2.10 Термы и формулы в исчислении предикатов

- ***Формулы*** **используются для записи предикатов.**
- **Истинностное значение формулы определяется конкретными значениями предметных переменных и предикатов, определенных на предметной области.**

- **Для записи действий с предметными переменными (или константами) используются *термы*.**

Значением терма является элемент из предметной области

В алфавит формул и термов входят

- **Предметные переменные x_i, y_j**
- ***Функциональные переменные*** f_m^n
- ***Предикатные переменные*** P_m^n
  $n,m = 0,1,2,\ldots$, n – количество переменных
- **Логические символы $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$ (дополнительные $\vee$, &, $\exists$)**
- **Служебные символы (,)**

Последовательность символов в исчислении предикатов называется *термом,*

если она удовлетворяет следующим условиям

- **любая предметная переменная, любая нульарная функциональная переменная является термом;**
- **если $t_1,\ldots,t_n$ – термы, то $f_m^n(t_1,\ldots,t_n)$– терм;**
- **других термов нет**

Пример.

- **Выражение** $f_1^2(x_4, f_2^2(f_3^2(x_1, x_2), x_3))$ **является термом.**

- **Выражение** $f_1^2(x_4, P_2^2(x_1, x_2), x_3)$ **не является термом.**

Пусть Ω – множество натуральных чисел

Придадим теперь функциональным символам следующие значения:

- $f_1^2(x, y) = xy$ – умножение двух чисел,
- $f_2^2(x, y) = x^y$ – возведение в степень,
- $f_3^2(x, y) = x + y$ сложение двух чисел.

- **Тогда терм выглядит так** $x_4(x_1 + x_2)^{x_3}$

- **Полагая x_1=x_2=1, x_3=x_4=2, получаем, что значение терма равно 8.**

- **Если в формуле по некоторой переменной навешан квантор, то такая переменная называется *связанной***
- **В противном случае, переменная является *свободной***
- **Если в формуле нет свободных переменных, то формула называется *замкнутой***

- **Последовательность символов в исчислении предикатов называется *формулой,* если она удовлетворяет следующему определению**

- **Каждый предикатный 0-арный символ является формулой**
- **если P_m^n – *n*-арный предикатный символ и $t_1,\ldots,t_n$ – термы, то**

  $P_m^n(t_1,\ldots,t_n)$– формула.

  Все входящие в эту формулу предметные переменные свободные;

- **если F_1, F_2 – формулы, то $\neg(F_1)$, $(F_1 \to F_2)$ –формулы.**

  Свободные вхождения переменных в F_1, F_2 остаются свободными в формулах $\neg(F_1)$, $(F_1 \to F_2)$;

- **Если переменная *x* – свободная в *F*, то $\forall x(F)$ – формула.**

  Вхождения других переменных (отличных от *x*) остаются свободными в формуле $\forall x(F)$;
- **других формул нет**

Пример.

- **Выражение $P(x_1, x_2, x_3)$ является формулой. Все переменные – свободные.**
- **В формуле**

  $(\forall x \exists y\ P(x,y,z)) \rightarrow \forall x Q(x,w)$

  переменные x и y являются связанными, а переменные z и w свободными.

- Выражение

$(\forall x \exists y\ P(x,y,z)) \to \exists x \forall x Q(x,w)$

не является формулой

- **Формула**
  $\forall x P(x) \to \forall x\, R(x)$
  является замкнутой

2.11 Аксиомы и правила вывода в ИП

Логические аксиомы для ИП

- A_1 $(A\to(B\to A))$,
- A_2 : $((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$
- A_3 : $((\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B))$
- P_1 : $\forall x\, A(x)\to A(t)$, где формула $A(x)$ не содержит терм t
- P_2 : $\forall x(A\to B)\to(A\to\forall xB)$, если формула A не включает свободных вхождений x.

Правила вывода в ИП

- **modus ponens:** $$\frac{A, A \to B}{B} MP$$

- **правило обобщения** $$\frac{A}{\forall x A} (\forall^{+})$$

- Понятие выводимой формулы определяется так же, как и в исчислении высказываний.

Пример. Доказать выводимость в исчислении предикатов

$\forall x \forall y A \vdash \forall y \forall x A$

1	$\forall x \forall y A$	гипотеза
2	$\forall x \forall y A \to \forall y A$	P_1
3	$\forall y A$	MP 1,2
4	$\forall y A \to A$	P_1
5	A	MP 3,4
6	$\forall x A$	$\forall$+5
7	$\forall y \forall x A$	$\forall$+ 6

Правило индивидуализации

Если A(x) не содержит терм t, то
$\forall x A(x) \vdash A(t)$.

Доказательство.

- 1 $\forall x A(x)$ гипотеза
- 2 $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$ *P1*
- 3 $A(t)$ MP 1,2

Правило существования (ПС).

Если терм t свободный для переменной x в формуле A(x), то $A(t) \vdash \exists x A(x)$.

Доказательство.

- 1 $\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg A(t)$ *P1*
- 2 $(\forall x \neg A(x) \rightarrow \neg A(t)) \rightarrow (A(t) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x))$

$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$–**тавтология**

$B \leftarrow A(t),\ A \leftarrow \forall x \neg A(x)$

- 3 $A(t) \rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$ **MP 1,2**

$A(t) \rightarrow \exists x\, A(x)$

Теорема дедукции для ИП

2.12 Логические эквивалентности с кванторами Предварённая форма

- **Предикаты *P*, *Q* мощности *n*, определенные на предметной области Ω называются *логически эквивалентными (равносильными)*,**

  если $P(x_1,\ldots,x_n) \equiv Q(x_1,\ldots,x_n)$ для любого набора предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Пример.

Пусть предметная область – это множество слов

$$\{a, abbab, bbabb, aa\}.$$

На этом множестве заданы два предиката

- *P(x)*=«Слово *x* содержит букву b»
- *Q(x)*=«Слово *x* имеет длину 5»

На данном множестве эти два предиката равносильны.

- Если изменить предметную область, то предикаты P и Q могут стать неравносильными.

Теорема.

- ***Разноименные кванторы не всегда коммутируют.***

Доказательство.

- Пусть имеется двуместный предикат D(x,y)= «x делится на y» на множестве натуральных чисел.

Тогда

- $\exists x \forall y\ D(x,y) \equiv 0$ и
- $\forall y \exists x D(x,y) \equiv 1$.

Теорема.

- ***Имеют место следующие логические следования и эквивалентности***

Законы де Моргана

- $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$
- $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$

Коммутация одноименных кванторов

- $\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y \forall x\ P(x,y)$
- $\exists x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y \exists x\ P(x,y)$

Законы дистрибутивности

- $\forall x(P(x)\ \&\ Q(x)) \equiv \forall x P(x)\ \&\ \forall x Q(x)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Законы ограничения действия кванторов

- $\forall x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x P(x) \vee Q(y)$
- $\forall x(P(x) \& Q(y)) \equiv \forall x P(x) \& Q(y)$
- $\exists x(P(x) \& Q(y)) \equiv \exists x P(x) \& Q(y)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(y)) \equiv \exists x P(x) \vee Q(y)$

равносильности с переименованием переменных

- $\exists x P(x) \& \forall x R(x) \equiv \exists x \forall z (P(x) \& R(z))$
- $\exists x P(x) \vee \forall x R(x) \equiv \exists x \forall z (P(x) \vee R(z))$
- $\exists x P(x) \& \forall x R(x) \equiv \forall z \exists x (P(x) \& R(z))$
- $\exists x P(x) \vee \forall x R(x) \equiv \forall z \exists x (P(x) \vee R(z))$

- $\exists x P(x) \& \exists x R(x) \equiv \exists x \exists z (P(x) \& R(z))$
- $\forall x P(x) \vee \forall x R(x) \equiv \forall x \forall z (P(x) \vee R(z))$

- $\exists y \forall x P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y P(x,y) \equiv 1$

Формула A находится в *предваренной форме*, если она имеет следующий вид

$$A=Q_1x_1\ldots Q_nx_nB(x_1,\ldots,x_n),$$

где $Q_1,\ldots,Q_n$ – кванторы,

а B – бескванторная формула.

- Приставка $Q_1x_1\ldots Q_nx_n$ называется *префиксом*, а формула B – *матрицей*.

Теорема.

- ***Для любой формулы логики предикатов существует логически эквивалентная ей формула в предваренной форме.***

Доказательство.

Для того, чтобы привести формулу к предваренной форме, используют следующие шаги:

- Исключают импликации
- Для внесения $\neg$ внутрь скобок применяют законы де Моргана и закон двойного отрицания

- Для переноса кванторов применяют законы дистрибутивности, законы ограничения действия кванторов и равносильности с переименованием переменных.

Пример 1. Рассмотрим построение предваренной формы для формулы $\forall x P(x) \to \forall x\, R(x)$.

- $\forall x P(x) \to \forall x\, R(x) \equiv$

$\neg(\forall x P(x)) \vee \forall x\, R(x) \equiv$

$\exists x\, \neg P(x) \vee \forall x\, R(x) \equiv$

$\exists x\, \neg P(x) \vee \forall z\, R(z) \equiv$

$\exists x\, (\neg P(x) \vee \forall z\, R(z)) \equiv$

$\exists x\, \forall z\, (\neg P(x) \vee R(z))$

Пример 2

$$\exists x\, \neg P(x) \vee R(x)$$

$$\exists y\ (\neg P(y) \vee R(x))$$