Обыкновенные дифференциальные уравнения

Уравнение, связывающее неизвестную функцию одной или нескольких переменных с её производными, называется *дифференциальным уравнением.*

Уравнение, содержащее неизвестную функцию одной с её производными, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Уравнение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных с её частными производными, называется *дифференциальным уравнением в частных производных.*

Примеры.

1. Всем известное со школы уравнение движения.

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = F\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right)$$

Здесь X – путь материальной точки, t-время, $\frac{dX}{dt}$- скорость движения, $\frac{d^2X}{dt^2}$ - ускорение, m- масса.

$\ddot{X} = g$ -уравнение свободного падения.

$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ -уравнение колебаний математического маятника.

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ -уравнение малых колебаний мат. маятника

$\ddot{x} + p(\dot{x}) + \omega^2 \sin x = 0$ -уравнение колебаний с трением

$\ddot{x} + p(\dot{x}) + \omega^2 \sin x = f(t)$ -уравнение вынужденных колебаний маятника

2. Уравнение распада.
Закон распада радиоактивного вещества: скорость распада отрицательна и пропорциональна количеству вещества.

$$\dot{m} = -\alpha m$$

Решение этого уравнения: $m = m_0 e^{-\alpha(t-t_0)}$

Отсюда выводится известная характеристика радиоактивного вещества период полураспада:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha(t-t_0)} \Rightarrow e^{\alpha(t-t_0)} = 2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

3. Уравнения роста популяции (биомассы)

$\dot{x} = \alpha x$ -уравнение Мальтуса. Рост при отсутствии ограничений на ресурсы

$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$ -уравнение Ферхюльста. При наличии ограничений на ресурсы (саморегуляции).

4. Система хищник-жертва (используется во многих отраслях науки).

$$\dot{x} = x(\alpha_1 - \beta_1 y)$$
$$\dot{x} = -y(\alpha_2 - \beta_2 x)$$

-Система Лотки-Вольтерры. Классический пример применения математики для обоснования периодических изменений в динамике численности популяций.

5. Уравнение колебаний струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

6. Уравнение теплопроводности (задача о нагревании стержня) $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$

7,8,….Математика, физика, химия, биология, астрономия, экономика, военное дело, радиоэлектроника, информатика, медицина, строительство, …..
Трудно найти отрасли, где не применяются ДУ.

В нашем курсе мы будем изучать, к сожалению, лишь ОДУ.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$$

или

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Порядок старшей производной – *порядок уравнения*.

Решением дифференциального уравнения на некотором множестве называется функция, имеющая на заданном множестве столько производных, каков порядок уравнения, и обращающая уравнение в тождество.

Кривая, соответствующая решению ОДУ, называется *интегральной кривой.*

Как вы могли заметить, в отличие от алгебраических уравнений, в которых решениями являются числа или множества чисел (векторы), объектами дифференциальных уравнений являются функции.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

В данном разделе будем изучать уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, то есть уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

в отличие от уравнений, не разрешенных относительно производной:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Решением уравнения (1) в интервале (a,b) называется функция $y=y(x)$, определенная и непрерывно-дифференцируемая в этом интервале и обращающая уравнение (1) в тождество.

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \qquad \forall x \in (a,b)$$

Кривая $y=y(x)$ на плоскости OXY, соответствующая решению называется *интегральной кривой*.

Заметим, что если существует такое число y_0, что $f(x,y_0)=0$ при любом x из (a,b), то уравнение (1) имеет решение,

$$y \equiv y_0$$

называемое *стационарным решением*.

Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям:

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \qquad (2)$$

называется задачей Коши, а условия (2) начальными условиями или условиями Коши.

Теорема о существовании и единственности решения з.Коши.

Пусть в уравнении (1) функция *f(x,y)* непрерывна в некоторой области *D* плоскости *(x,y)* и непрерывно-дифференцируема по *y* в этой области. Тогда

1. Для любой точки (x_0, y_0) этой области существует решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2).

2. Если $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ - два решения уравнения (1) и существует точка $(x_1, y_1) \in D$ такая, что $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = y_1$, то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ на $D \bigcap D(\varphi(x)) \bigcap D(\psi(x))$

Геометрическая интерпретация: Через каждую точку множества *D* проходит одна и только одна интегральная кривая дифференциального уравнения.

Пусть D – область на плоскости (x,y), через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1).
Функция

$$y = \varphi(x, C) \qquad (3)$$

называется *общим решением* уравнения (1) в области *D*, если:

1. Равенство (3) разрешимо относительно *C:*

$$C = \psi(x, y) \qquad (4)$$

2. Функция (3) является решением уравнения (1) для любого *C*, получаемого формулой (4), когда т. (x,y) пробегает область *D*.

Другими словами, все решения с начальными данными из области D содержатся в формуле (3) при некотором *C,* и при любом *C* функция (3) является решением уравнения.

Зная общее решение, мы легко можем получить решение задачи Коши с любыми начальными данными из области *D*.

Любое решение, в каждой точке которого сохраняется единственность, называют *частным решением*.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность (не выполняется условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$), называется *особым решением*.

Наряду с уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

рассматривают уравнение (*перевернутое*)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

используя его в тех точках, где *f(x,y)* обращается в бесконечность.
Совокупность этих точек обычно добавляют к области определения уравнения (1), а его решения к решениям уравнения (1)

Кроме того, равносильным этим двум уравнениям называется является уравнение, записанное в *дифференциалах*:

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

Более общий вид уравнения в дифференциалах:

$$M(x, y)dy - N(x, y)dx = 0$$

В уравнениях в дифференциалах переменные *x* и *y* входят равноправно, то есть нет явно переменной и функции от неё.

Пример. $\dot{x} = \dfrac{1}{t^2}$ не определено в т *t=0*, но

$t^2 dx = dt$ имеет решение $t \equiv 0$

Заметим, что в каждой точке плоскости (*x,y*), в которой правая часть уравнения (1) определена, у нас известна производная функции, которая является решением уравнения и проходит через эту точку. Другими словами, нам известно направление (угловой коэффициент), под которым проходит интегральная кривая через заданную точку.

$$\operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = f(x_0, y_0)$$

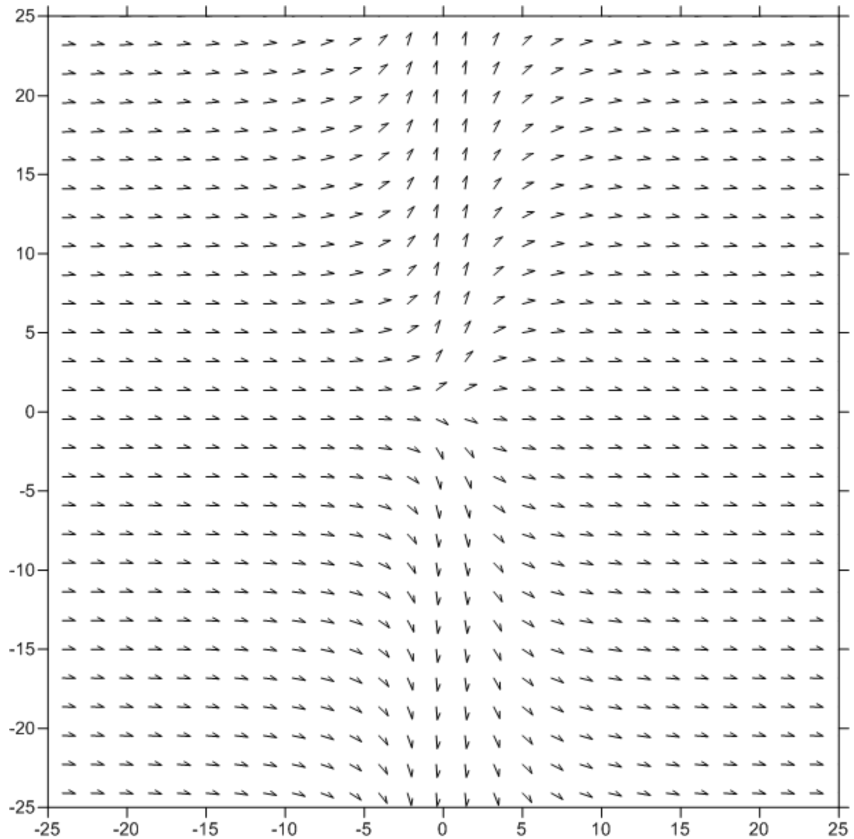
Таким образом, дифференциальное уравнение в каждой точке плоскости задает векторное поле, называемое *полем направлений.*

Угловой коэффициент в каждой точке интегральной кривой совпадает с наклоном поля направлений.

В точках, в которых правая часть уравнения представляет собой неопределенность 0/0, поле направлений не определено.

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$$



Во многих случаях решение уравнения найти не удается, но тем не менее, используя то, что поле направлений нам известно, мы можем это решение построить схематически, то есть определить общее поведение решений.

Покажем это, используя метод изоклин.

Изоклины – линии, на которых поле направлений имеет одинаковый наклон.

Так как наклон поля направлений определяется производной в точке, то уравнение изоклины с угловым коэффициентом *k:*

$$f(x, y) = k$$

Построив разные изоклины, можно построить решения уравнения.

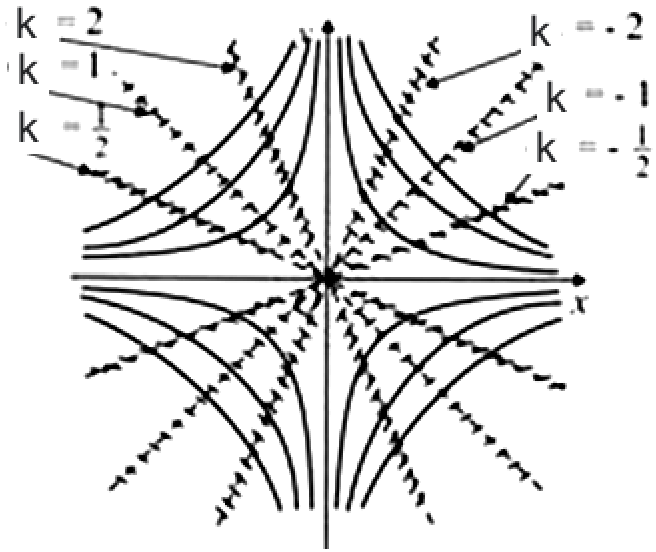
$f(x, y) = 0$ и $\dfrac{1}{f(x, y)} = 0$ -главные изоклины.

Пример. $y' = -\dfrac{y}{x}$

$$-\frac{y}{x} = k$$

$y = -kx$ -семейство изоклин

$y = 0, x = 0$ -главные изоклины.



Зачем нужна теорема у существовании и единственности?

Как мы уже сказали выше, во многих случаях решение уравнения найти не удается. Но при этом уравнение, которое мы изучаем, описывает реальный процесс (физический, химический, биологический, медицинский…)

В этих случаях строится численное решение уравнения. Для этого разработаны масса вычислительных методов решения ОДУ. Но АБСОЛЮТНО ВО ВСЕХ СЛУЧАЯХ исследователь до построения вычислительного эксперимента обязан изучить вопрос о существовании и единственности решения, так как в ином случае вычислительный эксперимент может дать «решение», которое не будет иметь ничего общего с решением. Последствия этого могут быть катастрофическими.

Более того, также необходимо исследовать вопрос об интервале, на котором решение существует и единственно (вопрос о продолжении решения).

На самом деле мы ранее уже сталкивались с вопросом о существовании и единственности.

Например, решая квадратное уравнение, мы вычисляли дискриминант.

Изучая системы линейных алгебраических уравнений, мы доказывали теорему Кронеккера-Капелли.

Особые точки и особые решения уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

Если 1) $f(x, y)$ и 2) $f'_y(x, y)$ непрерывны в окр-ти т. (x_0, y_0),
То решение существует и единственно

Если 1) не выполняется, то решения не существует (возможно оно существует для перевернутого уравнения)

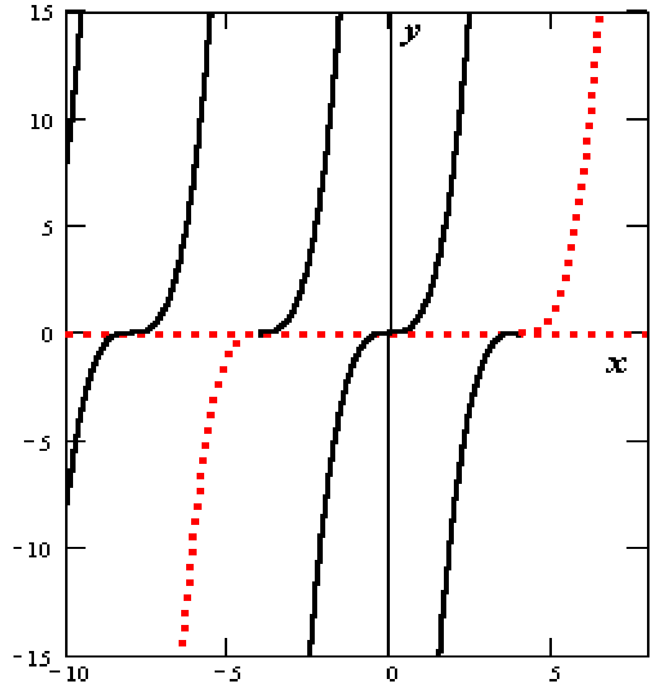
Если 2) не выполняется, то решение может быть не единственно.

Если $f'_y(x, y)$ в точке обращается в бесконечность, то решение не единственно.

Решение уравнения, в каждой точке которого нарушается его единственность, называют **особым решением**

Пример

$$y' = 3y^{2/3}$$



$f(x, y) = 3y^{2/3}$ непрерывна на всей плоскости.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{y^{1/3}}$ обращается в бесконечность при $y=0$

В любой точке оси абсцисс нарушается единственность

При этом $y=0$ является решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \Rightarrow \frac{dy}{3y^{2/3}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{3y^{2/3}} = \int dx \Rightarrow y^{1/3} = x + C \Rightarrow y = (x + C)^3$$

Через любую точку прямой $y=0$ проходит бесконечное количество интегральных кривых