# 2. ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

- **Логика (от греч. logos – слово, понятие, рассуждение, разум) – наука о формах и законах правильного мышления.**

| | |
|---|---|
| **4 в. до н.э.** | **Аристотель** |
| **17 в.-нач.18 в.** | **Г.В. Лейбниц** |
| **сер. 19 в.** | **Д. Буль** |
| **конец 19 в.** | **Г. Фреге** |
| **20 в.** | **Б. Рассел, А.Н. Уайтхед, Д. Гильберт, К. Гедель, А. Тарский, А. Черч.** |

# 2.1 Логика высказываний

- **Под *высказыванием***
  **принято понимать языковое предложение,**
  **о котором имеет смысл говорить,**
  **что оно истинно или ложно.**

# Примерами высказываний могут служить следующие предложения

- За окном идет снег.
- Завтра будет Новый год.
- Столица России – Москва.

***Я лгу***

- **В *логике высказываний* интересуются не содержанием, а истинностью или ложностью высказываний.**
- **Истинностное значение – истина или ложь – будем обозначать**

**И (1)        Л  (0)**

- **Высказывания будем обозначать заглавными латинскими буквами**

**A, B, C …**

- **Для соединения высказываний в более сложные высказывания используют *логические операции (связки)*.**

- ***Отрицанием*** **высказывания *A* называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание *A* ложно.**
- **Обозначается** $\neg A$**.**

В естественном языке отрицание $\neg A$ соответствует следующим конструкциям

- **Не *A***
- ***A* не имеет места**
- ***A* не верно**

- ***Конъюнкцией*** **двух высказываний** ***A*** **и** ***B*** **называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.**
- **Обозначается** ***A&B***

В естественном языке конъюнкция *A&B* соответствует следующим конструкциям

- ***A* и *B***
- **Не только *A*, но и *B***
- **Как *A*, так и *B***
- ***A* вместе с *B***
- ***A*, в то время как *B***

- ***Дизъюнкцией*** **двух высказываний** ***A*** **и** ***B*** **называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.**
- **Обозначается $A \vee B$.**

# В естественном языке дизъюнкция соответствует следующим конструкциям

- ***A* или *B*, или оба**
- ***A* или *B***
- ***A*, если не *B***
- ***A* и/или *B***

- ***Импликацией*** **двух высказываний *A* и *B* называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда *A* истинно, а *B* ложно.**
- **Обозначается *A*→*B*.**

В естественном языке импликация $A \rightarrow B$ соответствует следующим конструкциям

- **Если *A*, то *B***
- **Коль скоро *A*, то *B***
- **В случае *A* имеет место *B***
- **Для *B* достаточно *A***
- **Для *A* необходимо *B***
- ***A*, только если *B***
- ***B*, если *A***

- ***Эквиваленцией*** **двух высказываний *A* и *B* называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения *A* и *B* совпадают.**
- **Обозначается *A~B*.**

В естественном языке эквиваленция *A*~*B* соответствует следующим конструкциям

- ***A*, если и только если *B***
- **Если *A*, то *B*, и обратно**
- ***A*, если *B*, и *B*, если *A***
- **Для *A* необходимо и достаточно *B***
- ***A* равносильно *B***
- ***A* тогда и только тогда, когда *B***

- **Уж полночь близится,**
  **а Германна всё нет**
- **Шумел камыш, деревья гнулись**
- **Глаза боятся, а руки делают**

- Чем дальше в лес, тем больше дров

- Если у вас нету тёти, её вам не потерять

**Судьба играет человеком,**

**Она изменчива всегда,**

- **То вознесет его высоко,**
  **То бросит в бездну без стыда.**

- **Расцветали яблони и груши**

# Алфавит логики высказываний содержит следующие символы:

- ***высказывательные переменные*** **– обычно заглавные латинские буквы;**
- **логические символы,**
- **символы скобок (, ).**

Последовательность символов в логике высказываний называется *формулой* ,

если она удовлетворяет следующему определению:

1. любая высказывательная переменная – формула;
2. если $A$ и $B$ – формулы, то $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$, $\neg A$ – формулы.
3. Других формул нет

- **Для упрощения записи вводится приоритет операций (¬, &, *V*, →, ~) и лишние скобки опускаются.**

# Пример 1.

**Выражение *(A&B)*$\rightarrow$*(AVB)* является формулой, поскольку получено при помощи**

- **логической связки $\rightarrow$**
- **двух подформул *(A&B)*, *(AVB)*.**

**Каждая из подформул представляет собой логическую связку двух переменных.**

# Пример 2.

Выражение *(A&B)*¬→ *(AVB)* не является формулой, поскольку

- логическая связка → связывает два выражения *(A&B)* ¬ , *(AVB)*.
- Первое выражение не является формулой, поскольку не получено по правилам 1 –3.

- **Если каждой высказывательной переменной, входящей в формулу, придавать истинностное значение И и Л, то формула будет определять истинностную функцию со значениями в множестве {И, Л}.**
- **Если, кроме того, принять И=1, Л=0, то любую формулу логики высказываний можно интерпретировать как формулу булевой функции**

- **Формула F называется *тавтологией* (тождественно-истинной формулой – ТИФ), если при любых значениях (интерпретации) переменных формула принимает значение И.**

- **Формула F называется *противоречием* (*тождественно ложной* формулой – ТЛФ), если при любых значениях переменных формула принимает значение Л.**

- **Формула F называется *выполнимой* (условно-истинной формулой – УИФ), если при некоторой значениях переменных формула принимает значение И.**
- **Формула F называется *опровержимой* (условно-ложной формулой УЛФ), если при некоторых значениях переменных формула принимает значение Л.**

- **Формула F называется *опровержимой* (условно-ложной формулой УЛФ), если при некоторых значениях переменных формула принимает значение Л.**

- **Формула G *логически следует* из формулы F ($F \Rightarrow G$),**

  **если формула G имеет значение И при всех интерпретациях,**

  **при которых формула F имеет значение И.**

- **Формулы F и G *логически эквивалентны* (F≡G), если они являются логическим следствием друг друга.**
- **Логически эквивалентные формулы имеют одинаковые значения при любой интерпретации.**

## Теорема. *Имеют место следующие логические эквивалентности*

- $(A \to B) \equiv \neg A \vee B$
- $A \sim B \equiv (A \to B) \& (B \to A)$

**Теорема.** *Справедливы следующие логические эквивалентности для формул логики высказываний (1 и 0 – тождественно истинное и тождественно ложное высказывания соответственно)*

| | |
|---|---|
| $\neg\neg A \equiv A$ | *Закон двойного отрицания* |
| $A \& B \equiv B \& A$ | *Законы коммутативности* |
| $A \vee B \equiv B \vee A$ | |
| $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$ | *Законы ассоциативности* |
| $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ | |
| $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ | *Законы дистрибутивности* |
| $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ | |

| | |
|---|---|
| $A \& A \equiv A$ | Законы идемпотентности |
| $A \vee A \equiv A$ | |
| $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$ | Законы де Моргана |
| $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$ | |
| $A \vee 1 \equiv 1$ | Законы нуля и единицы |
| $A \& 0 \equiv 0$ | |
| $A \vee 0 \equiv A$ | |
| $A \& 1 \equiv A$ | |

| | |
|---|---|
| $A \vee (A \& B) \equiv A$ | *Законы поглощения* |
| $A \& (A \vee B) \equiv A$ | |
| $A \& \neg A \equiv 0$ | *Закон противоречия* |
| $A \vee \neg A \equiv 1$ | *Закон исключенного третьего* |

**Теорема.**

- $A_1\&\ldots\&A_n \Rightarrow Q$ *тогда и только тогда, когда* $(A_1\&\ldots\&A_n)\to Q$ – *тавтология.*
- $A_1\&\ldots\&A_n \Rightarrow Q$ *тогда и только тогда, когда* $A_1\&\ldots\&A_n\&\neg Q$ – *противоречие.*

# Доказательство.

- Необходимость. Пусть формула $A_1\&\ldots\&A_n$ принимает значение И при некоторой интерпретации.
- Обозначим это I($A_1\&\ldots\&A_n$)=И.
- Тогда $I(Q)$= И и $I((A_1\&\ldots\&A_n)\rightarrow Q)$=И.
- Пусть $I(A_1\&\ldots\&A_n)$=Л.
- Тогда $I((A_1\&\ldots\&A_n)\rightarrow Q)$=И.
- Таким образом формула $(A_1\&\ldots\&A_n)\rightarrow Q$ – тавтология.

- **Достаточность.**
- **Пусть** $I((A_1\&\ldots\&A_n)\rightarrow Q)$**=И.**
- **Тогда если** $I(A_1\&\ldots\&A_n)$**=И, то и** $I(Q)$**= И.**
- **Таким образом,** $Q$ **является логическим следствием формулы** $A_1\&\ldots\&A_n$**.**