Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)

Утюпин Юрий Валерьевич

Линейная Алгебра

Учебное пособие

Новосибирск 2020

УДК 512.64
ББК 22.143

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ

Рецензенты:
доцент кафедры алгебры и логики *ММФ НГУ,*
д.ф.-м.н., профессор Лыткина Д.В.;
доцент кафедры прикладной математики и кибернетики СИБГУТИ
к.т.н. Нечта И.В.;

Утюпин Ю.В. Линейная Алгебра: Учебное пособие / Ю. В. Утюпин; Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики; кафедра высшей математики.- Новосибирск.- 2020.- 87 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления 09.03.01 ФИВТ СибГУТИ. Рекомендовано кафедрой ВМ СибГУТИ для использования в учебном процессе. Учебное пособие содержит теоретический материал к разделу Линейная алгебра, входящему в курс «Алгебра и геометрия», читаемый на первом курсе. Помимо стандартного блока вопросов, связанных с решением систем линейных алгебраических уравнений, добавлены «трудные», но полезные темы, знание которых необходимо при изучении аналитической геометрии и некоторых вопросов из дифференциальных и разностных уравнений.

Оглавление.

Оглавление

Введение.

Данное пособие посвящено изучению вопросов Линейной алгебры. Все термины, понятия и утверждения этого пособия, кроме параграфов 7-9 в той или иной степени связаны с решением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), с простейшими типами которых вы уже встречались в средней школе. Например, решение системы уравнений с двумя и даже тремя неизвестными методами сложения и методами исключения изучаются в старших классах.

В данном учебном пособии вам будет представлено систематическое последовательное изложение общей теории СЛАУ с использованием очень важных понятий матрицы, определителя, ранга.

Краткая историческая справка.

Уже в начале II века до нашей эры в древнекитайском трактате «Девять книг о математическом искусстве» был изложен матричный метод решения систем линейных уравнений, то есть представление систем в виде матриц, столбцы которых составлены из коэффициентов систем при неизвестных членах и решение их методом исключения.

Лишь в конце 17 века Лейбниц предложил общий метод решения. И лишь в середине 18 века известными математиками Крамером, Кэли, Коши была разработана общая теория решения систем с введенным понятием определителя матрицы. Во второй половине 19 века с помощью введенного понятия ранга матрицы Кронекером и Капелли была поставлена точка в общем вопросе о существовании и единственности решения СЛАУ.

Сказанное выше необходимо студентам для понимания той последовательности, в которой реально происходило развитие теории СЛАУ. Это важно, так как в предлагаемом курсе идет классическое изложение вопросов линейной алгебры, в котором сначала вводятся понятии матрицы, определителя, ранга, и лишь затем идет переход к решению систем линейных уравнений. И у многих любознательных студентов в начале курса часто возникают вопросы, зачем нужны все эти непонятные определения и теоремы. Ответ теперь должен быть понятен: первично были СЛАУ, а все введенные термины лишь для упрощения их решения.

Стоит заметить, что применение теории линейной алгебры не ограничивается лишь решением СЛАУ. В настоящее время эта теория имеет огромный пласт приложений во многих разделах высшей математики и других отраслях знаний. А уж в современной технике трудно не найти матриц. В частности – все наши экраны телевизоров, компьютеров и смартфонов, цифровые фотографии и т.п. – числовые матрицы. И работа с ними есть не что иное, как работа с матрицами посредством умножения, сложения, линейных преобразований и др.

Отметим, что параграфы 7-10 желательно изучать после того, как пройден курс «Векторная алгебра», но, тем не менее, это не обязательно, так как в данных пунктах кратко дается вся необходимая информация. Данные параграфы представляют собой дальнейшее развитие теории матриц для применения её в различных областях математики. В частности, вопросы, изложенные в параграфах 7 - 9, мы будем использовать в курсе «Дифференциальные и разностные уравнения», а понятия из параграфа 10 «Квадратичные формы» уже непосредственно в курсе «Алгебра и Геометрия» в разделе «Аналитическая геометрия. Кривые второго порядка».

По каждому разделу разобраны примеры решения задач и предложены упражнения, часть из которых немного выходит за рамки «стандартных» и требует от студента применения небольших умственных усилий с использованием изложенного теоретического материала.

1. Матрицы и операции с ними

Матрица – прямоугольная таблица, состоящая из элементов - чисел (целых, вещественных или комплексных).

Если выражаться терминами программирования, то матрица - двумерный массив.

Матрица состоит из ***строк*** (элементов, расположенных на одной горизонтали) и ***столбцов*** (на одной вертикали).

Количество строк и количество столбцов определяют *размер* матрицы. Как правило, если говорят, что матрица имеет размер ***m***x***n***, то это означает, что у матрицы ***m*** строк и ***n*** столбцов (строки на первом месте).

Элементы матрицы обозначаются двойным индексом: a_{ij} – элемент, стоящий в *i*-ой строке и *j*-ом столбце (опять же, номер строки – первый индекс!).

Обычно матрицы обозначают большими буквами. Саму таблицу записывают в круглых скобках, реже в квадратных скобках, и ещё реже в двойных прямых, но не в одинарных прямых!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ - матрица } m\text{x}n.$$

i-ю строку обозначают, как a_i, j-й столбец как a^j (Или A_i , A^j).

Таким образом, матрицу можно также записать в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^n \end{pmatrix}.$$

Краткая запись матрицы: $A = \left\{ a_{ij} \right\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Матрица размера 1x1 – число.

Матрица размера $1 \times n$ называется *вектор-строкой*:

$$A = (a_{11}, a_{12}, .., a_{1n}).$$

Матрица размера $m \times 1$ называется *вектор-столбцом*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы A размера $m \times n$ определяют матрицу B размера $n \times m$ такую, что $b_{ji} = a_{ij}$ для всех $i = 1..m, j = 1..n$. Матрица B называется ***транспонированной*** матрицей для A и обозначается как A^T .

При транспонировании строки (столбцы) матрицы A становятся столбцами (соответственно - строками) матрицы A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $n \times n$, то есть матрица, у которой число строк и число столбцов одинаковые, называется ***квадратной.***

Элементы $a_{ii}, (i = 1..n)$ называют ***главной диагональю*** квадратной матрицы.

Элементы $a_{i,n-i+1}, (i = 1..n)$ - ***побочной диагональю*** квадратной матрицы (рис.1).

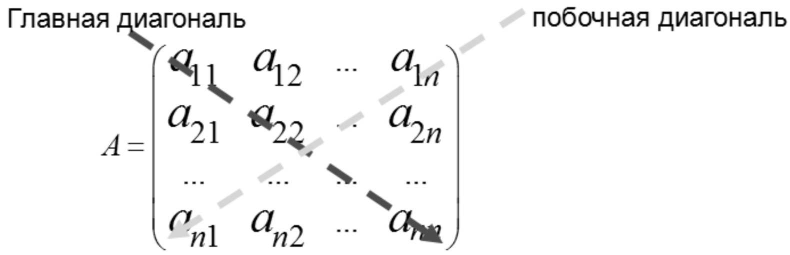

Рис.1. Диагонали квадратной матрицы

Среди квадратных матриц отдельно выделяют диагональные и треугольные матрицы. ***Диагональной*** матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Иногда применяется следующая краткая запись диагональной матрицы: $A = diag(a_{11,} a_{22}, ..a_{nn})$

Если у диагональной матрицы все элементы главной диагонали равны 1, то такая матрица называется ***единичной.*** Обозначается единичная матрица буквой *E*.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если же все элементы матрицы равны нулю, то такая матрица называется ***нулевой***.

Треугольные матрицы делятся на верхнетреугольные и нижнетреугольные.

Верхнетреугольной называется квадратная матрица, у которой все элементы под главной диагональю равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Нижнетреугольной называется квадратная матрица, у которой все элементы над главной диагональю равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица *A*, обладающая свойством $A = A^T$, называется ***симметрической***. Другими словами, для симметрической матрицы верно: $a_{ji} = a_{ij}$ для всех $i, j = 1..n$.

<u>Операции над матрицами.</u>

Для матриц определена операция ***сложения***. Складывать можно только матрицы одинакового размера. Сложение проводится поэлементно. То есть

$$A + B = \{a_{ij} + b_{ij}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}.$$

Также $A - B = \{a_{ij} - b_{ij}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Сложение матриц обладает следующими свойствами:

$A + B = B + A$ - коммутативность.

$(A + B) + C = A + (B + C)$-ассоциативность.

$A + 0 = A$ - сложение с нулевой матрицей.

$A + (-A) = 0$-существование противоположной матрицы.

Для матриц определена операция ***умножения матрицы на число***. При этом все элементы матрицы умножаются на это число. То есть

$$\lambda A = \{\lambda a_{ij}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}.$$

Для умножения матрицы на число также верны следующие свойства:

$1 \cdot A = A$ - умножение на единицу.

$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$-ассоциативность.

$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$-дистрибутивность.

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ -дистрибутивность.

Теперь мы можем для матриц ввести понятие линейной комбинации. Вообще, ***линейной комбинацией*** элементов $x_1, x_2, \dots x_n$ любой природы, для которых определены операции сложения и умножения на число, называется:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 x, \dots \alpha_n$ - некоторые числа.

Поскольку для матриц мы ввели операции сложения и умножения на число, то ***линейной комбинацией матриц*** $A_1, A_2, ... A_n$ называется $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$.

Кроме этих простых операций, для матриц определена более сложная операция - ***операция умножения матрицы на матрицу***.

Пусть A –матрица размера $m \times p$, а B – матрица размера $p \times n$. Тогда c_{ij}-элемент матрицы $C = AB$ вычисляется следующим образом: $c_{ij} = a_i \cdot b^j$, где в правой части стоит скалярное произведение *i*-й строки матрицы *A* на *j*-й столбец матрицы *B*. То есть,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} .$$

При этом получаемая матрица С имеет размер $m \times n$. Как вы уже заметили выше, умножать можно только матрицы, у которых количество столбцов матрицы, стоящей слева при умножении, равно количеству строк матрицы стоящей справа. В иных случаях умножение невозможно!

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

ассоциативность: $(AB)C = A(BC)$;

дистрибутивность:

$(A + B)C = AC + BC$ - слева,

$A(B + C) = AB + AC$ - справа;

ассоциативность и коммутативность относительно умножения на число: $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

Операция умножения не является коммутативной уже в силу своего определения.

То есть, в общем случае $AB \neq BA$.

Если же для некоторых матриц верно $AB = BA$, то такие матрицы называются ***перестановочными***. Например, единичная матрица *E* перестановочна с любой матрицей.

То есть $AE = EA = A$. При этом, если матрица *A* – не квадратная, то слева и справа в этом равенстве единичные матрицы имеют разный размер, равный количеству строк матрицы *A* слева и количеству столбцов матрицы *A* справа.

Остается добавить свойства транспонирования матриц:

$\left(A^T\right)^T = A$-***инволютивность***, то есть операция обратная самой себе;

Линейность: $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; $(AB)^T = B^T A^T$.

Здесь мы не приводим доказательств указанных выше свойств в силу того, что большая часть из них вытекают непосредственно из определений, а другие будут разобраны в примерах, либо будут предложены в качестве задач на экзамене для студентов, претендующих на хорошую оценку.

Поскольку мы ввели понятие произведения матриц, то для квадратных матриц мы можем ввести понятие ***степени матрицы*** (умножать саму на себя мы можем только квадратные матрицы!).

$$A^2 = AA, A^3 = A^2 A, \dots A^n = A^{n-1} A$$

И после этого мы можем ввести понятие ***многочлена от матрицы***:

$$P_n(A) = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots \alpha_{n-1} A + \alpha_n E,$$

где E – единичная матрица такого же размера, что и A.

Обратной матрицей к матрице A называется такая матрица B, что $AB = BA = E$.

Обозначается обратная матрица A^{-1}. Обратная матрица существует не для любой матрицы. Способы вычисления и свойства обратной матрицы будут изучены далее в отдельном пункте.

Примеры:

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

   Тогда линейная комбинация $2A + 3B = \begin{pmatrix} -4+3 & -6+6 \\ 0+9 & 2+12 \\ -6+15 & 4+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 14 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$.

2. Найти AB - произведение матриц

   $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

   Ответ: Данные матрицы перемножать нельзя, так как количество строк матрицы А не равно количеству столбцов матрицы В.

3. Найти AB - произведение матриц

   $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

   $AB = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -2\cdot 1 + -3\cdot 2 & -2\cdot 3 + -3\cdot 4 & -2\cdot 5 + -3\cdot 6 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 3 + 1\cdot 4 & 0\cdot 5 + 1\cdot 6 \\ -3\cdot 1 + 2\cdot 2 & -3\cdot 3 + 2\cdot 4 & -3\cdot 5 + 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -18 & -28 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти BA - произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Рекомендуем при умножении всегда **выписывать** умножаемые матрицы в порядке умножения:

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+3\cdot 0+5\cdot(-3) & 1\cdot(-3)+3\cdot 1+5\cdot 2\\ 2\cdot(-2)+4\cdot 0+6\cdot(-3) & 2\cdot(-3)+4\cdot 1+6\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-17 & 10\\ -22 & 10\end{pmatrix}.$$

5. Найти AX - произведение матрицы A на вектор X

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

$$AX=\begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\ 3x_1+2x_2+x_3\\ x_2-x_3\end{pmatrix}.$$

6. Найти AB - произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}.$$

$$AB=(1\quad 2\quad 3\quad 4)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}=\left(1+4+9+16\right)=30.$$

7. Найти BA - произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1 & 1\cdot2 & 1\cdot3 & 1\cdot4\\2\cdot1 & 2\cdot2 & 2\cdot3 & 2\cdot4\\3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3 & 3\cdot4\\4\cdot1 & 4\cdot2 & 4\cdot3 & 4\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 4 & 6 & 8\\3 & 6 & 9 & 12\\4 & 8 & 12 & 16\end{pmatrix}.$$

8. Найти произведение матриц

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\-1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Учитывая ассоциативность умножения, мы вправе выбирать порядок умножения. То есть, сначала первую на вторую, а потом на третью или первую на предварительно умноженную вторую на третью. В нашем случае первый вариант кажется удобнее.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\-1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2+0 & 1+4+0\\6+0+2 & 2+0+0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\-1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 5\\8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 2\\-1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-5 & 2-5 & 1+0 & 2+5\\-8-2 & 16-2 & 8+0 & 16+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -3 & 1 & 7\\-10 & 14 & 8 & 18\end{pmatrix}.$$

9. Найти значение матричного многочлена $P(A)$, где $P(x)=2x^2+x-2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -2\end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6 & 2-4\\3-6 & 6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 10\end{pmatrix}.$$

$$P(A)=2\begin{pmatrix}7 & -2\\-3 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -2\\-3 & 16\end{pmatrix}.$$

Добавим здесь ещё одно свойство операции умножения в случае так называемых блочных матриц.

Блочная матрица — представление обычной матрицы, при котором она разбивается вертикальными и горизонтальными линиями на прямоугольные части — блоки (клетки).

Пусть у нас есть две матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p}\\A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p}\\\dots & \dots & \dots & \dots\\A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp}\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p}\\B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2p}\\\dots & \dots & \dots & \dots\\B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pp}\end{pmatrix},$$ где разбиение матрицы A по строкам совпадает с разбиением матрицы B по столбцам, то есть

матрицы A_{ik} имеют размеры $m_i \times l_k$, а матрицы B_{kj} - размеры $l_k \times n_j$. Такие блочные матрицы называются согласованными. Их произведение вычисляется так же, как с обычными матрицами, только в качестве произведения элементов выступают произведения матриц.

$C = AB$ означает, что $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$, где C_{ij} - блоки матрицы С.

Примеры:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Разобьем на блоки, состоящие из матриц 2x2 .

Вычислим $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 13 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 10 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Представим матрицы в блочном согласованном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_{22} = (0), \ B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{12}, B_2 = (-1).$$

Тогда $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA_{12} + A_{12}(-1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} - A_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

Упражнения.

1.1. Найти $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1.3. Найти $2AB - BA$, где

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.4. Найти

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1.5. Найти AA^T, где

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.6. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3, .. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

1.7. Найти $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3, .. \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

1.8. Найти $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3, .. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$.

1.9. Найти $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^3, .. \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

1.10. Как изменится произведение матриц *AB*, если переставить i-ю и j-ю строки матрицы *A*?

1.11. Как изменится произведение матриц *AB*, если переставить i-й и j-й столбцы матрицы *B*?

1.12. Доказать, что любую квадратную матрицу можно представить в виде $A = B + C$, где матрица *B*- симметрическая, а матрица *C*-

кососимметрическая. Матрица называется кососимметрической, если $c_{ij} = -c_{ji}, c_{ii} = 0$.

1.13. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.14. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$.

2. Определители и их свойства

Прежде, чем перейти к теории определителей, сделаем небольшое отступление. Дело в том, что, как правило, студенты, начинающие изучение теории матриц и определителей, недоумевают, откуда это всё взялось, и для чего это всё нужно.

Как уже было сказано выше, все началось с решения систем линейных уравнений. Покажем это на примере системы второго порядка, методы решения которых изучают еще в курсе средней школы (методы исключения и сложения).

Пусть нам дана система уравнений:

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q. \end{cases} \qquad (1)$$

Данную систему мы уже можем записать в матричном виде, используя умножение матрицы на вектор.

$$AX = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Будем решать систему (1) методом сложения. Для этого умножим первое уравнение на c, а второе на a, и вычтем из первого второе. Получим:

$$(bc - ad)y = pc - aq .$$

Отсюда $y = \dfrac{aq - pc}{ad - bc}$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы, получим $x = \dfrac{pd - qp}{ad - bc}$.

Как видим, в решении уравнения в знаменателе присутствует значение $ad - bc$. Если это значение равно нулю, то решения этого уравнения не существует. Это значение и называют определителем вышеуказанной матрицы *A*. Такая же ситуация возникнет и при решении систем третьего и более высоких порядков.

Кроме того, если мы решаем систему первого порядка, то есть уравнение $ax = b$, то и здесь уравнение не имеет решения, если a равно нулю. Таким образом, учитывая, что любую систему уравнений, имеющую *n* уравнений и *n* неизвестных, мы можем записать в матричном виде с квадратной матрицей

$$AX = B,$$

для квадратных матриц *A* было введено понятие определителя. Из самого названия следует, что с помощью **определителя** мы можем **определить** свойства матрицы, например, имеет ли система решение или нет.

Определитель – важнейшее понятие линейной алгебры, применение которого выходит далеко за рамки решения систем линейных уравнений. Как вы увидите далее, определитель будет использоваться во всех разделах данного курса, в том числе и в векторной алгебре и аналитической геометрии. Трудно найти тему практических занятий, в которой не будет применен определитель.

Обозначения определителя:

$$|A| = \det A = \Delta A$$

Определителем матрицы называется:

при $n=1$: $|a| = a$,

при $n=2$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (произведение элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали),

при $n=3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка легко запоминается с помощью правила треугольников (рис.2):

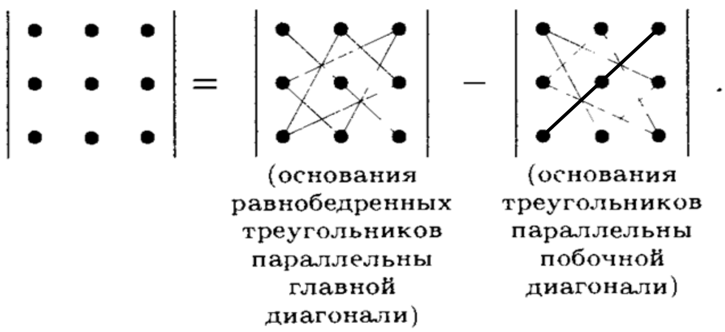

Рис.2. Вычисление определителя по правилу треугольников

С плюсом идут произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. С минусом - то же самое с побочной диагональю.

Примеры.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 6 = -3.$$

Для $n > 3$ будет введено общее рекурсивное определение определителя. Для этого нам потребуется ввести некоторые новые вспомогательные понятия.

Выберем в матрице A произвольно k строк и k столбцов. Элементы на пересечении выбранных строк и столбцов составляют матрицу размера $k \times k$. Определитель такой матрицы называют ***минором*** k-го порядка. Миноров k-го порядка может быть много. Например, матрица 3-го порядка имеет 9 различных миноров 2-го порядка. Обычно миноры обозначают как $A_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$, где $i_1, i_2, .. i_k$ - номера выбранных строк, $j_1, j_2, .. j_k$ -номера выбранных столбцов.

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{1,2}^{3,4} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_{1,3}^{2,4} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad A_{1,4}^{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, для миноров (n-1)-го порядка квадратной матрицы n-го порядка вводится обозначение M_{ij} -минор матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением матрицы A называется $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Алгебраическое дополнение может отличаться от минора только знаком. Отметим также, что в некоторых случаях минором называют не определитель, а саму матрицу размера $k \times k$. В этих случаях это либо видно из контекста, либо специально оговаривается.

Определение определителя через разложение по 1-й строке:

Определитель матрицы A n-го порядка равен сумме произведений элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} \ . \tag{2}$$

Это определение называется ***разложением по первой строке***.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}\,. \qquad (3)$$

Смысл этой теоремы в том, что, оказывается, определитель можно вычислять также ***разложением по первому столбцу***.

Доказательство. По индукции

Для n=2 – верно.

$$|A| = \sum_{j=1}^{2} a_{1j} A_{1j} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}.$$

Предположим, что данное утверждение верно для некоторого произвольного n. Докажем, что тогда оно будет верно и для $n+1$.

Итак, пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & a_{2n+1} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} & .a_{nn+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & . & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

По определению

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & a_{2n+1} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} & .a_{nn+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & . & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots a_{1n+1}A_{1n+1} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & . & a_{2n+1} \\ a_{31} & a_{33} & . & a_{3n+1} \\ . & . & . & . \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & . & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \ldots a_{1n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & . & a_{3n} \\ . & . & . & . \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & . & a_{n+1,n} \end{vmatrix} =$$

В данном разложении алгебраические дополнения A_{ij} являются определителями n-го порядка. По нашему предположению для них уже верно разложение по первому столбцу. Продолжим равенство.

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}(a_{21}A_{1221} + a_{31}A_{1231} + .. + a_{n+1,1}A_{12n+11}) + ..$$

$$.. + a_{1n+1}(a_{21}A_{1n+121} + a_{31}A_{1n+131} + .. + a_{n+1,1}A_{1n+1n+11}) = \ldots$$

Раскрыв скобки и перегруппировав, получим

$$\ldots = a_{11}A_{11} + a_{21}(a_{12}A_{1221} + a_{13}A_{1321} + .. + a_{1n+1}A_{1n+121}) + ..$$

$$.. + a_{n+1,1}(a_{12}A_{12n+1,1} + a_{13}A_{13n+1,1} + .. + a_{1n+1}A_{1n+1n+1,1}) =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n+1,1}A_{n+1,1}.$$

В итоге получили разложение по первому столбцу. Что доказывает теорему.

Кроме того, верна теорема:

<u>Теорема 2</u>.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \forall i = 1...n. \tag{4}$$

Смысл данной теоремы в том, что вычисление определителя можно проводить ***разложением по любой строке.***

<u>Доказательство</u> данной теоремы аналогично проводится по индукции последовательным разложением по 1-й и i-й строке и перегруппировкой слагаемых.

Оно предлагается в качестве <u>упражнения</u> для студентов, претендующих на <u>хорошую</u> отметку на экзамене.

Обобщая всё вышесказанное, можно дать определение определителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \tag{5}$$

Здесь слева выписано разложение по i-й строке, а справа разложение по j-му столбцу.

Пример. Посчитаем вычисленный ранее определитель разложением по второму столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -20 + 5 + 12 = -3.$$

Поскольку не имеет значения, по какой строке или столбцу проводить разложение, мы можем выбирать те ряды (строки или столбцы), которые содержат наибольшее количество нулей, чтобы было как можно меньше вычислений.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Данный определитель мы вычислили ранее разложением по первой строке. Но разложение по второму столбцу здесь более оптимально с точки зрения трудозатрат, так как второй столбец содержит два нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \ldots$$

Здесь один из двух оставшихся определителей 3-го порядка вычислим разложением по третьей строке, а второй по правилу треугольников.

$$\ldots = 2\left(2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\right) + (9 + 40 + 48 - 45 - 16 - 24) = 2(-12 - 6) + 12 = -24.$$

Свойства определителей.

1. $\det \mathrm{O} = 0$
2. $\det E = 1$
3. $\det A^T = \det A$

Эти свойства доказывать нет необходимости. Первые два проверяются непосредственным вычислением. Третье следует из равносильности разложения по строке и столбцу.

4. $|AB| = |A||B|$

Доказательство этого свойства выходит за рамки данного курса.

5. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

Это свойство следует непосредственно из второго и четвертого.

$|A|\left|A^{-1}\right| = \left|AA^{-1}\right| = |E| = 1$

6.Если переставить две строки (столбца), то определитель меняет знак.

<u>Доказательство</u>. Проведем его для строк. Для столбцов аналогично.

Очевидно, что если поменять местами первую и вторую строки местами и разложить исходный определитель по первой строке, а полученный сменой строк определитель по второй строке, мы получим одинаковые значения, но с разными знаками из-за того, что алгебраические дополнения в первой строке и во второй будут отличаться знаками.

Поэтому очевидно равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

То же самое будет в случае, если мы поменяем местами любые соседние строки.

Для того же, чтобы переставить, например, 1-ю и *k*-ю строки местами, мы можем последовательно переставлять 1-ю со 2-й, затем в полученной матрице 2-ю с 3-ей и так далее, последовательно сдвигая исходную первую строку к *k*-й. А затем исходную *k*-ю строку вернуть на место первой.

Таким образом, получаем последовательность смен:

$$1\ 2\ 3\ ..k..\to \underbrace{2\ 1\ 3\ ..k..\to 2\ 3\ 1\ ..k..\to\ldots\to 2\ 3\ ..k\ 1..\to}_{\text{k-1 раз}} \underbrace{2\ 3\ ..k\ (k-1)\ 1..\to\ \ldots\to 2\ k\ 3\ ..\ (k-1)\ 1..\to k\ 2\ 3\ ..\ (k-1)\ 1..}_{\text{k-2 раз}}$$

В результате получаем, что для того, чтобы поменять местами две не соседние строки, мы должны сделать нечетное количество смен соседних строк, каждая из которых меняет знак. Так как -1 в нечетной степени также равно -1, свойство 6 доказано.

7. Если две строки (столбца) совпадают, то определитель равен нулю.

Следует непосредственно из свойства 6. Поменяем две одинаковые строки местами. Знак определителя должен измениться. Но по факту определитель тот же. Следовательно, он равен нулю.

Из этого свойства следует важное равенство, называемое ***разложением по чужой строке (столбцу):***

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} A_{ij} = 0, m \neq i \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ip} A_{ij} = 0, p \neq j \right). \tag{6}$$

В левой части равенства (6), по сути, стоит определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами).

8. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Доказывается непосредственно разложением по этому ряду. После чего коэффициент выносится за скобку.

9. При добавлении к любой строке (столбцу) другой строки (столбца) умноженной на одно и то же число λ определитель не изменится.

Для <u>доказательства</u> используется равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix},$$

которое следует непосредственно из разложения исходного определителя по первому столбцу. (Это равенство верно не только для первого столбца, но и для любого столбца и строки.)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{1m} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21}+\lambda a_{2m} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1}+\lambda a_{nm} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{1m} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ \lambda a_{2m} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ \lambda a_{nm} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{1m} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{2m} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{nm} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поскольку во втором определителе $m \neq 1$, то это есть разложение по чужому столбцу, следовательно, этот определитель равен нулю. Что доказывает свойство.

10. Если хотя бы один ряд нулевой, то определитель равен нулю. Для доказательства достаточно разложить по нулевому ряду.

11. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Докажем на примере верхнетреугольной матрицы, последовательно раскладывая по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & & a_{2n} \\ .. & .. & .. \\ 0 & & 2_{nn} \end{vmatrix} = ... = a_{11}a_{22}...a_{n-2n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}.$$

Как мы заметили ранее, процесс вычисления определителя заметно упрощается, если имеется ряд, среди элементов которого имеются нули. Использование свойства 9 позволяет нам самим искусственно «обнулять» элементы ряда.

Примеры.

1. На примере определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

покажем, как ещё упростить вычисления, используя девятое свойство.

Прибавим ко второй строке четвертую, умноженную на -2. Или, другими словами, вычтем из второй строки две четвертых строки. Определитель при этом не изменится. Затем разложим получившийся определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4-2\cdot 2 & 2-2\cdot 1 & 3-2\cdot 0 & 4-2\cdot 1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, используя преобразование из 9 свойства, называемое далее элементарным преобразованием (одним из нескольких, как будет сказано далее) мы свели наш определитель четвертого порядка к определителю с рядом, содержащим один ненулевой элемент, что при разложении по этому ряду приводит к одному определителю меньшего порядка. В общем же случае прямое разложение по строке (столбцу) приводит к вычислению *n* определителей *n-1* - го порядка.

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a^1 - 2a^4 \\ a^2 - a^4 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1-6 & 3-3 & 2 & 3 \\ 4-8 & 2-4 & 3 & 4 \\ 5-6 & -1-3 & 4 & 3 \\ 2-2 & 1-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \{a_3 - 2a_2\} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1-8 & 4-4 & 4-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 8.$$

Здесь мы сначала из первого столбца вычли 2 четвертых столбца, а из второго один четвертый столбец. Затем разложили определитель по четвертой строке и поменяли знаки у двух столбцов. Что не изменило знака определителя, так как мы его дважды умножили на -1. Затем в определителе третьего порядка из третьей строки отняли две вторых и разложили полученный определитель по второму столбцу. Выражения в фигурных скобках кратко описывают используемые нами элементарные преобразования.

Упражнения.

2.1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} a & -1 \\ -a & 1 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$, ж) $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}$, з) $\begin{vmatrix} a-b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$.

2.2. Доказать, что для того, чтобы определитель 2-го порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были пропорциональны.

2.3. Найти решение уравнения $\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 3 & 7-x \end{vmatrix}$.

2.4. Вычислить определители по правилу треугольников:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

2.5. Вычислить определители разложением по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & 0 & f \\ g & 0 & h & 0 & k \\ l & m & n & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix}$.

2.6.Вычислить определители, предварительно применив элементарные преобразования:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,ж) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, и) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, к) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2.7.Вычислить определители, используя их свойства:

а) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 2 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 2 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} a+b & c & 2 \\ a+c & b & 2 \\ b+c & a & 2 \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\pi/4) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\pi/4) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\pi/4) \end{vmatrix}$.

3. Обратная матрица

Пусть нам дана квадратная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Как мы уже упоминали ранее, ***обратной матрицей*** к квадратной матрице A называется такая матрица B, что $AB=E$.

Обратная матрица перестановочна с матрицей A, то есть $AB=BA=E$

Действительно, $AB=E \Rightarrow BAB=BE \Rightarrow BAB=EB \Rightarrow BA=E$.

Обратная матрица единственна!

Действительно, пусть $AB=E$ и $AC=E$, тогда

$AB-AC=E-E=0=A(B-C) \Rightarrow B-C=0 \Rightarrow B=C$

Обозначается обратная матрица $A^{-1}: AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Непосредственно из определения легко выводятся свойства обратной матрицы:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$E^{-1} = E$$

Для матрицы 2x2 легко можно найти обратную матрицу по определению.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - обратная матрица.

Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили систему 4-х уравнений:

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=0 \\ c-d=0 \\ c+d=1 \end{cases}$$, решая которую, получим

$$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае матрицы 3-го порядка уже понадобилось бы решать систему из 9 уравнений, что уже вызывает большие трудности.

Приведем ещё один пример нахождения обратной матрицы.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ a+2b=0 \\ c+2d=0 \\ c+2d=1 \end{cases}$$. Очевидно, что данная система не имеет решения.

Значит, как мы убедились, обратная матрица существует не для любой матрицы.

Квадратная матрица, определитель которой равен нулю, называется ***вырожденной.*** Соответственно, ***невырожденной*** называется квадратная матрица, определитель которой не равен нулю.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Доказательство.

Необходимость.

$\det(A^{-1}A)=\det(A^{-1})\det(A)=1$.

Если матрица вырождена, то последнее равенство невозможно.

Достаточность.

Составим матрицу из алгебраических дополнений к матрице A в столбцах которой стоят алгебраические дополнения к строкам матрицы A. Такую матрицу называют ***присоединённой*** или ***союзной*** и обозначим $A_{П}$.

$$A_{П}=\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AA_{П}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $A\left(\frac{A_{П}}{|A|}\right)=E$. Таким образом, мы показали, что существует матрица, обратная к матрице A. <u>Теорема доказана</u>.

В доказательстве теоремы мы, по сути, нашли способ вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A_{П},\ \text{где}\ A_{П}=\left\{A_{ij}\right\}_{i,j=1..n}^{T}. \tag{7}$$

Примеры.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$A_{11}=4, A_{12}=-3, A_{21}=-2, A_{22}=1$.

Построим присоединенную матрицу и вычислим определитель матрицы A.

$$A_{П}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2.$$

Тогда по формуле (7) :

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверим это:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3 & 1-1\\ -6+6 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Для матрицы 2-го порядка метод присоединенной матрицы является очень эффективным, так как не надо вычислять определители, а алгебраические дополнения – это всего лишь элементы матрицы.

<u>На примере</u> покажем, насколько усложняется этот метод в случае матрицы 3-го порядка.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

В первую очередь, чтобы не делать лишних вычислений, проверим, является ли матрица А невырожденной. Найдем определитель разложением по второй строке

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=3+3=6.$$

Матрица невырожденная. Следовательно, будем искать обратную матрицу по формуле (7).

Для того, чтобы найти присоединенную матрицу, необходимо вычислить 9 алгебраических дополнений, то есть 9 определителей 2-го порядка.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-5, A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-2, A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 5\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=3, A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-6, A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2, A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2, A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2.$$

Получили $A_П=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ -2 & -6 & 2\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}$. Разделив данную матрицу на определитель матрицы А, получим:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-5 & 3 & 2\\ -2 & -6 & 2\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Как мы видим, в случае n=3, процесс нахождения обратной матрицы с помощью присоединенной хоть и возможен на бумаге, но уже достаточно трудоемок.

В случае же n=4 мы должны вычислить 16 определителей 3-го порядка, что уже на практике нереализуемо.

Существует другой способ решения проблемы нахождения обратной матрицы. Данный способ чаще используется, так как в нём применяются те же приемы, что и при нахождении определителей, и, как мы увидим далее, при решении систем линейных алгебраических уравнений. Это метод элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1. Перестановка местами любых двух строк матрицы;
2. Умножение одной строки матрицы на ненулевую константу;
3. Прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на некоторую константу.

Итак, для того, чтобы найти обратную матрицу, мы составляем ***расширенную*** матрицу, состоящую из n строк и $2n$ столбцов, «приписывая» справа от матрицы A единичную матрицу E.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & 1 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} & 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее к полученной матрице будем применять элементарные преобразования строк таким образом, чтобы привести матрицу A к единичной матрице. При этом мы применяем те же элементарные преобразования и для стоящей справа матрицы Е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & b_{11} & b_{12} & .. & b_{1n} \\ 0 & 1 & .. & 0 & b_{21} & b_{22} & .. & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & b_{n1} & b_{n2} & .. & b_{nn} \end{pmatrix}$$

После того, как мы получим слева единичную матрицу, справа будет стоять матрица, обратная к A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{n1} & b_{n2} & .. & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&2&1\end{vmatrix}=3.$$

Построим расширенную матрицу и приведем левую её часть к единичной с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\{a_2-2a_1\}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\sim\{a_3-2a_2\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&3&4&-2&1\end{pmatrix}\sim\{a_3/3\}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&4/3&-2/3&1/3\end{pmatrix}\sim\begin{Bmatrix}a_2+a_3\\a_1-a_3\end{Bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1/3&2/3&-1/3\\0&1&0&-2/3&1/3&1/3\\0&0&1&4/3&-2/3&1/3\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&2/3&-1/3\\-2/3&1/3&1/3\\4/3&-2/3&1/3\end{pmatrix}.$

Доказательство того, что справа мы получаем обратною матрицу, легко провести, используя тот факт, что любое элементарное преобразование строк матрицы A может быть представлено с помощью умножения слева некоторой матрицы на матрицу A.

Приведем простые примеры элементарных преобразований матриц второго порядка.

Мы хотим переставить строки матрицы $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Для этого умножим её справа на некоторую матрицу:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b&2a+4b\\c+3d&2c+4b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}.$$

Решая две простых системы $\begin{cases} a+3b=3 \\ 2a+4b=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} c+3d=1 \\ 2c+4d=2 \end{cases}$, получаем матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Умножение этой матрицы на любую квадратную матрицу 2-го порядка переставляет у этой матрицы строки местами.

Очевидно также, что для того, чтобы умножить первую строку матрицы A на некоторое число k, необходимо умножить матрицу A справа на матрицу $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 2k \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

И наконец, чтобы к первой строке прибавить вторую, умноженную на некоторое число k, нужно умножить матрицу A справа на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3k & 2+4k \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Самостоятельно выписать матрицы, описывающие элементарные преобразования в общем случае для матрицы $n \times n$ и для любых строк.

Таким образом, как мы выяснили, любое элементарное преобразование матрицы может быть представлено, как умножение слева некоторой матрицы L на матрицу A.

Следовательно, последовательность преобразований, которые мы проводим для приведения матрицы A к единичной матрице описывается как $L_1 L_2 .... L_m A = E$.

Следовательно, $L_1 L_2 .... L_m = A^{-1}$.

Поскольку мы делаем те же преобразование и для матрицы Е, то справа мы получаем

$$L_1 L_2 .... L_m E = A^{-1}.$$

Упражнения.

3.1. Найти обратную матрицу с помощью присоединённой матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$.

3.2. Найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{в)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{г)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{д)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Ранг матрицы

Еще в средней школе при решении систем уравнений учат, что если система имеет меньше уравнений, чем неизвестных, то эту систему точно нельзя решить однозначно. Если же количество уравнений такое же, как и количество неизвестных, то единственное решение можно найти. Это, конечно, очень грубая теория, но с её помощью можно примерно представить вопрос о разрешимости систем и о понятии ранга, как «количестве уравнений», а точнее, на данном этапе «количестве строк матрицы».

Например, рассмотрим системы:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+2y=2 \\ x+y=2 \end{cases}.$$

С одной стороны, все эти три системы формально состоят из двух уравнений с двумя неизвестными.

Но, с другой стороны, лишь первая система однозначно разрешима. Вторая система состоит из двух одинаковых уравнений, поэтому это не система вовсе, а одно уравнение с двумя неизвестными. Значит, в данной системе «не хватает» уравнений. Третья система имеет два уравнения, но в левой части этой системы стоят пропорциональные выражения, отличающиеся в два раза, а, при этом, справа значения одинаковые. Значит, третья система вообще не может иметь решения. Эти три простых примера полностью дают представление о вопросе разрешимости систем (существовании и единственности решения). Но для того, чтобы чётко сформулировать теорию разрешимости СЛАУ, было введено понятие ранга матрицы.

Существует несколько эквивалентных определений ранга. Здесь дается определение через миноры матрицы. Позднее будет дано определение ранга матрицы через линейную независимость её рядов.

Пусть нам дана матрица размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение: ***Рангом матрицы*** A называется целое число $\boldsymbol{r}$, равное <u>наибольшему</u> порядку минора матрицы A, <u>отличного от нуля</u>.

Обозначается как $r(A) = rank(A) = rang(A)$.

Другими словами $r(A) = k$ означает, что у матрицы A существует минор порядка k, не равный нулю, при этом все миноры порядка k+1 равны нулю.

$r(0) = 0$ - ранг нулевой матрицы равен нулю. И нулю равен ранг только нулевой матрицы!

$r(A) \leq \min(m,n)$. Это неравенство очевидно, так как миноров большей размерности, чем *m* или *n* просто не существует.

Если верно равенство $r(A) = \min(m,n)$, то ранг матрицы А называется ***полным.***

Примеры:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r(A) = 3$, так как $\det(A) \neq 0$. Ранг полный.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $r(A) = 2$, так как $\det(A) = 0$, а минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $r(A) = 1$, так как все миноры второго порядка равны нулю.

<u>Элементарные преобразования матрицы не меняют её ранга</u>. Это утверждение следует из того, что при элементарных преобразованиях матрицы её миноры, которые являются определителями квадратных подматриц исходной матрицы, либо не меняются, либо умножаются на ненулевое число.

Также легко доказываются по определению следующие утверждения:

<u>Ранг вектор-столбца и вектор-строки</u> равен 1.

<u>Ранг диагональной матрицы</u> равен <u>числу ненулевых элементов</u>.

<u>Ранг треугольной матрицы</u> равен <u>числу ненулевых строк</u>.

<u>Ранг ступенчатой матрицы</u>, то есть матрицы, у которой каждая строка начинается с большего количества нулей, чем предыдущая, также <u>равен числу ненулевых строк.</u>

Способы вычисления ранга:

Метод окаймляющих миноров.

Пусть в матрице А найден ненулевой минор *k*-го порядка *M*.

Рассмотрим все миноры (*k*+1)-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор *M*. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен *k*. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой, и вся процедура повторяется уже для миноров (*k*+2)-го порядка. И так далее, пока либо все миноры очередного порядка будут равны нулю, либо не дойдем до *min(m,n)*.

Метод элементарных преобразований.

Поскольку, во-первых, элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, и, во-вторых, ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк, то мы просто приводим матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Количество оставшихся ненулевых строк будет рангом матрицы.

Примеры.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг методом окаймляющих миноров.

Как правило, ненулевые миноры второго порядка видно «невооруженным глазом», так как это определители подматриц размером 2х2 с непропорциональными строками.

Например, $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. Далее вычисляем все миноры третьего порядка, содержащие данный минор.

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_{124}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Получили, что все окаймляющие миноры для ненулевого минора M_{12}^{12} равны нулю, следовательно ранг матрицы равен двум: $r(A) = 2$.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы воспользуемся методом элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_1 \\ a_4 + 2a_1 \end{Bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 10 & 7 & 12 \end{pmatrix} \sim \{a_4 + 2a_2\} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&-3&-5&-5&-5\\0&0&0&-3&2\\0&0&0&-3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&-3&-5&-5&-5\\0&0&0&-3&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу с тремя ненулевыми строками. Следовательно, $r(A) = 3$.

Пусть $r(A) = k$. Тогда, по определению ранга, существует ненулевой минор M порядка k, а все миноры порядка $k+1$ равны нулю.

Минор M называют ***базисным минором***. А строки и столбцы, образующие базисный минор, называют ***базисными строками и столбцами***.

Пусть $a_1, a_2, a_3, ... a_m$ - строки матрицы A.

Строки матрицы А ***линейно зависимы***, если найдутся такие $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ... \lambda_m$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + ... + \lambda_m a_m = 0.$$

То есть, существует нулевая линейная комбинация строк с ненулевыми коэффициентами.

Понятие линейной зависимости является очень важным, так как определяется оно не только для строк матрицы, но и столбцов, и, вообще, любых элементов, для которых определены операции сложения и умножения на число. В частности, далее будет это понятие дано для геометрических векторов.

Следующие утверждения также верны для совокупности таких элементов, для которых определено понятие линейной зависимости.

Утв.1. Если часть совокупности элементов линейно зависима, то и вся совокупность линейно зависима.

Утв.2 . Если вся совокупность линейно независима, то и любая часть совокупности элементов линейно независима.

Утв.3. Если элементы линейно зависимы, то один из них – линейная комбинация других.

Доказательства этих утверждений легко вытекают из определения линейной зависимости.

Теорема 1 Базисные строки (столбцы) линейно независимы, при этом любая строка (столбец) матрицы А является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

<u>Доказательство</u>. Проведем доказательство для строк. Для столбцов оно аналогично.

Пусть базисные строки линейно зависимы, тогда одна строка является линейной комбинацией других. Пусть это будет 1-я строка:

$a_1 = c_2a_2 + ... + c_ka_k$, где *k*- ранг матрицы *A*, а $a_1, a_2,.., a_k$ -базисные строки.

Последовательно вычитая из первой строки каждую из строк с соответствующим коэффициентом, мы получим в 1-й строке все нули. Таким образом, мы проводим серию элементарных преобразований, которые не меняют ранга. Но при этом ранг изменился, так как среди базисных строк остается лишь *k-1* ненулевых, а это означает, что все миноры *k*-го порядка равны нулю.

Противоречие.

Покажем, что любая строка есть линейная комбинация базисных строк. Очевидно, что это верно для самих базисных строк.

Снова предположим, что $a_1, a_2,.., a_k$ - базисные строки. Пусть a_j- не базисная строка. Докажем, что её можно представить в виде линейной комбинации $a_j = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k$.

Рассмотрим определитель k+1-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & a_{2i} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} & a_{ki} \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jk} & a_{ji} \end{vmatrix},$$

который равен нулю, так как k-ранг матрицы.

Разложим его по последнему столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & a_{2i} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} & a_{ki} \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jk} & a_{ji} \end{vmatrix} = (-1)^{k+2} a_{1i} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jk} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{k+3} a_{2i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{12} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jk} \end{vmatrix} + ... + a_{ji} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} \end{vmatrix} = 0.$$

В последнем слагаемом определитель – базисный минор. Следовательно, он не равен нулю. Следовательно, разделив на него, мы получаем, что $a_{ji} = c_1 a_{1i} + ... + c_k a_{ki}$,

где коэффициенты $c_1, c_2,..., c_k$- отношения соответствующих определителей к базисному минору со знаком минус.

При этом, это равенство верно для всех *i*, а коэффициенты $c_1, c_2,..., c_k$ не зависят от *i*. Это и означает, что *j*-я строка является линейной комбинацией базисных строк.

Теорема доказана.

Таким образом, можно дать ещё одно эквивалентное определение ранга. ***Ранг матрицы*** – число линейно независимых строк (столбцов) данной матрицы.

Последняя теорема позволяет нам сформулировать одно из самых важных утверждений линейной алгебры.

Теорема 2. Для того, чтобы определитель квадратной матрицы n-го порядка был равен 0, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно независимы.

Доказательство.

Пусть определитель равен 0, тогда ранг матрицы меньше n, но тогда в базисном миноре меньше, чем n строк, а это означает, что, как минимум, одна из строк является линейной комбинацией других. Это и есть линейная зависимость.

Если строки линейно зависимы, то они не являются базисными. Значит базисный минор меньшего порядка, чем n. Это значит, что ранг меньше, чем n. Следовательно, определитель равен нулю.

Ч.т.д.

Упражнения.

4.1. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \text{в)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \text{г)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ \text{в)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{г)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 3 & 16 \\ 4 & 7 & 13 & 4 & 18 \end{pmatrix}.$$

4.3. Найти ранг матрицы:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 13 & 4 & 18 \end{pmatrix},\ \text{б)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.4. Найти значения параметра а, при котором матрица имеет наименьший ранг

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с невырожденной квадратной матрицей. Метод Крамера. Матричные уравнения

Переходим непосредственно к изучению систем линейных уравнений и к вопросу об их разрешимости.

Система линейный алгебраических уравнений – это система, состоящая из уравнений, каждое из которых является линейным относительно неизвестных, то есть уравнением первой степени:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{gathered} \tag{8}$$

Данную систему можно записать в матричной форме:

$$AX = B, \tag{9}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$-матрица размера $m \times n$, состоящая из коэффициентов системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - неизвестные, вектор длины n,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$-правая часть системы, вектор длины m.

В случае, когда $B=0$, получаем систему

$$AX = 0. \tag{10}$$

Такую систему называют ***однородной*** системой линейных уравнений. В обратном случае – ***неоднородной.***

Решением системы назовем вектор $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$, такой, который обращает систему в тождество, то есть $AC=B$.

Как мы уже показывали ранее, не любая система имеет решение.

Поэтому, назовем систему ***совместной***, если она имеет решение и ***несовместной*,** если она не имеет решения.

Мы также показывали, что система может иметь более одного решения.

Назовем совместную систему ***определенной***, если она имеет единственное решение и ***неопределенной***, если существует более одного решения системы.

Перед тем, как изучать общий вопрос о разрешимости систем, рассмотрим частный случай СЛАУ – системы с квадратной матрицей, то есть системы, количество уравнений в которых совпадает с количеством неизвестных.

Итак, пусть нам дана система (9)

с квадратной матрицей $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$

Предположим, что данная матрица обратима, то есть имеет обратную матрицу A^{-1} такую, что

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

Но тогда умножив равенство $AX=B$ на обратную матрицу, получим

$$A^{-1}AX=X=A^{-1}B. \qquad (11)$$

Таким образом, мы получили, что если мы найдём обратную матрицу системы, то её решение находится простым умножением обратной матрицы на правую часть.

Этот способ называется методом ***решения системы через обратную матрицу.***

Заметим, что такое решение системы возможно, <u>только если существует обратная матрица.</u>

Но вопрос существования обратной матрицы нами изучен ранее. Напомним, что обратная матрица существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A отличен от нуля, то есть матрица A <u>невырождена.</u>

Если же матрица A вырождена, то <u>обратной матрицы для неё нет</u>, и <u>решить</u> таким образом систему <u>нельзя</u>.

Предположим, что матрица A невырождена.

Тогда, как мы показали, $X=A^{-1}B$.

Распишем это равенство более подробно, воспользовавшись методом нахождения обратной матрицы через присоединенную:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots. \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Получили, что

$$x_1 = \frac{1}{\det A}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n),$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n),$$

$$\dots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n).$$

Заметим, что если в первом равенстве в выражении, стоящем в скобках заменить $b_1, b_2, .., b_n$ на $a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}$, то мы получим разложение определителя матрицы A по первому столбцу. Это означает, что в скобках стоит определитель матрицы, в которой первый столбец матрицы A замещён вектором B. То же самое и с остальными выражениями.

Резюмируя вышесказанное, получим:

$$x_1 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Обозначим такие определители за Δ_i. Тогда получим:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|} \qquad , (i=1,n)$$

– решение системы $AX = B$.

Эти выражения называют формулами Крамера (методом Крамера).

Заметим, что метод Крамера, хотя и легко запоминается, но очень трудоемок, так как для решения системы третьего порядка нужно вычислить четыре определителя третьего порядка. А для решения системы 4-го порядка уже нужно пять определителей четвертого порядка, каждый из которых формально есть четыре определителя третьего порядка. С возрастанием размерности матрицы серьезно увеличивается сложность вычислений.

Кроме того, как мы уже отметили, метод Крамера возможно применять только для квадратных матриц и только с невырожденной матрицей A.

Пример.

Решим систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Метод обратной матрицы.

Для этой матрицы мы уже искали обратную:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

Значит $X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

2. Метод Крамера.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 15 + 8 - 0 - 12 - 5 = 6,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 2 - 0 - 24 - 5 = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 3 + 4 - 24 - 6 - 1 = -12,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 5 + 16 - 0 - 2 - 10 = 9.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{-12}{6} = -2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Помимо СЛАУ с невырожденной матрицей рассмотрим в данном параграфе так называемые ***матричные уравнения,*** т.е. уравнения вида

$$AX = B,$$

где A,B - известные матрицы, а X –неизвестная матрица. Кроме того, матричное уравнение может быть записано в виде

$$XA = B$$

или даже

$$AXC = B,$$

где C- заданная матрица.

Вспомнив правила умножения матриц, отметим, что матричное уравнение $AX = B$ по сути является обычной системой линейных уравнений для отдельно взятых столбцов матрицы X и B.

Например, матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

равносильно системе

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

или двум отдельным системам

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решив данные системы, мы найдем все компоненты неизвестной матрицы, а значит, и решим матричное уравнение.

Отметим, что в данном случае решать СЛАУ мы можем любым способом, но для матричных уравнений более удобен способ решения через обратную матрицу.

Действительно, если для матрицы A известна обратная матрица A^{-1}, то матричное уравнение $AX = B$ решается очень просто:

$$X = A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Также уравнение $XA = B$ имеет решение

$$X = XAA^{-1} = BA^{-1}.$$

Уравнение $AXC = B$ имеет решение

$$X = A^{-1}AXCC^{-1} = A^{-1}BC^{-1}.$$

Примеры.

1. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотрим ещё один ряд систем с матрицей

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix}$, для которой уже найдена обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 48 & -5 & 18 \\ -45 & 18 & -8 \\ -40 & 16 & -15 \end{pmatrix}.$$

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Её решение:

$$X = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 48 & -5 & 18 \\ -45 & 18 & -8 \\ -40 & 16 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 20 & -10 & 66 \\ -1 & 36 & -53 \\ 7 & 32 & -55 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в матричном уравнении матрица X совсем не обязательно должна быть квадратной.

Например, матричное уравнение

б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ решается, как

$$X = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 48 & -5 & 18 \\ -45 & 18 & -8 \\ -40 & 16 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, матрица X может быть большего размера, чем матрица A. Иногда этот факт вводит студентов в недоумение, так как кажется, что неизвестных больше, чем уравнений.

На самом же деле, количество неизвестных определяется матрицей X, а количество уравнений матрицей B, а не матрицей A. А матрицы X и B в матричном уравнении <u>всегда имеют одинаковый размер</u>.

Например, матричное уравнение

в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$ имеет решение

$$X = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 48 & -5 & 18 \\ -45 & 18 & -8 \\ -40 & 16 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}.$$

г) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}$

имеет решение

$$X = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 & -5 & 18 \\ -45 & 18 & -8 \\ -40 & 16 & -15 \end{pmatrix}.$$

И последнее, что стоит отметить: в матричном уравнении $AXC = B$ матрица X также может быть не квадратной. В этом случае матрицы A и C – квадратные матрицы разного размера.

д) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратные матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 48 & -5 & 18 \\ -45 & 18 & -8 \\ -40 & 16 & -15 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение матричного уравнения:

$$X = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 48 & -5 & 18 \\ -45 & 18 & -8 \\ -40 & 16 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Упражнения.

Решить системы с помощью обратной матрицы. Сделать проверку.

а) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$, в) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 12 \\ 7x - 2y - 3z = -8 \\ -2x + 3y + 4z = 19 \end{cases}$,

г) $\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 5y + z = -2. \\ 5x + y + 3z = 0 \end{cases}$

Решить системы методом Крамера. Сделать проверку.

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 13 \\ 2x + 2y + 3z = -1 \\ 3x - y - z = 7 \end{cases}$, в) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$,

г) $\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 5y + z = -2. \\ 5x + y + 3z = 0 \end{cases}$

Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

д) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, е) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

ж) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Общий случай. Теорема Кронеккера-Капелли. Метод Гаусса. Однородные системы. Фундаментальная система решений. Структура общего решения неоднородной системы

В предыдущем параграфе мы рассмотрели вопрос о решении систем линейных алгебраических уравнений с невырожденной квадратной матрицей методами Крамера и обратной матрицы. Эти методы не применимы для систем, в которых количество неизвестных не равно количеству уравнений и для систем с вырожденными квадратными матрицами.

Для решения таких систем предлагается метод элементарных преобразований, называемый **методом Гаусса**. Отметим, что метод Гаусса универсален, и его, конечно, можно применять и в случае квадратных систем с невырожденными матрицами.

Рассмотрим суть метода Гаусса именно на примере с невырожденной квадратной матрицей.

Пусть у нас есть система $AX = B$

с квадратной матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$

и правой частью $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$, причем матрица A не вырождена.

Построим расширенную матрицу системы:

$$A \mid B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Поскольку матрица А не вырождена, её можно с помощью элементарных преобразований строк привести к единичной матрице. Тогда, как мы показывали ранее в параграфе 3, каждое сделанное элементарное преобразование будет описываться умножением справа матрицы А на некоторую матрицу. Их произведение в этом случае будет обратной матрицей к A. Если мы проделаем те же элементарные преобразования строк к расширенной матрице, то в результате на месте правой части мы получим искомое решение X, поскольку это будет $A^{-1}B$.

Пример.

Решим систему $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ методом Гаусса.

Построим расширенную матрицу:

$$A\,|\,B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

и будем приводить её левую часть к единичной матрице с помощью элементарных преобразований.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{Bmatrix} a_2 - a_1 \\ a_3 - 4a_1 \end{Bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right) \sim \{a_3/(-3)\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \{a_3 \leftrightarrow a_2\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \{a_3 + 2a_2\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \{a_3/2\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \sim \begin{Bmatrix} a_2 - 2a_3 \\ a_1 - 3a_1 \end{Bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \sim \{a_1 - 2a_2\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

В результате получили решение системы $X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

Отметим, что мы здесь не оговариваем, какие элементарные преобразования мы будем делать. <u>Главная наша цель – привести A к единичной матрице.</u>

Классический же метод Гаусса более конкретный, так как он рассчитан для реализации его в виде компьютерной программы, поэтому алгоритм решения методом Гаусса четко сформулирован:

1. На первом шаге делим всю первую строку на первый элемент строки. Если же он равен нулю, то сначала меняем первую строчку местами с той, где он не равен нулю (такая строка есть, так как иначе бы матрица была вырождена). После этой операции первый элемент первой строки равен 1:

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim \{a_1/a_{11}\} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & .. & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Затем из каждой строки, начиная со второй, вычитается первая, умноженная на первый элемент данной строки:

$$\sim \{a_i - a_{i1}\cdot \tilde{a}_1, i=2,...n\} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & .. & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & .. & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ .. & .. & .. & .. & ... \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & .. & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right).$$

Первый шаг закончен.

2. На втором шаге переходим к матрице, которая начинается со второй строки и второго столбца и делаем то же самое, что и на первом шаге. При этом мы сразу можем также привести второй элемент первой строки к нулю тем же способом – вычитанием второй строки, умноженной на соответствующий коэффициент:

$$\sim \{\tilde{a}_2/\tilde{a}_{22}\} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}/a_{11} & .. & a_{1n}/a_{11} & b_1/a_{11} \\ 0 & 1 & .. & \tilde{a}_{2n}/\tilde{a}_{22} & \tilde{b}_2/\tilde{a}_{22} \\ .. & .. & .. & .. & ... \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & .. & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} a_i - \tilde{a}_{i2}\cdot \tilde{a}_2, \\ i=1,3,...n \end{array}\right\} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \tilde{a}_{13} & ... & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{23} & ... & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & ... & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{n3} & ... & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right).$$

3…n шаги.

Далее процесс повторяется до тех пор, пока мы не приведём матрицу к единичной:

$$... \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & \tilde{b}_2 \\ ... & ... & .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & \tilde{b}_n \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 \\ x_2 = \tilde{b}_2 \\ ... \\ x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Этот метод легко программируется в случае, когда матрица невырожденная.

Переходим к общему случаю – решение системы линейных алгебраических уравнений с произвольной матрицей.

Пусть A – матрица $m \times n$.

Теорема 1. Кронеккера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное число решений, если ранг меньше числа неизвестных.

Другими словами:

Если *r(A)=r(A|B)*, то система совместная. После приведения матрицы к диагональному (или треугольному или ступенчатому) виду, такая матрица не имеет строк вида 0=1.

Если *r(A)=r(A|B)=m*, то система совместная и определенная. То есть, число неизвестных равно числу **различных** уравнений. Именно число различных уравнений и определяет ранг матрицы.

Если *r(A)=r(A|B)<m*, то система совместная и неопределенная. В этом случае система имеет бесконечное множество решений, так как для определения всех неизвестных «не хватает» различных уравнений.

Если r(A)<r(A|B), то система несовместная. Это означает, что после приведения матрицы к диагональному (или треугольному или ступенчатому) виду, такая матрица имеет строки вида 0=1.

Доказательство.

Пусть система совместна. То есть система $AX = B$ имеет решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Другими словами, существуют числа $x_1, x_2, \dots x_n$ такие, что $B = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n$, где $a^1, a^2, \dots, a^n$ - столбцы матрицы. Последнее означает, что B- линейная комбинация столбцов матрицы A. Отсюда следует, что вектор B линейно зависим со столбцами матрицы A, и следовательно, *rank(A)=rank(A|B).*

Пусть теперь *rank(A)=rank(A|B)=r,* тогда пусть M - базисный минор матрицы A, тогда он же является базисным минором и для матрицы $A|B$.

По определению базисного минора, B – линейная комбинация базисных столбцов. $B = x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n$.

Тогда коэффициенты этой линейной комбинации являются решением нашей системы.

Теорема доказана.

Примеры.

В качестве простых примеров как раз приведём те примеры, которые мы уже рассматривали в п.3.

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y=2, \end{cases} \begin{cases} 2x+2y=2, \\ x+y=1, \end{cases} \begin{cases} 2x+2y=2, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Мы имеем три разных системы. Запишем их в виде расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

В первой системе $r(A)=r(A\,|\,B)=2$, следовательно, система имеет единственное решение. Матрица приводится к виду $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$, следовательно, решение системы $x=3, y=-1$.

Во второй системе две строки пропорциональны, матрица приводится к виду $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Значит, $r(A)=r(A\,|\,B)=1$. Это означает, что система совместна, но не определена. Решений системы бесконечно много: $x=C, y=1-C$, где С –любое число.

Матрица третьей системы приводится к виду $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. $r(A)=1\neq r(A\,|\,B)=2$. Имеется строка 0=1. Следовательно, система несовместна, то есть не имеет решений.

Далее рассмотрим вопрос о нахождении всех решений однородной системы линейных уравнений.

Напомним, однородной системой называется система с нулём в правой части:

$$AX=0.$$

Однородная система всегда совместна, так как расширенной матрицы нет (справа стоит ноль). Система всегда имеет тривиальное решение: $X=0$.

Из теоремы Кронеккера- Капелли напрямую следует теорема:

Теорема 2. Если *rank(A)=n,* то тривиальное решение единственно.

Для квадратных матриц условие *rank(A)=n* равносильно условию <u>невырожденности</u>. То есть, Если для квадратной матрицы однородной системы выполняется условие $|A|\neq 0$, то тривиальное решение единственно!

Следствие Для существования ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы $rank(A) < n$. Для квадратных матриц это условие равносильно следующему: $|A| = 0$.

Пусть дана однородная система линейных алгебраических уравнений: $AX = 0$, где матрица A размера $m \times n$ и $rank(A) < n$.

По теореме Кронеккера-Капелли система не определена. Построим решение этой системы.

Пусть M – базисный минор матрицы A (в данном случае мы говорим минор, подразумевая, что это матрица, а не определитель). Его размер $r \times r$.

Перенумеровав переменные и переставив строки, получим из матрицы A эквивалентную матрицу, которую запишем в блочном виде:

$$\begin{pmatrix} M & F \\ Q & P \end{pmatrix},$$

где M - размера $r \times r$, F - размера $r \times (n-r)$, Q – размера $(m-r) \times r$, P - размера $(m-r) \times (n-r)$.

Так как M - базисный минор, то строки стоящие ниже, являются линейной комбинацией базисных, а следовательно мы можем с помощью элементарных преобразований привести их к нулевым, то есть, можем получить матрицу

$$\begin{pmatrix} M & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, базисный минор, как невырожденную матрицу, с помощью элементарных преобразований строк, как мы уже показывали в методе Гаусса, можем привести к единичной матрице. Применяя эти элементарные преобразования строк к последней матрице, мы получим

$$\begin{pmatrix} E & F_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим за $\overline{X}$ матрицу

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} -F_1 \\ E^{n-r} \end{pmatrix},$$

где E^{n-r}-единичная матрица размера $(n-r) \times (n-r)$.

Тогда $\begin{pmatrix} E & F_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{X} = \begin{pmatrix} E & F_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_1 \\ E^{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -EF_1 + F_1E^{n-r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_1 + F_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Это означает, что <u>матрица $\overline{X}$ является решением матричного уравнения $A\overline{X} = 0$</u>. Матрица $\overline{X}$ имеет *(n-r)* столбцов. Следовательно, каждый столбец этой матрицы является решением однородной системы $AX = 0$.

Матрица $\overline{X}$ состоит из *n-r* линейно независимых столбцов, образующих фундаментальную систему решений (ФСР) однородной СЛАУ. Столбцы линейно независимы потому, что нижний блок матрицы $\overline{X}$ – единичная матрица.

Фундаментальная система решений (ФСР) — максимальное множество линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений.

Матрицу $\bar{X}$ называют ***фундаментальной матрицей***.

Как мы установили выше, фундаментальная система решений содержит $n-r$ решений, где n – количество неизвестных в системе, а r – ранг матрицы A.

Свойство решений однородной СЛАУ:

Если x_1, x_2 -решения системы $AX = 0$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ также является решением этой системы. Действительно,

$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 = 0$.

Отсюда также следует, что если $x_1, x_2, .. x_m$ - решения однородной системы, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.

Таким образом, любая линейная комбинация столбцов ФСР является решением однородной СЛАУ. И любое решение системы представимо в виде линейной комбинации столбцов ФСР.

Общим решением однородной системы называется линейная комбинация ее фундаментальных решений.

$$AX = 0: \ X = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_{n-r} x_{n-r},$$

где $x_1, x_2, ..., x_{n-r}$ - столбцы фундаментальной матрицы, а $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ - произвольные постоянные.

Переменные (столбцы), образующие базисный минор, называют ***зависимыми***, остальные переменные системы называют ***свободными.***

Примеры

1. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y + z + t = 0, \\ x + y = 0, \\ x - t = 0. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} a_3 - a_1 \\ a_4 - a_1 \end{Bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} a_4 + a_2 \\ a_3 / (-1) \end{Bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{Bmatrix} a_2 - a_3 \\ a_1 - a_3 - a_2 \end{Bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили: первые три столбца – базисные, следовательно, переменные, образующие их – зависимые. Четвертая переменная свободная. Как мы описывали выше, полученная матрица есть $\begin{pmatrix} E & F_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $F_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Следовательно $\begin{pmatrix} -F_1 \\ E^{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - ФСР.

Значит, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$-общее решение системы.

Объясним еще раз, как мы получаем общее решение непосредственно из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Запишем её в виде системы: $\begin{cases} x - t = 0 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Отсюда получаем $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Это означает, что t – свободная переменная, так как она может принимать любые значения, а остальные переменные однозначно определяются значением переменной t.

Далее, поскольку t-любое число, то и обозначим её за С- произвольную постоянную. Тогда получаем:

$\begin{cases} x = C \\ y = -C \\ z = 0 \\ t = C \end{cases}$ или $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - общее решение системы.

2.
$$\begin{cases} x+y+t=0, \\ y+z=0, \\ x-z+t=0. \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг равен двум, следовательно, система имеет две зависимые переменные. Единичная матрица для первых двух переменных выделена. Следовательно, примем x и y за зависимые. Тогда z и t – свободные. Они могут принимать любые значения.

Из последней матрицы: $\begin{cases} x-z+t=0, \\ y+z=0. \end{cases}$

Пусть $z=C_1, t=C_2$. Тогда получим
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1-C_2 \\ -C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений.

Следует отметить, что в большинстве случаев мы вправе сами выбирать зависимые и свободные переменные. Поэтому, при другом выборе общее решение может выглядеть совершенно по-другому. Это не будет являться ошибкой. В любом случае, следует всегда после того, как найдено общее решение, подставить полученные фундаментальные решения в исходную систему для самопроверки.

Переходим непосредственно, к решению неоднородной СЛАУ
$$AX=B.$$

Пусть $\bar{x}$-некоторое (частное) решение неоднородной системы, тогда
$$A\bar{x}=B.$$
Пусть x-любое другое решение этой же неоднородной системы.
Тогда
$$A(x-\bar{x})=Ax-A\bar{x}=B-B=0.$$
Следовательно, $x-\bar{x}$ - решение однородной системы $AX=0$.

Отсюда следует, что ***общее решение неоднородной системы равно сумме частного решения неоднородной и общего решения однородной***:

$$AX = B: \ X = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_{n-r} x_{n-r} + x_ч,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{n-r}$ - ФСР системы $AX = 0$, а $Ax_ч = B$.

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y + z + t = 1, \\ x + y = 1, \\ x - t = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{Bmatrix} a_3 - a_1 \\ a_4 - a_1 \end{Bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{Bmatrix} a_4 + a_2 \\ a_3/(-1) \end{Bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{Bmatrix} a_2 - a_3 \\ a_1 - a_3 - a_2 \end{Bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили, что частное решение исходной системы $X_ч = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ - ФСР однородной системы. Следовательно, общее решение исходной системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ где C – любое число.

Отметим также, что, как и при решении однородной системы, у нас часто есть выбор, какая переменная является свободной, а какая зависимой. Кроме того, частных решений исходной системы бесконечное множество. Например, в предыдущем примере вектор $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ также является частным решением системы. Поэтому, общее решение при другом выборе может выглядеть по-другому.

Упражнения.

6.1. Найти ФСР однородных систем и записать их общее решение:

а) $\begin{cases}3x+5y+2z=0,\\4x+7y+5z=0,\\x+y-4z=0,\\2x+9y+6z=0,\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+2y+z=0,\\6x+4y+3z=0,\\9x+6y+5z=0,\\3x+2y=0,\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x-y-3z=0,\\x-z-t=0,\\4x-y-5z-2t=0,\\3x-y-4z-t=0,\end{cases}$ г) $\begin{cases}-x+t=0,\\y-z-t=0,\\x+y-z-2t=0,\\2y-2z-3t=0,\end{cases}$

д) $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\2x_1-x_2-3x_3+3x_4=0,\\3x_1+x_2-x_3-3x_4=0,\\x_1+x_2-3x_4=0,\end{cases}$ е) $\begin{cases}-3x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\2x_1-x_2-3x_3+2x_4=0,\\-x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\-x_1+2x_3-x_4=0.\end{cases}$

6.2. При каких значениях параметра a система имеет ненулевое решение?

а) $\begin{cases}x+2y+az=0,\\2x+y+z=0,\\x-y-z=0,\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y+z=0,\\2x+ay+z=0,\\x+y-z=0.\end{cases}$

6.3. Доказать, что для любой однородной неопределенной системы линейных уравнений с целыми коэффициентами можно построить целочисленную фундаментальную систему решений.

6.4. Исследовать совместность неоднородных систем и в случае совместности найти их общее решение:

а) $\begin{cases}3x-y+2z=9,\\x-5y+3z=-4,\\x-7y+4z=5,\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+2y+z=11,\\2x+y+2z=11,\\x+2y+3z=11,\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 6, \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18, \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 9x_1 + 1x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

7. Линейные пространства. Линейные преобразования

Множество элементов E произвольной природы, для которых определены операция сложения и операция умножения на скаляр, такие, что сумма элементов этого множества и произведение элемента множества на скаляр также принадлежат этому множеству и удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. $\forall x, y \in E \qquad x + y = y + x,$
2. $\forall x, y, z \in E \qquad (x + y) + z = x + (y + z),$
3. $\forall x \in E, \ \exists 0 \in E \qquad x + 0 = x,$
4. $\forall x \in E, \ \forall \lambda, \mu \in R \qquad \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x,$
5. $\forall x \in E, \ \forall \lambda, \mu \in R \qquad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$
6. $\forall x, y \in E, \ \forall \lambda \in R \qquad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$
7. $\forall x \in E \qquad 0 \cdot x = 0, \quad 1 \cdot x = x.$

называется ***Линейным пространством*** (над некоторым числовым полем, из которого берется скаляр λ).

Линейное пространство также называют ***векторным пространством***. А его элементы называют ***векторами***. Следует иметь в виду, что это понятие более общее, чем пространство известных нам геометрических векторов.

Примеры.

1. Трехмерное евклидово пространство R^3 - линейное пространство. Любая сумма элементов (векторов) из R^3 и произведение элемента (вектора) на вещественное число также принадлежат R^3 и удовлетворяются все аксиомы.
2. Множество всех матриц mхn - линейное пространство.
3. Множество всех функций, непрерывных на замкнутом интервале $[a,b]$ - линейное пространство.

Базисом пространства называется набор линейно независимых элементов $e_1, e_2, ... e_n$ этого пространства такой, что любой элемент этого пространства представим в виде линейной комбинации базисных. То есть,

$$\forall x \in L \quad \mathrm{x} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n . \qquad (12)$$

В этом случае *n –**размерность*** пространства. Размерность пространства L обозначается как *dim L.*

Пространство называется ***конечномерным***, если оно имеет конечный базис.

Равенство (12) называется разложением элемента (вектора) по базису, а $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ - координатами вектора в заданном базисе.

Пусть L - линейное пространство над полем вещественных чисел.

Правило A, которое каждому элементу x из L ставит в соответствие единственный элемент y из L называется ***преобразованием*** пространства L.

Обозначается, как $y = A(x)$.

Вектор y в данном случае называется образом вектора x. А вектор x – прообраз вектора y.

Преобразование A называется ***линейным***, если выполняются следующие условия:

1. $\forall x \in L$ и $\forall \lambda \in R \;\; A(\lambda x) = \lambda A(x)$
2. $\forall x_1, x_2 \in L \;\; A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$

Теорема 1. В конечномерном линейном пространстве размерности n любому линейному преобразованию можно поставить в соответствие квадратную матрицу порядка n, единственную в заданном базисе. (Вид матрицы зависит от базиса пространства).

Доказательство.

Пусть $y = A(x)$ - линейное преобразование,

$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$ - разложения векторов x и y по базису.

Далее пусть

$$\begin{aligned} &A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n, \\ &A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n, \\ &... \\ &A(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

- разложение образов векторов $e_1,..e_n$ по базису.

Подставляя выписанные разложения в преобразование $y = A(x)$ и учитывая его линейность, получим, что

$$\begin{cases} y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + ... + x_na_{1n}, \\ y_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} + ... + x_na_{2n}, \\ ... \\ y_n = x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + ... + x_na_{nn}. \end{cases}$$

или в матричном виде:

$$Y = A \cdot X,$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Получили, что линейное преобразование вектора x в вектор y записывается в виде умножения на квадратную матрицу.

Единственность такой матрицы следует из единственности разложения векторов по базису.

Теорема доказана.

Полученная матрица A называется ***матрицей линейного пространства*** в заданном базисе. Как мы видим, матрица A <u>зависит от базиса</u>. Столбцы данной матрицы – координаты образов базисных векторов.

Заметим обратное, что любой квадратной матрице можно поставить в соответствие линейное преобразование.

Таким образом,

В конечномерном линейном пространстве L размерности n с заданным базисом существует взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями и квадратными матрицами размерности n.

Предположим, что в пространстве L заданы два различных базиса: $e_{1,}...,e_n$ и $e'_{1,}...,e'_n$. Тогда каждый из векторов $e'_{1,}...,e'_n$ представим в виде линейной комбинации векторов $e_{1,}...,e_n$. Другими словами

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ ... \\ e'_n \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} e_1 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix},$$

где T –матрица, называемая ***матрицей перехода*** от первого базиса ко второму.

Рассмотрим линейное преобразование $y = A(x)$, которое в базисе $e_{1,}...,e_n$ описывается матрицей $A = \{a_{ij}\}$, а в базисе $e'_{1,}...,e'_n$ матрицей $A' = \{a'_{ij}\}$.

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ - координаты вектора x в базисе $e_{1,}...,e_n$, а $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$- координаты того же вектора x в базисе $e'_{1,}...,e'_n$.

Аналогично для вектора y определим вектор-столбцы координат Y и Y'. Тогда в первом базисе $Y = AX$, а во втором базисе $Y' = A'X'$.

Так как T-матрица перехода, то

$$Y = TY', \quad X = TX'. \tag{13}$$

Подставляя (13) в $Y = AX$, получим:

$$TY' = ATX' \Rightarrow Y' = T^{-1}ATX'.$$

Отсюда следует, что

$$A' = T^{-1}AT \text{ или } A = TA'T^{-1}. \tag{14}$$

Формулы (14) связывают матрицы одного и того же линейного преобразования в разных базисах.

Теорема 2. Определитель матрицы линейного преобразования не зависит от базиса.

Это следует из свойства произведения определителей:

$$\left|A'\right| = \left|T^{-1}AT\right| = \left|T^{-1}\right|\left|A\right|\left|T\right| = \frac{1}{\left|T\right|}\left|A\right|\left|T\right| = \left|A\right|.$$

Далее приведём определения и теоремы без доказательств, которые напрямую связаны с решением однородных систем линейных уравнений и с их фундаментальной матрицей.

Определения.

Линейное преобразование называется ***невырожденным,*** если

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Следовательно, линейное преобразование невырожденное в том и только в том случае, когда его матрица невырожденная.

Ранг матрицы называется ***рангом линейного преобразования***.

Линейное преобразование называется ***тождественным***, когда

$$A(x) = x$$

для всех элементов пространства. Тождественному преобразованию в любом базисе соответствует единичная матрица.

Множество $\{y \mid y = A(x), x \in L\}$ - ***область значений*** оператора А. То есть, область значений - множество образов всех элементов пространства L.

Множество $\{x \mid A(x) = 0\}$ называется ***ядром*** преобразования. То есть это те элементы пространства, которые отображаются этим преобразованием в ноль. Обозначается *Ker A*. Ядро преобразования – решения однородной системы линейных уравнений с матрицей преобразования.

Теорема 3. Область значений и ядро линейного преобразования - линейные подпространства в L.

Размерность области значений линейного преобразования равна *r* - рангу матрицы, соответствующей этому преобразованию.

Размерность ядра равна *n-r*. (Здесь *n* –размерность пространства *L*).

Число *n-r* называется ***дефектом*** линейного преобразования.

Очевидно, что если матрица невырожденная, то область значений преобразования – всё пространство *L*, дефект равен нулю, а размерность ядра *dim Ker(A)*=0.

Напомним, что если мы имеем однородную систему линейных уравнений

$$AX = 0,$$

то эта система имеет лишь тривиальное решение в том случае, когда матрица не вырождена, а следовательно ранг матрицы равен *n*. Это и означает, что ядро матрицы лишь нулевой вектор.

Если же матрица вырождена, то её ранг *r*<*n*. И в этом случае существует фундаментальная система решений однородной системы уравнений, состоящая из *n-r* линейно независимых векторов. Эти вектора и являются базисом ядра, как линейного подпространства в *L*.

Примеры линейных преобразований плоскости:

1. $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$. Данное преобразование увеличивает первую координату вектора X. Следовательно, это растяжение плоскости в два раза по оси OX.

2. $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$. Меняет первую координату вектора X на противоположную. Следовательно, это зеркальное отображение относительно оси OY.

3. $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$. Добавляет к значению первой координаты X значение второй координаты. То есть вектор сдвигается вправо на величину второй координаты.

4. $Y = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} X$ - поворот плоскости на угол альфа относительно начала координат.

Упражнения.

7.1. Являются ли линейными пространствами следующие множества:

а) Множество невырожденных матриц размера 2x2;

б) Множество симметричных матриц размера 3x3:

в) Множество вырожденных матриц 3x3;

г) Множество ограниченных числовых последовательностей;

д) Множество непрерывных функций, равных нулю в точке x=1;

е) Множество непрерывных функций, равных 1 в точке x=0;

ж) Множество монотонно возрастающих числовых последовательностей.

7.2. Какие линейные преобразования плоскости описываются следующими матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Собственные векторы и собственные значения

В предыдущем параграфе мы отождествили понятия линейного преобразования и матрицы в конечномерных пространствах. Поэтому далее мы будем вести речь о собственных значениях и векторах матрицы, как линейного преобразования.

Если существует такой ненулевой вектор x из линейного пространства L и такое число λ, что выполняется равенство

$$Ax = \lambda x,$$

то x называется ***собственным вектором*** матрицы A, а λ - ***собственным значением (собственным числом)***, соответствующим x.

Нетрудно показать, что <u>одному собственному вектору</u> соответствует лишь <u>одно собственное число</u>. (Но не наоборот!).

Очевидно также, что если <u>x – собственный вектор</u>, соответствующий числу λ, то для любого числа C вектор Cx <u>– также собственный вектор</u>, соответствующий числу λ.

Как искать собственные векторы и собственные числа?

Пусть $Ax = \lambda x$.

Это уравнение равносильно следующему

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Следовательно, ненулевой вектор x должен являться решением однородной системы линейных уравнений. Это возможно, как мы уже знаем, лишь в том случае, когда матрица системы вырождена, то есть

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{15}$$

$$\text{или} \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем уравнение n-го порядка относительно λ, которое называется ***характеристическим уравнением***, а соответствующий многочлен - ***характеристическим многочленом***.

Для того чтобы найти собственные числа матрицы, необходимо найти корни характеристического многочлена.

Отсюда следует, что матрица имеет <u>не более, чем n различных собственных чисел</u>, среди которых <u>могут быть и комплексные</u>.

Собственные числа также называют ***характеристическими корнями*** матрицы.

Набор всех характеристических корней называют ***спектром*** матрицы (линейного преобразования).

Пример.

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 .$$

Его корни $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$.

Найдем собственные векторы.

$\lambda_1 = 4$:

Составляем уравнение

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 \\ 6 & 1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ 6x - 3y \end{pmatrix} = 0.$$

Решая систему, получим, что собственный вектор $v_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, где C_1 - любое число.

$\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 1 \\ 6 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 6x + 2y \end{pmatrix} = 0.$$

$v_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, где C_2 - любое число.

Теорема 1. Характеристический многочлен не зависит от базиса линейного преобразования.

Это означает, что одно и то же линейное преобразование, имеющее разные матрицы в разных базисах, будет иметь одинаковый характеристический многочлен.

Легко доказывается подстановкой $A = TA'T^{-1}$ в $|A - \lambda E|$ и применением свойств определителя.

Теорема 2. Набор собственных векторов, соответствующих различным собственным числам, является линейно независимым.

Доказательство строится по индукции, начиная с пары различных собственных чисел и последующим добавлением нового.

Отсюда следует, что если матрица имеет <u>*n* различных собственных значений</u>, то им <u>соответствует *n* линейно-независимых собственных векторов</u>, которые можно принять в качестве базиса пространства L.

Если все характеристические корни <u>различны и вещественны</u>, то <u>спектр</u> линейного преобразования называют ***простым***.

Самая важная теорема в данном параграфе:

Теорема 3. Если базис линейного пространства составлен из собственных векторов некоторого линейного преобразования, соответствующих n различным собственным числам, то матрица этого линейного преобразования в этом базисе является диагональной.

<u>Доказательство</u>. Вспомнив теорему 1. Из пункта 7 о связи линейного преобразования с матрицей, увидим, что матрица линейного преобразования записывается через разложение образов базисных векторов по этому же базису:

$$A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n,$$
$$A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n,$$
$$...$$
$$A(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n$$

- разложение образов базисных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матрица преобразования в этом базисе.

Но поскольку базисные векторы – собственные векторы матрицы, соответствующие различным собственным числам, это означает, что

$$\left.\begin{aligned} A(e_1) &= \lambda_1 e_1 = \lambda_1 e_1 + 0\cdot e_2 + ... + 0\cdot e_n, \\ A(e_2) &= \lambda_2 e_2 = 0\cdot e_1 + \lambda_2\cdot e_2 + ... + 0\cdot e_n, \\ &... \\ A(e_n) &= \lambda_n e_n = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + ... + \lambda_n\cdot e_n \end{aligned}\right. \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Из данной теоремы следует, что линейное преобразование с простым спектром в некотором базисе может быть задано диагональной матрицей.

Упражнения.

Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Жорданова форма матрицы

Квадратные матрицы A и B одного и того же порядка называются ***подобными,*** если существует невырожденная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$.

Другими словами, матрицы подобны, если они задают одно и то же линейное преобразование, но в разных базисах. T – матрица перехода от одного базиса к другому.

У подобных матриц одинаковы определитель, ранг, собственные значения, характеристический многочлен.

Как мы увидели в предыдущем параграфе, среди подобных матриц можно выделить наиболее простую форму. Например, диагональную. Достаточно лишь найти базис.

Возникает вопрос: Любую ли матрицу можно привести к диагональной?

Проверим это на примере:

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет характеристическое уравнение $(\lambda - 1)^2$. Диагональная матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет такой же характеристический многочлен. Проверим, существует ли невырожденная матрица перехода T такая, что $B = T^{-1}AT$.

Пусть $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Тогда $TB = AT$ или $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Решая эту систему, получаем, что $c = d = 0$. Следовательно, матрица T вырождена, а значит, матрицы A и B не подобные.

Как видим, не любую матрицу можно привести к диагональному виду.

На самом деле, к диагональной форме можно привести только ту матрицу, которая имеет n собственных векторов. Рассмотренная же в примере матрица А имеет два одинаковых собственных числа, но всего лишь один собственный вектор, поэтому базис из собственных векторов в данном случае составить невозможно.

Основная наша задача на данном этапе – найти наиболее простую форму матрицы из класса подобных матриц.

Итак, любой характеристический многочлен может быть представлен в виде

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2}...(\lambda_p - \lambda)^{m_p},$$

где $\lambda_1,...,\lambda_p$ - собственные числа, $m_1,...,m_p$ - их кратность ($m_1 + ... + m_p = n$).

Будем искать наиболее простую из верхнетреугольных матрицы, в которых по диагонали стоят собственные числа:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ldots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ldots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & 0 & & & & \ldots & & & \\ & & & & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & & & & \ldots & \\ & & & & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Для каждого собственного числа существует хотя бы один собственный вектор. Кроме того, как мы уже указали ранее, собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

Поэтому первая наша задача – разобраться в наиболее простом представлении <u>части матрицы, соответствующей одному кратному собственному числу</u>.

Вернемся к представлению характеристического многочлена и будем рассматривать одно слагаемое.

Число m_i называется ***алгебраической кратностью*** собственного значения λ_i. ***Геометрической кратностью*** s_i этого числа называется количество собственных векторов, ему соответствующих.

Если $m_i = s_i$, то часть матрицы, соответствующая λ_i может быть приведена к диагональной, так как имеется «достаточное» число собственных векторов.

Если же $s_i \le m_i$, то эта часть матрицы не приводится к диагональной.

Рассмотрим матрицу $k \times k$

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Её характеристический многочлен имеет корень λ_0 кратности *k*. Для того, чтобы найти собственный вектор, необходимо решить однородную систему

$$Bv = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0 .$$

Ранг матрицы B равен k-1. Следовательно, найдется лишь один собственный вектор.

Матрица $J_k(\lambda_0)$ называется ***жордановой клеткой*** матрицы A соответствующей собственному значению λ_0. Это наиболее простая форма матрицы в случае, когда геометрическая кратность собственного числа равна 1.

Теперь остается узнать, как привести такую матрицу к жордановой клетке. Для этого нам нужно найти базис, из которого составим матрицу перехода.

Как мы уже говорили выше, матрица линейного преобразования записывается через разложение образов базисных векторов по этому же базису:

$$\begin{aligned} A(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{k1}e_n, \\ A(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{k2}e_k, \\ &\ldots \\ A(e_k) &= a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \ldots + a_{kk}e_k. \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & . & & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, базисные вектора должны удовлетворять следующим равенствам

$$\begin{aligned} (J_k(\lambda_0) - \lambda_0)e_1 &= 0, \\ (J_k(\lambda_0) - \lambda_0)e_2 &= e_1, \\ &\ldots \\ (J_k(\lambda_0) - \lambda_0)e_k &= e_{k-1}. \end{aligned}$$

Оказывается, если матрица А имеет лишь одно собственное число λ_0 алгебраической кратности k и геометрической кратности 1 (то есть имеет лишь один собственный вектор), то базис, в котором эта матрица имеет вид жордановой клетки, удовлетворяет таким же равенствам:

$$(A-\lambda_0)e_1=0$$
$$(A-\lambda_0)e_2=e_1$$
$$...$$
$$(A-\lambda_0)e_k=e_{k-1}$$

В данной цепочке, очевидно, вектор e_1 - собственный. Вектора $e_2,...,e_k$

Называют ***присоединенными векторами*** к вектору e_1.

e_2 - присоединённый вектор первого порядка (первого уровня),

…

e_k - присоединённый вектор k-1-го порядка (уровня),

Эти вектора линейно независимы, следовательно, образуют базис. <u>В этом базисе вышеуказанная матрица *A* будет иметь вид жордановой клетки</u>. Оставим этот факт без доказательства.

Рассмотрим случай, когда собственное число λ_0 алгебраической кратности *k* имеет геометрическую кратность *r*>1 (то есть имеет более одного собственного вектора). В этом случае может быть построена цепочка присоединенных векторов к разным собственным векторам.

Теорема. Пусть λ_0– собственное значение матрицы *A* алгебраической кратности *k.* Тогда существует *к* линейно независимых векторов-столбцов

$$D_i^{j_i}\,(i=\overline{1,r};\, j_i=\overline{1,q_i}),$$

соответствующих λ_0 и удовлетворяющих соотношениям:

$$AD_i^1=\lambda D_i^1,$$
$$AD_i^2=\lambda D_i^2+D_i^1,$$
$$....$$
$$AD_i^{q_i}=\lambda D_i^{q_i}+D_i^{q_i-1},$$
$$q_1+q_2+...+q_r=k.$$

Здесь $D_i^1(i=\overline{1,r})$ - собственные векторы, а остальные –цепочки присоединенных векторов.

Эта теорема говорит о том, что какова бы ни была геометрическая кратность собственного числа, существует базис, состоящий из *k* векторов, составленный из собственных векторов и цепочек присоединенных к ним.

Напомним, что собственные векторы матрицы могут быть разными, но не к каждому можно найти присоединенный. При этом, <u>длины цепочек и их количество для каждой матрицы являются величинами инвариантными</u>, то есть определяются однозначно, каков бы ни был базис.

<u>Каждой цепочке</u> (т.е. каждому собственному вектору) соответствует <u>одна жорданова клетка</u>.

Совокупность жордановых клеток, соответствующих одному собственному числу матрицы, называется ***жордановым блоком***.

Пример.

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$ - жорданов блок, состоящий из трех жордановых клеток размера 2. То есть данному собственному числу соответствует три собственных вектора, каждый из которых имеет по одному присоединенному.

Если мы для произвольной матрицы найдем все собственные числа и построим для каждого из них жорданов блок, то расположив эти блоки по диагонали, мы получим ***Жорданову форму матрицы (нормальную Жорданову форму матрицы).***

Примеры построения жордановых форм.

1. Дана матрица преобразования в некотором базисе

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы А/

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0.$$

$\lambda = 2$ -собственной число матрицы с алгебраической кратностью 3.

Найдем собственные вектора.

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы однородной системы равен 1, следовательно, система имеет два линейно независимых решения, то есть два собственных вектора.

Это, например, вектора $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Попробуем построить к какому-то из них присоединённый вектор D^2, который должен удовлетворять равенству

$(A - \lambda E)D^2 = D$, где D – собственный вектор.

Проверим второй собственный вектор.

$$(A - \lambda E)D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме Кронеккера-Капелли данная система не имеет решений, так как ранги исходной матрицы и расширенной не совпадают.

Проверим первый собственный вектор.

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Данная система имеет решение $D_1^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Таким образом, мы нашли присоединенный вектор к D_1.

Следовательно, в базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ матрица имеет жорданову форму $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, состоящую из двух жордановых клеток.

Это означает, что матрица перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что может получиться, что к обоим собственным векторам не существует присоединенного, тогда нужно искать его к их линейной комбинации.

2. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Собственное число матрицы $\lambda = 3$ алгебраической кратности 3.

Найдем собственные векторы.

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=0.$$

Ранг матрицы равен 1, следовательно, геометрическая кратность собственного числа равна 2. Два собственных вектора. Например:

$$D_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } D_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Будем искать присоединенный к каждому из них:

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обе эти системы не имеют решения. Как мы и говорили ранее, систему собственных и присоединенных векторов можно построить всегда, но не всегда к произвольному собственному вектору можно найти присоединенный!

Любой собственный вектор является линейной комбинацией найденных нами векторов:

$D=\begin{pmatrix} 3C_1+C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$, поэтому решаем систему:

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3C_1+C_2 \\ C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}.$$

При $C_1=1,\ C_2=-2$ мы получим собственный вектор $D_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, для которого система будет совместна:

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ -2 & 2 & 6\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

Решением данной системы, например, является вектор $D_2^2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

Вектор D_1 оставим прежним.

Таким образом, получили, что в базисе

$$\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

матрица A имеет жорданову форму

$$J=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

3. $A=\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Собственное число матрицы $\lambda=1$ алгебраической кратности 3.

Найдем собственные векторы.

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}-3 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=0.$$

Ранг матрицы равен двум, следовательно, геометрическая кратность собственного числа равна 1. Единственный собственный вектор $D_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

К нему будем строить два присоединённых.

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}-3 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow D_1^2=\begin{pmatrix}0\\ 1/2\\ -1/2\end{pmatrix}.$$

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}-3 & -5 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/2\\ -1/2\end{pmatrix}\Rightarrow D_1^3=\begin{pmatrix}0\\ 1/4\\ -5/4\end{pmatrix}.$$

В базисе $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ -5/4 \end{pmatrix}$ матрица А имеет жорданову форму $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, состоящую из одной жордановой клетки.

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Собственные числа матрицы $\lambda = 2$ алгебраической кратности 1 и $\lambda = 3$ алгебраической кратности 2.

Найдем собственные векторы.

$\lambda = 2$:

$$\left(A - \lambda E\right)D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Единственный собственный вектор (а больше и быть не может) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 3$:

$$\left(A - \lambda E\right)D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 0$$

Ранг матрицы равен 1, следовательно, геометрическая кратность собственного числа равна 2. Два собственных вектора

$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $D_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

В базисе $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ матрица А имеет диагональную жорданову форму

$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Собственные числа матрицы $\lambda=2$ алгебраической кратности 1 и $\lambda=1$ алгебраической кратности 2.

Найдем собственные векторы.

$\lambda=2$:

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=0.$$

Собственный вектор $D_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

$\lambda=1$:

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=0.$$

Ранг матрицы равен 2, следовательно, геометрическая кратность собственного числа равна 1. Один собственный вектор $D_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

К нему построим присоединенный:

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Данной системе удовлетворяет вектор $D_2^2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.

В базисе $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ матрица А имеет диагональную жорданову форму

$$J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что мы здесь не рассмотрели вопрос о комплексных собственных числах. Действительно, среди корней многочлена могут встречаться комплексные, а точнее, пары комплексно-сопряженных чисел. Суть от этого не меняется. В общем случае Жорданова форма является комплексной. То есть, по диагонали могут стоять комплексные числа. Правда, есть форма, близкая к Жордановой, когда пара простых комплексных чисел $a \pm bi$ имеет жорданову клетку $J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. В случае кратных комплексно-сопряженных пар форма усложняется. Но мы в этом курсе данный вопрос не рассматриваем.

Отметим одно важное, очень часто используемое свойство Жордановой формы матрицы.

Если $A = TJT^{-1}$, то

$A^2 = TJT^{-1}TJT^{-1} = TJ^2T^{-1}$

$A^3 = TJT^{-1}TJ^2T^{-1} = TJ^3T^{-1}$

$\ldots$

$A^n = TJT^{-1}TJ^{n-1}T^{-1} = TJ^nT^{-1}$

То есть, для того, чтобы возвести матрицу в степень, нужно всего лишь найти матрицу перехода, её жорданову форму и возвести её в степень.

Как вы понимаете, почти диагональную форму возвести в степень гораздо проще. Тем более, что при возведении ЖФ в степень на самом деле в степень возводятся лишь отдельно взятые клетки. Например, если жорданова форма имеет диагональный вид, то в степень возводятся сами диагональные элементы.

Пример.

Найти для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ выражение для A^n.

Найдем собственные значения $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -9 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 + 9 = \lambda^2 = 0$

Собственное значение матрицы A: $\lambda = 0$ -алгебраической кратности 2.

Собственные векторы найдем из системы $\begin{cases} 3x - 9y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$. Ранг данной системы равен 1, следовательно, собственному числу матрицы соответствует лишь один собственный вектор $D_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, Жорданова форма матрицы A имеет вид: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нетрудно заметить, что эта матрица в любой степени выше первой является нулевой. Значит и матрица А в любой степени выше первой также будет нулевой. (Матрица, все собственные значения которой равны нулю, называется ***нильпотентной***. Нильпотентая матрица в степени n обращается в нулевую).

Упражнения.

9.1. Найти жордановы формы матриц.

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$,

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, з) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

(В последних двух заданиях можно воспользоваться свойством определителя блочно-треугольной матрицы. $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A||C|$)

9.2. Вычислить A^n для матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$б

д) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10.Квадратичные формы

Квадратичной формой n переменных называется однородный многочлен второй степени относительно переменных $x_1, x_2,.., x_n$:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + ... + 2a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2.$$

Заметим, что коэффициенты при смешанных произведениях представлены в виде $2a_{ij}$ для того, чтобы многочлен был симметричен относительно x_ix_j. То есть, коэффициенты при x_ix_j и x_jx_i одинаковы.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы. Матрица A– симметрическая.

Отметим важные свойства симметрической матрицы:

Жорданова форма симметрической матрицы – <u>диагональная</u>.

Собственные векторы симметрической матрицы образуют <u>ортогональный базис</u>. Это означает, что их *n* штук и они взаимно ортогональны (их скалярные произведения равны нулю). Нормируя их, мы можем получить ортонормированный базис. Следовательно, матрица *B* перехода к диагональной Жордановой форме будет ортогональная, то есть $B^T B = E$.

Обозначим квадратичную форму за $F(x_1, x_2,.., x_n)$.

Тогда квадратичную форму можно представить в матричном виде:

$$F(x_1, x_2,.., x_n) = X^T AX = (x_1, x_2,.., x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

На данном этапе нас будут интересовать квадратичные формы двух переменных. Но всё ниже изложенное верно и для общего случая.

Итак, пусть $r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r^T Ar.$$

Введем новые переменные так, что: $x = b_{11}x' + b_{12}y', y = b_{21}x' + b_{22}y'$.

Тогда $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, где $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} B^T \Rightarrow$$

$$F(x, y) = F'(x', y') = r'^T B^T A B r' .$$

Наша задача, найти такую матрицу *B*, что матрица $B^T AB$ имеет диагональный вид. Другими словами, требуется найти базис, в котором матрица *A* будет иметь диагональный вид. Как мы уже сказали, для симметричной матрицы это всегда возможно. Причем матрица *B* будет ортогональной, то есть $B^T B = E$ или $B^T = B^{-1}$.

Упражнение. Доказать для симметричной матрицы 2x2:

1. Её собственные числа вещественны.
2. Кратный корень возможен только тогда, когда $A = \lambda E$.
3. Собственные векторы симметричной матрицы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны. (То есть $r_1 \cdot r_2 = 0$, где $r_1 \cdot r_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$ - скалярное произведение. Воспользоваться свойством симметричной матрицы $Ar_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot Ar_2$.)

Сам процесс поиска матрицы *B* мы описывать не будем, так как *B* – матрица перехода к жордановой форме, а этот вопрос мы разобрали в предыдущих параграфах.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - собственные числа матрицы А и им соответствуют собственные ортогональные векторы: $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Нормируем их: $e_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \\ \dfrac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{-y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \\ \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ и $\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ - представляют собой косинус и синус некоторого угла.

Таким образом $e_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$, где $\varphi = \arccos \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$.

Матрица перехода *B*, составленная из этих векторов называется ***матрицей поворота*** к главным направлениям квадратичной формы и обозначается как

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

С помощью замены (линейного преобразования)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ или } r = T_\varphi r'$$

мы можем привести квадратичную форму к диагональному виду

$$F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2,$$

называемому ***каноническим видом квадратичной формы***.

Квадратичная форма называется ***знакоопределенной,*** если при любых значениях переменных, она принимает значения одного знака:

Положительно определенной, если $F(x, y) > 0 \ \forall x, y$;

Отрицательно определенной, если $F(x, y) < 0 \ \forall x, y$.

Очевидно, что если квадратичная форма знакоопределенная, то она является таковой в любом базисе, а значит и в каноническом виде. Отсюда следует, что знакоопределенность определяется непосредственно из собственных значений:

Если все собственные числа положительны, то форма положительно определенна.

Если все собственные числа отрицательны, то форма отрицательно определенна.

Если собственные числа разного знака или присутствуют равные нулю, то форма не является знакоопределенной.

Примеры.

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду и найти матрицу поворота.

   $F(x, y) = 4xy.$

   Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Найдём собственные числа: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$. Собственные числа: $\lambda_{1,2} = \pm 2$.

   Собственные векторы:

   $\lambda_1 = 2$ соответствует $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $\lambda_2 = -2$ соответствует $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   $$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, преобразование

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

приводит квадратичную форму к каноническом виду

$F(x, y) = 2x^2 - 2y^2$.

Матрица преобразования – матрица поворота на угол 45 градусов.

2. Является ли квадратичная форма $F(x, y) = 2x^2 - 5xy - 2y^2$ знакоопределенной?

Характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{41}{4} = 0$.

Очевидно, корни характеристического уравнения разного знака, а значит, квадратичная форма не является знакоопределенной.

Упражнения.

10.1. Привести квадратичные формы к каноническому виду:

а) $x^2 - 6xy + y^2$, б) $x^2 - 2xy + y^2$, в) $x^2 - 6xy + 2y^2$, г) $2x^2 - 3xy + y^2$.

10.2. При каких параметрах a данные формы являются знакоопределенными:

а) $x^2 - axy + y^2$, б) $x^2 - 6xy + ay^2$?

Список литературы.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука. 1988.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.- М.: Наука, 1984.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Айрис-Пресс, 2008.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. – СПб.: «Лань», 2010.
5. Сборник задач по математике для втузов. Часть 1. Линейная алгебра и основы мат. Анализа. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

Утюпин Юрий Валерьевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Подписано в печать
п. л. – 5,5, заказ № ,

Отдел рекламы и PR СибГУТИ
630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86, офис 107, тел. (383) 269-83-18