Линейные уравнения

Опр. Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение, в которое неизвестная функция ***y***(***x***)и её производные входят линейно, т.е. в первой степени:

$$q_0(x)y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + q_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1}(x)y' + q_n(x)y = F(x) \qquad (1)$$

Если $q_0(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$ то, умножая (1) на $\dfrac{1}{q_0(x)}$, получим

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (2)$$

Если $f(x) = 0 \forall x \in (a,b)$, то получим ***линейное однородное*** уравнение:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (3)$$

Задача Коши для уравнений (2) и (3):

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \\ &y'(x_0) = y_1, \\ &y''(x_0) = y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где y_0, y_1, y_2, …, y_{n-1} - заданные числа

Теорема о существовании и единственности

Для уравнения в общем виде $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$

условия существования и единственности:

непрерывность $F, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{\partial F}{\partial y''}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}$.

Тогда для уравнения (2) $\frac{\partial F}{\partial y} = -p_n(x), \frac{\partial F}{\partial y'} = -p_{n-1}(x), \frac{\partial F}{\partial y''} = -p_{n-2}(x), \cdots, \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1(x)$

Отсюда следует

Теорема 1 существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения: если функции $f(x)$, $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны на интервале (a, b), x_0 - произвольная точка этого интервала, то для любых начальных условий (4) существует единственная функция $y(x)$, определённая на всём интервале (a, b) и удовлетворяющая уравнению (2) и начальным условиям (4).

Далее везде будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши выполняются, даже если это не оговаривается специально

Линейный дифференциальный оператор и его свойства

Множество функций, n раз дифференцируемых на интервале (a, b), образует линейное пространство.

Рассмотрим оператор $L_n(y)$, который отображает функцию $y(x)$, имеющую $k\ (k \geq n)$ производных, в функцию, имеющую $k - n$ производных:

$$L_n(y) = y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_{n-2}(x)y''(x) +$$

$$+ p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} p_k(x)y^{(n-k)}(x). \qquad (5)$$

Тогда уравнение (2) можно записать так:

$$L_n(y) = f(x) \qquad (2')$$

А уравнение (3) можно записать так:

$$L_n(y) = 0 \qquad (3')$$

Теорема 2 Дифференциальный оператор $\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y})$ является линейным оператором.

Док-во. Требуется доказать, что

1. $L_n(Cy)=C\,L_n(y)$
2. $L_n(y_1+y_2)=L_n(y_1)+L_n(y_2)$

Это следует из свойств производных:

$$\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{Cy}) = \left(\boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{x})\right)^{(\boldsymbol{n})} + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_k}(\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{Cy}(\boldsymbol{x})\right)^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})} =$$

$$= \boldsymbol{Cy}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{x}) + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Cy}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x}) == \boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{x}) + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{x})\right] = \boldsymbol{CL_n}(\boldsymbol{y}).$$

$$\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)^{(\boldsymbol{n})} + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_k}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{y}_1^{(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{y}_2^{(\boldsymbol{n})} +$$

$$+ \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_k}(\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{y}_1^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})} + \boldsymbol{y}_2^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}\right] = \left[\boldsymbol{y}_1^{(\boldsymbol{n})} + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_1^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}\right] + \left[\boldsymbol{y}_2^{(\boldsymbol{n})} + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{p_k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_2^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}\right] =$$

$$= \boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}_1) + \boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}_2).$$

Далее мы сначала изучим, как устроено общее решение линейного однородного уравнения (3’), затем неоднородного уравнения (2’), и только потом научиться решать эти уравнения

Опр. Система функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ называется **линейно зависимой** на интервале ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), если существует набор постоянных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\boldsymbol{n}}$, не равных нулю одновременно, таких, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю на ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$):

$$\alpha_1 \boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

Если равенство $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b)$

возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{\boldsymbol{n}} = 0$

то система функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ называется **линейно независимой** на интервале ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$).

Другими словами, функции $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$ **линейно зависимы** на интервале ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), если существует равная нулю на ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) их нетривиальная линейная комбинация

Примеры: 1. Функции 1, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^3$ линейно независимы на любом интервале ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$). Их линейная комбинация

$$\alpha_0 + \alpha_1 \boldsymbol{x} + \alpha_2 \boldsymbol{x}^2 + \alpha_3 \boldsymbol{x}^3$$ - многочлен 3 степени

- не может иметь на ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) больше трёх корней, поэтому равенство

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \equiv 0 \text{ на } (a,b)$$ возможно только при

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Пример 1 система функций 1, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{x}^3$, …, $\boldsymbol{x}^n$.
Их линейная комбинация - многочлен степени n - не может иметь на ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$) больше $\boldsymbol{n}$ корней.

2. Функции $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{x}}$ линейно независимы на любом интервале ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), если $\boldsymbol{k}_1 \neq \boldsymbol{k}_2$

Действительно, если, например, $\alpha_1 \neq 0$, то равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{x}} + \alpha_2 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{x}} = 0$$ имеет место в единственной точке

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2} \ln\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$$

Система функций $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \cdots, e^{k_n x}$

также линейно независима, если числа k_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) попарно различны, однако прямое доказательство этого факта чуть сложнее.

Для доказательства здесь следует воспользоваться тем фактом, что если функция тождественно равна нулю на отрезке, то и все её производные также тождественно равны нулю на этом отрезке.

Нам необходим простой универсальный инструмент, дающий ответ на вопрос о линейной зависимости функций.

Опр. Определителем Вронского (вронскианом) системы n - 1 раз дифференцируемых функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \cdots\cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \cdots\cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \cdots\cdots & y_n''(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_3^{(n-1)}(x) \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Теорема 3 о вронскиане линейно зависимой системы функций.
Если система функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ **линейно зависима** на интервале ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), то вронскиан этой системы тождественно равен нулю на этом интервале.

Док-во. Пусть $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ линейно зависимы на интервале ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$), тогда существуют $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\boldsymbol{n}}$

, из которых хотя бы одно отлично от нуля , такие что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0 \;\; \forall x \in (a,b)$$

Продифференцируем это равенство (n-1) раз по $\boldsymbol{x}$ и получим:

$$\begin{cases} \alpha_1 \boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \alpha_1 \boldsymbol{y}_1'(\boldsymbol{x}) + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2'(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}'(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 \boldsymbol{y}_1{}^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}) + \alpha_2 \boldsymbol{y}_2{}^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}{}^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}) = 0. \end{cases}$$

Это – однородная СЛАУ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{\boldsymbol{n}}$

и не все они равны нулю. Отсюда следует…..
Теорема доказана.

Теорема 4 о линейности пространства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения. Множество частных решений линейного однородного дифференциального уравнения образует линейное пространство.

Док-во. Требуется доказать, что:

1. Если $\boldsymbol{y = y_1(x)}$ является частным решением уравнения (3’), то и $\boldsymbol{y = Cy_1(x)}$ является частным решением уравнения
2. Если $\boldsymbol{y_1(x)}$ и $\boldsymbol{y_2(x)}$ частные решения, то $\boldsymbol{y_1(x) + y_2(x)}$ также является решением ур-я (3’).

Это напрямую следует из теоремы 2 о линейности дифференциального оператора.

Следствие. Если $\boldsymbol{y_1(x)}, \boldsymbol{y_2(x)}, \ldots, \boldsymbol{y_n(x)}$ - частные решения уравнения (3’), то их линейная комбинация $\boldsymbol{C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)}$ - тоже частное решение этого уравнения.

Теорема 5 . Пусть $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ - частные решения линейного однородного дифференциального уравнения (3'). Если определитель Вронского этой системы функций равен нулю в некоторой точке

$$\boldsymbol{x}_0 \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

, то система функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ линейно зависима, и её определитель Вронского тождественно равен нулю на $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Док-во. Пусть $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}_0) = 0,\ \boldsymbol{x}_0 \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Тогда однородная система линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, …, $\boldsymbol{C}_n$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x}_0) = 0 \\ \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{y}_1'(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{y}_2'(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{y}_n'(\boldsymbol{x}_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{y}_1^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{y}_2^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{y}_n^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}_0) = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. То есть существуют такие $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, …, $\boldsymbol{C}_n$, не все равные нулю, при которых верны все уравнения системы.

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$

Так как по условию теоремы $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …,$\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ –частные решения ур-я(3’) , то и ***y(x)***- также частное решение этого уравнения.

Кроме того, оно удовлетворяет нулевым начальным данным, то есть ***y(x)*** является решением задачи Коши:

$$\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n}-1)} + \boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n}-2)} + \cdots + \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_0) = 0,\\
&\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1'(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2'(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}'(\boldsymbol{x}_0) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}_0) + \cdots + \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{n}-1)}(\boldsymbol{x}_0) = 0.
\end{aligned}$$

Но этой же задаче Коши удовлетворяет и функция $y \equiv 0$ на (a,b)

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0 \text{ на } (a,b)$$

Это и означает линейную зависимость функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$.
А по Теореме 3 Вронскиан также тождественно равен нулю.

Теорема 6. Если определитель Вронского $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ системы $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ частных решений линейного однородного дифференциального уравнения отличен от нуля в некоторой точке отрезка ***(a,b)*** , то $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ отличен от нуля в любой точке этого интервала.

Теорема 5-6. Если $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ - определитель Вронского системы $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ частных решений линейного однородного дифференциального уравнения, то либо на интервале (***a***, ***b***) $W(x) \equiv 0$ (что означает линейную зависимость этих решений на (***a***, ***b***)), либо $W(x) \neq 0$ в любой точке этого интервала (что означает линейную независимость этих решений на (***a***, ***b***)).

Опр. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения ***n***-го порядка называется любая линейно независимая система $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ его ***n*** частных решений.

Теорема 7 о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального равнения. Любое линейное однородное дифференциальное уравнение ***n*** -го порядка с непрерывными коэффициентами имеет фундаментальную система решений, т.е. систему из
n линейно независимых решений.

Док-во. Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Пусть

$$
\begin{array}{llll}
L_n[y_1]=0, & L_n[y_2]=0, & \dots\dots\dots & L_n[y_n]=0, \\
y_1(x_0)=1, & y_2(x_0)=0, & & y_n(x_0)=0, \\
y_1'(x_0)=0, & y_2'(x_0)=1, & & y_n'(x_0)=0, \\
y_1''(x_0)=0, & y_2''(x_0)=0, & & y_n''(x_0)=0, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
y_1^{(n-1)}(x_0)=0; & y_2^{(n-1)}(x_0)=0; & \dots\dots\dots & y_n^{(n-1)}(x_0)=1;
\end{array}
$$

Поскольку $\boldsymbol{x}_0 \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, то выполняются условия теоремы о существовании и единственности для каждой из выше поставленных задач Коши. Следовательно $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ -частные решения уравнения (3’), а определитель Вронского в точке x_0 равен 1. Значит по теореме 5-6 эти функции линейно независимы. А значит ФСР из ***n*** функций существует.

Теорема 8 о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения. Общее решение $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ линейного однородного дифференциального уравнения есть линейная комбинация функций из фундаментальной системы решений этого уравнения:

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\,\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \boldsymbol{C}_n\,\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x}).$$

Док-во. Пусть $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ – ФСР линейного однородного дифференциального уравнения. Требуется доказать, что любое частное решение $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x})$ этого уравнения содержится в формуле $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ при некотором наборе постоянных $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \ldots, \boldsymbol{C}_n$.

Возьмём любую точку $\boldsymbol{x}_0 \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

Тогда СЛАУ

$$\begin{aligned}
&C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \cdots + C_ny_n(x_0) = y^*(x_0),\\
&C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \cdots + C_ny_n'(x_0) = y^{*'}(x_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y^{*(n-1)}(x_0).
\end{aligned}$$

имеет единственное решение, поскольку её определитель - Вронскиан ФСР, а значит не равен нулю. Следовательно $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x})$, а значит совпадает с ней по Теореме о СЕ.

Значит $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$

Формула Лиувилля.

Теорема Определитель Вронского системы $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ решений однородного уравнения удовлетворяет уравнению

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$$

, где $\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})$ - коэффициент при $\boldsymbol{n}$ - 1 производной.

Понижение порядка линейного однородного уравнения, если известно одно его частное решение.

Пусть известно одно частное решение $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$ уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

Тогда мы можем понизить порядок уравнения, то есть найти второе решение данного уравнения, используя формулу Лиувилля

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}$$

Пример. найти общее решение уравнения $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = 0$

Главная проблема в такого рода задачах – отсутствие алгоритма нахождения частного решения.

В данном случае попробуем найти его в простой форме $y = x^k$

$$x^2(1-\ln x)k(k-1)x^{k-2} + xkx^{k-1} - x^k = 0,\ x^k\left[k(k-1) + k - 1 + k(k-1)\ln x\right] = 0$$

Уравнение удовлетворяется, если $k = 1$, значит $y=x$ – частное решение

Далее воспользуемся ф. Лиувилля

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & y_2(x) \\ 1 & y_2'(x) \end{vmatrix} = xy_2'(x) - y_2(x) = C_2 e^{-\int p_1(x)dx}$$

$$\int p_1(x)dx = \int \frac{1}{x(1-\ln x)}dx = -\int \frac{d(1-\ln x)}{1-\ln x} = -\ln(1-\ln x),\ e^{-\int p_1(x)dx} = e^{\ln(1-\ln x)} = 1-\ln x,$$

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{(1-\ln x)dx}{y_1^2} = x\int \frac{(1-\ln x)dx}{x^2} = x\int \frac{x\frac{1}{x} - \ln x}{x^2}dx = x\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = x\frac{\ln x}{x} = \ln x$$

Итак, фундаментальная система решений этого уравнения: $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \ln x$, общее его решение $y(x) = C_1 x + C_2 \ln x$

Восстановление линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений.

Пусть дана система функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$, для которой $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ не= 0 на $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Требуется составить линейное однородное уравнение, у которого фундаментальная система решений состоит из функций $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$.

Пусть $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ – решение уравнения (3), тогда

$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$, …, $\boldsymbol{y}_n(\boldsymbol{x})$ – линейно зависимая система функций. Тогда

$$\begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \cdots\cdots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \cdots\cdots & y_n'(x) \\ y''(x) & y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \cdots\cdots & y_n''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_3^{(n-1)}(x) \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & y_3^{(n)}(x) \cdots\cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Разложением по первому столбцу получим линейное уравнение для ***y(x)***

Пример: составить линейное уравнение, у которого фундаментальная система решений равна $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) = \cos\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$. Решение:

$$\begin{vmatrix} y(x) & \cos x & x^3 \\ y'(x) & -\sin x & 3x^2 \\ y''(x) & -\cos x & 6x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y''(x)\begin{vmatrix} \cos x & x^3 \\ -\sin x & 3x^2 \end{vmatrix} - y'(x)\begin{vmatrix} \cos x & x^3 \\ -\cos x & 6x \end{vmatrix} + y(x)\begin{vmatrix} -\sin x & 3x^2 \\ -\cos x & 6x \end{vmatrix} = 0.$$

Терема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с непрерывными на интервале (***a***, ***b***) коэффициентами и правой частью

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$y_{\text{об}}(x) = y_{\text{од}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = (C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)) + y_{\text{ч}}(x).$$

Док-во. Мы должны доказать, что если известно частное решение $y_{\text{ч}}(x)$ неоднородного уравнения, то любое его другое частное решение может быть получено по формуле

$$\varphi(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = \big(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)\big) + y_{\text{ч}}(x)$$

Это следует из того, что

$$L_n(\varphi - y_{\text{ч}}) = L_n(\varphi) - L_n(y_{\text{ч}}) = f(x) - f(x) = 0$$

Теорема о наложении решений

Если $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$ - частное решение неоднородного уравнения $\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$ - частное решение неоднородного уравнения $\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$, то функция

$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ -частное решение неоднородного уравнения

$$\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}) = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных) решения неоднородного уравнения на примере уравнения 2-го порядка.

$$\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Пусть $\boldsymbol{y_1(x)}, \boldsymbol{y_2(x)}$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения

$$\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = 0$$

$\boldsymbol{y}_{\text{од}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$ – его общее решение.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$\boldsymbol{y}_{\text{ч}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) = \left[C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)\right] +$$
$$+\left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right]$$

Будем считать, что $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$

Тогда

$$y''(x) = \left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right]' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x)$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)\left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right] +$$
$$+ p_2(x)\left[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\right] = f(x).$$

Подставим ***y'*** и ***y''*** в уравнение

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)\left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right] +$$
$$+ p_2(x)\left[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\right] = f(x).$$

Перегруппируем

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)\left[y_1''(x) + p_1y_1'(x) + p_2y_1(x)\right] + C_2(x)\left[y_2''(x) + p_1y_2'(x) + p_2y_2(x)\right] = f(x).$$

Получим $C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$

Таким образом получим
$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x); \end{cases}$$

Эта система всегда имеет единственное решение, так как её определитель – Вронскиан ФСР

Находим $\boldsymbol{C_1'(x)}$ и $\boldsymbol{C_2'(x)}$

Затем $C_1(x)$ и $C_2(x)$

Пример $\boldsymbol{x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=x^2(1-\ln x)^2}$

решение однородного уравнения - $\boldsymbol{y_{од}(x) = C_1\,x + C_2\ln x}$

Будем искать решение неоднородного ур-я в виде: $\boldsymbol{y_ч(x) = C_1(x)\,x + C_2(x)\ln x}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x)x + C_2'(x)\ln x = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'(x)x' + C_2'(x)\ln' x = 1-\ln x;} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x)x + C_2'(x)\ln x = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'(x) + C_2'(x)\dfrac{1}{x} = 1-\ln x;} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x)x + C_2'(x)\ln x = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'(x)x + C_2'(x) = x(1-\ln x);} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\ln x}{x}C_2'(x), \\ C_2'(x)(1-\ln x) = x(1-\ln x); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\ln x, \\ C_2'(x) = x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\int \ln x dx = -x\ln x + x, \\ C_2(x) = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$y_{об} = C_1 x + C_2\ln x - \frac{x^2}{2}\ln x + x^2$$

Для уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

Принцип тот же самый, только для нахождения $\boldsymbol{C_i(x)}$ из тех же соображения составляется система:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \cdots + C_n'(x)y_n''(x) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (7)$$

Попробуем найти решение данного уравнения в виде $y = e^{kx}$

Подставляя в уравнение данную функцию, получим:

$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + a_3 k^{n-3} + \ldots + a_n = 0$ (8) – **характеристическое уравнение**

Данное уравнение имеет n комплексных корней (с учетом кратности)

Каждому корню уравнения соответствует одна функция из фундаментальной системы решений.
А точнее надо рассмотреть варианты корней:

1. $k=k_0$ – простой вещественный корень характеристического уравнения
2. $k=k_0$ –вещественный корень кратности r
3. $k=a+bi,\ k=a-bi$ – пара комплексно сопряженных корней кратности 1
4. $k=a+bi,\ k=a-bi$ – пара комплексно сопряженных корней кратности r

В первом случае все просто: простому корню соответствует функция $y = e^{k_0 x}$

2. Пусть $k=k_0$ –вещественный корень кратности r.
Это означает, что в разложении характеристического многочлена есть множитель $(k-k_0)^r$. Другими словами, этот корень является также корнем от производных характеристического многочлена до степени $r-1$.

Покажем, что кроме функции $e^{k_0 x}$ решениями уравнения (7) также являются функции $xe^{k_0 x}, x^2 e^{k_0 x}, \ldots, x^{r-1} e^{k_0 x}$

Пусть $L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$

Тогда

$$L(e^{kx}) = P(k) e^{kx} \qquad (9)$$

где $P(k)$ – характеристический многочлен (8)

Продифференцируем равенство (9) по k

Получим $$L(xe^{kx}) = \left(P(k)\right)' e^{kx} + kP(k) e^{kx}$$

Продифференцируем еще раз. Получим

$$L(x^2 e^{kx}) = \left(P(k)\right)'' e^{kx} + 2k\left(P(k)\right)' e^{kx} + k^2 P(k) e^{kx}$$

И так далее:

$$L(x^m e^{kx}) = \sum_{l=1}^{m} C_m^l P^{(l)}(k) x^m e^{kx}$$

Так как k – корень кратности r, все производные от многочлена в правой части до порядка r-1 равны нулю, а то и означает, что все функции

xe^{k_0x} , $x^2e^{k_0x}$,… , $x^{r-1}e^{k_0x}$ являются корнями уравнения

$$L(y) = 0$$

3-й случай: $k = a + ib$ - Простой корень уравнения (8)

Тогда $e^{kx} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$

является решением уравнения (7), то есть

$$L(e^{kx}) = L(e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)) = L(e^{ax}\cos bx) + iL(e^{ax}\sin bx) = 0$$

Отсюда следует, что

$$L(e^{ax}\cos bx) = 0, L(e^{ax}\sin bx) = 0$$

То есть корню $k = a + ib$ соответствуют 2 решения уравнения (7):

$e^{ax}\cos bx$ и $e^{ax}\sin bx$ Почему 2?

Итак: Паре простых комплексно сопряженных корней

$$k = a \pm ib$$

соответствуют 2 решения

$$e^{ax}\cos bx \;\; \text{и} \;\; e^{ax}\sin bx$$

И случай 4: Паре комплексно сопряженных корней

$$k = a \pm ib$$

кратности ***r*** соответствуют ***2r*** решения

Остается показать, что все ***n*** полученных функций составляют ФСР, то есть Являются линейно независимыми функции.

$$e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, \ldots, x^{r_1 - 1}e^{k_1 x}$$

$$\ldots$$

$$e^{k_m x}, xe^{k_m x}, \ldots, x^{r_m - 1}e^{k_m x}$$

$$e^{a_1 x}\cos b_1 x, e^{a_1 x}\sin b_1 x, \ldots, x^{s_1 - 1}e^{a_1 x}\cos b_1 x, x^{s_1 - 1}e^{a_1 x}\sin b_1 x$$

$$\ldots$$

$$e^{a_l x}\cos b_l x, e^{a_l x}\sin b_l x, \ldots, x^{s_l - 1}e^{a_l x}\cos b_l x, x^{s_l - 1}e^{a_l x}\sin b_l x$$

В общем случае мы делать этого не будем, а частные случаи рассматривались на лекциях и на практике. Главный инструмент – Вронскиан.

Примеры:

$$\boldsymbol{y}'' + 4\boldsymbol{y}' - 5\boldsymbol{y} = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$$

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$$

$$y = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x$$

Примеры:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$\boldsymbol{y}^{(7)} + 2\boldsymbol{y}^{(6)} + 8\boldsymbol{y}^{(4)} + 16\boldsymbol{y}''' = 0$$

$$\lambda^7 + 2\lambda^6 + 8\lambda^4 + 16\lambda^3 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_{4,5} = -2, \lambda_{6,7} = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{C}_4\boldsymbol{e}^{-2\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}_5\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{-2\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}_6\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}\cos\sqrt{3}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_7\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}\sin\sqrt{3}\boldsymbol{x}$$

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (10)$$

Напомним: $\boldsymbol{y}_{\text{об}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_{\text{од}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}_{\text{ч}}(\boldsymbol{x})$

Для поиска частного решения уравнения (10) мы уже знаем универсальный способ – метод Лагранжа, который всегда дает нам решение (иногда неинтегрируемое).

Подбора частного решения неоднородного уравнения с правой частью в виде квазиполинома

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\alpha \boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{m}_1}(\boldsymbol{x})\cos\beta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{m}_2}(\boldsymbol{x})\sin\beta\boldsymbol{x}\right]$$

$P_{m_1}(x)$ -многочлен степени $\boldsymbol{m}_1$

$P_{m_2}(x)$ -многочлен степени $\boldsymbol{m}_2$

Пусть $\boldsymbol{s}_0 = \alpha + \beta\boldsymbol{i}$ - корень характеристического уравнения кратности $\boldsymbol{r}$

Тогда частное решение уравнения (10) будем искать в виде:

$$y_{\text{ч}} = x^r e^{\alpha x}\left[R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x\right]$$

где $\boldsymbol{R_m}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{S_m}(\boldsymbol{x})$ - многочлены степени $\boldsymbol{m}$ с неопределёнными коэффициентами

Примеры: $$\boldsymbol{y}'' - 5\boldsymbol{y}' + 6\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 - 2\boldsymbol{x}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$y_{од} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$y_ч(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{12} + \frac{7x}{36} + \frac{5}{216},$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{12} + \frac{7x}{36} + \frac{5}{216}.$$

Примеры: $$\boldsymbol{y''} - 5\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{x}^3 - 2\boldsymbol{x}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$$

$$y_{од} = C_1 + C_2 e^{5x}$$

$\lambda_1 = 0$ -корень уравнения, поэтому

$$y_ч = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$$

Подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$y_ч(x) = -\frac{x^4}{20} - \frac{x^3}{25} + \frac{22x^2}{125} + \frac{44x}{625},$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{x^4}{20} - \frac{x^3}{25} + \frac{22x^2}{125} + \frac{44x}{625}.$$

Примеры: $$y'' - 6y' + 13y = (75x^2 - 86x + 18)\sin 2x + 16xe^{3x}\cos 2x$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

$$y_{од} = C_1 e^{3x}\cos 2x + C_2 e^{3x}\sin 2x$$

Будем искать частные решения двух уравнений:

$$y'' - 6y' + 13y = (75x^2 - 86x + 18)\sin 2x$$

$$y_ч(x) = (Ax^2 + Bx + D)\cos 2x + (Ex^2 + Fx + G)\sin 2x$$

$$y_{ч1}(x) = 4x^2\cos 2x + (3x^2 - 2x)\sin 2x$$

$$y'' - 6y' + 13y = 16xe^{3x}\cos 2x$$

$$y_ч(x) = e^{3x}\left[(Ax^2 + Bx)\cos 2x + (Ex^2 + Fx)\sin 2x\right]$$

$$y_{ч2}(x) = e^{3x}\left[x\cos 2x + 2x^2\sin 2x\right]$$

$$y(x) = y_{од}(x) + y_{ч1}(x) + y_{ч2}(x) = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 4x^2\cos 2x + (3x^2 - 2x)\sin 2x +$$
$$+ e^{3x}\left[x\cos 2x + 2x^2\sin 2x\right].$$