2.13 Теоремы об ИП

- Значение формулы определено лишь тогда, когда задана какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов.
- Под *интерпретацией* (*моделью)* будем понимать предметную область Ω с определенными на ней n-арными предикатами.

- **Формула *F выполнима в данной модели,* если существует набор $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$, $a_i \in \Omega$, значений свободных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формулы *F* такой, что $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ принимает истинное значение.**

- **Формула F *выполнима (в логике предикатов)*, если существует модель, в которой F выполнима.**

Пример.

- **На множестве целых чисел определен предикат P(x,y) = «x>y»**
- **Формула $\exists x$ P(x,y) выполнима в этой модели, поскольку при любом значении свободной переменной y формула принимает значение ИСТИНА**

- **Формула $\exists x$ P(x,y) выполнима, поскольку существует интерпретация, в которой эта формула истинна**

- Формула *F истинна в данной модели*, если она принимает истинное значение на любом наборе $<a_1, a_2, \ldots, a_n>$, $a_i \in \Omega$ значений своих свободных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример.

- **На множестве целых чисел определен предикат**

  $P(x,y)$ = «$x>y$»
- **Формула $\exists x$ $P(x,y)$ истинна в данной модели**

- **Если на множестве целых чисел предикат определить так**

  $P(x,y)$ = ЛОЖЬ
- **то формула $\exists x\ P(x,y)$ не является истинной в данной модели**

- Формула F *общезначима или (тождественно истинна в логике предикатов)*, если она истинна в любой интерпретации.

Пример

- **Формула**

  $\exists x\ (P(x,y) \vee \neg P(x,y))$

  общезначима

- Формула *A* – *тавтология* в ИП, если тавтологией является формула, полученная из A опусканием всех кванторов и термов вместе со всеми соответствующими скобками и переменными.
- Например, аксиома $P_1 : \forall x\, A(x) \rightarrow A(t)$ является тавтологией, поскольку формула $A \rightarrow A$ тавтология.

Теорема.

- ***Если формула А – тавтология в ИП, то А является теоремой в ИП и может быть введена с использованием лишь аксиом A_1, A_2, A_3 и правила вывода МР.***

Теорема. (Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов)

- ***Формула доказуема в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда формула общезначима*.**

Доказательство.

- Покажем только необходимость утверждения.
- Аксиомы ИП являются общезначимыми формулами.
- При использовании правил вывода для общезначимых формул можно получить только общезначимую формулу.

Теорема (Теорема Черча о неразрешимости исчисления предикатов**)**.

- ***ИП является полуразрешимой теорией***

2.14 Метод резолюций для ИП

- Метод резолюций используется во многих системах логического программирования.
- Метод был предложен в 1965 г. А. Робинсоном

- Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые называются предложениями.
- Предложение – это бескванторная дизъюнкция литералов.

- Любая формула ИП может быть преобразована во множество предложений, используя следующие шаги.

- **Приведение к предваренной форме**

- **Элиминация кванторов существования с использованием преобразований**

$$\exists x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow$$
$$Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, A(a, x_2, \ldots, x_n)$$

где *a* – предметная константа, $Q_2, \ldots, Q_n$ –любые кванторы.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} Q_{i+1} x_{i+1} \ldots Q_n x_n A(x_1, .., f(x_1, \ldots, x_{i-1}), .., x_n),$$

где f – функциональный символ, $Q_2, \ldots, Q_n$ –любые кванторы.

- После этого этапа формула содержит только кванторы всеобщности.
- Такой вид формул называется *скулемовская стандартная форма*.

- **Элиминация кванторов всеобщности с использованием преобразования**

$$\forall x\, A(x) \Rightarrow A(x)$$

После этого шага формула не содержит кванторов.

- **Приведение к конъюнктивной нормальной форме и элиминация конъюнкций.**
- **После этого этапа получаем множество предложений, соответствующее формуле.**

Пример. Преобразовать во множество предложений формулу

- $\forall x(P(x)\rightarrow\exists y(F(y)\&D(x,y))$

$\equiv\forall x(\neg P(x)\vee\exists y(F(y)\&D(x,y)))\equiv$

$\equiv\forall x\exists y(\neg P(x)\vee F(y)\&D(x,y))\Rightarrow$

$\forall x(\neg P(x)\vee F(f(x))\&D(x,f(x))\Rightarrow$

- $\Rightarrow \neg P(x) \vee F(f(x)) \& D(x,f(x)) \equiv$
  $(\neg P(x) \vee F(f(x))) \& (\neg P(x) \vee D(x,f(x)))$

$\Rightarrow \{\neg P(x) \vee F(f(x)),\ \neg P(x) \vee D(x,f(x))\}$

- При рассмотрении метода резолюций для исчисления высказываний особое внимание уделялось поиску контрарных пар во множестве предложений.
- В логике предикатов этот поиск заметно усложняется, поскольку в формулы входят предметные переменные.

Пусть имеется два предложения C_1 и C_2 (P, R, Q – предикаты)

- $C_1 = \quad P(y) \vee R(y),$
- $C_2 = \neg P(f(x)) \vee Q(x).$

- Не существует ни одной литеры в C_1 контрарной какой-либо литере в C_2.

- Однако если подставить
  терм *f(a)* вместо *y* в предложении C_1
  a вместо *x* в C_2,
- то получим предложения C_1' и C_2',

  $$C_1' = P(f(a)) \vee R(f(a)),\ C_2' = \neg P(f(a)) \vee Q(a).$$

- в которых уже существуют контрарные литеры ($P(f(a))$, $\neg P(f(a))$)

- эти два предложения можно резольвировать и получить резольвенту $C_3' = Q(a) \vee R(f(a))$.
- Таким образом, для получения резольвент из предложений в логике предикатов необходимо выполнить подстановки соответствующих термов вместо переменных.

- Пусть X – множество предметных переменных из Ω и T – множество термов над переменными из X. *Подстановкой* называется отображение $\sigma: X \to T$.
- Подстановка σ называется *конечной*, если $\sigma(x) \neq x$ лишь для конечного числа элементов x из X.
- Подстановка, не имеющая элементов, называется *тождественной*.

- **Подстановку будем обозначать как множество пар**

  $\sigma=\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_k \leftarrow t_k\}$,

  $x_1, \ldots, x_k$ **– переменные,**

  $t_1, \ldots, t_k$ **– термы.**

- **Подстановка σ называется *унификатором* для множества термов $\{t_1, \ldots, t_k\}$, если**

$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = \ldots = \sigma(t_k).$$

- **В рассмотренном выше примере подстановка $\sigma=\{x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)\}$ является унификатором для множества термов $\{f(x), y\}$.**

- **Следующий рекурсивный алгоритм выясняет унифицируемы ли два терма**

  S* и *T

- 1. Если *S* и *T* – константы, то *S* и *T* унифицируемы тогда и только тогда, когда они совпадают

- 2. Если *S* – переменная,

  T – произвольный терм, то они унифицируемы и $\sigma=\{S \leftarrow T\}$

  Если *T* – переменная,

  S – произвольный терм, то они унифицируемы и $\sigma=\{T \leftarrow S\}$

- 3. В остальных случаях термы *S* и *T* унифицируемы тогда и только тогда, когда *S* и *T* имеют одинаковый главный функциональный символ и все их соответствующие компоненты (подтермы) унифицируемы.

- Пусть *A* и *B* – два предложения в ИП. Правило вывода
- $$\frac{A, B}{(A_1 \vee B_1)\sigma} R$$
- называется ***правилом резолюции*** в ИП, если в предложениях *A* и *B* существуют унифицируемые контрарные литералы P_1 и P_2, т.е. $A = P_1 \vee A_1$ и $B = \neg P_2 \vee B_1$, причем P_1 и P_2 являются унифицируемыми унификатором σ.

- В этом случае резольвентой предложений A и B является предложение $(A_1 \vee B_1)\sigma$, полученное из предложения $A_1 \vee B_1$ применением унификатора σ.

- **Пусть нужно установить выводимость $\Gamma \vdash F$ в ИП методом резолюций.**
- **Воспользуемся доказательством от противного и будем доказывать выводимость $\Gamma, \neg F \vdash \varnothing$.**

- **Для этого каждая формула множества *Г* и формула $\neg F$ независимо преобразуются в множества предложений.**

- В полученном совокупном множестве предложений отыскиваются резольвируемые предложения, к ним применяется правило резолюции в ИП и резольвента добавляется во множество и т.д.

При этом возможны три случая

- **Среди текущего множества предложений нет резольвируемых.**
- **Это означает, что теорема опровергнута, т.е. формула *F* не выводима из множества формул *Г*.**

- В результате очередного применения правила резолюции получено пустое предложение. Это означает, что теорема доказана, т.е. $\Gamma \vdash F$.

- Процесс не заканчивается, т.е. множество предложений пополняется новыми резольвентами, среди которых нет пустых. Это ничего не означает.

- Таким образом, ИП является полуразрешимой теорией, а метод резолюций является частичным алгоритмом автоматического доказательства теорем.

Пример. Покажем выводимость формулы

$\forall x \forall y A(x,y) \to \forall y \forall x A(x,y)$

$$\neg(\forall x \forall y A(x,y) \to \forall y \forall x A(x,y)) \equiv$$

$$\neg(\neg(\forall x \forall y A(x,y)) \vee \forall y \forall x A(x,y)) \equiv$$

$$(\forall x \forall y A(x,y)) \& \neg(\forall y \forall x A(x,y)) \equiv$$

$$(\forall x \forall y A(x,y)) \& (\exists y \exists x \neg A(x,y)) \equiv$$

$$(\forall y \forall x A(x,y)) \& (\exists y \exists x \neg A(x,y)) \equiv$$

- $\equiv \forall y \exists y_1 \forall x \exists x_1 (A(x,y) \& \neg A(x_1,y_1)) \equiv$
- $\forall y \forall x (A(x,y) \& \neg A(g(x,y),f(y)))$
- $\{A(x,y), \neg A(g(x,y),f(y))\}$

Резольвируем полученное множество предложений

- 1 $A(x,y)$ $\quad$ $x \leftarrow g(a,b),\ y \leftarrow f(b)$
- 2 $\neg A(g(x,y),f(y))$ $\quad$ $x \leftarrow a,\ y \leftarrow b$
- 3 $\varnothing$ $\quad$ **ПР из 1,2**

Выводимость доказана.

Пример. Проверить правильность рассуждения

- Всякий, кто может решить эту задачу, – математик.
- Ни один математик не может решить этой задачи.
- Значит, задача неразрешима.

- **Определим на множестве людей следующие предикаты**
- **$R(x)$= «x может решить эту задачу»**
- **$M(x)$= «x -- математик»**

Тогда фразы можно записать в логической символике следующим образом

- $\forall x\,(R(x) \rightarrow M(x))$
- $\neg\exists x\,(M(x) \rightarrow R(x))$
- $\neg\exists x\,R(x)$

или

$$\forall x(R(x)\rightarrow M(x)),\ \neg\exists x(M(x)\rightarrow R(x)) \vdash \neg\exists x\,R(x)$$

Проверим выводимость методом резолюций.

- **Множество предложений**
  $\{\neg R(x) \vee M(x), \neg R(x), M(x), R(a)\}$
  резольвируется до получения пустой формулы.
- **Таким образом, данное рассуждение правильное.**

2.15 Неполнота математики

- Исчисление предикатов представляет собой формальный описательный язык.
- Для того, чтобы с помощью этого языка описать некоторую математическую теорию необходимо к аксиомам ИП добавить аксиомы, присущие исследуемой теории.

Формальная арифметика – теория первого порядка со следующими специальными символами

- Предметная константа 0
- Функциональные символы
  $f_1^{(2)}(x,y)=x+y$ $f_2^{(2)}(x,y)=x\times y$ $f_1^{(1)}(x)=x'$
- Предикат $A^2(x,y)="x=y"$

аксиомы формальной арифметики, предложенные Дж. Пеано :

$$\neg\left(x_1' = 0\right)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1' = x_2' \rightarrow x_1 = x_2\right)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 = x_2 \rightarrow x_1' = x_2'\right)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \left(x_1 = x_2 \rightarrow \left(x_2 = x_3 \rightarrow x_1 = x_3\right)\right)$$

$$\forall x_1 \left(x_1 + 0 = x_1 \right)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 + x_2' = \left(x_1 + x_2 \right)' \right)$$

$$\forall x_1 \left(x_1 \times 0 = 0 \right)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \left(x_1 \times x_2' = x_1 \times x_2 + x_1 \right)$$

Принцип математической индукции

- если какое-либо предложение доказано для 1 и если из допущения, что оно верно для натурального числа *n*, вытекает, что оно верно для следующего за *n* натурального числа, то это предположение верно для всех натуральных чисел

$$\left(P(0) \wedge \forall x\left(P(x) \rightarrow P(x')\right)\right) \rightarrow \forall x P(x)$$

Теорема Гёделя о неполноте математики (1931)

- *Всякая естественная непротиворечивая аксиоматическая теория T арифметики или любой другой математической теории, содержащей арифметику,*

  неполна и непополнима, т.е.

- *в Т имеются содержательно истинные неразрешимые формулы, т.е. такие формулы А, что ни А, ни отрицание А не выводимы в Т*
- *каким бы конечным множеством дополнительных аксиом не расширить систему аксиом Т, в новой формальной теории неизбежно появятся свои неразрешимые формулы.*