Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)

Утюпин Юрий Валерьевич

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Разностные уравнения. Основы функционального анализа.

Учебное пособие

Часть 1. ОДУ.

Новосибирск 2020

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ

Рецензенты:
профессор кафедры дифференциальных уравнений *ММФ НГУ, д.ф.-м.н. Демиденко Г.В.;*
доцент кафедры прикладной математики и кибернетики СИБГУТИ *к.т.н. Нечта И.В.;*

Утюпин Ю.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Разностные уравнения. Основы функционального анализа. Часть 1. ОДУ: Учебное пособие / Ю.В.Утюпин; Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики; кафедра высшей математики.- Новосибирск.- 2020.- 160 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления 02.03.02. ФИВТ СибГУТИ. Рекомендовано кафедрой ВМ СибГУТИ для использования в учебном процессе. Учебное пособие содержит теоретический материал к разделу Обыкновенные дифференциальные уравнения, входящему в дисциплину «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Разностные уравнения. Основы функционального анализа.», читаемую на втором курсе по данной специальности. Содержит краткое изложение теории дифференциальных уравнений: решение уравнений первого порядка, линейных уравнений и систем и теории устойчивости по первому приближению. По каждому разделу приводится достаточное количество примеров решения практических заданий.

Оглавление.

Оглавление

Введение.

Данное пособие посвящено изучению теории и решению практических заданий по курсу Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) – первой части дисциплины «ОДУ, разностные уравнения и основы функционального анализа», читаемой на втором курсе по специальности 02.03.02. «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Как уже следует из самого названия, дифференциальные уравнения – уравнения, в которых должны присутствовать производные (или дифференциалы). Следовательно, объектами этих уравнений являются функции, от которых берутся эти производные.

При этом все уравнения, которые изучались нами ранее, были алгебраическими, то есть эти уравнения связывали числа или наборы чисел (вектора). Хотя, некоторые из них также можно считать функциональными. Например, уравнение $y^2 + x^2 = 1$. В данном уравнении можно считать y как неизвестную функцию от x. Но такие уравнения традиционно называются алгебраическими, поскольку считается, что x и y две переменные. В дифференциальном же уравнении, как правило, имеется переменная, неизвестная функция от неё и, как нам уже стало понятно, производная этой функции (или несколько производных).

Отметим, что теория дифференциальных уравнений относительно молодая. По крайней мере, по сравнению с алгебраическими уравнениями. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения, как математический объект появились лишь после созданного в XVII-XVIII веках Лейбницем и Ньютоном «дифференциального исчисления». Одними из основных создателей теории линейных дифференциальных уравнений являются уже хорошо знакомые нам Эйлер и Лагранж. Отметим также, что теория линейных уравнений и систем напрямую связана с вопросами Линейной алгебры. Например, такие понятия, как собственные значения и векторы, возникли в линейной алгебре именно в процессе изучении систем линейных дифференциальных уравнений.

Новый виток развития теории ОДУ произошел в конце XIX-начале XX века в связи с работами Анри Пуанкаре и нашего соотечественника Александра Ляпунова, фактически создавшими теорию устойчивости и качественную теорию дифференциальных уравнений, которые и в настоящее время активно развиваются, так как имеют огромное применение практически во всех областях науки.

Первоначально дифференциальные уравнения появились из задач механики. В частности, известный ещё со средней школы второй закон Ньютона:

$$F = ma$$

есть не что иное, как дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = F\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right),$$

где X – координата (путь) материальной точки, а первая и вторая производные от неё по времени, как известно, – скорость и ускорение.

Частные случаи уравнения движения, которые также нам должны быть знакомы:

$\ddot{X} = g$ - уравнение свободного падения;

$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ - уравнение колебаний математического маятника;

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ - уравнение малых колебаний;

$\ddot{x} + p(\dot{x}) + \omega^2 \sin x = f(t)$ - общее уравнение вынужденных колебаний с трением. Здесь точка над *x* означает производную по *t*.

В середине XX века был открыт общий для всех радиоактивных веществ закон распада в виде дифференциального уравнения

$$\dot{m} = -\alpha m.$$

Решением данного уравнения является $m = m_0 e^{-\alpha(t-t_0)}$, из которого выводится известная характеристика радиоактивного вещества - период полураспада

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha(t-t_0)} \Rightarrow e^{\alpha(t-t_0)} = 2 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

В настоящее время теория химической кинетики целиком связана с дифференциальными уравнениями.

Уравнение роста вещества в начале процесса брожения описывается уравнением

$$\dot{m} = \alpha m.$$

Первая попытка применить данное уравнение в описании демографических процессов практически перекликалась с созданной в XVIII веке Томасом Мальтусом теорией о народонаселении. Дальнейшее развитие этой теории привело к широкому применению дифференциальных уравнений в описании динамики численности популяций в биологии. Одной из первых и самых известных систем уравнений здесь является система «хищник-жертва» Лотки-Вольтерра:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha_1 - \beta_1 y), \\ \dot{y} = -y(\alpha_2 - \beta_2 x). \end{cases}$$

Здесь *x* –численность популяции жертв, *y* – численность популяции хищника. Решение данной системы, хотя и в грубом виде, но позволило объяснить периодические колебания численности популяций, постоянно возникающие в природе.

Уравнение колебаний струны и мембраны, движения волн, гравитация, магнетизм, электричество, теплопроводность,… .

Математика, физика, химия, биология, астрономия, экономика, военное дело, радиоэлектроника, информатика, медицина, строительство, … .

В настоящее время трудно найти отрасль знаний, где не используются дифференциальные уравнения. Даже в гуманитарных науках есть им применение.

Везде, где есть описание изменения количественной характеристики во времени или в пространстве, есть место дифференциальному уравнению!

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция зависит от одной переменной, то такое уравнение называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением.***

Если же функция зависит от нескольких переменных, то это ***уравнение в частных производных***. Например, $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ - уравнение теплопроводности или задача о нагревании стержня.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение, является ***порядком уравнения***.

Решением дифференциального уравнения на некотором множестве называется функция, имеющая на заданном множестве столько производных, каков порядок уравнения, и обращающая уравнение в тождество.

Кривая, соответствующая решению ОДУ, называется ***интегральной кривой.***

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

Дифференциальное уравнение называется ***интегрируемым в квадратурах***, если его решение представимо в виде элементарных функций и интегралов от них (в том числе и в неявном виде).

В нашем курсе мы будем изучать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения.

Первая часть данного пособия посвящена изучению различных уравнений первого порядка. Эта часть – своего рода введение в курс. Именно здесь поднимаются вопросы о существовании и единственности решений. Решение линейного уравнения первого порядка послужит основой для дальнейшего освоения линейных дифференциальных уравнений и систем.

Последним посвящены вторая и третья часть данного пособия.

В четвертой, заключительной части будут кратко изложении вопросы теории устойчивости и введение в качественную теорию систем на плоскости. Отметим, что с точки зрения автора, знание основ теории устойчивости необходимо студентам программистам, так как с этими же вопросами придется столкнуться в теории разностных уравнений и, как продолжение, в задачах вычислительной математики при программировании итерационных процессов.

По каждому разделу разобраны примеры решения задач и предложены упражнения, часть из которых немного выходит за рамки «стандартных» и требует от студента применения небольших умственных усилий с использованием изложенного теоретического материала.

В дополнении разобраны вопросы, связанные с краевыми задачами для уравнения второго порядка, и численными решениями задач Коши. Эти вопросы не входят в основной курс, но, во-первых, нам понадобятся при изучении второй и третьей части курса – «разностных уравнений» и «основ функционального анализа», а во-вторых, несомненно, будут полезны любознательным студентам и помогут в лучшем освоении курса «вычислительная математика».

1. Уравнения первого порядка

1.1. Общие вопросы. Поле направлений. Изоклины. Теорема о существовании и единственности решения

Прежде, чем перейти к определениям и решениям уравнений первого порядка, разберем две геометрические задачи.

Задача 1. Найти кривую, проходящую через точку M(0,1), каждая точка которой одинаково удалена от начала координат.

Задача 2. Найти кривую, проходящую через точку M(0,1), и такую, что в каждой её точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение первой задачи нам хорошо известно ещё со школы. Данная кривая есть решение алгебраического уравнения

$$y^2 + x^2 = 1$$

- уравнения окружности. Оно получается непосредственно из условия задачи.

Для того же, чтобы решить задачу 2, необходимо построить уравнение, связывающее угловой коэффициент с абсциссой точки касания.

Угловой коэффициент касательной, как мы помним, равен производной функции в этой точке. По условию задачи он равен удвоенной абсциссе в этой точке. То есть, кривая должна удовлетворять условию:

$$y' = 2x$$

Получили дифференциальное уравнение, решением которого, очевидно, является семейство кривых

$$y = x^2 + C.$$

Для того чтобы найти кривую, проходящую через точку M(0,1), необходимо подставить координаты этой точки в полученное уравнение семейства. В итоге получим кривую

$$y = x^2 + 1.$$

Заметим, что алгебраически решить данную задачу нельзя.

Уже глядя на этот пример, можно увидеть, что решением дифференциального уравнения первого порядка всегда является семейство решений, так как в нем всегда присутствует произвольная постоянная.

Лишь при наложении дополнительного условия мы можем из этого семейства выделить одну функцию.

Итак, ***дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение, связывающее некоторую функцию с её производной и с самой переменной этой функции:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \qquad (1.1)$$

Функция $y=y(x)$, непрерывно дифференцируемая в интервале (a,b) и обращающая уравнение (1.1) в тождество

$$F(x,y(x),y'(x))\equiv 0$$

в этом интервале, называется ***решением уравнения*** (1.1) в интервале (a,b).

Далее мы будем рассматривать уравнения первого порядка, ***разрешенные относительно производной***

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \tag{1.2}$$

Кривая $y=y(x)$ на плоскости OXY, соответствующая решению уравнения, называется ***интегральной кривой***.

Заметим, что если существует такое число y_0, что $f(x,y_0)=0$ при любом x из (a,b), то уравнение (1.2) имеет решение

$$y\equiv y_0,$$

называемое ***стационарным*** решением.

Рассмотрим плоскость OXY. Предположим, что через некоторую точку (x,y) плоскости проходит интегральная кривая уравнения (1.2). Проведем касательную к этой кривой в этой точке (рис.1).

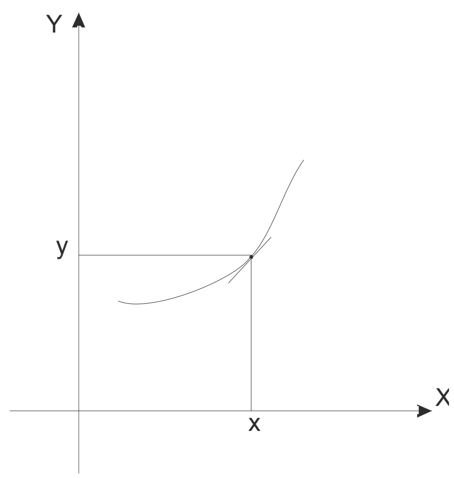

Рис.1. Иллюстрация поля направлений в заданной точке

Тогда тангенс наклона касательной в этой точке есть производная функции, определяющей интегральную кривую в заданной точке. Но так как интегральная кривая соответствует решению уравнения (1.2), получаем, что тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в точке (x,y) равен

$$tg\alpha=f(x,y). \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы узнать угол наклона касательной к интегральной кривой в какой-либо точке области задания правой части, совсем не обязательно решать уравнение (1.2). Формула (1.3) дает нам этот угол в каждой точке.

В каждой точке области, в которой определена правая часть уравнения, мы (1.2) построим отрезок с угловым коэффициентом из формулы (1.3).

Таким образом, дифференциальное уравнение в каждой точке области задает векторное поле, называемое ***полем направлений***.

Любая интегральная кривая этого уравнения проходит через точку области под углом задаваемым полем направлений.

В точках, в которых правая часть уравнения (1.2) обращается в бесконечность, мы можем рассмотреть так называемое ***перевернутое уравнение***

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}.$$

Кроме того, этим уравнениям также равносильно ***уравнение в дифференциалах***

$$dy = f(x,y)dx.$$

Более общий вид уравнения в дифференциалах:

$$M(x,y)dy - N(x,y)dx = 0.$$

В уравнениях в дифференциалах переменные x и y входят равноправно, то есть, нет явной переменной и функции от неё.

Пример.

Уравнение $\dot{x} = \frac{1}{t^2}$ не определено при $t = 0$, но уравнение $t^2 dx = dt$ имеет решение $t \equiv 0$.

Следует отметить, что решить дифференциальное уравнение удается далеко не всегда. Более того, в большинстве случаев его решить не удастся. Но поле направлений даёт нам полное представление о примерном качественном поведении решений уравнения, так как поле направлений позволяет, хоть и приближенно, но построить его решения.

Рассмотрим способ, позволяющий сделать это более удобно, называемый методом изоклин.

Изоклины – кривые, в каждой точке которых поле направлений имеет один и тот же наклон. Поскольку угловой коэффициент определяется формулой (1.3), уравнение изоклин имеет вид

$$f(x,y) = k.$$

Построив разные изоклины, можно построить решения уравнения (1.2).

Главными изоклинами называются те, у которых угловые коэффициенты параллельны осям координат:

$$f(x,y) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{f(x,y)} = 0.$$

Пример.

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Уравнения изоклин: $-\dfrac{y}{x}=k$ или $y=-kx$.

Главные изоклины: оси $y=0, x=0$.

Поле направлений на главных изоклинах совпадает с самими осями.

Угловому коэффициенту *k* соответствует прямая $y=-kx$.

Построим изоклины, поле направлений на них и проведем интегральные кривые через это поле направлений (рис.2).

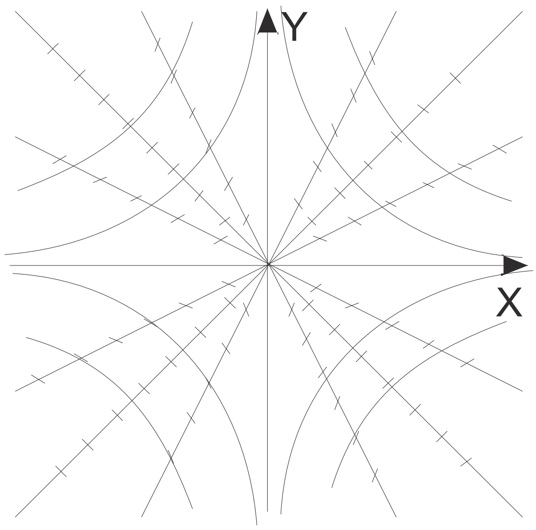

Рис.2. Метод изоклин

Отметим, что поле направлений уравнения (1.2) в некоторых точках может быть не определено. В предыдущем примере это начало координат.

Такие точки называют ***особыми*** точками.

Отметит также, что непосредственно из самого уравнения мы можем найти линии на плоскости, в которых интегральные кривые имеют экстремум или перегиб.

Задача нахождения решения уравнения (1.2), удовлетворяющего условиям:

$$y=y_0 \quad \text{при} \quad x=x_0 \tag{1.3}$$

называется ***задачей Коши***, а условия (1.3) ***начальными условиями*** или ***условиями Коши***.

Теорема ***о существовании и единственности решения з.Коши***.

Пусть в уравнении (1.2) функция *f(x,y)* непрерывна в некоторой области *D* плоскости *(x,y)* и непрерывно-дифференцируема по *y* в этой области.

Тогда

1. Для любой точки (x_0, y_0) этой области существует решение уравнения (1.2), удовлетворяющее условию (1.3).

2. Если $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ -два решения уравнения (1.2) и существует точка $(x_1,y_1)\in D$ такая, что $\varphi(x_1)=\psi(x_1)=y_1$, то $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ на $D\bigcap D(\varphi(x))\bigcap D(\psi(x))$.

Геометрическая интерпретация данной теоремы: *Через каждую точку области D, в которой удовлетворяются условия теоремы о существовании и единственности, проходит одна и только одна интегральная кривая дифференциального уравнения.*

Зачем нужна теорема о существовании и единственности?

На самом деле, мы ранее уже сталкивались с вопросом о существовании и единственности. Например, решая квадратное уравнение, мы вычисляли дискриминант. Изучая системы линейных алгебраических уравнений, мы доказывали теорему Кронеккера-Капелли.

Как мы уже сказали выше, во многих случаях решение дифференциального уравнения найти не удается. Но при этом уравнение, которое мы изучаем, описывает реальный процесс (физический, химический, биологический, медицинский…) и его нужно решить.

В этих случаях строится численное решение уравнения. Для этого разработаны масса вычислительных методов решения ОДУ. Но *абсолютно во всех случаях* исследователь до построения вычислительного эксперимента обязан изучить вопрос о существовании и единственности решения, так как в ином случае вычислительный эксперимент может дать «решение», которое не будет иметь ничего общего с реальным решением. Последствия этого могут быть катастрофическими. Поэтому вопрос о существовании и единственности – это вопрос о корректности построенной математической модели.

В каждом разделе дифференциальных уравнений (высших порядков, систем ОДУ, уравнений в частных производных) обязательно приводятся условия существования и единственности. Более того, такие же теоремы приводятся и в теории разностных уравнений, которые мы также будем изучать в данном курсе.

Пусть D – область на плоскости (x,y), через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.2). Функция

$$y=\varphi(x,C) \tag{1.4}$$

называется ***общим решением*** уравнения (1.2) в области D, если все решения с начальными данными из области D содержатся в формуле (1.4) при некотором C, и при любом C функция (1.4) является решением уравнения.

Зная общее решение, мы легко можем получить решение задачи Коши с любыми начальными данными из области D.

Любое решение, в каждой точке которого сохраняется единственность, называют ***частным решением.***

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность (не выполняется условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$), называется ***особым решением***.

Пример.

$y' = 2y^{1/2}$

Правая часть данного уравнения непрерывна в верхней полуплоскости плоскости OXY.

При этом, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^{1/2}}$ обращается в бесконечность при $y = 0$. Следовательно, в любой точке оси абсцисс нарушаются условия единственности решения. Но $y \equiv 0$ является решением этого уравнения. Это решение – особое. Проиллюстрируем это на рисунке, предварительно найдя общее решение. Для общего решения представим уравнение в перевернутом виде

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y^{1/2}}$.

Вычислив первообразную функции *x(y)*, получим $x + C = y^{1/2}$. Это семейство полупарабол с вершинами, лежащими на оси абсцисс. Решение $y \equiv 0$ в каждой своей точке касается одной из таких парабол. Через каждую точку оси абсцисс проходит бесконечное множество решений, составленных из частей оси абсцисс (слева) и примыкающим к ним полупараболам (справа) (рис.3).

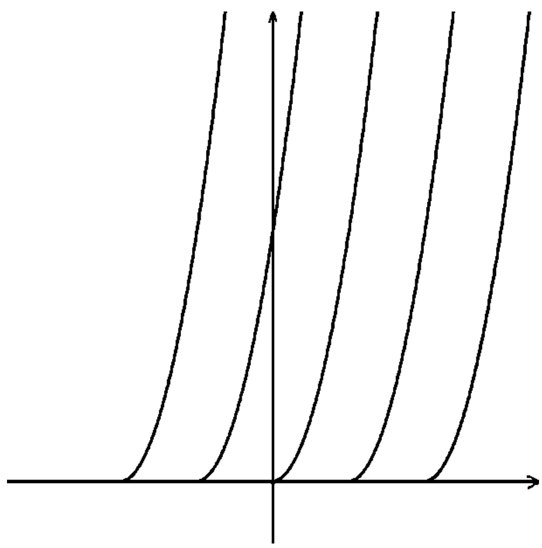

Рис.3. Интегральные кривые уравнения $y' = 2y^{1/2}$

Упражнения.

В задачах 1.1-1.4 построить приближенно интегральные кривые с помощью метода изоклин:

1.1. $y' = \frac{x}{y}$.

1.2. $y' = -\dfrac{x}{y}$.

1.3. $y' = y - x$.

1.4. $y' = y - x^2$.

В задачах 1.5-1.8 составить дифференциальное уравнение заданного семейства кривых (Указание: продифференцировать по х и исключить произвольную постоянную C из полученной системы)

1.5. $y = Cx^4$.

1.6. $y = \sin(x + C)$.

1.7. $y^2 + x^2 = C$.

1.8. $y = e^{Cx}$.

1.9. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся одновременно осей абсцисс и ординат и расположенных во второй четверти.

1.10. Найти уравнение геометрического места точек максимума или минимума интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума?

1.11. Найти уравнение геометрического места точек перегиба интегральных кривых уравнения $y' = f(x, y)$.

В задачах 1.12- 1.15 определить область существования решения задачи Коши, область единственности, изучить поле направлений, построив изоклины с угловыми коэффициентами $0, \pm 1, \infty$, указать области убывания и возрастания решений уравнения, линии максимумов, области вогнутости и выпуклости, построить схематически интегральные кривые.

1.12. $y' = x$.

1.13. $y' = y$.

1.14. $y' = \dfrac{y + 2}{x - 1}$.

1.15. $y' = \sqrt[3]{y}$.

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение называется интегрируемым в квадратурах, если его решение (явное или неявное) можно представить в виде элементарных функций и интегралов от них.

Как мы уже сказали ранее, класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, составляет лишь малую часть дифференциальных уравнений, возникающих в математическом моделировании реальных объектов.

Мы изучим несколько типов таких уравнений первого порядка.

Самое простое из них – уравнение, в правой части которого **отсутствует неизвестная функция**

$$y' = f(x). \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) решается простым интегрированием

$$y = \int f(x)dx + C .$$

Если при некотором $x = x_0$ правая часть обращается в бесконечность, то $x \equiv x_0$ является решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)} .$$

Данное решение может оказаться особым.

Примеры.

1. $y' = \sin x$.

   Общее решение: $y = -\cos x + C$.

2. $y' = \dfrac{1}{x-1}$.

   Общее решение: $y = -\dfrac{1}{(x-1)^2} + C$.

   Дополнительное решение: $x \equiv 1$.

3. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

   Общее решение: $y = 2\sqrt{x-1} + C$.

   Дополнительное решение: $x \equiv 1$. Решение особое, так как для перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{x-1}$$

при $x = 1$ не выполняется условие единственности в теореме о существовании и единственности решения задачи Коши, поскольку $\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x-1}$ обращается в бесконечность.

Следующий тип – **уравнение, не содержащее независимой переменной**

$$y' = f(y). \tag{1.6}$$

Данное уравнение переворачиванием приводится к предыдущему типу

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)},$$

поскольку для данного типа y является уже независимой переменной.

Пример.

$y' = \operatorname{tg} y$.

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \frac{\cos y}{\sin y}$ - перевернутое уравнение.

$x = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \ln|\sin y| + c$ -общее решение, $y \equiv \pi k$ -дополнительные решения.

Можно данное общее решение преобразовать к более удобному виду, если взять экспоненту от обеих частей:

$e^x = |\sin y| \cdot e^c$.

Здесь e^c является положительной произвольной постоянной, поэтому мы можем заменить её на новую произвольную постоянную C, при этом избавимся от знака модуля:

$e^x = \sin yC$ или более удобный вариант:

$\sin y = Ce^x$.

В последнем случае дополнительное решение, указанное выше, уже входит в общее решение при C=0, и его не нужно добавлять к общему решению.

Указанный здесь приём ***потенцирования*** решения (ухода от логарифма) будет достаточно часто нами применяться в тех случаях, когда в общем решении мы после интегрирования получаем логарифмы.

Кроме того, заметим, что, если мы получили какие-то дополнительные решения, которые после смогли включить в общее решение, то эти решения не могут быть особыми.

Уравнение с **разделенными переменными** имеет вид:

$$f(y)dy = g(x)dx. \tag{1.7}$$

В данном уравнении переменные разделены, то есть слева и справа стоят функции и дифференциалы только от одной из переменных. Данное уравнение решается непосредственно интегрированием:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

Пример.

$y^2 dy = \cos x dx$.

$\int y^2 dy = \int \cos x dx + C$.

$\frac{y^3}{3} = \sin x + C$.

И, наконец, уравнение, которое можно привести к уравнению с разделенными переменными, называется **уравнением с разделяющимися переменными.**

Таковыми являются, например, уравнения вида

$$y' = f(y)g(x) \tag{1.8}$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \ . \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) имеет вид уравнения в дифференциалах. В нем достаточно разделить всё уравнение на $N(y)$ и $P(x)$ для того, чтобы уравнение стало с разделенными переменными. При этом надо помнить, что те значения переменных, в которых функции, на которые мы делим, обращаются в ноль, могут давать дополнительные решения вида $y \equiv const$ или $x \equiv const$.

Общее решение будет:

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C.$$

Для того, чтобы решить уравнение (1.8), надо вспомнить ***основное тождество дифференцирования***:

$$dy = y'dx .$$

Тогда уравнение (1.8) примет вид

$$dy = f(y)g(x)dx ,$$

после чего мы можем разделить переменные и получим

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx .$$

Общим решением будет

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + C.$$

Как и ранее, отметим, что если при некотором $y = y_0$ функция $f(y)$ обращается в ноль, то $y \equiv y_0$ является решением. Также значения *x*, в которых функция $g(x)$ обращается в бесконечность, могут давать дополнительные решения.

Все указанные выше дополнительные решения могут оказаться особыми.

Примеры.

1. $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0.$

Разделим уравнение на $(1+x^2)(1+y^2)$ и проинтегрируем:

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)} - \int \frac{ydy}{(1+y^2)} = c .$$

$\ln(1+x^2) - \ln(1+y^2) = c$ - общее решение уравнения.

Либо после взятия экспоненты от левой и правой частей, получим общее решение в другом виде:

$$1+y^2=C(1+x^2).$$

Никаких дополнительных решений данное уравнение не имеет.

2. $\dot{x}=tx.$

Разделим переменные: $\dfrac{dx}{x}=tdt$

и проинтегрируем: $\ln|x|=\dfrac{t^2}{2}+c$.

После потенцирования получим: $x=Ce^{\frac{t^2}{2}}$.

Отметим, что $x\equiv 0$ уже входит в полученное после потенцирования общее решение при $C=0$.

3. $y'=\dfrac{y}{x}.$

Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

и интегрируем: $\ln|y|=\ln|x|+C$. Дополнительные решения $x\equiv 0, y\equiv 0$. Здесь мы снова можем провести потенцирование и получить решение в другом виде:

$$y=Cx.$$

В этом случае $y\equiv 0$ уже входит в общее решение, и остается добавить лишь $x\equiv 0$.

4. $\dot{x}=t\sqrt{x}.$

Разделим переменные : $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=tdt$

и проинтегрируем: $2\sqrt{x}=\dfrac{t^2}{2}+2C.$

Или в другом виде: $x=\left(\dfrac{t^2}{4}+C\right)^2$.

Кроме того, $x\equiv 0$ является решением и, при этом, особым, так как для уравнения $\dfrac{dx}{dt}=t\sqrt{x}$ не удовлетворяется условие единственности теоремы о существовании и единственности задачи Коши при $x=0$. Действительно, через каждую точку прямой $x\equiv 0$ проходит ещё, как минимум, одно решение из семейства, найденного выше. Через каждую точку $(t_0,0)$ проходит интегральная кривая $x=\left(\dfrac{t^2-t_0^2}{4}\right)^2$.

Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f(ax + by). \tag{1.10}$$

Данное уравнение не является уравнением с разделяющимися переменными, но легко к нему приводится.

Достаточно в уравнении (1.10) сделать замену функции

$$z = ax + by.$$

Тогда

$$z' = a + by' = a + bf(z).$$

Получили уравнение, не содержащее x. Разделим переменные и получим

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx.$$

Пример.

$$y' = \frac{1}{x - y} + 1.$$

Делаем замену $z = x - y$, тогда

$$z' = 1 - y' = 1 - \frac{1}{z} - 1 = -\frac{1}{z}.$$

$z' = -\dfrac{1}{z}$ или $zdz = -dx$.

Общее решение: $z^2 = -2x + C$.

Сделав обратную замену, получим

$$(x - y)^2 = -2x + C.$$

Можно оставить решение в таком, неявном виде, но можно и выразить y явно:

$$y = x \pm \sqrt{-2x + C}.$$

Упражнения.

Найти все решения уравнения (определить, есть ли среди них особые):

1.16. $y' = y^2 x^2$.

1.17. $y' = \sqrt{y} \cos x$.

1.18. $2x\cos^2 y dx + (x^2 + 1)dy = 0$.

1.19. $2x\sqrt[3]{y}dx + (x^2 - 1)dy = 0$.

1.20. $2x(y + 1)dx + y\sqrt{x - 1}dy = 0$.

1.21. $y' = e^{x-y}$.

1.22. $y'=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

1.23. $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0$.

1.24. $y'=(2x+y)^2$.

1.25. $y'=\cos^2(x-y)$.

Найти решение задачи Коши:

1.26. $(1-x)dy-ydx=0,\ y(0)=1$.

1.27. $dx-\sqrt{1-x^2}dy=0,\ y(1)=\frac{\pi}{2}$.

1.28. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-y^2}dy=0,\ y(1)=0\quad (y(0)=0?)$.

1.29. $y'=y\cos x\quad y(0)=1$.

1.3. Однородные уравнения

Функция $F(x_1,x_2,...x_n)$ нескольких переменных называется ***однородной порядка k***, если

$$\forall t>0\qquad F(tx_1,tx_2,...tx_n)=t^kF(x_1,x_2,...x_n).$$

Например, квадратичная форма – функция однородная 2-го порядка.

$x+y+\sqrt{xy}$ – функция однородная 1-го порядка.

$x^2y+y^3+x^3\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ – функция однородная 3-го порядка.

Уравнение вида

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.11}$$

называется ***однородным***, если функции M и N – однородные функции одинакового порядка.

Представим уравнение (1.11) в виде

$$y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}. \tag{1.12}$$

Поскольку функции M и N однородные одинакового порядка, в правой части уравнения (1.12) стоит функция однородная нулевого порядка, то есть функция $f(x,y)$ такая, что

$$f(tx,ty)=f(x,y)\ \forall t.$$

Принимая в последнем равенстве $t=\frac{1}{x}$, получим

$$f(x,y)=f(1,\frac{y}{x}).$$

Следовательно, любая однородная нулевого порядка функция является функцией от $\frac{y}{x}$.

Это означает, что однородное уравнение всегда представимо в виде

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.13}$$

Другими словами, при подстановке в однородное уравнение *tx* и *ty* вместо x и y уравнение не меняется.

Из уравнения (1.13) следует, что поле направлений однородного уравнения не определено в точке (0,0).

Однородное уравнение всегда приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$y=zx. \tag{1.14}$$

Подставляя (1.14) в (1.13), получим

$$y'=z'x+z=f(z)$$

или

$$z'x=f(z)-z,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными.

$x\equiv 0$ и $z\equiv z_0$, где $f(z_0)=z_0$, являются решениями уравнения (1.14), которые могут оказаться особыми. Но $x\equiv 0$ не обязательно является решением уравнения (1.13). В каждом отдельном случае это надо проверять.

Примеры.

1. $y'=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}.$

Делаем замену $y=zx$:

$z'x+z=z+\operatorname{tg} z,$

$\frac{dz}{\operatorname{tg} z}=\frac{dx}{x}.$

Интегрируем полученное уравнение:

$\ln|\sin z|=\ln|x|+C,$

$\sin z=Cx,$

$\sin\frac{y}{x}=Cx.$

Для данного уравнения $x\equiv 0$ не является решением, так при $x=0$ правая часть перевернутого уравнения не определена.

2. $(x+y)dx-(y-x)dy=0.$

Делаем в уравнении замену $y = zx$, вспоминая формулу дифференциала от произведения:

$(x + zx)dx - (zx - x)(zdx + xdz) = 0.$

Делим на x. (Отметим, что $x \equiv 0$ не является решением исходного уравнения).

$(1 + 2z - z^2)dx + x(1 - z)dz = 0,$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-z)}{(1+2z-z^2)}dz = 0.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|(1 + 2z - z^2)\right| = C,$$

или $x^2(1 + 2z - z^2) = C$.

После обратной замены получим

$x^2 + 2xy - y^2 = C.$

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{1.15}$$

можно привести к уравнению

$$y' = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right),$$

которое является однородным.

Для этого делается перенос начала координат плоскости (x,y) в точку пересечения прямых

$$ax + by + c \text{ и } a_1x + b_1y + c_1.$$

Если же эти прямые не пересекаются, то $ax + by$ пропорционально $a_1x + b_1y$, и тогда уравнение (1.15) является уравнением вида (1.10).

Пример.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{2x + 3y - 2}.$$

Найдем точку пересечения прямых

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases} : \ x = 1, y = 0.$$

Сделаем замену $x_1 = x - 1$, после которой получим уравнение

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{x_1 - y}{2x_1 + 3y}.$$

Данное уравнение является однородным, поэтому делаем замену

$y = zx_1$, после которой получим

$$z'x_1 + z = \frac{x_1 - zx_1}{2x_1 + 3zx_1} = \frac{1-z}{2+3z}.$$

Или $z'x_1 = \dfrac{1-z}{2+3z} - z = \dfrac{1-3z-3z^2}{2+3z}$.

Данное уравнение легко интегрируется.

Некоторые уравнения, «похожие» на однородные, но не являющиеся таковыми, можно привести к однородным с помощью замены

$$x = z^k \ \ (y = z^k).$$

Такие уравнения называются ***обобщенно-однородными***.

Пример.

$$2x^4 y dy + (y^4 - 4x^6)dx = 0.$$

Данное уравнение не является однородным, так как степени слагаемых разные и при подстановке в уравнение *tx* и *ty* вместо *x* и *y* *t* не сократится.

Но в каждом слагаемом стоят степенные функции, и может оказаться, что данное уравнение обобщенно однородное.

Попробуем сделать замену $y = z^k$.

Получим

$$2x^4 z^k kz^{k-1}dz + (z^{4k} - 4x^6)dx = 0.$$

Проверим, будут ли при каком то *k* степени одинаковые. Для этого составим уравнения:

$4 + k + k - 1 = 4k = 6$, которые удовлетворяются при $k = \dfrac{3}{2}$.

Теперь мы можем сделать замену $y = z^{\frac{3}{2}}$, а после этого полученное однородное уравнение привести к разделяющимся переменным с помощью замены $z = px$.

Но мы можем избежать двух замен и сразу сделать замену в исходном уравнении $y = zx^{\frac{3}{2}}$, после которой получим уравнение

$$2x^4 zx^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}zx^{\frac{1}{2}}dx + x^{\frac{3}{2}}dz\right) + (z^4x^6 - 4x^6)dx = 0,$$

которое преобразуется к виду

$$\frac{2zdz}{(z^4 - 4 + 3z^2)} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Данное уравнение с разделенными переменными, и легко интегрируется.

Упражнения.

Найти общее решение уравнений:

1.30. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$.

1.31. $\dfrac{dx}{y+x}=\dfrac{dy}{y-x}$.

1.32. $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$.

1.33. $\dfrac{dx}{dt}=e^{\frac{x}{t}}+\dfrac{x}{t}$.

1.34. $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$.

1.35. $2x^2y'=y^3+xy$.

1.36. $(x+2y)y'=(x+y-1)$.

1.37. $(x+y)dx=(x+2y-1)dy$.

1.39. $(x-y)y'=(y-x-1)$.

1.40. $(2x+4y)dx=(x+2y-1)dy$.

1.41. $(y^4-3x^2)dy=xydx$.

1.42. $(x^2y^2-1)y'+2xy^3=0$.

Найти решение задачи Коши:

1.43. $(y+\sqrt{x^2+y^2}dx+-xdy=0$, $y(1)=0$.

1.44. $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1)=1$.

1.45. $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$, $y(1)=0$.

1.46. $(x+2y)dx=xdy$, а) $y(1)=0$, б) $y(0)=0$.

1.4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Линейное уравнение первого порядка является частным случаем линейных уравнений n-го порядка и систем линейных уравнений. Кроме того, общая теория решения линейных уравнений и систем дифференциальных и разностных уравнений очень схожа именно с методом решения линейного уравнения первого порядка.

Поэтому очень важно понять и хорошо запомнить всё, что будет изложено ниже!

Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если неизвестная функция и её производная входят в уравнение линейно. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \qquad (1.16)$$

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным*** (не путать с изученным ранее **однородным** уравнением!):

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \qquad (1.17)$$

Если $q(x) \neq 0$, то уравнение (1.16) – ***линейное неоднородное***.

Будем считать, что функции *p(x)* и *q(x)* являются непрерывными в рассматриваемом нами интервале (a,b).

Тогда по теореме существования и единственности существует единственное решение задачи Коши с любыми начальными данными из этого интервала. Особых решений нет.

В частности, однородное решение с начальными данными $y(x_0) = 0$, где $x_0 \in (a,b)$, может иметь только нулевое решение. В этом случае никакие решения уравнения не могут ни касаться, ни пересекать ось *OX*.

Примеры.

$xy' + e^x y + tgx = 0$.

$(x + y^2)dy = ydx$ - линейное уравнение в дифференциалах.

$\dot{x} = \dfrac{e^x}{2t - x^3}$ - также линейное уравнение, если рассмотреть перевернутое уравнение.

Линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, а следовательно всегда интегрируемо в квадратурах.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\Rightarrow \ln|y| = c - \int p(x)dx \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \qquad (1.18)$$

Общее решение (1.18) линейного однородного уравнения можно записать в ***форме Коши***:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}.$$

Решение в такой форме не только является решением уравнения (1.17), но и удовлетворяет условиям $y(x_0) = y_0$.

Свойства решений линейного однородного уравнения:

1. Если y_1 – ненулевое частное решение однородного уравнения, то $y = Cy_1$ - общее решение однородного уравнения;

2. Если $y_ч$ –частное решение линейного неоднородного уравнения, а $y_{од} = Cy_1$ - общее решение однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y_{об} = y_{од} + y_ч. \qquad (1.19)$$

Действительно,

$$(y_{од} + y_ч)' + p(x)(y_{од} + y_ч) = y'_{од} + y'_ч + p(x)y_{од} + p(x)y_ч =$$
$$= y'_{од} + p(x)y_{од} + y'_ч + p(x)y_ч = q(x).$$

Таким образом, учитывая, что общее решение однородного уравнения мы уже знаем, как найти, нам достаточно найти какое-нибудь решение неоднородного уравнения. Иногда его удается просто подобрать.

В остальных случаях можно воспользоваться универсальным методом, называемым методом ***вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа).*** Данный метод применяется для нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений высших порядков и систем уравнений, причем как дифференциальных, так и разностных.

Суть метода заложена в самом названии. Мы будем искать частное решение неоднородного уравнения в таком же виде, как и решение однородного уравнения, но будем считать, что C – не постоянная, а функция от x:

Пусть $y = Cy_0$ - общее решение однородного уравнения.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_ч = C(x)y_0.$$

Подставляя его в уравнение (1.17), получим

$$\left(C(x)y_0\right)' + p(x)C(x)y_0 = q(x),$$
$$C'(x)y_0 + C(x)y'_0 + p(x)C(x)y_0 = q(x),$$
$$C'(x)y_0 = q(x),$$
$$C(x) = \int \frac{q(x)}{y_0(x)}dx.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения:

$$y_{об} = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Данную формулу общего решения запоминать не обязательно! Главное - запомнить, как его найти.

Примеры.

1. $y' + \frac{1}{x}y = 3x.$

Сначала решаем соответствующее линейное однородное уравнение

$$y' + \frac{1}{x}y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

$y_{од} = \dfrac{C}{x}$ - общее решение однородного уравнения.

Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_ч = \frac{C(x)}{x}.$$

Подставим его в исходное уравнение и получим

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 3x.$$

Отсюда получим

$C'(x) = 3x^2$ или $C(x) = x^3$.

Общее решение нашего уравнение – сумма общего решения однородного уравнения и полученного частного решения исходного уравнения.

$$y_{об} = \frac{C}{x} + x^2.$$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^2}$.

Данное уравнение не является линейным по *y*, но перевернутое уравнение - линейно по *x*:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{y} = \frac{x}{y} + y.$$

Решаем его тем же способом.

Разделив переменные в соответствующем однородном уравнении, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln|C| \Rightarrow x_{од} = Cy.$$

Далее снова воспользуемся методом Лагранжа.

$x_ч = C(y)y,$

$$x' = C'(y)y + C(y) \Rightarrow C'(y)y + C(y) = \frac{C(y)y}{y} + y \Rightarrow C'(y) = 1 \Rightarrow C(y) = y \Rightarrow$$

$x_{об} = y(y + C).$

Отметим также, что решениями данного уравнения являются полуоси $y = 0, (x \neq 0)$. В точке (0,0) уравнение не определено.

3. $y' + ay = m$, где $a, m \in R$.

Общее решение однородного уравнения найти нетрудно:

$y = Ce^{-ax}$.

Частное решение этого уравнения также, очевидно, легко находится в виде $y = b$.

Подставляя его в уравнение, получим $y = \frac{m}{a}$.

Напомним, такие решения называют ***стационарными***. Соответствующая ему интегральная кривая – горизонтальная прямая.

Общее решение исходного уравнения:

$$y = Ce^{-ax} + \frac{m}{a}.$$

4. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_a^x xydx = x^2 + y.$$

Здесь y –неизвестная функция от x.

Продифференцируем данное уравнение по x. (Заметим, что дифференцирование идет по верхнему пределу интегрирования. Во избежание путаницы интеграл корректнее было бы записать так: $\int_a^x sy(s)ds$. Но указанная в задании запись также традиционно используется.)

$$\left(\int_a^x xydx\right)' = xy = \left(x^2 + y\right)' = 2x + y'.$$

Получили линейное уравнение

$$y' - xy = -2x.$$

Но при этом, следует отметить, что исходное интегральное уравнение не равносильно полученному дифференциальному уравнению. Действительно, подставим в интегральное уравнение $x = a$:

$$\int_a^a xydx = a^2 + y.$$

Так как интеграл от a до a равен нулю, получаем, что $y = -a^2$ при $x = a$.

Это означает, что интегральное уравнение равносильно задаче Коши:

$$y' - xy = -2x,\ y(a) = -a^2.$$

Решить данную задачу не составляет особого труда.

Общим решением уравнения будет

$$y_{\text{об}} = 2 + Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Подставляя условия Коши, получим решение искомого уравнения

$$y = -(a^2 + 2)e^{(x^2 - a^2)/2} + 2.$$

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \qquad (1.20)$$

называется ***уравнением Бернулли***. p и q –непрерывные функции в заданном интервале.

В уравнении Бернулли $m \neq 0$ и $m \neq 1$, так как в первом случае это будет линейное неоднородное уравнение, а во втором линейное однородное.

Уравнение Бернулли всегда приводится к линейному уравнению.

Действительно, разделим уравнение (1.20) на y^m:

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x).$$

Заметим, что $y^{-m}y' = \left(\dfrac{y^{1-m}}{1-m}\right)'$. Следовательно, мы можем с помощью замены функции $z = y^{1-m}$ привести уравнение Бернулли к линейному уравнению

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = q(x).$$

Кроме того, при $m > 0$ также $y \equiv 0$ является решением уравнения. При $0 < m < 1$ это решение является особым.

Примеры.

1. $xy' - y = y^2 \ln x$ - уравнение Бернулли.

   $z = y^{1-2} \Rightarrow z = \dfrac{1}{y}$, $y = \dfrac{1}{z}$, $y' = -\dfrac{z'}{z^2}$,

   $-x\dfrac{z'}{z^2} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{\ln x}{z^2}$,

   $xz' + z = -\ln x.$

   Решая данное линейное уравнение, получим

   $z = \dfrac{-x\ln x + x + C}{x}$.

   Сделав обратную замену и заметив, что $y \equiv 0$ -решение уравнения, получаем общее решение

   $y = \dfrac{x}{-x\ln x + x + C}$, $y = 0$.

2. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}.$

   Делим обе части уравнения на $\sqrt{y}$:

   $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} + \dfrac{x\sqrt{y}}{1-x^2} = x$.

   В данном уравнении сделаем замену $z = \sqrt{y}$:

   $2z' + \dfrac{xz}{1-x^2} = x.$

   Интегрируя данное уравнение, получим

   $z = C\sqrt[4]{1-x^2} - \dfrac{(1-x^2)}{3}$.

   После обратной замены

$$\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{(1-x^2)}{3}.$$

$y \equiv 0$ - особое решение, так как в точках данной прямой нарушаются условия единственности решения задачи Коши. В каждой своей точке данная прямая касается какой-то кривой из общего решения.

Уравнение вида

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \qquad (1.21)$$

называется ***уравнением Риккати***. *P,Q,R* – непрерывные на *(a,b)* функции.

Как видим, уравнение (1.21) имеет и линейную функцию от *y* и квадратичную и правую часть, не зависящую от *y*. Данное уравнение не является ни линейным, ни уравнением Бернулли, но иногда его можно привести к последнему.

Предположим, что мы подобрали какое-то частное решение y_1 этого уравнения. Тогда сделаем в данном уравнении замену функции $y = y_1 + z$:

$$(y_1 + z)' = P(x)(y_1 + z)^2 + Q(x)(y_1 + z) + R(x).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что y_1 - решение уравнения, получим

$$z' = P(x)z^2 + (Q(x) + 2P(x)y_1)z.$$

Получили уравнение Бернулли, которое сводится к линейному заменой

$$z = \frac{1}{u}.$$

Пример.

$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4.$

Очевидно, частное решение надо искать в виде $y_ч = \frac{a}{x}$.

Подставим и получим $y_ч = \frac{2}{x}$.

Поэтому сделаем замену $y = \frac{2}{x} + z$:

$x^2z' + xz + x^2z^2 + 4xz = 0 \Rightarrow$

$z' + 5\frac{z}{x} = -z^2$ -уравнение Бернулли, которое мы уже умеем решать.

Упражнения.

1.47. $y' - y\sin x = \sin x \cos x$.

1.48. $xy' = ax + by$.

1.49. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

1.50. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$.

1.51. $y'-\frac{2y}{x}=x^3$.

1.52. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

1.53. $y'+2xy=2x^3y^3$.

1.54. $3y^2y'+y^3+x=0$.

1.55. $xy'-y=y^2$.

1.56. $y'=\frac{2x}{x^2\cos y+a\sin 2y}$.

1.57. $y'=y^2-xy-x$.

1.58. $y'+y^2=-\frac{1}{4x^2}$.

Найти решение задачи Коши.

1.59. $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^3}$, $y(1)=1$.

1.60. $y'-2xy=1$, $y(0)=0$.

1.61. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$, $y(1)=0$.

1.62. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения, если известны два его частных решения.

1.63. Найти однородное линейное уравнение, если известно одно его ненулевое решение.

1.64. Привести уравнение $y'+P(x)=Q(x)e^{my}$ к линейному.

1.5.Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Из курса математического анализа нам известно, что полным дифференциалом функции двух переменных $z=f(x,y)$ называется

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Если в уравнении

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \qquad (1.22)$$

левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$ двух переменных, то это уравнение называется ***уравнением в полных дифференциалах***.

Это уравнение легко решается. Поскольку слева стоит полный дифференциал функции *U*, значит

$$dU = 0.$$

Следовательно, общее решение:

$$U(x, y) = C.$$

Пример.

1. $xdx + y^2dy = 0$

Слева стоит дифференциал функции $\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}$.

Следовательно, общее решение уравнения: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = C$.

2. $ydx + xdy = 0$

Это уравнение также является уравнением в полных дифференциалах, так как слева дифференциал функции *xy*.

Общее решение: $xy = C$.

Будем считать функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по *y* и по *x* соответственно в некоторой области *D*.

Тогда из условия независимости смешанной производной от порядка дифференцирования следует, что ***для того чтобы уравнение (1.22) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество***

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (1.23)$$

Если условие (1.23) выполняется, то функцию $U(x, y)$, полный дифференциал которой стоит в левой части уравнения, можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение системы, получим

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y).$$

Здесь $\varphi(y)$ -неизвестная функция от *y*, возникающая при интегрировании, как произвольная постоянная относительно переменной *x*.

Для того, чтобы найти функцию $\varphi(y)$ подставляем полученную $U(x, y)$ во второе уравнение системы. Получим

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\int P(x, y)dx\right)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Отсюда выразим $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial\left(\int P(x, y)dx\right)}{\partial y}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим функцию $\varphi(y)$.

Отметим, что если в окрестности некоторой точки (x_0, y_0)

$$P(x_0, y_0)^2 + Q(x_0, y_0)^2 = 0,$$

то поле направлений в данной точке не определено. В этом случае решение соответствующей задачи Коши не существует или не единственно.

Примеры.

1. $(x^2 + y)dx + (e^y + x)dy = 0.$

Условие (1.23) выполняется:

$$\frac{\partial(x^2 + y)}{\partial y} = \frac{\partial(e^y + x)}{\partial x} = 1 .$$

Раскроем скобки в уравнение и перегруппируем слагаемые:

$$x^2 dx + e^y dy + ydx + xdy = 0.$$

Отсюда получим общее решение

$$\frac{x^3}{3} + e^y + xy = C.$$

2. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0.$

Проверим условие (1.23):

$$\frac{\partial(3x^2 + 6xy^2)}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial(6x^2 y + 4y^3)}{\partial x} = 12xy .$$

Условие выполняется, следовательно, уравнение в полных дифференциалах.

Раскрыв скобки и перегруппировав, получим

$$3x^2 dx + 4y^3 dy + 6xy(ydx + xdy) = 0$$

или

$$3x^2 dx + 4y^3 dy + 6xyd(xy) = 0.$$

Общее решение уравнения:

$$x^3 + y^4 + 3(xy)^2 = C.$$

3. $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) = \frac{-2y(x-y)^2 - 2y^2(x-y)}{(x-y)^4} = -\frac{2xy}{(x-y)^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right) = \frac{2x(x-y)^2 - 2x^2(x-y)}{(x-y)^4} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}.$$

Уравнение в полных дифференциалах, поэтому будем решать систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}. \end{cases}$$

Интегрируем первое уравнение

$$U(x,y) = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \varphi(y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y).$$

Подставляя последнюю функцию во второе уравнение системы, получим

$$\frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}.$$

Отсюда $\varphi'(y) = 1 - \dfrac{1}{y}$ и $\varphi(y) = y - \ln y$.

Общее решение уравнения:

$$\ln x + \frac{y^2}{x-y} + y - \ln y = C.$$

Иногда, в тех случаях, когда уравнение

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$$

не является уравнением в полных дифференциалах, его можно привести к такому с помощью умножения на некоторую функцию $\mu(x,y)$. В таком случае функцию $\mu(x,y)$ называют ***интегрирующим множителем*** уравнения.

Если μ - интегрирующий множитель, то

$$\mu P(x, y)\, dx + \mu Q(x, y)\, dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} \equiv \frac{\partial \mu Q}{\partial x}.$$

Вычисляя производные, получим, что функция μ является решением уравнения в частных производных

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

Решение данного уравнения в общем случае, во-первых, выходит за рамки нашего курса, а во-вторых, не является более простой задачей, чем исходное уравнение. Но в некоторых случаях, если мы наложим ограничения на аргумент функции μ, то задача существенно облегчается. Например, если мы предположим, что μ - функция одной переменной ω, которая, в свою очередь есть функция от двух переменных $\omega = \omega(x, y)$, то

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Подставляя эти равенства в указанное выше уравнение, получим

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega}. \tag{1.24}$$

Отсюда следует, что если существует интегрирующий множитель, зависящий только от функции $\omega = \omega(x, y)$, необходимо, чтобы функция

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \Big/ \left(Q\frac{\partial \omega}{\partial x} - P\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

была функцией только от $\omega = \omega(x, y)$.

В частности, если существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$, зависящий только от *x*, то функция

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$

не зависит от переменной *y*.

И наоборот, если $\mu = \mu(y)$, то

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

является функцией только от *y*.

Причём, в указанных случаях уравнение (1.24) легко интегрируется, так как является уравнением с разделяющимися переменными.

На самом деле, во многих предлагаемых к решению задачах интегрирующий множитель можно найти и без особых приёмов, лишь помня некоторые конструкции – дифференциалы от произведения, частного, элементарных функций и т.п:

$$xdx = d(x^2/2), \qquad xdy + ydx = d(xy), \qquad xdy - ydx = -y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$xdy + 2ydx = \frac{1}{x}d\left(x^2 y\right), \ \ldots .$$

Стоит отметить также, что практически все уравнения первого порядка, которые мы решали до этого, можно решить, найдя интегрирующий множитель (иногда после замены переменных).

Например, уравнение с разделяющимися переменными мы приводим к уравнению с разделенными переменными посредством умножения или деления на некоторую функцию. Но уравнение с разделенными переменными есть не что иное, как уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, мы, по сути, умножаем уравнение на интегрирующий множитель.

Более того, оказывается и линейное уравнение, для которого построена целая теория решения, можно решить с помощью интегрирующего множителя.

Примеры.

1. $(1 - x^2 y)dx + x^2 (y - x)dy = 0.$

   Воспользуемся способом, описанным выше, и проверим, нет ли у данного уравнения интегрирующего множителя, зависящего только от переменной x.

   $$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2 (y - x)} = -\frac{2}{x} = \omega(x).$$

   Получили функцию, зависящую лишь от x.

   Решив уравнение (1.24):

   $$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{2}{x}\mu,$$

   Получим, что интегрирующий множитель

   $$\mu = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

   Следовательно, уравнение

   $$(\frac{1}{x^2} - y)dx + (y - x)dy = 0$$

   является уравнением в полных дифференциалах. Действительно, левая часть уравнения есть $d\left(-\dfrac{1}{x} - xy + \dfrac{y^2}{2}\right)$.

   Общее решение: $-\dfrac{1}{x} - xy + \dfrac{y^2}{2} = C.$

2. $xdx + ydy + (x^2 + y^2)x^2 dx = 0$

   В данном уравнении нетрудно заметить, что

   $$xdx + ydy = \frac{d(x^2 + y^2)}{2}.$$

   Поэтому, очевидно, что разделив данное уравнение на $x^2 + y^2$, мы получим уравнение в полных дифференциалах

   $\dfrac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} + x^2 dx = 0$, интегрируя которое, получим общее решение

   $$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} = C.$$

3. $y(1+xy)dx+\left(\dfrac{x^2y}{2}+y+1\right)dy=0$

В данном примере можно было бы также воспользоваться методикой поиска интегрирующего множителя, например в виду функции от x или от y. Но мы заметим, что в данном уравнении

$$y(1+\underline{\underline{xy)dx}}+\left(\frac{x^2y}{\underline{\underline{2}}}+y+1\right)dy=0$$

подчеркнутые слагаемы имеют похожий вид. «Мешается» лишь множитель y при dx. Если мы разделим на y, то получим уравнение

$$(1+xy)dx+\left(\frac{x^2}{2}+1+\frac{1}{y}\right)dy=0,$$

левая часть которого является полным дифференциалом.

Общее решение: $x+\dfrac{x^2y}{2}+y-\dfrac{1}{y^2}=C.$

4. $y'+p(x)y=q(x).$

Умножим данное уравнение на $\mu=e^{\int p(x)dx}$:

$$y'e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Преобразуем левую часть, так как она является полной производной по x:

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)'=q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Данное уравнение просто интегрируется по x:

$$ye^{\int p(x)dx}=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

В данном решении функция μ - также интегрирующий множитель. Единственное отличие от рассмотренных в данном пункте уравнений, что оно задано не в дифференциалах, а через производную функции *y(x)*.

Этот способ решения линейного уравнения называется ***методом Эйлера***.

Упражнения.

Найти общее решение уравнения

1.65. $\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0.$

1.66. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0.$

1.67. $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0.$

1.68. $xdx+ydy+\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0.$

1.69. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = 0$.

1.70. $(1 + e^{x/y})dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$.

Найти общее решение уравнения, подобрав интегрирующий множитель или сделав замену.

1.71. $\left(\frac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy = 0$.

1.72. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$.

1.73. $\left(2xy^2 - y\right)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

1.74. $\left(xy^2 + y\right)dx - xdy = 0$.

1.75. $\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$.

1.76. $xdy - (x + y)dx = 0$.

1.77. $(py - qx)dx - (px + qy)dy = 0$.

1.78. $\left(\frac{2}{y} + \frac{y}{x^3}\right)dy + \left(\frac{1}{xy} - \frac{2}{x^2}\right)dy = 0$.

1.6.Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

Материал данного пункта служит небольшим дополнением к выше изложенному материалу и излагается достаточно кратко для того, чтобы студенты имели представление о простых уравнениях, в которых производная от неизвестной функции не выражено явно.

До этого все уравнения, которые мы изучали, были разрешены относительно производной, то есть производная функции выражалась явно, либо уравнение было в дифференциалах.

Рассмотрим уравнения, не разрешённые относительно производной:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.25}$$

По теореме о неявной функции, известной из курса мат.анализа, если функция F дифференцируема по всем трём переменным и частная производная функции F по y' отлична от нуля в некоторой точке, то равенство (1.25) неявно определяет y' как непрерывную функцию *f(x,y)* и соответствующее дифференциальное уравнение имеет единственное решение в этой точке.

Мы не будем приводить здесь все аналогичные определения, такие как решение, частное решение, особое решение, интегральная кривая, задача Коши и т.п., поскольку они аналогичны уже известным нам с небольшими изменениями в сторону уравнения (1.25).

Рассмотрим кратко лишь методы их решения.

1. Некоторые уравнения можно просто разрешить относительно производной. Например, уравнение

$$y'^2+2P(x,y)y'+Q(x,y)=0.$$

Является квадратным относительно y', которое можно решить:

$$y'=-P(x,y)\pm\sqrt{P^2(x,y)-Q(x,y)}\ .$$

Пример.

$y'^2-4x^2=0.$

$y'=\pm 2x.$

Получили два уравнения, разрешенных относительно производной, решая которые получим

$y=\pm x^2+C.$

2. Уравнения вида $F(y')=0$ при «хорошей» функции F также можно разрешить относительно производной. При этом получим уравнения

$$y'=a_k,$$

где a_k - корни уравнения $F(a)=0$.

Решая последнее уравнение, получим, что

$$y=a_k x+C\ .$$

Отсюда $a_k=\dfrac{y-C}{x}$.

Это означает, что общее решение уравнения мы можем записать сразу, не находя корни функции F (главное, чтобы они были) в следующем виде:

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0$$

Пример.

$2\sin y'=y'$

Общее решение данного уравнения: $2\sin\dfrac{y-C}{x}=\dfrac{y-C}{x}$.

Отметим, что решение похожего уравнения

$\sin y'=y'$ также, можно записать в виде $\sin\dfrac{y-C}{x}=\dfrac{y-C}{x}$, но будет более правильным заметить, что единственным решением уравнения $\sin a=a$ является $a=0$, и поэтому общее решение: $y=C$.

А вот уравнение $\sin y'=1+y'^2$ вообще не имеет решений. (Почему?)

3. Рассмотрим два уравнения:

$y=\varphi(y')x+\psi(y')$ ***-уравнение Лагранжа*** ,

$y = y'x + \psi(y')$ ***-уравнение Клеро*** (частный случай уравнения Лагранжа).

Данные уравнения, как и многие другие уравнения, не разрешенные относительно производной, решаются с помощью метода ***параметризации***. Суть данного метода в представлении зависимости y' от (x,y) как параметрической функции.

Например, для уравнения Лагранжа вводится простая параметризация

$$\begin{cases} y' = p, \\ y = \varphi(p)x + \psi(p). \end{cases}$$

Далее применяется общий приём, в котором используется основное тождество дифференцирования:

$$dy = y'dx.$$

Подставляя нашу параметризацию в основное тождество дифференцирования, получим

$$d\big(\varphi(p)x + \psi(p)\big) = pdx$$

или

$$\varphi'(p)xdp + \varphi(p)dx + \psi'(p)dp = pdx.$$

Из последнего уравнения получим

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{(p - \varphi(p))}x = \frac{\psi'(p)}{(p - \varphi(p))}.$$

Данное уравнение линейно относительно x. Решив его, мы получим некоторую функцию $x = x(p, C)$. Общее решение уравнения мы получим также в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x(p, C), \\ y = \varphi(p)x(p, C) + \psi(p). \end{cases}$$

Заметим также, что значения p_0, в которых $p = \varphi(p)$, могут также давать решения $y = p_0 + \psi(p_0)$, которые могут быть особыми.

Уравнение Клеро после параметризации

$$\begin{cases} y' = p \\ y = px + \psi(p) \end{cases}$$

дает два уравнения

$$dp = 0 \text{ и } x + \psi'(p) = 0.$$

Первое уравнение дает решение $p = C$, которому соответствует общее решение

$$y = Cx + \psi(C).$$

Второе уравнение даёт одно решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p), \end{cases}$$

которое часто бывает особым.

Отметим, что уравнение Клеро достаточно часто возникает в геометрических задачах, когда требуется найти огибающую семейства кривых, то есть, кривую, которая в каждой своей точке касается одной кривой семейства. Это и есть особое решение соответствующего дифференциального уравнения семейства.

Огибающей семейства кривых, заданных параметрическим уравнением

$$F(x,y,C)=0,$$

называется кривая, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} F(x,y,C)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial C}=0. \end{cases}$$

Примеры.

1. $y=2xy'-y'^2$.

Это уравнение Лагранжа. Делаем параметризацию

$$\begin{cases} y'=p, \\ y=2px-p^2 \end{cases}$$

и подставляем в основное тождество дифференцирования

$$dy=y'dx.$$

Получим $2pdx+2xdp-2pdp=pdx$

или $\dfrac{dx}{dp}+\dfrac{2}{p}x=2$.

При этом $p=0$ также является решением последнего уравнения.

Общим решением полученного дифференциального уравнения является $x=\dfrac{C}{p^2}+\dfrac{2}{3}p$.

Общее решение исходного уравнения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2}+\dfrac{2}{3}p, \\ y=2\dfrac{C}{p}+\dfrac{p^2}{3}. \end{cases}$$

При $p=0$ будет $y\equiv 0$, которое тоже является решением исходного уравнения, причём частным.

2. $y=xy'+y'^2$.

Это уравнение Клеро, поэтому мы сразу можем выписать его общее решение

$$y=xC+C^2.$$

Для того, чтобы найти особое решение, воспользуемся определением огибающей семейства кривых.

$$\begin{cases} y = xC + C^2, \\ 0 = x + 2C. \end{cases}$$

Исключая C, получим особое решение $y = -\dfrac{x^2}{4}$ - огибающую семейства решений.

На рисунке 4 изображены решения заданного уравнения Клеро: семейство прямых и их огибающая – парабола.

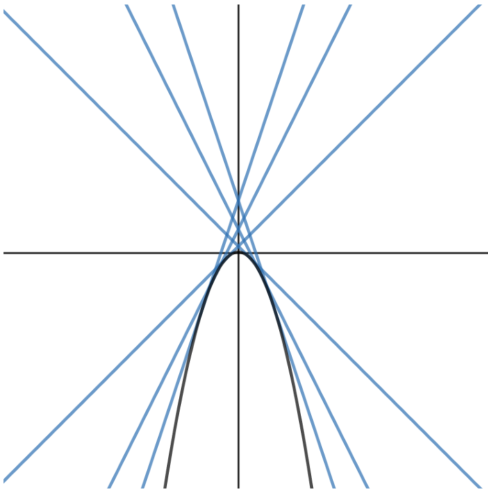

Рис.4. Семейство кривых и его огибающая

Упражнения.

Проинтегрировать уравнения.

1.79. $y = x(1 + y') + y'^2$.

1.80. $y = -xy' + y'^2$.

1.81. $y = xy' - y'^2$.

1.82. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

2. Уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Далее мы будем рассматривать лишь уравнения n-го порядка, разрешенные относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{2.1}$$

Задача нахождения решения уравнения (2.1), удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \\ &y'(x_0) = y_1, \\ &y''(x_0) = y_2, \\ &\dots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Называется ***задачей Коши***. Условия (2.2) – начальные условия или условия Коши.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).

Если в окрестности точки *(n+1)*-мерного пространства $(x_0, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ функция f *(n+1)*-й переменных является непрерывной и имеет непрерывные частные производные по $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$, то решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует и единственно.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, определенная и имеющая n непрерывных производных называется ***общим решением*** уравнения (2.1), если при любом наборе $C_1, C_2, ..., C_n$ функция φ является решением уравнения (2.1), и каждое частное решение содержится в общем решении при некотором наборе $C_1, C_2, ..., C_n$.

Имея общее решение, легко найти решение любой задачи Коши.

2.1.Понижение порядка некоторых уравнений

В данном параграфе мы изучим некоторые типы уравнений**,** допускающие понижение порядка.

1. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

легко решается последовательным интегрированием n раз.

Пример.

$$y^{(4)} = e^x \Rightarrow y''' = e^x + C_1 \Rightarrow y'' = e^x + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow .... \Rightarrow y = e^x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

2. Уравнение, не содержащее в явном виде неизвестную функцию и её младшие производные

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, .., y^{(n)}) = 0.$$

Порядок данного уравнения легко понизить, заменив младшую производную на новую функцию:

$$y^{(k)} = z.$$

Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$F(x, z, z', .., z^{(n-k)}) = 0.$$

Пример.

$$x^6 y''' - 2x^5 y'' = \frac{(y'')^3}{2}.$$

Уравнение не содержит неизвестной функции и её производной, поэтому можно сделать замену

$$z(x) = y''(x),$$

после которой получим уравнение

$$x^6 z' - 2x^5 z = \frac{z^3}{2}.$$

Данное уравнение –уравнение Бернулли, решив которое мы получим общее решение $z = z(x, C)$.

Далее остается дважды проинтегрировать уравнение

$$y'' = z(x, C).$$

3. Уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную x

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок данного уравнения можно понизить на единицу.

Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} y = y(x), \\ y' = y'(x). \end{cases}$$

Будем считать, что данная система определяет параметрическую зависимость y' как функцию от y.

Поскольку в уравнении явно отсутствует переменная x, мы будем считать y новой переменной, а новой функцией $y' = p(y)$.

Для корректной подстановки мы должны все производные по x порядка выше первого выразить через производные функции p по y.

Для этого надо выразить дифференцирование по x через дифференцирование по y:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} \cdot p(y).$$

Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y(x)))}{dx} = \frac{d(p(y))}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y) \cdot y'(x) = p'(y) \cdot p(y) = p' \cdot p\,,$$

$$y'' = p' \cdot p$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d\big(p'(y) \cdot p(y)\big)}{dx} = \frac{d\big(p'(y)\big)}{dx} p(y) + p'(y) \frac{d\big(p(y)\big)}{dx} = \left(\frac{d\big(p'(y)\big)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \right) p(y) +$$

$$+ p'(y) \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p''(y) \cdot (p(y))^2 + (p'(y))^2 \cdot p(y),$$

$$y''' = p'' p^2 + p'^2 p.$$

Производные более высоких порядков вычисляются аналогично.

Пример 1.

Решим задачу Коши $yy'' = y'^2 - y';\ \ y(1) = 2,\ y'(1) = 0$

Уравнение не содержит x, поэтому воспользуемся описанным выше способом.

$y' = p(y)$,

$y'' = p' \cdot p$.

Подставляя в уравнение, получим

$ypp' = p^2 - p.$

Это уравнение распадается на два уравнения.

1) $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C.$

2) $yp' = p - 1,$

$$\frac{dp}{p-1} = \frac{dy}{y},$$

$p = C_1 y + 1$.

Сделав обратную замену, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y + 1,$$

$$\frac{dy}{C_1 y + 1} = dx,$$

$$\frac{1}{C_1} \ln |C_1 y + 1| = x + \frac{1}{C_1} \ln |C_2|.$$

$C_1 y + 1 = C_2 e^{C_1 x}$ - общее решение исходного уравнения.

Подставим начальные данные x=1, y=2, y'=0 в систему

$C_1 y + 1 = C_2 e^{C_1 x}$,

$y' = C_1 y + 1.$

Из данной системы следует, что $C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = 0$.

Это означает, что функция $y \equiv 2$ - решение поставленной задачи Коши.

Пример 2. Найти решение задачи Коши $3y'y'' = y;\ \ y\big|_{x=0} = \sqrt{2},\ y'\big|_{x=0} = 1.$

Делаем замену $y' = p(y),\ y'' = p'p$, после которой получим уравнение

$3p^2 p' = y,$ интегрируя которое, получим общее решение

$p^3 = \dfrac{y^2}{2} + C_1$ или $p = \left(\dfrac{y^2}{2} + C_1\right)^{1/3}.$

После обратной замены: $y' = \left(\dfrac{y^2}{2} + C_1\right)^{1/3}.$

Данное уравнение не интегрируемо в элементарных функциях, поэтому получить общее решение данного уравнения в элементарных функциях невозможно. Но поскольку нам заданы начальные условия, то мы их можем подставить в последнее уравнение:

$$1 = \left(\frac{\sqrt{2}^2}{2} + C_1\right)^{1/3} \Rightarrow C_1 = 0.$$

В результате получили уравнение

$y' = \left(\dfrac{y^2}{2}\right)^{1/3}$, которое легко интегрируется:

$$y = \frac{(x + C_2)^3}{54}.$$

Подставляем начальные данные $x = 0, y = \sqrt{2}$ и получаем

$$y = \frac{\left(x + 3\sqrt{2}\right)^3}{54}$$

4. Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных. Если в уравнении

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

функция F однородна относительно $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$, то уравнение допускает понижение порядка на единицу с помощью введения новой функции *z(x)* следующим образом:

$$y' = yz\,.$$

Тогда

$$y'' = y'z + yz' = y^2 z + yz',$$
$$y''' = y(z^3 + 3zz' + z''),$$
$$\ldots$$
$$y^{(n)} = y\omega(z, z', \ldots z^{(n-1)})\,.$$

Подставляя выражения для производных и учитывая, что F – однородная функция, y выносится за знак функции F и уравнение будет уравнением *(n-1)*-го порядка относительно z.

Пример.

$xyy''-xy'^2-yy'=0.$

Уравнение однородно 2-й степени относительно y, y', y'', следовательно, сделаем замену: $y'=yz$, $y''=y^2z+yz'$.

Получим $x(z^2+z')-xz^2-z=0$

или $xz'-z=0$.

Интегрируя последнее уравнение, получим

$z=C_1x$.

После обратной замены:

$\frac{y'}{y}=C_1x$.

Интегрируя это уравнение, получим общее решение

$y=C_2e^{C_1x^2/2}$.

5. Применение интегрируемых комбинаций.

Если в уравнении $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ левая часть представляет собой точную производную по x от некоторой функции

$\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n)})$, то есть

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n)}),$$

то общее решение уравнения:

$$\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=C.$$

Часто уравнение не является таковым, но можно подобрать некоторую функцию, после умножения на которую мы получаем такое уравнение. То есть, как и в теме «уравнения в полных дифференциалах», здесь требуется найти интегрирующий множитель, который приведет наше уравнение к «нужному» виду.

И снова необходимо отличное «видение» и знание основных конструкций.

Например:

$f(y)y'$ является точной производной по x от первообразной по y функции $f(y)$: $yy'=\left(\frac{y^2}{2}\right)'$, $y'\cos y=(\sin y)'$, $\frac{y'}{y}=(\ln y)'$ … ;

$f(y')y''$ является точной производной по x от первообразной по y функции $f(y')$: $y'y''=\left(\frac{y'^2}{2}\right)'$, $y''\cos y'=(\sin y')'$, … ;

Производные от произведений: $(xy)' = y' + xy$, $(yy')' = y'^2 + yy''$, $(yy'')' = y'y'' + yy'''$, $2y'^2 + yy'' = \dfrac{(y^2y')'}{y}, \ldots$;

Производные от частных: $y'^2 - yy'' = y'^2\left(\dfrac{y}{y'}\right)' = -y^2\left(\dfrac{y'}{y}\right)', \ldots$.

Примеры.

1. $x^2(y''^2 - y'y''') = y'^2$.

В данном уравнении можно увидеть, что слева в скобках стоит выражение, похожее на производную от частного. Для того чтобы применить формулу производной от частного $\left(\dfrac{y''}{y'}\right)$ нужно уравнение разделить на y'^2. После деления ещё и на x^2 получим уравнение

$$-\frac{y'y''' - y''^2}{y'^2} = \frac{1}{x^2}.$$

В данном уравнении уже слева стоит точная производная, поэтому интегрируем по x:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} + C_1.$$

В последнем уравнении слева стоит производная от функции $\ln(y')$, поэтому снова проинтегрируем по x:

$$\ln y' = \ln|x| + C_1x + C_2$$

или $y' = C_2xe^{C_1x}$.

Последнее уравнение интегрируем ещё раз и получаем общее решение:

$$y = \int C_2xe^{C_1x}dx = \frac{C_2}{C_1}\int xde^{C_1x} = \frac{C_2}{C_1}\left(xe^{C_1x} - \int e^{C_1x}dx\right) = \frac{C_2}{C_1}\left(xe^{C_1x} - \frac{e^{C_1x}}{C_1}\right) + C_3.$$

2. $yy'' = y'^2$

Данное уравнение можно разделить на yy', после чего получим:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \text{ или } \left(\ln|y'|\right)' = \left(\ln|y|\right)'.$$

После интегрирования получим уравнение

$$y' = C_1y,$$

общее решение которого: $y = C_2e^{C_1x}$.

3. $y'' = f(y)$.

Умножим обе части уравнения на y':

$$y'y'' = f(y)y' \text{ или } \left(\frac{y'^2}{2}\right)' = \left(\int f(y)dy\right)'.$$

Уравнение $y'^2 = 2\int f(y)dy + C_1$ разрешимо относительно производной. В результате получается уравнение с разделяющимися переменными, которое легко интегрируется.

Упражнения.

Решить уравнения с помощью понижения порядка.

2.1. $y''' = -\cos x$.

2.2. $y''' = \dfrac{2}{x^3}$.

2.3. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

2.4. $xy'' = y'\ln(y'/x)$.

2.5. $xy'' - y' = 0$.

2.6. $y'(1+y'^2) = ay''$.

2.7. $yy'' = y'^2$.

2.8. $1 + y'^2 = 2yy''$.

2.9. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

2.10. $3y'y'' = e^y$.

2.11. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

2.12. $yy'' - y'^2 = yy'/\sqrt{1+x^2}$.

2.13. $y'' = 2yy'$.

2.14. $y'' = y'^2$.

2.15. $yy'' = y'$.

2.16. $yy''' - y'y''$.

2.17. $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 1$.

2.18. $y'' + \cos xy' - \sin xy = 0$.

2.2. Общая теория линейных уравнений n-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, в которое неизвестная функция $\boldsymbol{y(x)}$ и её производные входят линейно, т.е. в первой степени:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \qquad (2.3)$$

Если $f(x) = 0 \forall x \in (a,b)$, то уравнение называется ***линейным однородным***,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \qquad (2.4)$$

иначе ***линейным неоднородным.***

Напомним, задача Коши для уравнения (2.3) ставится следующим образом:

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y_1,$$
$$y''(x_0) = y_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

Если функция $f(x)$ и все коэффициенты $p_i(x)$ уравнения (2.3) являются непрерывными $\forall x \in (a,b)$, то для любых начальных данных, заданных в точке x_0 из этого интервала, существует единственное решение задачи Коши для уравнения (2.3).

Далее всюду будем предполагать, что условия непрерывности правой части уравнения и его коэффициентов выполняются.

Обозначим левую часть уравнения (2.3) за $L_n[y]$:

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

$L_n[y]$ - оператор, то есть отображение, определенное на пространстве *n* раз дифференцируемых функций, и областью значений этого оператора является пространство непрерывных функций. Оператор, вообще, понятие аналогичное функции, только функции определены на числовых множествах (R или R^n), а операторы определяются для произвольных линейных пространств.

$L_n[y]$ называют дифференциальным оператором.

Напомним, ***оператор*** U, определенный на некотором линейном пространстве X, ***называется линейным***, если

1. Для любого элемента $x \in X$ и для любого числа С:
$$U[Cx] = CU[x].$$
2. Для любых элементов $x_1, x_2 \in X$:
$$U[x_1 + x_2] = U[x_1] + U[x_2].$$
Другими словами, для любых элементов $x_1, x_2, ..x_m \in X$ и для любых чисел $C_1, C_2, ..C_m$:
$$U[C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n] = C_1U[x_1] + C_2U[x_2] + \dots + C_nU[x_n].$$

Заметим также, что множество *n* раз непрерывно дифференцируемых функций является линейным пространством, так как любая линейная комбинация таких функций также принадлежит этому множеству.

Теорема 1. Дифференциальный оператор $L_n[y]$ является линейным оператором.

Доказательство.

Следует из свойств производных (каждая производная, очевидно, также является дифференциальным оператором):

$$1.\, L_n(Cy) = \left(Cy(x)\right)^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\left(Cy(x)\right)^{(n-k)} =$$

$$= Cy^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) C y^{(n-k)}(x) = C\left[y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) \right] = CL_n[y].$$

$$2.\, L_n(y_1 + y_2) = \left(y_1 + y_2\right)^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\left(y_1 + y_2\right)^{(n-k)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\left[y_1^{(n-k)} + y_2^{(n-k)}\right] = \left[y_1^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) y_1^{(n-k)} \right] + \left[y_2^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} p_k(x) y_2^{(n-k)} \right] =$$

$$= L_n(y_1) + L_n(y_2).$$

Учитывая свойство линейности, $L_n[y]$ называют ***линейным дифференциальным оператором.***

Перепишем уравнения (2.3) и (2.4) следующим образом:

$$L_n[y] = f(x), \tag{2.3'}$$

$$L_n[y] = 0\,. \tag{2.4'}$$

Далее мы сначала изучим, как устроено общее решение линейного однородного уравнения (2.4’), затем неоднородного уравнения (2.3’), и только потом научимся решать эти уравнения.

Теорема 2.

Если $y_1(x)$ является решением уравнения (2.4’), то для любого числа C решением этого уравнения также является и $Cy_1(x)$.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решением уравнения (2.4’), то и $y_1(x) + y_2(x)$ является решением этого уравнения.

Доказательство данной теоремы напрямую следует из линейности дифференциального оператора.

Следствие: Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения образует линейное пространство.

Это означает, что любая линейная комбинация решений уравнения (2.4’) также является решением уравнения (2.4’).

Система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется ***линейно зависимой*** на интервале (a,b), если существует набор постоянных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$, среди которых есть не равные нулю, таких, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)\,. \tag{2.4}$$

Если же тождество (2.4) возможно только в том случае, когда все коэффициенты равны нулю, то система функций называется ***линейно независимой***.

Другими словами, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависимы на интервале (a, b), если существует равная нулю на (a, b) их нетривиальная линейная комбинация.

Примеры.

1. Функции x, x^2, x^3 линейно независимы на любом интервале.

   Их линейная комбинация $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ является многочленом третьей степени, а следовательно имеет не более трех вещественных корней, поэтому тождество

   $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \equiv 0$ на (a,b)

   возможно лишь тогда, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отсюда и следует линейная независимость.

2. Аналогично доказывается, что система функций $1, x, x^2, ..., x^m$ является линейно независимой.

3. Функции $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ при $k_1 \neq k_2$ являются линейно независимы.

   Действительно, предположим, что равенство $\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} = 0$ выполняется вы всех точках некоторого интервала и допустим, что $\alpha_2 \neq 0$. Но тогда из этого равенства следует, что $x = \dfrac{1}{k_1 - k_2} \ln\left(-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$ - единственное решение данного уравнения. Следовательно, линейная комбинация может обращаться в ноль только при нулевых коэффициентах.

4. Система функций $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \cdots, e^{k_n x}$ также является линейно независимой, если все k_i попарно различны.

   Составим линейную комбинацию $\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + ... + \alpha_n e^{k_n x} \equiv 0$. Разделим это равенство на $e^{k_1 x}$. Получим

   $\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + ... + \alpha_n e^{(k_n - k_1)x} \equiv 0$.

   Далее воспользуемся тем, что производная функции, тождественно равной нулю на интервале, также равна нулю на этом интервале. Поэтому продифференцируем тождество.

   $\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + ... + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n - k_1)x} \equiv 0$.

   Учитывая, что все k_i попарно различны, мы можем разделить это тождество на $(k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x}$.

   Проделав эту операцию n-1 раз мы получим, что $\alpha_n = 0$, а следовательно и все остальные коэффициенты также равны нулю. Что доказывает линейную независимость.

5. Система функций $1 - x, 2 + x$ является линейно независимой.

   Составим линейную комбинацию.

   $\alpha_1 (1 - x) + \alpha_2 (2 + x) \equiv 0.$

Как мы уже сказали, многочлен тождественно равен нулю только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Из курса линейной алгебры известно, что однородная система имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда определитель матрицы системы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Следовательно, единственным решением системы является нулевое. Следовательно, функции линейно независимы.

Система функций $1 - x^2, 2 + x, 2x + 4x^2$ является линейно зависимой. Для данной системы функций, как в прошлом примере, сразу составим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку определитель равен нулю, значит, существует ненулевое решение соответствующей системы, а значит, система функций является линейно зависимой.

Далее необходимо привести простой и эффективный инструмент для проверки функций на линейную зависимость.

Определителем Вронского (вронскианом) системы n - 1 раз дифференцируемых функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_3^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (2.5)$$

Теорема 3.

Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b), то вронскиан этой системы тождественно равен нулю на этом интервале.

Доказательство. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ –линейно зависимая система функций. По определению, существуют $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ не все равные нулю, такие что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Продифференцировав это тождество (n-1) раз, получим систему

$$
\begin{cases}
\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0, \\
\alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \cdots + \alpha_n y_n'(x) = 0, \\
\ldots \\
\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0.
\end{cases}
$$

При каждом x данная система является однородной системой линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, причем имеющая ненулевое решение.

Следовательно, определитель этой системы при каждом x равен нулю. Что доказывает теорему.

Отметим, что обратное неверно!

Из того, что определитель Вронского равен нулю (даже на всём интервале) не следует, что система функций линейно зависима.

Пример. Рассмотрим функции

$$
y_1 = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y_2 = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}
$$

Производные этих функций:

$$
y_1' = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y_2' = \begin{cases} 2x, & x \le 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}
$$

Очевидно, что вронскиан $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ этой системы функций равен нулю, поскольку как при $x \le 0$, так и при $x > 0$ определитель содержит нулевой столбец.

Предположим теперь, что при некоторых ненулевых α_1, α_2 верно тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$.

Пусть, например, $\alpha_1 \ne 0$, но тогда получаем что при $x > 0$ $\alpha_1 x^2 \equiv 0$, что может выполняться лишь при $\alpha_1 = 0$. Аналогично получается и $\alpha_2 = 0$.

Отсюда следует линейная независимость функций, хотя их вронскиан тождественно равен нулю.

Теорема 4. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ - частные решения линейного однородного дифференциального уравнения (2.4’). Если определитель Вронского этой системы функций равен нулю в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$, то система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно зависима, и её определитель Вронского тождественно равен нулю на (a, b).

Доказательство.

Пусть $W(x_0) = 0, x_0 \in (a,b)$. Тогда однородная система линейных алгебраических уравнений с неизвестными C_1, C_2, …, C_n

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. То есть существуют такие C_1, C_2, …, C_n не все равные нулю, при которых верны все уравнения системы.

Рассмотрим функцию $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$.

Тогда, во-первых, как мы сказали ранее, эта функция будет решением уравнения (2.4’), а во-вторых, эта функция удовлетворяет начальным данным

$y(x_0) = 0$.

Но по теореме о существовании и единственности единственным решением задачи Коши с однородным уравнением и нулевыми начальными данными является решение $y \equiv 0$.

Отсюда следует, что $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \equiv 0$, а это и означает линейную зависимость функций $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$, что доказывает теорему.

Отметим, что главным в последней теореме является то, что каждая из n функций является решением одного и того же линейного однородного уравнения n-го порядка. Поскольку, как мы показали выше на примере, для произвольных n функций эта теорема не верна.

Обобщая две последние теоремы, для системы n функций, являющихся решениями уравнения (2.4’), будет верна

Теорема 5.

Если $W(x)$ - определитель Вронского системы $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ частных решений линейного однородного дифференциального уравнения, то либо на интервале (a, b) $W(x) \equiv 0$ (что означает линейную зависимость этих решений на (a, b)), либо $W(x) \neq 0$ в любой точке этого интервала (что означает линейную независимость этих решений на (a, b)).

Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется любая линейно независимая система $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ его n частных решений.

Теорема 6.

Любое линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с непрерывными на (a, b) коэффициентами имеет фундаментальную систему решений, т.е. систему из n линейно независимых решений.

Доказательство.

Пусть $x_0 \in (a,b)$.

Построим n различных задач Коши для уравнения $L_n[y]=0$:

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0)=1, & y_2(x_0)=1, & \dots & y_n(x_0)=1, \\ y_1'(x_0)=0, & y_2'(x_0)=0, & \dots & y_n'(x_0)=0, \\ y_1''(x_0)=0, & y_2''(x_0)=0, & \dots & y_n''(x_0)=0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0. & y_2^{(n-1)}(x_0)=0. & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0)=0. \end{array}$$

Каждая из этих задач имеет единственное решение.

Определитель функции функций $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ в точке x_0 равен 1, это означает по доказанной нами теореме, что система этих функций линейно независима. Следовательно, мы построили фундаментальную систему решений. Что доказывает теорему.

Теорема 7.

Общее решение $y(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения есть линейная комбинация функций из фундаментальной системы решений этого уравнения:

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

Доказательство. Пусть $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ – ФСР линейного однородного дифференциального уравнения. Требуется доказать, что любое частное решение $y^*(x)$ этого уравнения содержится в формуле

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

при некотором наборе постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Возьмём любую точку $x_0 \in (a,b)$.

Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\cdots+C_ny_n(x_0)=y^*(x_0), \\ &C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+\cdots+C_ny_n'(x_0)=y^{*'}(x_0), \\ &\ldots\ldots \\ &C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y^{*(n-1)}(x_0). \end{aligned}$$

имеет единственное решение, поскольку её определитель - Вронскиан фундаментальной системы решений, а значит, не равен нулю. Следовательно, $y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $y^*(x)$, а значит, совпадает с ней по теореме о существовании и единственности.

Значит, $y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ для любого x. А это и доказывает теорему.

Примеры.

1. Уравнение $y''=-y$ имеет два очевидных линейно независимых решения $y_1=\sin x$ и $y_2=\cos x$. Следовательно, его общее решение: $y=C_1\sin x+C_2\cos x$.
2. Уравнение $y''=y$ имеет два очевидных линейно независимых решения $y_1=e^x$ и $y_2=e^{-x}$. Следовательно, его общее решение: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

Пусть *W(x)*-вронскиан от n решений уравнения (2.4’), тогда верна ***Формула Лиувилля-Остроградского***:

$$W'(x)+p_1(x)W(x)=0$$

или

$$W(x)=C\ e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Доказательство в общем виде следует из следующих фактов:

1. Два уравнения, имеющие одинаковые фундаментальные системы решений, совпадают.
2. Разложив по последнему столбцу определитель
$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' & y'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = W[y_1,\dots y_n]y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)}\dots$$
мы получим уравнение *n*-го порядка с той же фундаментальной системой решений.
3. Определитель при (*n-1*)-й производной является производной от вронскиана. Это следует из того, что производная от определителя в общем случае есть сумма определителей, в которых дифференцируется поочередно каждая строка. А для Вронскиана все остальные определители будут равны нулю.

Полное доказательство проведем для *n*=2.

Итак, пусть нам дано уравнение

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0 \tag{2.6}$$

и два его частных решения y_1, y_2.

Тогда $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$.

Продифференцируем это равенство:

$$W'(x) = \left(y_1(x)y_2'(x)\right)' - \left(y_2(x)y_1'(x)\right)' =$$
$$= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1'(x) - y_2(x)y_1''(x) =$$
$$= y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x).$$

Но y_1, y_2 - решения уравнения (2.6), следовательно, верны тождества

$$y_1''+p_1(x)y_1'+p_2(x)y_1 = 0,$$
$$y_2''+p_1(x)y_2'+p_2(x)y_2 = 0.$$

Умножая второе тождество на y_1 и вычитая из него первое, умноженное на y_2, получим $y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) + (y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))p_1(x) = 0$, откуда и следует формула Лиувилля –Остроградского.

Формула Лиувилля-Остроградского может быть использована для нахождения общего решения уравнения (2.6) в том случае, когда известно одно частное решение (нетривиальное) этого уравнения y_1.

Согласно формуле каждое решение y этого уравнения должно быть решением уравнения $\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p_1(x)dx}$ или

$$y_1 y' - y_1' y = C\, e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Это линейное уравнение первого порядка, решение которого мы уже умеем искать.

Пример.

Найти общее решение уравнения $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0.$

Главная проблема при решении таких уравнений – каким-либо образом подобрать частное решение. В нашем случае это сделать не трудно.

Частным решением является функция $y_1 = x$.

По формуле Лиувилля-Остроградского:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{\int \frac{1}{x\ln x}dx}$$

получили уравнение $xy' - y = C_1 \ln x$, которое легко интегрируется.

Общее решение уравнения $y = C_1 x + C_2(\ln x + 1)$.

Выше, в доказательстве формулы Лиувилля, мы упомянули тот факт, что по заданной фундаментальной системе решений можно однозначно восстановить соответствующее ей дифференциальное уравнение.

Сейчас мы покажем, как это можно сделать.

Как мы уже знаем, фундаментальная система решений уравнения (2.4) имеет ровно n линейно независимых функций. Любое решение однородного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений. Следовательно, для любого решения y определитель Вронского

$$\begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y''(x) & y_1''(x) & y_2''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Разложив данный определитель по первому столбцу, мы получим линейное уравнение n-го порядка.

Пример.

Построим уравнение, ФСР которого составляют функции 1 и $\cos x$.

$$\begin{vmatrix} y & 1 & \cos x \\ y' & 0 & -\sin x \\ y'' & 0 & -\cos x \end{vmatrix} = y'\cos x - y''\sin x = 0$$

Дифференциальное уравнение: $y''\sin x - y'\cos x = 0$

Переходим к изучению линейных **неоднородных** уравнений.

$$L_n[y] = f(x), \tag{2.3'}$$

Предположим, что мы имеем некоторое частное решение $y_ч$ уравнения (2.3'). Тогда пусть y - любое другое решение уравнения (2.3'). Тогда, учитывая линейность дифференциального оператора,

$$L_n[y - y_ч] = L_n[y] - L_n[y_ч] = f(x) - f(x) = 0.$$

Отсюда следует, что $y - y_ч$ - решение линейного однородного уравнения. Следовательно, верна

Теорема 8. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.3) с непрерывными на интервале (a, b) коэффициентами и правой частью является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (2.4) и какого-нибудь частного решения уравнения (2.3):

$$y_{об} = y_{од} + y_ч.$$

Пример.

$y'' + y = x.$

Как мы уже знаем, решением соответствующего однородного уравнения

$y'' + y = 0$

являются функции $\sin x$ и $\cos x$. Их линейная комбинация – общее решение однородного уравнения.

Очевидно также, что функция $y = x$ является частным решением исходного неоднородного уравнения.

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения:

$y_{об} = y_{од} + y_{ч} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x.$

Иногда в правой части неоднородного уравнения стоит сумма нескольких правых частей. Для такого уравнения бывает проще найти частное решение для каждого слагаемого отдельно, поскольку из свойств линейности дифференциального оператора следует

Теорема 9. (о суперпозиции решений неоднородного уравнения).

Если уравнения

$$L_n[y] = f_1(x)$$
$$L_n[y] = f_2(x)$$

имеют частные решения y_1 и y_2 соответственно, то функция $y_1 + y_2$ является частным решением уравнения

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x).$$

Или в более общей форме: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ является частным решением уравнения

$$L_n[y] = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

Действительно,

$L_n[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 L_n[y_1] + \alpha_2 L_n[y_2] = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x).$

Пример.

$y'' + y = x + 2e^x$

Мы уже знаем, что частным решением уравнения

$y'' + y = x$

является функция $y = x$.

При этом, очевидным решением уравнения

$y'' + y = 2e^x$

является функция $y = e^x$.

Значит общим решением исходного уравнения является

$y_{об} = y_{од} + y_{ч1} + y_{ч2} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x + e^x$

И наконец, предположим, что мы уже имеем фундаментальную систему однородного уравнения (2.4). Тогда, как и для линейных уравнений первого порядка, для нахождения частного решения соответствующего неоднородного уравнения мы можем воспользоваться методом вариации произвольной постоянной.

Итак, пусть $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – ФСР линейного однородного дифференциального уравнения (2.4). Тогда общее решение однородного уравнения:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Суть ***метода Лагранжа (вариации произвольной постоянной),*** как и ранее, заключается в том, что мы будем считать коэффициенты при фундаментальных решениях не постоянными, а функциями от x. То есть, будем искать частное решение уравнения (2.3) в виде

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)\,. \qquad (2.7)$$

В отличие от уравнений первого порядка, в нашем решении n неизвестных функций, поэтому недостаточно просто подставить это решение в уравнение (2.3). Для того чтобы найти n неизвестных функций, нам необходимо n уравнений. Поэтому, мы сами будем накладывать на эти функции ограничения, чтобы получить все n функций.

Продифференцируем равенство (2.7):

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) +$$
$$+ C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x).$$

Первое условие, которое мы наложим:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Далее найдем ещё одну производную. Получим

$$y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) +$$
$$+ C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \cdots + C_n(x)y_n''(x).$$

Второе условие:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

….

И так будем продолжать до (n-*1*)-й производной от y.

После этого, полученные производные и n-ю производную подставим в уравнение (2.3):

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) +$$
$$+ C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)}(x) +$$
$$+ p_1(x)\left(C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\right)$$
$$\ldots..$$
$$+ p_n(x)\left(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x)\right) = f(x)\,.$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) +$$
$$+ C_1(x)\left(y_1^{(n)}(x) + p_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)y_1(x)\right) + \ldots +$$
$$+ C_n(x)\left(y_n^{(n)}(x) + p_1(x)y_n^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)y_n(x)\right) = f(x)\,.$$

Учитывая, что $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – решения однородного уравнения, получим

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)\,.$$

Таким образом, собирая все наложенные условия и полученное последнее, видим, что $C_1'(x), C_2'(x), \cdots, C_n'(x)$ являются решениями системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (2.8)$$

Эта система – неоднородная СЛАУ с матрицей, определитель которой – вронскиан фундаментальной системы решений однородного уравнения. Следовательно, её определитель не равен нулю, и, следовательно, по теореме Кронеккера-Капелли система (2.8) имеет единственное ненулевое решение. Разрешая систему относительно $C_1'(x), C_2'(x), \cdots, C_n'(x)$ и каждое полученное равенство интегрируя по x, мы найдем соответствующее частное решение уравнения (2.3).

В случае уравнения второго порядка система (2.8) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

Пример.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Как мы уже знаем, общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{од}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

Составляем систему для вычисления неизвестных функций:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Разрешая систему, получим:

$$C_1'(x) = 1, C_2'(x) = -\mathrm{tg} x.$$

Проинтегрируем: $C_1(x) = x, C_2(x) = \ln|\cos x|$.

Таким образом, общее решение :

$$y_{\text{об}} = y_{\text{од}} + y_{\text{ч}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x\sin x + \cos x \ln|\cos x|.$$

Приведем ещё один метод нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения *n*-го порядка (2.3). Данный метод будет нами использоваться далее в разделе «основы функционального анализа» для обоснования обратимости дифференциального оператора.

Метод Коши.

Предположим, что нам известна функция $K(x,s)$, зависящая от параметра s, которая является решением линейного однородного уравнения

$$L_n[y]=0$$

и удовлетворяет следующим условиям Коши:

$$K(s,s)=0,$$
$$K'(s,s)=0,$$
$$\ldots$$
$$K^{(n-2)}(s,s)=0,$$
$$K^{(n-1)}(s,s)=1.$$

В этом случае частное решение уравнения

$$L_n[y]=f(x)$$

можно найти по формуле

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,s)f(s)ds. \tag{2.9}$$

Причём это решение будет удовлетворять нулевым начальным данным при $x=x_0$:

$$y(x_0)=y'(x_0)=...=y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Напомним правила дифференцирования определенных интегралов, зависящих от параметра:

Пусть $F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}g(x,s)ds$, тогда

$$F'(x)=g(x,\psi(x))\psi'(x)-g(x,\varphi(x))\varphi'(x)+\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial}{\partial x}g(x,s)ds.$$

Продифференцируем n раз равенство (2.9):

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x}K_x{}'(x,s)f(s)ds+K(x,x)f(x),$$

$$y''(x)=\int_{x_0}^{x}K_x{}''(x,s)f(s)ds+K'(x,x)f(x),$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x}K_x{}^{(n)}(x,s)f(s)ds+K^{(n-1)}(x,x)f(x).$$

Учитывая начальные данные для функции $K(x,s)$ получим:

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x}K_x{}'(x,s)f(s)ds,$$

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} K_x''(x,s) f(s)ds,$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} K_x^{(n)}(x,s) f(s)ds + f(x).$$

Учитывая линейность интегрирования, линейность дифференциального оператора и то, что функция $K(x,s)$ является решением однородного уравнения,

$$L_n[y] = \int_{x_0}^{x} L_n\left[K(x,s)\right] f(s)ds + f(x) = f(x).$$

Это и показывает, что (2.9) дает нам решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$K(x,s)$ можно легко получить из общего решения, вычисляя произвольные постоянные из условия, что $x = s$.

Пример.

$y'' + y = f(x)$.

Общим решением однородного уравнения является

$y_{\text{од}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Будем искать $K(x,s)$ из условий

$C_1 \sin s + C_2 \cos s = 0$,

$C_1 \cos s - C_2 \sin s = 1$.

Найдем $C_1 = \cos s, C_2 = -\sin s$.

Следовательно, $K(x,s) = \cos s \sin x - \sin s \cos x = \sin(x - s)$.

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным данным в произвольной точке x_0: $y(x) = \int_{x_0}^{x} \sin(x - s) f(s)ds$.

Упражнения.

Определить, являются ли функции линейно зависимы.

2.19. $1 + x + x^2, 1 - x, 1 + x^2$.

2.20. $2 - x, 2 + x, 3x + 2$.

2.21. x, e^x.

2.22. x, e^x, xe^x.

2.23. $\cos x, \sin x$.

2.24. $\cos x, \sin x, \cos 2x$.

2.25. $\cos^2 x, \sin^2 x, \cos 2x$.

2.26. $e^x \cos x, e^x \sin x$.

2.27. $e^x, \cos x, e^x \cos x$.

2.28. $x, |x|$.

2.29. $1, \operatorname{sgn} x$.

2.30. Могут ли два различных решения уравнения $y''+2y = \ln(x^2+1)$ а)пересекаться; б)касаться.

2.31. Могут ли два различных решения уравнения $y'''+2y = \ln(x^2+1)$ а)пересекаться; б)касаться.

2.32. Доказать, что два различных решения уравнения $y''+\ln(x^2+1)y = e^{x^2}$, имеющие максимум при одном и том же значении *x*, линейно зависимы.

В следующих задачах требуется составить линейное дифференциальное уравнение наименьшего порядка, имеющее данные частные решения.

2.33. $x, \sin x$.

2.34. $1, e^x$.

2.35. $x, 2x, 3x$.

2.36. $1, 1+x, x+x^2$.

В следующих задачах найти общее решение уравнения, подобрав каким-либо образом частное решение и воспользовавшись формулой Лиувилля-Остроградского.

2.37. $xy''-2xy'+2y=0$.

2.38. $(x^2+1)y''-2y=0$.

В следующих задачах, зная два частных решения уравнения, найти общее решение.

2.39. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$, $y_1 = x$, $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

2.40. $(3x^3+x)y''+2y'-6xy = 4-12x^2$, $y_1 = 2x$, $y_2 = (x+1)^2$.

2.3. Линейные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Как мы уже отмечали ранее, среди всех дифференциальных уравнений, те уравнения, которые мы можем решить, составляют лишь маленькую часть.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели линейные уравнения с переменными коэффициентами, построили для них общую теорию и показали, как можно решить уравнение, когда известно одно или несколько частных решений. Но даже для таких уравнений в общем случае не существует метода решения. В общем случае мы можем решить лишь линейные уравнения первого порядка.

В данном параграфе мы изучим еще более узкий класс уравнений – линейные уравнения с постоянными коэффициентами. То есть, будем предполагать, что коэффициенты уравнения – не функции от x, а вещественные числа.

Сначала мы изучим линейные **однородные** уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 . \qquad (2.10)$$

Будем искать решение уравнения (2.10) в виде $y = e^{\lambda x}$.

Подставляя это решение в уравнение (2.10) и сокращая на $e^{\lambda x}$, получим:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \qquad (2.11)$$

Уравнение (2.11) –алгебраическое уравнение n-й степени. Данное уравнение называют ***характеристическим*** для уравнения (2.10). А его корни характеристическими корнями.

Мы знаем, что уравнение n-й степени имеет не более n корней, а точнее, ровно n корней с учетом их кратности.

При этом корни могут быть простые и кратные, вещественные и комплексные.

Рассмотрим каждый из случаев.

1. Самый простой случай, когда все n корней вещественные и различные.

В этом случае мы получим n решений:

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x} .$$

Как мы указали ранее, если все λ_i различны, то данная система функций является линейно независимой, а, следовательно, является фундаментальной системой решений.

В этом случае общее решение уравнения (2.10):

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \, e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} .$$

Примеры.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$

2) $y''' - y = 0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - \lambda = 0$.

Его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$.

Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^{x}.$

2. Вещественный корень $\lambda = \lambda_0$ имеет кратность k.

Обозначим характеристический полином как

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n .$$

Так как $\lambda = \lambda_0$ - корень кратности *k*, это означает, что в разложении на множители полинома $P(\lambda)$ есть множитель $(\lambda - \lambda_0)^k$. Следовательно, $\lambda = \lambda_0$ является также корнями многочленов $P'(\lambda)$, $P''(\lambda)$, …, $P^{(k-1)}(\lambda)$.

Далее, обозначим

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y .$$

Тогда

$$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda) e^{\lambda x} . \qquad (2.12)$$

Продифференцируем равенство (2.12) по λ:

$$L(xe^{\lambda x}) = \left(P(\lambda)\right)' e^{\lambda x} + xP(\lambda) e^{\lambda x} .$$

Продифференцируем еще раз. Получим

$$L(x^2 e^{\lambda x}) = \left(P(\lambda)\right)'' e^{\lambda x} + 2\lambda \left(P(\lambda)\right)' e^{\lambda x} + x^2 P(\lambda) e^{\lambda x} .$$

Продифференцируем до (*k*-1) производной. Получим

$$L(x^{k-1} e^{\lambda x}) = \sum_{l=1}^{k-1} C_{k-1}^{l} P^{(l)}(\lambda) x^{k-1} e^{\lambda x} .$$

Как мы указали выше, $\lambda = \lambda_0$ является корнем от производных многочлена $P(\lambda)$ вплоть до (*k*-1) порядка. Следовательно,

$$L(e^{\lambda_0 x}) = L(xe^{\lambda_0 x}) = L(x^2 e^{\lambda_0 x}) = \ldots = L(x^{k-1} e^{\lambda_0 x}) = 0 .$$

Это означает, что помимо функции $e^{\lambda_0 x}$, решениями уравнения (2.10) также являются функции $xe^{\lambda_0 x}$, $x^2 e^{\lambda_0 x}$, …, $x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$.

Таким образом, корню $\lambda = \lambda_0$ кратности *k* соответствует *k* различных линейно независимых решений из ФСР:

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x},\ x^2 e^{\lambda_0 x},\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\lambda_0 x} .$$

Пример.

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$.

Или $(\lambda - 1)^3 = 0$.

Его корень $\lambda = 1$ - кратности 3.

Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_2 x^2 e^x$.

3. Корень $\lambda = a + bi$ - простой (не кратный) корень характеристического многочлена.

Заметим, что в этом случае корнем характеристического многочлена также является $\lambda = a - bi$, поскольку корнями многочлена с вещественными коэффициентами могут быть только пары комплексно-сопряженных чисел.

Тогда из теории функций комплексной переменной нам известно, что

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) .$$

Эта функция комплексная и, поскольку $\lambda = a + bi$ - корень многочлена $P(\lambda)$, она является решением уравнения (2.10).

Следовательно, верно равенство:

$$L\left[e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\right] = 0.$$

Но оператор L – линейный, следовательно, равенство преобразуется к виду:

$$L\left[e^{ax}\cos bx\right] + iL\left[e^{ax}\sin bx\right] = 0.$$

Мы получили, что комплексная функция равна нулю. Это возможно лишь тогда, когда её вещественная и мнимая части равны нулю.

А это означает, что вещественные функции

$$e^{ax}\cos bx \text{ и } e^{ax}\sin bx$$

являются решениями уравнения (2.10).

Эти же функции мы получили бы, если бы рассматривали корень $\lambda = a - bi$. Значит, паре простых комплексно-сопряженных корней характеристического многочлена соответствуют две функции из ФСР (доказательство их линейной независимости было в упражнениях):

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx.$$

Примеры.

1) $y'' + 4y' + 5y = 0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$.

Или $(\lambda + 2)^2 = -1.$

Его корни $\lambda_{1,2} = -2 \pm i.$

Общее решение: $y = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\sin x.$

2) $y'' + a^2 y = 0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a^2 = 0$.

Его корни $\lambda_{1,2} = \pm ai.$

Общее решение: $y = C_1\cos ax + C_2\sin ax.$

4. Пара комплексно сопряженных корней $\lambda = a \pm bi$ имеет кратность k.

В этом случае ситуация та же самая, что и для вещественных кратных корней. Этой паре соответствуют функции:

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

Отметим, что этот случай возможен для уравнений, как минимум 4-го порядка.

Пример.

$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$.

Или $(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$

Его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ - кратности 2.

Общее решение: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$.

Остается показать, что все ***n*** полученных функций

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\
&\ldots \\
&e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{r_m - 1} e^{\lambda_m x}, \\
&e^{a_1 x} \cos b_1 x, e^{a_1 x} \sin b_1 x, \ldots, x^{s_1 - 1} e^{a_1 x} \cos b_1 x, x^{s_1 - 1} e^{a_1 x} \sin b_1 x, \\
&\ldots \\
&e^{a_l x} \cos b_l x, e^{a_l x} \sin b_l x, \ldots, x^{s_l - 1} e^{a_l x} \cos b_l x, x^{s_l - 1} e^{a_l x} \sin b_l x
\end{aligned}
$$

составляют ФСР, то есть являются линейно независимыми функции.

В общем случае мы делать этого не будем, а частные случаи рассматривались на лекциях и на практике. Главный инструмент – Вронскиан.

Пример.

$y^{(7)} + 2y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y''' = 0.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^7 + 2\lambda^6 + 8\lambda^4 + 16\lambda^3 = 0$.

Его корни: $\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_{4,5} = -2, \lambda_{6,7} = 1 \pm i\sqrt{3}.$

Общее решение:

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-2x} + C_5 x e^{-2x} + C_6 e^x \cos\sqrt{3}x + C_7 e^x \sin\sqrt{3}x$.

Переходим к решению неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \tag{2.13}$$

Напомним, что общее решение уравнения (2.13) является суммой общего решения уравнения (2.10) и какого-либо частного решения уравнения (2.13):

$$y_{\text{об}} = y_{\text{од}} + y_{\text{ч}}.$$

В общем случае для поиска частного решения уравнения (2.13) мы уже знаем универсальный способ – метод Лагранжа, который всегда дает нам решение (иногда неинтегрируемое).

Мы рассмотрим также тот случай, когда решение можно найти более простым способом. Для этого правая часть должна быть специального вида.

Функция вида $Ax^m e^{\alpha x} \cos\beta x$ или $Ax^m e^{\alpha x} \sin\beta x$ называется ***квазиодночленом***.

Сумма конечного числа квазиодночленов называется ***квазимногочленом*** или ***квазиполиномом***.

Предположим, что правая часть уравнения (2.13) имеет вид квазиполинома

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right], \tag{2.14}$$

где $P_{m_1}(x)$-многочлен степени m_1, $P_{m_2}(x)$-многочлен степени m_2.

Пусть $s_0 = \alpha + \beta i$ - комплексное число, соответствующее квазиполиному (2.14).

Тогда, если s_0 не является характеристическим корнем уравнения (2.10), то частное решение уравнения (2.13) с правой частью (2.14) можно найти в виде:

$$y_{\text{ч}} = e^{\alpha x}\left[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x\right],$$

где $m = \max(m_1, m_2)$, R_m, S_m -многочлены степени m с неопределенными коэффициентами.

Если же s_0 - корень характеристического уравнения кратности r, то частное решение уравнения (2.13) с правой частью (2.14) можно найти в виде:

$$y_{\text{ч}} = x^r e^{\alpha x}\left[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x\right].$$

Примеры.

1) $y'' + y = x^2 + x.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = \pm i$.

Общее решение однородного уравнения:

$y_{од} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

В правой части уравнения полином третьего порядка – частный случай квазиполинома, соответствующий $s_0 = 0$, который не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение уравнения можно найти в виде полинома третьего порядка с неопределенными коэффициентами:

$y_ч = Ax^2 + Bx + C$.

Чтобы найти коэффициенты, подставляем это частное решение в уравнение.

$(Ax^2 + Bx + C)'' + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x.$

$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + x.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему

$$\begin{cases} 2A + C = 1, \\ B = 1, \\ A = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получим частное решение уравнения

$y_{\text{ч}}(x) = x^2 + x - 2$.

Общее решение:

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + x - 2$.

2) $y'' + 9y = e^{5x}$.

Общее решение однородного уравнения:

$y_{од} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

$s_0 = 5$ не является корнем характеристического многочлена, поэтому ищем решение в виде Ae^{5x}. Подставляем в уравнение:

$25Ae^{5x} + 9Ae^{5x} = e^{5x}$. $A = \dfrac{1}{36}$.

Общее решение:

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{e^{5x}}{36}.$$

3) $y'' - 5y' + 6y = x^3 - 2x.$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Общее решение однородного уравнения:

$y_{од} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

$s_0 = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение уравнения можно найти в виде полинома третьего порядка с неопределенными коэффициентами:

$y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Подставляем это частное решение в уравнение.

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)'' - 5(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' + 6(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 - 2x.$$

$$(6Ax + 2B) - 5(3Ax^2 + 2Bx + C) + 6(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 - 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему

$$\begin{cases} 2B - 5C + 6D = 0, \\ 6A - 10B + 6C = -2x, \\ -15A + 6B = 0, \\ 6A = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получим частное решение уравнения

$$y_ч(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{12} + \frac{7x}{36} + \frac{5}{216}.$$

Общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{12} + \frac{7x}{36} + \frac{5}{216}.$$

4) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}(x - 5).$

Общее решение однородного уравнения:

$y_{од} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$.

$s_0 = -1$ является корнем характеристического многочлена кратности 3, поэтому ищем решение в виде $x^3(Ax+B)e^{-x}$.

5) $y'' - y' = e^x(x^2 - 1).$

Общее решение однородного уравнения:

$y_{од} = C_1 + C_2 e^x$.

$s_0 = 1$ является простым корнем характеристического многочлена, поэтому ищем решение в виде $x(Ax^2 + Bx + C)e^x$.

6) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x.$

Общее решение однородного уравнения:

$y_{од} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

$s_0 = \pm 2i$ не являются корнями характеристического многочлена, поэтому ищем решение в виде $A\cos 2x + B\sin 2x$.

7) $y'' + 4y = \cos 2x.$

Общее решение однородного уравнения:

$y_{од} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

$s_0 = \pm 2i$ являются корнями характеристического многочлена, поэтому ищем решение в виде $x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

8) $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x.$

Корни характеристического многочлена: $\lambda_{1,2} = \pm i$ - кратности 2.

$s_0 = \pm i$ являются корнями характеристического многочлена кратности 2, поэтому ищем решение в виде $x^2(A\cos x + B\sin x)$.

9) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}(x\cos x + 3\sin x).$

Корни характеристического многочлена: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.

$s_0 = -1 \pm i$ являются корнями характеристического. При $\cos x$ стоит многочлен первой степени, при $\sin x$ - многочлен нулевой степени, поэтому максимальная степень равна 1.

Ищем решение в виде $x((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x)$.

Не стоит забывать о принципе суперпозиции при поиске частного решения неоднородного уравнения: если правая часть – сумма квазиполиномов, соответствующих разным s_0, то найдя частные решения для каждого отдельно и просуммировав, мы получим частное решение исходного уравнения.

10) $y'' + 4y = e^x + x\cos 2x + e^x \cos 2x.$

Корни характеристического многочлена: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

e^x соответствует $s_0 = 1$, которое не является характеристическим корнем. Следовательно, ищем частное решение для него в виде Ae^x.

$x\cos 2x$ соответствует $s_0 = \pm 2i$, которые являются характеристическими корнями. Следовательно, ищем частное решение для него в виде $x\big((Bx + C)\cos 2x + (Dx + E)\sin 2x\big)$.

$e^x \cos 2x$ соответствует $s_0 = 1 \pm 2i$, которые не являются корнями характеристического многочлена, поэтому ищем решение в виде $e^x\big(F\cos 2x + G\sin 2x\big)$.

Частное решение исходного уравнения можно найти в виде:

$$Ae^x + x\big((Bx + C)\cos 2x + (Dx + E)\sin 2x\big) + e^x\big(F\cos 2x + G\sin 2x\big).$$

Упражнения.

Найти общее решение уравнения.

2.41. $y'' + 5y' = 0.$

2.42. $y'' + y' + y = 0.$

2.43. $y'' + k^2 y = 0, k \neq 0.$

2.44. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

2.45. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

2.46. $y''' - 3y'' + 2y' = 0.$

2.47. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$

2.48. $y^{IV} + 4y = 0.$

2.49. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$

2.50. $y'' - 5y' = -5x^2 + 2x.$

2.51. $y'' - y = 6e^{2x}.$

2.52. $y'' - y' = 2e^x.$

2.53. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}.$

2.54. $y'' - 6y' + 5y = -3e^x + 5x^2.$

2.55. $y'' + y = 6\cos 2x + 3\sin 2x.$

2.56. $y'' + y' + y = -13\sin 2x.$

2.57. $y'' + y' = 2\sin x.$

2.58. $y'' + 4y = x\sin^2 x.$

2.59. $y''' + y' = x\cos^2 x.$

В следующих задачах определить вид частного решения.

2.60 . $y'' + y = xe^x.$

2.61 . $y'' - y = 2\sin x + \cos 2x.$

2.62 . $y''+y=\sin x-\cos 2x.$

2.63 . $y''+y=x\sin x.$

2.64 . $y^{IV}+y'''=1.$

2.65 . $y''+my=e^{nx}.$

2.66 . $y''+py'+qy=a.$

В следующих задачах найти общее решение, воспользовавшись методом Лагранжа.

2.67. $y''-4y=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$

2.68. $y''+y=\dfrac{2}{\sin^3 x}.$

2.69. $y'''+y=\dfrac{x^3-6}{x^4}.$

3. Системы дифференциальных уравнений

Общий вид системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y'_1, ...y_1^{(m_1)}, y_2, y'_2, ...y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y'_n, ...y_n^{(m_n)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y'_1, ...y_1^{(m_1)}, y_2, y'_2, ...y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y'_n, ...y_n^{(m_n)}) = 0, \\ .... \\ F_n(x, y_1, y'_1, ...y_1^{(m_1)}, y_2, y'_2, ...y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y'_n, ...y_n^{(m_n)}) = 0, \end{cases}$$

Здесь, *x*- независимая переменная, $y_1, y_2, ...y_n$ - искомые функции, $F_1, F_2, ...F_n$ - заданные функции.

На практике, чаще всего возникают системы, разрешенные относительно старших производных:

$$\begin{cases} y_1^{(m)} = f_1(x, y_1, y'_1, ...y_1^{(m_1-1)}, y_2, y'_2, ...y_2^{(m_2-1)}, ..., y_n, y'_n, ...y_n^{(m_n-1)}) = 0, \\ y_2^{(m)} = f_2(x, y_1, y'_1, ...y_1^{(m_1-1)}, y_2, y'_2, ...y_2^{(m_2-1)}, ..., y_n, y'_n, ...y_n^{(m_n-1)}) = 0, \\ ..... \\ y_n^{(m)} = f_n(x, y_1, y'_1, ...y_1^{(m_1-1)}, y_2, y'_2, ...y_2^{(m_2-1)}, ..., y_n, y'_n, ...y_n^{(m_n-1)}) = 0, \end{cases}$$

Такие системы называют ***каноническими***. Функции $f_1, f_2, ...f_n$ - заданные функции.

Совокупность ***n*** функций y_i *(i=1..n)* (дифференцируемых достаточное количество раз) называется решением системы на интервале (*a,b*) , если она обращает на этом интервале каждое уравнение этой системы в тождество.

Система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, называется ***нормальной*.** Нормальная система:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \qquad ... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

Отметим, что любую каноническую систему дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе с помощью замен производных выше первой на новые функции.

Пример.

$\begin{cases} y'' = f(x, y, y', z, z'), \\ z'' = g(x, y, y', z, z') \end{cases}$ - каноническая система из двух уравнений второго порядка сводится к нормальной системе четырех уравнений:

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = f(x, y, u, z, v), \\ z' = v, \\ v' = g(x, y, u, z, v). \end{cases}$$

Таким же образом любое уравнение n-го порядка можно свести к системе из n уравнений первого порядка.

Пример.

Линейное уравнение $y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x)$ сводится к линейной системе:

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = -a_1(x)y_2 - a_2(x)y_1 - a_3(x)y + f(x). \end{cases}.$$

Примеры задач, приводящих к системам дифференциальных уравнений:

1) Некоторое вещество *A* разлагается на два вещества *P и Q*. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложившегося вещества.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(c - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(c - x - y). \end{cases}$$

2) Движение материальной точки в пространстве под действием переменной силы *F(X,Y,Z)*, зависящей от координат точки и её скорости, заданной вектором (u,v,w):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(t), \\ \dfrac{dz}{dt} = w(t), \\ m\dfrac{du}{dt} = X(t, x, y, z, u, v, w), \\ m\dfrac{dv}{dt} = Y(t, x, y, z, u, v, w), \\ m\dfrac{dw}{dt} = Z(t, x, y, z, u, v, w). \end{cases}$$

3) Динамика численностей взаимодействующих популяций.

Модель конкуренции двух видов (N_1, N_2-их численности):

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \dfrac{(K_1 - N_1 - \alpha_1 N_2)}{K_1}, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \dfrac{(K_2 - N_2 - \alpha_2 N_1)}{K_2}. \end{cases}$$

Модель системы хищник-жертва (N_1-численность жертв, N_2-численность хищников):

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1). \end{cases}$$

4) Медицина

Процесс кроветворения (не будем описывать переменные, приведем лишь общий вид, чтобы поразить студентов):

$$\dot{x}_1(t) = 2\beta_0(\lambda_0 + \mu_0 x_{n+1}(t-r))x_0(t-r) - (\lambda_1 + \mu_1 x_{n+1}(t))x_1(t) - (\rho x)_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = 2\beta_1(\lambda_1 + \mu_1 x_{n+1}(t-r))x_1(t-r) - (\lambda_2 + \mu_2 x_{n+1}(t))x_2(t) - (\rho x)_2(t),$$

$$\dot{x}_j(t) = 2\beta_{j-1}(\lambda_{j-1} + \mu_{j-1} x_{n+1}(t-r))x_{j-1}(t-r) -$$
$$- (\lambda_j + \mu_j x_{n+1}(t))x_j(t) - (\rho x)_j(t),$$
$$j = 3, 4, \ldots, n-2,$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = 2\beta_{n-2}(\lambda_{n-2} + \mu_{n-2} x_{n+1}(t-r))x_{n-2}(t-r) -$$
$$- (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1} x_{n+1}(t))x_{n-1}(t) - (\rho x)_{n-1}(t),$$

$$\dot{x}_n(t) = \beta_{n-1}(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1} x_{n+1}(t-\alpha))x_{n-1}(t-\alpha) - \lambda_n x_n(t) - (\rho x)_n(t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = g(x_n(t-\omega)) - \lambda_{n+1} x_{n+1}(t) - (\rho x)_{n+1}(t), \quad t \geq 0.$$

Модель SIR- простейшая модель распространения вируса в замкнутом сообществе, например, в городе (*S(t), I(t), R(t)* — численности восприимчивых, инфицированных, переболевших индивидов в момент времени *t)*:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{\beta IS}{N}, \\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases}$$

MSEIR – гораздо более сложная модель вируса, учитывающая дополнительные группы людей ($E(t)$ – численность носителей, $M(t)$ - численность новорожденных с врожденным иммунитетом)

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = B - \delta M - \mu M, \\ \dfrac{dS}{dt} = \delta M - \beta IS - \mu S, \\ \dfrac{dE}{dt} = \beta SI - (\varepsilon + \mu)E, \\ \dfrac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\gamma + \mu)I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \end{cases}$$

5) Механика
6) Экономика
7) Химические реакции
8) Модели боевых действий
9) Климатология.
10) Упрощение задач о турбулентности. Тория хаоса и катастроф
11) Движение планет
12) Социология и реклама
13) ……

Приведённых примеров должно быть достаточно, чтобы понять, что с помощью систем дифференциальных уравнений, как простых, так и достаточно сложных, описывается большое количество процессов, окружающих нас. Как правило, сложные системы очень трудно, практически невозможно анализировать теоретически, и чаще всего их анализ проводят численно, то есть с помощью численного (количественного) решения данных систем при заданных начальных условиях. При этом всегда стараются построить наиболее простую близкую систему, чтобы провести как можно более глубокий теоретический анализ. Но и для сложных систем обязательно проводится анализ на корректность модели, то есть существование и единственность решения, и её адекватность изучаемому процессу. Проводится поиск стационарных решений, анализ их устойчивости по первому приближению (то есть соответствующей линейной системы).

В данном и следующем параграфе мы в общих чертах изложим теорию нормальных систем дифференциальных уравнений: решение простых нелинейных систем с помощью интегрируемых комбинаций, общую теорию линейных систем, которая практически идентична теории линейных уравнений высшего порядка, поэтому будет даваться без доказательств, решение линейных систем с постоянными коэффициентами и их связь с линейной алгеброй, теорию устойчивости решений по первому приближению и исследование автономных систем на фазовой плоскости.

3.1. Общая теория нормальных систем. Первые интегралы нелинейных систем

Далее мы будем изучать только нормальные системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \tag{3.1}$$

Систему (3.1) часто удобнее записывать в векторной форме:

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y),$$

где $Y = (y_1, y_2, ... y_n), F = (f_1, f_2, .. f_n)$ -вектор-функции, n- порядок системы.

Напомним, что с геометрической точки зрения частное решение уравнения первого порядка $y=y(x)$ – кривая на плоскости OXY.

Точно так же частное решение нормальной системы второго порядка – некоторая кривая в трехмерном пространстве OXY_1Y_2.

Частное решение системы n-го порядка – кривая в $n+1$ – мерном пространстве.

Кривые, соответствующие решениям системы будем, как и ранее, называть ***интегральными кривыми.***

Задача Коши для систем дифференциальных уравнений ставится так же, как для одного уравнения: найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0 \tag{3.2}$$

или в векторной форме:

$$Y(x_0) = Y_0.$$

Теорема 1 (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Пусть в системе (3.1) функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ удовлетворяют условиям:

1) как функции ($n+1$)-й переменной $x, y_1, y_2, ..., y_n$, они непрерывны по всем переменным в некоторой области D ($n+1$)-мерного пространства;

2) их частные производные по переменным $y_1, y_2, ..., y_n$ в области D ограничены ($\exists\ M > 0$ такое, что $\left|\frac{\partial f_i}{y_j}\right| \le M$ для $i, j = 1, ..., n$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ области D существует, и при этом единственное, решение задачи Коши (3.1.), (3.2).

Совокупность функций

$$\begin{aligned} &y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &... \\ &y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n). \end{aligned} \qquad (3.3)$$

называется ***общим решением*** системы (3.1), если

1) при любых допустимых значениях постоянных C_i (i=1..n) она обращает все уравнения системы (3.1) в тождество, т. е. определяет решение системы;

2) для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант C_i, при которых функции совокупности (3.3) удовлетворяют заданным начальным условиям.

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных, будем называть ***частным.***

Как мы показали ранее, любое уравнение n-го порядка можно свести к нормальной системе n-го порядка. Покажем на примере, что нормальную систему n-го порядка также можно привести к уравнению n-го порядка.

Пример.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение системы и подставим вместо полученных производных их выражения из второго и третьего уравнения системы:

$$y_1'' = y_2' + y_3' = y_1 + y_2 - y_3 + y_2 + y_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1'' = y_1 + 2y_2$$

Продифференцируем это уравнение ещё раз и подставим соответствующие правые части:

$$y_1''' = y_1' + 2y_2' = y_2 + y_3 + 2(y_1 + y_2 - y_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3$$

Выписывая выражения для первой, второй и третьей производной функции y_1, мы получим систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Эта система – система линейных уравнений относительно y_1, y_2, y_3, следовательно, мы легко можем из этой системы выразить y_2 и y_3:

$$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{2}(y_1'' - y_1), \\ y_3 = y_1' - \frac{1}{2}(y_1'' - y_1). \end{cases}$$

Исключая переменные y_2 и y_3, получим уравнение для y_1:

$y_1''' - 2y_1'' + y_1' = 0$.

Это линейное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами, которые мы уже умеем решать:

$y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3 x)$.

Для того, чтобы найти y_2 и y_3, необходимо это выражение продифференцировать два раза.

$y_1' = e^x(C_2 + C_3 + C_3 x),$

$y_1'' = e^x(C_2 + 2C_3 + C_3 x).$

Тогда выражая y_2 и y_3, получим общее решение системы:

$y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3 x),$

$y_2 = -\frac{1}{2}C_1 + C_3 e^x,$

$y_3 = \frac{1}{2}C_1 + e^x(C_2 + C_3 x).$

Конечно, для того, чтобы решить полученное уравнение, изначально была взята линейная система с постоянными коэффициентами. Но этот пример – лишь иллюстрация того, как можно в общем случае свести систему к уравнению n-го порядка.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к одному уравнению n-го порядка, называется ***методом исключения.***

Пусть нам дано общее решение (3.3) нормальной системы (3.1). Мы можем считать совокупность равенств, составляющих общее решение, системой алгебраических уравнений относительно $C_1, C_2, .., C_n$.

Разрешив эту систему, получим:

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x, y_1, y_2, .., y_n) = C_1,\\
&\psi_2(x, y_1, y_2, .., y_n) = C_2,\\
&.....\\
&\psi_n(x, y_1, y_2, .., y_n) = C_n.
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Совокупность равенств (3.4) называется ***общим интегралом*** системы (3.1), а каждое из этих равенств – ***первым интегралом*** системы.

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, которое легко интегрируется, и которое можно получить непосредственно из уравнений системы (3.1) (исключая или комбинируя переменные), например, являющееся уравнением вида

$$d\Phi(x, y_1, y_2, .., y_n) = 0,$$

или уравнением, сводящимся заменой переменных или функций к какому-либо интегрируемому типу уравнений с одной неизвестной функцией.

Каждая из интегрируемых комбинаций дает один первый интеграл системы.

Если мы найдём *n* интегрируемых комбинаций, дающих *n* независимых первых интегралов, то получим общий интеграл системы, то есть решим её.

Первые интегралы называются ***независимыми***, если никакую из функций, образующих первый интеграл (стоящую слева), нельзя выразить через другие.

Аналитически независимость можно проверить, вычислив якобиан отображения из $y_1, y_2, .., y_n$ в $C_1, C_2, .., C_n$, то есть, посчитав определитель матрицы, составленной из частных производных функций $\psi_1 \psi_2, .., \psi_n$ по $y_1, y_2, .., y_n$.

Для системы двух уравнений такая проверка необязательна, так как зависимость или независимость двух функций, как правило, очевидна.

Таким образом, чтобы решить систему из *n* уравнений, нам необходимо найти *n* первых интегралов, то есть найти n интегрируемых комбинаций.

Пример.

$$\frac{dx}{dt} = y,$$
$$\frac{dy}{dt} = x.$$

Сложим эти два уравнения и получим первую интегрируемую комбинацию:

$$\frac{d(x+y)}{dt} = y + x \text{ или } \frac{d(x+y)}{y+x} = dt.$$

Получим решение: $y + x = C_1 e^t$,

а следовательно, и первый интеграл: $(y + x)e^{-t} = C_1$.

Если мы вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$$\frac{d(x-y)}{dt} = y - x \text{ или } \frac{d(x-y)}{y-x} = dt.$$

Решение последнего уравнения: $y - x = C_2 e^{-t}$.

Соответствующий первый интеграл: $(y-x)e^{t} = C_2$.

Общим интегралом системы является:

$$\begin{cases} (y+x)e^{-t} = C_1, \\ (y-x)e^{t} = C_2. \end{cases}$$

Отметим, что разных первых интегралов может быть много. Но только два из них могут быть независимыми.

Например, мы можем получить интегрируемую комбинацию следующим образом: из первого уравнения системы следует, что $\frac{dx}{y} = dt$, а из второго, что $\frac{dy}{x} = dt$. Из этих двух равенств мы можем составить комбинацию.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

которая является интегрируемой. Решая уравнение, получим первый интеграл: $x^2 - y^2 = C$. Но этот первый интеграл можно выразить, как произведение двух уже найденных.

В то же время, общим интегралом системы могут быть

$$\begin{cases} (y+x)e^{-t} = C_1, \\ y^2 - x^2 = C_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (y-x)e^{t} = C_1, \\ y^2 - x^2 = C_2. \end{cases}$$

Иногда, найдя первый интеграл, мы можем выразить одну переменную из него через другие и понизить порядок системы.

Примеры.

1)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Как и в прошлом примере, из двух уравнений получаем интегрируемую комбинацию

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}.$$

и первый интеграл

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Из первого интеграла выражаем y: $y = \pm\sqrt{C_1 - x^2}$
и подставляем в первое уравнение системы:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{C_1 - x^2}\,,$$

решая которое, получим решение:

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}} \pm t = C_2\,,$$

из которого, подставляя вместо $C_1 = x^2 + y^2$,
получим первый интеграл

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm t = C_2.$$

Очевидно, что интегралы являются независимыми, так как содержат разные переменные, поэтому являются общим интегралом системы.

2)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = z - x, \\ \dot{z} = x - y. \end{cases}$$

Сложив все три уравнения, получим

$$\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0\,,$$

что дает нам первый интеграл

$$x + y + z = C_1\,.$$

Данный первый интеграл дает нам возможность выразить переменную z через x и y.

Но сначала мы можем найти ещё один первый интеграл следующим образом: умножим первое уравнение на x, второе на y, третье на z, и сложим их. Получим уравнение:

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0\,,$$

из которого получим первый интеграл:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2\,.$$

Из двух первых интегралов мы можем выразить, например, функции y и z через x и подставить в первое уравнение, после чего получим уравнение первого порядка.

Система вида

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\dots,x_n)} = \frac{dx_2}{F_2(x_1,\dots,x_n)} - \dots = \frac{dx_n}{F_n(x_1,\dots,x_n)}$$

называется системой дифференциальных уравнений в ***симметрической форме*** (симметрическом виде).

Система в симметрическом виде является более удобной для нахождения интегрируемых комбинаций. Любую нормальную систему (3.1) можно представить в симметрическом виде:

$$\frac{dy_1}{f_1(y_1,...,y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(y_1,...,y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(y_1,...,y_n)} = dx.$$

Для составления интегрируемых комбинаций часто пользуются известным ***свойством равных дробей***:

Если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$, то $\forall\ \alpha_1,...,\alpha_n \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n}{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + ... + \alpha_n b_n}$.

Примеры.

1) $\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$.

Первую интегрируемую комбинацию получим из второго равенства:

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Первый интеграл: $\frac{y}{z} = C_1$.

Вторую интегрируемую комбинацию можно составить по свойству равных дробей:

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 - y^2 - z^2) + y(2xy) + z(2xz)} = \frac{dy}{2xy}$$

или

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Получим ещё один первый интеграл:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2.$$

Таким образом, общий интеграл системы:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{z} = C_1, \\ \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2. \end{cases}$$

2) $\frac{dx}{\sin z} = \frac{dy}{2x + \sin z} = \frac{dz}{2x}$.

Один первый интеграл можно получить, приравнивая первую и третью части системы, так как они не содержат y:

$$\frac{dx}{\sin z} = \frac{dz}{2x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его решение:

$$x^2 + \cos z = C_1.$$

Теперь можно выразить x и подставить вместо него полученное выражение во вторую часть и в третью.

Но получившееся уравнение весьма не простое. Поэтому здесь лучше воспользоваться свойством равных дробей.

$$\frac{dx}{\sin z} = \frac{dy}{2x + \sin z} = \frac{dz}{2x} = \frac{dx - dy + dz}{0}.$$

Последнее означает, что $dx - dy + dz = 0$. Это даёт нам ещё один первый интеграл.

Общий интеграл системы:

$$\begin{cases} x^2 + \cos z = C_1, \\ x + z - y = C_2. \end{cases}$$

Упражнения.

Для данных систем дифференциальных уравнений: а) представить систему в нормальной форме; б) методом исключении привести к одному уравнению и решить.

3.1. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} = x, \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0. \end{cases}$

С помощью интегрируемых комбинаций найти общие интегралы следующих систем дифференциальных уравнений:

3.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{x}. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -xy^2. \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x + y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x + y}. \end{cases}$

3.9. $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{dz}{x}.$

3.10. $\dfrac{dx}{y + z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}.$

3.11. $\dfrac{dx}{yz}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{xy}$.

3.12. $\dfrac{dx}{x+y}=\dfrac{dy}{x-y}=\dfrac{dz}{x^2-2xy-y^2}$.

3.13. $\dfrac{dx}{y}=-\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{t}=-\dfrac{dt}{z}$.

3.14. $\dfrac{dx}{y-x}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{t}=\dfrac{dt}{x-y}$.

3.2. Общая теория систем линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система (3.1) дифференциальных уравнений называется ***линейной***, если функции $f_1, f_2,..., f_n$ являются линейными относительно $y_1, y_2,..., y_n$. Нормальная линейная система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+...+a_{1n}(x)y_n+b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dt}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+...+a_{2n}(x)y_n+b_2(x), \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dt}=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+...+a_{nn}(x)y_n+b_n(x). \end{cases} \tag{3.5}$$

где $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ -заданные функции, $y_i(x)$ - искомые функции.

Краткая запись системы (3.5):

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j+b_i(x) \quad (i=1,..,n).$$

Если все $b_i(x)\equiv 0$, то система называется ***однородной***, иначе ***неоднородной***.

Систему (3.5) удобно записывать в матричном виде:

$$Y' = AY + B, \tag{3.5}$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & ... & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & ... & a_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & ... & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, $Y'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{pmatrix}$.

Тогда однородная система запишется как

$$Y' = AY. \tag{3.6}$$

Если все заданные функции в системе (3.5) непрерывны на некотором интервале, то по теореме и существовании и единственности для каждой точки x_0 из данной области существует единственное решение задачи Коши, заданное в этой точке. Отметим, что ввиду линейности уравнения по $y_1, y_2, ..., y_n$, в этой точке можно задавать любые $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$. Они никак не влияют на существование и единственность.

Как и ранее для уравнений высших порядков, для систем введем понятие ***дифференциального оператора***.

Определим дифференциальный оператор как

$$L[Y] = Y' - AY \tag{3.7}$$

Тогда система (3.5) может быть записана как

$$L[Y] = B,$$

а система (3.6):

$$L[Y] = 0.$$

Данная запись систем называется ***операторной формой*** линейных систем (3.5), (3.6).

Пользуясь свойствами умножения матриц и операции дифференцирования, покажем:

1. Для любого числа С:
$$L[CY] = (CY)' - A(CY) = CY' - CAY = C(Y' - AY) = CL[Y].$$
2. $L[Y_1 + Y_2] = (Y_1 + Y_2)' - A(Y_1 + Y_2) = Y_1' + Y_2' - AY_1 - AY_2 =$
$$= Y_1' - AY_1 + Y_2' - AY_2 = L[Y_1] + L[Y_2].$$

Последнее означает, что дифференциальный оператор является линейным.

Изучение систем линейных дифференциальных уравнений будем проводить по той же схеме, что и для линейных уравнений высших порядков. Сначала изучим общую теорию линейных однородных систем. Затем в общем случае покажем, как получить решение неоднородной системы.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$L[Y] = 0, \tag{3.8}$$

все коэффициенты которой будем считать непрерывными функциями на интересующем нас интервале. Тогда, как мы уже сказали, вопрос о существовании и единственности будет закрытым.

Теорема 2. Пусть Y_1 и Y_2 - решения системы (3.8), тогда их сумма $Y_1 + Y_2$ и произведение на любое число CY_1 также являются решениями системы (3.8).

Эта теорема напрямую следует из доказанных выше свойств линейности дифференциального оператора.

Следствие. Если $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ - решения однородной системы (3.8), то при любых $C_1, C_2, ..., C_n$ их линейная комбинация

$$C_1Y_1 + C_2Y_2 + ... + C_nY_n$$

также является решением системы (3.8).

Другими словами, множество решений однородной системы (3.8) является линейным пространством.

Поскольку речь идёт о линейном пространстве, то следует ввести понятия базиса, поэтому сначала, как и ранее, определим понятие линейной зависимости вектор-функций.

Возьмем n вектор-функций

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ ... \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ ... \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, .., \; Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ ... \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Векторы $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ будем называть ***линейно зависимыми*** на (a,b), если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, не все одновременно равные нулю, что

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если же тождественно нулевая комбинация возможна только при всех коэффициентах, равных нулю, то система вектор функций называется линейно независимой.

Другими словами, линейная зависимость вектор функций означает, что система алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + ... + \alpha_n y_{1n} = 0, \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + ... + \alpha_n y_{2n} = 0, \\ ... \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + ... + \alpha_n y_{nn} = 0 \end{cases}$$

при всех x из (a,b) имеет нетривиальное решение. Из курса линейной алгебры известно, что это возможно лишь в том случае, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов системы, равен нулю.

Получившийся определитель

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & ... & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & ... & y_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{n1} & y_{n2} & ... & y_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского (вронскианом) системы вектор-функций $Y_1, Y_2, ..., Y_n$.

Обозначается: $W[Y_1, Y_2, ..., Y_n]$ или $W[Y_1, Y_2, ..., Y_n](x)$.

Используя вышесказанное, мы можем сформулировать теорему:

Теорема 3. Если векторы $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ линейно зависимы на некотором интервале (*a,b*), то их вронскиан тождественно равен нулю на этом интервале.

Отметим, что условие равенства нулю определителя Вронского является **необходимым, но не достаточным**.

Приведем пример, когда функции линейно независимы, а их вронскиан равен нулю.

Пример.

$Y_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (вторая вектор-функция не зависит от x) .

Составим определитель Вронского:

$$W[Y_1, Y_2] = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что он равен нулю при любом x, так как вторая строка нулевая.

При этом, также очевидно, что эти вектор-функции линейно независимы, так как их первые компоненты, как мы уже знаем, являются линейно независимыми функциями.

Теперь предположим, что $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ - не произвольные функции, а решения одной и той же системы линейных однородных дифференциальных уравнений. Тогда справедлива

Теорема 4. Если *n* решений $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ линейной однородной системы (3.8) линейно независимы на (*a,b*), то их определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке интервала (*a,b*).

Доказательство этой теоремы абсолютно аналогично доказательству теоремы 4 из Гл.2. Кратко:

Предположим, что определитель Вронского равен нулю в точке x_0. Тогда столбцы числовой матрицы $Y_1(x_0), Y_2(x_0), ..., Y_n(x_0)$ являются линейно зависимыми, то есть существует линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами, равная нулю.

Составляя такую же линейную комбинацию вектор функций, мы получаем, что эта линейная комбинация обращается в ноль в точке x_0. Но любая линейная комбинация решений системы (а мы рассматриваем $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, как решения системы) также является решением системы. Следовательно, рассматриваемая комбинация является решением однородной системы с нулевым начальным условием. Такой задаче Коши, по теореме о существовании и единственности, может удовлетворять лишь тождественно нулевое решение. А это означает, что указанная линейная комбинация наших вектор-функций тождественно равна нулю, что противоречит их линейной независимости.

Следствие. Пусть $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ - решения линейной однородной системы (3.8) . Тогда их определитель Вронского $W[Y_1, Y_2, ..., Y_n]$ либо тождественно равен нулю, и это означает, что эти решения линейно зависимы, либо не обращается в ноль ни в одной точке, что означает их линейную независимость.

Теорема 5. Система (3.8) имеет ровно n линейно независимых решений.

Другими словами, пространство решений линейной однородной системы, которое, как мы ранее показали, является линейным, имеет размерность n.

Данная теорема аналогична теоремам 6 и 7 Гл.2. Для её доказательства нужно доказать сначала, что существует n линейно независимых решений, а затем, что более, чем n линейно независимых решений существовать не может.

Доказательство первой части строится так же, как в теореме 6 гл.2. Ставится n задач Коши в некоторой точке x_0, таких, что определитель Вронского в этой точке есть единичная матрица. Следовательно, он не равен нулю. И, следовательно, решения этих задач Коши линейно независимы.

Доказательство второй части, как в теореме 7 гл.2. Предположим, что есть некоторое решение системы. Тогда оно является решением некоторой задачи Коши. Рассматривая в точке, в которой задано условие Коши, это решение, мы получаем числовой вектор. Подставляя эту же точку в найденные n линейно независимых решений, мы также получаем n линейно независимых векторов. Но тогда из курса алгебры, полученный вектор является линейной комбинацией наших n векторов.

Это означает, что рассматриваемое решение удовлетворяет тем же начальным данным, что и соответствующая линейная комбинация. А по теореме существования и единственности, это означает, что она является их линейной комбинацией на всём интервале. Что означает, что она линейно зависима с этими n решениями.

Система, состоящая из n линейно независимых решений линейной однородной системы n дифференциальных уравнений, называется ***фундаментальной системой решений (ФСР).*** ФСР является базисом пространства решений.

Если вектор-функции

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \dots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \dots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \dots,\ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \dots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (3.8), то общее решение этой системы:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_i Y_i$$

или в более подробном виде:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11}(x) + C_2 y_{12}(x) + \dots + C_n y_{1n}(x), \\ y_1 = C_1 y_{21}(x) + C_2 y_{22}(x) + \dots + C_n y_{2n}(x), \\ \dots \\ y_1 = C_1 y_{n1}(x) + C_2 y_{n2}(x) + \dots + C_n y_{nn}(x). \end{cases}$$

Итак, задача интегрирования линейной однородной системы сводится к отысканию её фундаментальной системы решений, то есть к отысканию n линейно независимых решений. К сожалению, для произвольных систем не существует общего метода нахождения ФСР.

В следующем пункте мы рассмотрим один класс систем, для которых построен метод нахождения ФСР – линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

Пример.

1. Покажем, что вектор функции $Y_1 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ и $Y_2 = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений системы

   $$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Во-первых, эти две вектор функции являются решениями системы. Действительно, $Y_1 : \begin{cases} (\sin x)' = \cos x, \\ (\cos x)' = -\sin x \end{cases}$ и $Y_2 : \begin{cases} (\cos x)' = -\sin x, \\ (-\sin x)' = -\cos x. \end{cases}$

Во-вторых, $W[Y_1, Y_2] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, следовательно, они линейно независимы, и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений.

Общее решение системы может быть записано в виде:

$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$

или

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \\ y_2 = C_1 \cos x - C_2 \sin x. \end{cases}$$

2. Для системы $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ фундаментальной системой решений может являться $Y_1 = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} e-^x \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$.

Очевидно, что каждая из этих вектор-функций является решением системы.

Кроме того, $W[Y_1, Y_2] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Это означает их линейную независимость. Значит, они составляют ФСР.

Общее решение системы: $\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2e^{-x}, \\ y_2 = C_1e^x - C_2e^{-x}. \end{cases}$

Переходим к решению линейных **неоднородных** систем дифференциальных уравнений. Как и ранее, все функции от x, входящие в систему, будем считать непрерывными в рассматриваемом нами интервале.

Теорема 6. Общее решение неоднородной системы

$$Y' = AY + B,$$

равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и какого-либо частного решения рассматриваемой неоднородной системы.

То есть,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} C_iY_i + Y_ч,$$

где $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ - фундаментальная система решений однородной системы, а $Y_ч$ - частное решение исходной системы.

Таким образом, как и раньше, нам необходимо найти любое частное решение неоднородного уравнения.

Если у нас уже есть общее решение соответствующего однородного уравнения, то мы снова можем воспользоваться универсальным методом – **методом вариации произвольной постоянной (Лагранжа)**.

Пусть у нас уже есть общее решение однородной системы

$$Y_{од} = C_1Y_1 + C_2Y_2 + ... + C_nY_n.$$

Тогда решение неоднородной системы будем искать в виде

$$Y_ч = C_1(x)Y_1 + C_2(x)Y_2 + ... + C_n(x)Y_n.$$

Подставим данное решение в систему

$$L[Y]=B.$$

$$L[C_1(x)Y_1+C_2(x)Y_2+...+C_n(x)Y_n]=$$
$$=\left(C_1(x)Y_1+C_2(x)Y_2+...+C_n(x)Y_n\right)'-$$
$$-A\left(C_1(x)Y_1+C_2(x)Y_2+...+C_n(x)Y_n\right)=$$
$$=C_1'(x)Y_1+C_2'(x)Y_2+...+C_n'(x)Y_n+$$
$$+C_1(x)Y_1'+C_2(x)Y_2'+...+C_n(x)Y_n'-$$
$$-C_1(x)AY_1-C_2(x)AY_2-...-C_n(x)AY_n=$$
$$=C_1'(x)Y_1+C_2'(x)Y_2+...+C_n'(x)Y_n+$$
$$+C_1(x)L[Y_1]+C_2(x)L[Y_2]+...+C_n(x)L[Y_n]=$$
$$=C_1'(x)Y_1+C_2'(x)Y_2+...+C_n'(x)Y_n=B$$

Здесь мы учли, что $Y_1,Y_2,...,Y_n$ - ФСР однородной системы, а значит $L[Y_i]=0$.

Мы получили систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11}(x)+C_2'(x)y_{12}(x)+...+C_n'(x)y_{1n}(x)=b_1(x), \\ C_1'(x)y_{21}(x)+C_2'(x)y_{22}(x)+...+C_n'(x)y_{2n}(x)=b_2(x), \\ ... \\ C_1'(x)y_{n1}(x)+C_2'(x)y_{n2}(x)+...+C_n'(x)y_{nn}(x)=b_n(x) \end{cases}$$

которая является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_1'(x),C_2'(x),...,C_n'(x)$, определитель которой – определитель Вронского от фундаментальной системы решений. Данный определитель отличен от нуля, следовательно, система совместна и определена, а значит, разрешима относительно $C_1'(x),C_2'(x),...,C_n'(x)$, то есть имеет решение

$$C_i'(x)=\phi_i(x) \quad i=1,...,n.$$

Проинтегрировав по *x*, получим

$$C_i(x)=\int\phi_i(x)\mathrm{dx} \quad i=1,...,n$$

Таким образом, мы найдём частное решение неоднородной системы.

Пример.

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-y_1+\dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Как мы видели раньше на примерах, однородная система

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-y_1. \end{cases}$$

имеет общее решение

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \\ y_2 = C_1 \cos x - C_2 \sin x. \end{cases}$$

Будем искать частное решение неоднородной системы в виде

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x, \\ y_2 = C_1(x) \cos x - C_2(x) \sin x. \end{cases}$$

Подставляем в исходную систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_1(x)\cos x + C_2'(x)\cos x - C_2(x)\sin x = C_1(x)\cos x - C_2(x)\sin x, \\ C_1'(x)\cos x - C_1(x)\sin x - C_2'(x)\sin x - C_2(x)\cos x = -C_1(x)\sin x - C_2(x)\cos x + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Получили систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $C_1' = 1, C_2' = -\mathrm{tg}x$.

Отсюда $C_1 = x, C_2 = \ln|\cos x|$.

Таким образом, частное решение системы

$$\begin{cases} y_1 = x\sin x + \ln|\cos x|\cos x, \\ y_2 = x\cos x - \ln|\cos x|\sin x. \end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x\sin x + \ln|\cos x|\cos x, \\ y_2 = C_1 \cos x - C_2 \sin x + x\cos x - \ln|\cos x|\sin x. \end{cases}$$

Теорема 7. (о суперпозиции решений).

Если $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ -частные решения линейных неоднородных систем

$$Y' = AY + B_i \quad i = 1,...,m,$$

то их сумма $Y_1 + Y_2 + ... + Y_m$ является решением неоднородной системы

$$Y' = AY + B_1 + B_2 + ... + B_m.$$

Доказательство, очевидно, следует из линейности дифференциального оператора $L[Y]$.

3.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Перед тем, как перейти к вопросу о построении решения линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами, вспомним некоторые вопросы из линейной алгебры. В частности, нам далее понадобятся вопросы, связанные с поиском собственных значений, собственных и присоединённых векторов матриц.

Определение. Если существует такой ненулевой вектор x из линейного пространства L и такое число λ, что выполняется равенство

$$Ax = \lambda x, \tag{3.9}$$

то x называется ***собственным вектором*** матрицы A, а λ - ***собственным значением (собственным числом)***, соответствующим x.

1. Нетрудно показать, что одному собственному вектору соответствует лишь одно собственное число. (Но не наоборот!).
2. Очевидно также, что если x – собственный вектор, соответствующий числу λ, то для любого числа C вектор Cx – также собственный вектор, соответствующий числу λ.
3. если x_1 и x_2 – собственные векторы, соответствующие одному и тому же числу λ, то для любого числа C_1 *и* C_2 вектор $C_1x_1 + C_2x_2$– также собственный вектор, соответствующий числу λ.
4. Набор собственных векторов, соответствующих различным собственным числам, является линейно независимым.
5. Матрица A не может иметь более, чем n линейно независимых собственных векторов.

Как искать собственные числа (значения) и собственные векторы?

Из равенства (3.9) следует, что

$$(A - \lambda E)x = 0. \tag{3.10}$$

Поскольку вектор x – ненулевой, то последнее равенство означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений с матрицей $A - \lambda E$ имеет нетривиальное решение. Это возможно тогда и только тогда, когда определитель этой матрицы равен нулю.

Отсюда мы получаем уравнение для нахождения собственных значений:

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) – многочлен n-й степени относительно λ. Его называют ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Матрица $A - \lambda E$ называется характеристической матрицей.

Характеристический многочлен имеет не более n корней, а точнее, ровно n корней с учетом кратности.

Для того чтобы найти собственные векторы для найденного собственного числа, необходимо полученное число подставить в систему (3.10) и найти её решения. При этом если собственное число кратное, может оказаться, что система (3.10) имеет более чем одно линейно независимое решение этой системы. В этом случае данному собственному числу соответствует несколько линейно независимых собственных векторов.

Если собственное число простое, то ему соответствует один собственный вектор. Как мы указали выше, различным собственным числам соответствуют линейно независимые собственные векторы. Поэтому в самом простом случае, когда все собственные числа матрицы A простые, мы имеем n различных собственных чисел. Следовательно, мы имеем n линейно независимых собственных векторов.

Кратность собственного числа, как корня характеристического многочлена, называется его ***алгебраической кратностью***, а количество собственных векторов, соответствующих ему, ***геометрической кратностью***.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda)^2.$$

Собственные числа матрицы: $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_{2,3} = 3$ алгебраической кратности 2.

Найдем собственные векторы.

$\lambda_1 = 6$:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы равен двум, следовательно, геометрическая кратность собственного числа равна 1. Единственный (с точностью до постоянной) собственный вектор

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_{2,3} = 3$:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы равен 1, следовательно, геометрическая кратность собственного числа равна 2. Два линейно независимых собственных вектора

$$D_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим ***систему*** линейных дифференциальных уравнений ***с постоянными коэффициентами***

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + b_2(x), \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases} \qquad (3.12)$$

где a_{ij} - заданные вещественные числа, $b_i(x)$ -заданные функции, $y_i(x)$ - искомые функции.

Краткая запись системы (3.12):

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + b_i(x) \quad (i = 1,..,n).$$

Как мы показали ранее, для того, чтобы найти общее решение системы (3.12), достаточно найти общее решение соответствующей однородной системы, а затем с помощью метода Лагранжа найти решение исходной системы.

Поэтому будем решать однородную систему

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \quad (i = 1,..,n).$$

В матричном виде:

$$Y' = AY, \qquad (3.13)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$- числовая матрица.

Будем искать решение системы (3.13) в виде

$$Y = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ ... \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = De^{\lambda x}, \text{ где } D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$\lambda, d_1, d_2, ..., d_n$- неизвестные числа, которые мы найдем после подстановки этого вектора в систему.

Подставляя Y в систему (3.13), получим

$$\lambda e^{\lambda x} D = Ae^{\lambda x} D.$$

Сокращая на $e^{\lambda x}$, получим

$$\lambda D = AD.$$

Это означает, что λ - собственное число матрицы A, а D - соответствующий ему собственный вектор.

Мы свели поиск решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к решению задачи о собственных значениях и собственных векторов матрицы A.

Как мы сказали в начале параграфа, и как мы помним из главы о линейных уравнениях высших порядков, характеристический многочлен может иметь, как простые, так и кратные корни, как вещественные, так и комплексные. Поэтому разберем разные варианты.

1) $\lambda = \lambda_0$ - простое собственное число, то есть имеет алгебраическую кратность 1.

В этом случае, геометрическая кратность его также 1, то есть ему соответствует лишь один собственный вектор.

В том случае, когда все собственные значения матрицы A вещественные и различные, то есть простые, каждому из них соответствует один собственный вектор. Как мы сказали ранее, все эти собственные вектора будут линейно независимы.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - различные вещественные собственные числа, а $D_1, D_2, ..., D_n$ - соответствующие им линейно независимые собственные вектора.

Тогда система вектор-функций

$$Y_1 = D_1 e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} \\ \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix},\ Y_2 = D_2 e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} d_{12}e^{\lambda_2 x} \\ d_{22}e^{\lambda_2 x} \\ \dots \\ d_{n2}e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \dots,\ Y_n = D_n e^{\lambda_n x} = \begin{pmatrix} d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots \\ d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$$

является фундаментальной системой решений системы (3.13).

Действительно, во-первых, каждая из вектор-функций является решением системы, а, во-вторых, определитель Вронского

$$W[Y_1, Y_2, ... Y_n] = \begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{12}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из неравенства нулю вронскиана следует линейная независимость $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Следовательно, они образуют ФСР системы (3.13).

Тогда общее решение системы (3.13):

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + ... + C_nY_n$$

или более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1d_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2d_{12}e^{\lambda_2 x} + ... + C_nd_{1n}e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1d_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2d_{22}e^{\lambda_2 x} + ... + C_nd_{2n}e^{\lambda_n x}, \\ \qquad\qquad ... \\ y_n = C_1d_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2d_{n2}e^{\lambda_2 x} + ... + C_nd_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

Пример.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен:

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$.

Собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$.

Собственный вектор для $\lambda_1 = 5$:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве собственного вектора можем выбрать одно из решений данной системы: $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $Y_1 = e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 2e^{5x} \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = -1$:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве собственного вектора выберем $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Тогда $Y_2 = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$.

Общее решение системы:

$Y_2 = C_1Y_1 + C_2Y_2 = C_1e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

или в подробном виде:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} \\ y_2 = 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

2) $\lambda = \alpha + i\beta$ - комплексное собственное число матрицы A.

В этом случае, как мы знаем, $\lambda = \alpha - i\beta$ также является собственным числом матрицы A, так как корнями вещественного многочлена могут быть только пары комплексно-сопряженных чисел.

Так как λ - комплексное число, то вообще говоря, матрица $A - \lambda E$ является комплексной матрицей. Следовательно, решением системы

$$(A - \lambda E)D = 0$$

является комплексный собственный вектор D.

Тогда

$$Z_1 = De^{\lambda x} = De^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

- решение системы (3.13), которое является комплексным вектором функцией.

Следовательно,

$$L[Z_1] = L[\operatorname{Re} Z_1 + i\operatorname{Im} Z_1] = L[\operatorname{Re} Z_1] + iL[\operatorname{Im} Z_1] = 0\,.$$

Комплексная вектор-функция равна нулю лишь в том случае, когда её вещественная и мнимая части равны нулю. Следовательно

$$L[\operatorname{Re} Z_1] = 0 \text{ и } L[\operatorname{Im} Z_1] = 0\,.$$

Это означает, что вещественная часть и мнимая часть функции Z_1 являются решениями системы (3.13). Второму комплексному числу соответствуют те же самые решения системы. Эти вектор-функции линейно независимы.

Отсюда следует, что паре комплексно-сопряженных функций соответствует две вещественные вектор-функции, являющиеся частью фундаментальной системы решений.

Пример.

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_3' = 3y_1 + y_3. \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

$\lambda_1 = 1$:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

или $\begin{cases} -x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 3x_1 = 0 \end{cases}$.

Собственный вектор $D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Решение, соответствующее $\lambda_1 = 1$:

$$Y_1 = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

$\lambda_{2,3} = 1 + 2i$:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

или $\begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2ix_2 = 0 \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0 \end{cases}$.

Собственный вектор $D = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Комплексное решение, соответствующее $\lambda_{2,3} = 1 + 2i$:

$$Z = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^x (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^x \begin{pmatrix} 2i(\cos 2x + i \sin 2x) \\ (\cos 2x + i \sin 2x) \\ 3(\cos 2x + i \sin 2x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

Два вещественных решения, соответствующие $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$:

$$Y_2 = \mathrm{Re}(Z) = e^x \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix}, \ Y_3 = \mathrm{Im}(Z) = e^x \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы:
$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3$
или

$$\begin{cases} y_1 = -2C_2e^x \sin 2x + 2C_3e^x \cos 2x, \\ y_2 = C_1e^x + C_2e^x \cos 2x + C_3e^x \sin 2x, \\ y_3 = -C_1e^x + 3C_2e^x \cos 2x + 3C_3e^x \sin 2x. \end{cases}$$

3) λ - характеристический корень алгебраической кратности *l*.
Здесь возможны два случая.

- Его геометрическая кратность также равна *l*, то есть ранг характеристической матрицы равен *r*, и $n - r = l$. В этом случае система
$$(A - \lambda E)D = 0$$
имеет *l* линейно независимых решений. Это означает, что этому собственному числу соответствует *l* собственных векторов $D_1, D_2, ..., D_l$. Тогда решения системы дифференциальных уравнений (3.13)
$$Y_1 = e^{\lambda x}D_1,\ Y_2 = e^{\lambda x}D_2,\ \ldots,\ Y_l = e^{\lambda x}D_l$$
линейно независимы и являются частью фундаментальной системы решений, соответствующей λ кратности *l*.
- $n - r < l$. То есть его геометрическая кратность меньше, чем *l,* что означает, что данному собственному значению соответствует меньше, чем *l* собственных векторов.
В этом случае мы не получим из собственных векторов достаточного количества решений для заполнения ФСР.

Воспользуемся теоремой из курса линейной алгебры.

Теорема. Пусть λ – собственное значение матрицы *A* кратности *l.* Тогда существует *l* линейно независимых векторов-столбцов
$$D_i^{j_i}\ (i = 1,...k;\ j_i = 1,...q_i)\ ,$$
соответствующих λ и удовлетворяющих соотношениям:
$$AD_i^1 = \lambda D_i^1,$$
$$AD_i^2 = \lambda D_i^2 + D_i^1,$$
$$\ldots$$
$$AD_i^{q_i} = \lambda D_i^{q_i} + D_i^{q_i - 1},$$
$$(q_1 + ... + q_k = l).$$

Здесь $D_i^1 (i = 1,...k)$ - собственные векторы, а остальные называют ***присоединенными***.

Суть данной теоремы в том, что если кратному собственному значению «не хватает» собственных векторов, то существуют вышеуказанные цепочки векторов, основаниями которых ($AD_i^1 = \lambda D_i^1$) служат собственные векторы, к которым строятся присоединённые, и их общее количество равно алгебраической кратности собственного значения. Отметим, что не к каждому собственному вектору можно построить присоединённые. Теорема лишь гласит, что это возможно, то есть среди собственных векторов есть такие, к которым можно построить присоединённые.

Если мы построили такие цепочки, то верна

Теорема 8. Собственному значению λ матрицы A кратности l соответствуют l решений вида:

$$Y_i^1 = D_i^1 e^{\lambda x},$$
$$Y_i^2 = (D_i^2 + xD_i^1)e^{\lambda x},$$
$$\ldots$$
$$Y_i^{q_i} = (D_i^{q_i} + xD_i^{q_i-1} + \frac{x^2}{2}D_i^{q_i-2} + \ldots + \frac{x^{q_i-1}}{(q_i-1)!}D_i^1)e^{\lambda x},$$
$$i = 1,\ldots,k.$$

Примеры.

1. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен:

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

Собственные значения матрицы А: $\lambda_{1,2} = 2$ кратности 2.

Собственный вектор для $\lambda_{1,2} = 2$:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве собственного вектора можем выбрать одно из решений данной системы: $D_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $Y_1 = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$

Больше собственных векторов нет. Поэтому построим к нему присоединённый.

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве присоединённого вектора выберем $D_1^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Тогда $Y_2 = e^{2x}(D_1^1 + xD_1) = e^{2x}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2x}\begin{pmatrix} 2+x \\ -1-x \end{pmatrix}$.

Общее решение системы:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 = C_1e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix} 2+x \\ -1-x \end{pmatrix}$$

или в подробном виде:

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}(-C_1 + C_2(2+x)), \\ y_2 = e^{2x}(C_1 - C_2(1+x)). \end{cases}$$

2. $\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

Собственное значение матрицы *A*: $\lambda_{1,2,3} = 1$ кратности 3.

Собственный вектор будем искать из системы:

$$(A - \lambda E)D = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы r=2. Следовательно, существует только один линейно независимый собственный вектор. Для построения фундаментальной системы нам понадобится к найденному собственному вектору строить два присоединённых.

В качестве собственного вектора можем выбрать одно из решений данной системы $\begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

Данной системе удовлетворяет собственный вектор $D_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Соответственно, $Y_1 = e^x D_1 = \begin{pmatrix} 3e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$.

Больше собственных векторов нет. Поэтому построим к нему два присоединённых.

$(A - \lambda E)D = D_1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением данной системы является вектор $D_1^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$- первый присоединенный.

Тогда $Y_2 = e^x (D_1^1 + xD_1) = e^x \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^x \begin{pmatrix} 3+3x \\ x-1 \\ x \end{pmatrix}$.

Второй присоединённый вектор находим из системы

$(A - \lambda E)D = D_1^1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение данной системы - $D_1^2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$-второй присоединённый.

Тогда

$$Y_3 = e^x (D_1^2 + xD_1^1 + \frac{x^2}{2} D_1) = e^x \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + \frac{3x^2}{2} \\ -1 - x + \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 = C_1e^x\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + C_2e^x\begin{pmatrix}3+3x\\x-1\\x\end{pmatrix} + C_3e^x\begin{pmatrix}4+3x+\dfrac{3x^2}{2}\\-1-x+\dfrac{x^2}{2}\\\dfrac{x^2}{2}\end{pmatrix}$$

или в подробном виде:

$$\begin{cases} y_1 = e^x\left(3C_1 + 3C_2(1+x) + C_3(4+3x+\dfrac{3x^2}{2}\right), \\ y_2 = e^x\left(C_1 + C_2(-1+x) + C_3(-1-x+\dfrac{x^2}{2}\right), \\ y_3 = e^x\left(C_1 + C_2x + C_3\dfrac{x^2}{2}\right). \end{cases}$$

3. $\begin{cases} y_1' = 2y_1, \\ y_2' = y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + 3y_3. \end{cases}$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Характеристический многочлен:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\0 & 1-\lambda & -1\\0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = 0.$$

Собственное значение матрицы A: $\lambda_{1,2,3} = 2$ кратности 3.

Собственный вектор будем искать из системы:

$$(A-\lambda E)D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы r=1. Следовательно, существует два линейно независимых собственных вектора.

Данной системе удовлетворяет, например два линейно-независимых собственных вектора.

Например, $D_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ и $D_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Заметим, что ни к какому из них нельзя построить присоединённый вектор, так как системы

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \text{ и}$$

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

несовместны.

Но все собственные векторы являются их линейной комбинацией.

Следовательно, будем искать присоединённый вектор из системы

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Первый компонент собственного вектора должен быть равен нулю для того, чтобы система была совместной. Поэтому возьмем $\alpha=1$ и $\beta=-1$.

Тогда получим собственный вектор, который и возьмем в качестве второго.

$$D_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

Соответственно, $Y_1=e^{2x}D_1=\begin{pmatrix}e^{2x}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $Y_2=e^{2x}D_2=\begin{pmatrix}0\\ e^{2x}\\ -e^{2x}\end{pmatrix}$.

Построим к вектору D_2 присоединённый вектор.

$$(A-\lambda E)D=D_2.$$

$$(A-\lambda E)D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Решением данной системы является вектор $D_2^1=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

Тогда $Y_3=e^{2x}(D_2^1+xD_2)=e^{2x}\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right)=e^{2x}\begin{pmatrix}0\\ x\\ -1-x\end{pmatrix}$.

Общее решение системы:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 = C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3e^{2x}\begin{pmatrix}0\\x\\-1-x\end{pmatrix}.$$

или в подробном виде:

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x}, \\ y_2 = C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}, \\ y_3 = -C_2e^{2x} - C_3(1+x)e^{2x}. \end{cases}$$

Упражнения.

Найти общее решение системы и решение задачи Коши там, где это нужно.

3.15. $\begin{cases} y' = y + z, & y(0) = 0, \\ z' = -2y + 4z, & z(0) = -1. \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} y' = 3y - z, & y(0) = 1, \\ z' = 10y - 4z, & z(0) = 5. \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + 4z. \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = -6y - 3z. \end{cases}$

3.19 $\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y, \\ \dot{y} = -4x - 4y. \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -10x - y. \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = -x + 5y - z, \\ \dot{z} = x - y + 3z. \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = x + y - z. \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$

3.26. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2, & y_1(0) = 0, \\ y_2' = 5y_2 + y_3, & y_2(0) = 0, \\ y_3' = 5y_3, & y_3(0) = 0, \\ y_4' = 2y_4, & y_4(0) = 0, \\ y_5' = y_5 + y_6, & y_5(0) = 0, \\ y_6' = y_5 + 3y_6, & y_6(0) = 0. \end{cases}$$

Найти общее решение линейных неоднородных систем, воспользовавшись методом вариации произвольной постоянной.

3.27. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + e^t, \\ \dot{y} = x + 3y + e^{2t}. \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} \dot{x} = y + 1, \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\sin t}. \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} \dot{x} - y + z = 0, \\ \dot{y} - x - y = t, \\ \dot{z} - x - z = t. \end{cases}$

4. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений

Вопросы, рассматриваемые в этой главе, являются чрезвычайно важными в теории дифференциальных уравнений, как имеющие огромное значение в приложениях в механике, электронике, технике, экономике и многих-многих других отраслях знаний. Кроме того, понятия устойчивости решений дифференциальных уравнений тесно связаны с понятиями устойчивости решений разностных уравнений, которые в свою очередь, очень близки к понятиям вычислительной устойчивости и сходимости итерационных процессов.

Кроме того, вычислительная математика изучает методы численного решения различных задач, которые, как правило, невозможно решить теоретически. Но до того как приступать к численному решению конкретной задачи, обязательно необходимо изучить вопрос о корректности поставленной задачи. Математическая задача считается корректной (корректно поставленной) если её решение существует, единственно и устойчиво относительно начальных данных. Вопросы существования и единственности нами затрагивались неоднократно. В этой же главе мы изучим понятия устойчивости.

Прежде, чем перейти к изучению, хотелось бы сделать небольшое историческое отступление. Во введении уже упоминалось, что в конце XIX- начале XX был сделан огромный прорыв в теории дифференциальных уравнений в области устойчивости. Во всем мире этот прорыв связывают с именем величайшего математика, считающегося последним из универсалов в математике и одним из самых авторитетных в мире – Анри Пуанкаре. Его достижения в математике невозможно переоценить. Именно он считается основоположником качественной теории дифференциальных уравнений, основой которой является теория устойчивости. Но как оказалось, во многом здесь его опередил почти на 20 лет наш великий русский математик Александр Михайлович Ляпунов. Его труды просто были недоступны в виду того, что изданы были на русском языке, и в то время просто не существовало быстрых способов передачи и обмена информацией. Именно сотрудничество Пуанкаре с Ляпуновым позднее привело к созданию теории, послужившей началом огромного скачка в развитии теории динамических систем. Отметим также, что именно работы Пуанкаре и Ляпунова об устойчивых формах тел вращающейся жидкости и более поздние работы также российского математика Софьи Ковалевской об устойчивости тел вращения позволили сделать вывод о том, что такие далекие от нас объекты, как кольца Сатурна, которые и сейчас невозможно изучать более близко (ближе, чем на 18000 км), состоят из мелких разрозненных частиц и объектов – пыли и льда. И доказано это было благодаря теории устойчивости.

Ещё один важный пример применения методов теории устойчивости – решение задачи об автоматическом регуляторе Уатта, ставшее основополагающим в теории автоматического регулирования.

Регулятор Уатта – устройство, устанавливающееся на паровых машинах для того, чтобы машина работала равномерно, выдавая одинаковую скорость вращения. Суть регулятора в том, что он управляет заслонкой, открывающей подачу пара (рис.4). Если скорость вращения паровой машины больше, чем нужно, то шары на регуляторе под действием центробежной силы поднимаются и заслонка прикрывается. Если же скорость мала, то сила тяжести превосходит центробежную силу и шары опускаются, таким образом, открывая заслонку, чтобы увеличить подачу пара.

Центробежный регулятор с конца XVIIIв до середины XIX века хорошо справлялся с поставленной задачей. Но затем из-за увеличения мощности машин стали ставить более тяжелые шары. Увеличение рабочей скорости машин сделало необходимым уменьшение момента инерции маховика. Совершенствование обработки поверхностей деталей позволило достичь меньшего трения в движении вращающейся муфты по стержню. Но в итоге все эти действия привели к тому, что регулятор перестал работать нормально, приводя к колебаниям и иногда к разрушению паровых машин.

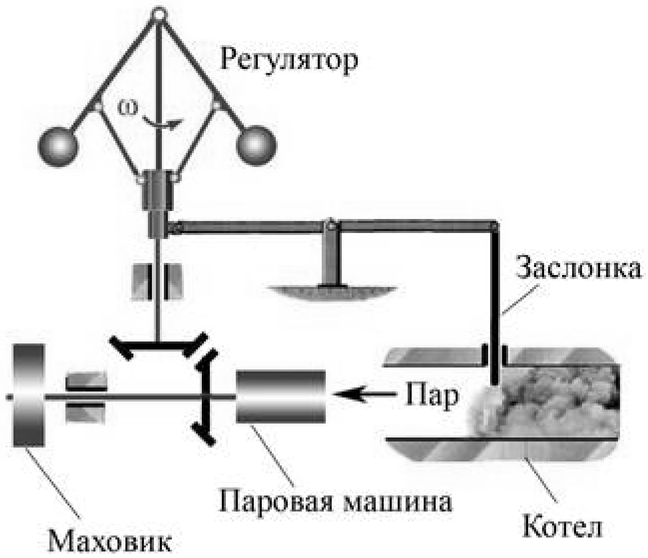

Рис.4. Схема центробежного регулятора Уатта

Лишь теоретические изыскания русского инженера Вышнеградского, построившего строгую математическую модель и выполнившего строгое исследование состояния равновесия на устойчивость, позволили сделать вывод о том, что именно все вышеуказанные действия, кажущиеся правильными с точки зрения механиков, стали причиной неустойчивой работы паровых машин. При увеличивающейся мощности машин требовались обратные действия: уменьшение массы шаров, увеличение момента инерции и, особенно, увеличение трения.

Приведенные примеры показывают важность рассматриваемых в данной главе вопросов с точки зрения приложений в естествознании.

4.1. Определения устойчивости решений дифференциальных уравнений. Устойчивость по первому приближению

Перед тем, как давать строгие математические определения, в качестве простой иллюстрации рассмотрим следующий наглядный пример. Пусть на некоторой гладкой поверхности лежит шарик (рис.5).

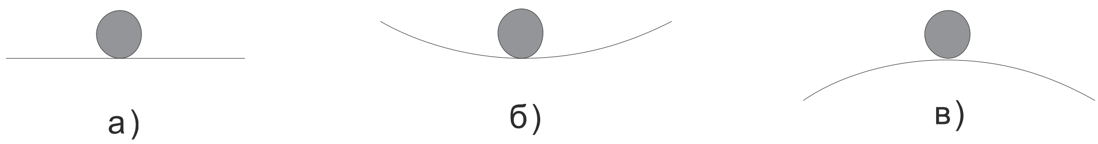

Рис.5. Иллюстрации устойчивых и неустойчивых состояний равновесия

В первом случае (а) если мы немного подвинем шарик в сторону, он так и останется лежать на том расстоянии, на которое мы его подвинем. Во втором случае (б), если мы подвинем шарик, он обязательно (пусть и за бесконечное время) вернется в самую нижнюю точку. В случае в) на какое бы маленькое расстояние мы не сдвинули шарик, он обязательно уйдет на достаточно большое расстояние от положения равновесия.

Эти три типа расположения шарика соответствуют понятиям устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия.

Рассмотрим систему ДУ с заданным условием Коши:

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, ..y_n), \tag{4.1}$$

$$y_i(t_0) = y_{i0} \qquad i = \overline{1,n}. \tag{4.2}$$

Определение 1. Решение $\phi_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ системы (1) с начальными данными (2) называется ***устойчивым по Ляпунову***, если

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall y_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$-решения той же системы (1) такого, что

$$\left|\mathrm{y}_i(t_0) - \phi_i(t_0)\right| < \delta(\varepsilon) \ (i = \overline{1,n}) \quad \Rightarrow \quad \left|\mathrm{y}_i(t) - \phi_i(t)\right| < \varepsilon \ (i = \overline{1,n}) \ \ \forall t \ge t_0.$$

То есть, другими словами, небольшое отклонение начальных данных приводит к небольшим отклонениям решения при любом *t*.

Определение 2. Если $\exists \varepsilon > 0$, такой что при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ системы (1) такого, что

$\left|\mathrm{y}_i(t_0) - \phi_i(t_0)\right| < \delta$ $(i = \overline{1,n})$ $\Rightarrow \exists t \ge t_0$ и $\exists i$ $\left|\mathrm{y}_i(t) - \phi_i(t)\right| > \varepsilon$, то решение

$\phi_i(t)$ $(i = \overline{1,n})$ называется ***неустойчивым***.

Другими словами, каково бы ни было малое отклонение начальных данных, решение задачи Коши с отклоненными начальными данными уходит за пределы некоторой окрестности исходного решения.

Определение 3. Если решение $\phi_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ системы (1) не только устойчиво по Ляпунову, но и удовлетворяет условию $|y_i(t)-\phi_i(t)|\to 0$ $(i=\overline{1,n})$ при $t\to\infty$, то решение $\phi_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ называется ***асимптотически устойчивым***.

Асимптотически устойчивое решение не только устойчиво, но и обладает тем свойством, что все решения, начинающиеся в окрестности заданного, с течением времени стремятся к нему.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dt}=ay,\quad y(t_0)=y_0.$$

Найдем решение поставленной задачи Коши.

Общее решение уравнения:

$$y=Ce^{at}.$$

Подставляя начальные условия, получим

$$y_0=Ce^{at_0}\Rightarrow C=\frac{y_0}{e^{at_0}}\Rightarrow y(t)=y_0e^{a(t-t_0)}.$$

Пусть $\overline{y}(t)$ - решение того же уравнения с начальными данными $\overline{y}(t_0)=\overline{y}_0$.

Оценим $|y(t)-\overline{y}(t)|=\left|y_0e^{a(t-t_0)}-\overline{y}_0e^{a(t-t_0)}\right|=e^{a(t-t_0)}|y_0-\overline{y}_0|$.

Рассмотрим три случая:

1) $a>0$

$|y(t)-\overline{y}(t)|=e^{a(t-t_0)}|y_0-\overline{y}_0|\to\infty$ при $t\to\infty$.

Поскольку модуль разности между решениями даже при малых отклонениях начальных данных не остается в пределах малого числа при $t\to\infty$, более того, он стремится к бесконечности, следовательно, решение является неустойчивым.

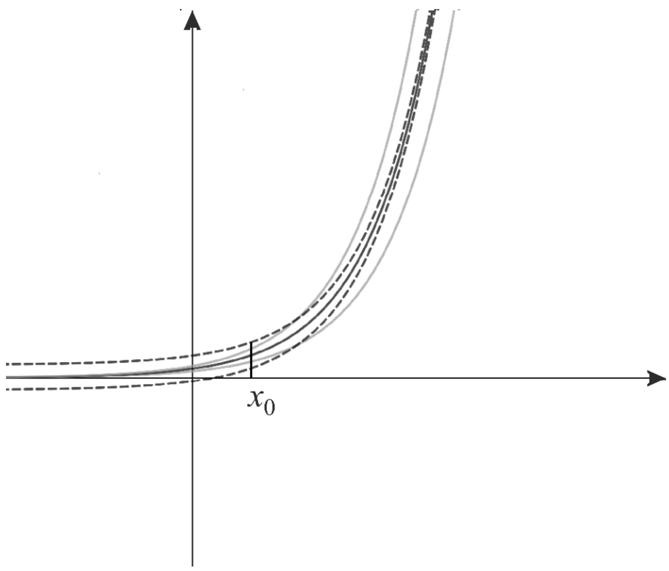

Рис.6. Неустойчивое решение

На рисунке 6. Показаны решения данного уравнения. Черным –исходное решение, серым – решения с отклоненными начальными данными (называемые ***возмущенными*** решениями). Пунктиром - так называемая ***епсилон-трубка*** исходного решения, или ***епсилон-окрестность***, то есть окрестность исходного решения радиуса ε .

Данный рисунок иллюстрирует то, что возмущенные решения выходят за пределы заданной ε-окрестности исходного решения. Это означает неустойчивость.

2) $a = 0$

$|y(t) - \bar{y}(t)| = |y_0 - \bar{y}_0|$, следовательно $\delta = \varepsilon$.

В этом случае все решения уравнения – тождественные константы. Поэтому, отклонение начальных данных приводит к тому же отклонению решения в целом. В этом случае исходное решение является устойчивым, но не асимптотически.

3) $a < 0$

$|y(t) - \bar{y}(t)| = e^{a(t-t_0)}|y_0 - \bar{y}_0| \to 0$ при $t \to \infty$.

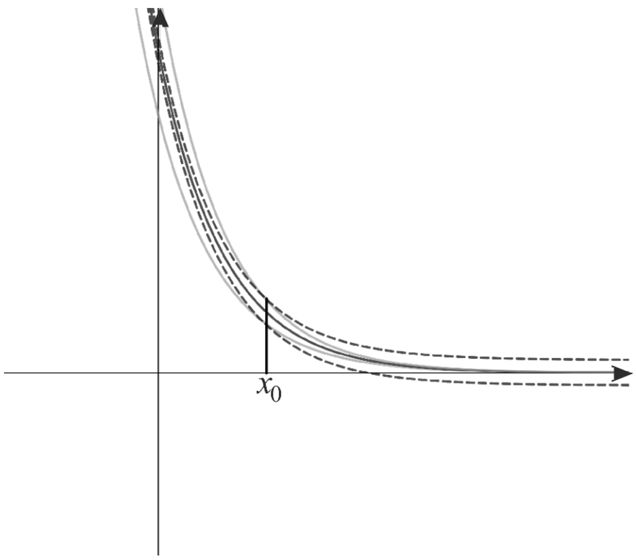

Рис.7. Устойчивое решение

Здесь любое возмущенное решение остается в пределах начальной окрестности исходного решения и, кроме того, с течением времени расстояние между ними стремится к нулю. Это означает асимптотическую устойчивость.

Рисунок 7 служит иллюстрацией для этого случая. Все возмущенные решения находятся в пределах заданной ε-окрестности и стремятся к исходному решению.

Пример 2.

Исследовать на устойчивость решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x.$$

Уравнение с разделяющимися переменными.

Его общее решение: $\operatorname{ctg} x = C - t$. Кроме того, при $x = \pi k$ правая часть уравнения обращается в ноль. Следовательно $x \equiv \pi k$ - решения уравнения.

Построим решения (рис.8).

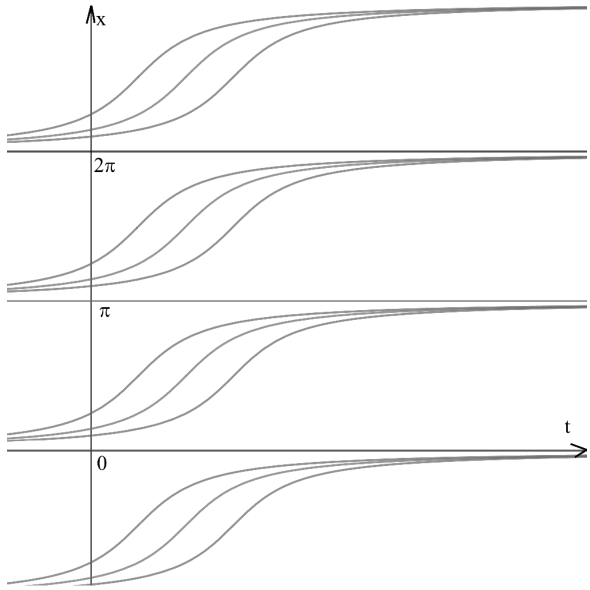

Рис.8. Интегральные кривые уравнения $\dfrac{dx}{dt} = \sin^2 x$.

Все решения, кроме $x \equiv \pi k$, являются устойчивыми, так как малое отклонение в начальных данных не приводит к большим отклонениям в решении. Более того, они асимптотически устойчивы, так как стремятся к $x \equiv \pi k$. Но при этом решения $x \equiv \pi k$ не являются устойчивыми. Действительно, малейшее отклонение вверх приводит к уходу возмущенного решения на расстояние π.

Пример 3.

Исследовать на устойчивость, исходя из определений, нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = -y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x.$$

Данная система – линейная. Её общее решение легко находится:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$y = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

Начальным условиям $t = t_0, x = x_0, y = y_0$ удовлетворяет решение:

$$x = x_0 \cos t + y_0 \sin t,$$

$$y = x_0 \sin t - y_0 \cos t.$$

Воспользуемся неравенством треугольника

$$|x_0 \cos t + y_0 \sin t| \le |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \le |x_0| + |y_0|.$$

$$|x_0 \sin t - y_0 \cos t| \le |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \le |x_0| + |y_0|.$$

Таким образом, если мы выберем произвольное ε, то, выбирая $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, мы получим

$$|x_0| < \varepsilon, |y_0| < \varepsilon \Rightarrow |x_0 \cos t + y_0 \sin t| < \delta, |x_0 \sin t - y_0 \cos t| < \delta \quad \forall t \ge t_0.$$

Это говорит об устойчивости по Ляпунову нулевого решения. Но асимптотической устойчивости в данном случае нет.

Построим траектории решений на плоскости OXY (рис.9).

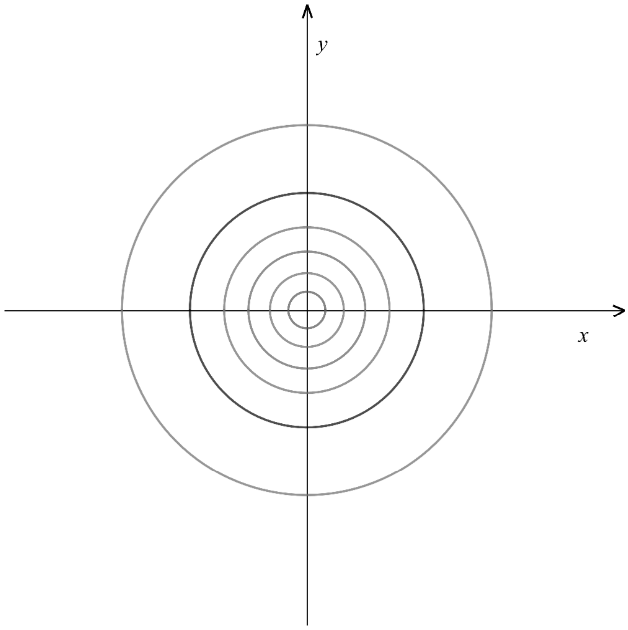

Рис.9. Траектории системы

Траектории движения, соответствующие решениям системы – концентрические окружности. Малое отклонение начальных данных от нуля даёт окружность с радиусом, равным отклонению. И решение не стремится к началу координат.

Также, можно сказать, что и все остальные решения являются устойчивыми по Ляпунову, так как возмущение решения не приводит лишь к уходу на траекторию, лежащую на расстоянии, равном начальному отклонению.

Определение 4. Если в некоторой точке $y_1 = \bar{y}_1, \ldots y_n = \bar{y}_n$ n-мерного пространства $y_1, \ldots y_n$ все функции $\Phi_i(t, y_1, .. y_n)$ обращаются в ноль, то эта точка называется ***точкой покоя, стационарной точкой или состоянием равновесия*** системы (4.1). Точке покоя соответствует вектор функция

$$\bar{Y} \equiv \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \ldots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix},$$

которая является решением системы (4.1).

Если $\forall i=\overline{1,n}$ $\Phi_i(t,0,0,...0)=0$ при всех t, то начало координат – точка покоя.

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}=e^t y, \\ \dot{y}=-x. \end{cases}$$

Начало координат $(0,0)$ - точка покоя системы.

$\begin{cases} x\equiv 0, \\ y\equiv 0 \end{cases}$ - решение системы.

Исследование на устойчивость некоторого $y_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$ решения системы (4.1) может быть сведено к исследованию на устойчивость точки покоя, расположенной в начале координат.

Пусть

$$y_i(t)=\bar{y}_i(\mathrm{t}) \quad (i=\overline{1,n}) \tag{4.3}$$

- решение системы (1).

Сделаем замену переменных

$$x_i(t)=y_i(t)-\bar{y}_i(\mathrm{t}) \quad (i=\overline{1,n}). \tag{4.4}$$

Подставим (4) в систему (1):

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dy_i}{dt}-\frac{d\bar{y}_i}{dt}=\Phi_i(t,x_1+\bar{y}_1,..x_n+\bar{y}_n)-\frac{d\bar{y}_i}{dt}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Решению (4.3) системы (4.1) соответствует нулевое решение системы (4.5).

Таким образом, мы можем заменить исследование на устойчивость произвольного решения некоторой системы на исследование нулевого решения другой системы.

Поэтому, в дальнейшем вся теория будет дана для точки покоя $x_i\equiv 0,\ \ i=\overline{1,n}$.

Точка покоя $x_i\equiv 0,\ \ i=\overline{1,n}$ называется ***устойчивой по Ляпунову***, если

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x_i(t)$ $(i=\overline{1,n})$-решения той же системы (4.1) такого, что

$$|\mathrm{x_i}(t_0)|<\delta(\varepsilon)\ \ (i=\overline{1,n}),$$

выполняется

$$|\mathrm{x_i}(t)|<\varepsilon\ \ (i=\overline{1,n})\quad \forall t\geq t_0.$$

Устойчивая по Ляпунову точка покоя $x_i\equiv 0,\ \ i=\overline{1,n}$ называется ***асимптотически устойчивой***, если $\forall i$ $|\mathrm{x_i}(t)|\to 0$ при $t\to\infty$ $(i=\overline{1,n})$.

Точка покоя $x_i \equiv 0,\ \ i = \overline{1,n}$ называется ***неустойчивой***, если

$\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0\ \ \exists x_i(t)\ \ (i = \overline{1,n})$ - решение той же системы (4.1) такое, что

$$|x_i(t_0)| < \delta\ \ (i = \overline{1,n})$$

и

$$\exists t > t_0 \text{ и } \exists i,\ |x_i(t)| > \varepsilon .$$

Будем далее считать, что $x_i \equiv 0,\ \ i = \overline{1,n}$ является точкой покоя исследуемой нами системы.

При исследовании на устойчивость точки покоя $x_i \equiv 0,\ \ i = \overline{1,n}$ нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots x_n), \tag{4.6}$$

где f_i - дифференцируемые в окрестности начала координат функции, часто применяется следующий метод: пользуясь дифференцируемостью функций $f_i(t, x_1, \ldots x_n)$, систему (6) представляют в виде:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, \ldots x_n),$$

где R_i - функции порядка выше первого относительно переменных $x_1, \ldots x_n$.

Затем переходят к линейной системе

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_i . \tag{4.7}$$

Система (7) называется ***системой первого приближения***, а выделение линейной части функций – ***линеаризацией*** системы.

Определение 5. Система

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, \ldots x_n), \quad (i = \overline{1,n})$$

то есть система с правой частью, не содержащей переменной *t*, называется ***автономной***.

Автономные системы дифференциальных уравнений обладают следующим свойством: если $X = X(t)$ - решение автономной системы дифференциальных уравнений, то эта функция остаётся решением и при сдвиге аргумента. То есть $X = X(t + \tau)$ также является решением системы.

Автономная система моделирует автономные процессы, то есть процессы, не подверженные внешним влияниям, и стационарные процессы, то есть процессы, установившиеся во времени. Эти процессы определяются лишь начальными (или текущими) значениями переменных $x_1, \ldots, x_n$ и никак не зависят от времени, в котором эти значения принимаются.

Теорема 1. Если система уравнений (4.6) является автономной в первом приближении, то есть после линеаризации получается система:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad \text{где } X = (x_1, \ldots x_n),$$

и все собственные значения числовой матрицы A имеют отрицательные действительные части, то тривиальные решения $X \equiv 0$ как системы (4.7), так и системы (4.6) асимптотически устойчивы.

Теорема 2. Если система уравнений (4.6) является автономной в первом приближении, и хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет положительную действительную часть, то тривиальные решения $X \equiv 0$ системы (4.7) и системы (4.6) неустойчивы.

Замечание. Если все собственные значения матрицы A имеют неположительную действительную часть и хотя бы один из корней лежит на мнимой оси, то исследование системы по первому приближению результата не дает. Нужно применять другие методы, которые, к сожалению, выходят за рамки программы этого курса.

Здесь причина несостоятельности метода исследования по первому приближению в том, что при исследовании по первому приближению мы рассматриваем достаточно малую окрестность точки покоя, то есть нуля, а в условиях теорем 1 и 2 вблизи нуля решающую роль играет именно линейная часть функций, образующих уравнения системы. Квадратичная часть и более высокие степени вблизи нуля малы по сравнению с линейной. Если же мы имеем систему, удовлетворяющую условию, указанному в замечании, то в этом случае среди всех решений линеаризованной системы существует такое, что оно чувствительно к изменению квадратичной части или более высоким степеням.

Это можно проиллюстрировать на простом алгебраическом примере.

Предположим, у нас есть функция $y = ax + bx^3$.

Если $a > 0$, то в точке $x_0 = 0$ функция является возрастающей, каким бы ни был параметр b.

Также, если $a < 0$, то в точке $x_0 = 0$ функция является убывающей при любом параметре b.

Но если $a = 0$, то мы ничего не можем сказать о возрастании или убывании функции в точке $x_0 = 0$, если мы не знаем, каков параметр b. Именно от него в данном случае зависит характер функции $y = ax + bx^3$.

Такова же ситуация в условиях замечания. Среди решений системы по первому приближению есть такое, у которого вещественная часть собственного значения равна нулю, а это означает, что, несмотря на то, что для линейной системы оно может быть устойчивым, для исходной системы оно может оказаться неустойчивым.

Примеры.

1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + x^2 + y^2 \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - y^2. \end{cases}$$

Оставим только линейные части от x и y. Линеаризованная система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Матрица системы первого приближения: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$.

Собственные значения матрицы A: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Их вещественные части больше нуля. Следовательно, точка покоя исходной нелинейной системы (впрочем, как и линеаризации) является неустойчивой.

Заметим, что характеристические корни в данном примере искать не обязательно. Для квадратного трёхчлена верна теорема Виета, как для вещественных, так и для комплексных корней: третий коэффициент квадратного уравнения есть произведение его корней, а второй коэффициент есть сумма корней, умноженная на -1.

Следовательно, если третий коэффициент квадратного уравнения больше нуля, то либо корни вещественные и одного знака, либо корни комплексные. В обоих случаях, если второй коэффициент меньше нуля, то вещественные части корней будут положительны.

Отметим также на будущее, что если третий коэффициент меньше нуля, то корни вещественные и разного знака. А это означает, что в этом случае нулевое решение также неустойчиво.

Таким образом, для того, чтобы оба корня квадратного уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты уравнения были строго меньше нуля.

2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8\sin y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}.$$

Поскольку помимо степенных функций правые части системы содержат другие нелинейные элементарные функции, для линеаризации необходимо выделить их линейные части с помощью разложения в ряд Маклорена функций $\sin y$, e^x и $\cos y$.

В результате получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8(y - \dfrac{y^3}{3!} + ...), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 - (1 + x + \dfrac{x^2}{2} + ...) - 3y - (1 - \dfrac{x^2}{2} + ...). \end{cases}.$$

Система первого приближения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$$

Матрица системы первого приближения: $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$.

Как мы уже выяснили, корни искать не обязательно. Поскольку все коэффициенты уравнения положительны, оба корня лежат слева от мнимой оси. Следовательно, точка покоя $x = 0, y = 0$ системы (как линейной, так и исходной нелинейной) асимптотически устойчива.

3. Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y^3. \end{cases}$$

Система первого приближения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Матрица системы первого приближения: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$.

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = \pm i$.

Вещественные части корней равны нулю или, другими словами, корни лежат на мнимой оси. Это именно тот случай, когда исследование устойчивости по первому приближению невозможно.

Для таких случаев построены более сложные методы исследования, которые выходят за рамки данного курса. Но именно для этой системы в качестве дополнительной информации покажем метод исследования.

Рассмотрим функцию $V(x, y) = x^2 + y^2$. Данная функция описывает квадрат расстояния от точки (x, y) до начала координат. Посмотрим, как меняется эта функция, если рассматривать в качестве (x, y) решения нашей системы $(x(t), y(t))$. Для этого нам необходимо вычислить полную производную функции $V(x(t), y(t))$ по *t:*

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

При этом помним, что функции $(x(t), y(t))$ -решения нашей системы.

$$\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3)$$

Раскрывая скобки, получим, что

$$\frac{dV}{dt} = -2x^4 - 2y^4$$

Получили, что $\frac{dV}{dt} < 0$, а это означает, что каковы бы ни были *x* и *y,* с течением времени расстояние от точки $(x(t), y(t))$ до начала координат убывает. Это означает устойчивость (и даже асимптотическую) начала координат. Указанная функция $V(x, y)$ носит название *функции Ляпунова*, а метод исследования называется *вторым методом Ляпунова*.

В примерах мы упомянули о том, что для того, чтобы выяснить, лежат ли характеристические корни слева от мнимой оси, совсем не обязательно искать корни квадратного уравнения. По теореме Виета достаточно проверить, являются ли его коэффициенты положительными.

Оказывается, такие же условия можно получить для многочлена любой степени. Тем более, что задача нахождения корней многочлена степени выше второй является весьма трудоемкой. А для уравнений степени пять и выше в общем случае эта задача является неразрешимой. Поэтому вопрос о том, можно ли по коэффициентам многочлена определить, все ли корни этого многочлена имеют отрицательные вещественные части, является очень важным.

Необходимым, но не достаточным ***условием отрицательности действительных частей*** всех корней многочлена является положительность всех его коэффициентов.

Теорема 3. (Критерий Рауса-Гурвица)

Для того, чтобы все корни уравнения

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

были положительны.

Следствие 1. Для того, чтобы корни уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

лежали слева от мнимой оси, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0 .$$

Что означает, что

$$a_1 > 0, a_2 > 0 .$$

Другими словами, для систем второго порядка необходимое условие устойчивости является одновременно и достаточным. Подчеркнем, что речь идёт об асимптотической устойчивости.

Следствие 2. Для того, чтобы корни уравнения

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^1 + a_3 = 0$$

лежали слева от мнимой оси, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 > 0 , \Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0$$

Что означает, что

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0 .$$

Для систем третьего порядка необходимого условия недостаточно.

Пример.

При каких значениях параметра a нулевое решение системы является устойчивым.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + 2x_2 - x_3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ a & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 - 6 + a\lambda = 0.$$

Воспользуемся следствием 2 из критерия Рауса-Гурвица для многочлена $\lambda^3 + \lambda^2 + 6 - a\lambda = 0$

Достаточные условия: $a_1 > 0$, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

Для нашего многочлена: $1 > 0, 6 > 0, -a > 0, -a - 6 > 0.$

Следовательно, при $a < -6$ нулевое решение системы является устойчивым.

Упражнения.

Найти положения равновесия уравнений или систем и исследовать их на устойчивость по определению.

4.1. $y' = -y^2.$

4.2. $y' = -y\sin^2 x.$

4.3. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 3x^2 - 2x. \end{cases}$

Выяснить, при каких значениях параметра а нулевое решение является асимптотически устойчивым.

4.5. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - x^3 - a^2 x. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} \dot{x} = ax + a\sin y, \\ \dot{y} = ax^3 - a^2 y. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = ay - \mathrm{tg} x. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} \dot{x} = 3y^2 - ay, \\ \dot{y} = 2x + (2-a)y. \end{cases}$

4.2. Особые точки автономных систем на фазовой плоскости

Рассмотрим автономную систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by. \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Будем считать, что $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$.

Правая часть автономной системы не зависит от переменной t (времени).

Значит, решение системы не зависит от времени, а лишь от координат точки в заданный момент времени.

Будем рассматривать ***траектории*** системы – то есть кривые, соответствующие решениям системы, на плоскости *OXY*. Эту плоскость будем называть ***фазовой плоскостью***.

Небольшое отступление на тему «фазовая плоскость», взятое из учебника по дифференциальным уравнениям известного специалиста в этой области Арнольда В.И.

Фазовая плоскость (фазовое пространство в n-мерном случае), вообще, является очень важным понятием. Ниже будет пример, где просто введение фазовой плоскости позволяет строго решить сложную задачу.

Фазовая плоскость – это, как мы сказали, плоскость *OXY*, где отображаются состояния (положения) точки ($x(t)$, $y(t)$) с течением времени. След от движения точки – фазовая траектория. Следует отметить, что с недавнего времени фазовая плоскость, например, используется в настоящее время в кардиографии. Представление кардиограмм на фазовой плоскости даёт гораздо больше возможностей, чем традиционные кардиограммы в виде кривых $x(t)$, и выявляет даже небольшие изменения в ритмах сердца.

Итак, задача:

Из пункта А в пункт Б ведут две разные дороги. Дороги эти виляют произвольно, но находятся на таком расстоянии друг от друга, что две машины, которые едут из пункта А в пункт Б по разным дорогам, могут проехать, останавливаясь, сдавая назад и маневрируя, будучи связанными веревкой длины 2L (рис.10).

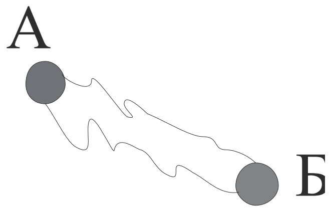

Рис.10. К задаче о возах и связанных машинах

Вопрос: смогут ли проехать по этим дорогам два круглых воза сена, радиус которых больше, чем L? При этом один из них будет двигаться из А в Б, а другой из Б в А. Оба воза также могут останавливаться и маневрировать как угодно.

Ответ здесь весьма не очевиден. И обоснование его также было бы непростым, если бы не введение фазовой плоскости.

Введем две координаты на плоскости x_1 и x_2. Будем считать длину пути из А в Б за 1. При этом x_1 - расстояние от А по первой дороге, а x_2 - по второй дороге. x_1 и x_2 меняются от 0 до 1.

Рассмотрим квадрат на фазовой плоскости этих координат. По горизонтали будем откладывать x_1, а по вертикали x_2 (рис. 11).

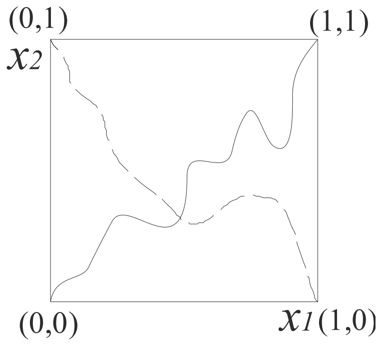

Рис.11. Фазовая плоскость задачи о возах

Движение обеих машин начиналось в пункте А и закончилось в пункте Б. На фазовой плоскости этому движению соответствует траектория (сплошная линия), идущая из точки (0,0) в точку (1,1).

Движение возов же будет идти из точки (1,0) в точку (0,1) (пунктирная линия), поскольку один из них поедет из пункта Б в пункт А по первой дороге, а второй, наоборот, из А в Б по второй.

Теперь становится очевидным, что эти две фазовые траектории пересекаются, а значит, возы должны обязательно хотя бы один раз оказаться в тех же точках, что и машины. А значит, расстояние между ними будет 2L и они разъехаться не смогут.

Введение фазовой плоскости помогло для данной задачи построить математическую модель и перейти к чисто математическим объектам – непрерывным пересекающимся кривым. После чего решение стало очевидным.

Вернемся к дифференциальным уравнениям.

Исследуем расположение траекторий системы (4.8) в окрестности начала координат. Для этого найдём решение системы, как линейной однородной.

Найдём характеристические корни системы.

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (c+b)\lambda + (cb-ad) = 0.$$

Вместе с системой (4.8) будем рассматривать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}\ , \tag{4.9}$$

которое получается из системы исключением переменной *t.* Интегральные кривые этого уравнения есть траектории системы на фазовой плоскости.

Случай 1. Корни характеристического уравнения вещественны и различны.

Тогда из курса линейной алгебры мы знаем, что уравнение можно привести с помощью линейной замены (линейного преобразования)

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \tag{4.10}$$

к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}\ . \tag{4.11}$$

Решая уравнение (4.11) получим

$$\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\left(\xi \neq 0\right) \ \text{ и } \ \xi = 0(\eta \neq 0)\ .$$

Случай 1.1. Корни одного знака. Тогда $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$.

В этом случае начало координат называется ***узлом***.

Пусть $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

В этом случае траектории семейства – параболы, касающиеся оси $O\xi$.

Если $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, то устойчивым (рис.12а), если же $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, то неустойчивым (рис.12б).

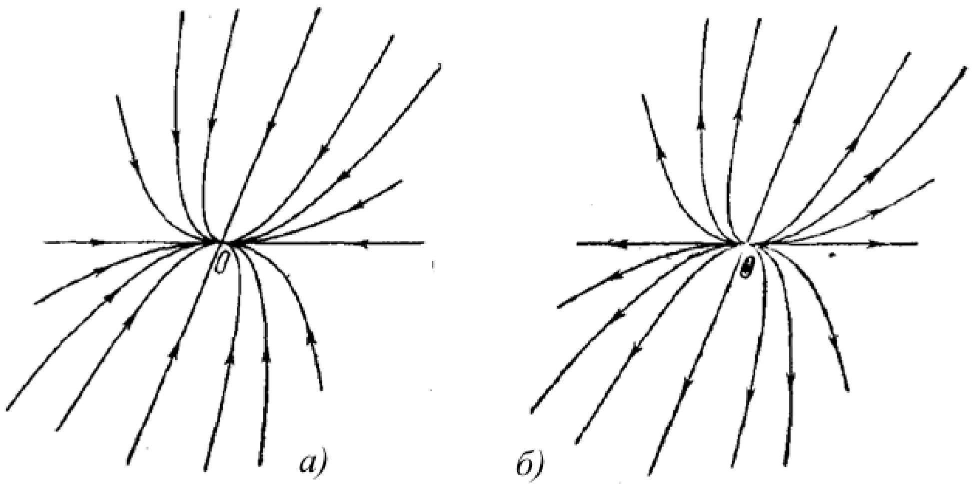

Рис.12. Устойчивый (а) и неустойчивый (б) узлы

Случай 1.2. Корни разного знака.

Тогда $\eta = C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\left(\xi \neq 0\right)$ и $\xi = 0(\eta \neq 0)$ - семейство гипербол.

Стационарная точка называется ***седлом***.

Седло всегда неустойчивая точка покоя (рис.13).

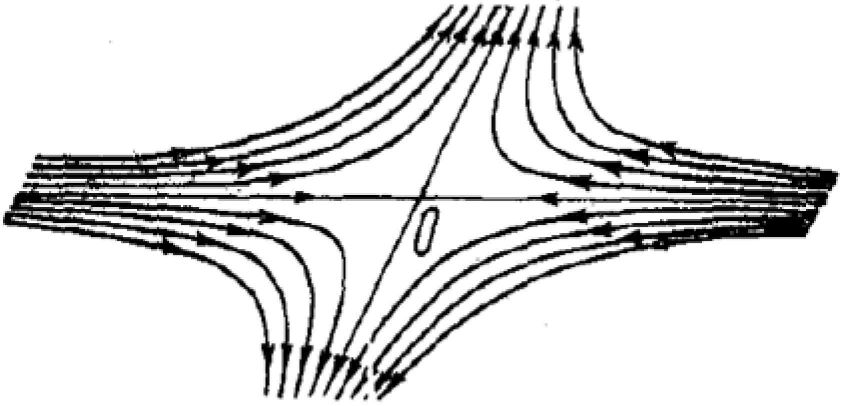

Рис.13. Седло

Случай 2. λ_1, λ_2 -пара комплексно-сопряженных чисел. $\lambda_{1,2} = p \pm iq$

Тогда с помощью некоторого линейного преобразования уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{pv - qu}{pu + qv}.$$

Интегрируя это уравнение, получим $\sqrt{u^2 + v^2} = ce^{-\frac{p}{q}arctg\frac{v}{u}}$ или $r = ce^{-\frac{p}{q}\phi}$.

Точка покоя – ***фокус***. Если *p<0*, то устойчивый (рис.14а), если *p>0*, то неустойчивый (рис.14б).

Если *p=0*, то точка покоя – ***центр*** (рис.14в). Точка типа центр, как мы уже знаем из разобранного выше примера, является устойчивой, но не асимптотически.

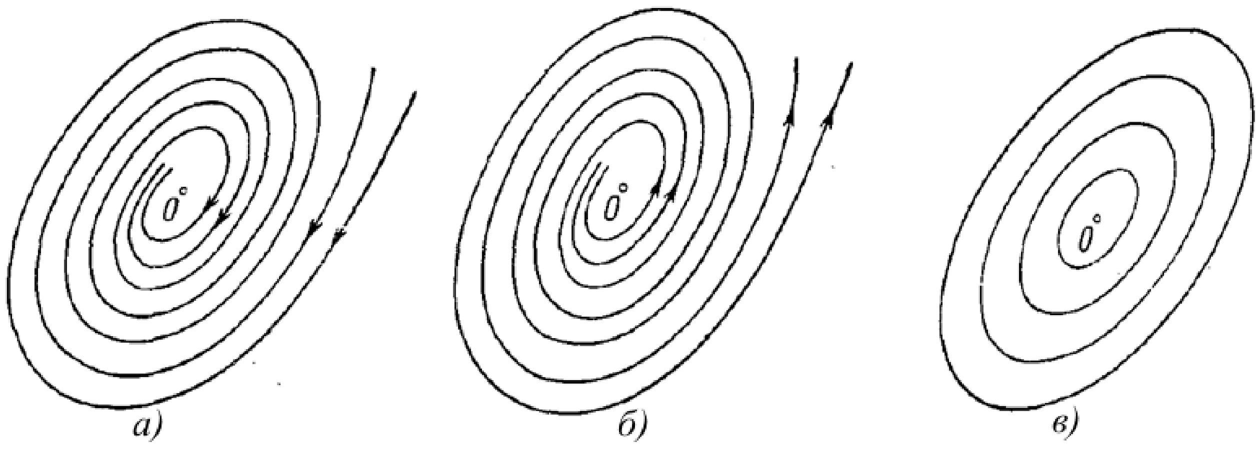

Рис.14. Устойчивый (а) и неустойчивый (б) фокусы и точка типа центр (в)

Случай 3. Корни кратные.

Тогда уравнение (4.9) приводится к виду

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\lambda_1\eta}{\lambda_1\xi},$$

решая которое, получим $\eta=\xi(C+\frac{1}{\lambda_1}\ln|\xi|)$.

Стационарная точка – ***вырожденный узел.***

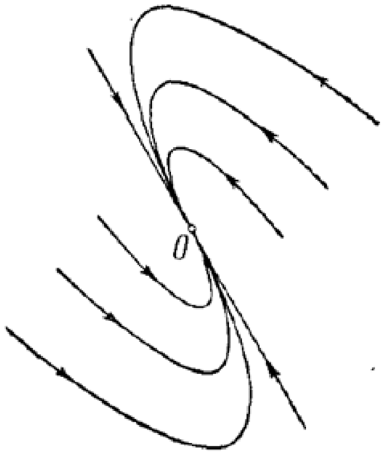

Рис.15. Вырожденный узел

Кратным корням также соответствует вырожденный случай, соответствующий системе

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x$$
$$\frac{dy}{dt}=\lambda y,$$

которая, на самом деле, представляет собой два отдельных уравнения.

Уравнение траекторий на фазовой плоскости в этом случае:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},$$

решением которого является семейство прямых, проходящих через начало координат.

Примеры.

1. Исследовать поведение траекторий вблизи начала координат системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x+3y.\end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5=0.$$

Характеристические корни: $\lambda = 2 \pm i$.

Корни комплексные. Вещественная часть больше нуля. Начало координат – неустойчивый фокус.

2. Исследуем уравнение, приведенное в качестве примера в самом начале данного пособия – уравнение упругих колебаний с учётом трения.

   $\ddot{x} + 2b\dot{x} + a^2 x = 0.$

   Заменим уравнение эквивалентной нормальной системой.

   $$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -a^2 x - 2by = 0. \end{cases}$$

   Характеристическое уравнение

   $$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a^2 & -2b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0.$$

   Характеристические корни: $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$.

1) $b = 0$. Движение без трения. Все движения периодические. Начало координат стационарная точка типа центр.
2) $b^2 - a^2 < 0$, $b > 0$ - корни комплексные. Вещественная часть меньше нуля. Точка покоя – устойчивый узел. Затухающие колебания, обусловленные трением.
3) $b^2 - a^2 < 0$, $b > 0$ - корни вещественные отрицательные. Точка покоя – устойчивый узел. Решения затухающие, но не колеблющиеся. Это возможно в том случае, когда трение, то есть значение параметра *b*, достаточно велико.
4) $b < 0$, $b^2 - a^2 < 0$ - корни комплексные с положительной вещественной частью. Точка покоя – неустойчивый фокус.
5) $b < 0$, $b^2 - a^2 > 0$ - корни вещественные положительные. Точка покоя – неустойчивый узел.

   Отметим, что физически последние два случая возможны лишь в том случае, когда трение «отрицательно», то есть, существует некая внешняя сила, которая не тормозит движение, а ускоряет.

Далее мы приведём примеры, в которых не только требуется исследовать нулевое состояние равновесия, но сначала найти все состояния равновесия нелинейных систем (в отличие от линейной системы, их может быть несколько), провести линеаризацию вблизи каждого из них и исследовать их на устойчивость и тип стационарной точки.

Но сначала покажем, как в случае нескольких состояний равновесия ускорить процесс исследования.

Пусть мы имеем автономную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases}$$

Состояния равновесия системы удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы исследовать состояние равновесия, во-первых, мы должны сделать перенос системы координат в эту точку, а во-вторых, линеаризовать систему.

Вместо этого мы сразу можем выделить линейную часть функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в каждой точке покоя. Из курса математического анализа известно, что линейная часть этой системы – это матрица Якоби отображения, описываемого правой частью.

Следовательно, для того, чтобы исследовать точки покоя, нужно посчитать матрицу Якоби в этой точке. Полученная числовая матрица и будет описывать систему первого приближения в соответствующей точке покоя.

Напомним, матрица Якоби - это матрица, составленная из частных производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Пример.

Исследовать точки покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - xy - x^2, \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$$

Найдём точки покоя.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - xy - x^2 = 0, \\ -y + xy = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим два решения: $y = 0$ и $x = 1$.

Подставляя $y = 0$ в первое уравнение, получим два решения: $x = 0$ и $x = 2$.

Подставляя $x = 1$ в первое уравнение, получим $y = 1$.

Таким образом, получили три состояния равновесия системы:
$M_0(0,0)$, $M_0(2,0)$, $M_0(1,1)$.

Исследуем эти точки.

Найдем матрицу Якоби правой части

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y-2x & -x \\ y & -1+x \end{pmatrix}.$$

В точке $M_0(0,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-0-0 & 0 \\ 0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения диагональной матрицы стоят на диагонали. Значит, $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$ - собственные числа. Они вещественные и разного знака. Следовательно, точка $M_0(0,0)$ - седло.

В точке $M_1(2,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-0-4 & -2 \\ 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения треугольной матрицы стоят на диагонали. Значит, $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$ - собственные числа. Они вещественные и разного знака. Следовательно, точка $M_1(2,0)$ - седло.

В точке $M_2(1,1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-1-2 & -1 \\ 1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ - собственные числа. Они комплексные с отрицательной вещественной частью. Следовательно, точка $M_2(1,1)$ - устойчивый фокус.

Наконец, построим фазовый портрет нашей нелинейной системы. Отметим, что полуоси координат являются решениями системы, так как если $x = 0$, то и производная $\dot{x} = 0$, а значит, движение идёт по оси OY. При этом $\dot{y} < 0$. Следовательно, верхняя полуось оси OY есть траектория, стремящаяся к началу координат. Та же ситуация с нижней полуосью оси OY.

Похожая ситуация и с осью OX. Только траектория, выходящая вправо по оси OX из точки $M_0(0,0)$, стремится к точке $M_1(2,0)$.

Кроме того, нетрудно заметить, что в правой четверти никакая траектория не может выйти за рамки полосы, ограниченной прямыми $x=0, x=2$, если она начинается внутри этой полосы. Действительно, во первых, за пределы первой четверти траектория выйти не может, так как оси являются траекториями системы, а по теореме существования и единственности, никакие разные траектории не имеют общих точек. Во вторых, при $x \geq 2, y>0$ производная $\dot{x}<0$. Следовательно, все эти траектории идут влево.

Если ещё воспользоваться методом изоклин, изложенным в первом параграфе данного пособия, то можно построить фазовый портрет системы (рис.16.)

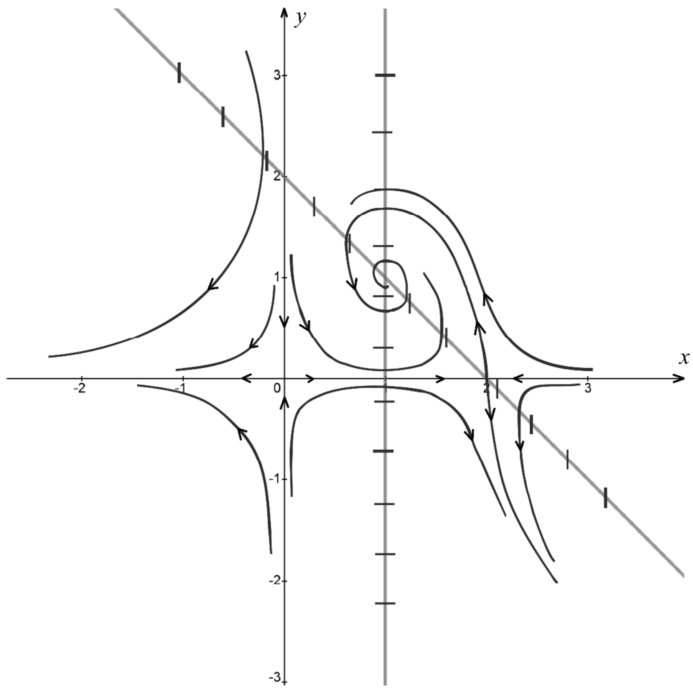

Рис.16. Фазовый портрет системы

Упражнения.

Найти и исследовать точки покоя данных систем.

4.9. $\begin{cases} \dot{x}=2x+4, \\ \dot{y}=2y-x. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} \dot{x}=x-y+2, \\ \dot{y}=2x+y. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} \dot{x}=xy-2y-4, \\ \dot{y}=2y^2-\dfrac{y^2}{2}. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} \dot{x}=x^2-y^2-1, \\ \dot{y}=2y. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} \dot{x}=x^2-y, \\ \dot{y}=\ln(1-x+x^2)-\ln 3. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} \dot{x}=\ln(1-y^2), \\ \dot{y}=e^x-e^y. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} \dot{x}=5x-xy-x^2, \\ \dot{y}=-y+xy-y^2. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} \dot{x}=x^2-y, \\ \dot{y}=x^2-(y-2)^2. \end{cases}$

Дополнение.

В дополнении мы рассмотрим две темы, которые с одной стороны выходят за рамки курса ОДУ, преподаваемого на данной специальности, но с другой стороны, будут весьма полезны студентам, так как ОДУ является лишь частью курса. В третьей части курса мы будем изучать «основы функционального анализа», где будут затронуты вопросы, связанные с оператором Штурма-Лиувилля, его непрерывностью и обратимостью. Эти вопросы напрямую относятся к решению краевой задачи для уравнения второго порядка, которая будет рассмотрена в первом дополнении. Во второй части курса мы будем изучать «разностные уравнения», поэтому второе дополнение мы решили посвятить вопросам, связанным с приближённым решением дифференциальных уравнений разностными методами, что может служить своего рода переходом от дифференциальных уравнений к разностным.

Д.1. Краевая задача для уравнений второго порядка

Как мы уже знаем, решением уравнения второго порядка в общем случае является двухпараметрическое семейство решений, то есть семейство решений, содержащее два параметра (C_1, C_2).

Для нахождения какого-то одного конкретного решения нами ставилась задача Коши, представляющая собой задачу выделения из указанного семейства решения, проходящего через заданную точку под заданным углом. То есть, нами накладывались два условия (условия Коши), чтобы исключить два параметра.

Но на практике часто возникают задачи, которые невозможно записать с помощью задачи Коши.

Рассмотрим на примере задачу о движении материальной точки, которая, как мы уже знаем, сводится к интегрированию дифференциального уравнения движения

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = F\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right).$$

Предположим, что среди всех движений материальной точки необходимо найти то, которое в момент времени t_1 находится в точке X_1, а в момент времени t_2 должно находиться в точке X_2.

Подобная задача, например, возникает при стрельбе из артиллерийских орудий, когда требуется при заданной скорости вылета снаряда определить угол, при котором снаряд улетит на заданное расстояние.

Очевидно, что, в отличие от задачи Коши, здесь необходимо ставить условия в разных точках: $X(t_1) = X_1$, $X(t_2) = X_2$.

Если удается найти общее решение дифференциального уравнения, то для решения краевой задачи надо определить произвольные постоянные, содержащиеся в общем решении, из граничных условий. При этом решение краевой задачи, в отличие от задачи Коши, даже при очень «хороших» коэффициентах уравнения не всегда существует, а если существует, то не всегда единственно.

Пример.

Найти решение задачи

$$\begin{cases} x'' + x = 0, \\ x(0) = 0, x(a) = x_1. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Подставляя первое краевое условие, получим

$x(0) = C_1 = 0$.

Из второго условия получим

$x(a) = C_2 \sin a = x_1$.

Если $a \neq \pi k$, где k –целое число, то $C_2 = \dfrac{x_1}{\sin a}$. Следовательно, в этом случае существует единственное решение краевой задачи

$$x = \frac{x_1}{\sin a} \sin t.$$

Если же $a = \pi k$, то:

в случае $x_1 = 0$ задача имеет бесконечное множество решений $x = C_1 \sin t$,

в случае $x_1 \neq 0$ задача вообще не имеет решений, так как получаем из второго условия $0 = x_1 \neq 0$.

Итак, в общем случае ***краевой задачей*** для уравнения второго порядка называется задача нахождения решения уравнения

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = \varphi(x), \tag{д.1}$$

удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1. \tag{д.2}$$

С помощью линейной замены переменных

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0$$

краевые условия (д.2) сводятся к более простым условиям

$$z(x_0) = 0, z(x_1) = 0.$$

При этом, ввиду линейности замены переменных, уравнение остается линейным.

Кроме того, умножая уравнение (д.1) на $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$, мы можем представить уравнение в виде $\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x)$.

Поэтому далее мы, без ограничений общности, можем рассматривать краевую задачу в виде

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x), \qquad (д.3)$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \qquad (д.4)$$

Для решения задачи (д.3), (д.4) введем в рассмотрение функцию $G(x,s)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $G(x,s)$ непрерывна по x при каждом фиксированном s при $x \in [x_0, x_1], s \in [x_0, x_1]$.
2. $G(x,s)$ является решением соответствующего однородного линейного уравнения
$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0$$
при всех значениях $x \in [x_0, x_1]$ за исключением точки $x = s$.
3. $G(x,s)$ удовлетворяет нулевым начальным краевым условиям
$$G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0 .$$
4. В точке $x = s$ производная $G_x'(x,s)$ имеет разрыв первого рода. Величина скачка равна $\dfrac{1}{p(s)}$:
$$G_x'(s+0,s) - G_x'(s-0,s) = \frac{1}{p(s)} .$$

Функция $G(x,s)$, удовлетворяющая этим условиям, называется ***функцией Грина*** краевой задачи (д.3), (д.4).

Оказывается, функция

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s)\,ds \qquad (д.5)$$

является решением краевой задачи (д.3), (д.4).

То, что функция (д.5) удовлетворяет условиям (д.4), очевидно, так как в граничных точках подынтегральная функция обращается в ноль. Поэтому, достаточно убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению (д.3).

Вычислим y' и y''. Для этого еще раз напомним правило дифференцирования определенных интегралов по параметру, где и подынтегральная функция, и пределы интегрирования зависят от этого параметра.

Пусть $F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,s)\,ds$, тогда

$$F'(x) = g(x,\psi(x))\psi'(x) - g(x,\varphi(x))\varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} g(x,s)\,ds .$$

Используя свойство 4 функции Грина (скачок производной), находим:

$$y' = \left(\int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s) ds \right)' = \int_{x_0}^{x_1} G_x'(x,s) f(s) ds =$$

$$= \int_{x_0}^{x} G_x'(x,s) f(s) ds + \int_{x}^{x_1} G_x'(x,s) f(s).$$

Используя правило дифференцирования по параметру, находим:

$$y'' = \left(\int_{x_0}^{x} G_x'(x,s) f(s) ds + \int_{x}^{x_1} G_x'(x,s) f(s) \right)' =$$

$$= \int_{x_0}^{x} G_{xx}''(x,s) f(s) ds + G_x'(x, x-0) f(x) +$$

$$+ \int_{x}^{x_1} G_{xx}''(x,s) f(s) - G_x'(x, x+0) f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} G_{xx}''(x,s) f(s) ds + \int_{x}^{x_1} G_{xx}''(x,s) f(s) +$$

$$+ G_x'(x, x-0) f(x) - G_x'(x, x+0) f(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} G_{xx}''(x,s) f(s) ds + G_x'(x+0, x) f(x) - G_x'(x-0, x) f(x).$$

Подставляя полученные выражения y' и y'' в уравнение, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[p(x) G_{xx}''(x,s) + p'(x) G_x'(x,s) + q(x) G(x,s) \right] f(s) ds +$$

$$+ p(x) \left[G_x'(x+0, x) f(x) - G_x'(x-0, x) f(x) \right] \equiv f(x).$$

Отсюда следует, что функция (д.5) является решением уравнения (д.3).

Таким образом, для решения краевой задачи нам достаточно найти такую функцию, которая бы удовлетворяла условиям 1-4.

Покажем метод построения функции Грина.

Рассмотрим задачу Коши

$$\left(p(x) y' \right)' + q(x) y = 0,$$

$$y(x_0) = 0,$$

$$y'(x_0) = y_0' \neq 0.$$

Пусть y_1 - решение этой задачи Коши. Оно удовлетворяет первому краевому условию, но в общем случае не удовлетворяет второму. Случай, когда оно удовлетворяет второму условию – исключение, которое мы не будем рассматривать.

Из свойств решений однородного линейного уравнения следует, что все решения образуют линейное пространство. Следовательно, функции $C_1 y_1$ также являются решениями уравнения. Кроме того, все они удовлетворяют условию $y(x_0)=0$.

Теперь, аналогично, пусть y_2 - решение уравнения

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0,$$

удовлетворяющее условию

$$y(x_1)=0.$$

Тогда функции $C_2 y_2$ также являются решениями уравнения и удовлетворяют начальному условию $y(x_1)=0$.

Функцию Грина будем искать в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1 y_1(x) \text{ при } x_0 \le x \le s \\ C_2 y_2(x) \text{ при } s \le x \le x_1 \end{cases}.$$

На постоянные C_1 и C_2 наложим условия 1 и 4, то есть:

во-первых, функция $G(x,s)$ должна быть непрерывна по x при фиксированном s, и в частности на стыке, то есть при $x=s$

$$C_1 y_1(s) = C_2 y_2(s),$$

во-вторых, производная этой функции должна иметь скачок в точке $x=s$:

$$C_2 y_2'(s) - C_1 y_1'(s) = \frac{1}{p(x)}.$$

Поскольку функции y_1 и y_2 обращаются в ноль в разных точках, они являются линейно независимыми. Кроме того, мы предположили, что

$$y_1'(x_0) \ne 0.$$

Отсюда следует, что система уравнений

$$\begin{cases} C_2 y_2(s) - C_1 y_1(s) = 0, \\ C_2 y_2'(s) - C_1 y_1'(s) = \dfrac{1}{p(x)}. \end{cases} \qquad (д.6)$$

имеет единственное решение, поскольку её определитель – определитель Вронского от линейно независимых функций, а следовательно не равен нулю.

Решая систему (д.6), получим:

$$C_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}, \quad C_1 = \frac{y_1(s)}{W(s)p(s)}.$$

Отсюда

$$G(x,s)=\begin{cases} \dfrac{y_2(s)y_1(x)}{W(s)p(s)} \text{ при } x_0 \le x \le s, \\ \dfrac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)p(s)} \text{ при } s \le x \le x_1. \end{cases}$$

Пример.

Найти функцию Грина краевой задачи

$$y''+y=f(x),$$

$$y(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Общее решение уравнения

$$y''+y=0$$

нам уже хорошо известно: $y=C_1\sin x+C_2\cos x$.

При этом, первому краевому условию удовлетворяют функции

$$y_1=C_1\sin x,$$

а второму краевому условию удовлетворяют функции

$$y_2=C_2\cos x.$$

Вообще говоря, правильнее составить систему уравнений (д.6), так как условия 1 и 4 легко запоминаются, но мы в целях экономии места и времени воспользуемся полученными формулами для $G(x,s)$. Для этого найдем Вронскиан.

$$W(x)=W(y_1(x),y_2(x))=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-1.$$

Отсюда

$$G(x,s)=\begin{cases} -\cos s\sin x & \text{при } 0\le x\le s, \\ -\sin s\cos x & \text{при } s\le x\le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение краевой задачи:

$$y(x)=\int_0^{\pi/2}G(x,s)f(s)ds=-\cos x\int_0^x \sin s f(s)ds-\sin x\int_x^{\pi i/2}\cos s f(s)ds.$$

Проверим это при $f(x)=1$.

Тогда

$$y(x)=-\cos x\int_0^x \sin s ds-\sin x\int_x^{\pi i/2}\cos s ds=-\cos x(-\cos s\big|_0^x)-\sin x(\sin s\big|_x^{\pi/2})=$$

$$=-\cos x(1-\cos x)-\sin x(1-\sin x)=1-\cos x-\sin x$$

Нетрудно проверить, что полученная функция является решением краевой задачи

$$y''+y=1,$$

$$y(0)=0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Д.2. Приближенные методы решений дифференциальных уравнений

Как мы уже указывали ранее, далеко не любое уравнение можно решить аналитически. Уже при изучении уравнений первого порядка мы сталкивались с уравнениями, которые невозможно проинтегрировать в квадратурах (то, есть в элементарных функциях и интегралах от них).

Например, простое уравнение

$$y' = y^2 + x^2$$

не интегрируемо в квадратурах.

Тем не менее, правая часть таких уравнений является «хорошей», то есть всюду удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности.

Кроме того, часто при моделировании реальных процессов мы получаем именно уравнения или системы, которые невозможно решить аналитически. Но решение существует и нам необходимо его найти.

В этом случае на помощь исследователю приходят приближенные методы решения уравнений.

Приближенные методы вообще делятся на два типа: аналитические и численные.

Аналитические методы.

К аналитическим методам относится, в первую очередь, ***метод последовательных приближений***, который обычно изучают при доказательстве теоремы о существовании и единственности в формулировке Пикара. В данном курсе мы изучали теорему в формулировке Коши без доказательства. Но метод последовательных приближений мы всё-таки будем изучать в третьей части нашего курса «основы функционального анализа», как общий метод решения не только для дифференциальных уравнений, но и для других операторных уравнений. Суть метода последовательных приближений заключается в том, что, как мы показывали ранее, задача Коши

$$y' = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0$$

эквивалентна (при некоторых условиях на правую часть уравнения) интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds .$$

Решение же данного интегрального уравнения находим как предел последовательности функций, определяемых следующим образом

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds .$$

Как видим, чтобы решить интегральное уравнение (а значит, и задачу Коши) с какой-то точностью, нужно несколько раз посчитать интегралы, которые, к сожалению, тоже могут оказать не берущимися.

Пример.

Построим несколько последовательных приближений к решению задачи Коши

$$y' = y^2 + x^2,$$

$$y(0) = 0.$$

Эквивалентное интегральное уравнение:

$$y = \int_0^x (s^2 + y^2)ds.$$

Последовательность приближений:

$$y_n = \int_0^x (s^2 + {y_{n-1}}^2)ds.$$

Нулевое приближение есть условие Коши: $y_0(x) \equiv 0$.

Тогда первое приближение:

$$y_1 = \int_0^x s^2 ds = \frac{x^3}{3}.$$

Второе приближение:

$$y_2 = \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{x^3}{3} \right)^2 \right) ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}.$$

Третье приближение:

$$y_3 = \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \right)^2 \right) ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\left(1 + \frac{2x^4}{33} + \frac{x^8}{945} \right)..$$

На рисунке 17 показаны эти приближения, Как видим, на отрезке $(-1,1)$

Они практически неотличимы. На большой интервал мы продолжить решение не можем, так как, вообще говоря, теорема о существовании и единственности нам гарантирует решение лишь в некоторой окрестности.

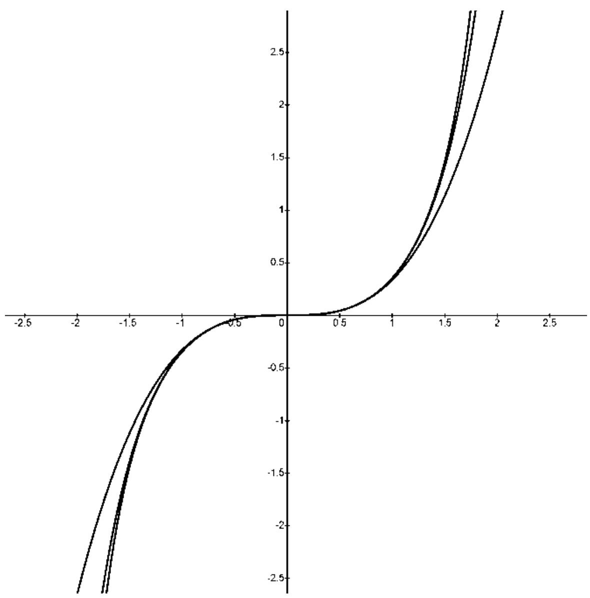

Рис.17 Последовательные приближений к решению уравнения

Возможность продолжить решение на больший или бесконечный интервал нужно изучать отдельно. Ниже мы покажем пример, почему это делать нужно обязательно при численном решении дифференциальных уравнений.

Ещё один аналитический метод – представление неизвестной функции в окрестности точки x_0 в ***виде степенного ряда*** с неизвестными коэффициентами. Суть метода заключается в том, что производная от степенного ряда есть степенной ряд. Правая часть также представляется в виде степенного ряда по формуле Тейлора. После этого коэффициенты справа и слева при одинаковых степенях приравниваются, и получаем бесконечную систему алгебраических уравнений для вычисления точного решения. Если же требуется решение с некоторой точностью, то система будет конечна, так как члены разложения в ряд выше некоторой степени просто отбрасываются. Отметим, что, вообще говоря, поученный ряд не обязан сходиться.

Пример.

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Представим $y(x)$ в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами

$$y(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots.$$

Тогда $y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots.$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots = x^2 + (1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots)^2.$$

Раскрывая скобки, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях.

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ 2c_2 = 2c_1, \\ 3c_3 = 1 + c_1^2 + 2c_2, \\ 4c_4 = 2c_1 c_2 + 2c_3, \\ \dots\dots \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем решение в виде степенного ряда

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots .$$

Кроме того, для вычисления значения функции $y(x)$ в конкретной точке из окрестности условия Коши можно воспользоваться представлением функции в виде ряда Тейлора в окрестности этой точки. При этом значения всех производных в начальной точке легко вычисляется из уравнения с помощью последовательного дифференцирования.

Пример.

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Найдем значение $y(0.2)$ с точностью до 0.01.

Представим функцию $y(x)$ в виде ряда Маклорена.

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + y'''(0)\frac{x^3}{3!} + y^{IV}(0)\frac{x^4}{4!} + \ldots .$$

Из условий Коши:

$y(0) = -1,$

$y'(0) = y^2(0) + 0^2 = 1.$

Продифференцируем уравнение по x:

$y'' = 2yy' + 2x.$

Ещё раз:

$$y''' = 2(y'^2 + yy'') + 2.$$

И ещё раз:

$$y^{IV} = 2(3y'y'' + yy''').$$

Тогда

$y''(0) = 2y(0)y'(0) + 0^2 = -2,$

$y'''(0) = 2(y'^2(0) + y(0)y''(0)) + 2 = 8,$

$y^{IV}(0) = 2(3y'(0)y''(0) + y(0)y'''(0)) = -28.$

Подставляя найденные значения в ряд Маклорена, получим

$$y(x) = -1 + x - x^2 + \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^4}{6} + \ldots .$$

Отсюда $y(0.2) \approx -0.83$.

Численные методы.

Общее для всех аналитических методов то, что они не реализуются в виде алгоритмов, а используют хоть и более простые, чем решение исходного уравнения, но всё же аналитические способы решения задач, такие как символьное вычисление интегралов (метод последовательных приближений) и производных (метод степенных рядов) или решение нелинейной системы, индивидуальной для каждого уравнения.

Численные же методы достаточно просто алгоритмизируются и являются основными методами при решении дифференциальных уравнений с помощью компьютера.

Численным решением задачи Коши называется функция, заданная не на всём интервале $[x_0, x_n]$, а лишь в некоторых его точках с определенным шагом:

$$x_k = x_0 + kh, \text{ где } h = \frac{x_n - x_0}{n}. \qquad \text{(д.6)}$$

Таким образом, строится последовательность точек $x_0, x_1, x_2, ...x_n$.

И решения уравнения ищутся именно в этих точках

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, ...y(x_n) = y_n.$$

В результате численного решения уравнения

Получается таблица значений

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_{n-1} & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & ... & y_{n-1} & y_n \end{matrix},$$

аппроксимирующая предполагаемое решение $y(x)$.

Чтобы понять суть численных методов, достаточно вспомнить самое начало нашего курса. В начале первой главы мы изучали поле направлений и метод изоклин. Суть метода изоклин заключалась в рисовании поля направлений особым образом и соединении векторов поля в одну линию, которая примерно показывала решение. Примерно такая же идея используется в самом простом способе численного решения. Мы просто с определенным шагом соединяем вектора из поля направлений.

Пусть мы имеем задачу Коши, которую требуется приближенно решить.

$$y' = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0.$$

В каждой точке плоскости OXY мы знаем угловой коэффициент касательной к решению, проходящему через эту точку. Это есть значение производной, а точнее правой части уравнения в этой точке.

Вспомним определение производной функции в точке x_0:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}.$$

Из этого определения следует, что при x достаточно близком к x_0

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$$

Если в разбиении (д.6) h является достаточно малым, то можно представить производную

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0}. \qquad \text{(д.7)}$$

Формула (д.7) дает грубую, но очень простую и наглядную формулу численного дифференцирования, на которой строится большое число вычислительных методов решения дифференциальных уравнений, не только обыкновенных, но и в частных производных.

Используя эту формулу, мы можем получить приближенное значение $y(x_1)$:

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0)$$

или

$$y(x_1) = y(x_0) + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Теперь используем такую же аппроксимацию в точке x_1

$$y'(x_1) \approx \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Получим

$$y(x_2) = y(x_1) + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

И так далее.

В результате получим решение, заполняющее указанную выше таблицу

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

или

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), (k = 1...n). \qquad (д.8)$$

Формулы (д.8) вычисления приближенного решения задачи Коши на заданной сетке $x_k = x_0 + kh$ носят название ***метода Эйлера***.

Метод Эйлера – простейший численный метод решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Он является понятным и весьма наглядным, но главным его недостатком является малая точность. Для того, чтобы получить приемлемую точность при решении задачи Коши методом Эйлера, необходимо задавать очень малое значение шага h. Что сказывается на скорости вычислений.

Отметим, однако, что скорость вычисления – понятие относительное.

Когда автор данного пособия учился в университете, скорости вычислительной техники были такими, что решение реальных задач методом Эйлера с приемлемой точностью могло достигать нескольких минут при решении на достаточно малом интервале. А о решении на длительном интервале задания функции и речи быть не могло. Даже реализация гораздо более точных методов на большом интервале давала время подумать о бытии и помечтать о будущем.

Спустя десятилетие, эти более точные методы уже давали решение за очень быстрое время. Скорости увеличились в десятки раз.

В настоящее же время и метод Эйлера с очень малым шагом (с приемлемой точностью) занимает на тех же задачах миг.

Но не стоит забывать, что вместе с развитием компьютерной техники, с одной стороны, нам стали доступны реализации численных методов, которые почти не рассматривались ввиду их больших временных затрат. С другой стороны, из-за их доступности усложнились и задачи, которые мы решаем. А эти задачи вновь требуют, чтобы точность методов была как можно лучшей.

Поэтому, когда мы говорим о недостатке метода Эйлера, как метода с плохой точностью, в первую очередь мы имеем в виду то, что многие другие методы дают точность, превосходящую метод Эйлера. То есть, при одних и тех же временных затратах на решение, точность прямого метода Эйлера, пожалуй, будет худшей по сравнению с остальными методами.

Пример.

Покажем на примере решение задачи Коши с помощью метода Эйлера и сравним его с точным решением.

$$y' = y + x^2,$$

$$y(0) = 1.$$

Данное уравнение является линейным, поэтому его решение легко находится известным нам способом.

$$y = 3e^x - x^2 - 2x - 2.$$

Будем рассматривать решение на отрезке [0,4].

$$y_k = y_{k-1} + h(y_{k-1} + x_{k-1}^2), (k = 1...n).$$

Построим аппроксимацию решения по методу Эйлера с шагом $h = 0.1$

$$y_k = y_{k-1} + 0.1(y_{k-1} + x_{k-1}^2), (k = 1...40).$$

Построим аппроксимацию решения по методу Эйлера с шагом $h = 0.05$

$$y_k = y_{k-1} + 0.05(y_{k-1} + x_{k-1}^2), (k = 1...80).$$

Отметим, что метод настолько прост в реализации, что его решение можно построить с помощью электронных таблиц Excel (рис.18).

На рисунке изображены три решения: верхнее – точное решение. Нижнее – приближенное решение с шагом $h = 0.1$. Посередине – приближенное решение с шагом $h = 0.05$. Для удобства представления приближенные решения на графике изображены линией, соединяющей точки, в которых оно вычисляется.

Как видно на графике, даже на маленьком интервале разбиение на 80 отрезков дает решение визуально отличимое от точного решения. Разбиение на 40 ещё более не приемлемо. Отметим, что разбиение с шагом $h = 0.001$ дает в точке $x = 4$ погрешность 0.2.

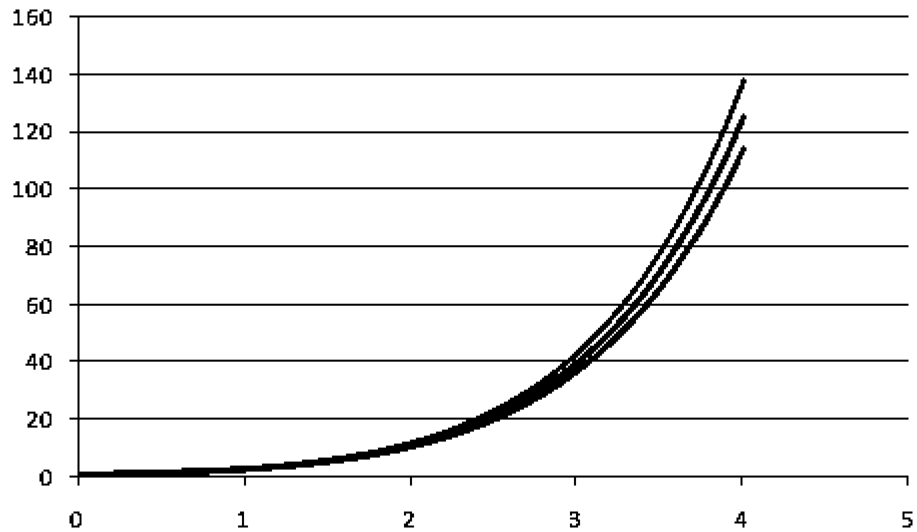

Рис.18. Иллюстрация метода Эйлера

Ещё один метод численного решения является, по сути, не одним методом, а целым семейством методов, основанных на общем принципе. Но наибольшее распространение получил один из них – ***метод Рунге-Кутта*** четвертого порядка.

Заметим, что для применения метода Рунге-Кутта требуется, чтобы правая часть уравнения была достаточное количество раз дифференцируема.

Выше мы уже описывали метод решения дифференциального уравнения с помощью степенных рядов. Тогда точное значение решения задачи Коши в точке x_1 запишем по формуле Тейлора:

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2} + y'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + ... + y^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + ... \quad (д.9)$$

Идея метода Рунге-Кутты состоит в том, чтобы искать решение y_1 в точке x_1 в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами

$$y_1 = y_0 + p_1k_1(h) + ... + p_lk_l(h). \quad (д.10)$$

где

$$k_1(h) = hf(x_0, y_0),$$

$$k_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21}k_1(h)),$$

....

$$k_l(h) = hf(x_0 + \alpha_l h, y_0 + \beta_{l1}k_1(h) + \beta_{l,l-1}k_{l-1}(h)).$$

Числа $\alpha_i, \beta_{ij}, p_i$ выбирается так, чтобы в разложении (д.10) по степеням h и разложении (д.9) было как можно больше одинаковых первых членов. Тогда погрешность метода будет начинаться со степени, соответствующей первому не совпадающему члену.

Покажем на примере двучленной формулы (то есть при l=2), как отыскиваются эти коэффициенты. Одночленная формула, как нетрудно понять из написанного выше, совпадает с методом Эйлера.

Итак, построим формулу по методу Рунге-Кутты следующего вида:

$$y_1 = y_0 + p_1k_1(h) + p_2k_2(h),$$

где

$$k_1(h) = hf(x_0, y_0),$$

$$k_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21}hf(x_0, y_0)),$$

Разложим функцию $k_2(h)$ по степеням h, вспомнив правило разложения по степеням функции двух переменных.

$$k_2(h) = h(f(x_0, y_0) + \alpha_2 hf_x'(x_0, y_0) + \beta_{21}hf(x_0, y_0)f_y'(x_0, y_0) + ...) =$$

$$= hf(x_0, y_0) + h^2(\alpha_2 f_x'(x_0, y_0) + \beta_{21}f(x_0, y_0)f_y'(x_0, y_0)) + ...$$

Мы хотим сделать так, чтобы как можно больше первых членов разложения

$$y_1 = y_0 + h(p_1 + p_2)f(x_0, y_0) + h^2 p_2\alpha_2\left(f_x'(x_0, y_0) + \beta_{21}f(x_0, y_0)f_y'(x_0, y_0)\right) + ...$$

совпадало с разложением

$$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0)h + y''(x_0)\frac{h^2}{2} + y'''(x_0)\frac{h^3}{3!} + ... + y^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + ... \ .$$

Отметим, что из уравнения

$$y' = f(x, y)$$

следует, что

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

и

$$y''(x_0) = f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0)y'(x_0) = f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0)f(x_0, y_0) .$$

Тогда приравнивая члены разложения до второго порядка между собой,

Получим систему

$$\begin{aligned} &p_1 + p_2 = 1 \\ &2p_2\alpha_2 = 1 \ . \\ &2p_2\beta_2 = 1 \end{aligned} \qquad \text{(д.11)}$$

Эта система из трёх уравнений с четырьмя неизвестными, но если попытаться приравнять члены до третьего порядка, то получим уже более четырех уравнений всё с теми же четырьмя неизвестными, которая будет неразрешима.

Поэтому найдём какое-нибудь решение системы (д.11).

Например, $\alpha_2 = \beta_2 = 1, p_1 = p_2 = \dfrac{1}{2}$.

Получим формулу ***Рунге-Кутта второго порядка***.

$$\begin{aligned} &y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ &k_1 = hf(x_0, y_0), \\ &k_2 = h(f(x_0 + h, y_0 + k_1). \end{aligned}$$

Точнее будет сказать, одну из формул, так как при разном выборе коэффициентов будут получаться разные формулы, каждая из которых будет предпочтительнее для разных уравнений.

Этот метод дает точность, на порядок превосходящую метод Эйлера. Но наибольшее распространение получил метод ***Рунге-Кутты четвертого порядка***, дающий точность ещё на два порядка выше. Здесь приведён один из таких методов (снова есть различный выбор коэффициентов, дающий разные формулы):

$$\begin{aligned} &y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ &k_1 = hf(x_0, y_0), \\ &k_2 = h(f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1), \\ &k_3 = h(f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2), \\ &k_4 = h(f(x_0 + h, y_0 + k_3). \end{aligned}$$

Этот метод даёт погрешность уже пятого порядка относительно h.

Отметим, что указанные методы относятся к, так называемым, ***одноточечным*** методам, то есть для вычисления каждого следующего значения функции y_k используется лишь одно предыдущее y_{k-1}.

Для ещё большего ускорения вычислений были созданы ***многоточечные*** методы, то есть такие, что для вычисления значения y_k используются вычисленные значения $y_{k-1}, y_{k-2},..y_{k-r}$. Одним из представителей многоточечных методов является ***метод Адамса***.

Суть метода Адамса чрезвычайно проста. В этом методе предполагается, что искомое точное решение задачи Коши является непрерывно дифференцируемым до порядка r+2. Число r называется порядком метода Адамса. Если функция гладкая до порядка n, то на достаточно малом интервале её можно аппроксимировать многочленом степени n.

Коэффициенты этого многочлена можно вычислить однозначно лишь в том случае, когда мы имеем $n+1$ точек, через которые он проходит. Таким образом, для вычисления значения решения уравнения в точке x_k потребуются значения в точках $x_{k-1}, x_{k-2},..x_{k-n}$.

Отметим, что метод Адамса нулевого порядка снова совпадает с методом Эйлера. На каждом шаге интегральная кривая аппроксимируется прямой.

Разберем метод Адамса на примере первого порядка. Для этого нужно получить формулы для вычисления коэффициентов параболы, проходящей через 2 заданные точки под заданными углами. Задача понятна и легко должна решаться студентами первого курса.

Пусть заданы три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), через которые проходит парабола $y = ax^2 + bx + c$.

Тогда для коэффициентов параболы можно составить систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} y_0 = a{x_0}^2 + bx_0 + c, \\ y_1 = a{x_1}^2 + bx_1 + c, \\ y_2 = a{x_2}^2 + bx_2 + c. \end{cases}$$

Найти решение этой системы не получится, так как значение y_2 нам неизвестно. Наоборот, мы хотим его найти, зная y_0 и y_1.

Не уменьшая общности, будем считать что $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h$. Для вычисления параметров параболы нам недостаточно значений лишь в двух точках. Но не будем забывать, что помимо значений неизвестной функции в точках $x_0 = 0, x_1 = h$ нам известны ещё и её производные, так как функция является решением дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y).$$

Таким образом, мы имеем условия для параболы $y = ax^2 + bx + c$:

$$y(0) = c = y_0,$$
$$y'(0) = b = f(x_0, y_0),$$
$$y(h) = ah^2 + bh + c = y_1,$$
$$y'(h) = 2ah + b = f(x_1, y_1).$$

Из первого, второго и четвертого условия находим уравнение параболы:

$$y = \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{2h} x^2 + f(x_0, y_0)x + y_0.$$

Тогда подставляя в уравнение параболы значения переменной $x_1 = h$ и $x_2 = 2h$, получим y_1 и прогнозируемое значение y_2:

$$y_1 = \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{2h} h^2 + f(x_0, y_0)h + y_0,$$

$$y_2 = \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)}{2h} 4h^2 + f(x_0, y_0)2h + y_0.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$y_2 - y_1 = \frac{3}{2} hf(x_1, y_1) - \frac{1}{2} hf(x_0, y_0).$$

что дает нам формулу для вычисления y_2:

$$y_2 = y_1 + \frac{3}{2} hf(x_1, y_1) - \frac{1}{2} hf(x_0, y_0).$$

Эта формула дает нам формулу двухточечного метода Адамса:

$$y_k = y_{k-1} + h\left(\frac{3}{2} f(x_{k-1}, y_{k-1}) - \frac{1}{2} f(x_{k-2}, y_{k-2})\right).$$

Таким же образом, выводятся формулы Адамса других порядков, где предполагается, что решение апроксимируется параболами высших порядков.

Наиболее распространенная формула – метод Адамса 4-го порядка точности, использующая уже четыре предыдущих вычисленных значения неизвестной функции:

$$y_k = y_{k-1} + h\left(\frac{55}{24} f(x_{k-1}, y_{k-1}) - \frac{59}{24} f(x_{k-2}, y_{k-2}) + \frac{37}{24} f(x_{k-3}, y_{k-3}) - \frac{3}{8} f(x_{k-4}, y_{k-4})\right)$$

Как мы могли заметить, для того, чтобы вычислить значение в каждой последующей точке методом Адамса, необходимо знать значения в нескольких предыдущих точках. Эти значения вычисляют с помощью одношаговых методов. Как правило, это делают с помощью метода Рунге-Кутта.

Несмотря на высокую точность вычислений методами Адамса и Рунге-Кутта, существуют уравнения, для которых и они работают неудовлетворительно. В этих случаях используются так называемые неявные методы. Описанные выше численные реализации называются явными, так как там каждое последующее значение функции зависит лишь от предыдущих.

Неявные же методы дают схемы, в которых в правой части присутствует также неизвестное значение функции.

Например, неявный метод Эйлера:

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_k, y_k).$$

Обратим внимание, что неизвестное значение y_k имеется не только слева, но и как переменная функции f. По сути, эта формула есть уравнение относительно y_k.

Для отыскания y_k необходимо либо предварительно аналитически решать это уравнение в каждом отдельном случае, либо использовать на каждом шаге численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений.

Неявные схемы сложнее реализуются, занимают больше временных ресурсов, чем явные, но при этом для некоторых типов уравнений (например, жестких) они намного предпочтительнее ввиду гораздо лучшей точности.

Выше мы описали численные методы решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Но эти методы полностью без особых изменений распространяются на нормальные системы дифференциальных уравнений первого порядка. Все изменения – замена функций на вектор-функции. Сами методы и коэффициенты не меняются.

Кроме того, мы знаем, что любое дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, можно с помощью замен привести к нормальной системе. То есть, численно мы можем решить любые уравнения из нашего курса. Слово «любые» здесь весьма условно. Ниже мы покажем, что не любое уравнение можно в лоб решать численно. Точнее, любое уравнение нельзя решать численно, не проведя предварительно некоторого анализа.

Два примера некорректного использования численных методов и разностных схем.

1. Рассмотрим одну задачу Коши, для которой построим численное решение методом Эйлера.

$$y' = -\frac{y}{(x-2.03)^2},$$

$$y(0) = 1.$$

Построим разностную схему с шагом h=0.1 и нарисуем численную интегральную кривую.

$$y_k = y_{k-1} + 0.1\left(-\frac{y_{k-1}}{(x_{k-1}-2.03)^2}\right).$$

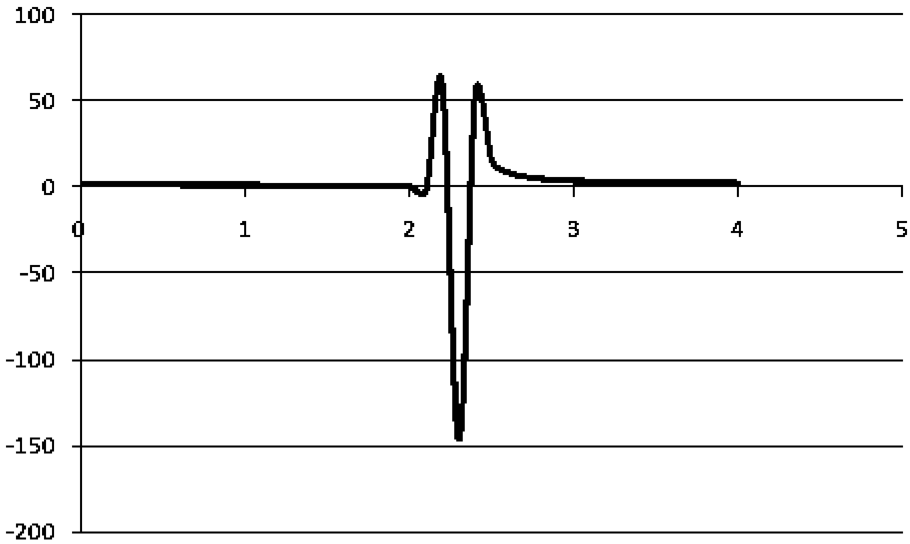

Рис.19. Приближенное решение уравнения с шагом h=0.1

На рисунке 19 изображено предполагаемое численное решение заданной задачи Коши методом Эйлера с шагом 0.1. Как видим, решение не уходит на бесконечность, а стремится к нулю, что придаёт нам некоторую уверенность в небольшой погрешности.

Теперь построим решение той же задачи Коши с шагом h=0.01.
Соответствующая разностная схема

$$y_k = y_{k-1} + 0.01\left(-\frac{y_{k-1}}{(x_{k-1} - 2.03)^2}\right).$$

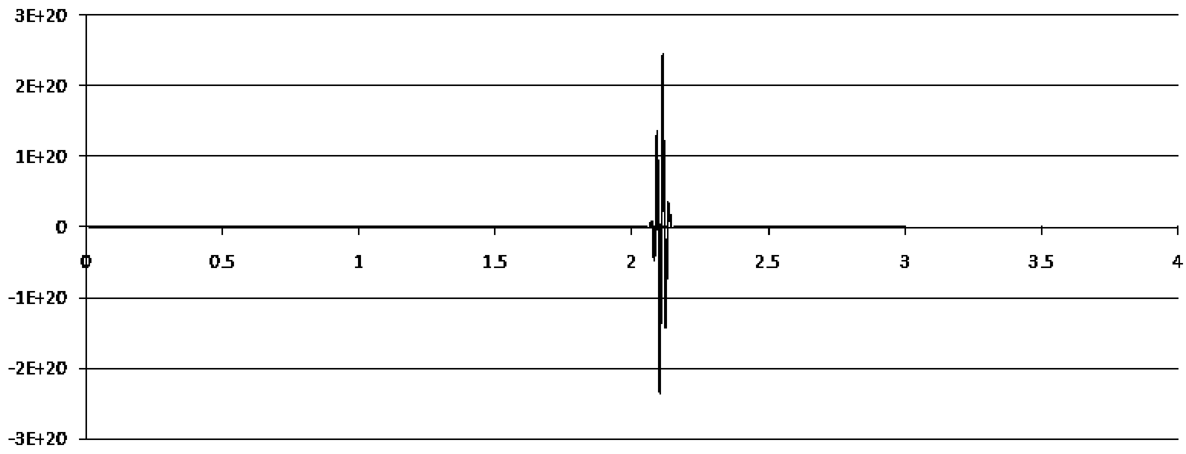

Рис.20. Приближенное решение уравнения с шагом h=0.01

На рисунке 20 мы уже видим совершенно другую интегральную кривую. Что даёт нам повод усомниться в правильности какого-то из двух решений. Естественно, стоит предположить, что решение с меньшим шагом аппроксимации даёт нам решение, больше похожее на правду.

Для того чтобы понять, что происходит на самом деле, следует решить задачу Коши. Заданное уравнение – уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{(x-2.03)^2}.$$

Его общее решение:

$$y = Ce^{1/(x-2.03)}.$$

Начальному условию удовлетворяет решение

$$y = e^{\frac{x}{2.03(x-2.03)}}.$$

Построим это решение (рис.21).

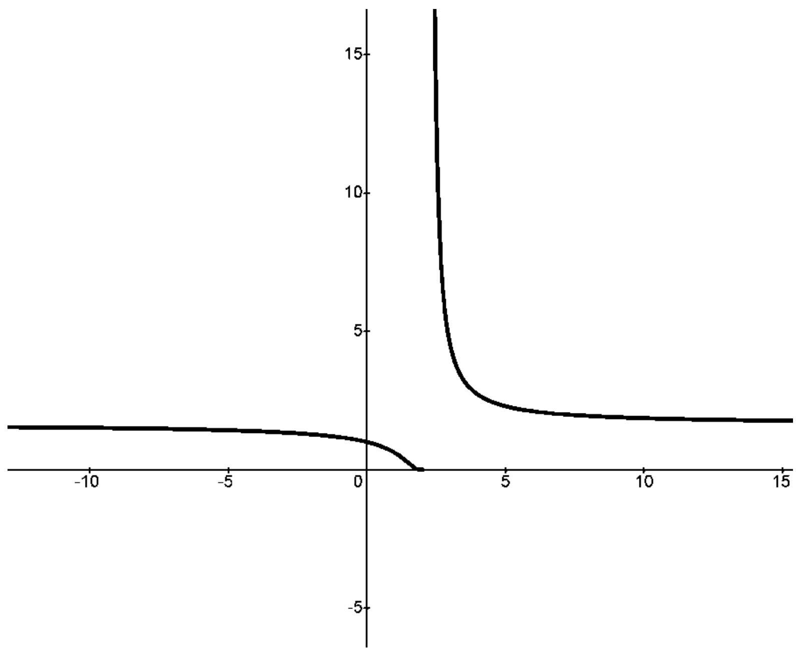

Рис.21. Точное решение уравнения

Интегральная кривая, соответствующая нашей задаче Коши, не определена в точке $x = 2.03$ и это видно сразу из уравнения. Также точка $(2.03,0)$ является особой точкой. В ней поле направлений не определено. Условия Теоремы о существовании и единственности для этой точки не удовлетворяются. Но решение нашей задачи Коши стремится слева в эту точку. Соответственно мы просто не имеем права строить решение, проходящее через $x = 2.03$. Если не провести анализ на существование и единственность, то полученное численное решение не будет иметь ничего общего с реальным решением. Дело в том, что из-за погрешности численных методов мы просто при подходе к $x = 2.03$ начинаем перескакивать с одной интегральной кривой на другую, что даёт нам такие замысловатые кривые, не имеющие ничего общего с реальным решением.

2. Ещё один пример служит иллюстрацией некорректного использования разностных схем и полученных из этого выводов.

Рассмотрим известную модель динамики численности изолированной популяции – уравнение Ферхюльста, называемое также логистическим уравнением (так его назвал сам Ферхюльст).

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

В данном уравнении *x(t)* –численность популяции в момент времени *t*, *r*- скорость роста (размножения) популяции, *K*- максимальная возможная численность популяции. Данное уравнение легко интегрируется. Его решение:

$$x = \frac{Kx_0 e^{rt}}{K + x_0(e^{rt} - 1)},$$

где x_0 - численность популяции в момент времени t=0.

На рисунке 22 изображено соответствующее решение.

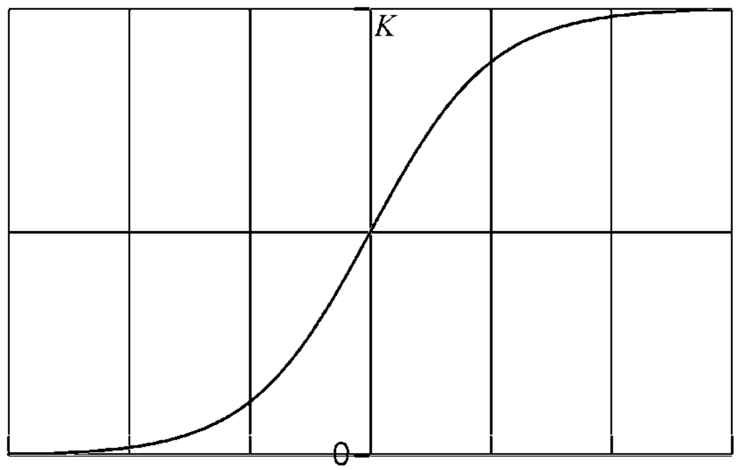

Рис.22. Интегральная кривая уравнения Ферхюльста

В ситуации «достаточного объёма ресурсов», то есть пока $x(t)$ достаточно мало (много меньше *K)*, логистическая функция поначалу растёт с экспоненциальной скоростью, но постепенно скорость снижается.

Когда численность достигает половину ёмкости среды, скорость начинает падать. Интегральная кривая постепенно выходит на горизонтальную асимптоту. $x = K$ - асимптотически устойчивое положение равновесия.

Все решения с положительными начальными условиями стремятся к этому положению равновесия. С точки зрения биологии это означает, что в рамках этой модели реализуется единственный динамический режим: численность популяции стабилизируется на единственном ненулевом уровне *K*.

В некоторых источниках можно встретить очень «интересную» модификацию этой модели – переход к так называемому разностному аналогу модели Ферхюльста.

Приведём примерный дословный текст.

«Заметим, что это уравнение можно получить, исходя из исследованного ранее дифференциального уравнения модели экспоненциального роста. Скорость $\frac{dx}{dt}$ есть отношение приращения численности к приращению времени (только в отличие от непрерывного случая приращение не является бесконечно малой величиной): $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{t+1} - x_t}{(t+1) - t} = x_{t+1} - x_t$.

Приходим к дискретному аналогу уравнения экспоненциального роста:

$x_{t+1} - x_t = r x_t \left(1 - \frac{x_t}{K}\right)$»

Далее обычно это уравнение с помощью сжатия времени приводят к виду

$x_{t+1} = k x_t (1 - x_t)$.

Последнее уравнение называют дискретным логистическим уравнением.

Его исследованию было посвящено много работ. В нашем курсе в разделе «разностных уравнений» мы также проведем его краткое изучение.

Здесь же приведем лишь некоторые его решения.

Забегая вперед, отметим, что это уравнение является нелинейным разностным уравнением первого порядка. Также такие уравнения называют дискретными уравнениями и рекуррентными соотношениями. Это уравнения вида $x_{k+1} = F(x_k)$. Эти уравнения весьма похожи на изученные нами дифференциальные уравнения. Основное отличие их состоит в том, что в дифференциальных уравнениях время (переменная) идёт непрерывно. В разностных же уравнениях время идёт дискретно. Состояния исследуемой величины рассматриваются лишь в дискретных точках через определенный промежуток времени. Но об этом поговорим далее в разделе «разностных уравнений». Сейчас же рассмотрим решения дискретного логистического уравнения.

Приведем графики решений при разных значениях параметра *k*.

При *k*=2 решение выглядит следующим образом (рис.23).

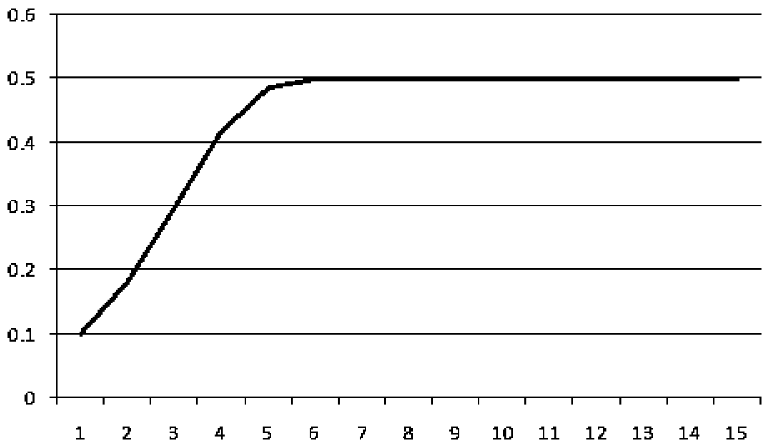

Рис.23. Решение логистического уравнения при k=2

Как видим, это решение очень похоже на решение уравнения Ферхюльста.

Но при k=2.7 уже возникают какие-то непонятные колебания, которые в рамках уравнения Ферхюльста просто невозможны (рис.24).

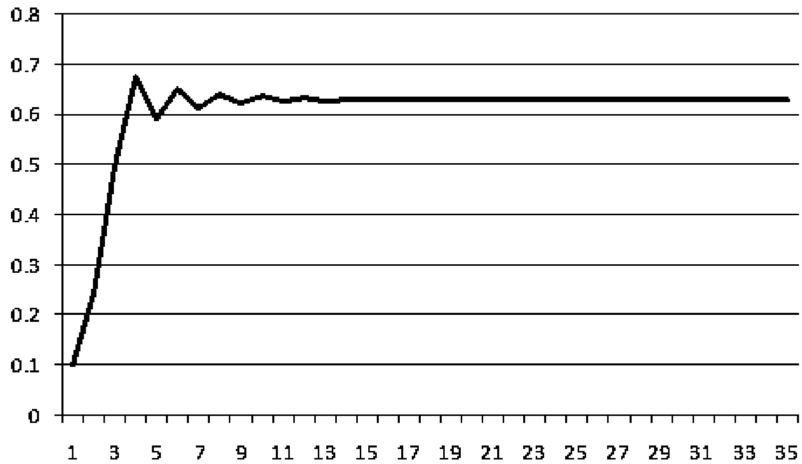

Рис.24. Решение логистического уравнения при k=2.7

При k=2.9 колебания усиливаются (рис.25).

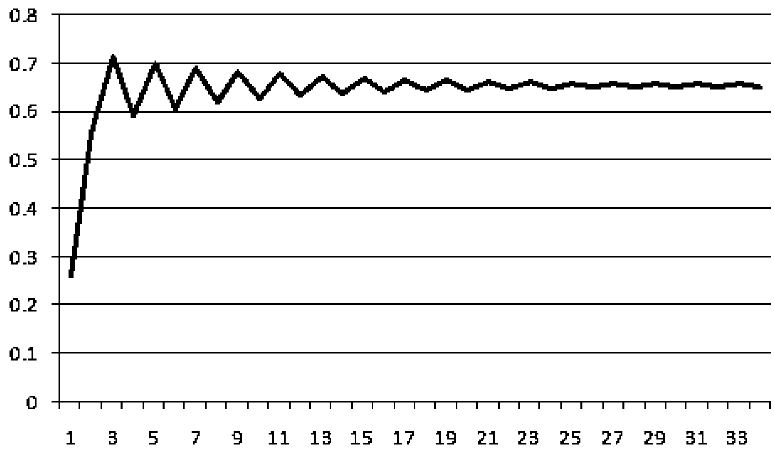

Рис.25. Решение логистического уравнения при k=2.9

При k=3.2 уже возникает периодическое решение (рис.26).

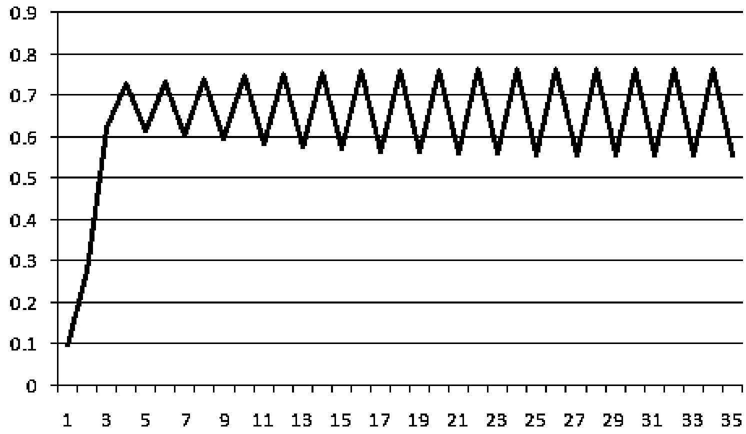

Рис.26. Решение логистического уравнения при k=3.2

При k=3.52 уже возникает периодическое решение с периодом длины 4 (рис.27).

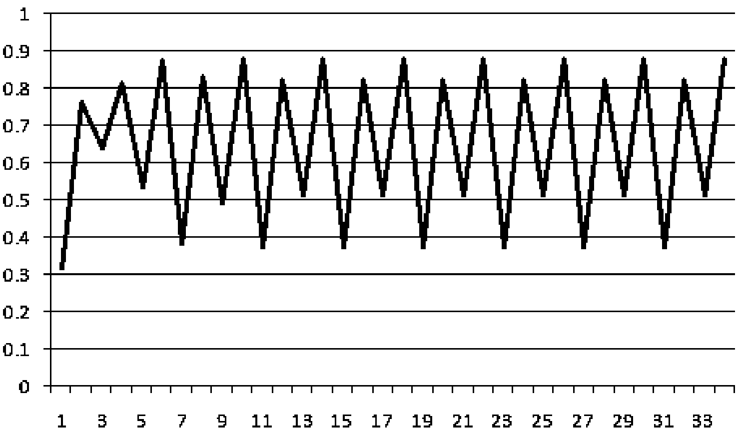

Рис.27. Решение логистического уравнения при k=3.52

Но самое интересное начинается с $k \approx 3.57$ (рис.28).

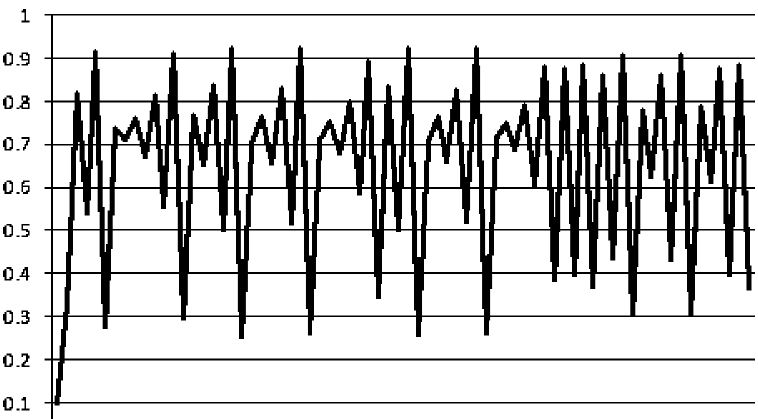

Рис.28. Решение логистического уравнения при k=3.57

Как видим, решение не стабилизируется, не становится периодическим. Это решение принадлежит к так называемым хаотическим режимам.

Как же так произошло, что из непрерывной модели Ферхюльста с одним единственным состоянием равновесия получилась модель с таким богатым разнообразием режимов?

Вся проблема кроется в некорректном переходе от производной к разности. Производная - отношение бесконечно малых величин!

При численных реализациях эти величины мы делаем пусть и не бесконечно, но малыми. Причём, если нам нужно, то мы делаем их ещё меньше.

В этом же переходе величину Δt сделали фиксированной и, более того, равной единице. Что привело к очень сильному искажению решения.

Несмотря на то, что дискретная логистическая модель не имеет ничего общего с моделью Ферхюльста, да и вообще с моделями численности популяций, именно она служит простым примером дискретного уравнения, в котором реализуется классическая картина рождения хаоса из серии бифуркаций, и может служить толчком для изучения такого интересного раздела математики, как теория хаоса. Отметим, что и в строгих дискретных моделях динамики численностей, построенных по всем правилам, возникают похожие динамические режимы.

В следующем разделе мы уже более подробно займемся изучением разностных уравнений, в том числе и вопросами теории бифуркаций.

Список литературы.

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1991.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями.-Изд.4-е – М.: УРСС, 2002.
3. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. - Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1965.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Мн.: Высшая школа, 1987.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.:УРСС, 1998.

Утюпин Юрий Валерьевич

Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Разностные уравнения.
Основы функционального анализа.

Часть 1. ОДУ.

Учебное пособие

Подписано в печать
п. л. – 10, заказ № ,

Отдел рекламы и PR СибГУТИ
630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86, офис 107, тел. (383) 269-83-18