Математическая логика и теория алгоритмов

каф. ПМиК
доцент , к. ф.-м. н.
Мачикина Елена Павловна

Электронные ресурсы
Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/

Унучек, С. А. Математическая логика [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. А. Унучек. — Электрон. текстовые данные. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 239 c. — 978-5-4486-0086-9. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69312.html Лицензия: весь срок охраны авторского права

- Макоха, А. Н. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Н. Макоха, А. В. Шапошников, В. В. Бережной. — Электрон. текстовые данные. — Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2017. — 418 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69397.html Лицензия: весь срок охраны авторского права
- Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс]: методические указания к самостоятельной работе/ — Электрон. текстовые данные.— Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2014.— 25 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/55106.— ЭБС «IPRbooks» Лицензия: весь срок охраны авторского права
- Ковалёва Л.Ф. Дискретная математика в задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ковалёва Л.Ф.— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, 2011.— 142 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/10660.— ЭБС «IPRbooks» Лицензия до 17.02.2020
- Зюзьков, В. М. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. М. Зюзьков. — Электрон. текстовые данные. — Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2015.—236c.—978-5-4332-0197-2.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72122.html Лицензия: весь срок охраны авторского права

Электронные ресурсы

Бесплатный доступ после регистрации

- **www.intuit.ru**

- **www.stepik.org**

- 1. Теория булевых функций
- 2. Логические исчисления
- 3. Алгоритмические системы

1. Булевы функции

1.1 Определения

Джордж Буль (1815-1864)

- **Функция *f* : $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$**

от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

называется *булевой*

- **Поскольку каждая булева функция имеет конечное количество наборов аргументов, то булеву функцию можно задать в виде таблицы истинности**

- Базовые логические связки – отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция

x_1	x_2	$\neg x_1$	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \sim x_2$
0	0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Из логических переменных с помощью логических связок можно составлять конструкции, которые образуют *формулы алгебры логики*

Пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ – некоторое множество логических переменных.

Определим рекурсивно понятие

***формулы алгебры логики*:**

- **любая логическая переменная является формулой (атомарной);**
- **если α и β – формулы, то выражения $\neg(\alpha)$, $(\alpha$ x $\beta)$, где x – логическая операция, являются формулами;**
- **никаких других формул нет.**

- **Пусть даны формулы булевых функций**

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда *подстановкой* формул f_i в формулу F называется следующая конструкция:

$$(F|\, y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$$

$$F(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

- Пример
  - $F(y_1, y_2) = y_1 \sim y_2$

$f_1(x_1, x_2) = x_1$ $\quad$ $f_2(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$

$(F|\, y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2) = x_1 \sim (x_1 \& x_2)$

-

Теорема (О подстановке формул)

- *Если $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $i=1,\ldots,m$*

– формулы алгебры логики, то $(F|\, y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ также является формулой.

- **Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *равносильными* (т.е. на всех наборах переменных их значение истинности совпадает).**

- **Утверждение. *Отношение равносильности формул (≡) является отношением эквивалентности на множестве всех формул.***

Правило подстановки

- ***Если в равносильных формулах:***

  $F(y_1, y_2, \ldots, y_m) \equiv G(y_1, \ldots, y_m)$ – вместо всех вхождений некоторой переменной y_i подставить одну и ту же формулу, то получатся равносильные формулы.

Правило замены

- ***Если в формуле F заменить некоторую подформулу y_i на равносильную g_i, то получатся равносильные формулы.***

- **Формулы алгебры логики, при образовании которых используются только операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, называются *булевыми формулами*.**

Теорема

Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей булева формула.

Для булевых формул выполняется ряд равносильностей

- **Операции с константами:**
  $A \vee 1 \equiv 1$; $A \,\&\, 1 \equiv A$; $A \vee 0 \equiv A$; $A \,\&\, 0 \equiv 0$
- **Противоречие:** $A \,\&\, \neg A \equiv 0$
- **Исключение третьего:** $A \vee \neg A \equiv 1$
- **Идемпотентность:** $A \,\&\, A \equiv A$ $\quad A \vee A \equiv A$
- **Двойное отрицание:** $\neg\neg A \equiv A$
- **Коммутативность:** $A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A$ $\quad A \vee B \equiv B \vee A$
- **Ассоциативность:**
  $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ $\quad (A \,\&\, B) \,\&\, C \equiv A \,\&\, (B \,\&\, C)$
- **Дистрибутивность:**
  $A \,\&\, (B \vee C) \equiv (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$
  $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$
- **Законы де Моргана:** $\neg(A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B$
  $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, \neg B$

- при выполнении преобразований часто используются <u>законы поглощения</u>:
1) $A \& (A \vee B) \equiv A$; $A \vee A \& B \equiv A$;
2) $\neg A \& (A \vee B) \equiv \neg A \& B$; $A \vee \neg A \& B \equiv A \vee B$.

- $A \rightarrow B \equiv \neg A v B$
- $A \sim B \equiv (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$

1.2 Принцип двойственности

- Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – булева функция. *Двойственной* к ней называется функция
  $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n)$.

  Из определения видно, что $f^{**}=f$.

- Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f, то такая функция f называется *самодвойственной*.

Пример

- $f_1(x_1) = x_1$ $\qquad\qquad$ $f_2(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$

- $f_1^*(x_1) = \neg f_1(\neg x_1) = x_1$

- $f_2^*(x_1, x_2) = \neg f_2(\neg x_1, \neg x_2) =$

  $= \neg(\neg x_1 \& \neg x_2) = x_1 \vee x_2$

Теорема (Общий принцип двойственности)

- ***Если $G(x_1, \ldots, x_n)$ получена подстановкой формул f_i***

  из $F(y_1, \ldots, y_m)$
  $G(x_1, \ldots, x_n) \equiv (F|\, y_i \leftarrow f_i)(x_1, \ldots, x_n)$,

то $G^*(x_1, \ldots, x_n) \equiv (F^*|\, y_i \leftarrow f^*_i)(x_1, \ldots, x_n)$.

- ***Доказательство***
- $G^*(x_1, \ldots, x_n) = \neg G(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) =$

$= \neg(F| \, y_i \leftarrow f_i)(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) =$

$= \neg(F| \, y_i \leftarrow \neg\neg f_i)(\neg x_1, \ldots, \neg x_n) =$

$= \neg(F| \, y_i \leftarrow \neg f_i^{\,*})(x_1, \ldots, x_n) =$

$= (F^*| \, y_i \leftarrow f_i^{\,*})(x_1, \ldots, x_n)$

Теорема
(Принцип двойственности для булевых формул)

Двойственная формула для булевой формулы может быть получена заменой

констант 0 на 1, 1 на 0,

дизъюнкции на конъюнкцию,

конъюнкции на дизъюнкцию и сохранением структуры формулы (т.е. соответствующего исходному порядку действий).

Теорема

- Если $F \equiv G$, то $F^* \equiv G^*$

1.3 Нормальные формы

- **Табличный способ определения истинности сложного выражения имеет ограниченное применение.**
- **Тогда может быть использован способ приведения формул к *нормальной форме*.**

- ***Элементарной дизъюнкцией (конъюнкцией)*** **называется дизъюнкция переменных и/или их отрицаний**
- ***ДНФ*** **– это дизъюнкция элементарных конъюнкций.**
- ***КНФ*** **– это конъюнкция элементарных дизъюнкций.**

Примеры

Элементарные дизъюнкции:

$$x \vee y, \quad z$$

Элементарные конъюнкции:

$$x \& \neg y \& z, \quad x$$

$f(x,y,z) = x \& y \& z \vee \neg x \& y$ **ДНФ**

$f(x,y,z) = (x \vee y) \& z$ **КНФ**

Теорема

- *Для любой формулы F существует равносильная формула G (F≡G) в дизъюнктивной нормальной форме*

- 1. Для формулы *F* равносильными преобразованиями можно получить равносильную булеву формулу
- 2. Используя закон де Моргана, внешние отрицания перемещаются к переменным. Двойные отрицания переменных снимаются
- 3. Используя закон дистрибутивности, формула окончательно приводится к виду ДНФ

Пример

$$(x \sim y) \to z \equiv (x \to y) \& (y \to x) \to z \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y) \& (\neg y \vee x) \to z \equiv$$

$$\equiv \neg((\neg x \vee y) \& (\neg y \vee x)) \vee z \equiv$$

$$\equiv (x \& \neg y) \vee (y \& \neg x) \vee z \equiv$$

$$\equiv (x \vee y) \& (x \vee \neg x) \& (\neg y \vee y) \& (\neg y \vee \neg x) \vee z \equiv$$

$$\equiv (x \vee y \vee z) \& (\neg y \vee \neg x \vee z)$$

- ДНФ (КНФ) называется *совершенной*, если каждая переменная формулы входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз.

- Получение из КНФ.
- Если некоторая элементарная дизъюнкция КНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо дизъюнктивно добавить в нее произведение этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон.

- **Получение из ДНФ**.
- **Если некоторое произведение ДНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо домножить это произведение на дизъюнкцию этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон.**

$$(x \sim y) \to z \equiv (x \to y)\&(y \to x) \to z \equiv$$

$$\equiv (\neg x \vee y)\&(\neg y \vee x) \to z \equiv$$

$$\equiv \neg((\neg x \vee y)\&(\neg y \vee x)) \vee z \equiv$$

$$\equiv (x \& \neg y) \vee (y \& \neg x) \vee z \equiv$$

$$\equiv (x \& \neg y \& (z \vee \neg z)) \vee (y \& \neg x \& (z \vee \neg z)) \vee$$

$$\vee z \& (x \vee \neg x) \& (y \vee \neg y)$$

$$\equiv x \& \neg y \& z \vee x \& \neg y \& \neg z \vee y \& \neg x \& z \vee y \& \neg x \& \neg z \vee$$

$$\vee z \& x \& y \vee z \& \neg x \& \neg y$$

- Введем обозначения

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \neg x, & \alpha = 0 \end{cases}$$

Теорема

О разложении булевой функции по k переменным

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,x_{k+1},\dots,x_n)$$

Доказательство

- **Выберем какой-либо набор значений для переменных $x_1, \ldots, x_n$.**
- **Пусть это будет $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.**
- **Заметим, что** $\sigma_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & \sigma_i = \alpha_i \\ 0, & \sigma_i \neq \alpha_i \end{cases}$
- $0^0=1 \quad 1^1=1 \quad 0^1=0 \quad 1^0=0$

- Подставим в правую часть формулировки теоремы вместо $x_1, \ldots, x_n$ набор $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.
- Получим.

$$\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\ldots\sigma_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$$

- Поскольку коэффициент перед функцией равен 1 только при равных значениях σ_i и α_i, в разложении останется только один член
- $$\sigma_1^{\alpha_1}\ldots\sigma_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$$
- и $\sigma_i=\alpha_i$, т.е. $$f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$$

- Получена левая часть формулы теоремы. Поскольку набор был выбран произвольно, получаем, что утверждение верно любого набора значений переменных $x_1, \ldots, x_n$

Следствие 1 Разложение Шеннона

При k=1

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \neg x_1 \cdot f(0, x_2, ..., x_n) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, ..., x_n)$$

Следствие 2

При k=n

$$f(x_1,...,x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1,...,\alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Построение СДНФ

- **1. Найти строки в таблице истинности , где значение функции *f истинное*.**
- **2. Каждому найденному набору $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. поставить в соответствие конъюнкцию**

$$\tilde{x}_1 \& \tilde{x}_2 \& \dots \& \tilde{x}_n$$

- **где** $$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 1 \\ \neg x_i, & \text{если } \sigma_i = 0 \end{cases}$$
- **3. Составить дизъюнкцию из полученных конъюнкций**

Построение СКНФ

- **1. Найти строки в таблице истинности , где значение функции *f* ложное.**
- **2. Каждому найденному набору $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. поставить в соответствие дизъюнкцию**

$$\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n$$

- **где** $$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{если } \sigma_i = 0 \\ \neg x_i, & \text{если } \sigma_i = 1 \end{cases}$$

- **3. Составить конъюнкцию из полученных дизъюнкций**

- Получим СДНФ и СКНФ по таблице истинности

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x,y,z) = \neg x \neg y \neg z \vee \neg x \neg y z \vee \neg x y z \vee x \neg y z \vee xyz - \text{СДНФ},$$

$$f(x,y,z) = (x \vee \neg y \vee z)(\neg x \vee y \vee z)(\neg x \vee \neg y \vee z) - \text{СКНФ}$$

Теорема

- Для всякой не тождественно ложной формулы алгебры логики существует равносильная ей СДНФ.