2.5 Полнота исчисления высказываний

При изучении свойств формальных теорий выделяют следующие основные характеристики

- непротиворечивость,
- полнота,
- независимость системы аксиом,
- разрешимость.

- **Формальная аксиоматическая теория *T* называется *непротиворечивой*, если в ней не существует вывода формулы *F* такой, что одновременно доказуемы формулы *F* и ¬*F*.**

- **Формальная аксиоматическая теория Т называется *полной*, если в ней доказуема любая тавтология.**

Теорема

Справедливы следующие утверждения.

- ***Любая аксиома в ИВ является тавтологией.***
- ***Правило вывода modus ponens сохраняет тождественную истинность формул.***
- ***Любая теорема в ИВ является тавтологией.***

- **С помощью таблиц истинности нетрудно проверить, что аксиомы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, являются тавтологиями и это доказывает первое утверждение теоремы.**

- Действительно, пусть формулы *A* и *A*→*B* являются тавтологиями,

  тогда исходя из таблицы истинности импликации, можно сделать однозначный вывод, что формула *B* также является тавтологией.

- Поскольку правило вывода modus ponens сохраняет тождественную истинность формул, то из аксиом по правилу вывода можно получить только тавтологию.

  Любая теорема является тавтологией, поскольку получена последовательным применением правила вывода modus ponens к аксиомам и ранее выведенным тавтологиям.

Теорема (Пост, 1921)

- ***Формула F в ИВ является теоремой тогда и только тогда, когда F – тавтология.***

- **Следствие 1.**
  ИВ формально непротиворечиво.

- Доказательство.

  Поскольку все теоремы ИВ – тавтологии, то отрицание тавтологии не есть тавтология.

  Следовательно, в ИВ не существует одновременно теоремы и ее отрицания.

- **Следствие 2.**

  ИВ полная теория.

- Формальная теория T *разрешима*, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является ли эта формула теоремой теории T.

- Разрешимость — очень сильное свойство, и большинство полезных и используемых на практике теорий им не обладают.
- В связи с этим было введено более слабое понятие *полуразрешимости*. Полуразрешимость означает наличие алгоритма, который за конечное время всегда подтвердит, что предложение истинно, если это действительно так, но если нет — может работать бесконечно.

- Теория T называется ***полуразрешимой***, **если существует алгоритм, который за конечное время всегда определит является ли формула F теоремой, если это действительно так,**

  но если нет — может работать бесконечно.

Теорема.

- ***ИВ является разрешимой теорией.***

Доказательство.

- Чтобы узнать выводима ли некоторая формула в исчислении высказываний, достаточно проверить тождественную истинность этой формулы, что можно сделать за конечное число шагов.

2.6 Методы проверки выводимости формул ИВ

- ***Тривиальный метод*** **заключается в проверке значений формулы при всевозможных значениях переменных.**
- **Однако при большом количестве переменных такой метод становится очень громоздким.**

- ***Алгебраический метод*** **базируется на применении законов булевой алгебры.**

- *Метод Куайна* представляет собой модификацию тривиального метода.

- Пусть <X_1, X_2, ..., X_k> – множество высказывательных переменных в формуле F.
- Возьмем первую переменную X_1 и придадим ей, например, истинное значение.

- Подставим это значение в формулу F и выполним вычисления, которые могут возникнуть при такой подстановке.
- После выполнения вычислений получим формулу *F’* с меньшим количеством переменных и применяем к ней описанную процедуру.

- Если на каком-то шаге получена формула, которая является тавтологией или противоречием независимо от значений высказывательных переменных, входящих в эту формулу, то алгоритм на этом шаге можно остановить.

- Таким образом, алгоритм Куайна приводит к рассмотрению меньшего количества интерпретаций, чем тривиальный алгоритм.

Пример 1.

- Проверить выводимость формулы

$$(X \& Y \& Z) \to (X \to Y) \& (X \to Z)$$

методом Куайна.

- Положим $X=0$.

Тогда

$$(0\& Y\&Z)\to(0\to Y)\&(0\to Z)=1$$

при любой интерпретации Y и Z.

- **Пусть теперь $X=1$.**

Тогда

$$(1\& Y\&Z)\to(1\to Y)\&(1\to Z)=$$

$$=Y\&Z\to Y\&Z$$

Для полученной формулы повторим процедуру метода Куайна.

- Положим $Y=0$.
- Тогда $0\&Z\to 0\&Z=1$ при любой интерпретации Z.
- Положим $Y=1$. Тогда $1\&Z\to 1\&Z=$ $=Z\to Z=1$ при любой интерпретации Z.

Пример 2.

- **Проверить выводимость**

$$(X \to Y) \vdash (X \to Y) \& (X \to \neg Z)$$

методом Куайна

- Сначала применим теорему дедукции к данной выводимости.
- По теореме дедукции можно проверять выводимость

$$(X \to Y) \to (X \to Y) \& (X \to \neg Z).$$

- Положим $X=0$.
- Тогда $(0 \to Y) \to (0 \to Y) \& (0 \to \neg Z) = 1$ при любой интерпретации Y и Z.

- Пусть теперь $X=1$.
- Тогда

$$(1 \to Y) \to (1 \to Y) \& (1 \to \neg Z) =$$

$$= Y \to Y \& \neg Z =$$

$$= \neg Y \vee Y \& \neg Z = \neg Y \vee \neg Z$$

- При $Y=1$, $Z=1$ получаем, что формула имеет ложное значение.
- Таким образом, формула не является тавтологией, а значит не выводима.

- Рассмотрим теперь *метод редукции* распознавания тождественно истинных формул в ИВ.

- Пусть формула F имеет вид импликации $F=A \rightarrow B$.
- Допустим, что в некоторой интерпретации формула F принимает ложное значение.
- Тогда в соответствии с таблицей истинности для импликации имеем $A=1$, $B=0$.

- **Таким образом, проверка формулы *F* сводится к дальнейшей проверке формул *A* и *B*.**

- **Данный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено противоречие с начальным предположением о ложности формулы. В этом случае доказано, что формула является тавтологией.**
- **В противном случае будет определен набор значений переменных, на котором формула принимает ложное значение, а значит не является тавтологией.**

Пример 3.

- Проверить выводимость формулы

$$(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$$

методом редукции.

- **Пусть в некоторой интерпретации формула имеет ложное значение.**
- **Тогда**

$$X \to (Y \to Z) = 1$$

$$(X \to Y) \to (X \to Z) = 0$$

- **Применим теперь метод редукции к формуле $(X \to Y) \to (X \to Z)$.**
- **Если она в некоторой интерпретации имеет ложное значение, то**

$$X \to Y = 1,\ X \to Z = 0.$$

- Для формулы $X \to Z$ метод редукции дает $X=1$, $Z=0$.
- Из $X \to Y=1$ получаем, что $Y=1$.
- Однако это приводит к противоречию с $X \to (Y \to Z)=1$.

- Таким образом, исходная формула не может быть ложной ни при какой интерпретации, т.е. формула является тавтологией, а следовательно выводима в ИВ.

Пример 4.

- **Проверить выводимость**

$$(X \to Y) \vdash (X \to Y)\&(X \to \neg Z)$$

методом редукции.

- Сначала применим теорему дедукции к данной выводимости.
- По теореме дедукции можно проверять выводимость

$(X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y) \& (X \rightarrow \neg Z)$.

- Пусть в некоторой интерпретации формула имеет ложное значение.
- Тогда

$$X \to Y = 1,\ (X \to Y) \& (X \to \neg Z) = 0.$$

- Отсюда

$$X \to \neg Z = 0 \text{ и } X = 1, \quad Z = 1.$$

- Таким образом, существует интерпретация переменных

  $X=1$, $Y=1$, $Z=1$, при которой формула является ложной.
- Значит, формула не выводима в ИВ.