Линейные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если неизвестная функция и её производная входят в уравнение линейно.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным* (не путать с изученным ранее **однородным** уравнением!):

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

Иначе, *линейным неоднородным.*

Линейное уравнение первого порядка является частным случаем линейных уравнений *n*-го порядка и систем линейных уравнений.

Кроме того, общая теория решения линейных уравнений и систем дифференциальных и разностных уравнений очень схожа именно с методом решения линейного уравнения первого порядка.

Поэтому очень важно понять и хорошо запомнить всё, что будет изложено ниже!

Будем считать, что функции *p(x)* и *q(x)* являются непрерывными в рассматриваемом нами интервале (a,b).
Тогда по теореме существования и единственности существует единственное решение задачи Коши с любыми начальными данными из этого интервала. Особых решений нет.
В частности, однородное решение с начальными данными $y(x_0)=0$ может иметь только нулевое решение. В этом случае никакие решения уравнения не могут ни касаться, ни пересекать ось *OX*.

Примеры: $xy'+e^x y + tgx = 0$ $\qquad \dot{x} = \dfrac{e^x}{2t - x^3}$

$$(x + y^2)dy = ydx$$

Однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, а следовательно всегда интегрируемо в квадратурах.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = c - \int p(x)dx \Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Свойства решений линейного уравнения:

1. Если y_1 – ненулевое частное решение однородного уравнения, то $y=Cy_1$ - общее решение однородного уравнения

2. Если $y_ч$ –частное решение неоднородного уравнения, а $y_{од}=Cy_1$ - общее решение однородного уравнения, то

$$y_{об}=y_{од}+y_ч$$

$$(y_{од}+y_ч)'+p(x)(y_{од}+y_ч)=y'_{од}+y'_ч+p(x)y_{од}+p(x)y_ч=$$
$$=y'_{од}+p(x)y_{од}+y'_ч+p(x)y_ч=q(x)$$

Таким образом, учитывая, что общее решение однородного уравнения мы уже знаем, как найти, достаточно найти какое-нибудь решение неоднородного уравнения. Иногда его удается просто подобрать.

В общем случае воспользуемся методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).
Пусть $y=Cy_0$ - общее решение однородного уравнения.
Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_ч=C(x)y_0$$

Подставим его в уравнение.

$$\left(C(x)y_0\right)' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$$
$$C'(x)y_0 + C(x)y'_0 + p(x)C(x)y_0 = q(x)$$
$$C'(x)y_0 = q(x)$$
$$C(x) = \int \frac{q(x)}{y_0(x)}dx$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения:

$$y_{об} = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

Запоминать не надо!

Пример 1

$$(y\sin x - 1)dx + \cos x dy = 0$$

$$y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$$

$$y' + ytgx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int tgxdx \Rightarrow y_{од} = \frac{C}{\cos x}$$

$$y_ч = \frac{C(x)}{\cos x} \Rightarrow \left(\frac{C(x)}{\cos x}\right)' + \frac{C(x)tgx}{\cos x} = \frac{C'(x)}{\cos x} - \frac{C(x)tgx}{\cos x} + \frac{C(x)tgx}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = x \Rightarrow y_{об} = \frac{C + x}{\cos x}$$

Пример 2: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2)\boldsymbol{dy} = \boldsymbol{ydx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^2} \quad \text{-?}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{y} = \frac{x}{y} + y$$ -линейное ур-е для x(y)

линейное однор-е: $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln|C| \Rightarrow x = Cy$

Ищем решение данного уравнения в форме $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C(y)y}$

$$x' = C'(y)y + C(y) \Rightarrow C'(y)y + C(y) = \frac{C(y)y}{y} + y \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y \Rightarrow x = y(y + C)$$

Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^m$$

$m = 0$ -?
$m = 1$ -?

Делим на y^m : $\quad y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$

$z = y^{1-m}$: $\quad \dfrac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x)$

Кроме того, $y = 0$ может быть решением уравнения Бернулли

Пример: $xy' - y = y^2 \ln x$

$$z = y^{1-2} \Rightarrow z = \frac{1}{y},\ y = \frac{1}{z},\ y' = -\frac{z'}{z^2},\ -x\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z} = \frac{\ln x}{z^2},\ xz' + z = -\ln x$$

$$z = \frac{-x\ln x + x + C}{x};\ y = \frac{x}{-x\ln x + x + C},\ y = 0$$

Пример: решить задачу Коши $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y},\ y(1) = 2.$

$$x' = \frac{x^2 + y}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

$$x^2 = y(Cy - 2),\ x = \pm\sqrt{y(Cy - 2)},\ x = 0$$

$$1 = \sqrt{2(2C - 2)} \Rightarrow C = \frac{5}{4} \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{y(5y - 8)}$$

Уравнение Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

P,Q,R – непрерывные на *(a,b)* функции

Предположим, что мы подобрали какое-то частное решение y_1 этого уравнения. Тогда сделаем в данном уравнении замену функции

$$y = y_1 + z$$

$$\left(y_1 + z\right)' = P(x)\left(y_1 + z\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + z\right) + R(x)$$

$$z' = P(x)z^2 + \left(Q(x) + 2P(x)y_1\right)z$$

Получили уравнение Бернулли, которое сводится к линейному заменой

$$z = \frac{1}{u}$$

Пример. $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$

Очевидно, частное решение надо искать в виде $y_ч = \frac{a}{x}$

Подставим и получим $y_ч = \frac{2}{x}$

$$y = \frac{2}{x} + z \Rightarrow x^2 z' + xz + x^2 z^2 + 4xz = 0 \Rightarrow x^2 z' + 5xz = -x^2 z^2$$

Уравнение в полных дифференциалах

P*(*x*, *y*) *dx + ***Q*(*x*, *y*) *dy*** = 0, где левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции ***u(x,y),*** то есть

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\,Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial xy}$$

Если это условие выполняется то $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$$du(x,y)=0$$

$$\Rightarrow u(x,y)=C$$

Если ***P*(*x*, *y*)** и ***Q*(*x*, *y*)** – непрерывные функции в окрестности т (x_0,y_0) и

$P(x_0,y_0)^2+Q(x_0,y_0)^2\neq 0$, то в окрестности этой точки существует единственное решение.

Как решать?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int P(x, y)dx\right)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x, y) \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial\left(\int P(x, y)dx\right)}{\partial y}$$

Пример: $(x^2 + y)dx + (e^y + x)dy = 0$

$$\frac{\partial(x^2 + y)}{\partial y} = \frac{\partial(e^y + x)}{\partial x}$$

$$x^3 + e^y + xy = C$$

Пример: $$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\sin 2x}{y^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin 2x}{y}+x,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}.\end{cases}\qquad u(x,y)=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\varphi(y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\varphi'(y)=y-\frac{1}{2y^2}\Rightarrow\varphi(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$$

$$-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}=C$$

Иногда уравнение $\boldsymbol{P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy} = 0$, не являющееся уравнением в полных дифференциалах, можно привести к таковому, умножив на некоторую функцию $\mu(x,y)$.
В таком случае $\mu(x,y)$ называется *интегрирующим множителем.*

Существуют различные способы отыскания интегрирующего множителя, но они выходят за рамки нашей программы.
Остановимся на простых примерах.

1.

$$xdx + ydy + (x^2 + y^2)x^2dx = 0$$

$$d(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)x^2dx = 0$$

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} + x^2dx = 0 \qquad \ln(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} = C$$

2.

$$y(1 + xy)dx + \left(\frac{x^2y}{2} + y + 1\right)dy = 0$$

$$y(1 + \underline{xy)dx} + \left(\underline{\frac{x^2y}{2}} + \underline{y + 1}\right)dy = 0$$

$$(1 + xy)dx + \left(\frac{x^2}{2} + 1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

$$x + \frac{x^2y}{2} + y - \frac{1}{y^2} = C$$