3.6 Частично рекурсивные функции

- **Будем рассматривать *n*-арные функции на множестве наборов неотрицательных целых чисел**

$$f : \overline{N} \times \overline{N} \times \ldots \times \overline{N} \to \overline{N}$$

- **Такие функции называются *арифметическими функциями*.**

- **Если функция определена не для каждого набора чисел, то такие функции называются**

  частично определенными арифметическими функциями **(ЧАФ).**

Пусть для ч.а.ф. f существует некоторый механизм вычисления, причем значение функции не определено тогда и только тогда, когда этот механизм работает бесконечно, не выдавая никакого определенного результата.

- **Фиксируем произвольный набор значений $x_1, \ldots, x_n$ и рассмотрим уравнение относительно y :**

$$f(x_1,\ldots x_{n-1},y)=x_n$$

- Чтобы найти натуральное решение *y* этого уравнения,

  будем вычислять при помощи указанного выше "механизма" последовательно значения

  $$f(x_1,\ldots,x_{n-1},a) \text{ для } a=0,1,2,\ldots$$

  и сравнивать с x_n.

- **Наименьшее значение *a*,
для которого выполнится равенство**

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},a)=x_n\ ,$$

обозначим как

$$\mu_y(f(x_1,\dots,x_{n-1},y)=x_n)$$

- **Величина** $\mu_y(f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)=x_n)$ **является n-местной частичной функцией, которая получена *операцией минимизации* из функции *f***

Описанный процесс нахождения решения уравнения будет продолжаться бесконечно в следующих случаях:

- Значение $f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$ не определено для каждого y

- Значения $f(x_1,\ldots,x_{n-1},i)$ для $i=0,1,\ldots,a-1$ определены, но отличны от x_n
  Для некоторого a значение $f(x_1,\ldots,x_{n-1},a)$
  не определено.

- Значения $f(x_1,\dots,x_{n-1},y)$ определены для всех $y=0,1,2,\dots$ и отличны от x_n.

- **Во всех этих случаях значение**

$$\mu_y(f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)=x_n)$$

считается неопределенным.

- **В остальных случаях описанный процесс обрывается и дает наименьшее решение *y=a* для уравнения $f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)=x_n$.**

Минимизация

- f(x,y)=x+y

$$g(x,y) = \mu_z(f(x,z) = y)$$

- Найти g(3,5),   g(5,2)

Найти g(3,5)

Последовательно проверяем соотношение $f(3,z) = 3 + z = 5$

- При z=0 не выполняется
- При z=1 не выполняется
- При z=2 выполняется
- Тогда g(3,5)=2

Найти   g(5,2)

Последовательно проверяем соотношение $f(5,z)=5+z=2$

- При z=0   не выполняется
- При z=1   не выполняется
- При z=2   не выполняется и т.д.
- Тогда g(5,2) не определено

Предложение (*свойство операции минимизации*)

- ***Операция минимизации сохраняет интуитивную вычислимость функций.***

Доказательство.

- Пусть необходимо вычислить значение функции

  $\mu_y (f(x_1,\ldots,x_{n-1}, y)=x_n)$ на наборе $(x_1,\ldots,x_n)$ для некоторой интуитивно вычислимой функции f
- Применим процедуру вычисления

  $f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$

- **Если через конечное число шагов процедура определяет значение $f(x_1,\dots,x_{n-1},0)$ и $f(x_1,\dots,x_{n-1},0)=x_n$, то полагаем значение функции**

  $\mu_y\,(f(x_1,\dots,x_{n-1}, y)=x_n)$ равным 0.

- Если же $f(x_1,\dots,x_{n-1},0) \neq x_n$, то переходим к следующему этапу, на котором применяем процедуру вычисления $f(x_1,\dots,x_{n-1},1)$ и т.д.

- **Если на каком-то этапе вычислено значение $f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)$ и $f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)=x_n$, то полагаем значение функции $\mu_y\,(f(x_1,\ldots,x_{n-1}, y)=x_n)$ равным t.**

- Если же $f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\neq x_n$, то переходим к следующему этапу, на котором применяем процедуру вычисления $f(x_1,\ldots,x_{n-1},t+1)$ и т.д.

- В случаях, когда на каком-то этапе процедура вычисления функции *f* работает бесконечно или работа процедуры завершилась безрезультатно, то считаем значение $\mu_y(f(x_1,\ldots,x_{n-1}, y)=x_n)$ неопределённым.

- так как описанная процедура пригодна для любого набора ($x_1,\dots,x_{n-1},x_n$), то она представляет собой алгоритм вычисления значений функции $\mu_y\,(f(x_1,\dots,x_{n-1}, y)=x_n)$. Предложение доказано.

- **Частичная функция *f* называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена из простейших функций конечным числом операций подстановки, примитивной рекурсии и минимизации.**

- ***Общерекурсивной функцией*** **называется всюду определённая частично рекурсивная функция.**

Пример 1.

- Простейшие функции *S(x)*, *O(x)*, $U_m^n(x_1,\ldots x_n)$

  всюду определены, поэтому они являются общерекурсивными функциями.

Пример 2

- Все примитивно рекурсивные функции являются общерекурсивными функциями

Пример 3

- Функция $f(x,y)=y-x$ является частично рекурсивной,

  поскольку может быть получена с помощью операции минимизации из примитивно рекурсивной функции $g(x,y)=x+y$.

- $f(x,y) = \mu_z\,(g(x, z) = y) =$

  $= \mu_z\,(x+z=y) = y-x$ при $x \le y$

- Значение $f(x,y)$ неопределено при $x>y$

Пример 4

- Рассмотрим функцию, заданную уравнением

$$f(x) = \mu_z\,(z+x+1=0)$$

- при x=0 нужно найти минимальное значение z, которое удовлетворяет условию $z+0+1=0$.
- среди неотрицательных целых чисел такое z не существует.

- Результат операции минимизации не определен даже для точки x=0.
- Таким образом, функция f является частично рекурсивной функцией, которая нигде не определена.

3.7. Тезис Черча-Клини

Обозначим

- $K_{ПРФ}$ – множество всех примитивно рекурсивных функций,
- $K_{ЧРФ}$ – множество всех частично рекурсивных функций,
- $K_{ОРФ}$ – множество всех общерекурсивных функций,
- $K_{В}Ф$ – множество всех интуитивно вычислимых функций.

Предложение
(*о иерархии классов рекурсивных функций*)

- $К_{ПРФ} \subset К_{ОРФ} \subset К_{ЧРФ} \subset К_{ВФ}$

Доказательство.

- Первое включение следует из определений примитивной рекурсивности и общерекурсивности функций.

- **Существуют примеры общерекурсивных, но не примитивно рекурсивных функций (примеры не приводятся из-за сложности и громоздкости), поэтому включение строгое.**

- **Из определений частичной рекурсивности и общерекурсивности функций следует, что $К_{ОРФ} \subset К_{ЧРФ}$.**

- Выше был приведен пример нигде не определённой частично рекурсивной функцией, а любая общерекурсивная функция является всюду определённой.
- Таким образом, имеет место строгое включение $K_{ОРФ} \subset K_{ЧРФ}$.

- Очевидно, что $К_{ЧРФ} \subset К_{ВФ}$, т.е. любая частично рекурсивная функция интуитивно вычислима.

тезис Чёрча-Клини

- в современной теории рекурсивных функций считают, что любая вычислимая функция является частично рекурсивной,

т.е. $К_{ЧРФ}=К_{ВФ}$

Теорема о равносильности алгоритмических систем

- Класс ч.р.функций совпадает с классом функций, вычислимых по Тьюрингу.

- **существуют функции, не являющиеся частично рекурсивными, а следовательно, если принять тезис Чёрча-Клини, то существуют функции, не являющиеся вычислимыми**