3. Теория алгоритмов и рекурсивных функций

3.1 Понятие алгоритма



■ *Алгоритм* – это совокупность правил, соблюдение которых при вычислениях приводит к решению поставленной задачи.

Можно выделить некоторые черты, присущие каждому алгоритму

Дискретность.

Преобразование начальных данных происходит пошагово. На каждом шаге из данных по правилам получается новая совокупность данных.



Детерминированность.
На каждом шаге результат работы алгоритма однозначно определяется совокупностью данных предыдущего шага.



■ Направленность.

Для алгоритма есть критерий, позволяющий определить, что является результатом работы алгоритма.



Элементарность шагов алгоритма.

Описание действий на каждом шаге алгоритма должно быть достаточно простым.



■ Массовость.

Применимость алгоритма не к одной задаче, а к целому классу задач.



- Каждый алгоритм предполагает наличие данных
 - □входные,
 - □промежуточные,
 - □итоговые,
- **с** которыми производятся определенные действия.



- Будем считать, что все данные представлены натуральными числами.
- Каждое входное натуральное число должно быть конечным, тем не менее не предполагается верхняя граница этого числа.



 Так же нет верхней границы количества шагов для обработки конкретных данных, однако количество шагов должно быть конечным.

3.2 Машина Тьюринга



■ Первый важный и достаточно широкий класс алгоритмов был описан А.Тьюрингом и Э. Постом в 1936-1937гг.



■ Поскольку алгоритм – это совокупность правил, то чтобы решить проблему интерпретации (понимания) правил, необходимо задать конструкцию интерпретирующего устройства.



Для этого нужно определить

- язык, на котором описывается множество правил поведения,
- и машину, которая может интерпретировать утверждения, сделанные на таком языке и выполнять шаг за шагом каждый точно определенный процесс.



■ Английский математик А.М.Тьюринг в 1937 году впервые предложил модель вычислительной машины, известной теперь под названием машина Тьюринга, которая представляет собой воображаемую машину или математическую модель машины.



Требования, которые предъявляются к машине

- детерминированность работы
- возможность ввода различных начальных данных
- возможность получения результата работы машины.



Под одноленточной машиной Тьюринга понимают такое кибернетическое устройство, которое состоит из следующих элементов:



■ *бесконечной ленты*, разделенной на ячейки, которая используется для ввода и вывода данных, а также для записи промежуточных результатов



На ленте могут записываться буквы некоторого алфавита $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$ (внешний алфавит машины Тьюринга).

Удобно считать, что пустые ячейки на самом деле содержат некоторую букву алфавита A (будем считать, что это буква a_0)



- управляющей головки, способной читать символы, содержащиеся в ячейках ленты, писать символы в эти ячейки и оставаться на месте или передвигаться на одну ячейку вправо или влево.
- выделенной ячейки памяти, содержащей символ внутреннего алфавита, задающий состояние машины Тьюринга



Головка может находиться в одном из состояний $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$ (внутренний алфавит машины Тьюринга).

Состояние

 q_o –заключительное,

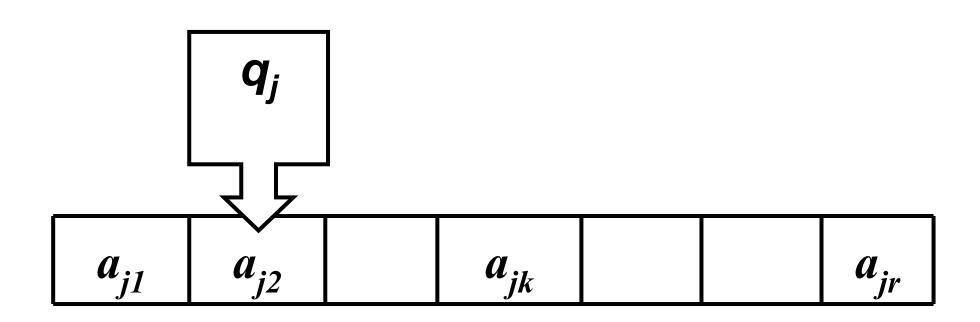
 q_1 — начальное.



 области памяти, содержащей команды (программу) машины Тьюринга, доступной только для чтения



Обычно машина Тьюринга схематично изображается так



если машина, имея внутреннее состояние q_i и воспринимая ячейку ленты с символом a_i

- переводит внутреннюю память в состояние q_b и
- одновременно содержимое воспринимаемой ячейки заменяет символом а_s,
- управляющая головка остается на месте (Н), сдвинется на одну ячейку вправо (R) или влево (L),



то машина выполняет одну из команд

- $\blacksquare q_i a_i \rightarrow a_s H q_b$
- $\blacksquare q_i a_i \rightarrow a_s R q_b$
- $\blacksquare q_i a_i \rightarrow a_s L q_b$
- Совокупность всех команд, которые может выполнять машина, называется ее *программой*



- Поскольку работа машины целиком определяется состоянием в данный момент ее внутренней памяти q_i и состоянием воспринимаемой ячейки a_{j} ,
- то для каждой пары q_i , a_j программа машины должна содержать одну и только одну команду, начинающуюся словом q_i a_i

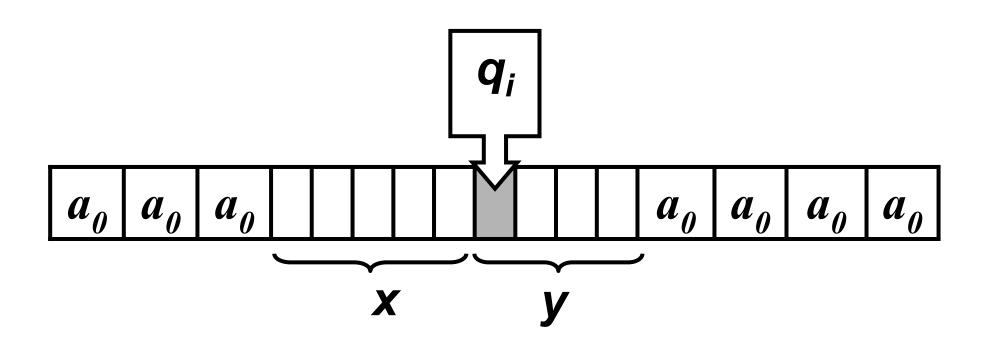


■ Текущее состояние машины Тьюринга или конфигурация — это полная информация о внутреннем состоянии машины, о содержимом ячеек ленты и о ячейке, которую обозревает головка машины.

- Конфигурация машины может быть записана в виде слова xq_iy , где x и y слова записанные на ленте
- левее слова *х* и правее слова *у* все ячейки содержат пустой символ,
- головка машины обозревает ячейку, которая находится сразу после слова x,
- первая буква слова у записана в ячейке ленты, обозреваемой головкой машины,
- q_i состояние машины на данном шаге.



Конфигурация $x q_i y$





- Конфигурация с начальным состоянием головки называется начальной,
- с заключительным состоянием заключительной.

ķΑ

■ Переход за один такт работы МТ из конфигурации x₁ q_i y₁ в конфигурацию x₂ q_j y₂ будем обозначать так

$$x_1 q_i y_1 \models x_2 q_i y_2$$



 Если переход из одной конфигурации в другую осуществляется более, чем за один шаг, то это будем обозначать таким образом

$$x_1 q_i y_1 \mid x_2 q_j y_2$$



Пример 1.

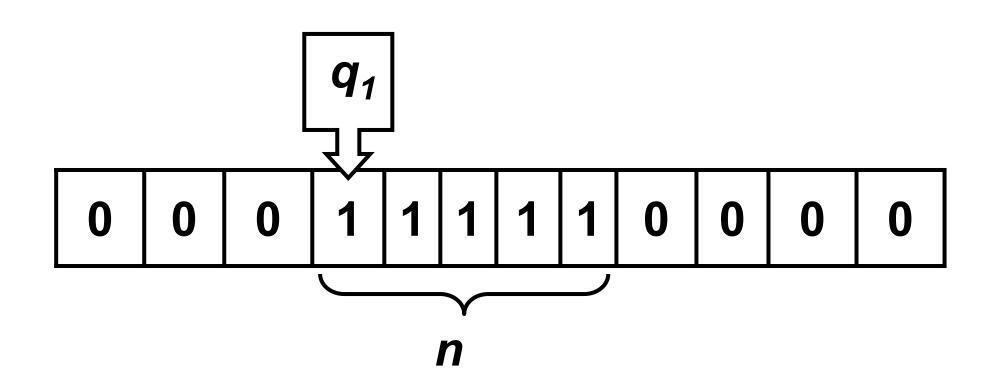
Построить МТ, которая осуществляет переход 0 q₁ 1ⁿ - 01ⁿ q₀ 0, n≥0



- внешний алфавит для такой МТ достаточно взять двухсимвольный A={0,1},
- причем пустым символом будет 0



Начальная конфигурация $0 q_1 1^n$





 Действия МТ сводятся к переходу к первому нулю после последовательности единиц и остановке.



Программа МТ

- $\blacksquare q_1 0 \rightarrow 0 H q_0$
- $q_1 1 \rightarrow 1 R q_2$
- $q_2 1 \rightarrow 1 R q_2$
- $= q_2 0 \rightarrow 0 H q_0$



	q_1	\boldsymbol{q}_2
0	OHq_0	OHq_0
1	1Rq ₂	1Rq ₂



■ Приведем пошаговое исполнение программы для начальной конфигурации при *n*=3

 $0 q_1 1110 \models$ Будет выполняться $q_1 1 \rightarrow 1 R q_2$

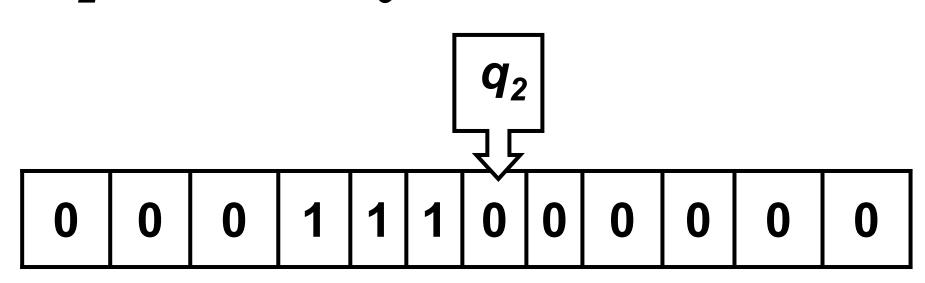


0 1 q_2 1 1 \models Будет выполняться q_2 1 \rightarrow 1 R q_2

 $0 \ 1 \ 1 \ q_2 \ 1 \ 0$ | Будет выполняться $q_2 \ 1 \rightarrow 1 \ R \ q_2$



0 1 1 1
$$q_2$$
0 |= Будет выполняться q_2 0 \rightarrow 0 H q_0





$0 \ 1 \ 1 \ 1 \ q_0 \ 0$ Остановка

