gilt für die Position  $x^*(t)$  des Übergangs frei  $\rightarrow$  gestaut die Schockwellenausbreitungsgeschwindigkeit (9.5), welche hier die Form einer gewöhnlichen Differenzialgleichung für  $x^*$  annimmt:

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} &= \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_{\text{cong}}(Q_2) - \rho_{\text{free}}(Q_1)}, \\ Q_2 &= Q_c^{(k)}(x^*, t) = Q_{\text{out}}^{(k)} \left( t - \frac{x_{\text{down}}^{(k)} - x^*}{|v_g|} \right), \\ Q_1 &= Q_f^{(k)}(x^*, t) = Q_{\text{in}}^{(k)} \left( t - \frac{x^* - x_{\text{up}}^{(k)}}{V_0} \right). \end{aligned} \quad (9.15)$$

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

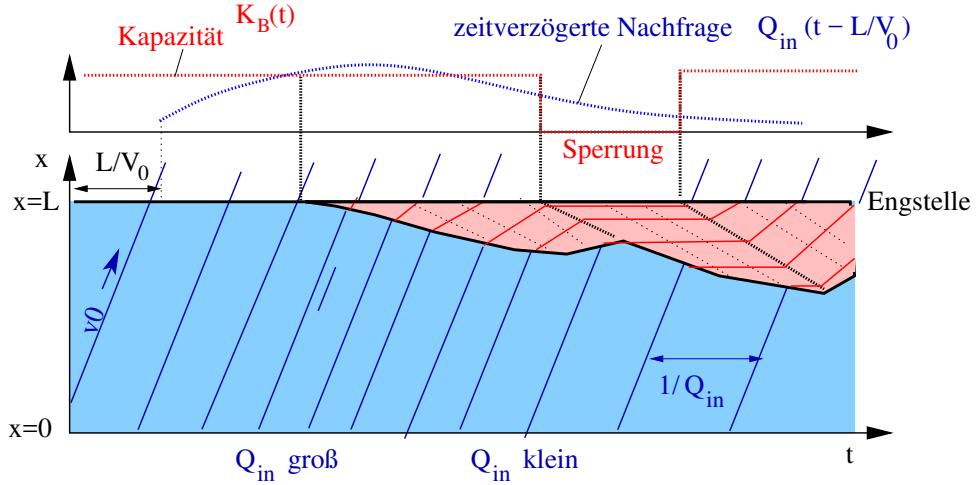


Figure 9.12.: Verkehrsdynamik eines mit dem LWR mit dreieckigem FD modellierten Abschnitts der Länge  $L$ . Dargestellt sind die Bereiche freien bzw. gebundenen Verkehrs (blaue bzw. rote Flächen), einige Fahrzeugtrajektorien (blaue bzw. rote durchgezogene Linien), die Ausbreitung von Störungen im Stau (punktige Linien) sowie die zeitlich veränderliche Kapazität  $Q_{\text{out}}(t)$  und die zeitverzögerte Nachfrage  $Q_{\text{in}}(t)$  (rote bzw. blaue punktierte Linien im oberen Koordinatensystem). Ein Stau bildet sich, wenn die blaue die rote punktierte Linie von unten nach oben schneidet.

Abbildung 9.12 verdeutlicht die allgemeinste Situation mit zeitlich veränderlicher Nachfrage bzw. Zufluss  $Q_{\text{in}}(t)$  (Rush hour) und einem Ausfluss, welcher nur durch die (ebenfalls variable) Engstellen-Kapazität  $K_B$  mit temporärer Streckensperrung beschränkt ist<sup>5</sup>:  $Q_{\text{out}}(t) = K_B(t)$ . Sobald bei anfangs freiem Verkehr die zeitversetzte Nachfrage  $Q(L, t) = Q(0, t - L/v_0) = Q_{\text{in}}(t - L/v_0)$  größer wird als die Kapazität  $K_B(t)$ , bildet sich ein Stau. Die Geschwindigkeit der entstehenden Staufront hängt nun gemäß Gl. (9.15) von den zeitverzögerten Werten der Nachfrage und der Kapazität ab. Zunächst sinkt die Nachfrage bei konstanter Engstellenkapazität, so dass die sich anfänglich entgegen der Fahrtrichtung bewegende Staufront schließlich ihre Richtung umkehrt, der Stau sich also aufzulösen beginnt. Die dann einsetzende Vollsperrung ( $K_B(t) = 0$ ) führt – entsprechend zeitverzögert – noch einmal zu einem Anwachsen, ehe die Aufhebung der Sperrung und die nun geringe Nachfrage nach einer der Staulänge entsprechenden Verzögerungszeit zu einer raschen Auflösung führen.

---

<sup>5</sup>Stromabwärts der Engstelle herrscht also freier Verkehr, vgl. den nächsten Unterabschnitt.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

### Dynamik der Randbedingungen und Zustände

Die Randbedingungen einer jeden Road Section vermitteln die Kopplung der einzelnen Abschnitte untereinander und führen letztendlich zu den bei der Betrachtung der Dynamik innerhalb einer *road section* als gegeben angenommenen Randbedingungen  $Q_{\text{in}}(t)$  und  $Q_{\text{out}}(t)$ . Nur der stromaufwärtige Rand des ersten Abschnitts bei  $x_{\text{up}}^{(1)}$  und der stromabwärtige Rand  $x_{\text{down}}^{(K)}$  des letzten Abschnittes werden extern vorgegeben. Die Kopplung am Übergang der Abschnitte  $k$  und  $k+1$  am Ort  $x_{\text{down}}^{(k)} = x_{\text{up}}^{(k+1)}$  geschieht nach der **Supply-Demand-Methode** (für die Bezeichnungen vgl. Abb. 9.12):

- Das Angebot (*supply*)  $S_k$  ist durch die aktuellen Kapazität  $K_B^{(k)}$  der Engstelle und ggf. durch einen Rückstau im nächsten stromabwärtigen Abschnitt  $k+1$  bestimmt:

$$S_k(t) = \begin{cases} \min(K_B^{(k)}(t), Q^{(k+1)}(x_{\text{up}}^{(k+1)}, t)) & \text{Abschnitt } k+1 \text{ vollständig zugestaut,} \\ K_B^{(k)}(t) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.16)$$

- Die Nachfrage (*demand*)  $D_k$  ist durch die Verkehrsdichte am stromabwärtigen Ende des aktuellen Abschnitts bestimmt:

$$D_k(t) = \begin{cases} Q^{(k)}(x_{\text{down}}^{(k)}, t) & \text{Abschnitt } k \text{ vollständig staufrei,} \\ Q_{\max}^{(k)} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.17)$$

- Die neuen Randbedingungen sind gegeben durch<sup>6</sup>

$$Q_{\text{out}}^{(k)}(t) = Q_{\text{in}}^{(k+1)}(t) = \min(S_k(t), D_k(t)) \quad (9.18)$$

- Außerdem ändern sich ggf. die Zustände: Falls  $D_k(t) > S_k(t)$  und Abschnitt  $k$  bisher vollständig frei war (Zustand 1), entsteht dort ein neuer Stau (Zustand 3). Falls  $D_k(t) < S_k(t)$  und Abschnitt  $k+1$  bisher vollständig verstaubt war (Zustand 2), ist dieser Abschnitt nun nur noch teilverstaubt (Zustand 3). Ein Zustand 3 geht in 1 bzw. 2 über, wenn die Staugrenze  $x^*$  das stromabwärtige bzw. stromaufwärtige Ende des Abschnitts erreicht, vgl. Abb. 9.12.

Besonders einfach wird all dies im Falle von lichtsignalgesteuerten Stadtverkehr, wenn man zunächst die Nebenstrecken außer Acht lässt und die Abschnitte der Hauptstrecke jeweils dasselbe Fundamentaldiagramm aufweisen. Diese, in Abb. 9.16 gezeigte Situation lässt sich durch drei Road Sections darstellen, wobei die beiden Ampeln jeweils die Engstellen der beiden ersten Abschnitte darstellen. Die Kapazitäten an den Ampel-Engstellen sind durch

$$K_B^{(k)}(t) = \begin{cases} K & \text{Ampel } k \text{ ist grün} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

---

<sup>6</sup>Zur Bestimmung von Nachfrage und Angebot sind nur Randbedingungen aus der Vergangenheit notwendig; ein Selbstbezug tritt daher nicht auf

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

gegeben. Der letzte Abschnitt eine hinreichend große Kapazität hat, so dass er nie verstaunt wird.

Im Allgemeinen können an den Abschnittsgrenzen auch verschiedenartigste Flüsse hinzukommen oder abzweigen und durch i.A. naheliegende Verallgemeinerungen der Minimums-Bedingungen berücksichtigt werden. Damit kann z.B. der Verkehr einer gesamten Stadt effizient simuliert werden: Jeder Abschnitt zwischen zwei Kreuzungen oder Engstellen ist eine "Road Section".

### 9.3.3. Beispiele

Abbildung 9.13 Zeigt das allgemeine Prinzip der durch das dreieckige FD beschriebenen Stauausbreitungsdynamik: Nach dem *Supply-Demand-Prinzip* herrscht innerhalb der Engstelle der "Maximalflusszustand", d.h. der Fluss ist gleich der (reduzierten) Kapazität  $K_2$  und die Dichte gleich der dazugehörigen kritischen Dichte  $\rho_{K_2}$  (Zustand ③ in Abb. 9.13). Im eigentlichen Sinne gestauten Verkehr gibt es hingegen nur *stromaufwärts* der Engstelle. Da die Engstelle und damit der Übergang Stau  $\rightarrow$  Maximalflusszustand ortfest sind, herrscht auch im Stau derselbe Verkehrsfluss  $K_2$ . Diesem Fluss entspricht hier aber eine deutlich höhere Dichte, welche durch  $\rho_{\text{cong}}(K_2)$  gegeben ist (Zustand ②). Da hier die Nachfrage  $Q_{\text{in}} > K_2$  angenommen wurde (weshalb der Stau überhaupt erst entstanden ist), bewegt sich die stromaufwärtige Staufront ①  $\rightarrow$  ② mit der Geschwindigkeit

$$v_g = \frac{Q_2 - Q_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{K_2 - Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{cong}}(K_2) - Q_{\text{in}}/v_{01}}$$

stromaufwärts. In Abb. 9.13 ist diese Geschwindigkeit durch die Steigung der grünen gestrichelten Gerade gegeben. Schließlich ist der Übergang ③  $\rightarrow$  ④ am Ende der Engstelle ebenfalls ortfest, also ist auch im Ausflussbereich der Verkehrsfluss durch  $K_2$  gegeben. Allerdings entspricht dies hier gemäß dem freien Zweig des Fundamental-Diagramms einer geringeren Dichte  $\rho_{\text{out}} = K_2/v_{01}$  mit  $v_{01}$  der Maximalgeschwindigkeit (Wunschgeschwindigkeit) außerhalb der Engstelle.

Im Folgenden nun, nach Komplexität geordnet, einige konkrete Beispiele der Stauausbreitung an Engstellen:

#### (1) Warteschlange an einer Lichtsignalanlage (LSA)

Gegeben ist eine Situation mit konstantem Zustrom  $Q_{\text{in}} < K$  bei  $x = 0$  und einer LSA bei  $x = L$ , welche anfangs ( $t = 0$ ) grün ist, zur Zeit  $t_1$  nach Rot und zum Zeitpunkt  $t_2$  wieder nach Grün schaltet. Anfänglich herrscht freier Verkehr. Außerdem gibt es während der gesamten Zeit keinen Rückstau auf dem Abschnitt stromabwärts der LSA.

*Lösung:* Da es nach Voraussetzung keinen Rückstau gibt, ist das Angebot  $S$  durch die "Engstellen-Kapazität" der LSA gegeben:

$$S(t) = K_B(t) = \begin{cases} K = \frac{1}{T + \frac{t_{\text{eff}}}{V_0}} & t \leq t_1 \text{ oder } t > t_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

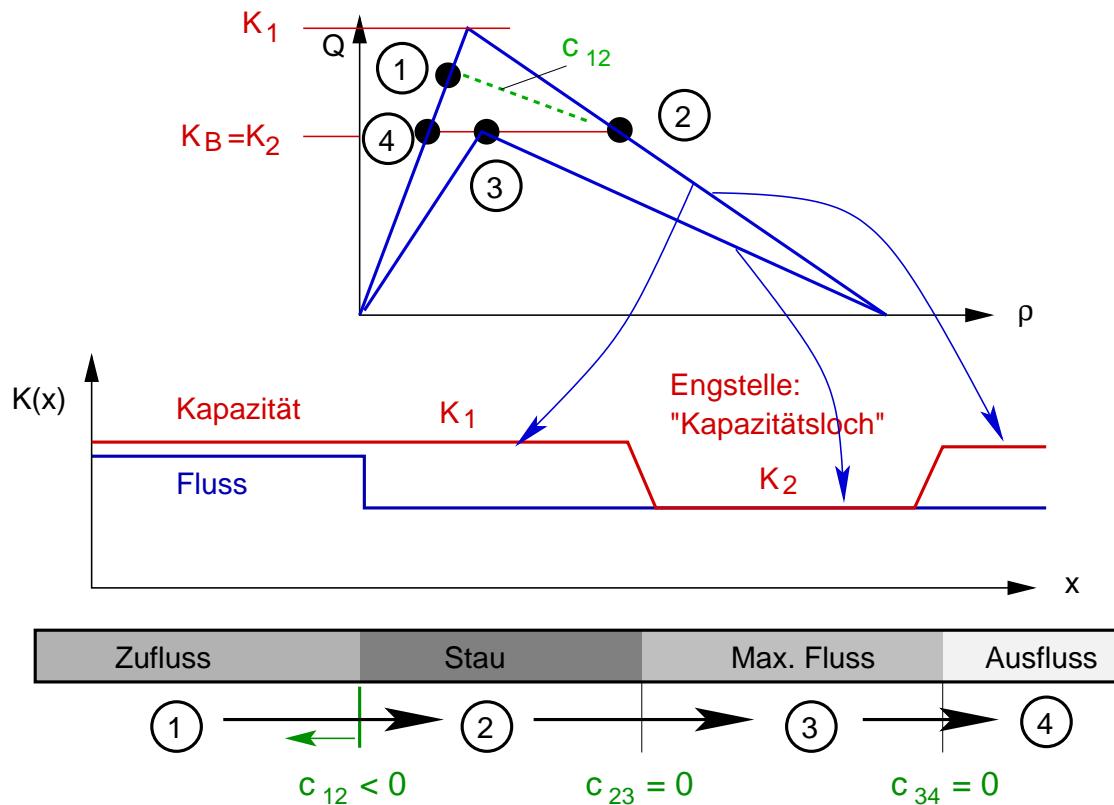


Figure 9.13.: Stauausbreitung im LWR mit dreieckigem FD: Gezeigt ist der Fall einer flusserhaltenden Engstelle, bei der sich innerhalb der Engstelle das Fundamentaldiagramm ändert und sich insbesondere die Kapazität von  $K_1$  auf  $K_2$  reduziert. Ein Fahrzeug durchläuft nacheinander die mit ① - ④ auf dem Streckenabschnitt und im Fundamentaldiagramm bezeichneten Zustände. Der Übergang ① → ② bewegt sich stromaufwärts, während die anderen Übergänge stationär sind.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

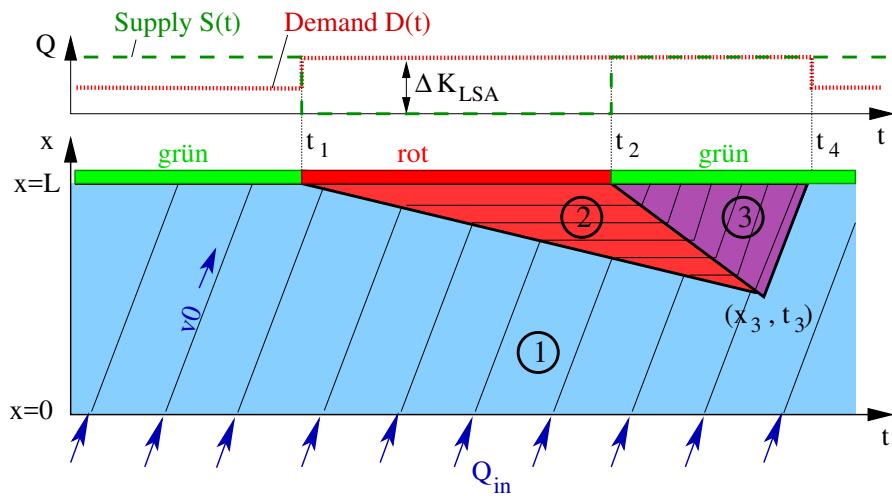


Figure 9.14.: Modellierung einer Warteschlange vor einer Lichtsignalanlage gemäß dem Beispiel in Abschnitt 9.3.3. Unterschieden werden die Bereiche freier Verkehr (hellblau), gestauter Verkehr bzw. Warteschlange (rot) und Ausfluss aus dem Stau (violett). Das obere Koordinatensystem veranschaulicht die Berechnung der Randbedingungen mit dem *Supply-Demand* Modell. Die Fahrzeugtrajektorien (schwarze Linien) dienen nur zur Veranschaulichung.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

- **Phase 1: LSA ist grün, freier Verkehr,  $t \leq t_1$ .** Der Abschnitt ist anfangs staufrei, also ist der *demand* durch  $D = Q_{\text{in}}$  gegeben. Da  $D < S$  bleibt dieser Zustand bis  $t = t_1$  unverändert bestehen.
- **Phase 2: LSA ist rot, Bildung einer Warteschlange,  $t_1 < t \leq t_2$ :** Nun ist  $S = 0$  und damit  $D > S$ , die *road section* geht also in den Zustand “teilverstaut” über und die stromabwärtige Randbedingung ist durch  $Q_{\text{out}} = 0$  gegeben. Gl. (9.15) für die Staufront (stromaufwärtiger Bereich 1, stromabwärtiger 2, vgl. Abb. 9.14) wird damit

$$\frac{dx^*}{dt} := c_{12} = \frac{-Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{cong}}(0) - \rho_{\text{free}}(Q_{\text{in}})}$$

und mit  $\rho_{\text{cong}}(0) = \rho_{\text{max}} = 1/l_{\text{eff}}$  und  $\rho_{\text{free}}(Q_{\text{in}}) = Q_{\text{in}}/V_0$  schließlich

$$c_{12} = \frac{dx^*}{dt} = \frac{-Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{max}} - \frac{Q_{\text{in}}}{V_0}}$$

Ohne Zufluss ( $Q_{\text{in}} = 0$ ) gilt  $c_{12} = 0$ , da sich dann natürlich auch bei roter Ampel kein Stau bildet. Bei maximalen Zuflus, also nach Gl. 9.9  $Q = K = 1/(T + l_{\text{eff}}/V_0)$ , gilt hingegen (unter Ausnutzung von  $\rho_{\text{max}} = 1/l_{\text{eff}}$ )

$$c_{12}^{\text{max. Zufluss}} = \frac{-l_{\text{eff}}}{T} = v_g = -|v_g|.$$

Die Staufront-Geschwindigkeit bei maximalen Fluss ist also gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen innerhalb gestauter Zustände!

- **Phase 3: LSA ist grün, Stauauflösung,  $t_2 < t \leq t_3$ :** Wegen der Warteschlange vor der LSA ist die Nachfrage nun durch  $D(t) = Q_{\text{max}} = K$  gegeben. Das Angebot  $S(t)$  ebenfalls, so dass die Randbedingung  $Q_{\text{out}} = K$  gilt. Der Übergang “stehender Verkehr” → maximaler Fluss“ breitet sich – wie alle Veränderung innerhalb des gestauten Bereiches und der Maximalflusszustand kann ja als Grenzfall davon interpretiert werden – mit der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  stromaufwärts aus. Es gibt also nun zwei Übergänge:

- \* Der Übergang 1 → 2 (frei → gestaut) am Ort  $x_1(t) = L + c_{12}(t - t_1)$
- \* Der Übergang 2 → 3 (gestaut → maximaler Fluss) am Ort  $x_2(t) = L + v_g(t - t_2)$  mit

$$c_{23} = \frac{Q_3 - Q_2}{\rho_3 - \rho_2} = \frac{Q_{\text{max}} - 0}{\rho_c - \rho_{\text{max}}} = -\frac{1}{\rho_{\text{max}} T} = +v_g.$$

Zur Zeit

$$t_3 = \frac{c_{12}t_1 - v_g t_2}{c_{12} - v_g} = t_1 + \left( \frac{-v_g}{c_{12} - v_g} \right) (t_2 - t_1)$$

treffen sich die beiden Staufronten und die Warteschlange hat sich am Ort

$$x_3 = L + v_g(t - t_2)$$

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

aufgelöst (man beachte, dass  $v_g$  und  $c_{12}$  negativ sind, der Ort befindet sich also stromaufwärts der LSA, wie es auch sein muss.)

- **Phase 4: Auflösung des Maximalfluss-Zustandes,**  $t_3 < t \leq t_4$ : Mit  $Q_2 = Q_{\max}$  liefert Gl. (9.15) für die Geschwindigkeit der stromaufwärtsigen Front nun

$$c_{13} = \frac{Q_{\max} - Q_{\text{in}}}{\rho_{\text{cong}}(Q_{\max}) - \rho_{\text{free}}(Q_{\text{in}})} = V_0$$

Für  $0 \leq x < x_3 + V_0(t - t_3)$  herrscht damit der ursprüngliche Zustand freien Verkehrs,  $Q(x, t) = Q_{\text{in}}$  und  $\rho(x, t) = Q_{\text{in}}/V_0$ , während der Maximalflusszustand im Bereich  $x_3 + V_0(t - t_3) \leq x < L$  gilt. Diese Phase ist beendet, wenn die Front den Ort der LSA trifft,  $x_3 + V_0(t_4 - t_3) = L$  und damit

$$t_4 = t_3 + \frac{L - x_3}{V_0}.$$

### Gesamte Wartezeit durch LSA

Ermitteln Sie die durch eine LSA-Rotphase verursachte Gesamt-Wartezeit aller betroffenen Fahrzeuge in Abhängigkeit der Dauer  $\tau_r = t_2 - t_1$  des Rotlichts. Nehmen Sie dabei einen konstanten Zufluss  $Q_{\text{in}}$  und einen vollständiger Abfluss der LSA-Warteschlange vor jeder Rotphase an.

[Lösung: Gesamt-Wartezeit  $= \frac{1}{2}Q_{\text{in}}\tau_r^2(-v_g/(c - v_g))]$

- (2) **Zufahrt** Nun sei ein Streckenabschnitt mit einer Zufahrt (konstante Verkehrsbelastung  $Q_{\text{rmp}}$ ) als stromabwärtige Begrenzung gegeben. Der Zufluss an der stromaufwärtsigen Begrenzung der Hauptfahrbahn ( $I$  Fahrstreifen) beträgt pro Fahrstreifen

$$Q_{\text{in}} = \frac{Q_{\text{in}}^{\text{tot}}}{I} = \begin{cases} Q_0 & t < t_{\text{beg}} \text{ oder } t > t_{\text{end}} \\ Q_{\text{rush}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sei beim Zufluss  $Q_0$  permanente Staufreiheit möglich, während es während der “Rush hour” beim größeren Fluss  $Q_{\text{rush}}$  zum Stau kommt.

*Lösung:*

- **Phase 1: Freier Verkehr,**  $t < t_1$  Nach der allgemeinen Definition in diesem Abschnitt ist die Kapazität  $K$  durch den Gesamtfluss auf der *Hauptfahrbahn* (HFB) gegeben, welcher gerade noch nicht zum Stau führt. Da die Fahrzeuge der Zufahrt ebenfalls durch die stromabwärtige Begrenzung des Abschnittes fahren (die *road section* schließen ja die Inhomogenität, also hier die Zufahrt, komplett ein!), gilt daher

$$K = IQ_{\max} - Q_{\text{rmp}},$$

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

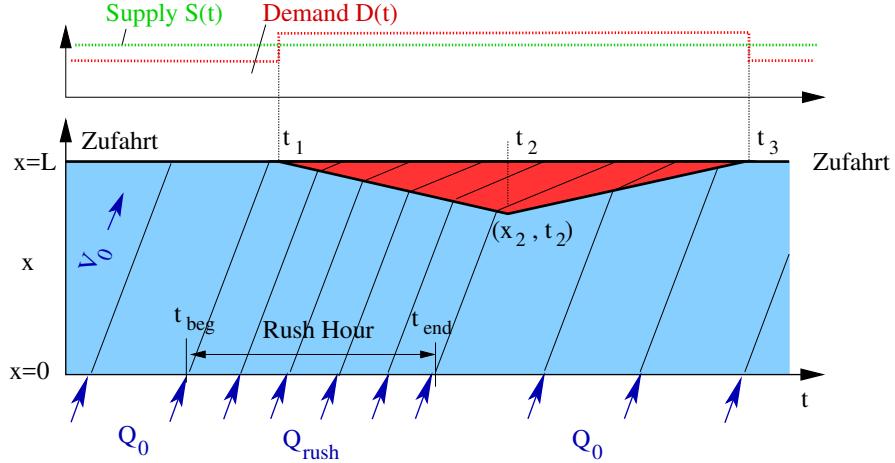


Figure 9.15.: Modellierung eines durch Überlastung verursachten Verkehrszusammenbruchs an einer Zufahrt. Im Gegensatz zum LSA-Beispiel ist hier die Kapazität der Störstelle (d.h. der Rampenfluss) konstant und der Stau wird durch eine erhöhte Verkehrsbelastung auf der Hauptfahrbahn (*rush hour*) provoziert. Außerdem stehen die Fahrzeuge im Gegensatz zum LSA-Beispiel im Stau nicht.

Für den Zufluss in dieser Phase muss also  $Q_0 < K/I = Q_{\max} - Q_{\text{rmp}}/I$  gelten. Diese Phase geht zu Ende, wenn der höhere Zufluss nach einer zusätzlichen Zeitspanne  $L/v_0$  die Stelle der Zufahrt erreicht hat<sup>7</sup>, also

$$t_1 = t_{\text{beg}} + \frac{L}{V_0}.$$

### – Phase 2: Ausbreitung eines Staus, $t_1 \leq t < t_2$

Für den Fluss während der Rush hour gilt  $Q_{\text{rush}}^{\text{tot}} = IQ_{\text{rush}} > K$ . Damit bricht der Verkehr an der Zufahrt zusammen. Der Bereich gestauten Verkehrsstromaufwärts ist gegeben durch

$$Q_{\text{cong}} = \frac{K}{I} = Q_{\max} - \frac{Q_{\text{rmp}}}{I}, \quad \rho_{\text{cong}} = \rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}}T), \quad V_{\text{cong}} = \frac{Q_{\text{cong}}}{\rho_{\text{cong}}}.$$

Der Bereich freien Verkehrs stromaufwärts ist hingegen gegeben durch

$$Q_{\text{free}} = Q_{\text{rush}}, \quad \rho_{\text{free}} = \frac{Q_{\text{rush}}}{V_0}, \quad V_{\text{free}} = V_0.$$

---

<sup>7</sup>Dies gilt genau nur für eine vernachlässigbare Längen  $L_{\text{rmp}}$  der Beschleunigungsspur, in hinreichend guter Näherung aber auch für endliche Rampenlängen.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der stromaufwärtigen Staufront in Phase 2 ist genau wie in der Ampelaufgabe gegeben durch

$$c_2 = \frac{Q_{\text{cong}} - Q_{\text{rush}}}{\rho_{\max}(1 - Q_{\text{cong}}T) - \frac{Q_{\text{rush}}}{V_0}}$$

Diese Phase endet, wenn der Übergang  $Q_{\text{rush}} \rightarrow Q_0$  des Verkehrsflusses am Ende der *rush hour* (Zeit  $t_{\text{end}}$ ) die Staufront erreicht. Die Schnittbedingung

$$x_2 := V_0(t_2 - t_{\text{end}}) = L + c_2(t_1 - t_{\text{beg}})$$

liefert

$$t_2 = \frac{L - c_2 t_1 + V_0 t_{\text{end}}}{V_0 + c_2}$$

- **Phase 3: Stauauflösung**,  $t_2 < t \leq t_3$ : Nun ist der Bereich stromaufwärts der Staufront durch  $Q_{\text{free}} = Q_0$  und  $\rho_{\text{free}} = Q_0/V_0$  gegeben und die entsprechende neue Geschwindigkeit  $c_3$  der Staufront ergibt sich aus obiger Gleichung für  $c_2$ , wenn man  $Q_{\text{rush}}$  durch  $Q_0$  ersetzt. Da  $Q_0 < Q_{\text{cong}}$  und der Nenner positiv ist, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_3$  selbst positiv. Die stromaufwärtige Front verschiebt sich also in Richtung Rampe, bis sie zur Zeit

$$t_3 = t_2 + \frac{L - x_2}{c_3}$$

diese erreicht und der Stau sich auflöst.

- die **Phase 4** für  $t > t_4$  ist identisch zur Phase 1.

(3) Reduktion der Fahrstreifenzahl von 3 auf 2 zu tun.

Martin: Kontinuitätsgl/Uebergaenge: Fahrstreifensummen  $Q_{\text{tot}}$  etc!

### 9.3.4. Modellierung von Netzen im Section-Based-Model

#### Verständnisfrage:

Ermitteln Sie  $\rho_c$ ,  $Q_{\max}$  und  $\rho_{\max}$  aus den Parametern des “dreieckigen” Fundamentaldiagramms (9.6).

#### Verständnisfrage:

Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der verschiedenen Staufronten (1) – (6) in Abb. 9.16 für ein durch  $v_0 = 54$  km/h,  $T = 1.4$  s,  $l = 5$  m und  $s_0 = 2$  m gegebenes Fundamentaldiagramm.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

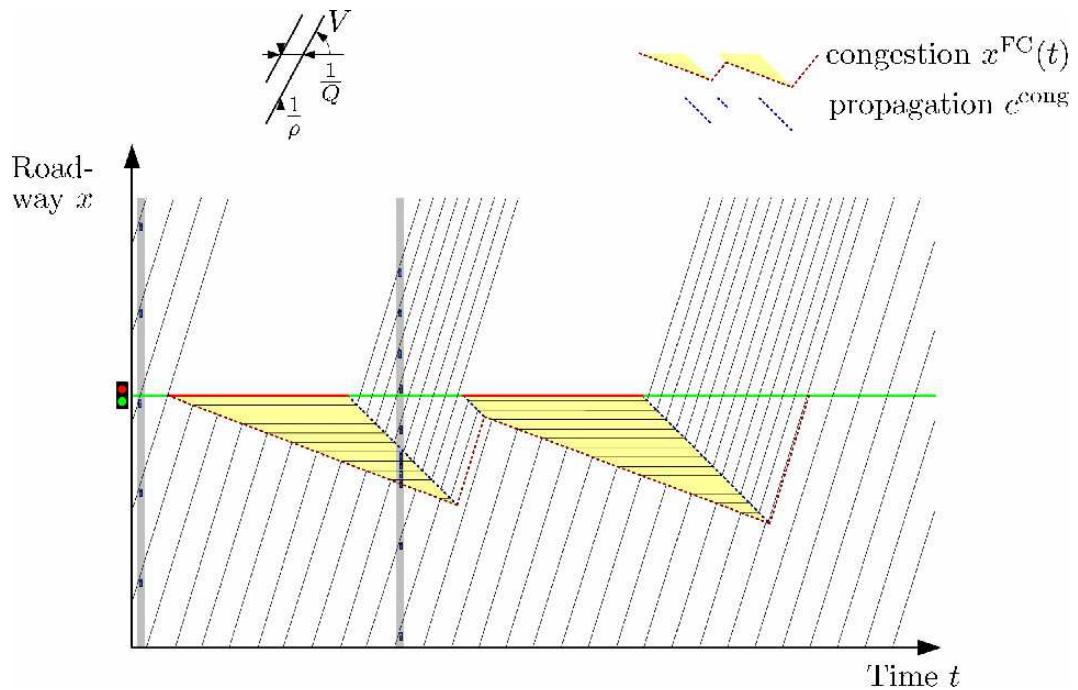


Figure 9.16.: Verkehrsdynamik einer lichtsignalgesteuerten Stadtverkehrsstraße mit zwei ampelgesteuerten Kreuzungen unter Verwendung des LWR mit dreieckigem FD. Die nummerierten Übergänge zwischen verschiedenen dynamischen Bereichen sind (1)=Haltelinie vor roter Ampel, (2) und (3)=stromaufwärziges Ende der Warteschlange vor roter Ampel ohne bzw. mit Zufluss, (4)=stromabwärziges Ende einer sich bei "Grün" auflösenden Schlange, (5) Übergang frei–maximalen Flusszustand, (6) Übergänge maximaler Flusszustand–leere Straße.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

### Verständnisfrage:

Begründen Sie, warum die Geschwindigkeit (9.5) einer Übergangszone frei → gestaut (Staufront) in LWR mit dreieckigem FD Werte zwischen  $v_g$  und  $V_0$  annehmen. Unter welchen Bedingungen werden die Extremwerte realisiert?

### Verständnisfrage:

Die Störungen des LWR mit dreieckigem FD haben für Dichten  $\rho < \rho_c$  alle die Geschwindigkeit  $v_0$  (vgl. Gl. (9.7)). Was bedeutet dies für die Reaktion der Fahrer untereinander?

### Verständnisfrage:

Die Geschwindigkeit von Dichteänderungen in gebundenen Verkehr ist durch  $v_g = -l_{\text{eff}}/T$  gegeben. Ferner ist die Folgezeit  $T$  in etwa so groß wie die Reaktionszeit. Veranschaulichen Sie sich die Gleichung für  $v_g$  am Beispiel des Anfahrens der hinter einer Ampel stehenden Fahrzeuge, nachdem die Ampel auf "Grün" gesprungen ist.

### Aufgabe:

Wie groß ist die Streckenkapazität beim LWR mit dreieckigem FD unter der Annahme, dass alle Fahrer im Mittel die Regel "Abstand gleich halber Tacho" berücksichtigen

- (a) im Stadtverkehr ( $V_0 = 51 \text{ km/h}$ ),
- (b) auf der Autobahn ( $V_0 = 118 \text{ km/h}$ ).

Die Geschwindigkeit von Störungen im gebundenen Verkehr sei in beiden Fällen  $v_g = 17 \text{ km/h}$ .

## 9.4. Diffusion und die Burgers-Gleichung

Die Schockwellen sind nicht ganz realistisch und bereiten Probleme bei der numerischen Lösung - zumindest für andere Fundamentaldiagramme als dem dreieckigen. Zu ihrer Glättung wurde ein Diffusionsterm  $D \partial^2 \rho / \partial x^2$  mit  $D > 0$  als Diffusionskonstante eingeführt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[ V_e(\rho) + \rho \frac{dV_e}{d\rho} \right] \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad \text{LWR mit Diffusion.} \quad (9.19)$$

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

Diese nichtlineare partielle Differenzialgleichung lässt sich i.A. nur nummerisch lösen. Im Spezialfall einer linearen Geschwindigkeits-Dichte-Relationen (also einer Parabel als Fundamentaldiagramm) kann man die dann "Burgers-Gleichung" genannte Gleichung mittels der sogenannten "Cole-Hopf-Transformation" auf eine lineare Diffusionsgleichung abbilden und exakt lösen.

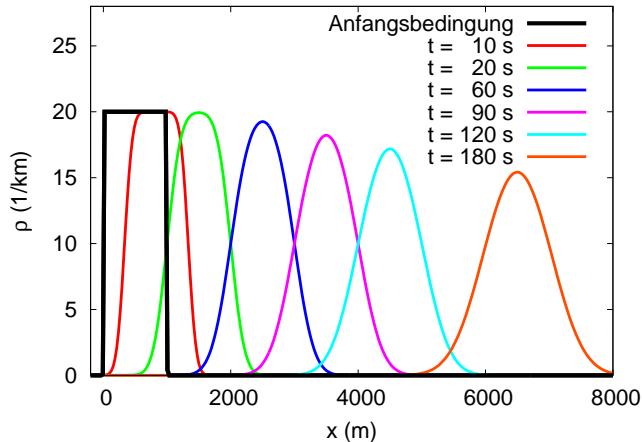


Figure 9.17.: Lösung der Diffusions-Transport-Gleichung (9.20) für die schwarz und dick gezeichnete Anfangsbedingung  $\rho(x, 0)$ .

Linearisiert man die Burgers-Gleichung für kleine Dichteschwankungen oder nimmt man lineare Fluss-Dichte-Relationen an (z.B. Gl. (9.6)) und befindet man sich überall oberhalb oder unterhalb der kritischen Dichte  $\rho_c$  des Übergangs freier-gebundener Verkehrs, so wird die Burgers-Gleichung (9.19) zur linearen **Diffusions-Transport-Gleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (9.20)$$

mit  $c = d(\rho V_e(\rho))/d\rho = V_e(\rho) + \rho dV_e/d\rho$ . Abbildung 9.17 zeigt eine Lösung dieser Gleichung für freiem Verkehr  $c = V_e = V_0$  unter den Anfangsbedingungen einer endlichen Dichte in einem bestimmten Streckenabschnitt und einer leeren Fernstraße außerhalb.

## 9. Makromodelle II: Das Lighthill-Whitham-Richards-Modell

### Aufgabe:

Zeigen Sie durch Einsetzen (d.h. Differenzieren), dass die normalverteilte Dichte

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ \frac{-(x - ct)^2}{4Dt} \right] \quad (9.21)$$

Gl. (9.20) für alle  $t > 0$  löst. Wie verändert sich die "Breite" dieser Dichteverteilung, definiert als Standardabweichung, mit der Zeit? (*Hinweis:* Diese Lösung erfüllt nicht die Anfangsbedingung in Abbildung 9.17. Siehe dazu den separaten Aufgabenteil zu diesem Skript).

### Verständnisfrage:

Warum ist  $D$  für "vernünftige" Verkehrsmodelle nie negativ? Diskutieren Sie dies anhand der Abb. 9.17 und der Lösung (9.21)

# 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

Holzhacken ist deshalb so beliebt, weil man bei dieser Tätigkeit den Erfolg sofort sieht.

Albert Einstein

Die bisher betrachteten makroskopischen Verkehrsmodelle (LWR-Modelle) bestanden alle aus einer einzigen (partiellen) Differenzialgleichung für die Verkehrsdichte. Die Geschwindigkeit  $V(x, t)$  dieser Gleichungen hatte keine eigene Dynamik, sondern ergab sich als statische Funktion direkt aus der Dichte. Dies entspricht einer instantanen Geschwindigkeitsanpassung an die bestehenden Verkehrsverhältnisse (Dichte und Dichtegradient), was wegen der endlichen Beschleunigungs- und Bremsfähigkeit realer Fahrzeuge eindeutig unrealistisch ist. Dies wird vor allem daran ersichtlich, dass mit den LWR-Modellen keine **Verkehrsinstabilitäten**, also wachsende **Stauwellen** simuliert werden können, die jedoch bei dichtem Verkehr in den Detektordaten fast immer beobachtet werden, wie z.B. in vielen Staus der Abb. 5.11.

Anhand Abbildung 10.1 kann man einige Eigenschaften der entstehenden Stauwellen sehen:

- Martin: Einige Stylized Facts

In realistischeren Modellen wird deshalb nicht die Geschwindigkeit, sondern die *Beschleunigung* als Funktion der Verkehrsverhältnisse (Dichte und Geschwindigkeit sowie deren Gradienten, d.h. räumlichen Ableitungen) angenommen.

Auf die *Kontinuitätsgleichung* hat dies keinen Einfluss, da sie ja direkt aus der Fahrzeughaltung folgt und damit für *alle* makroskopischen Verkehrsflussmodelle gilt. Je nachdem, wie kompliziert das Straßennetzwerk ist, kommt eine der Kontinuitätsgleichungen (8.8) bis (8.13) zum Einsatz.

Im Unterschied zu den Modellen des letzten Kapitels hingegen ist die Geschwindigkeit nicht mehr durch die Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $V = V_e(\rho)$  gegeben, sondern ist eine eigene dynamische Variable, welche durch eine **Beschleunigungsgleichung** der Form

$$\frac{dV(x, t)}{dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) V(x, t) = A(\rho(x, t), V(x, t)), \quad (10.1)$$

charakterisiert ist. Diese Gleichung besagt nichts anderes, als dass die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit  $\frac{dV(x, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$  vom *mitfahrenden Fahrzeug aus gesehen* (linke Seite, vgl. Abb. 10.2), gleich einer *Beschleunigungsfunktion*  $A(x, t)$  ist (rechte Seite), welche das spezielle Verkehrsmodell charakterisiert. Die Ableitung  $\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$  heißt auch **konvektive Ableitung** oder **Lagrange'sche Ableitung**.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

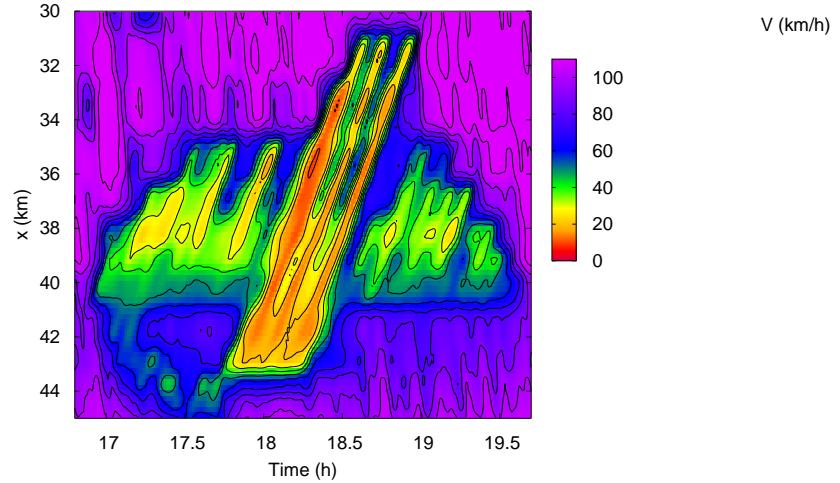


Figure 10.1.: Raumzeitliches Geschwindigkeitsprofil der A8-Ost in der Nähe des Irschenbergs. Die Steigung erstreckt sich von Streckenkilometer 38-41. Bei Kilometer 43.5 gab es zusätzlich eine temporäre unfallbedingte Engstelle. [Martin: x-Achse umdrehen, mit Skizze](#)

Die Beschleunigungsfunktion auf der rechten Seite hängt vom Verkehrszustand der Umgebung ab, insbesondere von der Verkehrsdichte  $\rho(x, t)$  und der Geschwindigkeit  $V(x, t)$  am betrachteten Ort, von den Gradienten  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  und  $\frac{\partial V}{\partial x}$ . Die Beschleunigungsfunktion kann auch **Nichtlokalitäten** enthalten, d.h. die Dichte oder die Geschwindigkeit wird nicht am Bezugsort  $x$ , sondern an einem Ort  $x_a < x$  ausgewertet, der weiter vorne in Richtung des Verkehrsstroms liegt. Dadurch kann man berücksichtigen, dass Fahrer, im wahrsten Sinne des Wortes, *vorausschauend* fahren, vgl. den nächsten Abschnitt 10.1.

Da diese Modelle neben der Dichte  $\rho(x, t)$  eine weitere dynamische Variable, die Geschwindigkeit  $V(x, t)$  oder alternativ den Fluss  $Q(x, t) = \rho(x, t)V(x, t)$  enthalten, werden sie im englischen Sprachgebrauch auch **second-order models** genannt, im Gegensatz zu den LWR-artigen **first-order models**.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

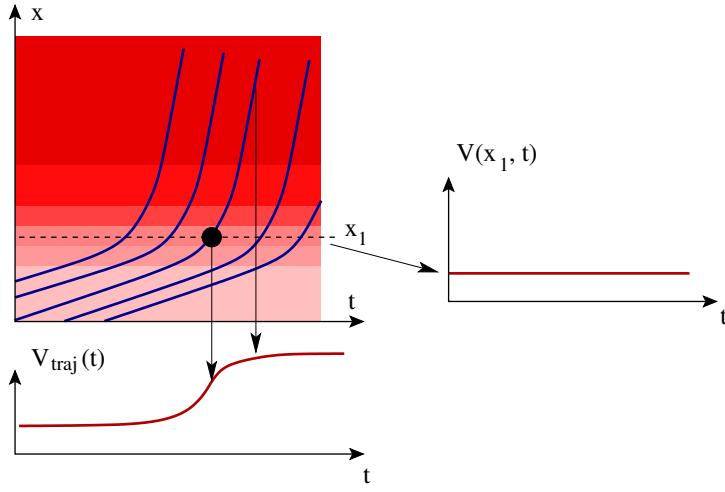


Figure 10.2.: Veranschaulichung der konvektiven Ableitung (Lagrange'sche Ableitung) entlang einer Fahrzeug-Trajektorie im Vergleich mit der partiellen Ableitung (Euler'sche Ableitung) im ortsfesten System. Entlang einer durch  $x(t)$  gegebenen Trajektorie gilt  $\frac{dV(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} = V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t}$ . Speziell gilt am Ort  $x_1$  zur durch den schwarzen Punkt gekennzeichneten Zeit  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$  (Geschwindigkeitsverlauf im rechten Bild ändert sich nicht), aber  $\frac{dV}{dt} > 0$  (an dieser Stelle beschleunigen die Fahrzeuge, siehe den unten dargestellten Geschwindigkeitsverlauf)

### 10.1. Eigenschaften der Beschleunigungsfunktion

Zunächst beinhalten auch die meisten Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit einen stationär-homogenen Gleichgewichtszustand, also ebenso wie die LWR-Modelle ein “Fundamentaldiagramm”  $Q_e(\rho)$  bzw. eine Gewichtsgeschwindigkeits - Dichte - Relation  $V_e(\rho)$ .<sup>1</sup> Da im stationär-homogenen Fall die linke Seite der Beschleunigungsgleichung (10.1) verschwindet, muss auch die rechte Seite verschwinden:

$$A\left(\rho, V_e(\rho)\right) = 0, \quad \text{falls} \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (10.2)$$

Dies ist eine implizite Gleichung für die Funktion der Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $V_e(\rho)$  bzw. das Fundamentaldiagramm. Natürlich muss, wie bisher, auch gelten  $\frac{dV_e}{d\rho} \leq 0$ ,  $V_e(0) = V_0$  und  $V_e(\rho_{\max}) = 0$  (vgl. Abb. 10.3).

Ferner repräsentiert die Beschleunigungsfunktion das Bestreben der Fahrer, eine (bei gegebener Dichte) zu hohe oder zu niedrige Geschwindigkeit durch Beschleunigung anzu-

---

<sup>1</sup>Es gibt auch Modelle “ohne” Fundamentaldiagramm. Diese werden aber höchst kontrovers diskutiert und werden hier nicht betrachtet.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

passen (vgl. Abb. 10.4 weiter unten):

$$A(\rho, V) < 0, \quad \text{falls} \quad V > V_e(\rho), \quad \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (10.3)$$

Analog gilt  $A(\rho, V) > 0$  falls  $V < V_e(\rho)$ . Dies kann man zusammenfassen und auch auf den allgemeinen Fall mit Gradienten verallgemeinern durch die Bedingung

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial V} < 0. \quad (10.4)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass bei Erhöhung der Geschwindigkeit die Beschleunigung abnimmt, zumindest falls alle anderen Umstände (Dichte, Dichtegradienten, Geschwindigkeitsgradienten) unverändert bleiben.<sup>2</sup> Wie später im Kapitel 10.6 gezeigt wird, reicht es jedoch nicht aus, dass ein Gleichgewicht vorhanden ist (Gl. (10.2)) und die Fahrer versuchen, dieses zu erreichen (Gl. (10.4)): Ohne zusätzliche Bedingungen wäre das Modell (10.1) immer instabil, es würden also immer Stop-and-Go-Wellen entstehen! Dies ist genauso unrealistisch wie das komplette Fehlen solcher Instabilitäten in den LWR-Modellen. In Wirklichkeit entstehen Instabilitäten nur in gewissen *Dichtebereichen*, welche hohem Fluss entsprechen. Genau dies wird durch Modellierung einer zusätzlichen **Antizipation** erreicht, bei der die Fahrer die zukünftigen Verkehrssituation vorwegnehmen bzw. die Situation weiter stromabwärts betrachten. Dies kann beispielweise durch *Gradienten* realisiert werden:

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)} \leq 0, \quad \frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)} \geq 0, \quad (10.5)$$

wobei zumindest eine der beiden Bedingungen als strikte Ungleichung erfüllt sein muss. Ein möglicher Beitrag der Beschleunigungsfunktion ist gegeben durch

$$A_{\text{antic}}(x, t) = -C \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

mit einer positiven Konstante  $C$ , da dann gilt

$$\frac{\partial A_{\text{antic}}(\rho, V)}{\partial \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)} = -C < 0.$$

Offensichtlich bedeutet dieser Beitrag, dass man verstärkt bremst (bzw. weniger beschleunigt), wenn man in Bereiche höherer Verkehrsdichte (oder gar in einen Stau) hineinfährt.

Alternativ zur Bedingung (10.5) kann man eine *Nichtlokalität* einführen, indem man die Beschleunigungsfunktion nicht nur in Abhängigkeit der Größen  $\rho = \rho(x, t)$  und  $V = V(x, t)$  am aktuellen Ort definiert, sondern auch noch Abhängigkeiten von den

---

<sup>2</sup>Die Bedingung, dass alles andere gleich bleibt, wird häufig als *ceteris paribus* (lat. für “alles übrige bleibt gleich”) bezeichnet.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

Verkehrsgrößen  $\rho_a = \rho(x_a, t)$  und  $V_a = V(x_a, t)$  an einer vorweggenommenen (zukünftigen) Position  $x_a > x$  einführt. Dann muss gelten (vgl. auch Abb. 10.4 weiter unten)

$$\frac{\partial A(\rho, V, \rho_a, V_a)}{\partial \rho_a} \leq 0, \quad \frac{\partial A(\rho, V, \rho_a, V_a)}{\partial V_a} \geq 0. \quad (10.6)$$

Im Allgemeinen sind Modelle mit nichtlokalen Beschleunigungsfunktionen realistischer und gleichzeitig schneller zu simulieren als solche mit Gradienten in der Beschleunigungsfunktion, auch wenn sie zunächst komplizierter aussehen.

### 10.2. Ein Beispiel: Das Payne-Modell

Ein einfaches Beispiel eines makroskopischen Modells mit dynamischer Geschwindigkeitsgleichung ist das **Payne-Modell**). Die *Dichtegleichung* ist für alle makroskopischen Modelle dieselbe, also auch für das Payne-Modell durch eine der Gleichungen (8.8) - (8.13) gegeben. Die *Geschwindigkeitsgleichung* lautet

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\tau} + \frac{V'_e(\rho)}{2\rho\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{Payne-Modell} \quad (10.7)$$

Im Anhang (A.1) wird dieses Modell aus einem einfachen mikroskopischen **Fahrzeugfolgemodell**, dem **Newell-Modell**, hergeleitet. In Fahrzeugfolgemodellen, die im Abschnitt 11 näher behandelt werden, wird die Geschwindigkeitsänderung eines jeden Fahrers (Bremsen oder Gasgeben) als Funktion des Verkehrsgeschehens betrachtet. Wie ein Makromodell mit dynamischer Geschwindigkeit hat also ein Fahrzeugfolgemodell eine Beschleunigungsfunktion. Ferner gibt es zu jedem Abstand eine Gleichgewichtsgeschwindigkeit, was makroskopisch einem Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm entspricht, vgl. Abb. 10.3.

Die beschleunigungsfunktion der rechten Seite von (10.7) erfüllt die allgemeinen Anforderungen an eine Beschleunigungsfunktion:

- Es gibt gemäß (10.2) eine von der Dichte abhängige Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $V_e(\rho)$ . Die Funktion  $V_e(\rho)$  kann man im Rahmen der Bedingungen  $\frac{dV_e}{d\rho} \leq 0$ ,  $V_e(0) = V_0$  und  $V_e(\rho_{\max}) = 0$  frei festlegen. Sie spezifiziert verschiedene Modellvarianten.
- Bei Erhöhung der Geschwindigkeit sinkt die Beschleunigungsfunktion gemäß (10.4):  $\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial V} = -\frac{1}{\tau} < 0$ . Hierbei gibt der Modellparameter  $\tau$  die Zeitskala an, in der sich eine Geschwindigkeit  $V \neq V_e$  an die Gleichgewichtsgeschwindigkeit annähert.<sup>3</sup>
- Da nach Voraussetzung  $V'_e(\rho) \leq 0$ , gilt

$$\frac{\partial A(\rho, V)}{\partial \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)} = \frac{V'_e}{2\rho\tau} < 0,$$

---

<sup>3</sup>Immer vorausgesetzt, es gibt keine Instabilitäten. Diese werden später genauer besprochen

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

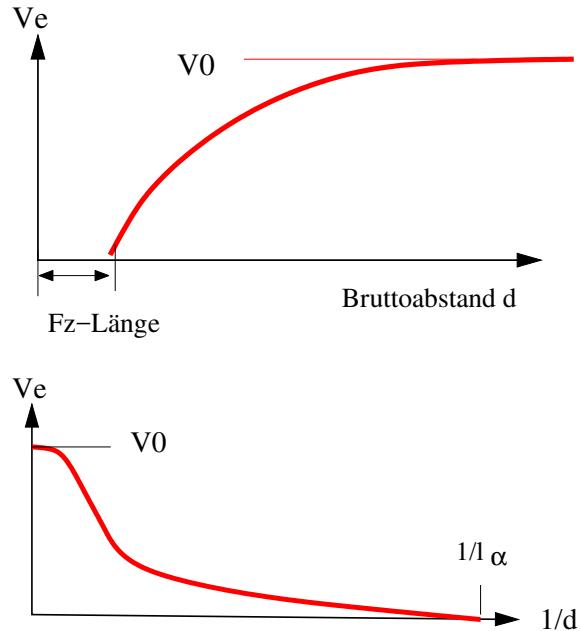


Figure 10.3.: Gleichgewichtsgeschwindigkeit als Funktion des Bruttoabstandes  $d$  und der Dichte  $\rho = \frac{1}{d}$ .

ein Dichteanstieg wie vor einem Stau führt also zu einer geringeren Beschleunigung bzw. Bremsverzögerung, in Übereinstimmung mit Bedingung (10.5). Dieser Term proportional zum Dichtegradienten  $\partial\rho/\partial x$ , auch als “Verkehrsdruck-Term” bezeichnet, wird in Abschnitt 10.3 in einen allgemeinen Zusammenhang gestellt.

### Verständnisfrage:

Der Verkehrsdruckterm des Payne-Modells bewirkt beim Annähern an Verkehrsstaus eine zusätzliche Verzögerung und beim Herauffahren aus dem Stau eine Beschleunigung, d.h. er beschreibt eine **antizipative** (vorausschauende) Fahrweise. Wodurch kommt diese Antizipation zustande? Erläutern Sie seine Wirkung durch Überlegungen bezüglich des Vorzeichens dieses Terms!

### Sonderfall verschwindender Anpassungszeit: Herleitung des LWR-Modells mit Diffusion

Ein *Sonderfall der Gleichung* liegt vor, wenn  $\tau = 0$ , d.h. wenn die Anpassungszeit unendlich klein und damit die Reaktionszeit unendlich klein sowie gleichzeitig die Beschleunigung unendlich groß ist. (Zu bemerken ist, dass diese Annahme zweifellos unrealistisch ist.) Nach Multiplikation der obigen Gleichung mit  $\tau$  und anschließendem Nullsetzen von

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

$\tau$  finden wir mit  $\frac{dV_e(\rho)}{d\rho} = V'_e(\rho)$ :

$$V_e(\rho) - V + \frac{1}{2\rho} V'_e(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

In diesem Spezialfall hängt die Geschwindigkeit also statisch nur noch vom Ort  $x$  ab:

$$V = V_e(\rho) + \underbrace{\frac{V'_e(\rho)}{2\rho}}_{= -D(\rho)/\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = V_e(\rho) - \frac{D(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Im Gegensatz zum klassischen LWR-Modell ist sie aber nicht allein durch die Gleichgewichtsgeschwindigkeit gegeben, sondern enthält zusätzlich noch einen Anteil proportional dem Dichtegradienten: Steigt die Dichte beispielsweise an, gilt  $V < V_e(\rho)$ . Setzt man dies in die entsprechende Kontinuitätsgleichung ein (z.B. in die Gl. (8.8) im Falle homogener Streckenabschnitte), erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho V_e(\rho) - D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0.$$

Dies ist die Lighthill-Whitham-Gleichung mit Diffusion, was man durch Umstellen der Gleichung noch besser erkennt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_e(\rho))}{\partial x} = + \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right), \quad (10.8)$$

wobei

$$D = D(\rho) = \frac{-V'_e(\rho)}{2}$$

hier eine variable Größe ist. Der Diffusionsterm wird oft verallgemeinernd mit anderer funktionaler Form, z.B. auch konstant, angenommen. In letzterem Fall reduziert sich (10.8) auf die Burgers-Gleichung (9.19).

### 10.3. Einheitliche Form der Makromodelle

Die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung (8.13) mit Diffusionsterm hat folgendes Aussehen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \frac{\rho V}{I} \frac{\partial I}{\partial x} + \nu_{\text{rmp}}(x, t) \quad (10.9)$$

Der Term mit der Diffusionskonstanten  $D$  beschreibt eine "Diffusion" der Dichte, d.h. eine Aufweichung aller scharfer Übergänge und Schockfronten. Auf der Ebene der Fahrzeuge würde dies einem sog. **Random Walk** der einzelnen Fahrzeuge entsprechen,

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

also einem erratischen und abrupten Ändern der Geschwindigkeit wie bei einem Betrunkenen auf dem Nachhauseweg ("drunkard's walk"), wie schon Einstein 1905 erkannte.<sup>4</sup> Der Diffusionsterm entspricht damit (hoffentlich) keiner realen Eigenschaft des Verkehrs. Er wird in einigen Modellen zur Verbesserung der numerischen Eigenschaften eingesetzt.

Die Rampen-Quellstärke (8.11),

$$\nu_{\text{rmp}}(x, t) = \begin{cases} \frac{Q_{\text{rmp}}(t)}{L_{\text{rmp}}} & \text{falls } x \text{ auf Höhe einer Rampe,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nur parallel zu den Beschleunigungs- oder Verzögerungsfahrstreifen (Rampenlänge  $L_{\text{rmp}}$ ) aktiv und beschreibt Flüsse von Zu- und Abfahrten. Der Term proportional  $\frac{dI}{dx}$  gibt den verkehrlichen Effekt von Fahrstreifenzahländerungen an.

Die Geschwindigkeitsgleichung von Modellen mit dynamischer Geschwindigkeit weisen außerdem fast immer folgende Form auf:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e - V}{\tau} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + A_{\text{rmp}}(x, t). \quad (10.10)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Advektionsterm, der schon von der Herleitung des Payne-Modell bekannt ist. Er beschreibt die Änderung des Geschwindigkeitsfeldes  $V(x, t)$  aus der Sicht eines mit  $V(x, t)$  sich bewegenden Beobachters, also die für ihn relevante Beschleunigung.

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält die einzelnen Beiträge zur makroskopischen Beschleunigungsfunktion  $A(\rho, V)$ :

- Der "Anpassungsterm" (Relaxationsterm)  $(V_e - V)/\tau$  modelliert eine Anpassung der Geschwindigkeit  $V$  an die "optimale Geschwindigkeit"  $V_e$  innerhalb des Zeitrahmens  $\tau$ . Die optimale Geschwindigkeit hängt meist von der Dichte ab. Man kann aber auch antizipierende (vorausschauende) Fahrweise mit dem Anpassungsterm beschreiben, indem man ihn als Funktion der Dichte  $\rho(x_a, t)$  und der Geschwindigkeit  $V(x_a, t)$  an einer Stelle  $x_a > x$  formuliert, vgl. Abb. 10.4.
- Der "Druckterm" mit dem "Verkehrsdruck"  $P$  beschreibt eine Reaktion auf Dichte- und in manchen Modellen auch Geschwindigkeitsgradienten. Die entsprechende Beschleunigung wirkt i.A. der Verdichtung des Verkehrs ( $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ ) entgegen. Der Druckterm kann verschiedene reale verkehrliche Effekte beschreiben. Ist ein Anteil z.B. durch

$$P_\theta = \rho \theta(\rho)$$

---

<sup>4</sup>In seiner Arbeit über den Random Walk erklärte Einstein 1905 die unter dem Mikroskop bereits seit langem beobachtete Zitterbewegung von kleinen Teilchen in Flüssigkeiten ("Brown'sche Bewegung") durch erratische Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle und klärte damit gleichzeitig die Natur der Diffusion auf. Er wies damit erstmals nach, dass Materie aus Atomen und Molekülen besteht. Die anderen beiden wichtigen Arbeiten Einsteins in seinem *Annus Admirabilis* 1905 waren übrigens die (spezielle) Relativitätstheorie mit der berühmtesten Formel der Welt ( $E = mc^2$ ) und eine Begründung der Quantentheorie. Den Nobelpreis bekam er später für letztere Arbeit.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

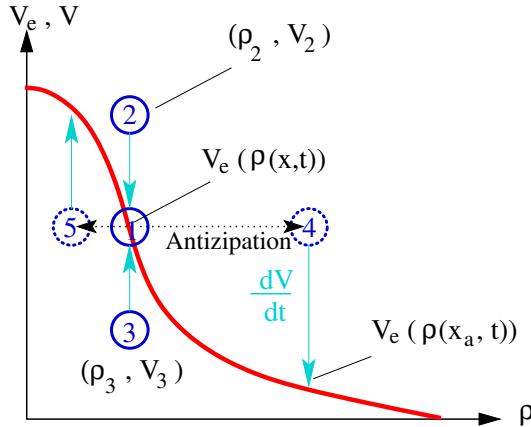


Figure 10.4.: Wirkung des Anpassungsterms  $(V_e - V)/\tau$  in Gl. (10.10). Die Punkte ① - ③ charakterisieren drei angenommene Geschwindigkeiten  $V(x, t)$  an einem bestimmten Ort  $x$  bei gegebener Dichte  $\rho(x, t)$ . Die hellblauen Pfeile geben die durch den Anpassungsterm bewirkten Geschwindigkeitsänderungen auf die Gleichgewichtsgeschwindigkeit (Punkt ①) an. Die virtuellen Punkte ④ und ⑤ veranschaulichen die Wirkung einer vorausschauenden Fahrweise: Man befindet sich nach wie vor am Ort  $x$  und außerdem wie bei ① im Gleichgewicht bezüglich der lokalen Dichte. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeit wird aber für eine Dichte berechnet, wie sie am antizipierten Ort  $x_a > x$  herrscht. Nähert man sich einem Stau (④,  $\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ ), dann bewirkt die Antizipation eine Verzögerung. Fährt man aus dem Stau heraus (⑤), ergibt sich eine positive Beschleunigung.

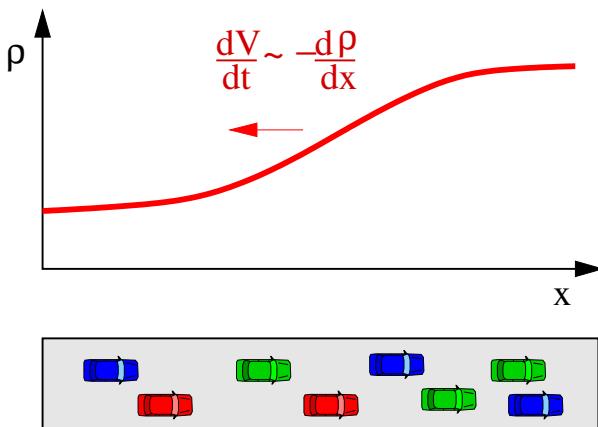


Figure 10.5.: Wirkung des Druckterms 1: Beschleunigung  $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dV_e}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$  durch Dichtegradienten, hier Verzögerung bei Einfahrt in einen Stau.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

gegeben mit der Geschwindigkeitsvarianz  $\theta = \langle (V - \langle V \rangle)^2 \rangle$ , so beschreibt er die sonst in Makromodellen verlorengehende *Heterogenität* des Verkehrs, d.h. die Tatsache, dass es bei gleicher Dichte schnellere und langsamere Fahrzeuge gibt, deren Geschwindigkeitsunterschiede durch  $\theta$  beschrieben werden. Bei dieser Interpretation beschleunigt *keines* der beteiligten Fahrzeuge (vgl. Aufgabe "Kinematische Dispersion").

Ein weiterer Anteil, der z.B. die Form

$$P_a = \frac{V_0 - V_e(\rho)}{\tau} \quad (10.11)$$

bzw.  $P_a = -V_e(\rho)/\tau$  annehmen kann,<sup>5</sup> beschreibt alternativ zur Nichtlokalität im Anpassungsterm eine vorausschauende Fahrweise. Konkret beschreibt der Ausdruck (10.11) eine räumliche Antizipation um  $\Delta x = 1/\rho$ , also um den Abstand zum Vorderfahrzeug. Vergleicht man (10.11) mit dem Druckterm des aus einem Fahrzeugfolgemodell hergeleiteten Payne-Modell, fällt auf, das beim Übergang von einem Fahrzeugfolgemodell zu einem Makromodell eine Antizipation um einen *halben* Fahrzeugabstand ins Spiel kommt (der Nenner des Drucks im Payne-Modell ist  $2\tau$ ). Dies ist konsistent, da das entsprechende Fahrzeugfolgemodell nur auf den Abstand  $d$  empfindlich ist, welcher makroskopisch durch die Dichte bei  $x + d/2 = x + 1/(2\rho)$  abgebildet wird:  $1/d = \rho(x + d/2)$ .

- Der "Diffusionsterm" mit der Diffusionskonstante  $\nu$  führt, analog zur Diffusion in der Kontinuitätsgleichung, zur Aufweichung abrupter Geschwindigkeitsübergänge. Er beschreibt erratische Beschleunigungsänderungen (z.B. durch Unaufmerksamkeit oder Fehleinschätzungen der Fahrer) und wird für manche Modelle außerdem aus numerischen Gründen benötigt.<sup>6</sup> Teilweise wird anstelle eines Diffusionsterms auch direkt ein stochastischer Term verwendet, was hier aber nicht weiter diskutiert werden soll.

- Der Rampenterm

$$A_{\text{tmp}}(x, t) = \frac{(V_{\text{tmp}} - V)}{\rho} \nu_{\text{tmp}}(x, t) \quad (10.12)$$

ist nur auf Höhe von Zu- oder Abfahrten ungleich Null und beschreibt die gegenüber dem Verkehr auf der Hauptfahrbahn verlangsamte Geschwindigkeit, mit der Fahrzeuge ein- bzw. ausfahren (vgl. Aufgabe "Rampenterm der Geschwindigkeitsgleichung").

---

<sup>5</sup>Da der Druck in (10.10) nur als Ableitung vorkommt, sind beide Ausdrücke äquivalent. Mit dem zusätzlichen Anteil  $V_0/\tau$  verschwindet wegen  $V_e(0) = V_0$  der Verkehrsdruck auf leerer Straße, was die Größe  $P$  anschaulicher macht.

<sup>6</sup>Für Hydrodynamiker: Hätte man keinen Autoverkehr, sondern eine reale Flüssigkeit oder ein reales Gas, so beschreibe  $\nu$  die "Kompressionsviskosität".

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

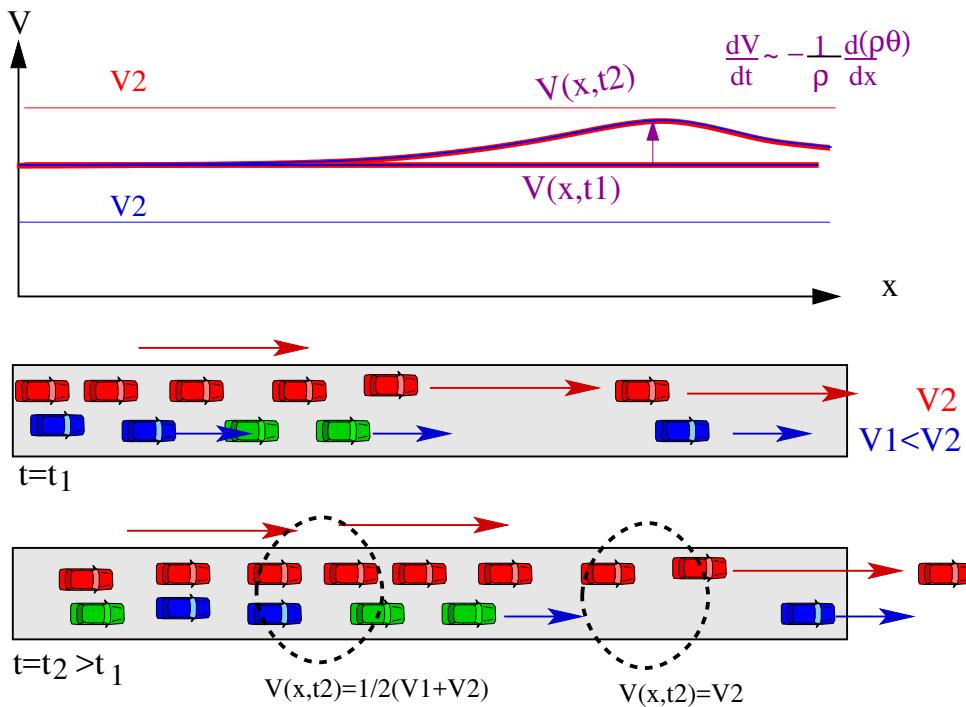


Figure 10.6.: Wirkung des Druckterms 2: Beschleunigung  $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial x}$  durch Dichtegradienten in Kombination mit endlicher Geschwindigkeitsvarianz. Hier bewirkt ein Dichteabfall eine lokale Erhöhung der makroskopischen Geschwindigkeit, da die schnelleren Fahrzeuge eher in den Bereich geringerer Dichte hineinfahren als die langsameren, so dass der Anteil an schnellen Fahrzeugen erhöht wird. Zur Veranschaulichung fahren hier alle Fahrzeuge auf der linken Fahrstreifen mit konstanter Geschwindigkeit  $V_2$ , die Fahrzeuge auf der rechten Fahrstreifen mit  $V_1$ .

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

### Verständnisfrage:

Machen Sie sich den Effekt der kinematischen Dispersion anhand Abb. 10.6 klar, indem Sie als mikroskopische Situation zwei Fahrbahnen annehmen. Zur Zeit  $t = 0$  herscht auf beiden Fahrstreifen für  $x < 0$  dieselbe konstante Dichte, während die Autobahn für  $x > 0$  so wenig befahren ist, dass gerade noch eine positive Dichte definiert werden kann. Alle Fahrzeuge der rechten Fahrstreifen fahren konstant mit  $v_1$ , die der linken mit  $v_2 > v_1$ . Wie kommt es, dass für  $t > 0$  an bestimmten Stellen eine makroskopische Beschleunigung auftritt, *auch wenn kein einziges Fahrzeug beschleunigt?*

### 10.4. Übersicht über einige Makromodelle

Im Folgenden werden die bisher behandelten Modelle sowie einige weitere bekannte Makromodelle vorgestellt und in das allgemeine Schema eingegordnet.

- Lighthill-Whitham-Modell:

$$D = 0 \quad \text{und} \quad \tau \rightarrow 0, \quad \text{d.h.} \quad V = V_e(\rho)$$

- Burgers-Gleichung:

$$D = \text{const.} > 0 \quad \text{und} \quad \tau \rightarrow 0, \quad \text{d.h.} \quad V = V_e(\rho)$$

- Payne-Modell:

$$D = 0, \quad P(\rho) = \frac{V_0 - V_e(\rho)}{2\tau}, \quad \nu = 0.$$

Der Grenzfall  $\tau \rightarrow 0$  liefert die Burgers-Gleichung mit variabler Diffusion,

$$D(\rho) = \frac{1}{2} \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right| \geq 0$$

- (Kühne-)Kerner-Konhäuser-Modell:

$$D = 0, \quad \tau = \text{const.} > 0, \quad P(\rho) = \rho\theta_0, \quad \nu = \text{const.} > 0.$$

- Gaskinetisches Modell (GKT-Modell):

$$\begin{aligned} D = 0, \quad \tau = \text{const.} > 0, \quad V_e &= V_e(\rho, V, \rho_a, V_a) \quad \text{mit nichtlokalen Termen } \rho_a, V_a, \\ P(\rho, V) &= \rho\theta(\rho, V), \quad \nu = 0 \end{aligned}$$

## 10.5. Entstehung von Stop-and-Go-Wellen

Stauwellen entstehen durch Vorhandensein von Reaktionszeiten der Fahrzeugführer sowie durch die endliche Beschleunigungs- und Bremsfähigkeit der Fahrzeuge. Beides führt zu einer verzögerten Anpassung der Geschwindigkeit an die Zielgeschwindigkeit (Anpassungszeit  $\tau$ ), die bei hinreichen großem Verkehrsaufkommen zu einem "Teufelskreis" führen kann (vgl. auch Abb. 11.6 auf S. 118):

- Wir nehmen an, dass das erste Fahrzeug 1 in einer Kolonne von mit der Geschwindigkeit  $v_K$  fahrenden Fahrzeugen aus irgendeinem Grunde leicht auf die Geschwindigkeit  $v_1$  bremst.
- Damit ist auch für das nachfolgende Fahrzeug 2 die neue optimale Geschwindigkeit durch  $v_1$  gegeben. Der Fahrer dieses Fahrzeugs kann aber seine Geschwindigkeit erst in endlicher Zeit von  $v_K$  auf  $v_1$  anpassen.
- Ist der Verkehr dicht genug, verringert sich während dieser Zeit der Abstand stärker als es dem Gleichgewichtsabstand  $d_e(v_1)$  bei der neuen Geschwindigkeit entspricht.
- Um wieder auf den Wunschabstand zu kommen, muss der Fahrer 2 seine Geschwindigkeit vorübergehend auf  $v_2 < v_1$  absenken.
- Der nächste Fahrer 3 kann auf die Verzögerung des Fahrzeugs 2 von  $v_K$  auf  $v_2$  ebenfalls nicht sofort reagieren und sein Abstand wird bei hinreichender Verkehrsdichte kleiner als der Wunschabstand  $d_e(v_2)$ . Er muss also auf  $v_3 < v_2$  abbremsen, um den Abstand wieder zu erreichen. Der nächste Fahrer 4 ...

Diese "positive" Rückkopplung kann bis zum vorübergehenden Stillstand einzelner Fahrzeuge führen: eine **Stop-and-Go Welle** ist scheinbar "aus dem Nichts" entstanden!

Bei geringer Verkehrsdichte wird der Teufelskreis durchbrochen, denn dann nähert sich ein nachfolgendes Fahrzeug, z.B. Fahrzeug 3, erst dann dem Vorderfahrzeug (z.B. Fahrzeug 2) an, wenn dieses seinerseits bereits den Gleichgewichtsabstand wieder erreicht hat. Auch die Fahrzeuge 3,4 etc. müssen in diesem Fall ihre Geschwindigkeit nur auf die Geschwindigkeit  $v_1$  des Störungs-Verursachers reduzieren, so dass der "Stop-and-Go-Mechanismus" nicht wirksam ist. Bei einer Anpassungszeit von 0, wie im LWR-Modell, ist dieser Mechanismus natürlich unabhängig von der Dichte nie wirksam. Konsequenterweise können bestehende Verkehrsstörungen im LWR-Modell oder verwandten Modellen nicht wachsen und damit kein Stop-and-Go-Verkehr aus kleinen Störungen entstehen. Lediglich vorhandene Dichteunterschiede können sich zu Schockwellen aufsteilen, ohne dabei die Amplitude zu vergrößern.

Die Stabilitätsanalyse in folgenden Abschnitt 10.6 zeigt, dass sich die Neigung zu Verkehrsinstabilitäten in der Tat mit der Anpassungszeit, der Fahrzeughöhe und dem Gradient  $|\frac{dV_e}{d\rho}|$  der optimalen Geschwindigkeit erhöht. Da bei sehr hoher Dichte  $|\frac{dV_e}{d\rho}|$  klein ist, ergeben sich Verkehrsinstabilitäten vor allem im mittleren Dichtebereich 20 Fz/km/Spur  $\leq \rho \leq 50$  Fz/km/Spur, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

### 10.6. Lineare Stabilitätsanalyse

Die makroskopischen Verkehrsgleichungen besitzen für jeden Wert der mittleren Verkehrs-dichte  $\rho_e$  eine stationäre (zeitunabhängige) und homogene (raumunabhängige) Lösung

$$\rho(x, t) = \rho_e \quad \text{und} \quad V(x, t) = V_e(\rho_e) = V_e, \quad (10.13)$$

die einem gleichmäßigen Verkehrsfluss konstanter Dichte entsprechen.

Frage: Ist dieser gleichmäßige Verkehrsfluss stabil gegenüber kleinen Störungen oder schaukeln sich kleiner Störungen der Art

$$\begin{aligned}\rho_1(x, t) &= \rho(x, t) - \rho_e \ll \rho_e \\ V_1(x, t) &= V(x, t) - V_e \ll V_e\end{aligned}$$

zu Stop-and-Go-Wellen oder anderen Verkehrszusammenbrüchen auf?

Dazu setzen wir  $\rho(x, t) = \rho_e + \rho_1(x, t)$  und  $V(x, t) = V_e(\rho_e) + V_1(x, t)$  in die makroskopischen Verkehrsgleichungen ein und linearisieren diese, d.h. wir vernachlässigen alle quadratischen und Terme höherer Potenzen in den kleinen Dichte- und Geschwindigkeitsschwankungen wie  $\rho_1^2(x, t)$ ,  $\rho_1(x, t)V_1(x, t)$ , etc., was einer Taylorapproximation 1. Ordnung entspricht.

Da die Lösung  $\rho(x, t) = \rho_e$ ,  $V(x, t) = V_e(\rho_e)$  ja nach Voraussetzung die Gleichungen erfüllen, fallen die "Terme nullter Ordnung" ohne  $\rho_1(x, t)$  oder  $V_1(x, t)$  ebenfalls weg und wir erhalten folgende linearisierten makroskopischen Gleichungen:<sup>7</sup>

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + V_e \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = -\rho_e \frac{\partial V_1}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{dP(\rho_e)}{d\rho} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \left[ \frac{dV_e(\rho_e)}{d\rho} \rho_1 - V_1 \right].$$

Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich analytisch lösen. Es zeigt sich, dass die Gleichgewichtslösungen  $\rho(x, t) = \rho_e$  und  $V(x, t) = V_e(\rho_e)$  linear instabil sind, d.h. instabil gegenüber kleinen Störungen  $\rho_1(x, t)$  und  $V_1(x, t)$ , wenn

$$\rho_e \sqrt{\tau} \left| \frac{dV_e(\rho_e)}{d\rho} \right| > \left[ \tau \frac{dP(\rho_e)}{d\rho} + D \right]^{\frac{1}{2}} \quad \begin{array}{l} \text{Instabilitäts-} \\ \text{bedingung für} \\ \text{Makromodelle.} \end{array} \quad (10.14)$$

Ohne einen Diffusionsterm in der Kontinuitätsgleichung ( $D = 0$ ) vereinfacht sich dies zu

$$\left( \rho_e \frac{dV_e(\rho_e)}{d\rho} \right)^2 > \frac{dP(\rho_e)}{d\rho} \quad \begin{array}{l} \text{Instabilitäts-} \\ \text{bedingung für} \\ \text{Makromodelle } (D = 0). \end{array} \quad (10.15)$$

Für Interessierte ist die Herleitung dieser Gleichung im Dokument [mac\\_linStringStability.pdf](#) dargestellt.

#### Diskussion der Instabilitätsbedingung

---

<sup>7</sup>Wir nehmen hier an, dass  $V_e$  und  $P$  nur von  $\rho(x, t)$  abhängen. Außerdem beschränken wir uns auf homogene Strecken.

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

- Die *Instabilitätsschwelle* sinkt, d.h. die Tendenz zur Instabilität steigt mit wachsender Anpassungszeit  $\tau$  und wachsendem Abfall  $|\frac{dV_e}{d\rho}|$  der Gleichgewichtsgeschwindigkeit mit der Dichte. Dies ist anschaulich, da bei hohen Werten von  $\tau$  die Fahrer lange benötigen, um sich auf eine neue Situation (z.B. steigende Dichte) einzustellen. Die Stärke der dann nötige Reaktion steigt wiederum mit dem Betrag  $|\frac{dV_e}{d\rho}|$  der Änderung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit mit der Dichte.
- Die Instabilitätsschwelle wächst, d.h. die Stabilität steigt mit wachsendem Anstieg  $\frac{dP}{d\rho}$  des Verkehrsdruck  $P$  mit der Dichte. Dies ist plausibel, da man den Druckterm ja als Antizipation der Fahrer interpretieren kann.
- Schließlich wächst die Stabilität mit der Stärke  $D$  der Diffusion der Dichte. Dies ist anschaulich, da eine Diffusion lokalisierte Störungen „verschmiert“. Da die Diffusion aber keinen realen Effekt beschreibt, sollte man auf sie möglichst verzichten. Bemerkenswerterweise hängt die lineare Stabilität *nicht* von der Geschwindigkeitsdiffusionskonstante  $\nu$  ab. Sie stabilisiert aber größere Störungen, welche nicht in den Gültigkeitsbereich von (10.15) fallen und wird deshalb in einigen Modellen, z.B. den Kerner-Konhäusder-Modell, verwendet.

Für die Stabilitätsbereiche einzelner Modelle kann man folgende Aussagen treffen:

- Das Lighthill-Whitham-Modell ist marginal stabil: Wegen  $D(\rho) = 0$  und  $\tau(\rho) \rightarrow 0$  sind beide Seiten der Ungleichung identisch gleich Null, d.h. das Modell liegt im gesamten Dichtebereich an der Grenze zur Instabilität, was für die Entstehung der Schockwellen ohne Wachstum der Wellenamplitude verantwortlich ist.
- Die Burgers-Gleichung ist wegen  $D > 0$  und  $\tau \rightarrow 0$  nie linear instabil.
- Das Payne-Modell ist mit  $D = 0$  und

$$\frac{dP(\rho)}{d\rho} = -\frac{1}{2\tau} \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right|$$

linear instabil unter der Bedingung

$$\tau \rho^2 \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right| > \frac{1}{2}.$$

- Das (Kühne-)Kerner-Konhäuser-Modell ist linear instabil für

$$\rho_e \left| \frac{dV_e(\rho)}{d\rho} \right| > \sqrt{\Theta_0}.$$

## 10. Makromodelle III: Modelle mit dynamischer Geschwindigkeit

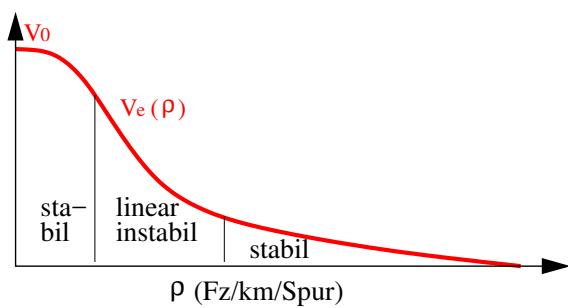


Figure 10.7.: Stabilitätsbereiche des Verkehrsflusses

# 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Nichts ist mächtiger als eine Idee zur richtigen Zeit.

Victor Hugo

In mikroskopischen Verkehrsmodellen wird das Verkehrsgeschehen aus der Perspektive einzelner **Fahrer-Fahrzeug-Einheiten** beschrieben. Gemäß den hauptsächlichen Aktionsmöglichkeiten des Fahrers unterscheidet man zwischen **Longitudinalmodellen**, die Beschleunigungen und Bremsmanöver modellieren, und **Spurwechselmodellen**.

In komplexen, möglichst realitätsnahen Modellen, die z.B. den Kern kommerzieller Simulationssoftware (vgl. Abschnitt 21) bilden, werden auch die teils subtilen Wechselwirkungen zwischen Beschleunigung und Fahrstreifenwechsel berücksichtigt und beide Komponenten zu einer Einheit verknüpft. Wechselwirkungen zwischen Beschleunigen/Bremsen und Fahrstreifenwechseln werden u.a. benötigt, um Rechtsüberholverbote oder beim antizipatorisches Beschleunigen als Vorbereitung für einen Fahrstreifenwechsel zu modellieren. Viele Fragestellungen wie Stabilität des Verkehrs, Bildung von Stop-and-Go-Verkehr und Simulation verschiedenster Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen lassen sich aber auch ohne Spurwechselmodell beschreiben, so dass wir solche Modelle nur relativ kurz beschreiben.

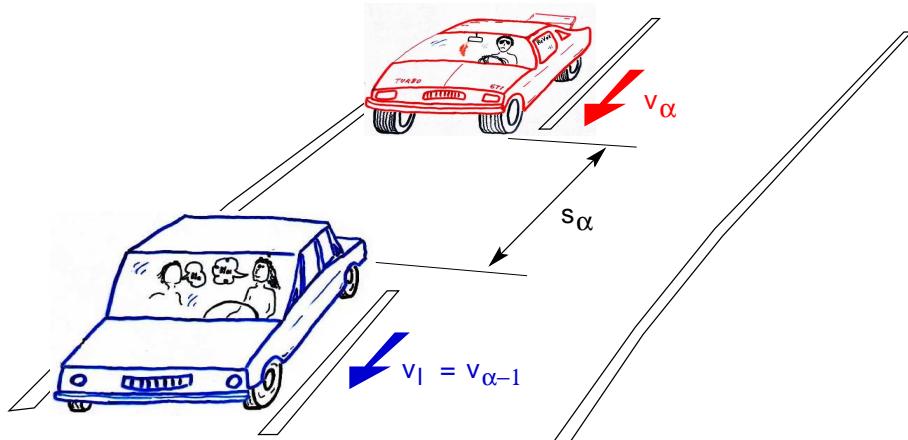


Figure 11.1.: Die wichtigsten Größen in Fahrzeugfolgemodellen

Die hier behandelten **Fahrzeugfolgemodelle** beschreiben Orte  $x_\alpha(t)$ , Geschwindigkeiten

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

$v_\alpha(t)$ <sup>1</sup> und Beschleunigungen  $\dot{v}_\alpha(t)$  eines jeden einzelnen Fahrzeugs  $\alpha$  als kontinuierliche Funktion über die Zeit. Direkt aus der Definition der Geschwindigkeit folgt die für alle Fahrzeugfolgemodelle gültige Bewegungsgleichung

$$\dot{x}_\alpha(t) \equiv \frac{dx_\alpha}{dt} = v_\alpha(t). \quad (11.1)$$

Da für die zu modellierende Fahrer-Reaktion aber primär nicht die Orte der Fahrzeuge, sondern Nettoabstände  $s_\alpha = x_{\alpha-1} - l_{\alpha-1} - x_\alpha = x_p - l_p - x_\alpha$  (vgl. Abb. 11.1), ist es sinnvoll, Gl. (11.1) für die Abstände zu formulieren:

$$\dot{s}_\alpha(t) = v_p - v_\alpha(t) := -\Delta v_\alpha. \quad (11.2)$$

Hier steht  $\Delta v_\alpha$  für die *Annäherungsgeschwindigkeit* an das Vorderfahrzeug. Die verschiedenen Fahrzeugfolgemodelle unterscheiden sich allein in ihrem Ansatz für die Beschleunigung, welche das Fahrverhalten des Fahrers modelliert. Im einfachsten Fall hängt die Beschleunigung nur von der eigenen Geschwindigkeit sowie von Abstand, Geschwindigkeit (und evtl. Beschleunigung) des Vorderfahrzeugs ab:

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha, s_\alpha, v_p). \quad (11.3)$$

In manchen Mikromodellen wird die Beschleunigungsgleichung durch eine statische Geschwindigkeitsgleichung ersetzt, die allerdings erst eine endliche Zeitspanne später, nach der **Anpassungszeit**  $\Delta t = \tau$  gilt:

$$v_\alpha(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(v_\alpha, s_\alpha, v_p). \quad (11.4)$$

Ein Beispiel für diese Formulierung ist das bereits bei der Herleitung des Payne-Modells vorgestellte Newell-Modell.

Zusammenfassend werden Fahrzeugfolgemodelle durch die Differenzialgleichungen (11.2) und (11.3) bzw. (11.4) beschrieben. Da auf den rechten Seiten dieser Gleichungen nicht nur das betrachtete Fahrzeug  $\alpha$ , sondern auch das Vorderfahrzeug  $\alpha - 1$  vorkommt, handelt es sich um **gekoppelte Differenzialgleichungen**. Auch die Differenzengleichung (11.4) kann man im Rahmen einer Taylorentwicklung als Beschleunigungsfunktion  $a = (v_{\text{opt}} - v_\alpha)/\Delta t$  auffassen. Da Gleichung (11.2) – analog zu der Kontinuitätsgleichung der Makromodelle – für alle Fahrzeugfolgemodelle gilt, wird das konkrete Mikromodell allein durch die rechte Seite der Beschleunigungsgleichung (11.3) bzw. der Differenzengleichung (11.4) charakterisiert.

### 11.1. Ideale vs. reale Fahrer

Das Fahrzeugfolgemodell, das heißt die rechte Seite der Beschleunigungsgleichung, sollte menschliches (oder auch automatisches) Fahrverhalten möglichst realitätsgerecht beschreiben. Dazu ist es notwendig, sich die Unterschiede zwischen realen und idealen Fahrer bzw. zwischen "Mensch" und "Maschine" klarzumachen. Ein bezüglich des Fahrverhaltens "idealer Fahrer" hat insbesondere

---

<sup>1</sup>Zur Unterscheidung von der Geschwindigkeit von Makromodellen wird die Geschwindigkeit von Mikromodellen mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Im Allgemeinen gilt die Mikro-Makro-Beziehung  $V = \langle v_\alpha \rangle$ .

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

- keinen Schätzfehler beim Bestimmen der Größen der Beschleunigungsfunktion, also der Abstände und Geschwindigkeiten,
- eine zu vernachlässigende Reaktionszeit,
- und eine durch nichts zu erschütternde Aufmerksamkeit.

Nur für diesen Fall gilt aber eine Beschleunigungsgleichung wie Gl.(11.3)! Ganz eindeutig sind diese Eigenschaften viel eher für sensorbasierte (adaptive) Temporegler, sog. **Adaptive Cruise Control (ACC)** Systeme), zutreffend als für reale Fahrer. Reale Fahrer kompensieren diese Mängel aber durch vorausschauendes Fahren über das Vorderfahrzeug hinweg, haben also eine ausgefeilte Fahrstrategie als die vergleichsweise "kurzsichtigen", maximal das Vorderfahrzeug berücksichtigenden Fahrzeugfolgemodelle. Außerdem berücksichtigen menschliche Fahrer nicht nur Abstände und Geschwindigkeiten, sondern weitere Größen wie z.B. Bremslichter, Blinker oder die globale Verkehrssituation. All dies kann ebenfalls nicht durch eine Gleichung der einfachen Form (11.3) beschrieben werden.

Sensoren von ACC-Systemen können hingegen nur den Abstand zum Vorderfahrzeug sowie Geschwindigkeiten und deren Differenzen messen, so dass Fahrzeugfolgemodelle viel eher ACC-Systeme als menschliches Fahrverhalten modellieren! Es zeigt sich jedoch, dass die destabilisierenden Eigenschaften der menschlichen "Unvollkommenheiten" als Fahrzeuglenker zu einem großen Teil durch die stabilisierende Antizipationsfähigkeit kompensiert wird, was letztendlich die erfolgreiche Anwendbarkeit von auf Gl. (11.3) basierenden Fahrzeugfolgemodellen auf reale Verkehrssituationen begründet.

### 11.2. Modellierung von Beschleunigungs-, Folge- und Bremsstrategien

Die rechte Seite der Beschleunigungsgleichung (11.3) sollte mindestens folgende Aspekte modellieren:

1. Beschleunigung auf die **Wunschgeschwindigkeit**  $v_0$ , falls die Strecke frei oder gar leer ist<sup>2</sup>,
2. eine sichere Fahrzeugfolge- bzw. **Abstandsregelstrategie**, wenn die Verkehrsbedingungen keine Beschleunigung auf die Wunschgeschwindigkeit zulassen,
3. und eine **Bremsstrategie** beim Annähern von langsamem und stehenden Objekten, die Sicherheit unter allen Umständen und, wenn möglich, Komfort gewährleistet.

Bei der Modellierung von Beschleunigungen sind vor allem die Grenzen der Motorisierung wichtig sowie die Tatsache, dass diese im Normalfall nicht ausgenutzt werden.

---

<sup>2</sup>Zur Unterscheidung von der Wunschgeschwindigkeit von Makromodellen wird die Wunschgeschwindigkeit von Mikromodellen mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Bei unterschiedlichen Wunschgeschwindigkeiten (vgl. Abschnitt 13) gilt  $V_0 = \langle v_{0\alpha} \rangle$ , ansonsten  $V_0 = v_0$ .

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Bei der Modellierung von Abstandshalte- und Bremsstrategien stehen Sicherheit und Fahrkomfort unter Berücksichtigung einer Reaktionszeit  $T_r$  im Vordergrund. Im einfachsten Fall ist "Sicherheit" dann gegeben, wenn definierte Bremsmanöver eines einzelnen Vorderfahrzeugs unter Berücksichtigung einer Reaktionszeit  $T_r$  nicht zum Auffahrunfall führen. "Komfort" ist dann gegeben, wenn die maximale Bremsverzögerung eine gewisse "komfortable Verzögerung"  $b$  nicht überschreitet.

*Wichtig:* Bei einer Kolonne aus mehr als zwei Fahrzeugen sind diese Kriterien *nicht* hinreichend, da der auf S. 100 für Makromodelle beschriebene "Stop-and-Go-Mechanismus" natürlich auch für durch Mikromodelle beschriebene Fahrzeugkolonnen aus vielen Fahrzeugen relevant ist (vgl. Gl. (11.15) auf S. 115). Dies kann zu Unfällen führen, obwohl zwei Fahrzeuge unfallfrei fahren. Außerdem können im Vergleich zur Zweierkolonne die Bremsverzögerungen viel höher werden, vgl. Abb. 11.6.

### 11.2.1. Beispiel einer Fahrzeugfolgestrategie

Wir berechnen die bei isolierter Betrachtung einer Kolonne aus zwei Fahrzeugen maximale, sichere Geschwindigkeit  $v_{\text{safe}}$  des hinteren Fahrzeugs unter folgenden Vorgaben:

- (i) Wenn gebremst wird, dann mit einer konstanten Verzögerung  $b$ . Je nach Anwendung interpretiert man  $b$  als komfortable oder als maximale Verzögerung.
- (ii) Die Reaktionszeit ist gleich  $T_r$ .<sup>3</sup> Erst danach kann der Fahrer des Folgefahrzeugs ggf. mit der Verzögerung  $b$  bremsen.
- (iii) Der aktuelle Abstand zum Vorderfahrzeug beträgt  $s$ , das Vorderfahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit  $v_p$  und beginnt zum aktuellen Zeitpunkt mit der Verzögerung  $b$  bis zum Stillstand abzubremsen.

**Martin:** Bild aus handschr. VL-Folien: "Davor" und "Danach" Unfallfreiheit ist dann gegeben, wenn der anfängliche Abstand  $s$  größer ist als die Differenz der Bremswege, wobei für das Vorderfahrzeug der Bremsweg *ohne* Reaktionszeit, für das betrachtete *mit* Reaktionszeit zu berechnen ist:

$$s \geq vT_r + \frac{v^2}{2b} - \frac{v_p^2}{2b}.$$

Für die Grenzgeschwindigkeit  $v = v_{\text{safe}}$  gilt das Gleichheitszeichen und man erhält nach Lösen der quadratischen Gleichung:

$$v_{\text{safe}} = -bT_r + \sqrt{b^2 T_r^2 + v_p^2 + 2bs}. \quad (11.5)$$

Im Falle einer mit gleichmäßiger Geschwindigkeit ( $v = v_p$ ) fahrenden Kolonne folgt aus der Ungleichung außerdem für den *zeitlichen* Mindestabstand  $T = s/v$ :

$$T \geq T_r \quad (11.6)$$

---

<sup>3</sup>Diese enthält die sensorische Erfassungszeit ("es geschieht etwas"), das Treffen einer Entscheidung (z.B. "ich muss bremsen") und deren Umsetzung (z.B. Fuß vom Gas auf die Bremse und diese durchdrücken)

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Bemerkenswerterweise können menschliche Fahrer i.A. noch unfallfrei fahren, wenn der zeitliche Abstand *kleiner* ist als die Gesamt-Reaktionszeit  $T_r$ .<sup>4</sup> Und das überdies nicht nur bei Zweierkolonnen, sondern im Grenzfall von beliebig langen Kolonnen!

### 11.3. Beispiele von Fahrzeugfolgemodellen

In diesem Abschnitt wird der Übersichtlichkeit halber der Fahrzeugindex  $\alpha$  weggelassen. Man sollte aber immer im Hinterkopf behalten, dass für Modellierung heterogenen Verkehrs (LKW, PKW, PKW mit ACC, vorsichtige und aggressive Fahrer, ...), wie im nächsten Abschnitt diskutiert, i.A. jedes Fahrzeug seine eigene Beschleunigungsgleichung haben kann.

#### 11.3.1. Das Optimal Velocity Model

Im **Optimal Velocity Model** (OVM) ist die Beschleunigungsfunktion der allgemeinen Beschleunigungsgleichung (11.3) gegeben durch

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} \quad \text{Optimal-Velocity Modell} \quad (11.7)$$

Die *Beschleunigungsstrategie* wird durch Anpassen an die abstandsabhängige **optimale Geschwindigkeit**  $v_{\text{opt}}(s)$  realisiert. Die *Abstandsstrategie* ist in der konkreten Form der optimalen Geschwindigkeitsfunktion enthalten, z.B. durch

$$v_{\text{opt}}(s) = \max \left( 0, \min \left( v_0, \frac{s - s_0}{T} \right) \right) \quad (11.8)$$

mit der Wunschgeschwindigkeit  $v_0$ , der Folgezeit  $T$  und dem Mindest-Nettoabstand  $s_0$ . Das OVM berücksichtigt *nicht* die Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs. Es enthält auch keine sichere *Bremsstrategie*. Vielmehr sind Beschleunigungen und Bremsverzögerungen symmetrisch modelliert.

#### 11.3.2. Das Newell Modell

Führt man für die Lösung der Beschleunigungsgleichung (11.7) eine Taylorentwicklung erster Ordnung bezüglich der Zeit durch,  $v(t + \Delta t) = v(t) + \dot{v}_{\text{OVM}} \Delta t = v + (v_{\text{opt}} - v) \Delta t / \tau$ , so erhält man für  $\tau = \Delta t$  das **Newell Modell**

$$v(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(s(t)) \quad \text{Newell-Modell.} \quad (11.9)$$

Dies ist eine **Differenzengleichung** bzw. eine **iterierte Abbildung** (*iterated coupled map*), bei der der Update-Zeitschritt  $\Delta t = 1$  s in den meisten Anwendungen gewählt

<sup>4</sup>Die Gesamt-Reaktionszeit beinhaltet neben der eigentlichen Reaktionszeit ("Bremslicht leuchtet auf") auch die mentale Umsetzung der Strategie ("ich muss auch bremsen"), die Bewegungszeit, um vom Gas- auf das Bremspedal zu steigen, die Zeit, um Pedaldruck aufzubauen und schließlich die Ansprechzeit der Bremsen selbst. Die Gesamtzeit ist i.A. länger als eine (!!) Sekunde.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

wird. Manchmal wird die Update-Zeit auch als *Reaktionszeit*  $T_r$  bezeichnet, obwohl sie dynamisch wie eine Zeitspanne wirkt, in der der Verkehr nicht beachtet wird, um danach instantan auf die neue Situation zu reagieren, was “im Mittel” etwa einer halben Reaktionszeit entspricht. Dies wird in Abschnitt 11.6.1 diskutiert. Schließlich hat  $\Delta t$  außerdem noch eine dritte Rolle, die der *Geschwindigkeits-Anpassungszeit*  $\tau$ , was ja direkt aus der Äquivalenz zum OVM folgt und was – da die tatsächliche Geschwindigkeitsanpassungszeit  $\tau$  i.d.R. viel größer als  $\Delta t$  oder  $T_r$  ist – zu unrealistisch hohen Beschleunigungen und dennoch häufig zu Crashes führt.

Bis auf die Tatsache, dass hier die optimale Geschwindigkeit als Funktion des Nettoabstands  $s$  anstelle des Bruttoabstands  $d$  formuliert wurde (was durch geeignete Umdefinition der optimalen Geschwindigkeitsfunktion berücksichtigt werden kann), ist Gl. (11.9) identisch mit der bereits in Abschnitt A.1 formulierten Gl. (A.1).

### 11.3.3. Das Gipps Modell

Das **Gipps-Modell** ist ebenfalls als iterierte Abbildung (Differenzengleichung) formuliert:

$$v(t + \Delta t) = \min(v + a\Delta t, v_0, v_{\text{safe}}) \quad \text{Gipps-Modell,} \quad (11.10)$$

mit dem Update-Zeitschritt  $\Delta t = 1$  s in den meisten Anwendungen. Die maximale sichere Geschwindigkeit  $v_{\text{safe}}$  wird gemäß Formel (11.5) berechnet. Die *Beschleunigungsstrategie* auf freier Strecke beinhaltet eine konstante Beschleunigung mit dem Wert  $a$  auf die Wunschgeschwindigkeit  $v_0$ . Die Begrenzung der Geschwindigkeit auf  $v_{\text{safe}}$  beinhaltet im Gegensatz zum OVM eine sichere *Bremsstrategie*. Sie sorgt auch nach plötzlichen Änderungen der Verkehrssituation, z.B. plötzlichem Einscheren, ein häufig sehr realistisches Verhalten. Im stationären Kolonnenverkehr (das Vorderfahrzeug hat dieselbe Geschwindigkeit,  $v_p = v$ , und es gilt  $v(t + \Delta t) = v(t) = v_{\text{safe}}$ ) bewirkt der Bremsstern eine *Folgezeit*  $T = \Delta t$ , welche identisch zum Update-Zeitschritt ist. Schließlich wird, wie im Newell Modell,  $\Delta t$  oft gleich der Reaktionszeit  $T_r$  gesetzt. (vgl. dazu die Diskussion nach Formel (11.5) auf S. 107 sowie Abschnitt 11.6.1).

Unrealistisch ist, dass es keinen Unterschied zwischen komfortabler und maximal möglicher Verzögerung gibt: Interpretiert man den Parameter  $b$  in Formel (11.5) für die sichere Geschwindigkeit als maximale Verzögerung, ist das Modell immer unfallfrei, aber man bremst auch immer maximal, d.h. *sehr unkomfortabel*. Interpretiert man  $b$  hingegen als komfortable Verzögerung und die (z.B. mit einem anderen Fahrzeugmodell simulierten) Vorderfahrzeuge bremsen stärker, kann das Modell doch wieder Unfälle produzieren. Ein weiterer Artefakt ergibt sich, wenn bei dieser Interpretation von  $b$  eine Fahrsituation eintritt, in der  $v_{\text{safe}}$  plötzlich wesentlich kleiner wird, z.B. wenn ein einscherendes Fahrzeug Bremsverzögerungen nötig macht, welche zwar noch beherrschbar sind aber oberhalb von  $b$  liegen.

Insgesamt ist das Gipps-Modell dennoch – gerade in Anbetracht seiner Einfachheit – eines der besten der als iterierte Abbildung formulierten Modelle.

### 11.3.4. Das Velocity Difference Modell

Da das OVM wegen der fehlenden Sensitivität bezüglich Geschwindigkeitsdifferenzen zu Unfällen neigt, besteht eine Verbesserung darin, die Geschwindigkeitsdifferenz als linearen Stimulus mit zu berücksichtigen:

$$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} - \beta \Delta v \quad \text{Velocity Difference Modell} \quad (11.11)$$

Dieses, auch als **Velocity Difference Modell** (VDIFF) bezeichnete Modell ist bei geeigneten Werten des Sensitivitätsparameters  $\beta$  (realistische Werte liegen in der Größenordnung  $0.1 \text{ s}^{-1}$  bis  $0.5 \text{ s}^{-1}$ ) auch bei Werten der Zeitkonstante  $\tau$  von deutlich oberhalb von 1 s unfallfrei.

### 11.3.5. Das Intelligent Driver Modell

*Ideen sind wie Kinder: Die eigenen liebt man am meisten.*  
Lothar Schmidt

Im **Intelligent Driver Model** (IDM) ist ein typischer Vertreter eines *First-Principles Modells*, welches durch die den Modellparametern entsprechenden Komponenten des Fahrverhaltens, der Forderung nach Unfallfreiheit sowie kontinuierlichen Übergängen spezifiziert ist. Die Beschleunigungsfunktion ist dabei durch den Vergleich der eigenen Geschwindigkeit  $v$  mit der Wunschgeschwindigkeit  $v_0$  sowie Vergleich des tatsächlichen Abstandes  $s$  mit dem Wunschabstand  $s^*$  charakterisiert:

$$\dot{v} = a \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left( \frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right] \quad \text{IDM} \quad (11.12)$$

Die *Beschleunigungsstrategie* auf freier Strecke entspricht einer Beschleunigung mit dem Maximalwert  $a$ , die nahe der Wunschgeschwindigkeit  $v_0$  allmählich auf 0 abgesenkt wird. Je höher der Exponent  $\delta$  (typische Werte liegen zwischen 2 und 4), desto abrupter wird das Gas erst kurz vor Erreichen der Wunschgeschwindigkeit weggenommen. Der dynamische Wunschabstand

$$s^*(v, \Delta v) = s_0 + \max \left( 0, vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}} \right) \quad (11.13)$$

beinhaltet einen Gleichgewichtsanteil  $s_0 + vT$  (Mindestabstand  $s_0$ , Folgezeit  $T$ ), der die *Abstandsstrategie* beim Kolonnenfahren realisiert, sowie einen von der Annäherungsgeschwindigkeit  $\Delta v = v - v_p$  an das Vorderfahrzeug abhängigen, dynamischen Anteil. Dieser Term implementiert die folgende *intelligente Bremsstrategie* bei Annäherung an ein langsames oder stehendes Fahrzeug bzw. an eine rote Ampel:

- Ist die Situation unter Kontrolle, wird "weich" gebremst, wobei die komfortable Verzögerung  $b$  erst allmählich erreicht und kurz vor dem Stillstand wieder abgebaut wird.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

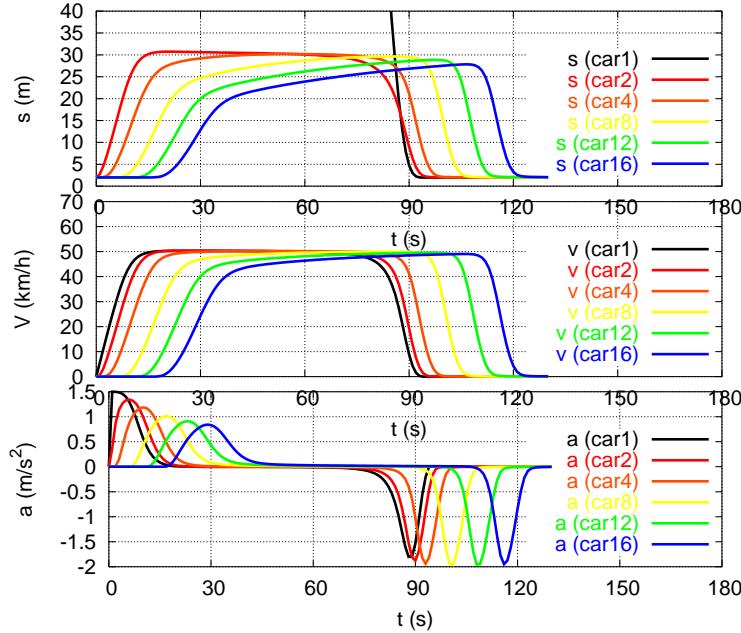


Figure 11.2.: Eine Kolonne von 16 IDM-Fahrzeugen ( $a = 1.5 \text{ m/s}^2$ ,  $b = 2 \text{ m/s}^2$ ) im Stadtverkehr von Ampel zu Ampel.

- Ist die Situation kritisch, wird stärker als die komfortable Verzögerung gebremst und so die Situation wieder unter Kontrolle gebracht.

Die verschiedenen Fahrbereiche "Beschleunigen", "Folgen" und "Bremsen" gehen kontinuierlich ineinander über. Je nach Parameter und Verkehrsichte ist das IDM kolonnenstabil oder nicht, abgesehen von extremen Parameterwerten aber immer unfallfrei.

### 11.4. Fundamentaldiagramme von Mikromodellen

Bei Mikromodellen ist eine notwendige Bedingung für ein eindeutiges Fundamentaldiagramm  $Q_e(\rho)$  oder Geschwindigkeits-Dichte-Diagramm  $V_e(\rho)$  die Annahme, dass alle Fahrer-Fahrzeug-Einheiten identisch sind.<sup>5</sup>

#### Verständnisfrage:

Was bedeutet dies für die Simulation?

Das Fundamentaldiagramm beschreibt dann

- **homogenen Verkehr** (alle Fahrzeuge fahren gleich schnell und mit demselben Abstand voneinander) sowie

---

<sup>5</sup>Es sind Modelle vorstellbar, die auch dann keine eindeutige Gleichgewichtsrelation haben, was verschiedentlich gefordert wird, aber umstritten ist.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodele

- **stationären Verkehr** (alle Beschleunigungen sind =0) in Abhängigkeit von der Verkehrsdichte.

Üblicherweise wird das Fundamentaldiagramm auch für Mikromodelle makroskopisch formuliert, d.h. man muss die mikroskopischen Abstände  $s_\alpha$  und Geschwindigkeiten  $v_\alpha$  als Funktion der makroskopischen Größen Fluss  $Q$ , lokal gemittlerte Geschwindigkeit  $V$  und Dichte  $\rho$  ausdrücken. Für homogenen und stationären Verkehr aus identischen Fahrzeugen sind die entsprechenden **Aggregierungsformeln**<sup>6</sup> gegeben durch

$$s_\alpha = s = \frac{1}{\rho} - l, \quad v_\alpha = V = \frac{Q}{\rho}. \quad (11.14)$$

Wir berechnen nun die Fundamentaldiagramme für die besprochenen Modelle, wobei wir im OVM, dem Geschwindigkeitsdifferenz-Modell und dem Newell-Modell die optimale Geschwindigkeitsfunktion

$$v_{\text{opt}}(s) = \max(0, \min(v_0, \frac{s - s_0}{T}))$$

annehmen.

Die Modelle lauten (bei Unterdrückung des Fahrzeugindex  $\alpha$ ):

$v(t + \Delta t) = v_{\text{opt}}(s)$	Newell-Modell,
$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau}$	OVM,
$\dot{v} = \frac{v_{\text{opt}}(s) - v}{\tau} - \beta \Delta v$	VDIFF,
$v(t + \Delta t) = \min(v + a\Delta t, v_0, v_{\text{safe}}),$ $v_{\text{safe}} = -bTr + \sqrt{b^2 T_r^2 + v_p^2 + 2bs}$	Gipps-Modell,
$\dot{v} = a \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^\delta - \left( \frac{s^*(v, \Delta v)}{s} \right)^2 \right],$ $s^*(v, \Delta v) = s_0 + vT + \frac{v\Delta v}{2\sqrt{ab}}$	IDM

Die Stationaritätsbedingung wird im OVM, VDIFF und IDM zu

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

während sie beim Newell- und Gipps-Modell die Bedingung

$$v(t + \Delta t) = v(t)$$

ergibt. Die Homogenität ist nur für das Gipps-Modell, das VDIFF und das IDM relevant, da die anderen beiden Modelle nicht auf die Geschwindigkeit des Vorderfahrzeugs reagieren. Sie ergibt

$$\Delta v = 0$$

---

<sup>6</sup>Im Folgenden werden wir Geschwindigkeiten von Einzelfahrzeugen mit "klein  $v$ " und die aggregierten makroskopischen Geschwindigkeiten mit "groß  $V$ " bezeichnen.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

im IDM und VDIFF, und

$$v_p = v$$

im Gipps-Modell.

**OVM und VDIFF-Modell:** Es gilt die Gleichgewichtsgeschwindigkeit

$$v_e(s) = v_{\text{opt}}(s)$$

bzw. mit  $s = \frac{1}{\rho} - l$  und  $Q = \rho V$  das Fundamentaldiagramm

$$Q_e(\rho) = \rho v_{\text{opt}}\left(\frac{1}{\rho} - l\right)$$

Setzt man die optimale Geschwindigkeit  $v_{\text{opt}}(s) = \max(0, \min(v_0, \frac{s-s_0}{T}))$  ein, erhält man

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} \rho V_0 & \rho \leq \rho_c = 1/(s_0 + l + v_0 T) \\ \frac{1}{T}[1 - \rho(s_0 + l)] & \rho_c < \rho \leq \frac{1}{s_0 + l} \\ 0 & \rho > \frac{1}{s_0 + l} \end{cases}$$

**Gipps-Modell:** Wegen  $v(t + \Delta t) = v$  fällt die Beschleunigungsbedingung  $v + a\Delta t$  auf der rechten Seite weg und es gilt mit  $v = v_p = v_e(s)$

$$v = v_e(s) = \min(v_0, v_{\text{safe}}) = \min(v_0, \frac{s}{T_r})$$

bzw.

$$Q_e(\rho) = \begin{cases} v_0 \rho & \rho \leq \rho_c = 1/(l + v_0 T), \\ \frac{1}{T}(1 - \rho l) & \rho > \rho_c. \end{cases}$$

Das Gipps-Fundamentaldiagramm entspricht also dem des OVM und des Newell-Modells für die spezielle optimale Geschwindigkeitsfunktion  $v_{\text{opt}} = \max(0, \min(v_0, \frac{s-s_0}{T}))$ , wobei zusätzlich  $s_0 = 0$  ist.

**IDM:** mit  $\dot{v} = 0$  und  $\Delta v = 0$  erhält man

$$1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta - \left(\frac{s_0 + v_0 T}{s}\right)^2 = 0$$

Dies kann man in einfacher Weise nur nach  $s$  auflösen und erhält statt  $v_e(s)$  die Umkehrfunktion  $s_e(v)$ :

$$s_e(v) = \frac{s_0 + v T}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^\delta}}$$

Mit  $s_e = \frac{1}{\rho} - l$  bekommt man dann das Fundamentaldiagramm in der Form  $\rho_e(v)$ , vgl. folgende Plots.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

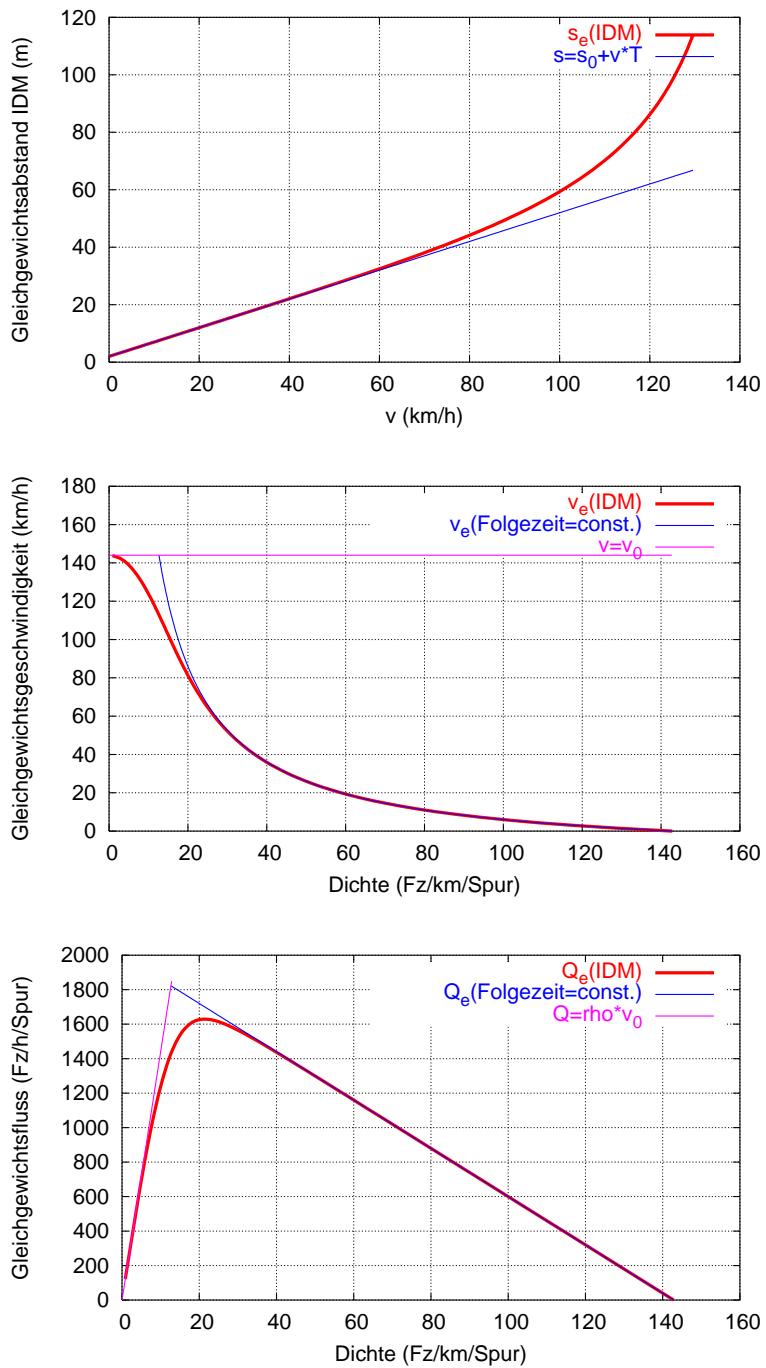


Figure 11.3.: (a) Mikroskopisches Abstands-Geschwindigkeits-Gleichgewichts und (b),(c) daraus abgeleitete makroskopische Geschwindigkeits-Dichte- und Fluss-Dichte-Relationen für das IDM.

## 11.5. Stabilität und Hysterese von Mikromodellen

Analog zu den Makromodellen wird im OVM der Stop-and-Go-Mechanismus durch Gradienten der optimalen Geschwindigkeitsfunktion getrieben. Er wird verstärkt, wenn sehr kurzsichtig erst im letzten Augenblick gebremst wird. Nur schnelles "Herausfahren" aus einer Stop-and-Go-Welle (und natürlich ein geringes Verkehrsaufkommen) kann den "Teufelskreis" des Stop-and-Go-Mechanismus unterbrechen. Daraus folgt:

- Die Instabilität wächst mit dem Gradienten  $\frac{dv_{\text{opt}}}{ds}$  der optimalen Geschwindigkeitsfunktion.
- Hohe Werte der komfortablen Verzögerung  $b$  stellen eine kurzsichtige Fahrweise dar und tragen ebenfalls zur Instabilität bei.
- Höhere Beschleunigungswerte  $a$  bzw  $v_0/\tau$  (d.h. "stärkere" Autos) stabilisieren den Verkehr.

**Martin: "Teufelskreis"-Bild aus Vortrag** Für das OVM und das Newell Modell erhält man für hinreichend lange Kolonnen das einfache Stabilitätskriterium (Herleitung im Buch "Verkehrs dynamik:)

$$\tau \left| \frac{dv_{\text{opt}}}{ds} \right| \leq \frac{1}{2}. \quad (11.15)$$

Für das Gipps-Modell und das IDM sind die Kriterien komplizierter, vgl. Abb. 11.4 für das Gipps-Modell.

Folgendes ist zur Interpretation der Stabilitätsformel (11.15) (bzw. der Stabilitätsbereiche in Abb. 11.4) wichtig:

- Die Formel gilt für hinreichend lange Kolonnen im Gleichgewicht. Kürzere Kolonnen, insbesondere Zweierkolonnen, sind wesentlich stabiler, vgl. Abb. 11.6.
- Instabilität bedeutet Neigung zu Stop-and-Go Verkehr, aber *nicht* notwendigerweise Unfälle. Diese finden erst dann statt, wenn die Instabilitätsgrenze weit überschritten ist.

Eine *hysteretische* Verkehrs dynamik liegt vor, wenn der Ausfluss aus dem Stau geringer als der maximal erreichbare Fluss ist. Dies ist vor allem bei geringen Beschleunigungen  $a$  bzw.  $v_0/\tau$  der Fall (Abb. 11.4), da dann am Stauende die Vorderfahrzeuge "davonfahren" und die resultierenden größeren Abstände zu entsprechend geringeren Flüssen führen.

## 11.6. Modellierung menschlichen Fahrverhaltens

Bis auf das Newell- und das Gipps-Modell haben die Beschleunigungsgleichungen der bisher vorgestellten Fahrzeugfolgemodelle alle die allgemeine Form

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha, s_\alpha, v_p). \quad (11.16)$$

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

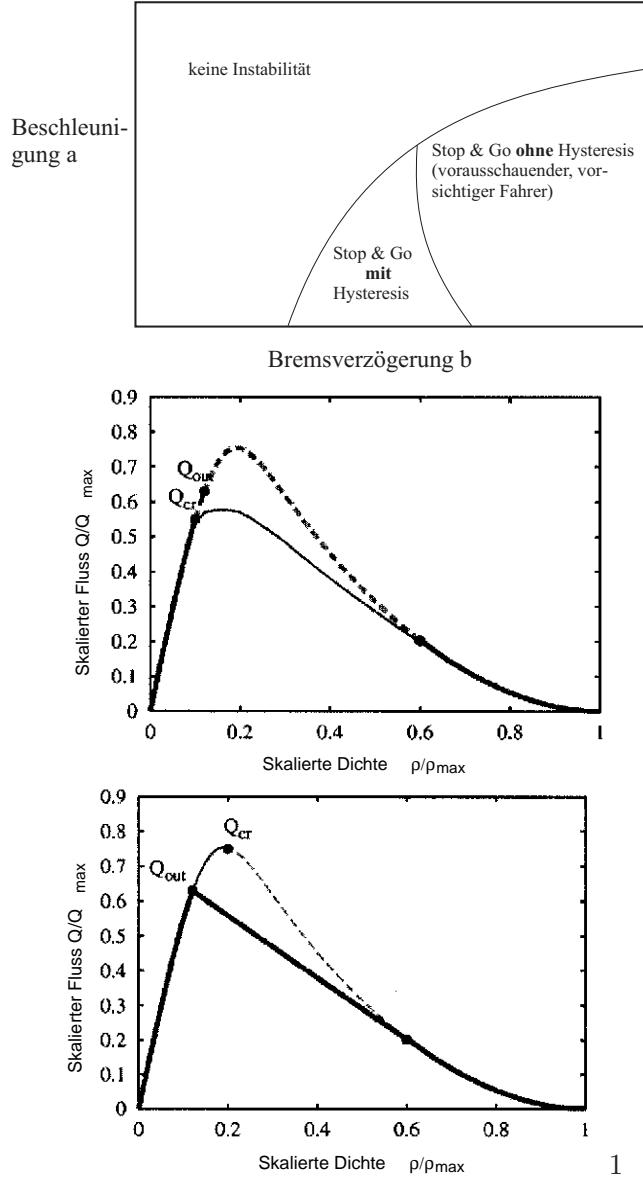


Figure 11.4.: Oben: Phasendiagramm des Gipps Modells: Auswirkung des Beschleunigungspfameters  $a$  und des Bremsverzögerungsparameters  $b$  auf die Stabilität des Verkehrsflusses. Gezeigt sind jeweils die Verhältnisse bei *kritischer Verkehrsnachfrage* und für *gestauten Verkehr*, bei denen es in den untenstehenden Bildern zwei Flusskurven gibt. Unten links: Fluss-Dichte-Diagramme für Modelle ohne Instabilität (Fundamentaldiagramm, gestrichelt) und mit Instabilität, aber ohne Hysterese (dünn, durchgezogen). Unten rechts: Fluss-Dichte-Diagramm für Modelle mit Instabilitäten und Hysterese. Bei Stop-and-Go-Wellen werden die gestrichelten und durchgezogenen Kurven im Uhrzeigersinn durchlaufen. Im Bereich der gestrichelten Kurve ist der Verkehr instabil und bricht zusammen. *Bemerkung:* In den meisten Modellen ist die Verkehrsdynamik entweder immer stabil oder zeigt Instabilität und Hysterese.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

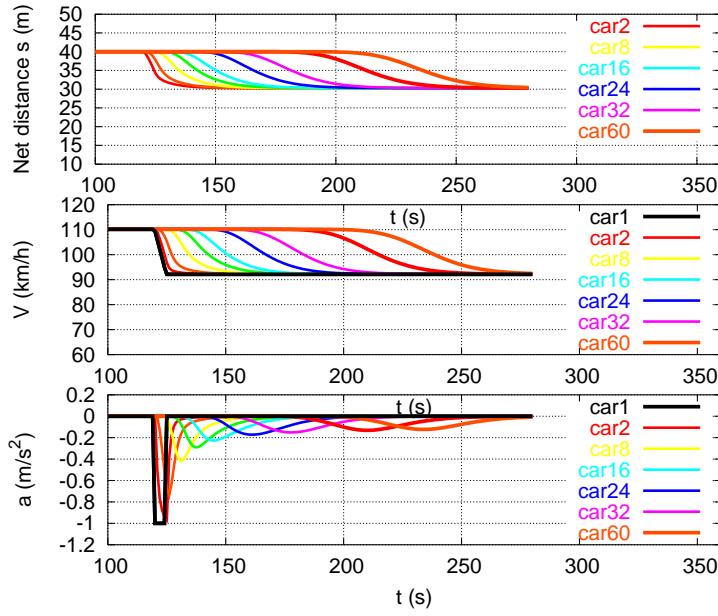


Figure 11.5.: Reaktion einer Kolonne von gleichartigen IDM-Fahrzeugen (Wunschgeschwindigkeit der folgenden Fahrzeuge: 144 km/h) auf ein Bremsmanöver des ersten Fahrzeugs (IDM-Parameter  $a = b = 2 \text{ m/s}^2$ ).

Wie bereits in Abschnitt 11.1 erläutert, bedeutet dies, dass die Fahrer ohne Reaktionszeit und Schätzfehler reagieren, aber nur das unmittelbare Vordefahrzeug berücksichtigt wird. Interessanterweise entspricht dies im Wesentlichen den Eigenschaften automatischer Beschleunigungs- und Bremsregler, welche in Abschnitt 19.3 näher besprochen werden.

Im Gegensatz dazu haben menschliche Fahrer insbesondere folgende, bisher nicht berücksichtigte Eigenschaften:

- Eine endliche Reaktionszeit, die etwa 1 s beträgt und bei mangelnder Aufmerksamkeit auch bedeutend größer sein kann,
- Endliche Schätzfehler beim Bestimmen von Geschwindigkeiten, Abständen und Beschleunigungen (letztere können i.A. nur durch Bremsen grob in die Kategorien ‘‘bremst’’ und ‘‘bremst nicht’’ eingeteilt werden).
- Dafür berücksichtigt der Fahrer i.A. nicht nur das Vorderfahrzeug, sondern weitere Fahrzeuge davor, sowie Fahrzeuge auf den Nachbarfahrstreifen und das Fahrzeug dahinter. Teilweise kooperiert der Fahrer auch mit diesen Fahrzeugen, z.B. indem er eine Lücke zum Fahrstreifenwechseln lässt.
- Außerdem werden Verkehrssituationen zeitlich vorweggenommen (antizipiert), wobei gewisse Heuristiken angenommen werden, z.B. die, dass sich die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Nachbarfahrzeuge nicht ändern.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

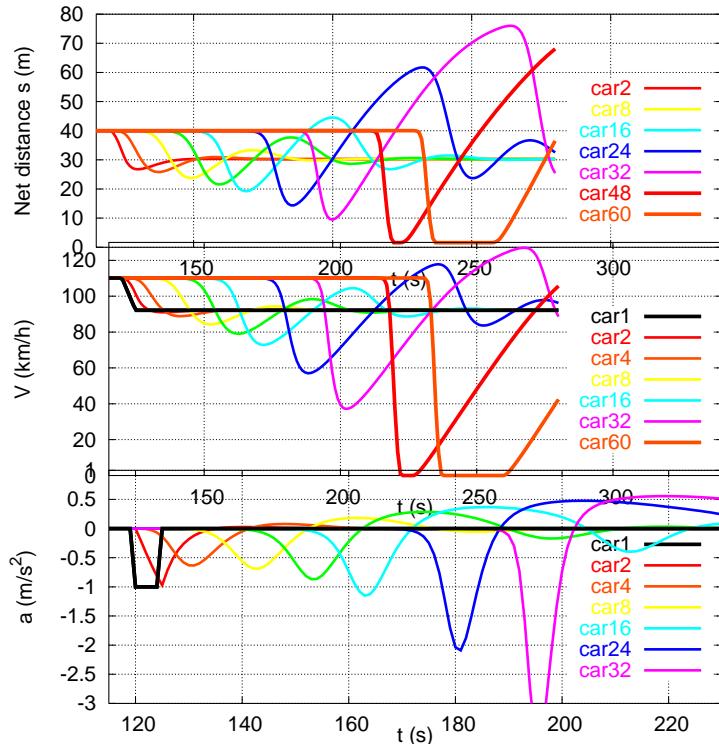


Figure 11.6.: Situation von Abb. 11.5 bei Kolonneninstabilität (IDM-Parameter  $a = 0.7\text{m/s}^2$ ,  $b = 7\text{m/s}^2$ ).

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

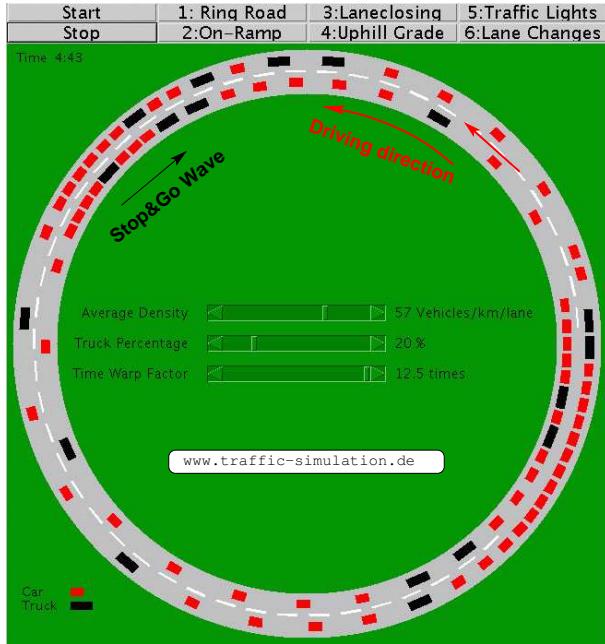


Figure 11.7.: Simulation von Stop-and-Go-Wellen mit dem IDM (Online-Simulationen unter [www.traffic-simulation.de](http://www.traffic-simulation.de))

Durch diese letzten beiden Punkte kann z.B. ein Stau frühzeitiger erkannt werden oder man sieht eine sich in wenigen Sekunden eröffnende Möglichkeit zum Fahrstreifenwechsel, so dass man bereits auf der alten Fahrstreifen beschleunigen oder bremsen kann, um die Geschwindigkeit der neuen Sour anzupassen.

### 11.6.1. Modellierung der Reaktionszeit

Die Modellierung ist einfach, wenn man eine konstante Reaktionszeit  $T_r$  annimmt und berücksichtigt, dass eine Reaktionszeit dadurch definiert ist, dass die Reaktion, also der Beschleunigungswunsch, gegenüber den Eingangsstimuli (Geschwindigkeit, Abstand, Geschwindigkeitsdifferenz um  $T_r$  verzögert ist. Wenn das Modell ohne Reaktionszeit durch  $a_\alpha(v_\alpha(t), s_\alpha(t), v_p(t))$  gegeben ist, erhält man folgende Modellgleichung:

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha(t - T_r), s_\alpha(t - T_r), v_p(t - T_r)). \quad (11.17)$$

Dies ist eine **Delay-Differenzialgleichung**, welche numerisch aber problemlos lösbar ist. Wie allgemein in der Regelungstechnik machen steigende Reaktionszeiten, welche ja nichts anderes als Totzeiten darstellen, das Modell instabiler.

Einen Sonderfall stellen die als Differenzengleichungen formulierten Modelle wie die von Newell, Gl. (A.1) und Gipps, Gl. (11.10) dar. Man kann sie auf zweierlei Weise interpretieren:

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

- Als Modell *mit* Reaktionszeit  $T_r = \Delta t$ , welches direkt die Geschwindigkeit angibt, also *unendliche Beschleunigungsfähigkeiten* voraussetzt,
- Als Modell *ohne* Reaktionszeit, wenn man den Parameter  $\Delta t$  als Anpassungszeit an die neue Geschwindigkeit interpretiert. In diesem Fall ist z.B. das Newell-Modell als eine diskretisierte Version des OVM aufzufassen.

Man kann auch den Parameter  $\Delta t$  dieser Modelle als Summe aus Reaktions- und Anpassungszeit interpretieren, doch sind die verwendeten Werte von meist  $\Delta t = 1$  s i.A viel zu klein für diese Interpretation.

### 11.6.2. Modellierung von Schätzfehlern und unvollkommener Fahrweise

Schätzfehler, Fahrfehler, Störungen aller Art, ganz allgemein zufällige Abweichungen von der in den vorgestellten Mikromodellen modellierten "deterministischen" Fahrweise können pauschal durch Hinzufügen eines **Fluktuationsterms**  $\xi(t)$  in der Beschleunigungsgleichung berücksichtigt werden:

$$\dot{v}_\alpha(t) = a_\alpha(v_\alpha, s_\alpha, v_p) + \xi_\alpha(t). \quad (11.18)$$

Diesen Fluktuationsterm kann man als "Bekenntnis der Unkenntnis" ansehen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (Verständnisfrage: warum?) kann man

$$\langle \xi_\alpha(t) \rangle = 0 \quad (11.19)$$

annehmen.

Im einfachsten (aber sehr unrealistischen) Fall nimmt man außerdem an, dass die Schwankungen unabhängig von vergangenen Schwankungen und außerdem für jeden Fahrer unabhängig von den Nachbarfahrzeugen sind. Dann sind die Fluktuationen durch die Korrelationsfunktion

$$\langle \xi_\alpha(t) \xi_\beta(t') \rangle = A \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') \quad (11.20)$$

charakterisiert. Hier ist  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  und 0 sonst. Die "δ-Funktion"  $\delta(t)$  ist =0 für alle  $t \neq 0$ . Für  $t = 0$  divergiert sie so stark, dass für das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  gilt.

Schließlich gibt  $A$  (mit der Einheit  $m^2/s^3$ ) die Stärke der Fluktuationen an. Man kann sich die Auswirkung der Fluktuationsstärke  $A$  anhand folgender Fälle klarmachen:

- Falls die Geschwindigkeit  $v = v_{\text{init}}$  zur Zeit  $t_0$  fest ist und überhaupt keine deterministischen Beschleunigungen wirken ( $a_\alpha = 0$ ), so nimmt die Geschwindigkeitsvarianz mit der Zeit zu:

$$\langle (v(t) - v_{\text{init}})^2 \rangle = A(t - t_0)$$

- Wendet man die Fluktuationen auf ein gemäß dem OVM, Gl. (11.7) fahrendes Fahrzeug auf leerer Strecke an, so betragen die Schwankungen um die Wunschgeschwindigkeit nach hinreichend langer Zeit

$$\langle (v(t) - v_0)^2 \rangle = 2A\tau$$

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodelle

Mit Anpassungszeiten in der Größenordnung 10 s und beobachteten Geschwindigkeitsschwankungen von etwa 10 km/h liegt  $A$  zwischen 0.1 und  $1 \text{ m}^2/\text{s}^3$ .

Solche Fluktuationsterme werden vor allem im Gipps-Modell häufig verwendet. Ein realistischerer Ansatz wird im Human Driver Model (vgl. Abschnitt 11.6.3) verfolgt:

1. Die Fluktuationen wirken nicht direkt auf die Beschleunigung, sondern auf die Eingangsgrößen  $v_\alpha$ ,  $s_\alpha$  und  $v_p$  und modellieren so direkt Schätzfehler
2. Die Fehler wirken "multiplikativ", z.B. steigt der Schätzfehler für den Abstand mit dem wahren Abstand.
3. Die Fehler haben eine endliche "Korrelationszeit": Wenn ein Fahrer zu einer gewissen Zeit den Abstand z.B. um 10% unterschätzt, wird er ihn eine Sekunde später mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit ebenfalls unterschätzen.

### 11.6.3. Mehrere Vorderfahrzeuge: Das Human Driver Model

Das **Human Driver Model** (HDM) ist ein auf alle Mikromodelle mit Beschleunigungsgleichungen der Form (11.16) anwendbares *Metamodell* (d.h. ein Modell für Modelle), welches endliche Reaktionszeiten und Schätzfähigkeiten mit Berücksichtigung mehrerer Vorderfahrzeuge und zeitlicher Antizipation kombiniert.

#### Zeitliche Antizipation

Dieser berühmte "Siebte Sinn" der Autofahrer wird im HDM durch einfache **Heuristiken**<sup>7</sup> modelliert: Ziel ist es, anhand dieser Heuristiken eine Prognose über Abstände und Geschwindigkeiten zu treffen, welche genau die Reaktionszeit überbrückt und bei exaktem Zutreffen der Heuristik dasselbe Ergebnis wie die Abschätzung ohne Reaktionszeit liefern würde.

- Für die Abschätzung von Abstand  $s^{\text{est}}$  und Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta v^{\text{est}}$  wird die **Heuristik der unveränderten Geschwindigkeiten** angenommen:

$$s_\alpha^{\text{est}}(t) = s_\alpha(t - T_r) - T_r \Delta v_\alpha(t - T_r), \quad (11.21)$$

$$\Delta v_\alpha^{\text{est}}(t) = \Delta v_\alpha(t - T_r). \quad (11.22)$$

- Für das eigene Fahrzeug ist auch die Beschleunigung gut abschätzbar, so dass die Reaktionszeit durch die **Heuristik konstanter Beschleunigungen** überbrückt wird:

$$v_\alpha^{\text{est}}(t) = v_\alpha(t - T_r) + T_r a_\alpha(t - T_r). \quad (11.23)$$

---

<sup>7</sup>Eine Heuristik ist eine nicht begründbare Annahme, welche der Erfahrung nach häufig zutrifft und daher eine sinnvolle Basis für Entscheidungen mit unvollständiger Information bietet.

## 11. Mikroskopische Verkehrsmodelle I: Fahrzeugfolgemodele

Im HDM wird zu den so erhaltenen Werten  $s^{\text{est}}$ ,  $v^{\text{est}}$  und  $\Delta v^{\text{est}}$  noch der stochastische Schätzfehler hinzugefügt und die dadurch erhaltenen Abschätzungen der Eingangsgrößen als Argumente für die Beschleunigungsfunktion des zugrundeliegenden Mikromodells verwendet.

### Berücksichtigung mehrerer Fahrzeuge

Im Allgemeinen sieht man durch das Vorderfahrzeug hindurch oder am Vordefahrzeug vorbei weitere Fahrzeuge, auf die man reagieren kann<sup>8</sup>. Um dies im Rahmen des HDM zu modellieren, wird die Beschleunigungsfunktion (11.16) in eine **freie Beschleunigung**  $a^{\text{free}}$  und einen **Wechselwirkungsanteil**  $a^{\text{int}}$  aufgrund der Behinderung durch andere Fahrzeuge aufgespalten:

$$a(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha) := a_\alpha^{\text{free}}(v_\alpha) + a^{\text{int}}(s_\alpha, v_\alpha, \Delta v_\alpha). \quad (11.24)$$

$n$  Vorderfahrzeuge werden nun einfach dadurch berücksichtigt, dass in der Beschleunigungsfunktion deren Wechselwirkungsanteile summiert werden:

$$a_\alpha^{\text{multi}} = a_\alpha^{\text{free}} + \sum_{\beta=\alpha-n}^{\alpha-1} a_{\alpha\beta}^{\text{int}}, \quad (11.25)$$

Hier ist  $a_{\alpha\beta}^{\text{int}}$  die Behinderung, welche Fahrzeug  $\beta$  auf das Fahrzeug  $\alpha$  ausübt. Da die Behinderung mit wachsendem Abstand stark abnimmt, bleibt in diesem Ansatz das unmittelbare Vorderfahrzeug in den meisten Situationen maßgeblich<sup>9</sup>. Nur, wenn Fahrzeuge weiter vorne bremsen oder langsamer fahren, wirkt sich dies in Gl. (11.25) verstärkt aus, so dass der HDM-Fahrer rechtzeitig bremst und so Staufronten “entschärft” werden.

## 11.7. Kalibrierung von Fahrzeugfolgemodellen

TODO: Das Material von Arne ..

---

<sup>8</sup>Dies ist hinter LKWs oder Lieferfahrzeugen ohne Fenster nicht möglich, weshalb das Fahren hinter solchen Fahrzeugen als unangenehm empfunden wird und sich der Abstand messbar vergrößert.

<sup>9</sup> auch bei Berücksichtigung von unendlich vielen Vordefahrzeugen würde sich der Gleichgewichtsabstand im IDM nur um etwa 25% vergrößern

# 12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten

## 12.1. Allgemeines

Einen Spezialfall von Mikromodellen stellen die **zellulären Automaten** (CA) dar. Bei einem zellulären Automaten sind alle Größen diskretisiert (vgl. Abb. 12.1):

- Der Ort in Zellen der Länge  $l$ ,
- die Zeit in Zeitschritte der Länge  $\Delta t$ ,
- und der Zustand als binäre Variable (Zelle ist besetzt oder nicht besetzt, Geschwindigkeitsstufe einer besetzten Zelle etc.).

Die Update-Gleichung eines CA hat folgende allgemeine Form:

$$\{\rho_{im}(t+1), Z_{im}(t+1)\} = f_{\text{CA}}(\{\rho_{im}(t), Z_{im}(t), \xi(t)\}) \quad (12.1)$$

Hierbei sind die  $\rho_{im}$  binäre Variablen mit der Bedeutung

$$\rho_{im} = \begin{cases} 1 & \text{Zelle } i \text{ auf Fahrstreifen } m \text{ ist besetzt,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (12.2)$$

$Z_{im}$  sind diskrete innere Zustandsvariablen der besetzten Zellen, die z.B. mit der Geschwindigkeit assoziiert werden können,<sup>1</sup> und  $\xi(t)$  fasst die in den meisten CAs vorhandenen Zufallskomponenten zusammen. Der aktuelle Zustand eines CA ist eindeutig durch die Menge  $\{(\rho_{im}, Z_{im}), i = 1, \dots, n, m = 1, \dots, I\}$  der Besetzungszahlen und inneren Zustände auf den  $n$  Zellen auf jeder der  $I$  Fahrstreifen festgelegt und das konkrete Modell durch die Modellfunktion  $f_{\text{CA}}$  charakterisiert.

Im Verkehrs-Kontext wird die allgemeine, auf den Zellen basierende Update-Gleichung (12.1) häufig durch eine äquivalente fahrzeugbezogene Beschreibung ersetzt: Man fasst die besetzten Zellen  $\alpha$  als “Fahrzeuge” mit den Zuständen Ort  $x_\alpha \in \mathbb{N}$ , Geschwindigkeit  $v_\alpha \in \mathbb{N}$  und ggf. Fahrstreifenindex  $m_\alpha$  auf und erhält Update-Gleichungen der Form

$$v_\alpha(t+1) = f_1(\{x_{\alpha'}(t), v_{\alpha'}(t), m_{\alpha'}(t), \xi(t)\}), \quad (12.3)$$

$$m_\alpha(t+1) = f_2(\{x_{\alpha'}(t), v_{\alpha'}(t), m_{\alpha'}(t)\}), \quad (12.4)$$

$$x_\alpha(t+1) = x_\alpha(t) + v_\alpha(t+1). \quad (12.5)$$

---

<sup>1</sup>Einige CAs haben weitere innere Variablen, z.B. “0=normale Fahrweise, 1=defensive Fahrweise” oder “0=Bremslicht aus, 1=Bremslicht an”, die aber an den grundlegenden Überlegungen nichts ändern.

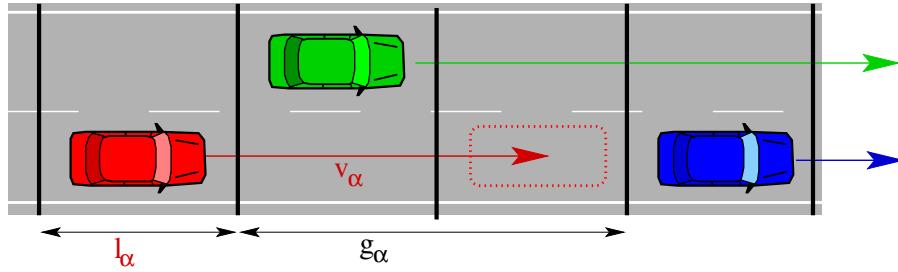


Figure 12.1.: Bei zellulären Automaten ist die Strecke in feste „Zellen“ der Länge  $l$  und die Zeit in feste Update-Schritte der Länge  $\Delta t$  eingeteilt. Die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung beträgt ein Vielfaches von  $\Delta x/\Delta t$  bzw.  $\Delta x/(\Delta t)^2$ . Das rote Fahrzeug hat die Geschwindigkeit  $v = 2$  und das Grüne  $v = 3$ .

#### Verständnisfrage:

Machen Sie sich klar, dass die Fortbewegungs-Gleichung (12.5) das Analog zu einem Euler-Updateschritt für Fahrzeugfolgemodelle darstellt!

## 12.2. Das Nagel-Schreckenberg-Modell

Eines der bekanntesten und einfachsten CA-Modelle ist das **Nagel-Schreckenberg-Modell** (NS-Modell). In seiner Grundform gilt es für einen Fahrstreifen und ist durch folgende Update-Gleichungen definiert:

1. Deterministisches Beschleunigen und Bremsen ( $g_\alpha$  ist die Zahl der Leerplätze (“gaps”) vor dem Fahrzeug  $\alpha$ ):

$$v_\alpha^*(t+1) = \min(v_\alpha(t) + 1, v_0, g_\alpha), \quad (12.6)$$

2. “Trödeln”:

$$v_\alpha(t+1) = \begin{cases} \max(v_\alpha^*(t+1) - 1, 0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ v_\alpha^*(t+1) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (12.7)$$

3. Fortbewegen:

$$x_\alpha(t+1) = x_\alpha(t) + v_\alpha(t+1). \quad (12.8)$$

### Verständnisfrage:

Machen Sie sich die Bedeutung der drei Update-Gleichungen des NS-CA aus Fahrersicht klar: Wie hoch ist die maximale Beschleunigung und die maximale Verzögerung? Wie reagieren die modellierten Fahrer auf bremsende Vorderfahrzeuge? Ist das Modell unfallfrei? Wie groß ist der minimale Bruttoabstand, wie groß die Wunschgeschwindigkeit? Warum wird  $p$  auch als “Trödelwahrscheinlichkeit” bezeichnet?

Die beim NS-Modell üblicherweise verwendete Diskretisierung ist gegeben durch  $\Delta x = 7.5 \text{ m}$  und  $\Delta t = 1 \text{ s}$ . Dies bedeutet insbesondere, dass Geschwindigkeiten nur Vielfaches von  $7.5 \text{ m/s}$  und Beschleunigungen Vielfaches von  $7.5 \text{ m/s}^2$  annehmen können. Weiter entwickelte Modelle haben häufig eine wesentlich feinerer Diskretisierung, z.B.  $\Delta x = 2.5 \text{ m}$  und entsprechend mehr Geschwindigkeitsstufen. Bei hinreichend feiner Ortsdiskretisierung erhält man *de-facto* ein kontinuierliches Fahrzeugfolgemodell im Verbund mit einem konkreten numerischen Integrationsschema.

### Verständnisfrage:

Welche Wunschgeschwindigkeit  $v_0$  würde man beim NS-Modell für Stadtverkehr wählen, welche für Autobahnen? Vergleichen Sie außerdem die im Modell maximal mögliche Dichte  $\rho = 1$  mit tatsächlich vorkommenden maximalen Dichten!

### 12.3. Zelluläre Automaten und Fahrzeugfolgemodelle im Vergleich

Zelluläre Automaten und zeitkontinuierliche Fahrzeugfolgemodelle stellen die wichtigsten Kategorien von Mikromodellen dar.<sup>2</sup> Beide Kategorien haben, je nach Anwendungsbereich, ihre Vor- und Nachteile:

- Bei Fahrzeugfolgemodellen sind Ort, Zeit und Geschwindigkeit kontinuierliche Größen, bei CAs sind alle drei Größen diskret. Lediglich der Fahrstreifenindex ist i.A. in beiden Kategorien von Mikromodellen diskret.<sup>3</sup>
- Fahrzeugfolgemodelle werden meist als Differenzialgleichung formuliert, die i.A. nummerisch gelöst werden muss. Die Wahl der verwendete “Integrationsmethode”, z.B. das **Euler-Verfahren** oder das **Runge-Kutta-Verfahren**, liegt in

<sup>2</sup>Es sind weitere Kategorien möglich, z.B. ist das in Gl. (11.9) vorgestellte Newell-Modell, streng genommen, eine “iterierte kontinuierliche Abbildung” (iterated map), bei der Ort und Geschwindigkeit kontinuierlich, die Zeit aber explizit diskret ist.

<sup>3</sup>Sehr detaillierte Fahrzeugfolgemodelle modellieren allerdings auch die transversale Dynamik zeitkontinuierlich. Ein Fahrstreifenwechsel dauert übrigens etwa 3-5 s.

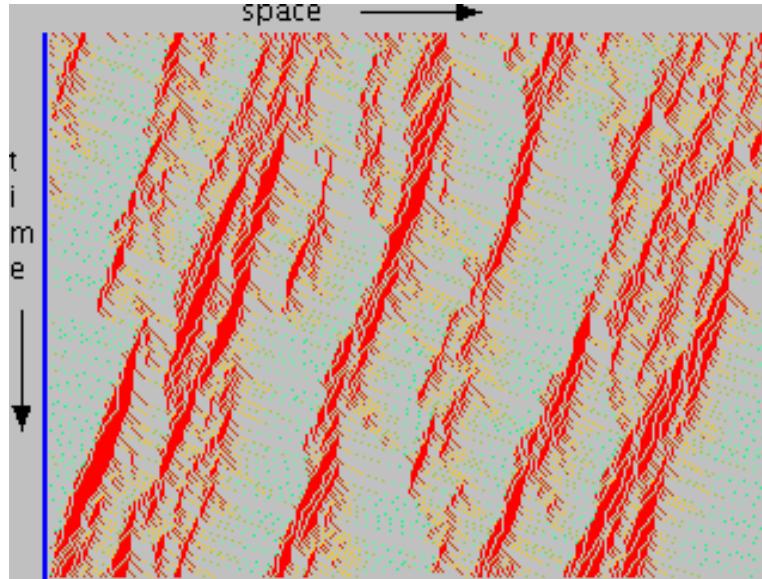


Figure 12.2.: Beispiel einer Simulation mit dem NS-Modell für  $\rho = 0.27$  (entspricht 36 Fz/km),  $p = 0.5$  und  $V_0 = 5$  (entspricht 135 km/h). Siehe <http://rcswww.urz.tu-dresden.de/helbing/RoadApplet/>

der Verantwortung des Anwenders. Hingegen bilden bei CA's das Modell und der zeitliche Update-Schritt eine Einheit.

- CA's sind i.A. schneller zu implementieren. Auch die Modellierung von Fahrstreifenwechseln ist in CA's konzeptionell einfacher.
- Einfache CA's wie das NS-Modell haben gegenüber zeitkontinuierlichen Mikromodellen einen Geschwindigkeitsvorteil, vor allem bei Simulation mehrerer Fahrstreifen und bei Fußgängermodellierung. Mehr als 1 Million Fahrzeuge können *realtime* simuliert werden. Für die neueren, detaillierteren Modelle nimmt diese Geschwindigkeit jedoch wegen der feineren Diskretisierung und zusätzlicher Regeln um etwa eine Zehnerpotenz ab und kommt damit in den Bereich von Fahrzeugfolgemodellen.<sup>4</sup>
- Die Modellparameter von CA's sind häufig unanschaulich oder haben unrealistische Werte (wie die Beschleunigung von  $7.5 \text{ m/s}^2$  und eine potenziell um ein Vielfaches höhere Verzögerung) im NS-Modell. Außerdem funktionieren die meisten CA's ohne *ad-hoc* hinzugefügten stochastischen Terme (wie dem "Trödeln" im NS-Modell) nicht.
- Wegen der groben Diskretisierung eignen sich CA nicht zur Modellierung des menschlichen Fahrverhaltens, von verschiedenen Fahrstilen oder zur Beurteilung der

---

<sup>4</sup>Im Zeitalter immer schneller werdender Rechner nimmt die Bedeutung der Ausführungsgeschwindigkeit ab.

## 12. Mikroskopische Verkehrsmodelle II: Zelluläre Automaten

verkehrlichen Wirkung von Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen (vgl. Teil III dieses Skripts). Da sich im Großem Maßstab viele Details "wegmitteln", ist eine Anwendung von CA's bei der modellgestützten Verkehrszustandsbestimmung (Abschnitt 16) sinnvoll und ist auch realisiert (vgl. <http://www.autobahn.nrw.de/>). Allerdings konkurrieren CA's hier mit den makroskopischen Verkehrsflussmodellen.

**Verständnisfrage:**

Wie würde sich ein gemäß dem deterministischen NS-Modell ( $p = 0$ ) agierender Fahrer einer roten Ampel annähern?

**Aufgabe:**

Zeichnen Sie das Fundamentaldiagramm des deterministischen NS-Modells für  $v_0 = 1$  und  $v_0 = 5$ . Was ist für einen "Trödelfaktor"  $p > 0$  zu erwarten?

# 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

Die alltägliche Erfahrung zeigt, dass es im realen Verkehr sehr verschiedenartige "Fahrer-Fahrzeug-Einheiten" mit sehr unterschiedlichem Fahrverhalten gibt: Die Unterschiede sind teils durch den Fahrzeugtyp (PKW, LKW, Motorräder, in der Stadt auch Fahrräder), teils durch die Fahrweise (sportlich, vorausschauend, ängstlich, aggressiv ...) begründet.

Diese unter dem Begriff **heterogener Verkehr** zusammengefasste Verschiedenartigkeit hat drastische Auswirkungen auf die Kapazität und Stabilität des Verkehrs. Der Simulationsbedarf wird durch den in naher Zukunft stark zunehmenden LKW-Verkehr und die zunehmende Verbreitung von ACC-Systemen noch verstärkt.

Simulationen heterogenen Verkehrs sind eine Domäne von Mikromodellen, da man einfach jedem Fahrzeug seine eigenen Modellparameter mitgeben kann. Auch die gleichzeitige Simulation verschiedener Fahrzeuge mit unterschiedlichen Modellen ist möglich und sinnvoll.

Wichtige Gesichtspunkte bei der Modellierung heterogenen Verkehrs mit Mikromodellen sind vor allem:

- Zur Modellierung der verschiedenen Fahrstile sind anschauliche Modellparameter wie die des IDM hilfreich. Beispielsweise wird ein typischer LKW – abgesehen von seiner großen Fahrzeuglänge  $l$  und einer niedrigen freien bzw. "Wunsch"geschwindigkeit  $v_0 = 88 \text{ km/h}$  – durch niedrige Beschleunigungsfähigkeiten  $a$ , einer großen (gesetzlich vorgeschriebenen!) Folgezeit  $T$  und eine relativ antizipierende Fahrweise (kleines  $b$ ) beschrieben. Ein sportlich-aggressiver Fahrer wird durch hohe Werte von  $v_0$  und  $a$  sowie sehr niedriger Folgezeit  $T$  charakterisiert, während ein ängstlicher und unerfahrener Fahrer durch kleine Werte von  $a$ , aber relativ große Werte von  $b$  beschrieben wird.
- Die Verteilungsfunktionen von Folgezeiten  $T$  kann man empirisch aus Einzelfahrzeugdaten bei großem Verkehrsaufkommen bestimmen (Abb. 13.1), die der Wunschgeschwindigkeit  $v_0$  aus Einzelfahrzeugdaten bei geringer Verkehrsdichte (Abb. 13.2). Enthalten die Daten die Fahrzeuglängen  $l_\alpha$ , ist auch die Bestimmung des LKW-Anteils möglich.
- Die Modellierung heterogenen Verkehrs ist nur im Verbund mit Spurwechseln sinnvoll, da sich ansonsten einfach eine große Schlange hinter dem langsamsten Fahrzeug bilden würde. Man benötigt also neben einem für mehrere Fahrzeugtypen parametrisierbaren Longitudinalmodell auch ein Spurwechselmodell.

### 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

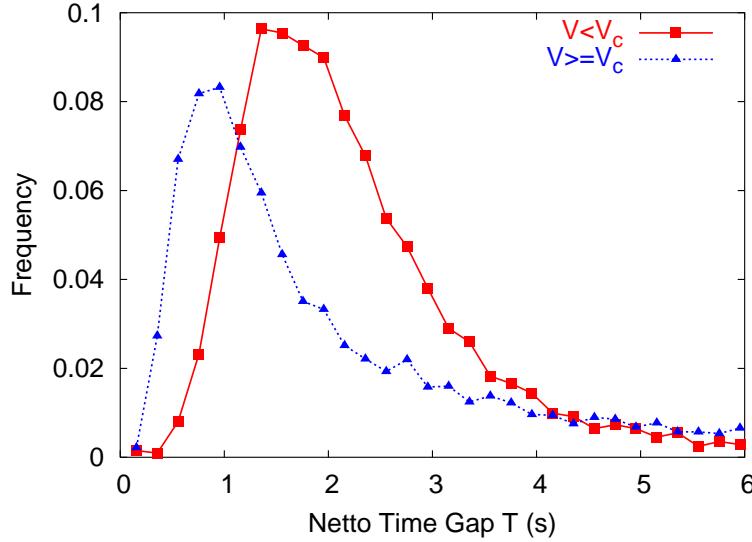


Figure 13.1.: Zeitlückenverteilung für zwei Geschwindigkeitsbereiche (freier und gestauter Verkehr) bzw. vier verschiedene Dichtebereiche (auf der Autobahn A5 in der Nähe von Frankfurt)

#### 13.1. Zeitlückenverteilung

Empirische Zeitlückenverteilungen, die ein Modell heterogenen Verkehrs reproduzieren sollte, werden aus Einzelfahrzeugdaten gewonnen und haben folgende Merkmale:

- Die Zeitlücken streuen stark; häufig ist sogar die Standardabweichung größer als das arithmetische Mittel.
- Die Verteilungen sind stark asymmetrisch. Sowohl im freien als auch in gestauten Verkehr kommen Werte über 10 s (!) vor.
- Im freien Verkehr, z.B. charakterisiert durch Geschwindigkeiten oberhalb einer Grenzgeschwindigkeit  $V_c$ , ist die wahrscheinlichsten Folgezeit (Modalwert)  $\hat{T}$  wesentlich kleiner (!) als im gestauten Verkehr. In beiden Fällen ist  $\hat{T}$  wesentlich kleiner als der Fahrschulregel "Abstand gleich halber Tacho" entsprechend.
- Auch das arithmetische Mittel der Folgezeiten ist im dichten, aber noch freien Verkehr deutlich kleiner sein als in beliebigen Stauzuständen. Da der Verkehrsfluss und damit die Kapazität das Inverse des arithmetischen Mittels (allerdings der Bruttofolgezeiten) ist, ergibt sich auch aus den Folgezeitverteilungen der bereits bekannte Flussabfall (**Capacity drop**) beim Verkehrszusammenbruch, der bewirkt, dass sich ein einmal entstandener Stau i.d.R. nicht so schnell wieder auflöst.

Die gemessene Zeitlückenverteilung ist i.A. nicht identisch zur Verteilung der *gewünschten*

### 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

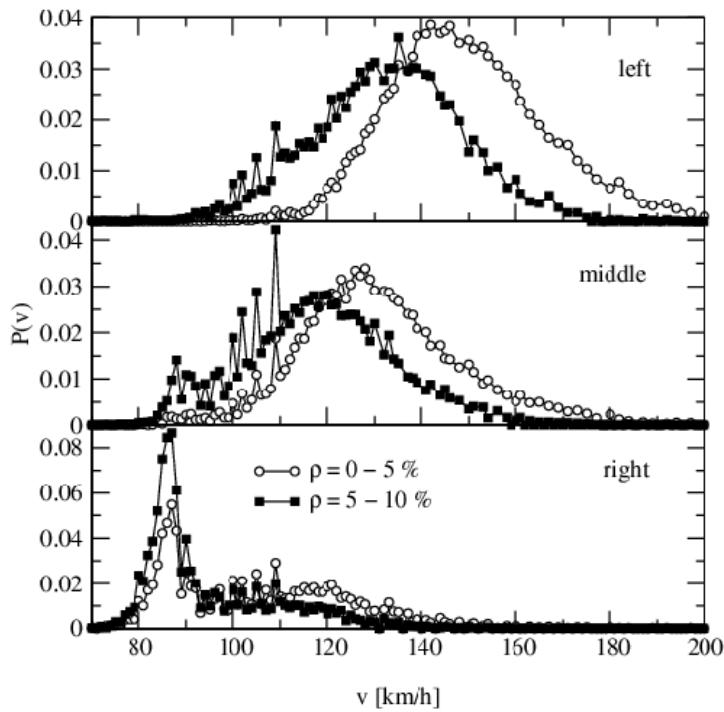


Figure 13.2.: Geschwindigkeitsverteilung bei sehr geringen Dichten auf der A3 (Drei Fahrstreifen pro Richtung). (Quelle: Knospe et. al., cond-mat/0203347)

Folgezeiten, sondern nur eine obere Schranke. Effekte, die die tatsächliche Folgezeit größer als die gewünschte werden lassen, sind u.a.

- dynamische Ursachen, z.B. kann bei mangelnder Beschleunigungsfähigkeit das Vorderfahrzeug "davonfahren",
- und natürlich die Tatsache, dass bei freiem Verkehr viele Fahrzeuge gar keinem Vorderfahrzeug folgen.

Dies erklärt teilweise die Asymmetrie der Verteilungen. Bemerkenswert ist auch, dass bei freiem Verkehr mit z.B. 360 Fz/h/Spur, d.h. einem arithmetischen Mittel der Bruttofolgezeit von 10 s, der wahrscheinlichste Wert der Nettofolgezeit immer noch unter 1 s liegt!

### 13.2. Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines Fahrstreifens

Empirisch bestimmte Geschwindigkeitsverteilungen stellen eine untere Schranke für die Verteilung der Wunschgeschwindigkeiten dar. Für sehr geringe Dichten (offene Symbole

### 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

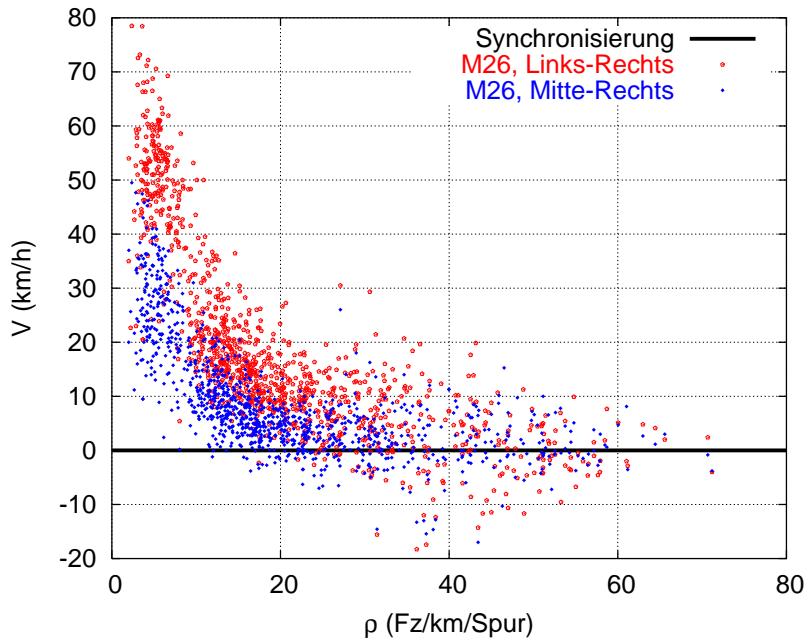


Figure 13.3.: Geschwindigkeitsdifferenz zwischen benachbarten Fahrstreifen (A9-Süd bei München)

in Abb. 13.2) kann man davon ausgehen, dass man näherungsweise die zu modellierende Wunschgeschwindigkeitsverteilung selbst bekommt.

Die aus Einzelfahrzeugdaten gewonnenen Geschwindigkeitsverteilungen haben folgende Merkmale:

- Im Gegensatz zu den Folgezeitverteilungen ist die Verteilung auf der linken und mittleren Fahrstreifen symmetrisch und etwa gaußförmig.
- Auf der rechten Fahrstreifen ist die Verteilung hingegen häufig bimodal (doppelgipflig), was durch die Überlagerung der Verteilungen von PKWs und LKWs erklärbar ist.
- Für höhere Verkehrsdichten gleichen sich die Geschwindigkeitsunterschiede bezüglich der Fahrstreifen an (Abb. 13.3) und auch die Bimodalität verschwindet.

### 13.3. Auswirkungen heterogenen Verkehrs im Fundamentaldiagramm

Die starke Variation der Zeitlücken erklärt teilweise die starke Variation von Fluss-Dichte-Daten im behinderten bzw. gebundenen Verkehr: Eine Variation von Dichte und

### 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

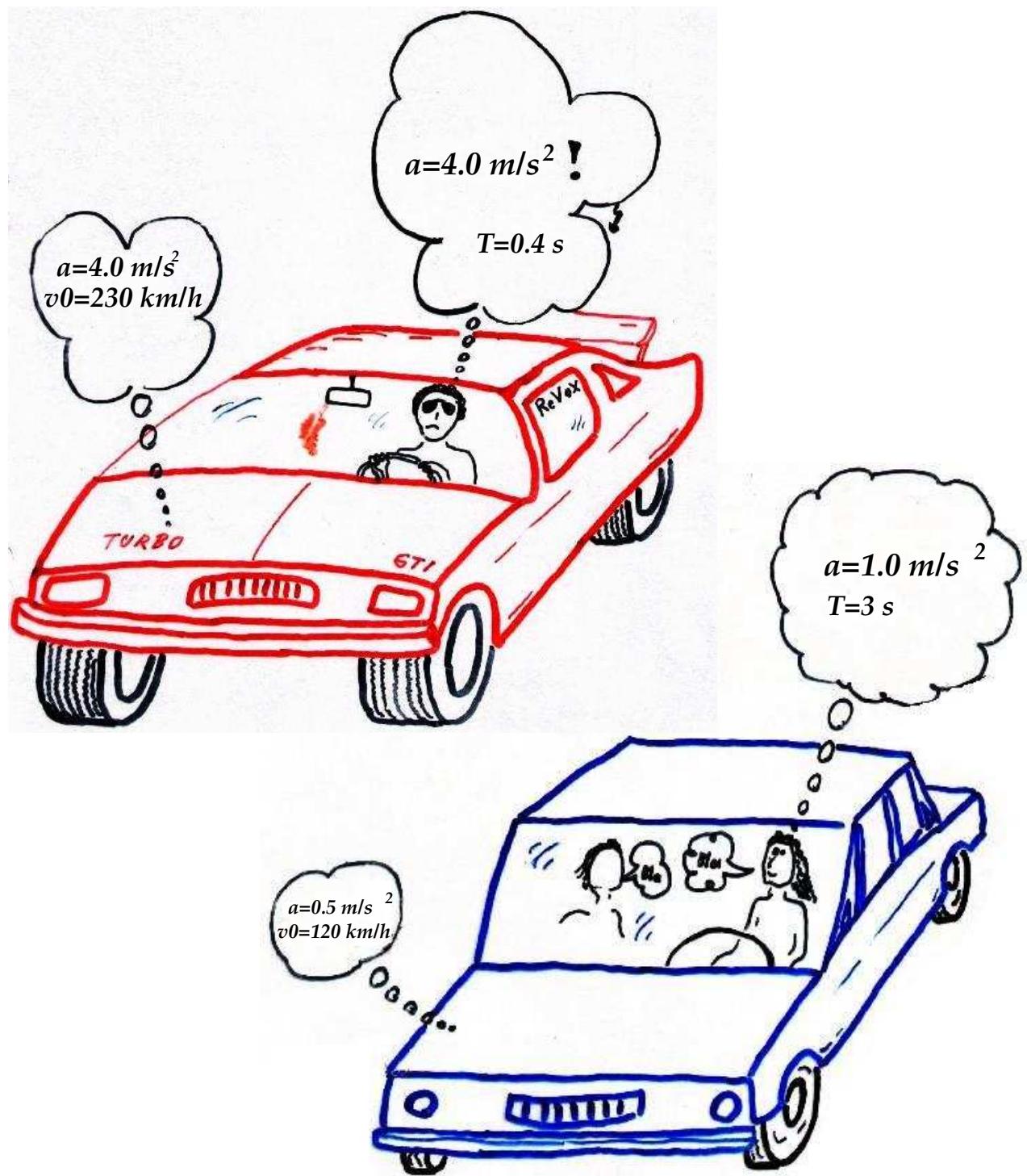


Figure 13.4.: In manchen Modellen wie dem IDM charakterisieren die Modellparameter direkt den Fahrstil und die Leistungsfähigkeit des Fahrzeugs.

### 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

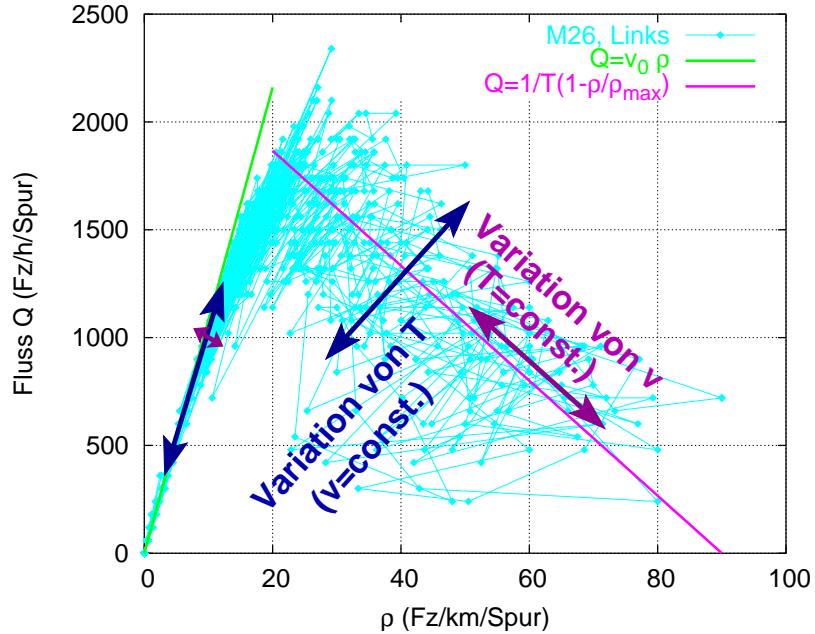


Figure 13.5.: Auswirkungen der Streuungen der Folgezeiten im Fundamentaldiagramm.

Zeitl” ucken f”uhrt im freien Verkehr zu Variationen der Fluss-Dichte-Daten entlang einer eindimensionalen Kurve ( $\approx \rho v_0$ ). Im gebundenen Verkehr jedoch f”uhrt eine Variation der Dichte zu ”Anderungen der Fluss-Dichte-Daten, die senkrecht zu den durch Variation der Zeitl” ucken bedingten ”Anderungen verlaufen. Insgesamt ergibt sich daraus im gebundenen Verkehr ein erratischer Verlauf der Fluss-Dichte-Daten.

Zu bemerken ist, dass unterschiedliche Zeitlücken nicht nur durch heterogenen Verkehr, d.h. unterschiedliche Wunschzeitlücken der einzelnen Fahrer zustandekommen, sondern auch durch Nichtgleichgewichte (der tatsächliche Abstand entspricht nicht dem Wunschabstand), die z.B. durch Stop-and-Go Verkehr erzwungen werden. Letzterer Mechanismus führt auch bei gleichartigen Fahrzeugen und Fahrern zu Streuungen im Fundamentaldiagramm wie z.B. in Abb. 5.9, die eine Simulation gleichartiger Fahrzeuge zeigt.

### 13.4. Modelle für die Querdynamik (Fahrstreifenwechsel)

Martin: naechsten Absatz erweitern! MOBIL to do

#### 13.4.1. Allgemeines zur Modellierung der Querdynamik

Wie bereits erwähnt, ist eine realistischen Modellierung von heterogenem Verkehr nur bei gleichzeitiger Modellierung der Querdynamik, also der Fahrstreifenwechsel mit **Spur-**

## 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

**wechselmodellen** sinnvoll. Diese Modelle sind i.A. komplexer als Beschleunigungsmodelle. Insbesondere muss auch ein Minimalmodell mehrere Fremdfahrzeuge berücksichtigen: Nicht nur das unmittelbare Vorderfahrzeug, sondern auch das Vorder- und Hinterfahrzeug auf der Zielfahrstreifen. Die Verhaltensmuster und der Ablauf sind ebenfalls komplexer. Insbesondere kann man i.A. mehrere Phasen unterscheiden:

- *Strategische und taktische Phase:* Hier werden eigene und fremde Fahrstreifenwechsel durch antizipatorische Maßnahmen wie Beschleunigen, Bremsen, eine Lücke schaffen etc. erleichtert. Speziell bei dichtem und gestauten Verkehr ist diese Phase zur realistischen Beschreibung wichtig.
- *Entscheidung zur operativen Durchführung.* Hier wird entschieden, ob ein Fahrstreifenwechsel zum gegenwärtigen Zeitpunkt initiiert werden soll.
- *Eigentliche Durchführung:* Je nach Modell entweder instantan wie bei den zellulären Automaten oder Coupled-Map Fahrzeugfolgemodellen oder innerhalb der realistischen Zeitspanne von 3-4 s. In vielen Simulatoren wie PTV-Vissim oder die Simulationen auf [www.traffic-simulation.de/movie3d](http://www.traffic-simulation.de/movie3d) wird der Fahrstreifenwechsel grafisch zwar kontinuierlich dargestellt, bezüglich der Entscheidungslogik ("auf welcher Fahrstreifen befindet sich das Fahrzeug?") jedoch ein instantaner Fahrstreifenwechsel zum Beginn des "grafischen" Fahrstreifenwechsels angenommen.

Fahrstreifenwechselmodelle hängen auch stärker als Beschleunigungsmodelle von länderspezifischen Gesetzen und Regelungen ab.

- auf europäischen Autobahnen führt z.B. das Rechtsfahrgebot bei geringer Verkehrs-dichte zu großen Differenzen der Geschwindigkeiten auf linker, mittlerer und rechter Fahrstreifen, die im Wesentlichen die Verteilung der Wunschgeschwindigkeiten widerspiegeln, vgl. Abb. 13.3. Im gebundenen Verkehr mit Dichten ab etwa 30 Fz/km/Spur oder höher kann keiner mehr die Wunschgeschwindigkeit fahren ("im Stau sind alle gleich") und der Verkehrsverlauf in den benachbarten Fahrstreifen wird infolge von ausgleichenden Wechseln zum jeweils schnelleren Fahrstreifen *synchronisiert*, d.h. die Geschwindigkeitsverläufe sind mehr oder weniger gleich.
- Auf z.B. amerikanischen Freeways mit gleichmäßigeren Geschwindigkeiten ist gerade im Falle freien Verkehrs das Wechselverhalten ganz anders. Unterschiedliche Randbedingungen wie etwa das fehlende Rechtsüberholverbot verstärken die Unterschiede.

Die meisten "einfachen" Fahrstreifenwechselmodelle modellieren nur die operative Entscheidung zum Fahrstreifenwechsel, der ggf. instantan durchgeführt wird. Die operative Entscheidung basiert i.A. auf zwei Kriterien:

- **Anreizkriterium:** Kann ich auf einer anderen Fahrstreifen schneller fahren ("Blick nach vorne") oder will ich aus anderen Gründen (z.B. Vorbereitung eines Abbiegevorgangs bzw. Wechsel vom Beschleunigungsstreifen einer Einfahrt auf die Hauptfahrbahn) auf diese Fahrstreifen wechseln?

### 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

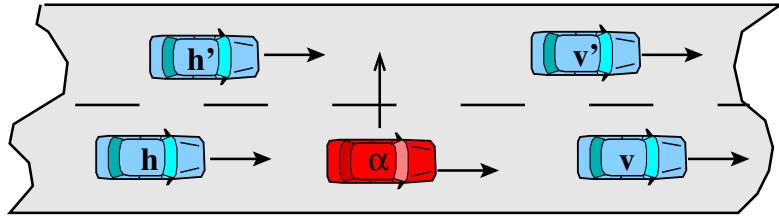


Figure 13.6.: Die betrachteten Fahrzeuge für einen Wechsel des roten Fahrzeugs  $\alpha$  auf den benachbarten Fahrstreifen. Relevant sind i.A. die Vorderfahrzeuge  $v$  bzw.  $v'$  auf der “alten” Fahrstreifen und der Zielfahrstreifen, sowie die jeweiligen Hinterfahrzeuge  $h$  bzw.  $h'$ .

- **Sicherheitskriterium:** Ist ein Fahrstreifenwechsel sicher, d.h. nicht mit Unfällen oder zu starken erzwungenen Bremsmanövern der beteiligten Fahrzeuge verbunden? (“Blick nach hinten”).

#### 13.4.2. Gap-acceptance Modelle

Im einfachsten Fall der sog. **gap-acceptance** Modelle wird zum Auswerten dieser beiden Kriterien nur die Abstände zum jeweiligen Vorder- oder Hinterfahrzeug ausgewertet, vgl. Abb. 13.6.

Die Kriterien sind z.B. gegeben durch

$$\begin{aligned} s'_\alpha &> s_\alpha && \text{Anreizkriterium,} \\ s'_{h'} &> s_{\text{safe}}(v_{h'}) && \text{Sicherheitskriterium.} \end{aligned} \quad (13.1)$$

Hier bedeuten  $s$  bzw.  $s'$  die Abstände der Fahrzeuge der Abb. 13.6 zum jeweiligen Vorderfahrzeug vor bzw. nach dem Wechsel und  $s_{\text{safe}}$  der Sicherheitsabstand, welcher z.B. gleich dem Folge-Abstand  $s_{\text{safe}} = v_h T$  mit der Folgezeit  $T$  gegeben sein kann. Ein Wechselwunsch des betrachteten Fahrzeugs  $\alpha$  besteht also, wenn der Abstand zum Vorderfahrzeug auf der Zielfahrstreifen größer ist als auf der eigenen. Der Wechsel ist sicher, wenn nach dem Wechsel der Abstand des neuen Hinterfahrzeugs größer als der jeweilige Sicherheitsabstand ist.

So anschaulich diese Regeln sind, sie sind dennoch unrealistisch:

- Die *Geschwindigkeitsdifferenz* geht nicht ein: Offensichtlich macht es jedoch einen großen Unterschied, ob man nach dem Wechsel etwa gleich schnell ist wie das neue Hinterfahrzeug ist (dann ist Gap-acceptance OK), oder wesentlich langsamer, z.B. beim Einfahren. Dann würde obige Regel zu Notbremsungen bzw. Unfällen führen.
- Die Regel ist nur dann mit Longitudinalmodell kompatibel, falls dieses ebenfalls ein Gap-Acceptance Modell ist, wie z.B. das Newell-Modell oder der zelluläre Automat von Nagel und Schreckenberg.

## 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

### Verständnisfrage:

Machen Sie sich die Folgen einer fehlenden Abhängigkeit von der Geschwindigkeitsdifferenz klar, in dem Sie das Fahrstreifenwechseln bei sehr geringer Geschwindigkeit (z.B. Baustelleneinfahrt ohne Beschleunigungsstreifen oder Abbiegen im Stadtverkehr) betrachten. Ab welcher Geschwindigkeit der Fahrzeuge auf der Hauptfahrbahn wären diese ggf. zu einer Vollbremsung mit  $\dot{v} = -8 \text{ m/s}^2$  gezwungen?

### 13.4.3. Das Fahrstreifen-Wechselmodell MOBIL

Genau wie bei den Gap-Acceptance Modellen wird in diesem Modell nur die operative Wechselentscheidung, basierend auf den unmittelbaren Nachbarn, modelliert. Im Gegensatz zu den Gap-acceptance-Modellen ist MOBIL jedoch kompatibel mit den meisten Longitudinalmodellen (sowohl Fahrzeugfolgemodellen als auch *Coupled-map* Modelle und zelluläre Automaten) und berücksichtigt Geschwindigkeitsdifferenzen sofern diese im Longitudinalmodell enthalten sind. Es ist nämlich auf die Beschleunigungsfunktion des Longitudinalmodells gemäß dem “MOBIL-Prinzip” aufgebaut:

MOBIL - Minimizing overall braking deceleration induced by lane changes

Dieses Prinzip (“Minimiere die durch Fahrstreifenwechsel verursachten Bremsverzögerungen aller beteiligten Fahrzeuge”, d.h. maximiere die mittlere Beschleunigung) führt zu folgenden Kriterien:

$$\begin{aligned} a'_\alpha &> a_\alpha + p(a_h - a'_h + a_{h'} - a'_{h'}) + a_{\text{thr}} && \text{Anreizkriterium,} \\ a'_{h'} &> -b_{\text{safe}} && \text{Sicherheitskriterium.} \end{aligned} \quad (13.2)$$

- Die Modellparameter sind die maximal zulässige **sichere Bremsverzögerung**  $b_{\text{safe}}$  des neuen Hinterfahrzeugs (diese kann bei der Kombination mit dem IDM z.B. gleich der komfortablen Verzögerung  $b$  gewählt werden), der **“Höflichkeitsfaktor”**  $p$  und die **Wechselschwelle**  $a_{\text{thr}}$ , welche Wechseln mit nur marginalem Vorteil verhindert.
- Die neue Komponente dieses Modells ist der **Höflichkeitsfaktor**, welcher das – über Sicherheitsüberlegungen hinausgehende – Maß an Rücksichtnahme auf andere Verkehrsteilnehmer angibt:
  - Für  $p = 0$  erhält man egoistische Fahrer, welche auch in fast allen anderen Wechselmodellen angenommen werden.
  - Für  $p = 1$  werden die Bedürfnisse der anderen ebenso gewichtet wie die eigenen und das Akronym MOBIL gilt wörtlich.

### 13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen

Für  $p = 0$  und  $a_{thr} = 0$  ist MOBIL formal identisch zu den Gap-Acceptance-Modellen, nur dass das Kriterium nicht der Abstand, sondern die Beschleunigung darstellt.

#### Verständnisfrage:

Wie schätzen Sie den Wert des Höflichkeitsfaktors für die beiden in Abb. 13.4 dargestellten Fahrer ein? Kann man mit  $p$  auch "Schulmeister", welche absichtlich andere Verkehrsteilnehmer behindern, modellieren?

#### Aufgabe: MOBIL für das OVM

Formulieren Sie MOBIL für das OVM und zeigen Sie, dass in diesem Falle ein Gap-Acceptance Modell resultiert.

#### Aufgabe: MOBIL für das IDM

- Formulieren Sie die MOBIL-Kriterien für das IDM und den Fall, dass alle beteiligten Fahrzeuge nahezu gleich schnell fahren, Geschwindigkeitsdifferenzen also nicht berücksichtigt werden müssen.
- Einbiegen an mit "Stop" Schildern kontrollierten Kreuzungen auf die vorfahrtberechtige Straße stellt ebenfalls einen Spezialfall eines Fahrstreifenwechsels dar. Das Anreizkriterium ist immer erfüllt und es wird angefahren, also auf die rechte Fahrstreifen der Hauptfahrbahn gewechselt, sobald das Sicherheitskriterium erfüllt ist. Formulieren Sie das Sicherheitskriterium für diesen Fall. Wie groß muss der Abstand von mit 50 km/h fahrenden Fahrzeugen auf der Hauptfahrbahn mindestens sein, falls IDM/MOBIL durch die Parameter  $a = b = b_{safe} = 2 \text{ m/s}^2$ ,  $T = 1 \text{ s}$ ,  $v_0 = 50 \text{ km/h}$  und  $s_0 = 0$  beschrieben werden?

Das MOBIL mit dem IDM "in action" ist auf der Webseite [www.traffic-simulation.de](http://www.traffic-simulation.de) zu sehen.

#### 13.4.4. Bemerkung zum Thema Anreizkriterium zum Fahrstreifenwechseln

Eine Motivation, im Stau die Fahrstreifen zu wechseln, ist häufig der Eindruck, dass man gerade die langsamste Fahrstreifen "erwischt" hat. In folgender Aufgabe wird gezeigt, dass dies häufig ein Trugschluss ist: Aus statistischen Gründen ist der Zeitanteil, in der man im Stau von Fahrzeugen der Nachbarfahrstreifen überholt wird, i.A. größer als der Zeitanteil, in der man selber überholt. *Dies gilt häufig für jede Fahrstreifen!* Der Trugschluss dabei ist, dass man aus den Zeitanteilen auf die Geschwindigkeit der

### **13. Heterogener Verkehr und mehrere Fahrstreifen**

Fahrstreifen im Vergleich zu den anderen Fahrstreifen schließt.

#### **Verständnisfrage:**

Begründen Sie, warum man im Stau tendenziell den größeren Zeitanteil auf der langsameren Fahrstreifen verbringt, und zwar unabhängig von der Wahl des Fahrstreifens. Machen Sie dabei zur Veranschaulichung folgenden Annahmen:

- Richtungsfahrbahn mit zwei gleichberechtigten Fahrstreifen (symmetrische Verkehrsregeln); überall herrscht zähfließender Verkehr.
- Auf beiden Fahrstreifen wird auf einem Streckenanteil von 50% langsamer (z.B. mit 10 km/h) gefahren, ansonsten schneller (z.B. mit 20 km/h). Die Geschwindigkeiten sind nicht vollständig synchronisiert, d.h. mal ist die linke Fahrstreifen schneller, mal die rechte.
- Die Fahrzeuge befinden sich näherungsweise immer im Gleichgewicht, d.h. “auf” einem von zwei Punkten im gestauten Zweig des Fundamentaldiagramms. Die Übergangszonen werden vernachlässigt.

Da MOBIL und andere rein auf die operative Aufgabe beschränkten Spurwechselmodelle ohne strategische Komponente immer “kurzsichtig” handeln, gilt dieser statistische Effekt auch für Spurwechselmodelle! Es wird daher häufig “hektischer” gewechselt als es sinnvoll ist!

# 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

Zitat zu Fußgängern.

Quelle

Verkehrsflussmodelle können nicht nur für Autos oder andere Kraftfahrzeuge, sondern auch für andere Verkehrsteilnehmer formuliert werden, insbesondere Fußgänger. Der grundlegende Unterschied zu Autoverkehr ist die Zweidimensionalität: Ein Fußgänger bewegt sich nicht längs von Fahrstreifen, sondern in beliebige Richtungen. Die Prinzipien, welche hier anhand von Fußgängermodellen vorgestellt werden, gelten aber auch für andere zweidimensionale Verkehrsflüsse wie

- Gemischter Verkehr (*mixed traffic*) in Schwellen- oder Dritt Weltländern: Autos, LKW, Dreiräder, Zweiräder, Rikshas, pferde- und eselgetriebene Gespanne, ja sogar von Menschen gezogene Karren fahren dort oft nebeneinander. Fahrstreifen, so sie denn überhaupt existieren, werden nicht beachtet (vgl. Abb. 14.1)
- Verkehrsflüsse aus Marathonläufern oder Inlineskatern
- ja selbst Skilanglauf-Massenveranstaltungen (Abb. 14.2)

Ziel und Zweck der Verkehrsflussmodellierung in diesen Situationen ist zum einen die Planung von Massenveranstaltungen. Dabei können die Verkehrsflüsse Mittel zum Zweck sein (z.B. Fußgängerströme zu/von Fußballstadien oder bei der *Hajj* in Mekka, Abb. 14.2), oder auch Selbstzweck, z.B. bei Marathonläufen, Inlineskating-Events oder anderen Massensportveranstaltungen). Eingesetzt werden Fußgängersimulationen auch bei der Dimensionierung von neuen Infrastruktur (z.B. Bahnhöfe). Schließlich hat die Simulation von spurfreien *mixed traffic* nahezu die gleiche Bedeutung wie die von spurgebundenem Straßenverkehr, da es ihn weltweit in vergleichbaren Umfang gibt.

## 14.1. Makroskopische Modellierung

Der wichtigste Unterschied der Modellierung von Fußgängern bezüglich der traditionellen Modellierung von Kfz-Verkehr liegt, wie gesagt, in der Zweidimensionalität: Fußgänger können in beliebige Richtungen “kreuz und quer” laufen. Für die makroskopische Modellierung bedeutet dies eine wichtige Einschränkung: Nur *unidirektionale* Ströme bzw. *gerichteter Verkehr* lassen sich sinnvoll makroskopisch darstellen. Dies ist aber in vielen relevanten Fällen gegeben, beispielsweise

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger



Figure 14.1.: *Mixed traffic* in Hyderabad (Indien) (Quelle: [www.cepolina.com](http://www.cepolina.com)).



Figure 14.2.: Stau von Skilangläufern beim schwedischen *Vasaloppet* und von Fußgängern bei der Pilgerfahrt *Hajj* in Mekka.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

- Zu- und Abgangsströme von Massenveranstaltungen,
- Marathonläufe und andere Massensportveranstaltungen,
- *mixed traffic*,
- Evakuierungen
- Ja selbst einige Berufsverkehrs-Ströme.

Nicht sinnvoll makroskopisch zu modellieren sind hingegen Situationen wie Weihnachtsmärkte, Fußgängerzonen usw., da man dann viele Partialdichten und -flüsse für all die unterschiedlichen Zielrichtungen benötigte, was, selbst wenn man die Wechselwirkungen untereinander in den Griff bekäme, unüberschaubar komplex würde.

### 14.1.1. Makroskopische Variable

Für *gerichteten Verkehr* lassen sich die üblichen makroskopischen Größen des spurgebundenen Kfz-Verkehrs verallgemeinern:

- Die **2D-Dichte**  $\rho(x, y, t) = \rho(\mathbf{x}, t)$  [Fußgänger/m<sup>2</sup>],
- Die **Flussdichte**  $Q^*(\mathbf{x}, t)$  [Fußgänger/(ms)],
- Die **lokale Geschwindigkeit**  $V(\mathbf{x}, t)$  [m/s].

Im Weiteren betrachten wir in Transversalrichtung homogene Ströme. Die Koordinate  $x$  gehe in Richtung des Weges (Bogenlänge), während die transversale Dimension lediglich durch die Wegbreite  $b(x)$  charakterisiert ist. Mit diesen Annahmen lassen sich auch effektive 1D-Größen wie beim Straßenverkehr definieren:

- Die **1D-Dichte**

$$\rho_{1D}(x, t) = \rho(x, t)b(x) \text{ [Fußgänger/m]} \quad (14.1)$$

- und den *effektiven Fluss* (Verkehrsstärke)

$$Q(x, t) = Q^*(x, t)b(x) \text{ [Fußgänger/s]} \quad (14.2)$$

Die hydrodynamischen Relationen, welche direkt anhand der obigen Definitionen Dichte und Fluss bzw. Flussdichte verknüpfen, lauten

$$Q = \rho_{1D}V, \quad (14.3)$$

$$Q^* = \rho V. \quad (14.4)$$

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

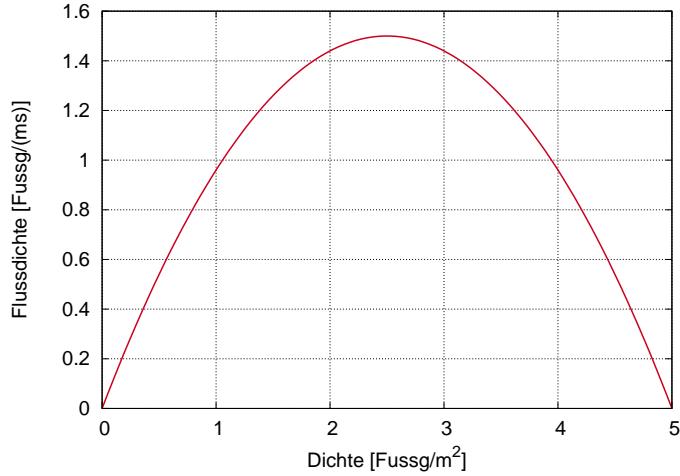


Figure 14.3.: Parabolisches Fundamentaldiagramm für  $\rho_{\max} = 5 \text{ m}^{-2}$  und  $V_0 = 1.2 \text{ m/s}$ .

### 14.1.2. Fundamentaldiagramm

Fundamentaldiagramme lassen sich anhand der Definitionen (14.3) und (14.4) analog wie bei Straßenverkehr formulieren. Da bei Fußgängern das Flussmaximum oft nahe der halben Maximaldichte erreicht wird, ist selbst das einfachste parabolische Fundamentaldiagramm (Abb. 14.3) oft sinnvoll:

$$Q_e^*(\rho) = \rho V_e(\rho) = \rho V_0 \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right), \quad (14.5)$$

$$Q_e(\rho_{1D}) = \rho b V_e(\rho) = \rho_{1D} V_e(\rho_{1D}/b). \quad (14.6)$$

Die **spezifische Kapazität**, also das Maximum der Flussdichte, beträgt hier

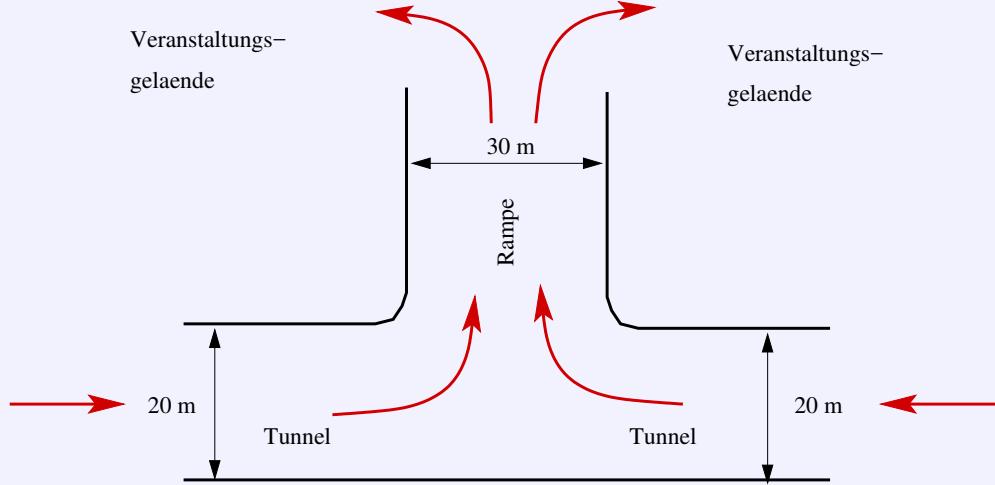
$$K^* = \frac{\rho_{\max} V_0}{4} \quad (14.7)$$

Für die typische Werte der Abbildung ist der Zahlenwert  $K^* = 1.5 \text{ Fußgänger/(ms)}$ .

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

### Aufgabe:

Bei der Loveparade in Duisburg führten zwei Tunnel und eine Rampe gemäß folgender Skizze zum eigentlichen Veranstaltungsgelände:



Die Fußgänger werden makroskopisch durch ein parabolisches Fundamentaldiagramm mit den Parametern  $\rho_{\max} = 5 \text{ m}^{-2}$  und  $V_0 = 1.2 \text{ m/s}$  modelliert. Wie groß ist die Kapazität (Fußgänger pro Stunde) des gesamten Zugangs im *best case*, also ohne Hindernisse im Zugangsbereich und vor allem ohne Gegenverkehr?

### 14.2. Mikroskopische Modellierung: Das Social-Force Model

In der mikroskopischen Herangehensweise werden Fußgänger durch **aktive Teilchen**, auch **Agenten** oder engl. *self-driven particles* genannt, beschrieben. Hier kommt die volle Zweidimensionalität zum Tragen: Alle Richtungen sind möglich, jeder Fußgänger kann ein anderes Ziel haben. Dadurch haben die Orte  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$  aller Fußgänger  $i$ , die Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} \equiv \dot{\mathbf{x}}_i \quad (14.8)$$

sowie die Wunschgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{0i}$ , Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{v}}_i$  und weitere Größen *vektoriellen* Charakter. Die Grundgleichungen haben die Form der *Newton'schen* Bewegungsgleichungen, nur dass **soziale Kräfte** (engl. *social forces*) die physikalischen Kräfte ersetzen. Ferner wird die Masse in der Regel  $m = 1$  gesetzt, so dass – gemäß der *Newton'schen* Bewegungsgleichung  $\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{v}}_i$  – die Kraft direkt der Beschleunigung entspricht.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bei erweiterten Modellen kommen für den physikalischen Kontakt auch wieder „echte“ physikalische Kräfte ins Spiel; diese werden hier aber nicht betrachtet.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

Die Grundgleichungen des sozialen Kräftemodells lauten

$$\dot{\mathbf{v}}_i \equiv \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{f}_i^{\text{free}} + \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij}^{\text{int}} + \sum_k \mathbf{f}_{ik}^{\text{walls}}. \quad (14.9)$$

Die Beschleunigungen bzw. Kräfte setzen sich also zusammen aus

- einer “freien” Triebkraft  $\mathbf{f}_i^{\text{free}}$ , die das Bestreben der Fußgänger widerspiegelt, sein Ziel mit einer bestimmten Wunschgeschwindigkeit zu erreichen,
- durch andere Fußgänger oder lokalisierte Hindernisse (Laternenmasten)  $j$  ausgeübte, in der Regel abstoßende Wechselwirkungs Kräfte  $\mathbf{f}_{ij}^{\text{int}}$ , um Zusammenstöße und zu dichte Begegnungen zu vermeiden, und
- einer ebenfalls abstoßenden, durch ausgedehnte feste Hindernisse  $k$  wie Mauern ausgeübte Kraft  $\mathbf{f}_{ik}^{\text{walls}}$ .

### 14.2.1. Freie Kraft

Die freie Kraft bewirkt, ebenso wie beim Optimal-Velocity-Modell (OVM), eine exponentielle Annäherung an die Wunschgeschwindigkeit:

$$\mathbf{f}_i^{\text{free}} = \frac{\mathbf{v}_{0i} - \mathbf{v}_i}{\tau}. \quad (14.10)$$

Die Geschwindigkeitsanpassungszeit ist von der Größenordnung  $\tau = 1 \text{ s}$ , so dass bei einem Betrag der Wunschgeschwindigkeit von beispielsweise  $|\mathbf{v}_0| = 1.2 \text{ m/s} = 4.32 \text{ km/h}$  der maximale *Betrag* der Beschleunigung durch die freie Kraft  $1.2 \text{ m/s}^2$  beträgt. Die Wunschgeschwindigkeit und die Beschleunigung sind allerdings Vektoren. Die *Richtung*  $\mathbf{e}_i$  der Wunschgeschwindigkeit kann durch die Richtung des kürzesten Weges definiert werden, welche wiederum als Gradient eines **statischen floor fields** definiert werden kann (Abb. 14.4):

$$\mathbf{v}_{0i} = v_{0i} \mathbf{e}_i^{(0)}, \quad \mathbf{e}_i^{(0)} = \nabla \Phi_i^{\text{free}}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \Phi_i^{\text{free}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_i^{\text{free}}(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_i^{\text{free}}(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (14.11)$$

Das *floor field*  $\Phi_i^{\text{free}}(x, y)$  gibt für jeden erlaubten Punkt  $\mathbf{x} = (x, y)$  des Fußgängers  $i$  die Länge des kürzestmöglichen Weges zum Ziel an, also ggf. um Mauern oder andere Hindernisse herum, aber ohne Berücksichtigung anderer Fußgänger. Im Allgemeinen ist dieses *floor field* für jeden Fußgänger unterschiedlich, aber zeitunabhängig, so dass es im Simulator nur einmal bei der Generierung des jeweiligen Fußgängers berechnet werden muss.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

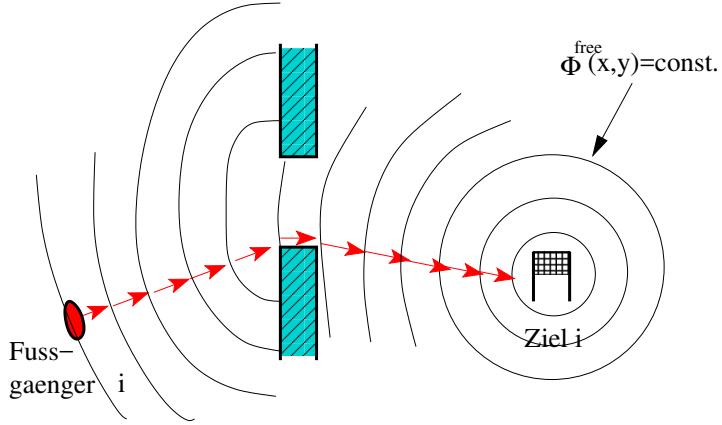


Figure 14.4.: Beispiel eines freien *Floor fields*  $\Phi^{\text{free}}(x,y)$ . Jede Niveaulinie entspricht einer Einheit an Weglängendifferenz des kürzesten Weges. Die Gradienten (rote Pfeile) stehen senkrecht auf den Niveaulinien und haben (da sie die Ortsableitung eines Weglängenfeldes darstellen) die Länge 1, sind also Einheitsvektoren.

### 14.2.2. Wechselwirkungskraft durch andere Fußgänger

Zur mathematischen Modellierung sollten folgende intuitiv plausible Bedingungen erfüllt sein:

1. Da die Fußgänger Zusammenstöße vermeiden wollen, sollte die Kraft abstoßend sein: Je näher, desto abstoßender.<sup>2</sup>
2. Die Kraft hängt von den Geschwindigkeiten und Richtungen beider Fußgänger ab.
3. Fußgänger (und andere Objekte) im Blickfeld, also in Gehrichtung, bewirken eine stärkere Kraft als Fußgänger in anderen Richtungen. Dies macht die Kraft *anisotrop*: Im Gegensatz zu den Newton'schen physikalischen Kräften gilt nicht mehr *actio = reactio*:  $\mathbf{f}_{ij} \neq -\mathbf{f}_{ji}$ .<sup>3</sup>
4. Die Fußgänger antizipieren die eigene Bewegung und die der anderen Fußgänger über einen Anticipations-Zeitraum  $\Delta T$ , in welchem als *Heuristik* (nicht herleitbare Daumenregel) konstante Geschwindigkeiten gleich den bisherigen angenommen werden.<sup>4</sup>

<sup>2</sup>Anziehende Kräfte, welche z.B. zur Gruppenbildung von Bekannten, Familien etc führen, werden hier nicht betrachtet. Ihre Modellierung geht aber analog wie die der abstoßenden Kräfte, nur ist sie schwächer und von längerer Reichweite als die abstoßenden Kräfte.

<sup>3</sup>Diese Annahme ist wichtig, da andernfalls aus dem Mikromodell kein Fundamentaldiagramm hergeleitet werden kann (da die mittlere Geschwindigkeit dann unabhängig von der Dichte immer gleich der Wunschgeschwindigkeit wäre).

<sup>4</sup>Sinnvollerweise setzt man den Update-Zeitschritt der numerischen Integration des Modells ebenfalls gleich  $\Delta T$ .

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

Mit diesen Annahmen haben die Wechselwirkungskräfte folgende mathematische Grundstruktur:

$$\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; \Delta t) \quad (14.12)$$

mit zunächst einem Parameter  $\Delta t$ .

Prinzipiell kann diese Kraft sowohl von anderen bewegten Objekten (Fußgänger, aber auch Autos usw.) als auch von lokalisierten festen Hindernissen wie Laternenmasten ausgehen. Bei *ausgedehnten* Hindernissen wie Mauern und anderen ausgedehnten festen Objekten ist diese Beschreibung allerdings weniger sinnvoll, da dann der Ort  $\mathbf{x}_j$  nicht eingegrenzt werden kann. Für diese Objekte ist die in Abschnitt 14.2.3 dargestellte mathematische Beschreibung sinnvoller. Fußgänger und lokalisierte feste Hindernisse werden im Folgenden durch ein Objekt an der Position  $\mathbf{x}_j$  mit ggf. der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_j$  dargestellt.

Man beachte, dass diese Grundform eine gewisse Nichttrivialität aufweist, da sie zwei Funktionen (die beiden Komponenten von  $\mathbf{f}_{ij}$ ) mit je acht unabhängigen Variablen (je zwei Komponenten der vier Vektor-Argumente) beinhaltet. Deshalb macht man in der Regel weitere vereinfachende Annahmen:

- **Translationsinvarianz:** Die Kräfte hängen bei gegebenen Geschwindigkeiten nur von den *Abständen*  $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  ab. Zur Herleitung eines konkreten Modells kann man also ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\mathbf{x}_j = 0$  setzen, was vieles übersichtlicher macht.
- **Galilei-Invarianz:** Abgesehen von der Blickwinkelabhängigkeit hängen die Kräfte nur von den *Differenzgeschwindigkeiten*  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$  ab.<sup>5</sup>
- Ohne Berücksichtigung der Blickwinkelabhängigkeit lässt sich die soziale Kraft als Gradient eines geschwindigkeitsabhängigen **Interaktionspotentials** schreiben.
- Die Blickwinkelabhängigkeit geht als einfacher multiplikativer skalarer Faktor ein, ändert also nur die Stärke der Kräfte, dreht aber nicht die Richtung.

Mit diesen Annahmen vereinfacht sich die mathematische Form der Wechselwirkungskraft zu

$$\mathbf{f}_{ij} = w(\phi_{ij}) \mathbf{f}_{ij}^{\text{pot}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = -w(\phi_{ij}) \nabla_{\mathbf{x}_i} \Phi^{\text{int}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \quad (14.13)$$

bzw., wenn man für das Wechselwirkungspotential  $\Phi^{\text{int}}$  ein Koordinatensystem mit dem die Kraft ausübenden Fußgänger/Objekt  $j$  im Ursprung wählt ( $\mathbf{x}_j = 0$ ,  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}_i} \rightarrow \nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ ):

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \Phi^{\text{int}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \rightarrow \nabla \Phi^{\text{int}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j). \quad (14.14)$$

Man muss nun also nur noch eine einfache Richtungsabhängigkeit  $w(\phi)$  sowie ein Skalarfeld  $\Phi^{\text{int}}(\mathbf{x}) = \Phi^{\text{int}}(x, y)$  in Abhängigkeit der Position des betrachteten Fußgängers (bzw. des Abstandes dieses Fußgängers vom Fußgänger  $j$ ) und der Geschwindigkeitsdifferenz  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$  spezifizieren.

---

<sup>5</sup>Die freie Kraft bricht allerdings diese Galilei-Invarianz, da sie eine Bezugsgeschwindigkeit definiert: Fußgänger können/wollen einfach nicht beliebig schnell laufen.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

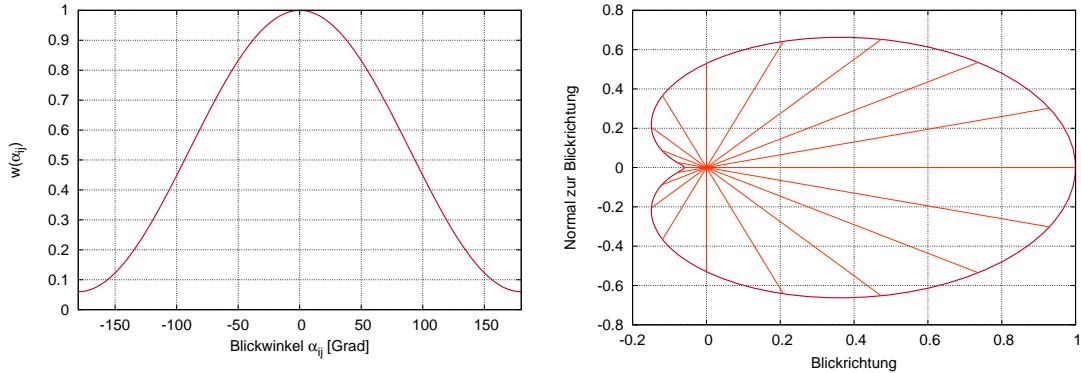


Figure 14.5.: Blickrichtungsabhängigkeit. Links: die Funktion  $w(\phi)$  für  $\lambda = 0.06$ ; rechts: Veranschaulichung der Stärke in Polarkoordinaten für in positive  $x$ -Richtung laufende Fußgänger.

### Richtungsabhängigkeit

Die Richtungs- bzw. Blickwinkelabhängigkeit beschreibt die offensichtliche (im wahrsten Sinne des Wortes) Tatsache, dass die Reaktion maximal ist für Objekte in der aktuellen Gehrichtung, welche durch den Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|} \quad (14.15)$$

definiert ist. Gibt es hingegen einen endlichen Winkel  $\phi_{ij}$  zwischen der Gehrichtung und dem die soziale Kraft ausübenden Objekt  $j$  (Fußgänger oder Hindernis),

$$\cos \phi_{ij} = -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{ij}, \quad \mathbf{e}_{ij} = \frac{\mathbf{d}_{ij}}{|\mathbf{d}_{ij}|} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad (14.16)$$

also ist der Abstandsvektor  $\mathbf{d}_{ij}$  nicht parallel zur Gehrichtung von Fußgänger  $i$ , wird diese Kraft schwächer. Eine häufig verwendete Spezifikation ist (vgl. Abb. 14.5)

$$w(\phi_{ij}) = \lambda + (1 - \lambda) \left( \frac{1 + \cos \phi_{ij}}{2} \right) \quad (14.17)$$

mit dem Blickwinkelparameter  $\lambda \in [0, 1]$ : Ein Wert  $\lambda = 1$  bedeutet keine Blickwinkelabhängigkeit, während  $\lambda = 0$  maximale Abhängigkeit beschreibt. Im letzteren Fall werden Objekte im Rücken vollständig ignoriert. Will man einen “Tunnelblick” modellieren, “fokussiert” man die Winkelabhängigkeit stärker auf die Vorwärtsrichtung, beispielsweise durch

$$w^{\text{tunnel}}(\phi_{ij}) = (w(\phi_{ij}))^\gamma \quad (14.18)$$

mit (ggf monoton mit der Geschwindigkeit steigenden) Exponenten  $\gamma > 1$ .

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

### Wechselwirkungspotential

Im Bild des Wechselwirkungspotentials, auch **dynamisches Floor Field** genannt, steht der betrachtete Fußgänger  $j$  auf der Spitze eines “Hügels” mit dem Höhenprofil  $\Phi^{\text{int}}(\mathbf{x})$ . Das Argument  $\mathbf{x}$  des Potentialfeldes beschreibt dabei die möglichen Positionen des Fußgängers  $i$ . In diesem Bild ist die soziale Kraft  $-\nabla\Phi^{\text{int}}(\mathbf{x})$  eine “Hangabtriebskraft”. Insbesondere weist sie immer vom Fußgänger  $j$  weg, wirkt also abstoßend. Bewegen sich die Fußgänger relativ zueinander ( $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ ), ist für den betrachteten Fußgänger  $i$  jedoch nicht nur die aktuelle Position  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j = 0$  des interagierenden Fußgängers “verboten”, sondern auch alle Positionen, welche innerhalb des Zeithorizonts  $\Delta t$  unter Annahme konstanter Geschwindigkeiten zu einer Kollision führen würden:

- Am Anfang des Zeithorizonts führt  $\mathbf{x} = 0$  (bzw.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$ ) zu einer Kollision,
- am Ende des Zeithorizonts gibt es eine Kollision, wenn die anfängliche Position  $\mathbf{x} = -\Delta\mathbf{d}_{ij}$ , wobei

$$\Delta\mathbf{d}_{ij} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)\Delta t, \quad (14.19)$$

- zu Zeiten innerhalb des Zeithorizonts führt eine Position auf der durch die Endpunkte  $\mathbf{x} = (0, 0)$  und  $\mathbf{x} = -\Delta\mathbf{d}_{ij}$  (bzw.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j$  und  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j - \Delta\mathbf{d}_{ij}$ ) definierten **Kollisionsgeraden** zu einer unliebsamen Berührungen.

Das Interaktionspotential muss also auf dieser Kollisionsgeraden maximal sein. Eine Möglichkeit ist es, die Äquipotentiallinien (“Höhenlinien”) des Potentials durch Ellipsen mit den Brennpunkten bei  $(0, 0)$  und  $-\Delta\mathbf{d}_{ij}$  und variablen Halbachsen  $b$  zu definieren (vgl. Abb. 14.6), so dass nur noch die Halbachse  $b$  der jeweiligen Ellipse das Potential bestimmt, beispielsweise durch die exponentielle Abhängigkeit

$$\Phi^{\text{int}}(\mathbf{x}) = AB \exp\left(\frac{-b(\mathbf{x})}{B}\right). \quad (14.20)$$

Die Parameter lassen sich wie folgt interpretieren:

- $A$  gibt die Größenordnung der maximalen Beschleunigung an, welche dieses Potential bewirkt (dies wird später gezeigt). Typische Werte liegen um  $A = 1 \text{ m/s}^2$ .
- $B$  gibt die Reichweite der Wechselwirkung mit typischen Werten  $B = 1 \text{ m}$  an.

Um Frontalkollisionen (insbesondere mit Mauern) und ein “Durchgleiten” zu vermeiden,<sup>6</sup> muss das Potential auf der Kollisionsgeraden höher sein als die “kinetische Energie”  $\frac{1}{2}v_0^2$  der Fußgänger bei ihrer Wunschgeschwindigkeit:

$$AB > \frac{1}{2}v_0^2 \quad (14.21)$$

Bildlich gesprochen, muss der “Potentialwall” des Fußgängers (oder Hindernisses)  $j$  hoch genug sein, dass ein mit voller Geschwindigkeit  $v_0$  sich nähерnder antriebsloser Fußgänger  $i$  nicht die maximale Höhe, also den Fußgänger  $j$ , erreichen kann. Die die Höhenlinien

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

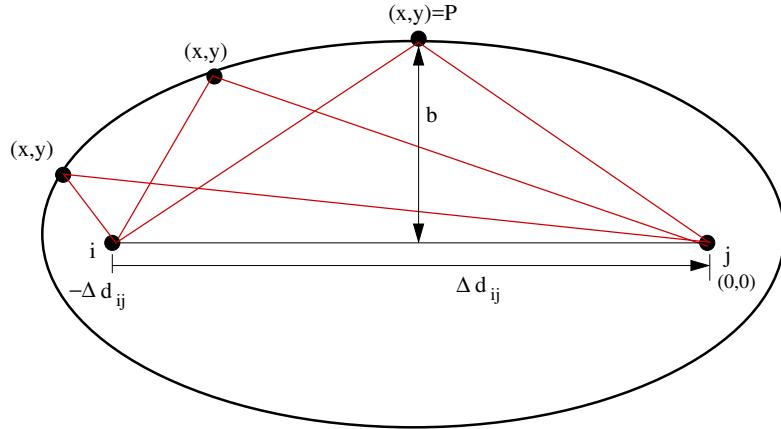


Figure 14.6.: Zur Definition der ellipsenförmigen Äquipotentiallinien des Interaktionspotentials.

definierende Funktion  $b(\mathbf{x})$  lässt sich direkt aus der *geometrischen Definition* der Ellipse herleiten (vgl. Abb. 14.6):

*Eine Ellipse mit den Brennpunkten bei  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  ist der geometrische Ort der Umlenkpunkte eines gespannten Fadens der Länge  $L > |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ , welcher in den Brennpunkten fixiert ist.*

Gemäß der Abbildung gilt also für jeden Punkt  $\mathbf{x}$  auf der Ellipse (der Abstand werde mit  $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  bezeichnet):  $d(\mathbf{0}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{J}) = L$  oder

$$|\mathbf{x}| + |\mathbf{x} + \Delta\mathbf{d}_{ij}| = L = \text{const.} \quad (14.22)$$

Dies gilt insbesondere auch für die beiden Punkte  $P$ , welche zu beiden Brennpunkten den gleichen Abstand haben (einer ist gezeichnet). Dies erlaubt, die Fadenlänge  $L$  in Abhängigkeit der kleinen Halbachse  $b$  festzulegen:

$$2\sqrt{b^2 + \left(\frac{\Delta\mathbf{x}_{12}}{2}\right)^2} = L$$

Setzt man dies in (14.22) ein, ergibt sich

$$|\mathbf{x}| + |\mathbf{x} + \Delta\mathbf{d}_{ij}| = \sqrt{4b^2 + \Delta\mathbf{x}_{12}^2}. \quad (14.23)$$

Löst man diesen Ausdruck nach  $b$  auf und setzt ihn in (14.20) ein, ergibt sich folgender expliziter Ausdruck für das Interaktionspotential eines im Ursprung stehenden Fußgängers

---

<sup>6</sup>Fußgänger sind schließlich keine Gespenster.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

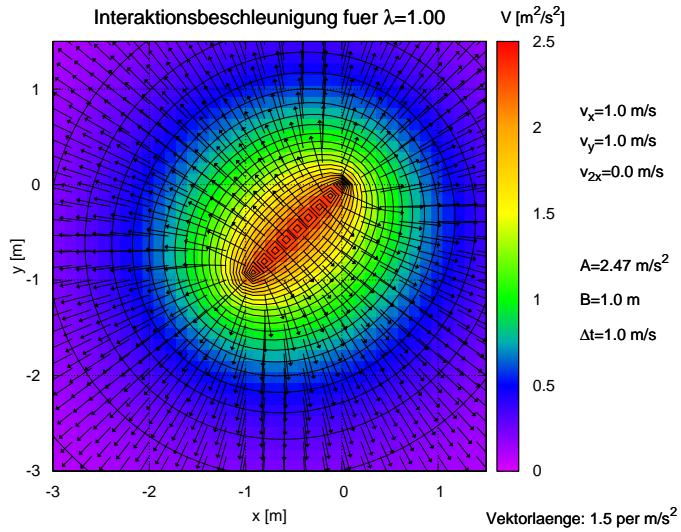


Figure 14.7.: Potential  $\Phi^{\text{int}}(x, y)$  (Niveaulinien und Farbcodierung) und abgeleitete soziale Kraft  $f_{ij}^{\text{pot}}$  (Pfeile), welche von einem Fußgänger  $j$  an der Stelle  $\mathbf{x}_j = (0, 0)$  auf einen Fußgäger  $i$  am Ort  $\mathbf{x}_i = (x, y)$  bei einer Geschwindigkeitsdifferenz  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = (0.7, 0.7) \text{ m/s}$  wirkt. Die Blickwinkelabhängigkeit  $w(\phi_{ij})$  wurde hier nicht berücksichtigt.

oder lokalisierten Hindernisses an der Stelle  $\mathbf{x}$  (für andere Positionen wird einfach  $\mathbf{x}$  durch  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_j$  ersetzt):

$$\Phi^{\text{int}}(\mathbf{x}) = AB \exp\left(\frac{-b(\mathbf{x})}{B}\right), \quad b(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sqrt{(|\mathbf{x}| + |\mathbf{x} + \Delta\mathbf{d}_{ij}|)^2 - |\Delta\mathbf{d}_{ij}|^2} \quad (14.24)$$

Abbildung 14.7 zeigt die Höhenlinien des Potentials  $\Phi^{\text{int}}(\mathbf{x})$  für die angegebenen Parameterwerte und Geschwindigkeiten. Man sieht, dass das ‘‘Gefälle’’ der Potentialfläche immer steiler und die Abstoßungskraft (Pfeile) immer größer werden, je näher man sich der *Kollisionsgeraden* nähert.

Neben der hier vorgestellten galilei-invarianten elliptischen Spezifikation (14.19) für den Brennpunktabstand,  $\Delta\mathbf{d}_{ij} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)\Delta t$ , sind auch andere Spezifikationen gebräuchlich:

- einfache elliptische Spezifikation (das ‘‘Original’’):  $\Delta\mathbf{d}_{ij} = -\mathbf{v}_j\Delta t$ ,
- isotrope (Kreis-)Spezifikation:  $\Delta\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{0}$ .

Diese beiden Spezifikationen schneiden aber in Kalibrierungs- und Validierungsstudien schlechter ab und sind auch logisch nicht plausibel: Beispielsweise ergibt es schon Sinn, zu unterscheiden, ob ich 1 m vor einer Wand stehe oder darauf mit 2 m/s zulaufe. Nur die galilei-invariante Spezifikation (14.19) berücksichtigt dies.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

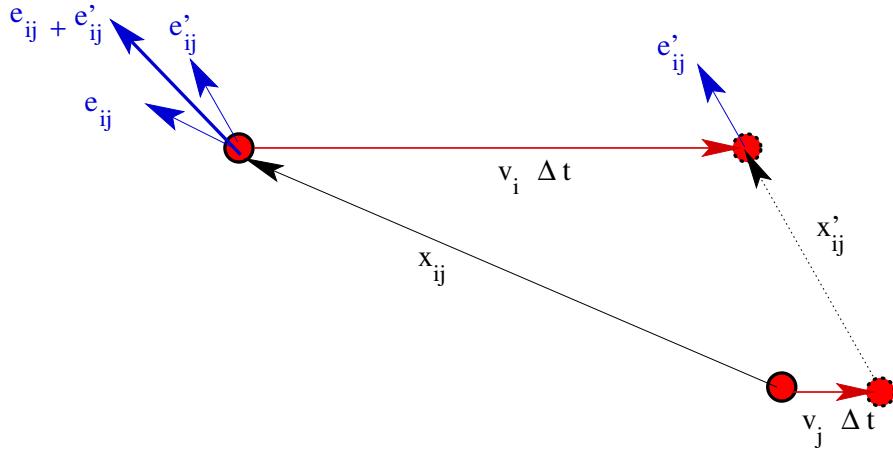


Figure 14.8.: Die Richtung der Wechselwirkungskraft ist durch das Mittel der Abstands-Einheitsvektoren zur aktuellen Zeit und am Ende des rognosehorizonts gegeben.

### Aus dem Potential abgeleitete Wechselwirkungskraft

Abgesehen von der Blickrichtungsabhängigkeit ergibt sich die Interaktionskraft durch die negative Ableitung ("Gradient") des Interaktionspotentials:

$$f_{ij}^{\text{pot}}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi^{\text{int}}(\mathbf{x}) = A \exp\left(\frac{-b(\mathbf{x})}{B}\right) \nabla b(\mathbf{x}).$$

Um den Gradienten der Skalarfunktion  $b(\mathbf{x})$  zu bilden, berücksichtigt man, dass die Ableitung eines Betrages den jeweiligen Richtungs-Einheitsvektor ergibt:

$$\nabla |\mathbf{x} + \mathbf{a}| = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{a}}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} = e_{\mathbf{x}+\mathbf{a}}.$$

für beliebige konstante Vektoren  $\mathbf{a}$ . Damit

$$\begin{aligned} \nabla b(\mathbf{x}) &= \frac{|\mathbf{x}| + |\mathbf{x} + \Delta \mathbf{d}_{ij}|}{4b} (e_{\mathbf{x}} + e_{\mathbf{x} + \Delta \mathbf{d}_{ij}}) \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4 + \left(\frac{\Delta \mathbf{d}_{ij}}{b}\right)^2} (e_{\mathbf{x}} + e_{\mathbf{x} + \Delta \mathbf{d}_{ij}}) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde (14.23) berücksichtigt.

Ersetzt man nun die Position  $\mathbf{x}$  des Fußgängers  $i$  bezüglich des im Ursprung stehenden Fußgängers  $j$  wieder durch den allgemeinen Ausdruck  $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ , ergibt sich die aus dem Potential abgeleitete (blickrichtungsunabhängige) Wechselwirkungskraft zu

$$f_{ij}^{\text{pot}} = A \exp\left(\frac{-b(\mathbf{d}_{ij})}{B}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \mathbf{d}_{ij}}{4b(\mathbf{d}_{ij})}\right)^2} \left(\frac{e_{ij} + e'_{ij}}{2}\right). \quad (14.25)$$

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

mit

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{\mathbf{d}_{ij}}{|\mathbf{d}_{ij}|} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \quad \mathbf{e}'_{ij} = \frac{\mathbf{d}_{ij} + \Delta\mathbf{d}_{ij}}{|\mathbf{d}_{ij} + \Delta\mathbf{d}_{ij}|}, \quad \Delta\mathbf{d}_{ij} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)\Delta t. \quad (14.26)$$

Die drei Parameter dieser Kraft sind  $A$ ,  $B$  und  $\Delta t$ . Man kann die Formel anschaulich interpretieren (vgl. Abb. 14.7):

- Falls beide Fußgänger stehen oder in die gleiche Richtung mit gleicher Geschwindigkeit laufen ( $\Delta\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{0}$ ,  $b(\mathbf{d}_{ij}) = |\mathbf{d}_{ij}|$ , die Wurzel ist gleich eins), ist der Betrag der maximale Beschleunigung gleich dem Parameter  $A$  und die Richtung  $\mathbf{e}_{ij}$  ist parallel zum Abstandsvektor  $\mathbf{d}_{ij}$ , also zentral abstoßend. Die Beschleunigung nimmt exponentiell mit dem Abstand ab, nach jeweils einer Abstandsänderung  $B$  auf  $1/e$ -tel.
- Falls die Differenzgeschwindigkeit und damit  $\Delta\mathbf{d}_{ij}$  ungleich null sind, werden die Verhältnisse für den *Betrag* komplizierter, da nun  $b$  nicht mehr gleich dem Abstand ist. Außer für sehr kleine Abstände zur Kollisionsgeraden ( $b \ll |\Delta\mathbf{d}_{ij}|$ ), bei welchem die Kraft aufgrund des Wurzelausdrucks stark ansteigt, ändert sich jedoch nicht viel.
- Die *Richtung* der Wechselwirkungsgrad wird im allgemeinen Fall durch das *arithmetische Mittel* des Abstands-Einheitsvektors zur aktuellen Zeit und des entsprechenden Einheitsvektors am Ende des Ereignishorizonts bestimmt (vgl. Abb. 14.8).

Es sei darauf hingewiesen, dass (14.25) nur den Potentialanteil der Wechselwirkungskraft darstellt. Zu diesem muss noch gemäß (14.13) die Winkelabhängigkeit  $w(\phi_{ij}) = \lambda + (1 - \lambda)/2 (1 - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{ij})$  mit einem vierten Parameter  $\lambda$  hinzumultipliziert (Abb. 14.9) und die freie Kraft mit den Parametern  $\tau$  und  $v_0$  hinzugefügt werden (Abb. 14.10).

### 14.2.3. Wechselwirkungskraft durch feste Hindernisse

Im Prinzip kann man feste Hindernisse (engl. *obstacles*) wie stehende Fußgänger modellieren. Für nahezu “punktähnliche” Hindernisse wie Bäume, Pfosten, Säulen, Laternenmasten usw. ist dies in der Tat die einfachste Möglichkeit. Problematisch wird dies allerdings im Fall von ausgedehnten Hindernissen wie Mauern, Wegbegrenzungen usw: Ersetzt man diese etwa durch eine Reihe von entlang der Begrenzung “Spalier stehende” Fußgänger? Das wäre sehr umständlich, rechenaufwändig und würde außerdem die von der Wand ausgehenden sozialen Kräfte übertreiben. Besser ist es, ausgedehnte Hindernisse durch ein statisches **globales floor field** zu beschreiben:

$$\Phi^{\text{obs}}(\mathbf{x}) = AB \exp\left(\frac{-s(\mathbf{x})}{B}\right), \quad s(\mathbf{x}) = \min_k |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|. \quad (14.27)$$

Die Ellipsen-Halbachse  $b(\mathbf{x})$  wird also durch den minimalen Abstand  $s(\mathbf{x})$  der Position  $\mathbf{x}$  zu irgendeinem der ausgedehnten Hindernisse  $k$  ersetzt.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

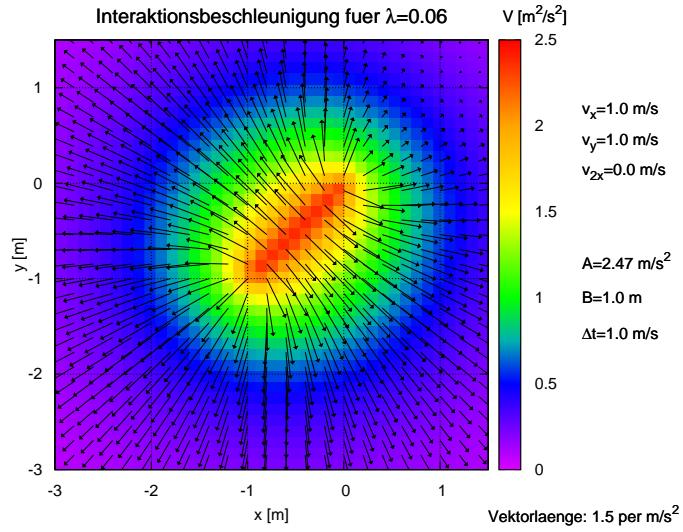


Figure 14.9.: Wechselwirkungskraft  $f_{ij}$  (Pfeile) einschließlich der Blickwinkelabhängigkeit für die Situation der Abbildung 14.7.

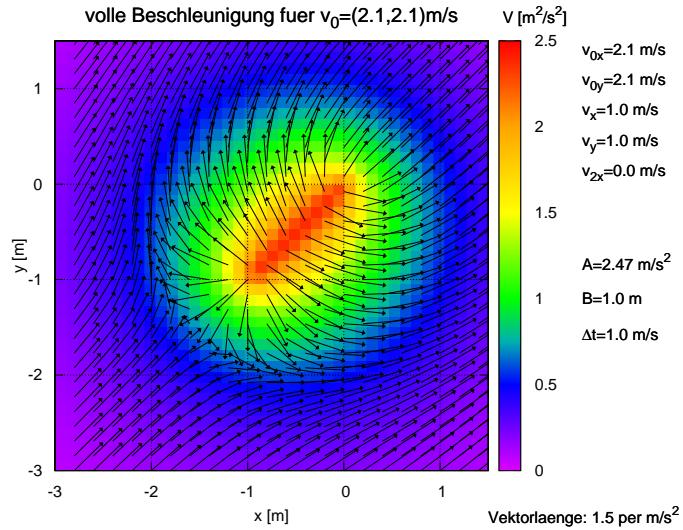


Figure 14.10.: Volle soziale Kraft  $\dot{v}_i = f_i^{\text{free}} + f_{ij}^{\text{int}}$  einschließlich der freien Kraft bei einer Wunschgeschwindigkeit  $v_{0i} = 1.5 \text{ m/s}$   $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  für die Situation der Abbildung 14.9.

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

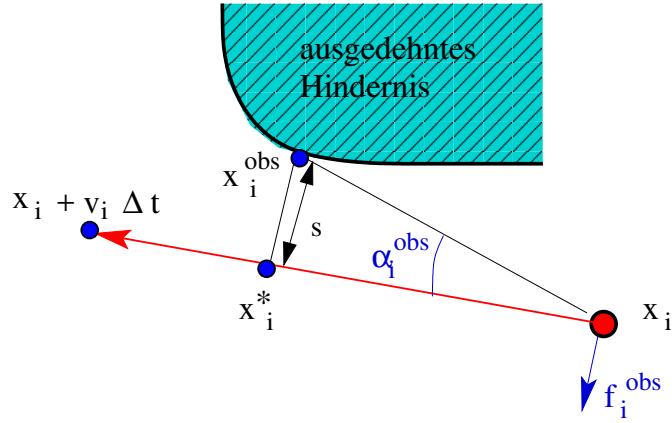


Figure 14.11.: Zur Definition der von Hindernissen ausgehende soziale Kraft.

Dieses globale *floor field* ist zeitunabhängig und für alle Fußgänger dasselbe, so dass es einmalig beim Start der Simulation berechnet werden kann. Es definiert nicht mehr und nicht weniger als den Rahmen der Simulation, d.h. die Bereiche, in denen Fußgänger überhaupt laufen können.

Um, in Analogie zu den Wechselwirkungen zwischen Fußgängern, auch die Eigengeschwindigkeit der Fußgänger bzw. einen Anticipations-Zeithorizont  $\Delta t$  zu berücksichtigen, darf man allerdings die soziale Kraft nicht einfach durch den Gradienten am aktuellen Ort  $x_i$  der Fußgänger berechnen. Vielmehr ist es sinnvoll, den Ort  $x_i^*$  mit dem kleinsten positiven Abstand  $s$  zu wählen, welcher während des Zeithorizonts bei konstanter Geschwindigkeit erreicht werden würde (vgl. Abb. 14.11). Diese Kraft wird ferner mit der üblichen Blickrichtungsabhängigkeit multipliziert:

$$f_i^{\text{obs}} = -w(\phi_i^{\text{obs}}) \nabla \Phi^{\text{obs}}(x_i^*). \quad (14.28)$$

Der Ort des minimalen Abstandes (vgl. Abb. 14.11) ist gegeben durch

$$x_i^* = x_i + \lambda v_i \Delta t, \quad \lambda = \arg \min_{\lambda \in [0,1]} s(x_i + \lambda v_i \Delta t). \quad (14.29)$$

Der Blickwinkel  $\phi_i^{\text{obs}}$  gibt den Winkel zwischen der Gehrichtung und dem Abstandsvektor von der aktuellen Fußgängerposition zum nächsten Punkt  $x_i^{\text{obs}}$  der Hindernisse (von  $x_i^*$  aus gesehen) an, vgl. wieder die Abb. 14.11:

$$\cos \phi_i^{\text{obs}} = -e_i \cdot e_i^{\text{obs}}, \quad e_i^{\text{obs}} = \frac{x_i - x_i^{\text{obs}}}{|x_i - x_i^{\text{obs}}|}. \quad (14.30)$$

Würde man diese Rechenvorschrift auch für punktförmige Hindernisse anwenden, bekäme man im wesentlichen die Ellipsendefinition (14.13) der von einem stehenden Fußgänger an dieser Stelle ausgehenden sozialen Interaktionskraft. Während man dann besser direkt

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

die Ellipsendefinition anwendet, zeigt dieser Grenzfall doch, dass obige Definition für ausgedehnte Hindernisse konsistent mit der Fußgänger-Fußgänger-Interaktionskraft (14.13) ist, gleichzeitig aber das Problem jener Kraftdefinition (Spalier stehende virtuelle Fußgänger sind notwendig) vermeidet.

### 14.2.4. Modellparameter und Fundamentaldiagramm

Das volle Modell hat nur sechs Modellparameter (vgl. Tabelle 14.1). Dieser Parametersatz enthält bemerkenswerterweise keine maximale Dichte  $\rho_{\max}$  oder einen der mikroskopischen Beschreibung entsprechenden minimalen Abstand. Um die im Modell enthaltene *implizite* maximale Dichte abzuschätzen, leiten wir nun das *Fundamentaldiagramm* der Fußgänger unter der vereinfachenden Annahme von im “Gänsemarsch” in einer langen Schlange gehenden Fußgänger her. Wie immer gilt im Fließgleichgewicht  $\frac{dv}{dt} = 0$ ,  $v_i - v_j = 0$ . Ohne Einschränkung laufe die Schlange in  $x$ -Richtung, so dass  $v_i = v_i e_x = \text{const.}$  und  $|d_{ij}| = s = \text{const.}$  Mit  $f_{ij} = |\mathbf{f}_{ij}|$  usw. lautet damit die  $x$ -Komponente des *social-force-Modells* für einen Fußgänger  $i$  in der Mitte der Schlange mit hinreichend vielen Fußgängern vor ihm (Index  $l$ , Kraft in negativer  $x$ -Richtung) und hinter ihm (Index  $m$ , Kraft in positiver  $x$ -Richtung):

$$\begin{aligned}\frac{dv_i}{dt} &= \frac{v_0 - v_i}{\tau} + \sum_{l=1}^{\infty} f_{il} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{im} \\ &= \frac{v_0 - v_i}{\tau} + \lambda \left( - \sum_{l=1}^{\infty} A e^{-ls/B} + \sum_{m=1}^{\infty} A e^{-ms/B} \right) + (1 - \lambda) \left( - \sum_{l=1}^{\infty} A e^{-ls/B} + 0 \right) \\ &= \frac{v_0 - v_i}{\tau} - A(1 - \lambda) \sum_{l=1}^{\infty} e^{-ls/B} \\ &= \frac{v_0 - v_i}{\tau} - A(1 - \lambda) \left( \sum_{l=0}^{\infty} e^{-ls/B} - 1 \right) \\ &= \frac{v_0 - v_i}{\tau} - A(1 - \lambda) \left( \frac{1}{1 - e^{-s/B}} - 1 \right).\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde die geometrische Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1/(1 - q)$  für  $|q| < 1$  ausgenutzt. Damit ergibt sich die *steady-state* (Fließgleichgewichts-) Abstands-Geschwindigkeitsrelation (das “mikroskopisches Fundamentaldiagramm”) zu

$$v_e(s) = v_0 - \tau A(1 - \lambda) \left( \frac{e^{-s/B}}{1 - e^{-s/B}} \right). \quad (14.31)$$

Mit Abschirmung, wenn man also wie im Autoverkehr nur die nächsten Nachbarn (NN) berücksichtigt, erhält man den ähnlichen Ausdruck

$$v_e^{\text{NN}}(s) = v_0 - \tau A(1 - \lambda) e^{-s/B}, \quad (14.32)$$

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

Parameter	Fuß-gänger	Marathon-läufer
Wunschgeschwindigkeit $v_0$	1.2 m/s	3 m/s
Anpassungszeit $\tau$	1 s	1.5 s
Stärke der Interaktionskraft $A$	$1 \text{ m/s}^2$	$2 \text{ m/s}^2$
$1/e$ -Reichweite der Interaktionskraft $B$	1 m	2 m
Anticipations-Zeithorizont (Zeitschrittweite) $\Delta t$	1 s	2 s
Symmetriefaktor $\lambda$	0.06	0.03

Table 14.1.: Parameter des *Social-Force* Modells für Fußgänger.

also den allgemeinen Ausdruck ohne den Nenner. Die Umkehrfunktion, also ein Gleichgewichtsabstand  $s_e(v)$  bei gegebener Geschwindigkeit der ‘‘Gänsemarsch-Kolonne’’, ist in den Abbildung 14.12 an der Stelle, bei der die Pfeile verschwinden.

Offensichtlich stellt sich für  $\lambda < 1$  eine Steady-State-Geschwindigkeit  $v_e = 0$  bei einem gewissen Abstand  $s_0$  ein, der die maximale 1D-Dichte definiert:<sup>7</sup>  $\rho_{\max}^{1D} = 1/s_0$ . Einsetzen in das Fundamentaldiagramm (14.31) und Nullsetzen liefert die Bedingung

$$A = \frac{v_0}{\tau(1-\lambda)} \left( \frac{1 - e^{-s_0/B}}{e^{-s_0/B}} \right)$$

und damit das Fundamentaldiagramm in Abhängigkeit von  $s_0$  anstelle von  $A$ :

$$v_e(s) = v_0 \left[ 1 - e^{-(s-s_0)/B} \left( \frac{1 - e^{-s_0/B}}{1 - e^{-s/B}} \right) \right]. \quad (14.33)$$

Für das Nächste-Nachbarn Fundamentaldiagramm lauten die Relation zwischen der Stärke  $A$ , der Wunschgeschwindigkeit  $v_0$  und dem Mindestabstand  $s_0$  sowie das Fundamentaldiagramm selbst als Funktion von  $s_0$ :

$$A = \frac{v_0}{\tau(1-\lambda)} e^{s_0/B}, \quad v_e^{\text{NN}}(s) = v_0 \left[ 1 - e^{-(s-s_0)/B} \right]. \quad (14.34)$$

All dies gilt, wie gesagt, für eine einzelne Schlange von im Gänsemarsch gehenden Fußgängern. Nimmt man nun mehrere solcher Schlangen im seitlichen Abstand  $s_0$  an, die nicht mit den jeweils anderen Schlangen wechselwirken,<sup>8</sup> setzt also

$$\rho = \frac{1}{ss_0}, \quad \rho_{\max} = \frac{1}{s_0^2}$$

ergibt dies das makroskopische Fundamentaldiagramm (vgl. Abb. 14.13)

<sup>7</sup>In erweiterten Modellen würden dann physikalische und nicht nur soziale Kräfte aktiv werden. Das reine *social force* Modell erlaubt jedoch auch Abstände  $s = 0$ .

<sup>8</sup>Das *social force* Modell beschreibt eine geringe,  $v_e$  reduzierende Wechselwirkung für diesen Fall

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

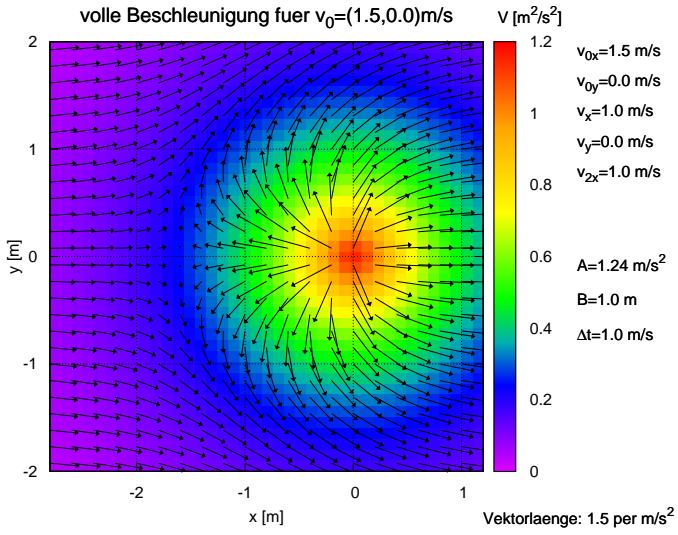


Figure 14.12.: Zur Herleitung des Fundamentaldiagramms: Volle soziale Kraft bei einer Geschwindigkeit  $v_i = (1, 0)$  m/s, einer Wunschgeschwindigkeit  $v_{0i} = (1.5, 0)$  m/s sowie einer Differenzgeschwindigkeit  $v_i - v_j$  gleich null. Der Gleichgewichtsabstand  $s_e$  ist dort, wo die Kraftpfeile verschwinden, also hier bei etwa  $s_e = 1.6$  m.

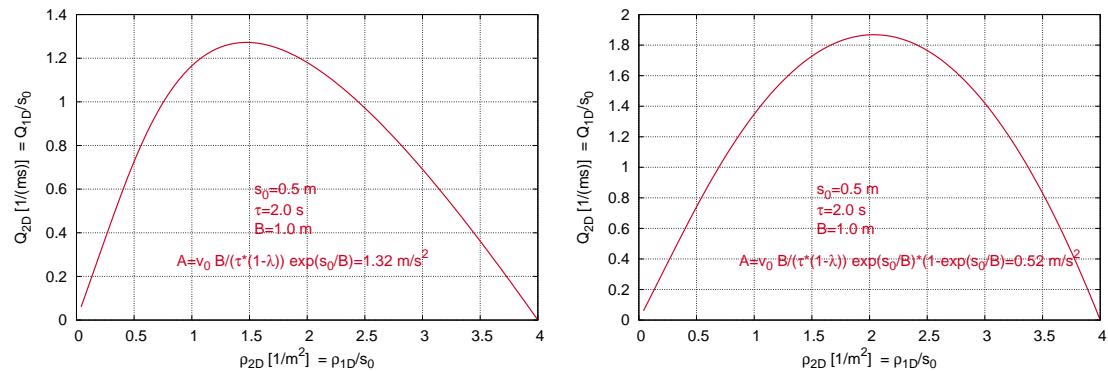


Figure 14.13.: Genähertes Fundamentaldiagramm (14.35) des *sozialen Kräftemodells* bei nächster-Nachbarn Wechselwirkungen (links) und das auf (14.33) basierende Fundamentaldiagramm bei voller Wechselwirkung (rechts).

## 14. Verkehrsflussmodellierung von Fußgänger

$$v_e^{\text{NN}}(\rho) = v_0 \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\sqrt{\rho_{\max}}}{B} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}} \right) \right] \right\}, \quad Q_e(\rho) = \rho V_e(\rho). \quad (14.35)$$

Bemerkenswerterweise ist dies genau das von *Weidmann* vorgeschlagene gefittete Fundamentaldiagramm (und zwar wurde es *vor* der Formulierung des *social force* Modells vorgeschlagen):

$$v_e^{\text{Weidmann}}(\rho) = 1.34 \text{ m/s} \left\{ 1 - \exp \left[ -1.913 \text{ m}^{-2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{5.4 \text{ m}^{-2}} \right) \right] \right\}. \quad (14.36)$$

Neben der Stärke  $A$  der Kraft, welche mit der maximale Dichte in Relation steht, ist auch die Reichweite  $B$  nicht völlig unabhängig, da sie, wie bereits erwähnt, die “Unfallfreiheits-Bedingung”  $(1 - \lambda)AB > v_0^2/2$  erfüllen muss. Da bei Fußgängern Kollisionen nicht so tragisch sind, ist üblicherweise diese Bedingung nahezu als Gleichung erfüllt und das *social force* Modell funktioniert für einen ganzen Bereich von Werten  $B$  mit  $AB = \text{const.}$  sehr gut.

### Aufgabe: Koeffizientenvergleich

Identifizieren Sie die Parameter  $v_0$ ,  $\rho_{\max}$  bzw.  $s_0^{-2}$  und  $B$  in der Formel von Weidmann. Kann man Aussagen über den Symmetrieparameter  $\lambda$  treffen?

Lösung:  $v_0 = 1.34 \text{ m/s}$ ,  $\rho_{\max} = 5.4 \text{ m}^{-2}$ ,  $B = 1.21 \text{ m}$ .

# **Part III.**

## **Anwendungen der Verkehrsmodellierung**

# 15. Allgemeines

*Das Entscheidende am Wissen ist, daß man es beherzigt und anwendet.*

Konfuzius

In diesem Kapitel werden vier Anwendungsgebiete von Verkehrsflussmodellen vorgestellt.

Im Abschnitt 16 wird die Analyse und Kurzfrist-Prognose des Verkehrszustandes aus unvollständigen Informationen anhand der allgemeinen makroskopischen Staudynamik vorgestellt. Dies erlaubt nicht nur zeitnahe Verkehrsinformationen ("Staubericht"), sondern auch detailliertere Informationen über die Art des Staus (z.B. "Stop-and-Go", "Staustufe Gelb" oder "Staustufe Rot"), einschließlich einer Abschätzung der für die Staudurchfahrt zu veranschlagenden Reisezeit. Umfragen ergaben, dass für die meisten Fahrer die erwartete Reisezeit viel wichtiger als die bisher meist angegebene Staulänge ist.

Abschnitt 18 zeigt, wie man den vom Verkehrszustand abhängigen Gesamtverbrauch an Treibstoff sowie die Emissionen auf bestimmten Streckenabschnitten innerhalb bestimmter Zeitintervall bestimmen kann. Im Gegensatz zur Zustandsanalyse und Kurzzeitprognose kommen dabei vor allem Mikromodelle zum Einsatz. Trotz der großen wirtschaftlichen und politischen Bedeutung wurde dieses Thema bislang eher am Rande behandelt.

Im Abschnitt 19 werden verschiedene Möglichkeiten der Steigerung des Verkehrsflusses und der Reduzierung von Staus vorgestellt und gezeigt, wie man die oft kontrovers diskutierte Effektivität der verschiedenen **Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen** und **Verkehrsleitsysteme** modellgestützt untersuchen kann. Der Schwerpunkt liegt hier auf kleinen Orts- und Zeitskalen, bei der die Infrastruktur sowie die Verkehrsnachfrage vorgegeben ist. Optimierung auf größeren Skalen, z.B. die Steuerung der Verkehrsströme durch Wechselwegweisung oder Auswirkungen zusätzlicher Straßen, werden im Rahmen des Fachgebietes "Verkehrsplanung" untersucht. Dies ist jedoch nicht Inhalt dieser Vorlesung.

Schließlich gibt Abschnitt 21 einen kurzen Überblick über weitere Anwendungen von Mikromodellen wie die Anwendung in ACC-Systemen oder als Simulationskern in kommerzieller Verkehrssimulations-Software.

# 16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose

## 16.1. Wie entsteht ein Stau?

Für die Anwendung der Verkehrslageschätzung (z.B. dynamische Navigation) ist vor allem die Frage wichtig: "Gibt es auf Strecke  $x$  zur Zeit  $t$  einen Stau?" Um diese Frage zu beantworten, ist die Dynamik der Stauentstehung wesentlich.

Um Staumechanismen zu finden und Hypothesen wie die folgende "Drei-Zutaten-Hypothese" zu überprüfen, sind raumzeitliche Informationen von Verkehrsdichte, -geschwindigkeit und -fluss notwendig. Diese werden z.B. anhand von Daten von stationären Detektoren mit der *Adaptive Smoothing Method* gewonnen (vgl. Gl. (6.1) auf S. 31). Alle Bilder dieses Abschnitts basieren auf durch die ASM aufbereitete Detektordaten.

Die Analyse der raumzeitlichen Dichte- und Geschwindigkeitsverläufe zeigt, dass nahezu alle Staustaus durch das Zusammenwirken von drei Einflussfaktoren entstehen (vgl. Abb. 16.1):

1. Hinreichend hohes Verkehrsaufkommen,
2. eine den Verkehrsfluss störende **Streckeninhomogenität**, die als **verallgemeinerte Engstelle** (*bottleneck*) wirkt,
3. und eine **lokale Störung**, die z.B. durch abrupte Bremsmanöver, "Jumborennen" und dergleichen verursacht werden kann.

Während, abgesehen von Unfällen, die ersten beiden Einflussgrößen überwiegend deterministischer Natur sind, hängt das spontane Entstehen einer Störung im Verkehrsfluss vom Zufall ab: Es kann z.B.

- durch ein ungeschicktes Fahrmanöver eines einzelnen Fahrers,
- durch die Bildung eines Fahrzeugpulks,
- durch ein "Jumborennen" (zwei sich überholende LKW),
- durch eine von einer anderen Engstelle ausgelösten Stauwelle (Abb. 16.2 links)

und durch vieles mehr ausgelöst werden. Daraus folgt, dass die exakte Voraussage eines Verkehrszusammenbruchs ebenso unmöglich ist, wie im Rahmen der Wettervorhersage exakte Zeiten und Orte von Gewittern anzugeben. Das Verständnis der Stauentstehung ist jedoch eine wichtige Voraussetzung, um *Stauwahrscheinlichkeiten* anzugeben. Analog ist ja auch in der Wettervorhersage z.B. von *Gewitterneigung* die Rede. Hingegen

## 16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose

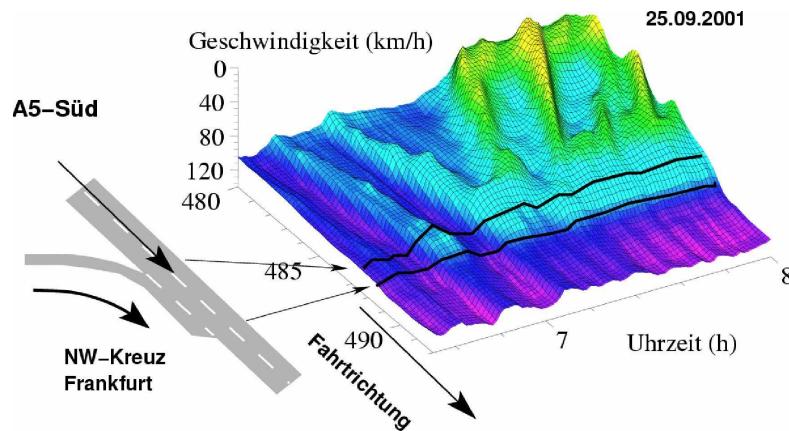


Figure 16.1.: Typische Beispiele für die Aktion der drei Stauzutaten auf der A5-Süd in der Nähe von Frankfurt: Bei km 487 treffen von etwa 6:30 h bis 8:00 die ersten beiden „Zutaten“, hohes Verkehrsaufkommen (morgendliche Rush-hour) sowie eine räumliche Engstelle (Ein- und Ausfahrten des NW-Kreuz Frankfurt zusammen). Zwei Störungen des Verkehrsflusses (3. Zutat) machen sich jeweils durch eine lokal verringerte Geschwindigkeit bemerkbar, welche sich im Bild als zwei hellblaue, in Fahrtrichtung propagierende Bereiche um etwa 6:40 h bzw. 7:00 h darstellen. Die erste Störung um 6:40 ist noch unterkritisch, die zweite jedoch triggert um 7:00 bei etwa km 487 den Verkehrszusammenbruch (grünliche und gelbliche Bereiche).

## 16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose

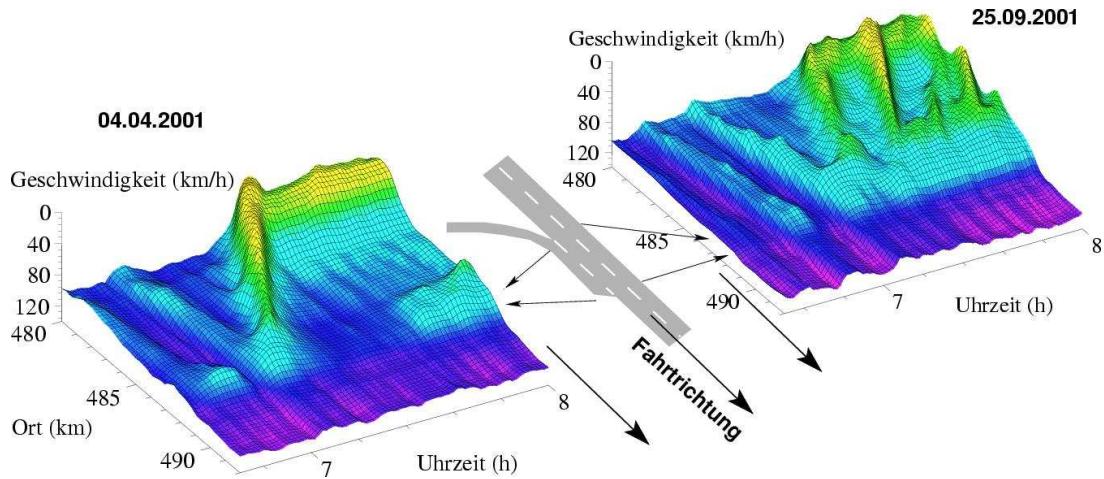


Figure 16.2.: Verkehrszusammenbrüche, welche an verschiedenen Tagen an der selben Engstelle bei km 487 ausgelöst werden. Im linken Teilbild führt der Zusammenbruch zu einem Moving Localized Cluster (MLC), welcher um ca. 7:30 h bei einer weiteren Engstelle (Anschluss-Stelle) bei km 481 als Verkehrsfluss-Störung wirkt und dort einen Pinned Localized Cluster (PLC) auslöst.

lässt sich der zeitliche Verlauf eines *einmal entstandenen Verkehrszusammenbruchs*, einschließlich prognostizierter Reisezeiten, mit Hilfe des **Phasendiagramms** erstaunlich präzise prognostizieren, welches im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

### 16.2. Klassifikation von Staus nach ihrer raumzeitlichen Dynamik

Im Phasendiagramm wird der qualitative raumzeitliche Verlauf eines Verkehrszusammenbruchs in Abhängigkeit der beiden ersten Einflussgrößen eines Staus, der Verkehrsfrage und der Stärke der Engstelle, aufgetragen. Die Engstelle kann dabei verschiedenartigster Natur sein, z.B. (nach Häufigkeit geordnet)

- Bereiche von Anschluss-Stellen und Autobahnkreuzen. Hier wird die Störung vor allem durch die Zu- und Abflüsse und der damit notwendigen Spurwechselmanöver verursacht,
- Bereiche von Baustellen und anderen Streckenverengungen,
- Unfallstellen und andere Ursachen von Spursperrungen,
- Steigungen und Gefällestrecken,
- Kurvenstrecken und andere unübersichtliche Bereiche,

## 16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose

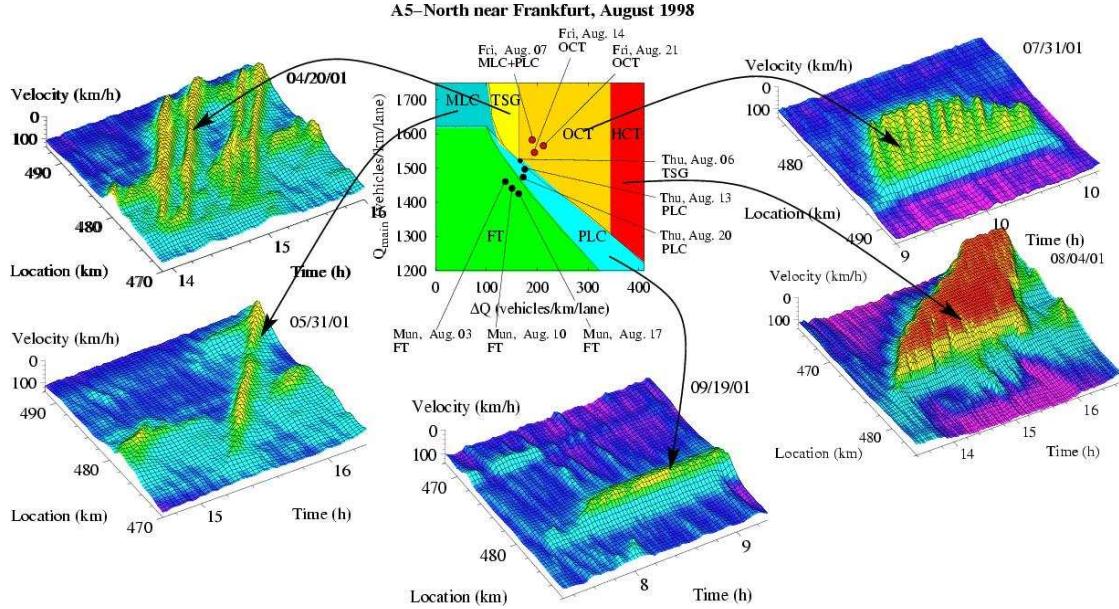


Figure 16.3.: Je nach Verkehrsnachfrage  $Q_{\text{main}}$  auf der Hauptstrecke und der durch den Rampenfluss  $Q_{\text{ramp}}$  definierten Stärke der Engstelle stellen sich an derselben Stelle (A5-Süd, NW-Kreuz) verschiedene Staumuster ein, welche durch das **Phasendiagramm** erklärt werden können.

- Unfälle auf der *Gegenfahrbahn*. Hier wird die Störung allein durch das *Verhalten* der Autofahrer verursacht, obwohl objektiv keine Störung vorhanden ist!

Quantifizieren wir die Verkehrsnachfrage durch das Verkehrsaufkommen  $Q_{\text{main}}$  pro Spur und die Engstelle durch die Kapazitätsreduktion  $\Delta Q$ , so ergibt ein Auftrag des Stauverlaufs im durch  $Q_{\text{main}}$  und  $\Delta Q$  aufgespannten **Phasendiagramm** ein für alle Staus im Wesentlichen durch die Werte von  $Q_{\text{main}}$  und  $\Delta Q$  vorgegebenes *charakteristische Muster* (Abb. 16.3, vgl. auch Abb. 5.11 auf S. 30):

- Einzelne laufende Stauwellen (*Moving Localized Clusters*, MLC), die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit stromaufwärts ausbreiten. Da diese Stauwellen, wie alle anderen auch, durch Störstellen ausgelöst werden, spricht man auch von *Triggered Stop-and-Go Waves* (TSG).
- Eine einzelne stehende Stauwelle, die am Ort einer Störstelle fixiert ist: *Pinned Localized Cluster* (PLC). Sowohl die stehenden PLC-Wellen wie auch die laufenden MLC-Wellen sind "lokalisiert", d.h. der die Welle ausmachende Stau hat eine begrenzte Länge, selten mehr als 500 m.
- Ausgedehnte Stauzustände, bei denen über mehrere km hinweg sich nahezu stehender Verkehr mit etwas schneller fließenden, aber dennoch behinderten Verkehr (30-60 km/h) abwechselt: *Oscillating Congested Traffic* (OCT).

## 16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose

- Ausgedehnte Bereiche "zähfließenden Verkehrs", bei denen der Verkehr langsam, aber relativ gleichmäßig "dahinschleicht": *Homogeneous Congested Traffic* (HCT). Stillstehender Verkehr, z.B. hinter einer Totalsperrung, ist eine Spezialform des HCT.

Die beiden letzten Stauarten stellen etwa 70% aller Staus dar, verursachen dabei aber etwa 90% aller durch Staus verursachten Reisezeitverlängerungen. Starke Störungen, z.B. Spurssperrungen durch Unfälle, entsprechen hohen Werten von  $\Delta Q$  und erzeugen typischerweise HCT-Staus, während kleinere Inhomogenitäten, wie sie z.B. durch Anschlussstellen gebildet werden, häufig PLC oder TSG verursachen.

Während der raumzeitliche Verlauf eines Staus nach erstaunlich deterministischen Gesetzen erfolgt, sind wegen der Stochastizität der dritten Einflussgröße (Störung im Verkehrsfluss) für das Ereignis eines Zusammenbruchs selbst nur Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich. Insbesondere sind wegen der im Verkehrsfluss beobachteten **Hysteresis-Effekten** für bestimmte Wertepaare ( $Q_{\text{main}}, \Delta Q$ ) sowohl freier Verkehr (keine große Verkehrsflusstörung) oder ein durch eine größere Flusstörung ausgelöster OCT möglich. Die *Phasengrenzen* zwischen verschiedenen Zuständen, z.B. OCT und PLC, müssen für jede Engstelle einmalig kalibriert werden.

### 16.2.1. Der Stau aus dem Nichts

Auch die bisweilen beobachteten "Staus aus dem Nichts", bei denen man als Autofahrer scheinbar "grundlos" anhalten muss, ehe man weiterfahren kann, ohne irgendeine Stauursache zu erkennen, entstehen letztendlich an einer Streckeninhomogenität. Da sich die Stauwellen aber nach der Entstehung an der Inhomogenität durch homogene Streckenabschnitte stromaufwärts fortpflanzen, typischerweise mit 15 km/h (s.u.), erscheinen sie dem Autofahrer, der einer solchen Welle "begegnet", wie aus dem Nichts entstanden. Typische Beispiele von "Staus aus dem Nichts" sind "MLC" und "TSG"-Zustände, vgl. Abb. 5.11.

### 16.3. Analyse und Kurzfrist-Prognose

*In London kontrolliert ein elektronisches Omnibus-Registriesystem die in den Straßen fahrenden Busse. Elektronen kameras, die entlang der Straßen aufgestellt sind, empfangen von jedem Bus ein Signal. Der jeweilige Standort der Wagen wird selbsttätig an eine Zentrale weitergegeben. Auf diese Weise kann die Fahrt der Busse ständig verfolgt werden. Sobald eine Zusammenballung des Verkehrs [ ... ] entsteht, kann von der Zentrale aus sofort eine Abhilfemaßnahme eingeleitet werden.*

Elektrotechnische Zeitschrift, Ausgabe B, Bd. 9, Nr. 11, S. 457 (21. November 1957)

Wie man sieht, wurde bereits 1957 eine auf *Floating Cars* basierende Verkehrslageschätzung realisiert. Auch heute noch wird die datengestützte Verkehrslageschätzung aber durch die nur lückenhafte Erfassung des Verkehrsflusses erschwert. Nutzt man aber das Ergebnis des Phasendiagramms aus, dass der raumzeitliche Verlauf der Staugrenzen im Wesentlichen von der messbaren Nachfrage  $Q_{\text{main}}$  und der häufig ebenfalls messbaren Bottleneck-Stärke  $\Delta Q$  (z.B.  $\Delta Q = Q_{\text{ramp}}$  bei Auffahrten) festgelegt ist, wird dennoch eine zeitnahe Lageschätzung und sogar eine Kurzfristprognose ermöglicht.

Zentral dabei ist, dass Staus nahezu immer am *Beginn* von **verallgemeinerten Engstellen** entstehen. Wichtig für die Analyse ist dabei, dass, abgesehen von den durch Unfälle verursachten Engstellen, die Lage der Engstellen bekannt ist und das die *Stärke der Engstelle* die raumzeitliche Dynamik der Staus beeinflusst, vgl. Abschnitt 16.2. Isolierte stehende oder laufende Stauwellen entstehen z.B. tendenziell eher an kleinen Streckeninhomogenitäten, während HCT oder OCT an größeren Engstellen wie Unfällen oder Baustellen entstehen. Im Einzelnen lassen sich aus den Verkehrsdaten folgende Gesetzmäßigkeiten der Dynamik folgern:

1. Laufende isolierte Stauwellen (MLC bzw. TSG-Zustände) sowie *alle* Dichte- und Geschwindigkeitsänderungen innerhalb von ausgedehnten Staus (HCT und OCT) breiten sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $-c_{\text{stopGo}}$  *entgegen* der Fahrtrichtung aus (das negative Vorzeichen berücksichtigt dies.) Im Abschnitt über makroskopische Verkehrsmodelle (vgl. S. 62) haben wir für das Fundamentaldiagramm nach Gl. (9.6) die **Stop-and-Go-Ausbreitungsgeschwindigkeit**

$$c_{\text{stopGo}} = -\frac{1}{T\rho_{\max}} = -\frac{s_0 + l}{T} \quad (16.1)$$

als Funktion der Mittelwerte von Fahrzeuglänge, Mindestabstand und Folgezeit dargestellt. In der Praxis liegt diese Geschwindigkeit bei etwa 15 km/h.

2. Der Ausfluss  $Q_{\text{out}}$  von ausgedehnten Staus an der stromabwärtigen Staufront (die Fahrzeuge beschleunigen aus dem Stau) ist erstaunlich konstant. Im Rahmen von Mikro- und Makromodellen haben wir für das Fundamentaldiagramm nach Gl.

## 16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose

(9.6) eine obere Grenze dieses Ausflusses kennengelernt, nämlich die **statische Kapazität** pro Spur,

$$Q_{\text{out}} \leq Q_{\text{max}} = \frac{1}{T} \left( 1 - \frac{s_0 + l}{s_0 + l + v_0 T} \right). \quad (16.2)$$

Typische Werte dieses Ausflusses aus dem Stau sind  $Q_{\text{out}} = 2000 \text{ Fz/h/Spur}$ . Die Werte  $c_{\text{stopGo}}$  und  $Q_{\text{out}}$  kann man als "Staukonstanten" bezeichnen. Sie hängen zwar geringfügig vom mittleren Fahrverhalten des Fahrerkollektivs und der Zusammensetzung des Fahrzeugkollektivs und damit u.a. vom Land und von der Tageszeit ab, sind aber unabhängig von der Art des Staus. Wird die stauverursachende Streckeninhomogenität durch eine Zufahrt mit Fluss  $Q_{\text{zu}}$  gebildet, so ist der mit der Spurzahl  $I$  multiplizierte Ausfluss  $Q_{\text{out}}$  gleich der Summe der Flüsse von Zufahrt und (zugestauter) Hauptstrecke  $Q_{\text{jam}}$ ,

$$IQ_{\text{out}} = Q_{\text{zu}} + Q_{\text{jam}},$$

(vgl. die entsprechende Übungsaufgabe). Handelt es sich bei der Störstelle hingegen um eine sog. flusserhaltende Engstelle (*flow-conserving bottleneck*), die nicht durch Ein- oder Ausfahrten verursacht wird, so setzt man einfach in obiger Gleichung  $Q_{\text{zu}} = 0$  (vgl. ebenfalls entsprechende Übungsaufgabe).

3. Stehende Stauwellen entstehen *ausschließlich* an Streckeninhomogenitäten. Das Verkehrsaufkommen liegt dabei zwischen dem für freien Verkehr und dem für ausgedehnte Staus. Der Ausfluss  $Q_{\text{out,PLC}}$  von stehenden Stauwellen ist kleiner oder gleich  $Q_{\text{out}}$  und es gilt, dass dieser Ausfluss gleich der Summe aus der Verkehrsfrage  $Q_{\text{in}}$  auf der Hauptfahrbahn und dem Rampenfluss  $Q_{\text{zu}}$  ist:

$$IQ_{\text{out,PLC}} = Q_{\text{in}} + Q_{\text{zu}} \leq Q_{\text{out}}$$

Wieder wird für nicht aus Ein- oder Ausfahrten bestehenden Störstellen  $Q_{\text{zu}} = 0$  gesetzt.

4. Die stromabwärtige Staufront ist entweder ortsfest an Inhomogenitäten fixiert, oder bewegt sich stromaufwärts mit der bereits bekannten festen Geschwindigkeit  $c_{\text{stopGo}}$ ,

$$c_{\text{down}} = \begin{cases} 0 & \text{Störstelle aktiv,} \\ c_{\text{stopGo}} & \text{Störstelle ist deaktiviert.} \end{cases}$$

Bemerkenswerterweise *sind keine anderen Geschwindigkeiten möglich!* Ein Beispiel eines sich stromaufwärts bewegenden Stauendes im Stadtverkehr ist der sich auflösende Ampelstau nach Grünwerden der Ampel, d.h., nach Deaktivieren der Störstelle. Im Allgemeinen ist jedoch die Frage, ob und wann eine Störstelle deaktiviert wird, die Staufront sich also von der Störstelle ablöst, nicht systematisch zu beantworten. Siehe z.B. die OCT- und HCT-Zustände in Abb. 5.11 rechts oben und unten.

## 16. Verkehrslageschätzung und Kurzfrist-Prognose

5. Die Ausbreitung der *stromaufwärtigen* Staufront lässt sich in guter Näherung durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit (9.5) für Schockwellen,

$$c_{\text{up}} = \frac{\Delta Q}{\Delta \rho},$$

beschreiben. Die minimale Geschwindigkeit (bei einer Vollsperrung,  $Q_{\text{jam}} = 0$ , und gleichzeitig maximaler Verkehrs nachfrage,  $Q_{\text{in}} = Q_{\text{max}}$ ) beträgt  $c_{\text{up}} = c_{\text{stopGo}}$ . Die maximale positive Geschwindigkeit (bei der Verkehrs nachfrage  $Q_{\text{in}} = 0$ ) ist gleich der Geschwindigkeit  $V_{\text{jam}} = Q_{\text{jam}} / \rho_{\text{jam}}$  der Fahrzeuge im Stau.

6. Oft ist der Verkehr im Stau instabil, so dass durch abrupte Fahrmanöver entstehende Störungen anwachsen. Gleichzeitig können diese Störungen sich aber nur (mit der Geschwindigkeit  $c_{\text{stopGo}}$ ) stromaufwärts ausbreiten, so dass nahe der Störstelle der Verkehr homogen bleibt. Im Falle dieser **konvektiven Instabilität** erhält man daher nahe der Engstelle den Stautyp "HCT", weiter stromaufwärts den Typ "OCT".

# 17. Schätzung der Reisezeiten

Die Reisezeiten sind für viele Anwendungen die wichtigste aus der Verkehrslagebestimmung zu schätzende Größe. Insbesondere dienen sie als Dateninput für verkehrsabhängigen Navigations- bzw. Routingsysteme in der Standardeinstellung, bei der die zeitkürzeste Route ausgewählt wird.

Meist ist man an drei Arten von Reisezeiten interessiert:

1. Die Reisezeit  $\tau_{12}(t)$  für die Fahrt durch einen Streckenabschnitt von  $x_1$  nach  $x_2$ , die für ein Fahrzeug gilt, welches zum Zeitpunkt  $t$  den Abschnitt bei  $x = x_2$  verlassen hat,
2. die erwartete Reisezeit  $\tilde{\tau}_{12}(t)$  für Fahrzeuge, welche zum Zeitpunkt  $t$  bei  $x_1$  in den Abschnitt hineinfahren,
3. die Gesamtreisezeit  $\tau_{\text{tot}}$  aller Fahrzeuge in einem raumzeitlichen Bereich  $G = [x_1, x_2] \times [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$ . Nimmt man  $\tau_{\text{tot}}$  als zu minimierende Zielfunktion einer Verkehrsflussoptimierung (vgl. Abschnitt 19.5), so muss man das Zeitintervall so wählen, dass am Anfang ( $t = t_{\text{start}}$ ) und am Ende ( $t = t_{\text{end}}$ ) auf der ganzen Strecke  $x \in [x_1, x_2]$  freier Verkehr herrscht. Nur so ist Nebenbedingung der Optimierung erfüllt, dass die komplette Verkehrsnachfrage abgewickelt wird.

Diese Reisezeiten können

- modellgestützt
- und rein empirisch aus Verkehrsdaten

bestimmt werden.

## 17.1. Modellgestützte Reisezeitschätzung

Die Schätzung ist sowohl mit Mikromodellen als auch mit Makromodellen möglich. Während bei Mikromodellen die Auswertung aus den Simulationsergebnissen einfacher ist (man zieht einfach die Trajektorien zur Reisezeitbestimmung heran), ist die Simulation selbst für diesen Anwendungsfall mit makroskopischen Modellen in der Regel robuster.

## 17. Schätzung der Reisezeiten

### 17.1.1. Mikroskopische Bestimmung

Da man in mikroskopischen Simulationen die vollständige Information über jedes Fahrzeug hat, ist die Bestimmung der Reisezeiten einfach. Für die individuellen Reisezeiten erhält man

$$\tau_{12}(t) = t_2^\alpha - t_1^\alpha, \quad \tilde{\tau}_{12}(t) = t_2^\beta - t_1^\beta \quad (17.1)$$

wobei  $\alpha$  das Fahrzeug kennzeichnet, welches als letztes aus dem Abschnitt (bei  $x = x_2$ ) herausgefahren ist,  $t_2^\alpha \leq t < t_2^{\alpha+1}$ , während  $\beta$  das Fahrzeug kennzeichnet, welches als letztes in das Gebiet (bei  $x = x_1$ ) hineingefahren ist,  $t_1^\beta \leq t < t_1^{\beta+1}$ .

Die Gesamtreisezeit

$$\tau_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt n_{12}(t) \quad \begin{array}{l} \text{Gesamtreisezeit aus} \\ \text{Mikrosimulationen} \end{array} \quad (17.2)$$

für das gesamte raumzeitliche Gebiet  $G = [x_1, x_2] \times [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$  ergibt sich durch Aufintegrieren der sich zur Zeit  $t$  auf der Strecke befindlichen Fahrzeugzahl  $n_{12}$  über die Simulationszeit.

### 17.1.2. Makroskopische Bestimmung

Dazu verwendet man am effektivsten "virtuelle Detektoren" D1 und D2 am Anfang und am Ende der Strecke und zählt zunächst als Hilfsgröße die an den Detektoren vorbeigekommenen Fahrzeuge, also die **kumulierte Fahrzeugzahl** (engl. *n-curves*) durch Aufintegrieren des makroskopischen Verkehrsflusses:

$$\begin{aligned} n_1(t) &= \int_{t_{\text{start}}}^t Q(x_1, t') dt' + n(t_{\text{start}}), \\ n_2(t) &= \int_{t_{\text{start}}}^t Q(x_2, t') dt'. \end{aligned}$$

Der zusätzliche Summand

$$n(t_{\text{start}}) = \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t_{\text{start}})$$

der Gleichung für den Zählstand  $n_1(t)$  des stromaufwärtigen Detektors gewährleistet, dass ein und dasselbe Fahrzeug beim Passieren beider virtuellen Detektoren dieselben Zählstände vorfindet, wenn es diese "abfragen" würde. Dieser Gleichheitsbedingung ergibt einfache Bestimmungsgleichungen für die gesuchten individuellen Reisezeiten  $\tau_{12}(t)$  und  $\tilde{\tau}_{12}(t)$ :

$$\tau_{12}(t) \quad \text{aus} \quad n_1(t - \tau_{12}(t)) = n_2(t) \quad (17.3)$$

## 17. Schätzung der Reisezeiten

und

$$\tilde{\tau}_{12}(t) \quad \text{aus} \quad n_1(t) = n_2(t + \tilde{\tau}_{12}(t)). \quad (17.4)$$

### Verständnisfrage:

Warum gilt all dies?

Die Gesamtzeit lässt sich makroskopisch einfach bestimmen, indem man berücksichtigt, dass  $n(t) = \int dx \rho(x, t)$  die Zahl der Fahrzeuge auf dem Abschnitt zur Zeit  $t$  ist und die Gesamtzeit aller Fahrzeuge die mittlere Fahrzeuganzahl auf der Strecke, multipliziert mit dem Zeitintervall ist:

$$\tau_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t) \quad \begin{array}{l} \text{Gesamtreisezeit aus} \\ \text{Makrosimulationen} \end{array} \quad (17.5)$$

## 17.2. Direkte empirische Bestimmung

Hier wird ein praktikabler und robuster Ansatz vorgestellt, der auf die Reisezeitbestimmung durch kumulierte Fahrzeugzahlen an Detektorquerschnitten aufbaut (vgl. Abschnitt 5.2), aber zusätzlich noch die zunehmend verfügbaren *Floating-Car-Daten* (vgl. Abschnitt 3) mit einbezieht.

### 17.2.1. Problemformulierung

#### Größen und benötigte Daten

- **Detektoren**  $D_i$  an den Orten  $x_i$  mit  $x_{i+1} > x_i$ , o.E.d.A.  $x$  in Verkehrsflussrichtung. Benötigt werden die fahrstreifensummierten Detektorflüsse  $Q_i(t_k)$  bzw. die Vehicle-counts  $n_i(t_k)$  in z.B. Minutenabständen,  $k =$  Zahl der Minuten nach Mitternacht bzw. der einminütige Zeitraum davor.
- **Floating Cars (FC)**  $j$  mit  $j$  in der Reihenfolge des Auftauchens am ersten Detektor (Schnitte von Trajektorien werden ignoriert → nur rein buchhalterisches Problem). Benötigt werden die Passagezeiten  $t_{ji}$  zu denen das  $j$ -te FC am Detektorquerschnitt  $i$  vorbeikommt.

### 17.2.2. Durchführung

#### Vorbereitung

Auswahl der geeigneten Detektorpaare ( $i, i + 1$ ) im Vorfeld aus historischen Daten: Bedingung

$$\frac{|\Delta N_i - \Delta N_{i+1}|}{\Delta N_i} < \epsilon \quad (17.6)$$

## 17. Schätzung der Reisezeiten

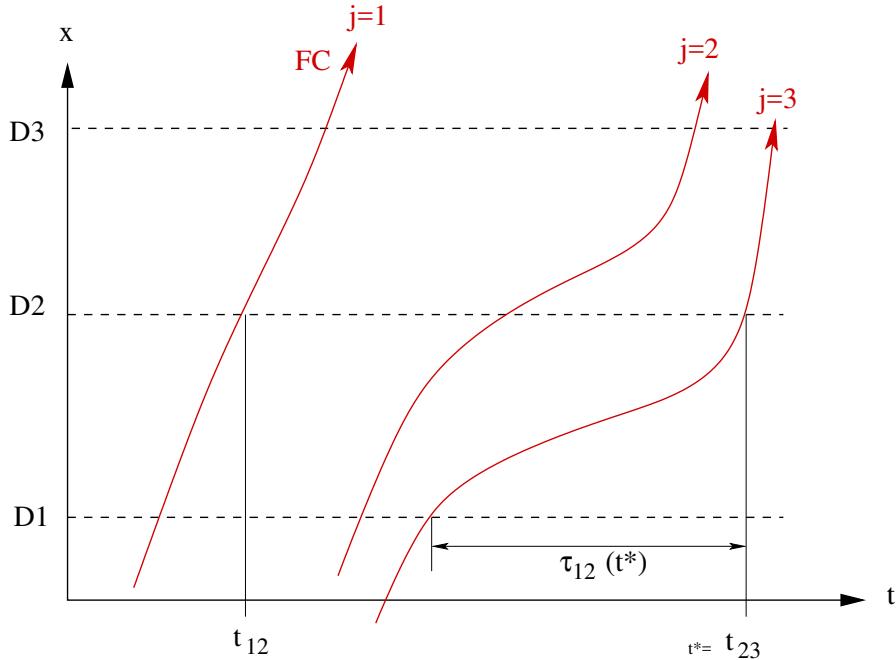


Figure 17.1.: Größen bei der Reisezeitschätzung aus Querschnitts- und FC-Daten.

mit z.B.  $\epsilon = 1\%$  Dabei ist die aufintegrierte Fahrzeugzahl  $\Delta N_i$  als Funktion der kumulierten Fahrzeugzahlen  $N_i$  gegeben durch

$$\Delta N_i = N_i(t_e) - N_i(t_a) = \sum_{k=a}^e n_i(t_k) \quad (17.7)$$

Zeitpunkt  $t_a$ : Vor Beginn des Staus; Zeitpunkt  $t_e$ : Nach vollständiger Auflösung des Staus. Die Größen  $a$  und  $e$  sind die Minutenzahlen nach Mitternacht für die jeweiligen Zeiten.

Diese Vorbereitung schließt Fehler durch Rampenflüsse, sowohl durch sehr falsch messende Detektoren im Vorfeld aus. Später kann die Zahl der relevanten Detektorpaare durch Berücksichtigung evtl. Rampaendetektoren + geeigneter Kombination erhöht werden.

### Reisezeitbestimmung

- Initialisierung der kumulierten Fahrzeugzahlen durch das erste FC:

$$N_i(t_{1i}) = 0 \quad (17.8)$$

also hier in der Abbildung  $N_1(t_{11}) = N_2(t_{12}) = N_3(t_{13}) = 0$ . In der Praxis gilt es zu beachten, dass die Querschnitte Daten nur nach jedem Aggregationsintervall ( $\Delta t =$

## 17. Schätzung der Reisezeiten

1 Minute) aktualisiert werden, während die Durchgangszeiten  $t_{ji}$  zumindest sekundengenau sind. Um unnötigen Genauigkeitsverlust durch die Minutenaggregierung zu vermeiden, werden die nach dem FC in derselben Minute noch den Querschnitt passierenden Fahrzeuge anteilig berücksichtigt:

$$N_i(t_{k_{1i}}) = n_i(t_{k_{1i}}) \frac{t_{k_{1i}} - t_{1i}}{\Delta t} \quad (17.9)$$

Hier ist  $k_{1i}$  der Index des Minutenintervalls, welches die Durchgangszeit  $t_{1i}$  enthält und  $t_{k_{1i}}$  ist die Zeit, bei der dieses Intervall endet.

- Reisezeitschätzung der Reisezeiten  $\tau_{i,i+1}(t)$  der zur Zeit  $t$  aus den Abschnitt zwischen  $D_i$  und  $D_{i+1}$  herausfahrenden Fahrzeuge:

$$N_{i+1}(t) = N_i(t - \tau_{i,i+1}) \quad (17.10)$$

mit  $N_i$  der aufintegrierten Fahrzeugzahl bei  $D_i$  seit der Initialisierung durch das FC. Praktisch liest man  $N_{i+1}(t)$  ab und schaut bei Detektor  $i$  nach, zu welcher vergangenen Zeit  $t'$  die Bedingung  $N_i(t') = t - t'$  gilt. Dann ist  $\tau_{i,i+1}(t) = t - t'$

- Rücksetzung der kumulierten Detektorfehler durch neue Floating Cars:

Hier wird Gl. (17.9) verallgemeinert. Wenn das FC  $j$  zur Zeit  $t_{ji}$  den Querschnitt  $i$  passiert, werden am Ende des betreffenden Minutenintervalls, also zur Zeit  $t_{k_{ji}}$ , die kumulierten Fahrzeugzahlen folgendermaßen rückgesetzt:

$$N_i(t_{k_{ji}}) = n_i(t_{k_{ji}}) \frac{t_{k_{ji}} - t_{ji}}{\Delta t} \quad (17.11)$$

*Achtung:* Um bei der Reisezeitbestimmung (17.10) nicht inkonsistent rückgesetzte Detektoren zu verwenden, muss man sich bei jedem Detektor den Index des letzten durchgefahrenen FC merken und außerdem die kumulierten Fahrzeugzahlen bezüglich aller nicht zu lang vergangenen Nullungen vorhalten und aktualisieren. In der Praxis reichen sicherlich die Nullungen der letzten halben Stunde. Bei Anwendung der Reisezeitformel schaut man nun nach, von welchem FC Detektor  $i + 1$  zuletzt genutzt wurde und nimmt auch für Detektor  $i$  die kumulierte Fz-Zahl bezüglich derselben Initialisierung, auch, wenn dort schon weitere FC vorbeigefahren sind.

### 17.2.3. Auswertung

#### Geschwindigkeitsfeld

Das “A-Posteriori”-Geschwindigkeitsfeld hat die Stützpunkte

$$V\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, t_k\right) = \frac{\tau_{i,i+1}(t_k)}{x_{i+1} - x_i} \quad (17.12)$$

Dies kann man z.B. als Rechteckelement  $[t_{k-1}, t_k] \times [x_i, x_{i+1}]$  eines raumzeitlichen Geschwindigkeitsprofils plotten, bzw. in `gnuplot` durch Plotten einer oder mehrerer “points” pro

## **17. Schätzung der Reisezeiten**

Rechteckelement. Für Detektorpaare, welche im Vorfeld ausgesondert wurden (Rampen etc) gibt es allerdings “weiße Flecke”. Falls es sich nur um falsch messende Detektoren handelt, kann man einfach den Detektor überbrücken. Ansonsten muss man s. mit Rampenflüssen beschäftigen. Falls dies nicht möglich ist, extrapoliert man besser die Geschwindigkeiten der benachbarten Abschnitte.

### **Qualitätskontrolle**

Durch die Nullungen ergeben sich Sprünge in der Reisezeit, welche den Gesamtfehler (Detektorfehler, FC-Datenfehler, Diskretisationsfehler, Zeitstempelfehler, Fehler durch rekonstruierte statt echte FC-Daten, ...) abschätzen.

# 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

Die höchsten Kilometerkosten von allen Wagentypen hat immer noch ein Einkaufswagen im Supermarkt.  
Lothar Schmidt

## 18.1. Übersicht

Allgemein unterscheidet man auch bei Verbrauchs- und Emissionsmodellen<sup>1</sup> mikroskopische und makroskopische Ansätze:

### 18.1.1. Makroskopischen Ansätze

In dieser Modellklasse werden nur globale, für alle Fahrzeuge gültige Bedingungen, nicht aber das Fahrverhalten einzelner Fahrer berücksichtigt. Solche Modelle werden angewandt, um den Verbrauch auf einen ganzen Streckennetzwerk oder sogar in einer ganzen Region zu berechnen. Beispiele dafür sind

- auf **Emissionsfaktoren** basierte Modelle (*emission-factor models*). Dabei werden, in Abhängigkeit des Fahrzeugtypes und der Verkehrssituation (Stadt, Landstraße, Autobahn), die streckenbezogenen Verbräuche/Emissionen ermittelt. Dies geschieht üblicherweise durch Verbrauchs- bzw. Emissionsmessung bei typischen Vertretern der Fahrzeugklasse, welche standardisierte Test-Zyklen durchlaufen.
- auf **Durchschnittsgeschwindigkeiten** basierte Modelle (*average-speed models*). Hier werden Verbrauchsmessungen anhand einer Vielzahl von Fahrten mit einer Vielzahl von Fahrzeugtypen durchgeführt und die entsprechenden Mittelwerte werden anschließend nur nach einem einzigen Beeinflussungsfaktor disaggregiert: Der mittleren Geschwindigkeit.

Makroskopische Verbrauchsmodelle liefern als abhängige (erklärte) Variable spezifische Verbräuche bzw. Emissionen z.B. in der Form Liter/Kfz/km oder kg/Kfz/km in Abhängigkeit des Verkehrstyps. Dieser ist z.B. durch Stadt/Landstraße/Autobahn oder durch die mittlere Geschwindigkeit charakterisiert. Mit entsprechenden Verkehrleistungen (Kfz km), welche z.B. von Messungen oder einer Verkehrsplanungsberechnung kommen können, sind damit globale Aussagen über Verbräuche/Emissionen möglich.

---

<sup>1</sup>Da für Verbrauch und Emissionen der Aufbau des Modells identisch ist, kann man “Verbrauch” und “Emissionen” austauschen: Wenn von Verbrauchsmodellen die Rede ist, sind auch Emissionsmodelle gemeint und umgekehrt.

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

### 18.1.2. Mikroskopischen Ansätze

Ein Nachteil der makroskopischen Ansätze ist, dass die Beeinflussung des Verbrauchs durch *Beschleunigungs- und Bremsmanöver* sowie durch den Motorbetriebszustand ignoriert wird. Will man dagegen Fragen beantworten wie

- Wie hängt der Verbrauch vom Fahrstil (Beschleunigungen, Bremsmanöver, Gangwahl) ab?
- Wie stark erhöhen Verkehrsstaus und Stop-and-Go Verkehr den Verbrauch?
- Sind vom Gesichtspunkt des Verbrauchs Ampeln oder Kreisverkehre die günstigeren Knotenpunktsregelungen?

benötigt man eine detailliertere Modellierung durch **mikroskopische Verbrauchsmodelle** (*modal consumption models*)

Die primäre abhängige (erklärte) Variable dieser Modelle sind für jeden Fahrzeugtyp Kraftstoff-Flüsse (Verbrauchsrationen) bzw. Emissionsraten  $\frac{dC}{dt}$  in Abhängigkeit von Geschwindigkeit, Beschleunigung, Motorbetriebszustand und ggf. externe Variablen wie die Steigung der Strecke.

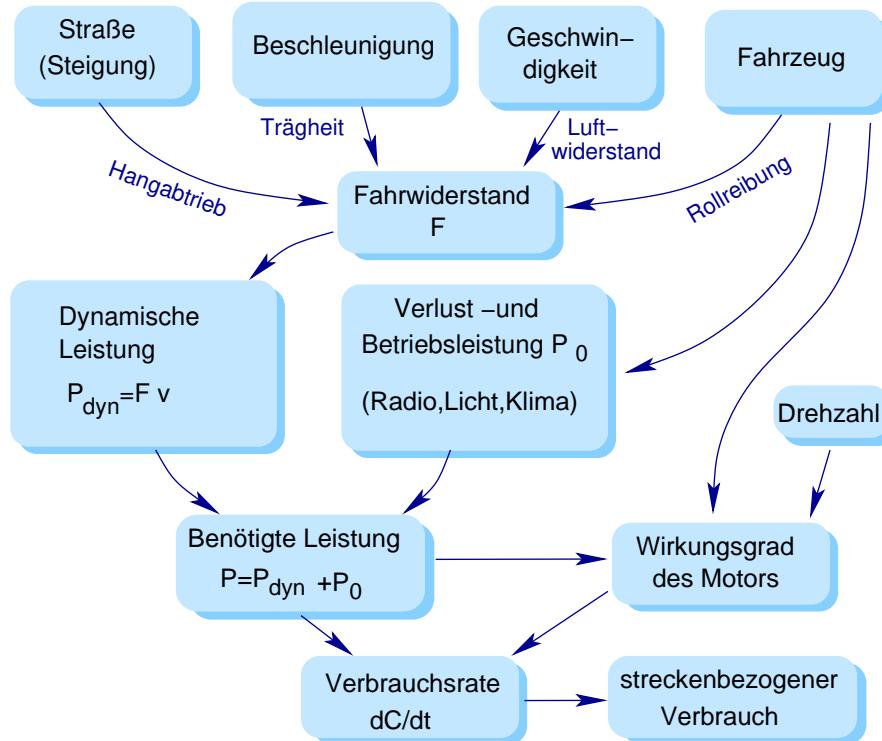
Um zu einer Aussage bezüglich des Verbrauchs/der Emissionen zu kommen, benötigt man also als Input für mikroskopische Verbrauchsmodelle genau den Output mikroskopischer Verkehrsmodelle (Geschwindigkeit und Beschleunigung), weshalb diese Modellklasse in diesem Skript näher betrachtet wird. Auch hier gibt es mehrere Unterkategorien:

- **Phänomenologische (tabellenbasierte) Modelle.** Hier wird z.B. die Verbrauchsrate als Funktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung im Fahrzeug gemessen und daraus eine zweidimensionale Geschwindigkeits-Beschleunigungsmatrix als *Lookup-Tabelle* der Verbrauchsrate erstellt. Einflussfaktoren wie Steigungen oder die Gangwahl bleiben dadurch aber unberücksichtigt. Außerdem muss man die Geschwindigkeits-Beschleunigungs-Matrix aufwändig durch Testfahrten erstellen.
- **Physikbasierte Modelle** Hier werden universell gültige physikalische Prinzipien zur Ermittlung des Leistungsbedarfs als Funktion von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Steigung angewandt und dann mittels eines **Motorkennfelder** die Verbrauchs- und Emissionsraten ermittelt. Der Vorteil ist, dass die Leistungsfunktionen analytisch bekannt sind (also keine Messungen nötig sind) solange einige globale Fahrzeugeigenschaften wie Masse und cw-Wert bekannt sind. Die Motorkennfelder wiederum kann man in Motorprüfständen messen, was zwar aufwändig ist, aber weniger aufwändig als Testfahrten.

### 18.2. Das physikbasierte Modell

Im weiteren wird ein physikbasiertes Modell detailliert vorgestellt. Solche Modelle sind anschaulicher und verdeutlichen die Einflussfaktoren des Verbrauchs prägnanter als die rein auf Tabellen basierten Modelle

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen



1Mostv

Figure 18.1.: Flussdiagramm zur Veranschaulichung der instantanen Kraftstoff-Verbrauchsmodellierung.

Abbildung 18.1 zeigt die Ansatzpunkte des Modells in der Übersicht. Die Hauptursache des Kraftstoffverbrauchs liegt in der Überwindung des **Fahrwiderstandes**  $F$ , welcher hauptsächlich (mittels der Trägheitskraft und des Luftwiderstandes) von der Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängt, also von genau den Größen, welche in Fahrzeugfolgemodellen berechnet werden.

Aus dem Fahrwiderstand berechnet sich nach der Formel „Leistung gleich Kraft mal Geschwindigkeit“ die benötigte mechanische Leistung. Zu dieser muss allerdings die Betriebsleistung zur Versorgung der Nebenaggregate und zur Überwindung allfälliger Verluste hinzuaddiert werden. Mit der resultierenden Leistung wird unter Berücksichtigung eines im Allgemeinen vom Betriebszustand abhängigen Wirkungsgrades die Verbrauchsrate und aus dieser der auf z.B. 100 km hochgerechnete Verbrauch berechnet. Diese letzte Größe wird – leicht tiefpassgefiltert – in vielen modernen Fahrzeugen direkt angezeigt.

### 18.3. Fahrwiderstand

Der Fahrwiderstand, d.h. die zur Aufrechterhaltung der vorgegebenen Geschwindigkeit und Beschleunigung nötige mechanische Kraft, wird durch folgenden Ansatz modelliert:

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

$$F(v, \dot{v}) = m\dot{v} + (\mu + \beta)mg + \frac{1}{2}c_w\rho Av^2. \quad (18.1)$$

Diese Fahrwiderstands-Formel enthält folgende Beiträge:

- Die **Trägheitskraft** ergibt sich nach dem klassischen Newton'schen Gesetz aus der Gesamtmasse  $m$  multipliziert mit der Beschleunigung  $\ddot{v} = \frac{dv}{dt}$ . Bei Verzögerungen ist diese Kraft negativ und wird mit den anderen Kraftbeiträgen „verrechnet“.
- Die Kraft  $mg\mu$  aufgrund geschwindigkeitsunabhängiger **Roll- und Festkörperreibung** ist proportional zur Gewichtskraft  $mg$  (mit  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) und dem Reibungskoeffizienten  $\mu$ . Es gibt auch geschwindigkeitsproportionale Anteile der Reibung, welche hier nicht berücksichtigt werden.
- Die **Hangabtriebskraft**  $mg \sin(\beta) \approx mg\beta$  berücksichtigt den Einfluss von Steigungen und Gefällen. Da bei den üblichen Neigungswinkeln  $\beta$  die Näherung  $\sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta$  anwendbar ist, kann man  $\beta$  direkt durch die geläufigen „Steigungsprozente“ angeben: Eine 10%-tige Steigung entspricht  $\beta = 0.1$  (natürlich gilt  $\beta < 0$  auf Gefällestrecken).
- Der **Luftwiderstand**  $\frac{1}{2}c_w\rho Av^2$  enthält neben der nicht beeinflussbaren Luftdichte ( $\rho \approx 1.3 \text{ kg/m}^3$  auf Meereshöhe) die Fahrzeug-Querschnittsfläche  $A$  (von vorne gesehen, typische Werte um  $3 \text{ m}^2$ ) und den einheitenlosen Luftwiderstandsbeiwert  $c_w$ , welcher auch einfach „cw-Wert“ genannt wird. Er besitzt bei modernen Fahrzeugen Werte von 0.25 bis 0.35 (VW Käfer  $\approx 0.5$ ). Vor allem hängt der Luftwiderstand aber auch quadratisch von der Geschwindigkeit ab, weshalb er ab etwa 130 km/h den dominanten Fahrwiderstands- und damit Verbrauchsbeitrag darstellt, vgl. die Abb. 18.5.

### 18.4. Motorleistung

Neben der zur Überwindung des Fahrwiderstandes benötigten mechanischen Leistung  $P_{\text{dyn}} = Fv$  fällt beim Betrieb eines Kraftfahrzeugs, sobald man den Zündschlüssel herumdreht, immer auch ein zusätzlicher Mindestleistungsbedarf  $P_0$  an, welcher auch **Betriebsleistung** genannt wird. Er setzt sich vor allem zusammen aus

- Leistungsbedarf durch Licht, Radio, Klimaanlage etc.
- Leistungsbedarf diverser Nebenaggregate und Stellmotoren (Fensterheber, Lüftung, Scheibenwischer etc.).
- verschiedenster elektrischer Verluste, aber auch die zum Leerlaufbetrieb benötigte Leistung zur Überwindung der inneren Motorreibung.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Im Fahrbetrieb kann die innere Reibung auch durch die noch zu besprechenden Kennfelder indirekt berücksichtigt werden, im Stillstand und/oder Leerlauf ist dies aber problematisch.

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

Berücksichtigt man, dass in modernen Fahrzeugen im Schleppbetrieb (Motorbremse) die Kraftstoffzufuhr abgeschaltet wird („Schubabschaltung“), ergibt sich folgender zur Berechnung des Verbrauchs relevanter „effektiver“ Leistungsbedarf:

$$P(v, \dot{v}) = \max [P_0 + vF(v, \dot{v}), 0]. \quad (18.2)$$

Die Maximum-Bedingung in Gl. (18.2) bringt zum Ausdruck, dass beim Bremsen keine Energie gespeichert werden kann. Allerdings können negative Beiträge von  $vF$  (durch Gefälle und/oder Verzögerungen) ebenfalls den Beitrag  $P_0$  bestreiten: Auch bei Einsatz der Motorbremse wird ja der Generator (bzw. die Lichtmaschine) angetrieben. Modifiziert man die Leistungsformel (18.2), können auch ältere und sehr moderne Formen des Energiemanagements modelliert werden:

- Bei Elektro- oder Hybridfahrzeugen, die beim Bremsen die kinetische Energie zu 100% speichern können, gilt

$$P(v, \dot{v}) = P_0 + vF(v, \dot{v}). \quad (18.3)$$

Im Schleppbetrieb wird die Leistung nach (18.3) negativ, was eine Umkehrung des Leistungsstroms in Richtung Batterie/Schwungrad etc entspricht.

- Bei alten Fahrzeugen ohne Schubabschaltung fällt ein  $P_0$  entsprechender Verbrauch immer an:

$$P(v, \dot{v}) = P_0 + \max [vF(v, \dot{v}), 0]. \quad (18.4)$$

### 18.5. Verbrauchsrate

Bei hundertprozentigem Motor-Wirkungsgrad, also einer vollständigen Umwandlung der volumenbezogenen kalorischen Energiedichte  $w_{\text{cal}}$  des Kraftstoffs in mechanische Energie  $E$ , gälte für den Verbrauch  $\Delta C$  (in Litern) die Definitionsgleichung  $\Delta E = w_{\text{cal}}\Delta C$ . Typische Werte der Energiedichte liegen für Benzin und Diesel bei  $39.610^6 \text{ J/l} = 11 \text{ kWh/l}$ .

Gegen diese ideale Beziehung spricht aber der zweite Hauptsatz der Thermodynamik. Reale Motoren haben einen vom Arbeitspunkt abhängigen *Wirkungsgrad*  $\gamma$ , welcher durch

$$\Delta E = \gamma w_{\text{cal}} \Delta C \quad \text{Definition des Wirkungsgrades } \gamma \quad (18.5)$$

definiert ist. Der Arbeitspunkt ist durch

- den Leistungsbedarf  $P$
- und die Motordrehzahl  $f$

definiert, so dass sich mit  $P = \frac{d\Delta E}{dt}$  folgende Formel für die Verbrauchsrate  $\dot{C}$  (Liter pro Zeiteinheit) zur Bereitstellung der nach (18.2) benötigten Motorleistung ergibt:

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

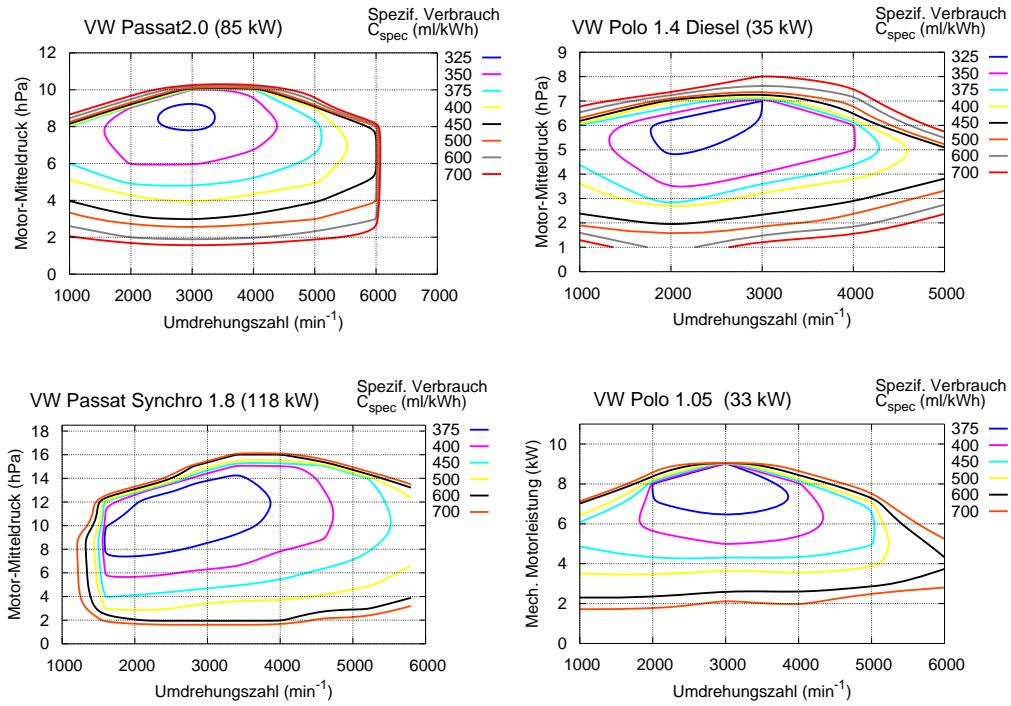


Figure 18.2.: Aus dem Motorprüfstand (TU Dresden) gewonnene Motorkennfelder verschiedener PKW-Typen. Die horizontale Achse stellt die Motordrehzahl  $f$  dar, während die auf der vertikale Achse dargestellte Größe (“effektiver Mitteldruck”, proportional zu  $P/f$ ) mit dem Druck aufs Gaspedal steigt. Die als Höhenschichtlinien dargestellte unabhängige Variable ist hier der spezifische Verbrauch  $\tilde{C}$  in Einheiten von 1 ml Treibstoff pro kWh mechanischer Energie. Für Benzin mit dem Brennwert  $w_{\text{cal}} = 11 \text{ kWh/kg}$  gilt  $\gamma = 90 \text{ ml/kWh}/\tilde{C}$

$$\dot{C} = \frac{dC}{dt} = \frac{P}{\gamma(P, f) w_{\text{cal}}}. \quad (18.6)$$

Die Motordrehzahl  $f = f(v, g)$  hängt direkt von der gefahrenen Geschwindigkeit  $v$ , dem gewählten Gang  $g$  und den Übersetzungsfaktoren des Getriebes ab. Bei gegebenen Getriebedaten und einer gegebenen Gangwahlstrategie (man kann z.B. immer den verbrauchsoptimale Gang wählen) hängt der Wirkungsgrad nur von der Leistung und der Geschwindigkeit ab. Setzt man nun die Leistung (18.2) mit (18.1) in Gl. (18.6) ein, erhält man die Verbrauchsrate allein als Funktion der Ausgangsgrößen der Verkehrssimulation – Geschwindigkeit und Beschleunigungen – sowie des Motorkennfeldes. Letzteres wird nun näher betrachtet.

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

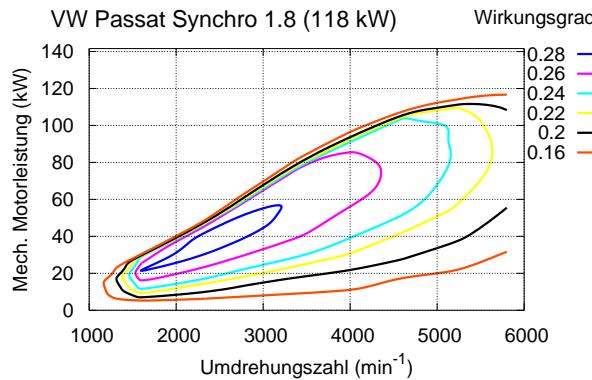


Figure 18.3.: Andere Darstellung des Kennfeldes für den Passat (118 kW). Die zweite unabhängige Variable ist nun die über (18.8) aus der Drehzahl und dem effektiven Mitteldruck umgerechnete Leistung (die obere Grenze gibt die bei der jeweiligen Drehzahl erreichbare Leistung bei „Vollgas“ an). Die abhängige Variable ist der mit (18.7) aus dem spezifischen Verbrauch berechnete Wirkungsgrad.

### 18.6. Motorkennfeld und instantane Verbrauchs- und Emissionsraten

Im Allgemeinen ist der Wirkungsgrad von Motor zu Motor verschieden und hängt vom „Arbeitspunkt“ des Motors ab, dessen wesentlichen Einflussvariablen

- die Motordrehzahl  $f$
- und der „effektiven Mitteldruck“ (Druckdifferenz im Zylinder)

sind.<sup>3</sup> Die Abhängigkeiten werden dabei in Motorprüfständen ermittelt und als sog. **Motorkennfeld** dargestellt. Motorkennfelder bezüglich des Wirkungsgrades gibt es in verschiedensten Varianten:

- Die abhängige Variable kann angegeben werden als **Wirkungsgrad**  $\gamma$  (Abb. 18.3), als **spezifischer Verbrauch** ( $\text{kg}/\text{kWh}$ ) bezüglich der Masse (Abb. 18.2) oder bezüglich des Volumens ( $\text{l}/\text{kWh}$ ), oder auch als Effizienzen (Kehrwerte der spezifischen Verbräuche). Für den volumenbezogenen spezifischen Verbrauch  $C_{\text{spez}}$  gilt

$$\frac{1}{\gamma w_{\text{cal}}} = C_{\text{spez}}. \quad (18.7)$$

Für den massenbezogene spezifischen Verbrauch muss man  $C_{\text{spez}}$  mit der spezifischen Masse (z.B. Benzin: etwa  $0.8 \text{ kg/l}$ ) multiplizieren.

---

<sup>3</sup>Weitere Abhängigkeiten wie die von der Betriebstemperatur werden hier nicht betrachtet.

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

- Die erste unabhängige Variable ist relativ einheitlich die **Motordrehzahl**. Diese kann allerdings auch normiert angegeben werden mit den Werten  $f_{\text{norm}} = 0$  bei der Leerlaufdrehzahl und  $f_{\text{norm}} = 1$  bei der zur maximalen Leistung gehörigen (also nicht der maximalen) Drehzahl.
- Die zweite unabhängige Variable kann definiert werden als **Motorleistung**  $P$ , Motormoment  $M$ , effektiver Mitteldruck  $\bar{p}$  oder Gaspedalstellung. Die ersten drei Größen sind elementar über die Drehzahl und das effektive Zylindervolumen  $V_{\text{zyl}}$  umrechenbar über

$$P = 2\pi f M, \quad \bar{p} = \frac{2M}{V_{\text{zyl}}} \quad (18.8)$$

(die zweite Beziehung gilt nur für Vieraktmotoren). Alle drei Größen steigen monoton mit der Gaspedalstellung: Ihre Werte sind umso höher, je stärker man das "Gaspedal runterdrückt". In Abbildung 18.2 wurde die Motorleistung gewählt, da dieses die anschaulichste und auch direkt durch (18.2) mit der Simulation verbundene Größe ist.

Generell spiegelt in den Kennfeldern die „Kraftstoffsparregel“ wider, dass man beim Beschleunigen bei möglichst geringer Drehzahl möglichst viel „Gas“ geben soll (linkes oder mittleres oberes Ende der Diagramme, je nach Leistungsanforderung) und danach ein möglichst hoher Gang gewählt wird, so dass man sich wieder möglichst weit „links“ im Diagramm befindet.

### 18.7. Auswertung

#### Hochgerechneter 100-km-Verbrauch

Aus der Verbrauchsrate lassen sich die anschaulichen Größen „(hochgerechneter) Kraftstoffverbrauch pro 100 km“ berechnen. Mit der Kettenregel

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dC}{dx}$$

ergibt sich der *hochgerechnete* instantane „100 km“-Verbrauch:

$$C_{100} = 100 \text{ km} \frac{dC}{dx} = \frac{100 \text{ km}}{v} \frac{dC}{dt} = \frac{100 \text{ 000 m}}{w_{\text{cal}}} \frac{P}{v \gamma(P, f(v, g))}. \quad (18.9)$$

Diese Größe hängt vom Kennfeld, der Geschwindigkeit, der Gangwahl und, über die Leistungsformel (18.2), von der Beschleunigung ab. Sie wird in manchen Fahrzeugen direkt (tiefpassgefiltert) angezeigt.

Die Abbildung 18.4 und 18.5 zeigen mit Hilfe der Motorkennfelder von Abb. 18.2 aus (18.9) berechnete **Fahrzeug-Verbrauchscharakteristik**. Bildlich gesprochen, "baut" man den Motor beim Übergang Motorkennfeld → Verbrauchscharakteristik "in ein Fahrzeug ein". Diese Verbrauchscharakteristik entspricht der Geschwindigkeits-Beschleunigungsmatrix,

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

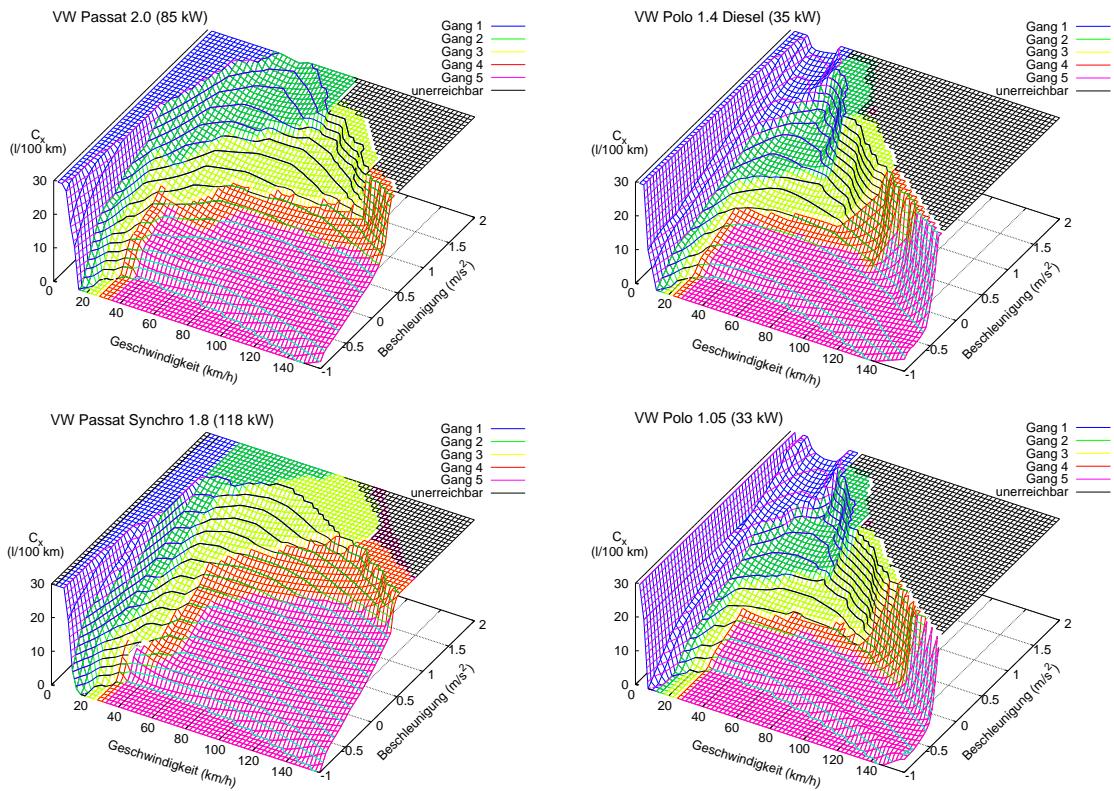


Figure 18.4.: Aus den Motorenkennfeldern 18.2 bzw. 18.3 unter Verwendung von (18.9) und der jeweiligen Fahrzeuggrößen berechnete Verbrauchscharakteristik. Gezeigt ist jeweils der hochgerechnete 100-km-Verbrauch als Funktion von Geschwindigkeit und Beschleunigung.

welche bei tabellenbasierten mikroskopischen Modellen durch Fahrtests bestimmt wird. Sie wird manchmal auch als **„Jante-Diagramm“** bezeichnet.

Hier wird die bereits erwähnte Kraftstoff-Spar-Regel direkt sichtbar: Generell wird ein hoher Gang gewählt, nur bei sehr hohem Leistungsbedarf (hohe Beschleunigung) wird bei gegebener Geschwindigkeit „heruntergeschaltet“. Typische Parameter zusammen mit typischen Werten für die Berechnung der Verbrauchscharakteristiken sind in der Tabelle 18.1 zusammengefaßt.

### Kohlendioxid- und andere Schadstoffemissionen

Motorkennfelder kann man natürlich nicht nur für den Verbrauch, sondern auch für verschiedene Emissionen (Stickoxyde, Rußpartikel etc) messen. Zu beachten ist, dass aufgrund der Chemie der Verbrennung die Emission an CO<sub>2</sub> direkt proportional zum Kraftstoffverbrauch ist:

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

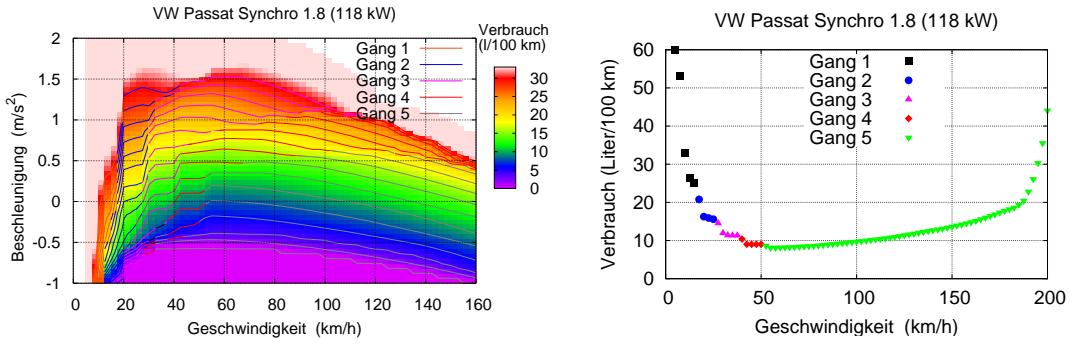


Figure 18.5.: Links: Andere Darstellung des hochgerechnete 100-km-Verbrauch des VW Passat 118 kW. Rechts: Konstantfahrt jeweils im verbrauchsoptimalen Gang.

- 2.32 kg/Liter für Super Plus (Oktanzahl 98 ROZ),
- 2.40 kg/Liter für Super (95 ROZ) und
- 2.68 kg/Liter für Diesel.

### 18.7.1. Ermittlung des Gesamt-Treibstoffverbrauchs einer Verkehrssituation

Rein intuitiv würde man vermuten, dass sich durch Verkehrszusammenbrüche und Staus der Treibstoffverbrauch stark erhöht. Doch ist dies wirklich so? Wenn ja, wieviel Prozent heißt "stark"? Für diese Frage gibt es erstaunlicherweise nur wenige und sich einander widersprechende, meist lediglich qualitative Aussagen. Mit Mikromodellen kann man quantitative Aussagen treffen. Dazu benötigt man

1. Die Zusammensetzung der Flotte
2. Motorkennfelder für repräsentative Vertreter der Flotte und alle zur Ermittlung der Fahrzeug-Verbrauchskennfelder  $\dot{C}_\alpha(v, \dot{v}, g)$  benötigten Fahrzeugparameter,
3. ein realitätsnahes Mikromodell (z.B. das IDM), mit dem man aus der Simulation für alle in der Simulation beteiligten Fahrzeuge  $\alpha$  die Geschwindigkeiten  $v_\alpha(t)$  und Beschleunigungen  $\dot{v}_\alpha(t)$  erhält,
4. Eine Regel, wie man die Gänge  $g_\alpha(t)$  wählt, z.B. verbrauchsoptimal.

Der Gesamt-Kraftstoffverbrauch der Verkehrssimulation im raumzeitlichen Gebiet  $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}] \times [x_1, x_2]$  berechnet sich dann durch

$$C_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{\alpha=\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \dot{C}_\alpha(v_\alpha(t), \dot{v}_\alpha(t), g_\alpha(t)). \quad \begin{array}{l} \text{Gesamt-} \\ \text{Treibstoffverbrauch} \\ \text{aus Mikromodellen} \end{array} \quad (18.10)$$

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

Einflussgröße	Symbol	Wert
Grundleistung	$P_0$	2 kW
Fahrzeugmasse	$m$	1 400 kg
Reibungskoeffizient	$\mu$	0.015
cw-Wert	$c_w$	0.32
Stirnfläche	A	2.03 m <sup>2</sup>
Dichte der Luft	$\rho$	1.3 kg/m <sup>3</sup>
Gravitationskonstante	$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
Brennwert des Treibstoffs	$w_{\text{cal}}$	39.610 <sup>6</sup> J/l = 11 kWh/l
Dynamischer Reifenradius	$r_{\text{dyn}}$	0.286 m
Übersetzungsverhältnisse 1. bis 5. Gang		13.90, 7.80, 5.26, 3.79, 3.09

Table 18.1.: Beeinflussungsfaktoren mit typischen Werten für die Berechnung des Treibstoffverbrauchs.

Die unteren und oberen Grenzen  $\alpha_1(t)$  und  $\alpha_2(t)$  geben die Indices der zur Zeit  $t$  stromaufwärtigsten bzw. stromabwärtigsten Fahrzeuge an. Abbildung 19.5 auf S. 194 zeigt ein Beispiel der Verbrauchsermittlung für komplexe Verkehrssituationen.

Die Ermittlung von Emissionen wie Stickoxyden geht bei Vorliegen entsprechender Kennfelder analog.

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

### Verständnisfrage:

Benzinsparempfehlungen

Eine Google-Suche mit den Begriffen **Benzin sparen Gas** ergibt unter Anderem folgende Empfehlungen zum Treibstoff sparen:

- Kein unnötiger Ballast im Auto? 100 kg Mehrgewicht erhöhen den Verbrauch etwa um einen halben Liter.
- Dachgepäckträger nur, wenn er wirklich gebraucht wird. Auch ein unbeladener Träger steigert den Verbrauch um etwa einen halben Liter, bei schneller Fahrt sogar um zwei. Ein offenes Fenster (!) kostet dann ebenfalls bis zu 1 Liter
- Nicht mit zu niedrigem Reifendruck fahren.
- Niedertourig fahren. Beim Anfahren schon nach einer Wagenlänge in den zweiten Gang schalten.
- Beim Beschleunigen sollte man viel Gas bei niedriger Drehzahl geben.
- Vorausschauend fahren. Wenn in 300 m eine Ampel auf Rot schaltet, vollständig vom Gas gehen.
- Bergab nie im Leerlauf fahren.
- Bergauf ist es günstiger mit weniger Gas im niederen Gang als mit viel Gas im hohen Gang zu fahren.
- Die Höchstgeschwindigkeit nicht ausnutzen. Bei 150 km/h verbraucht das Auto nur halb (!) so viel wie bei 200.
- Beim Beschleunigen sollte man viel Gas bei niedriger Drehzahl geben.
- Klimaanlage, Heckscheibenheizung etc können im Stadtverkehr den Verbrauch um mehr als 2 l/100 km erhöhen.

Geben Sie jeweils an, ob die Empfehlung richtig ist (es wurde eine falsche Empfehlung eingestreut!) und in welcher Formel an welcher Stelle die jeweilige Empfehlung ansetzt. Zur Auswahl stehen die Formeln (18.9), (18.2) und (18.1). Berücksichtigen Sie dabei, dass alle modernen Fahrzeuge eine **Schubabschaltung** besitzen, also bei eingelegtem Gang und Fuß vom Gas kein Treibstoff verbraucht wird, wenn die Drehzahl oberhalb der Leerlaufdrehzahl liegt.

### 18.8. Ermittlung des Treibstoffverbrauchs mit Makromodellen

Analog zu dem Fahrzeugkennfeld bei Mikromodellen ist in Makromodellen der Treibstoffverbrauch bzw. die Fahrzeugemission abhängig von der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und natürlich vom Fahrzeugtyp.

## 18. Ermittlung von Treibstoffverbrauch und Emissionen

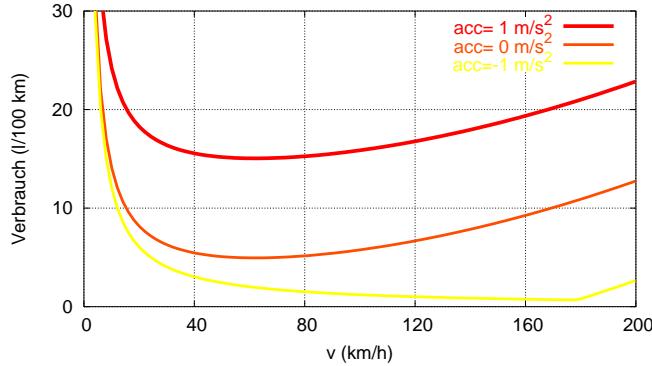


Figure 18.6.: Instantaner Benzinverbrauch  $C_{100} = \dot{C}(v, a) \cdot 100 \cdot 000 \text{m}/v$  unter den idealisierten Annahmen der Aufgabe "Treibstoffverbrauch" als Funktion von Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Sinnvollerweise mittelt man über alle Fahrzeugtypen, um ein **Makroskopisches Fahrzeugkennfeld**

$$\dot{C}(V, \dot{V}) = \langle C_\alpha(V, \dot{V}, g) \rangle$$

zu erhalten. Die Mittelung  $\langle \dots \rangle$  geht dabei über die Fahrzeuge  $\alpha$  und die Gangwahlstrategien  $g$  bei fester Geschwindigkeit  $V$  und Beschleunigung  $\dot{V}$ .

Den Gesamtverbrauch (bzw. die Gesamtemissionen) bei einer makroskopischen Simulation über ein raumzeitliches Gebiet  $[t_{\text{start}}, t_{\text{end}}] \times [x_1, x_2]$  erhält man dann aus

$$C_{\text{tot}} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t) \dot{C}(V(x, t), A(x, t)), \quad \begin{array}{l} \text{Gesamt-} \\ \text{Treibstoffverbrauch} \\ \text{aus Makromodellen} \end{array} \quad (18.11)$$

mit der makroskopischen Beschleunigung (vgl. (10.1))

$$A(x, t) = \frac{dV(x, t)}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right) V(x, t) \quad (18.12)$$

# 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

*Das Auto ist jene technische Erfindung, welche die Anforderungen an die Reaktionsgeschwindigkeit der Fußgänger beträchtlich gesteigert hat.*  
Lothar Schmidt

Aus der Analyse der Staudynamik auf Autobahnen (Abschnitt 16) anhand von Verkehrsdaten (Abschnitt I) folgt, dass fast alle Staus durch das Zusammentreffen von drei "Zutaten" entstehen:

- (A) Hohes Verkehrsaufkommen,
- (B) eine den Verkehrsfluss störende Streckeninhomogenität,
- (C) und eine lokale Störung (Bremsmanöver, "Jumborennen" etc.)

Damit ergibt sich das

## Grundprinzip der Optimierung des Verkehrs:

Homogenisiere den Verkehrsfluss (i) zeitlich, (ii) räumlich, und (iii) bezüglich der Geschwindigkeiten so gut wie möglich

Auf deutschen Autobahnen gibt es derzeit etwa 60 Verkehrsbeeinflussungsanlagen, die diese Grundidee umzusetzen versuchen und durch deren Einsatz die Unfallhäufigkeit sowie der durch Staus entstehende Zeitverlust um etwa 30 % und die Personenschaden sogar um etwa 50 % gesenkt werden konnten.<sup>1</sup> Die Maßnahmen sind allerdings abhängig von der Verkehrssituation anzuwenden. Man nutzt daher elektronisch gesteuerte Schilderbrückchen.

Die möglichen Verkehrsbeeinflussungsmaßnahmen wirken auf unterschiedliche Aspekte der Homogenität und außerdem auf unterschiedlich großen raumzeitlichen Skalen:

- Verkehrsplanerische Maßnahmen, die auf großen zeitlichen Skalen ( $\sim$  Jahre) v.a. auf den "Stau-Faktor" (A) wirken, wie
  - Ausbau, Neubau und Rückbau von Strecken. Die Effekte können dabei durchaus gegenintuitiv sein. Zum Beispiel kann ein Neubau einer Strecke im "Nutzergleichgewicht" zu einer Verlängerung der Reisezeiten für alle führen (Braess'sches Paradoxon).

<sup>1</sup>Bei der hohen Senkung der Verkehrsopfer-Zahlen spielt natürlich auch die Erhöhung der aktiven Sicherheit (ABS, ESP etc) sowie der passiven Sicherheit (Airbag, Knautschzonen) der Fahrzeugflotte im Erfassungszeitraum eine entscheidene Rolle.

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

- Lenkung des Verkehrs durch Änderung der Verkehrsregelung etc,
  - politisch motivierte Verringerung des Kfz-Verkehrsaufkommens wie Maut,
  - nur für mit mindestens 2 Personen belegte Autos zugelassene Spuren. Solche *HOV-Lanes* oder *diamond lanes* (*HOV* steht für *High Occupancy Vehicles*) sind vor allem in den USA verbreitet.
  - Förderung des ÖV durch z.B. Verringerung der Taktzeiten oder neue Linien.
- Mittlere räumliche ( $\sim 5 - 50$  km) und zeitliche ( $\sim 1$  h) Skalen: Dynamische (verkehrszustandsabhängige) Verkehrsführung und ggf. Umleitungen, die sich ebenfalls auf Staufaktor (A) auswirken.
  - Kleine räumliche ( $\lesssim 5$  km) und zeitliche ( $< 10$  min) Skalen:
    - Zuflussdosierung (homogenisiert den Verkehrsfluss zeitlich)
    - Tempolimits,
    - Verkehrsführung an und vor Baustellen,
    - und, *last but not least*, der Einfluss des menschlichen Fahrverhaltens.

Einige Maßnahmen der letzteren Kategorie werden nun näher diskutiert.

### 19.1. Geschwindigkeitsbeschränkungen

Tempolimits homogenisieren den Verkehr vor allem bezüglich der Geschwindigkeiten. Bei einem Tempolimit von z.B. 80 km/h ist (in Deutschland<sup>2</sup>) die *erlaubte Geschwindigkeit* von PKWs und LKWs dieselbe und ausserdem gleich oder kleiner als die *Wunschgeschwindigkeit* des Fahrers oder als die *Höchstgeschwindigkeit* des Fahrzeugs. Damit hat die *tatsächliche* Geschwindigkeit im freien Verkehr, die i.W. gleich dem Minimum aus allen obigen Geschwindigkeiten ist, eine geringe Varianz, wodurch ein Großteil der sonst den Verkehrszusammenbruch provozierender Bremsmanöver (Zutat 3: lokale Störungen!) erst gar nicht notwendig wird.

Damit am Beginn von z.B. aus Sicherheitsgründen notwendigen Langsamfahrrpassagen (60 km/h) keine zu starken Bremsmanöver entstehen, leitet man derartige Zonen durch *gestaffelte Tempolimits* von z.B. 120-100-80-60 (km/h) ein.<sup>3</sup>

Abbildung 19.1 zeigt einen Screenshot der unter [www.traffic-simulation.de](http://www.traffic-simulation.de) online verfügbaren Java-Simulation: Die durch das Tempolimit hervorgerufene Homogenisierung der Geschwindigkeit erleichtert die notwendigen Spurwechsel und reduziert damit potenziell stauberursachende abrupte Fahrmanöver und verhindert bzw. verzögert den Stau, so dass man letztendlich schneller vorankommt.

---

<sup>2</sup> Andere Länder haben andere LKW-Tempolimits z.B. (im Jahr 2004) 90 km/h in Frankreich.

<sup>3</sup> Höhere Tempolimits sind selten nötig; allerdings habe ich bereits auf Teststrecken ein Tempolimitschild "250 km/h" gesehen (;-)

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

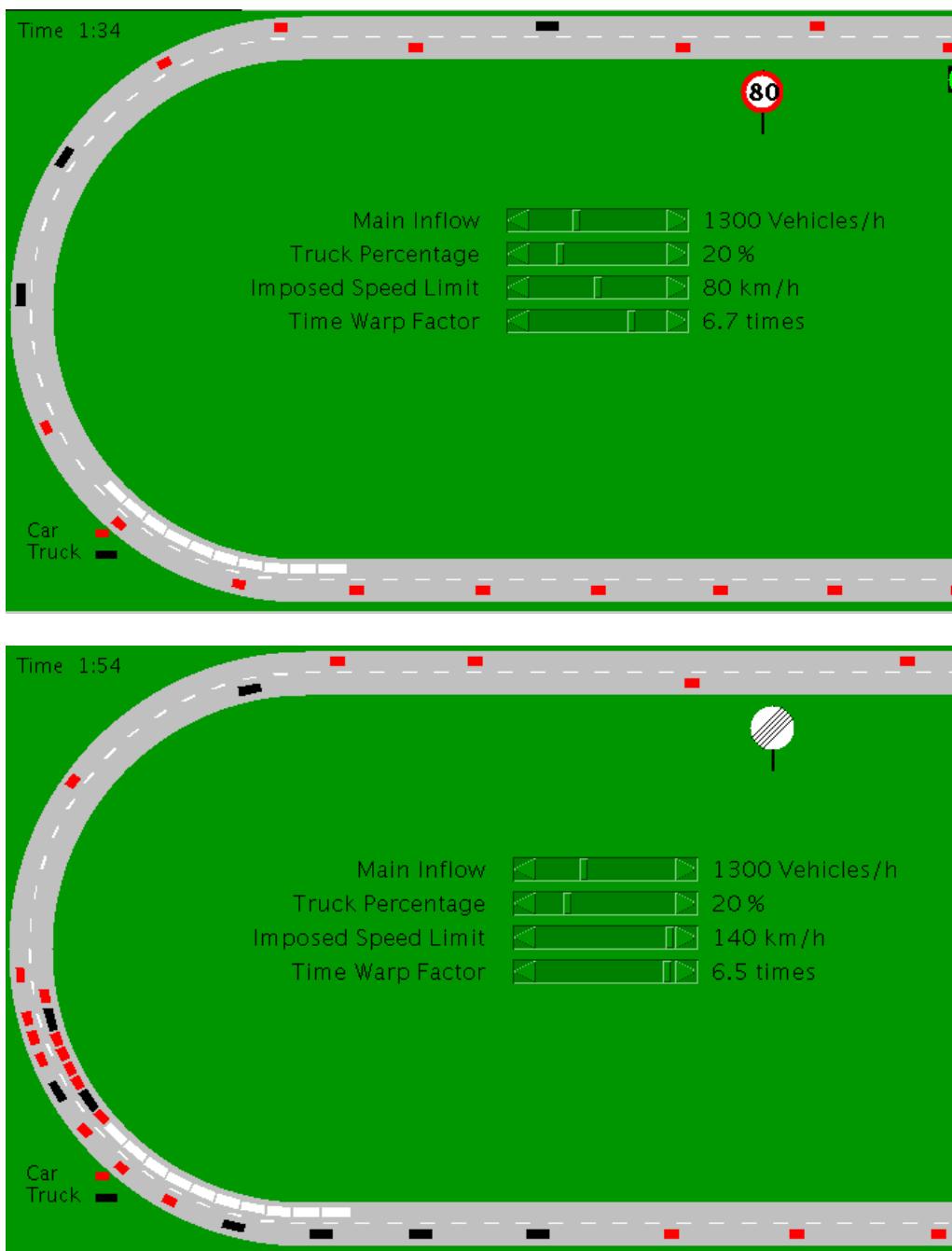


Figure 19.1.: Auswirkung von Tempolimits auf die Staubildung vor einer (z.B. durch eine Baustelle hervorgerufene) Spurverengung. Gezeigt ist ein Screenshot der Online-Simulation unseres Lehrstuhls, [www.traffic-simulation.de](http://www.traffic-simulation.de)

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

Bei geringem Verkehrsaufkommen (Staufaktor ( $A$ ) ist nicht gegeben) führen auch hohe Geschwindigkeitsunterschiede nicht zu kritischen Störungen, sodass dann Tempolimits zur Verkehrsflussoptimierung nicht sinnvoll sind.<sup>4</sup>

**Auswirkung von Tempolimits:**  
"Langsamer ist manchmal schneller".

### 19.2. Zuflussdosierung

Zufluss-Dosierungen (*Ramp Metering*) sind vor allem in den USA verbreitete Verkehrsbeeinflussungs-Maßnahmen: Kommt ein hoher Flusspeak ("Fahrzeugschwall") auf den Hauptfahrbahnen einer Autobahn mit hohen Verkehrsaufkommen auf einer Zufahrt zusammen, werden die Fahrzeuge auf der Zufahrt durch eine rote "Pförtnerampel" temporär am Einfahren auf die Autobahn gehindert, bis der Flusspeak vorbei ist. Dadurch wird der *zeitliche* Verlauf des Verkehrsflusses homogenisiert und gleichzeitig die Stärke der durch die Einfahrt bewirkten *Streckeninhomogenität* verringert. Damit nach Umschalten der Zufahrts-Ampel auf "Grün" keine neue Fluss-Spitze durch die auffahrenden Fahrzeuge entsteht, werden die Fahrzeuge durch extrem kurze Grünphasen einzeln auf die Autobahn gelassen.<sup>5</sup>

Abbildung 19.2 zeigt die Simulation der einfachstmöglichen Regelstrategie anhand echter Verkehrsflussdaten und Parametern der Mikrosimulation, die zu einer ähnlichen Staubildung wie tatsächlich beobachtet (linkes oberes Bild) führen. Die Strategie lautet

"Reduziere den Zufluss  $Q_{rmp}$  ggf. so, dass die Summe  $Q_{main} + Q_{rmp}$  aus Verkehrsfluss auf Hauptstrecke und Rampe einen kritischen Wert  $Q_c$  nicht überschreitet" (vgl. Abb. 19.3).

Das Bild 19.2 rechts oben zeigt die Verkehrssituation bei optimal eingestelltem Regelparameter  $Q_c$ . Die Zeitreihen links unten zeigen Reisezeiten ohne und mit Zuflusskontrolle sowie die bei Zuflusskontrolle an der Zufahrt vor der Ampel entstehenden Wartezeiten.

Ergebnis: Nicht nur die Fahrer auf der Hauptstrecke profitieren, sondern, abgesehen von einem sehr kleinen Zeitintervall um 17:00 h, auch *die an der Zufahrt auffahrenden Fahrzeuge*: Die notwendige Wartezeit ist kleiner als die anschließende Reisezeitsparnis auf der Hauptstrecke durch den ausbleibenden Verkehrs Zusammenbruch!

In Praxi ist die Regelung der Zuflusskontrolle meist komplizierter und hängt regelbasiert u.a. von gemessenen Zeitreihen von benachbarten stationären Detektoren sowie der Uhrzeit ab. Beispielsweise muss man vermeiden, dass die durch die Pförtnerampel verursachte Stauung auf das Nebennetz herausreicht und dieses dadurch beeinträchtigt.

<sup>4</sup>Tempolimits können selbstverständlich auch aus anderen Gründen wie Sicherheit und Lärmschutz sinnvoll sein.

<sup>5</sup>In Deutschland gibt es vorgeschriebene Mindestzeiten für Grünphasen, die eine solche Ampelsteuerung nicht erlauben.

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

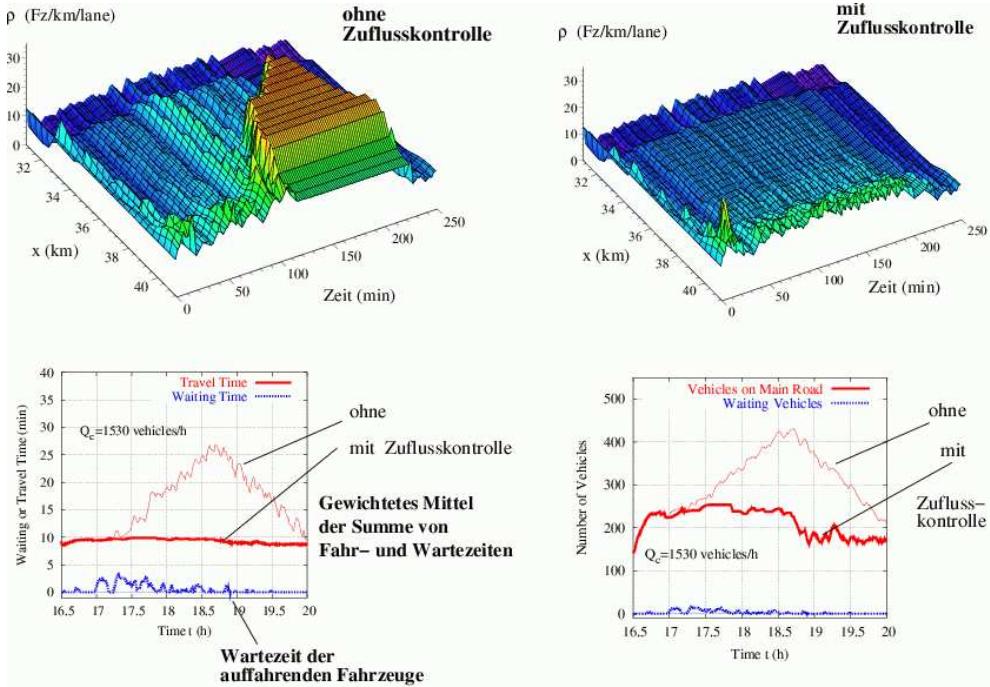


Figure 19.2.: Stauvermeidung durch Zuflusskontrolle.

Droht die Warteschlange der gestauten Fahrzeuge deshalb die von der konkreten Infrastruktursituation vorgegebene Aufnahmefähigkeit zu überschreiten, wird die Regelung i.A. wieder deaktiviert.

Die Parameter der Zuflussregelung werden z.B. durch *evolutionäre Optimierung* (vgl. Abschnitt 19 weiter unten) bestimmt.

**Auswirkung von Zuflusskontrollen:**  
"Weniger ist manchmal mehr"

## 19.3. Effizientes Fahrverhalten und automatische Temporegler

Der wichtigste kapazitätsbestimmende Parameter ist die Zeitlücke  $T$ , vgl. Abschnitt 13.1. Dies legt nahe, den kapazitätsmindernden Einfluss von Streckeninhomogenitäten wie Baustellen oder Steigungen durch eine etwas verkürzte Folgezeit beim Durchfahren dieser Streckeninhomogenitäten zu mindern (vgl. Abb. 19.4). Damit diese *dynamische Reduzierung* der Störstellen-Stärke nicht auf Kosten der Verkehrssicherheit geht, ist natürlich erhöhte Aufmerksamkeit nötig. Damit bietet sich diese Art der Steigerung der Effizienz vor allen in Kombination mit dem Einsatz von "adaptiven Temporegler", **Adaptive Cruise Control** (ACC) an, welche im Abschnitt 21 besprochen werden.

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

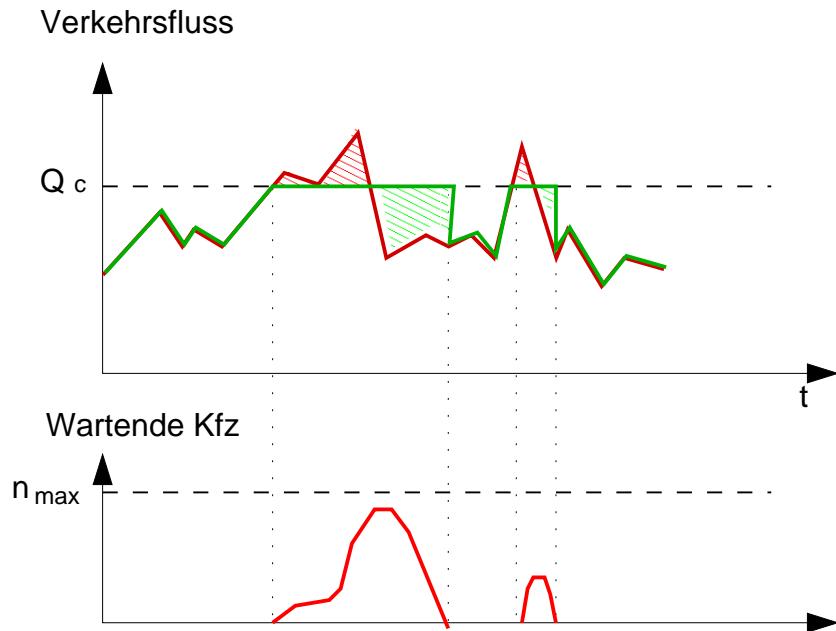


Figure 19.3.: Eine einfache Regelstrategie für eine Zuflusskontrolle. Oben: Der Gesamtfluss auf Hauptstrecke wird durch eine Pförtnerampel auf der Zufahrt auf  $Q_c$  beschränkt und dadurch die Verkehrs nachfrage (rote Kurve) auf die Regelkurve (grün) transformiert. Die Flächen zwischen der Nachfragekurve und der Regelkurve geben die Maximalzahl von wartenden Fahrzeugen an. Unten: Zeitlicher Verlauf der wartenden Fahrzeuge. Falls diese Fahrzeugzahl die Pufferkapazität  $n_{\max}$  überschreitet, drohen Beeinträchtigungen des untergeordneten Netzes.

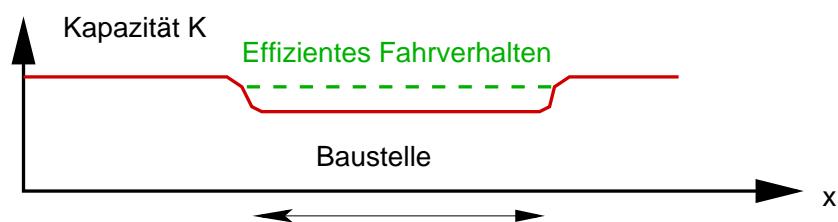


Figure 19.4.: Homogenisierung der Streckenkapazität und Abschwächung der Engstelle durch eine ortsabhängige effektive Fahrweise bzw. ACC-Regelung.

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

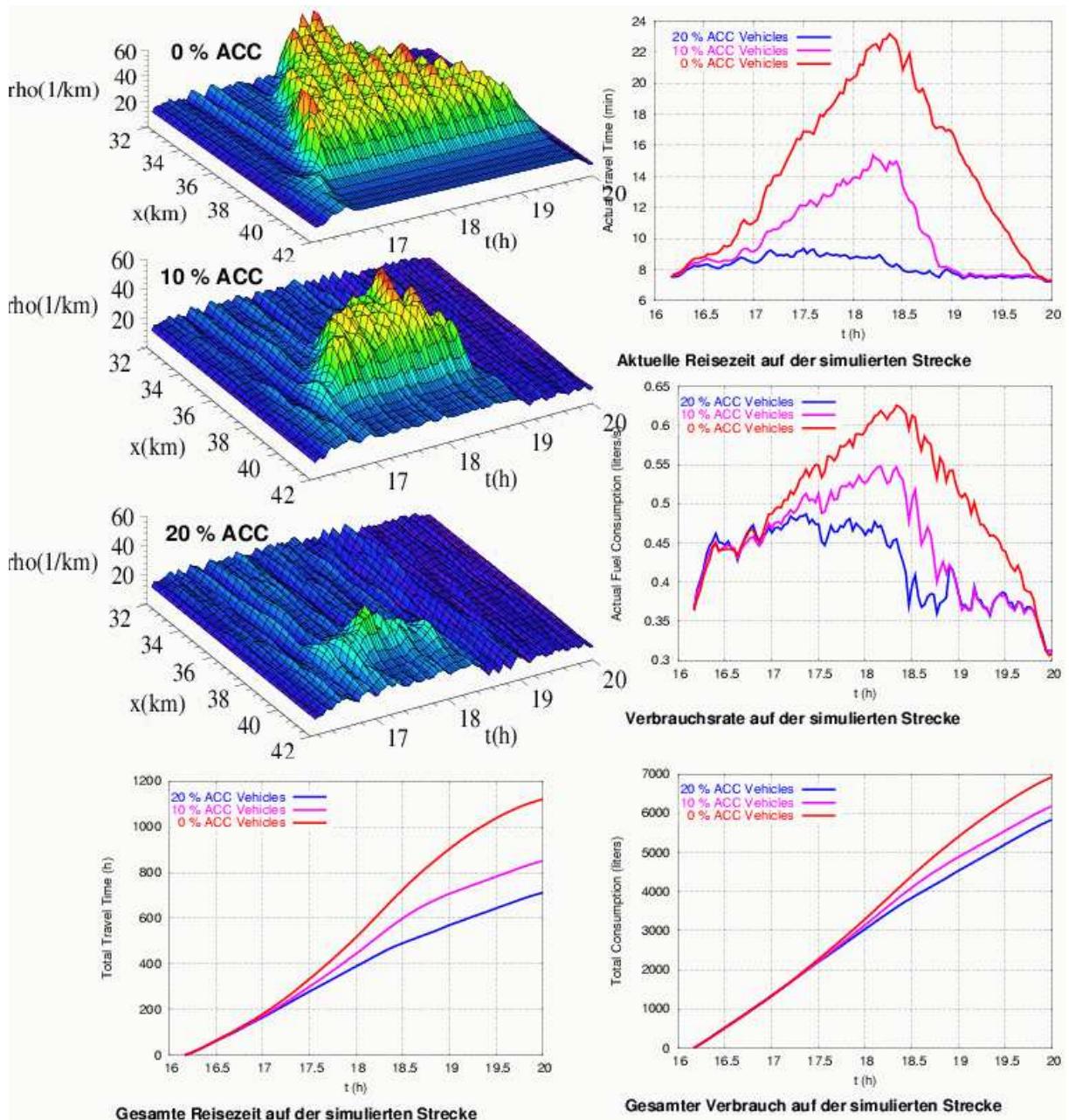


Figure 19.5.:

Reduktion des Staus und damit einhergehende Reduktion der Reisezeiten und des Verbrauchs durch ACC-Fahrzeuge anhand einer der A8-Ost beim Irschenberg nachempfundenen Mikro-Verkehrssituation.

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

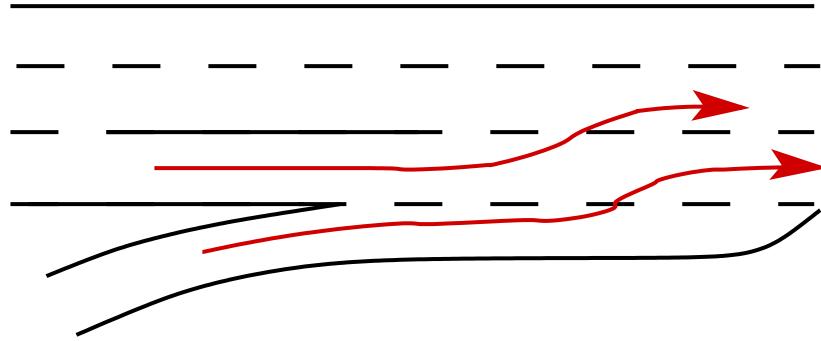


Figure 19.6.: Lokales Spurwechselverbot von der rechten auf die mittlere Spur im Vorfeld von größeren Ausfahrten wie z.B. Dresden-Altstadt in Richtung West. Die Länge des Wechselverbots ist verkürzt gezeichnet. In Wirklichkeit beträgt sie etwa 300 m.

Abbildung 19.5 zeigt, dass bereits ein geringer Prozentsatz von mit ACC ausgestatteten Fahrzeugen den Zusammenbruch verhindert, wenn das ACC-System eine der Verkehrssituation angepasste Fahrstrategie implementiert.

Solche Simulationen zeigen des Weiteren, dass auch menschliche Fahrer die Auflösung eines bereits entstandenen Staus fördern können, ohne den Vorschriften widersprechende zu geringe Folgezeiten zu fahren oder die Verkehrssicherheit zu gefährden:<sup>6</sup>

### Beitrag des Fahrers zur Verkehrsoptimierung:

- Bei Engstellen keine *zu* großen Abstände lassen
- Am Ende eines Staus oder einer Engstelle zügig beschleunigen!

## 19.4. Überholverbot für LKW und andere lokale Verkehrsregeln

Weitere geeignete Maßnahmen zur Verkehrshomogenisierung sind (alles am Beispiel einer dreispurigen Autobahn):

<sup>6</sup>Notiz am Rande: Die gesetzliche Vorgabe "Abstand gleich halber Tacho" (entspricht einer Zeitlücke  $T = 1.8$  s) wird von den meisten Fahrern nicht beachtet. Vielmehr entsprechen die wahrscheinlichsten Folgezeiten  $T = 0.9$  auf deutschen Autobahnen (vgl. Abschnitt 13.1 und Abb. 13.1) der Regel "Abstand gleich Viertel Tacho"(!). Würde sich jeder Fahrer an die Abstandsregel halten, würde dies zu viel mehr Staus (!) führen, da dann nach Gl. (16.2) die Kapazität pro Spur eine theoretische Obergrenze von ca. 1600 Fz/h/Spur hat, während in Praxi über Stunden eine Verkehrsleistung von 2000/h/Spur ohne Verkehrszusammenbruch möglich ist, siehe z.B. Abb. 5.10.

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

- *LKW-”Überholverbote*, v.a. an Steigungs- oder Gefällestrecken. Diese verhindern Steigungs-”Jumborennen”, bei denen LKWs auf der mittleren Spur z.B. nur 50 km/h oder noch langsamer fahren und reduzieren so gefährliche Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen mittlerer und rechter Spur.
- *Mindestgeschwindigkeiten* auf der linken und mittleren Spur sowie gleichzeitig *Höchstgeschwindigkeiten* auf Steigungsstrecken. Auf diese Weise wird ebenfalls eine gefährliche extreme Geschwindigkeitsdifferenz zwischen mittlerer und linker Spur (z.B. 50 km/h und 150 km/h) vermieden. Eine Kombination mit LKW-Überholverboten ist sinnvoll.
- Empfehlungen, die befahrene Spur so selten wie möglich zu wechseln (*Stay-in-Lane-Recommendation*).
- *Spurwechselverbot ”Rechts-Mitte”* vor größeren Einfahrten (vgl. Abb. 19.6). Auf diese Weise wird das in letzter Zeit zunehmend beobachtete Wechseln auf die linke Spuren vor Einfahrten verhindert, welches einen wesentlichen vermeidbaren Störfaktor darstellt. Diese Regelung erfordert lange Beschleunigungsspuren. Nach etwa einem Drittel der Länge der Beschleunigungsspur wird das Spurwechselverbot wieder aufgehoben, um allen auffahrenden Fahrzeugen einen störungsfreien Spurwechsel auf die Hauptfahrbahnen zu ermöglichen.<sup>7</sup> Als Gesamteffekt bewirkt diese Maßnahme, dass lange Beschleunigungsspuren bei Bedarf auch genutzt werden und damit die Stärke der Störstelle ”Auffahrt“ reduziert wird. Andernfalls würden alle sofort am Anfang auf die Hauptfahrbahn auffahren, so dass die Verkehrsdynamik *de Facto* wie bei einer den Verkehrsfluss stärker störenden kurzen Auffahrt wäre. Außerdem wird *dynamisch* ein ähnlicher Effekt wie bei der Zuflussdosierung erreicht.<sup>8</sup>

### 19.5. Kriterien (”Zielfunktionen“) für die Verkehrsoptimierung

Eine der wesentlichen Voraussetzungen für eine effektive Verkehrsoptimierung ist eine geeignete **Zielfunktion** bzw. ein **Zielfunktional**.<sup>9</sup>

Mögliche Ziele einer Optimierung sind z.B. Minimierung der Zeitverluste, Minimierung der Emissionen oder Maximierung des Fahrkomforts. Im Folgenden werden für diese Ziele geeignete Zielfunktionen diskutiert. Die Zielfunktionen werden dabei gleich für ein ganzes **Netzwerk** von Verkehrsverbindungen vorgestellt.

---

<sup>7</sup> Auf manchen Autobahnauffahrten, z.B. Dresden-Alstadt in Richtung West, wird eine reine Fahrbahnmarkierung allerdings kaum beachtet.

<sup>8</sup> Eine weitere Verhaltensweise, wie jeder Fahrer zur Steigerung der Effektivität beitragen kann: Bei Spusperrungen und dadurch verursachten Stau die voraus gesperrte Spur bis zum Ende nutzen und erst dann nach dem Reißverschlussprinzip wechseln. Meist kommt man damit auch schneller vorwärts.

<sup>9</sup> Eine Funktion ist eine Abbildung von Zahlen auf andere Zahlen, während ein Funktional ganze Funktionen auf Zahlen abbildet. Ein geläufiges Beispiel eines Funktionals ist ein “bestimmtes Integral”.

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

- **Kriterium 1: Minimierung der Gesamtreisezeiten**

Mikroskopisch: dimensionslose Gesamtreisezeiten

$$\mathcal{F}_\tau = \frac{1}{T_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{ij} n_{ij}(t). \quad (19.1)$$

Hierbei ist  $n_{ij}(t)$  die Fahrzeugzahl auf der Strecke von Knoten  $i$  nach  $j$  und die Summe geht über alle Knotenkombinationen  $\{ij\}$ , für die im Untersuchungsgebiet direkte Streckenanbindungen bestehen. Die Normierungskonstante  $T_0$  ist zunächst beliebig und dient dazu, die Zielfunktion einheitenlos zu machen sowie die Prioritäten gegenüber anderen Zielkriterien festzulegen. Sie wird später gleich der Gesamtreisezeit des nichtoptimierten Systems gewählt.

Makroskopisch:

$$\mathcal{F}_\tau = \frac{1}{T_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{\text{alle Strecken}} dx \rho(x, t) \quad (19.2)$$

Im Falle von **Linienbeeinflussungsanlagen** (Tempolimits etc.) wird i.d.R. nur eine Strecke betrachtet. Im Falle von Beeinflussungsmaßnahmen, die auch Zufahrten betreffen, wie z.B. die Zuflusskontrolle, schließt die Summe über alle Strecken bzw. das Ortsintegral auch die Zufahrt mit ein. Für die Optimierung eines Netzwerks geht das Ortsintegral über alle Strecken des Netzwerks. Als Nebenbedingung der Optimierung hat man u.a. eine vorgegebene Verkehrsnachfrage, oder, bei Netzwerken, eine Nachfragematrix.

In Abb. 19.2 unten rechts ist die Zielfunktion  $\mathcal{F}_\tau$  z.B. proportional der Summe der Flächen unter den Kurven der Fahrzeuganzahl auf der Hauptstrecke und der Zufahrt.

- **Kriterium 2: Maximierung des Fahrkomforts**

Der Fahrkomfort wird im Wesentlichen durch

- Beschleunigungen  $a = \dot{v}$ , sowie durch
- abrupte Änderungen der Beschleunigungen,  $J = \ddot{a} = \ddot{v}$

bewirkt. Die zeitl. Änderung der Beschleunigung bewirkt im Fahrzeug einen "Ruck" (engl: *Jerk*), der z.B. Kaffeetassen im Fahrzeug überschwappen lässt. Besonders anschaulich wird der Fahrkomfort bzw. sein Fehlen durch die Dynamik einer schwappenden Kaffeetasse ("Coffeemeter", vgl. das Titelbild dieses Skripts) dargestellt. Für eine Optimierung wird der zu minimierende "Diskomfort"  $\mathcal{F}$  z.B. durch folgende zu minimierende Fehlerquadrat-Integrale dargestellt.

Mikroskopisch:

$$\mathcal{F}_{\text{comf}} = \frac{1}{T_0 a_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{\alpha=\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} (\dot{v}_\alpha^2 + \tau_0^2 \ddot{v}_\alpha^2) \quad (19.3)$$

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

mit  $\alpha_2(t) = \alpha_1(t) + n_{12}(t) - 1$ .

Makroskopisch:

$$\mathcal{F}_{\text{comf}} = \frac{1}{T_0 a_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t) \left( A^2(x, t) + \tau_0^2 \dot{A}^2(x, t) \right) \quad (19.4)$$

Die Zeitkonstante  $\tau_0$  (Werte in der Größenordnung 1 s) gibt die relative Gewichtung des Rucks gegenüber der Beschleunigung an, während die Beschleunigung  $a_0$  (Werte in der Größenordnung der Fahrzeugbeschleunigungen, also um 1 m/s<sup>2</sup>) die relative Gewichtung des Fahrkomforts gegenüber der Reisezeit angibt (kleinere Werte von  $a_0$  entsprechen einer höheren Gewichtung). Die im Bezugssystem des Fahrers bestimmte "makroskopische Beschleunigung"  $A(x, t)$  ist nach Gl. (18.12) durch  $A(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$  gegeben.

- **Kriterium 3: Minimierung des Gesamt-Treibstoffverbrauchs**

Mikroskopisch:

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{T_0 \dot{C}_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \sum_{\alpha=\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \dot{C}_\alpha(v_\alpha(t), \dot{v}_\alpha(t), g_\alpha(t)) \quad (19.5)$$

Makroskopisch:

$$\mathcal{F}_c = \frac{1}{T_0 \dot{C}_0} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} dt \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x, t) \dot{C}(V(x, t), A(x, t)), \quad (19.6)$$

Die Konstante  $\dot{C}$  gibt die relative Gewichtung des Treibstoffverbrauchs gegenüber dem Zeitaufwand an. Ein Wert  $\dot{C}_0 = 10$  Liter/h bedeutet zum Beispiel, dass 1 h Zeitverlust so hoch gewichtet werden wie 10 Liter an zusätzlich verbrauchten Treibstoff.

## 19.6. Vorgehen bei der Optimierung

Die Optimierungsaufgabe besteht in der Minimierung der auf dem raumzeitlichen Gebiet  $G = [x_1, x_2] \times [t_{\text{start}}, t_{\text{end}}]$  definierten Zielfunktion  $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\tau + \mathcal{F}_{\text{comf}} + \mathcal{F}_c \quad (19.7)$$

unter der Nebenbedingung einer festen Verkehrsfrage-Ganglinie  $Q_{\text{in}}(t)$  auf der Hauptstrecke und ggf. einer festen Zufahrts-Ganglinie  $Q_{\text{zu}}(t)$  durch eine oder mehrere der oben besprochenen Optimierungsmaßnahmen. Das Gebiet  $G$  muss dabei so gewählt werden,

## 19. Modellgestützte Optimierung des Verkehrsflusses

dass es weder an den räumlichen Rändern  $x = x_1$  oder  $x_2$  noch an den zeitlichen Rändern  $t = t_{\text{start}}$  oder  $t = t_{\text{end}}$  zu Staus kommt. Andernfalls ist nicht gewährleistet, dass die ganze Verkehrsnachfrage  $Q_{\text{in}}(t)$  und  $Q_{\text{zu}}(t)$  im Optimierungszeitraum "abgefertigt" wird, so dass man die Simulationen nicht vergleichen kann.

Die Prioritäten, die man bei der Verkehrsoptimierung setzt, werden durch die Wahl der Parameter  $a_0$ ,  $\tau_0$ , und  $\dot{C}_0$  der Zielfunktion festgelegt. Den Wert von  $T_0$  könnte man im Prinzip gleich 1 setzen, da er in den Summanden von  $\mathcal{F}$  als gemeinsamer Faktor vorkommt (*Verständnisfrage*: Warum?). Ein besserer Vergleich des Optimierungserfolgs bei verschiedenen raumzeitlichen Gebieten  $G$  sowie verschiedenen Verkehrsnachfrage-Ganglinien wird jedoch ermöglicht, indem man  $T_0$  gleich der Gesamtreisezeit vor der Optimierung setzt. In diesem Fall ist die Zielfunktion  $\mathcal{F}$  immer einheitenlos und hat einen Wert in der Größenordnung von 1.

Bei dieser Optimierungsaufgabe handelt es sich um eine nichtlineare Optimierung mit einer nur relativ zeitaufwändig zu errechnenden, bezüglich der Parameter der Optimierungsmaßnahmen nicht differenzierbaren Zielfunktion  $\mathcal{F}$ . Die Ermittlung eines Wertes von  $\mathcal{F}$  erfordert jeweils einen kompletten Simulationslauf.

Bei der Optimierung sollte man daher darauf achten,

- die Zielfunktion möglichst selten zu berechnen,
- ein Minimierungsverfahren zu wählen, welches keine Ableitungen der Zielfunktion benötigt,
- möglichst nicht in Nebenminima zu geraten.

Geeignete Verfahren der Optimierung sind vor allem **evolutionäre Verfahren** sowie eingeschränkt auch **Neuronale Netze**.

Die evolutionären Verfahren lehnen sich an Darwins Evolutionsmechanismus des *Survival of the fittest* an: Während der Optimierung werden gleichzeitig verschiedene "Individuen", sprich, verschiedene Parameterkombinationen der Optimierungsmaßnahmen, betrachtet. Alle "Individuen" haben eine begrenzte Lebensdauer. Nur die "fittesten" Individuen, sprich, die Parameterkombinationen mit besonders niedrigen Werten der Zielfunktion, dürfen sich "paaren" und "fortpflanzen", sprich, eine neue Parameterkombination generieren, die aus Parameterwerten beider "Eltern" sowie einigen zufälligen Änderungen ("Mutationen") besteht.

Das Optimum ist dann angenähert erreicht, wenn sich der über die "Population" (sprich: der Menge der konkurrierenden Parameterkombinationen) gemittelte Wert der Zielfunktion nicht mehr deutlich ändert.

## 20. Modellierung von Stadtverkehr



Installation “Traffic Light Tree” von Pierre Vivant, in Canary Wharf (London).

# 21. Verkehrssimulations-Software und weitere Anwendungen

Mikromodelle für die Longitudinal- und Spurwechseldynamik dienen auch als *Modellkern von Verkehrssimulations-Software* wie MITSIM vom Massachusetts Institute of Technology (MIT) oder VISSIM von der PTV AG. Der letztere Simulator (von einer Ausgründung der Uni Karlsruhe!) ist das Standard-Tool für Verkehrsplaner in Deutschland für alle größeren Planungsaufgaben im Stadtverkehr (Bergstraße, Waldschlösschenbrücke ..) und enthält neben Straßenverkehr samt aller Arten von Kreuzungen und Vorfahrtssregelungen auch den kompletten ÖV, Optimierung von Ampelschaltungen, eine 3D-Grafik und vieles mehr.<sup>1</sup>

Martin: PARAMICS und FOSIM ?

Martin: wuerde ich zu Optimierung legen → lokale, fahrzeugseitige strategie! Ein weiterer Anwendungsbereich von Mikromodellen ist ein Einsatz als Regler in *Adaptive-Cruise-Control-Systemen*. **Adaptive Cruise Control** (ACC) ist die Weiterentwicklung des vor allem in der USA geläufigen statischen "Tempomaten" (Cruise Control), welcher ohne Zutun des Fahrers das Fahrzeug auf einer vorher eingegebene Geschwindigkeit hält.

Wegen des hohen Verkehrsaufkommens ist dies in Europa unpraktikabel, da der Fahrer wegen langsamerer Vorderfahrzeuge ständig manuell eingreifen müsste. Deshalb gibt der Fahrer dem ACC-System neben einer Wunschgeschwindigkeit auch eine Folgezeit zum Vorderfahrzeug vor, die das Regelverhalten im Falle von Kolonnenverkehr oder langsameren Vorderfahrzeugen bestimmt. Der Regler beschleunigt und bremst das Fahrzeug selbstständig, so dass sicheres Fahren unter Einhaltung von Wunschgeschwindigkeit und Folgezeit gewährleistet ist.

Als Input-Information bekommt der Regler Abstand und Geschwindigkeitsdifferenz zum Vorderfahrzeug, welche von im Fahrzeug eingebauten Radarsensoren gemessen werden. Zusammen mit der eigenen Geschwindigkeit, welche in modernen Fahrzeugen über eine spezielle Schnittstelle (*CAN-Bus*) zur Verfügung steht, sind dies genau die Größen, von denen ein Mikromodell abhängt! Da ein ACC eine im Vergleich zur menschlichen Reaktionszeit vernachlässigbare Ansprechzeit hat, sind Mikromodelle als Kern von ACC-Reglern sogar besser geeignet als zur Modellierung menschlicher Fahrer.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Der Simulator ist am Lehrstuhl verfügbar; bei Interesse kann er vorgeführt werden. Auf Wunsch kann VISSIM auch für Belegarbeiten verwendet werden; die Standard-Software für Belegarbeiten ist allerdings das PTV-Produkt VISUM.

<sup>2</sup> Wie beim klassischen Tempomaten liegt bei ACC-Systemen die Verantwortung *immer* beim Fahrer. Sobald der Fahrer auf Gas oder Bremse tritt, deaktiviert sich das System automatisch.

# A. Appendix

## A.1. Zur Herleitung eines Makromodells aus einem Fahrzeugfolgemodell

Beweisen muss ich diesen Käs' sonst ist die Arbeit unseriös.  
F. Wille

Zur Veranschaulichung leiten wir nun ein solches Makromodell (das **Payne-Modell**) aus einem einfachen mikroskopischen **Fahrzeugfolgemodell**, dem **Newell-Modell**, her. In Fahrzeugfolgemodellen, die im Abschnitt 11 näher behandelt werden, wird die Geschwindigkeitsänderung eines jeden Fahrers (Bremsen oder Gasgeben) als Funktion des Verkehrsgeschehens betrachtet. Ein Fahrzeugfolgemodell ist also durch seine Beschleunigungsfunktion charakterisiert. Im Newell-Modell wird sie durch folgende Annahmen festgelegt:

- Die Fahrer passen ihre Geschwindigkeit innerhalb der *Anpassungszeit*  $\Delta t = T_r + \tau$  an die Verkehrssituation an. Diese Anpassungszeit enthält dabei die Reaktionszeit  $T_r$  und die Zeit  $\tau$  für das Beschleunigen oder Verzögern.
- Die Geschwindigkeit wird auf die vom Abstand des Vorderfahrzeugs abhängige *Gleichgewichtsgeschwindigkeit*  $v_e(d_\alpha)$  angepasst.<sup>1</sup> Für geringe Abstände (Kolonnenverkehr) ergibt sich diese Geschwindigkeit im Wesentlichen aus dem zeitlichen Sicherheitsabstand, bei großen Abständen (freie Strecke) ist sie gleich der Wunschgeschwindigkeit  $V_0$ .

Dies ergibt eine Gleichung für die neue Geschwindigkeit  $v_\alpha(t + \Delta t)$  des Fahrzeugs  $\alpha$  nach der Anpassungszeit,

$$v_\alpha(t + \Delta t) = v_e(d_\alpha) \quad \text{Newell-Modell.} \quad (\text{A.1})$$

Die makroskopische **Dichtheitgleichung** hängt, unabhängig von der Art des Makromodells, nur von der Infrastruktur ab, z.B. Gl. (8.8) für homogene Strecken.

Zur Herleitung der **Geschwindigkeitsgleichung** fassen wir die längs der Trajektorien  $x_\alpha(t)$  gegebene Geschwindigkeit  $v_\alpha(t)$  als Spezialfall eines Geschwindigkeitsfeldes  $V(x, t)$  auf, indem man

$$v_\alpha(t) = V(x_\alpha(t), t) \equiv V(x, t)$$

setzt.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Für mikroskopische Geschwindigkeiten verwenden wir kleine Buchstaben, für makroskopische große.

<sup>2</sup>Man könnte z.B. das Geschwindigkeitsfeld  $V(x, t)$  aus Datenpunkten der Trajektorien mit Gl. (6.1) ermitteln.

## A. Appendix

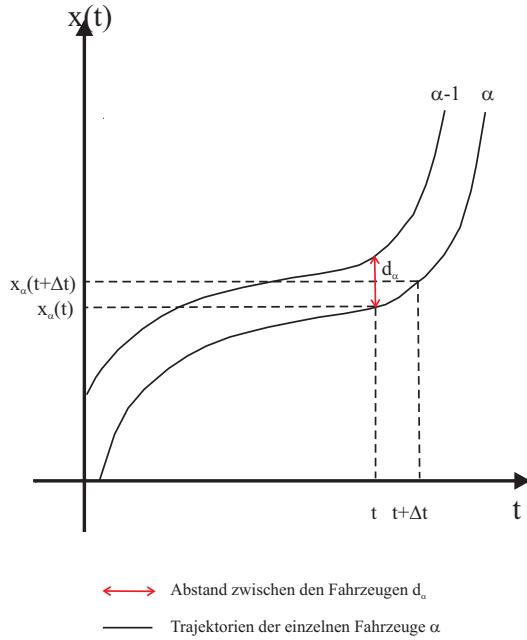


Figure A.1.: Trajektorien  $x_\alpha(t)$  und  $x_{\alpha-1}(t)$  des betrachteten Fahrzeugs  $\alpha$  und seines Vorderfahrzeugs  $\alpha - 1$ .

Analog definieren wir aus dem Inversen des Bruttoabstandes  $d_\alpha(t) = x_\alpha(t) - x_{\alpha-1}(t)$  zwischen jeweils zwei benachbarten Trajektorien die Verkehrsdichte durch

$$\frac{1}{d_\alpha(t)} = \rho \left( \frac{x_\alpha(t) + x_{\alpha-1}(t)}{2}, t \right) \approx \rho \left( x_\alpha + \frac{d_\alpha}{2}, t \right). \quad (\text{A.2})$$

Wir ordnen der Dichte  $1/d_\alpha(t) = \rho(x + d_\alpha/2, t)$  die Ortskoordinate  $(x_\alpha + d_\alpha/2)$  zu, da diese in der Mitte des Bereiches  $x_{\alpha-1} \leq x \leq x_\alpha$  liegt, für die der Abstand der beiden benachbarten Fahrzeuge durch  $d_\alpha$ , die lokale Dichte also durch  $1/d_\alpha$  gegeben ist.

Nun wird die linke und rechte Seite der Gleichung des Newell-Modells (A.1) "makroskopiert", d.h. durch  $V(x, t)$  und  $\rho(x, t)$  ausgedrückt.

Für die **linke Seite** erhalten wir durch einfache Taylorentwicklung  $f(t + \Delta t) \approx f(t) + \frac{df}{dt}\Delta t$ , analog zur Herleitung der totalen Zeitableitung auf S. 58,

$$\begin{aligned}
 v_\alpha(t + \Delta t) &= V(x_\alpha + v_\alpha \Delta t, t + \Delta t) \\
 &= V(x_\alpha, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} v_\alpha \Delta t + \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \Delta t \\
 &= V(x, t) + \left( V(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Delta t
 \end{aligned} \quad (I)$$

Zum "Makroskopieren" der **rechten Seite**  $v_e(d_\alpha)$  drücken wir zunächst die mikroskopisch als Funktion des Bruttoabstandes  $d_\alpha = s_\alpha + l_\alpha$  gegebene Gleichgewichtsgeschwindigkeit

## A. Appendix

$v_e(d)$  (“e” steht für *equilibrium*) durch eine dichteabhängige Gleichgewichtsgeschwindigkeit aus,

$$v_e(d) = V_e \left( \frac{1}{d} \right) = V_e(\rho)$$

und wenden auf die rechte Seite wieder die Taylorentwicklung sowie die Kettenregel an:  
 Martin: Studies evtl nicht klar, wann Taylor, wann Kettenr angewandt wird. Deshalb underbraces gelassen. Martin: Das “gerade” d bei der Ableitung von  $V_e$  stimmt, da  $V_e$  nur von einer unabh. Var abhängt

$$\begin{aligned} V_e \left( \frac{1}{d_\alpha} \right) &= V_e \left( \rho \left( x + \frac{d_\alpha}{2}, t \right) \right) \\ &\underset{\substack{\approx \\ \text{Taylor}}}{=} V_e(\rho(x, t)) + \frac{dV_e}{dx} \frac{d_\alpha}{2} \\ &\underset{\substack{= \\ \text{Kettenregel}}}{=} V_e(\rho(x, t)) + \frac{dV_e}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{d_\alpha}{2} \end{aligned}$$

Dabei wurde  $x_\alpha(t) = x$  gesetzt. Ersetzt man nun  $\frac{d_\alpha}{2}$  durch  $\frac{1}{2\rho(x, t)}$ ,<sup>3</sup> so erhält man:

$$V_e \left( \frac{1}{d_\alpha} \right) \approx V_e(\rho(x, t)) + \frac{1}{2\rho(x, t)} \frac{dV_e}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (II)$$

Gleichsetzen von (I) und (II) führt zu:

$$V + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Delta t = V_e(\rho) + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Schreibt man dieses Ergebnis nun in der üblichen Form (10.1) einer makroskopischen Gleichung, mit der konvektiven Ableitung  $\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}$  auf der linken Seite, erhält man die im Haupttext angegebene Geschwindigkeitsgleichung (10.7) des Payne-Modells. schreiben dieses nun wie eine “übliche” makroskopische Gleichung in der Form (10.1):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_e(\rho) - V}{\Delta t} + \frac{1}{2\rho \Delta t} \frac{\partial V_e}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{Payne-Modell}$$

Wir erhalten das bemerkenswerte Ergebnis, dass die rechte Seite dieser Gleichung, d.h. die makroskopische Beschleunigungsfunktion  $A(x, t)$  (vgl. (10.1)), nicht nur den nahe-liegend “makroskopierten” Anpassungsterm  $(V_e(\rho) - V)/\Delta t$  des Newell-Modells enthält, sondern zusätzlich einen Term proportional zum Dichtegradienten  $\partial \rho / \partial x$ .

---

<sup>3</sup>Wir machen eine Taylorentwicklung erster Ordnung für  $\rho(x + \frac{d}{2}, t)$  um  $x$ . Da der durch die Dichte auszudrückende Abstand  $d_\alpha$  bereits in einem Term der ersten Ordnung der Taylorentwicklung steht, genügt es, innerhalb dieses Terms zur weiteren Umformung die nullte Ordnung, also  $d_\alpha(t) = 1/\rho(x, t)$ , anzuwenden.