



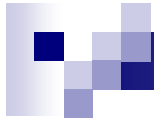
3.6 Частично рекурсивные функции

- 
- Будем рассматривать n -арные функции на множестве наборов неотрицательных целых чисел


$$f : \overline{N} \times \overline{N} \times \dots \times \overline{N} \rightarrow \overline{N}$$

- Такие функции называются *арифметическими функциями*.

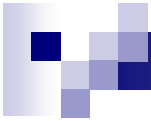
- 
- Если функция определена не для каждого набора чисел, то такие функции называются *частично определенными арифметическими функциями (ЧАФ)*.




**Пусть для ч.а.ф. f существует
некоторый механизм вычисления,
причем значение функции не
определено тогда и только тогда,
когда этот механизм работает
бесконечно, не выдавая никакого
определенного результата.**

- 
- Фиксируем произвольный набор значений x_1, \dots, x_n и рассмотрим уравнение относительно y :

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n$$

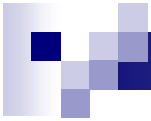
- 
- Чтобы найти натуральное решение u этого уравнения, будем вычислять при помощи указанного выше "механизма" последовательно значения $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$ для $a=0, 1, 2, \dots$ и сравнивать с x_n .


- 
- Наименьшее значение a ,
для которого выполнится равенство

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = x_n ,$$

обозначим как


$$\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$$


- 
- Величина $\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ является ***n*-местной частичной функцией**, которая ***получена операцией минимизации*** из функции ***f***

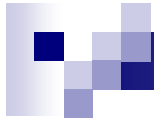


Описанный процесс нахождения решения уравнения будет продолжаться бесконечно в следующих случаях:

- **Значение $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ не определено для каждого y**

- 
- Значения $f(x_1, \dots, x_{n-1}, i)$ для $i=0, 1, \dots, a-1$ определены, но отличны от x_n
Для некоторого a значение $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a)$ не определено.

- 
- Значения $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ определены для всех $y=0, 1, 2, \dots$ и отличны от x_n .



- Во всех этих случаях значение

$$\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$$

считается неопределенным.

- В остальных случаях описанный процесс обрывается и дает наименьшее решение $y=a$ для уравнения $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n$.



Минимизация

- $f(x, y) = x + y$

$$g(x, y) = \mu_z(f(x, z) = y)$$

- Найти $g(3, 5)$, $g(5, 2)$



Найти $g(3,5)$

Последовательно проверяем
соотношение $f(3, z) = 3 + z = 5$

- При $z=0$ не выполняется
- При $z=1$ не выполняется
- При $z=2$ выполняется
- Тогда $g(3,5)=2$



Найти $g(5,2)$

Последовательно проверяем
соотношение $f(5, z) = 5 + z = 2$

- При $z=0$ не выполняется
- При $z=1$ не выполняется
- При $z=2$ не выполняется и т.д.
- Тогда $g(5,2)$ не определено



Предложение (свойство операции минимизации)

- **Операция минимизации сохраняет интуитивную вычислимость функций.**




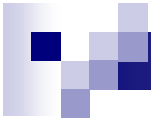
Доказательство.


- Пусть необходимо вычислить значение функции


$\mu_y (f (x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ на наборе (x_1, \dots, x_n) для некоторой интуитивно вычислимой функции f


- Применим процедуру вычисления $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$

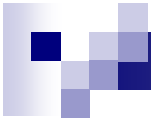
- 
- Если через конечное число шагов процедура определяет значение $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = x_n$, то полагаем значение функции $\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ равным 0.


- 
- Если же $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \neq x_n$, то переходим к следующему этапу, на котором применяем процедуру вычисления $f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)$ и т.д.

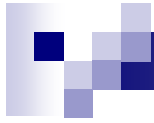
- 
- Если на каком-то этапе
вычислено значение
 $f(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ и $f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = x_n$,
то полагаем значение функции
 $\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ равным t .

- 
- Если же $f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \neq x_n$,
то переходим к следующему
этапу, на котором применяем
процедуру вычисления
 $f(x_1, \dots, x_{n-1}, t+1)$ и т.д.

- 
- В случаях, когда на каком-то этапе процедура вычисления функции f работает бесконечно или работа процедуры завершилась безрезультатно, то считаем значение $\mu_y(f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$ неопределённым.

- 
- так как описанная процедура пригодна для любого набора $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, то она представляет собой алгоритм вычисления значений функции $\mu_y (f(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = x_n)$. Предложение доказано.

- 
- Частичная функция f называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена из простейших функций конечным числом операций подстановки, примитивной рекурсии и минимизации.



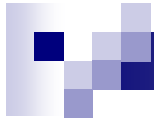
- ***Общерекурсивной функцией***
называется всюду определённая
частично рекурсивная функция.



Пример 1.

- Простейшие функции $S(x)$, $O(x)$,
 $U_m^n(x_1, \dots, x_n)$

**всюду определены, поэтому они
являются общерекурсивными
функциями.**



Пример 2

- Все примитивно рекурсивные функции являются общерекурсивными функциями



Пример 3

- **Функция $f(x,y)=y-x$ является частично рекурсивной, поскольку может быть получена с помощью операции минимизации из примитивно рекурсивной функции $g(x,y)=x+y$.**



- $f(x, y) = \mu_z(g(x, z) = y) =$

$$= \mu_z(x + z = y) = y - x \text{ при } x \leq y$$

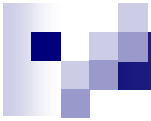
- Значение $f(x, y)$ неопределено при $x > y$

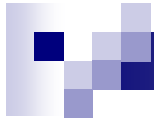


Пример 4

- Рассмотрим функцию, заданную уравнением

$$f(x) = \mu_z (z+x+1=0)$$

- 
- при $x=0$ нужно найти минимальное значение z , которое удовлетворяет условию $z+0+1=0$.
 - среди неотрицательных целых чисел такое z не существует.



- Результат операции минимизации не определен даже для точки $x=0$.
- Таким образом, функция f является частично рекурсивной функцией, которая нигде не определена.



3.7. Тезис Черча-Клини



Обозначим

- $K_{\text{прф}}$ – множество всех примитивно рекурсивных функций,
- $K_{\text{чрф}}$ – множество всех частично рекурсивных функций,
- $K_{\text{орф}}$ – множество всех общерекурсивных функций,
- $K_{\text{вф}}$ – множество всех интуитивно вычислимых функций.



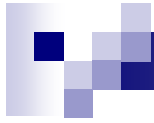
Предложение (о иерархии классов рекурсивных функций)

- $K_{\text{ПРФ}} \subset K_{\text{ОРФ}} \subset K_{\text{ЧРФ}} \subset K_{\text{ВФ}}$



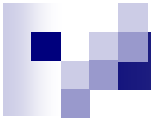
Доказательство.


- **Первое включение следует из определений примитивной рекурсивности и общерекурсивности функций.**



- **Существуют примеры общерекурсивных, но не примитивно рекурсивных функций (примеры не приводятся из-за сложности и громоздкости), поэтому включение строгое.**

- 
- Из определений частичной рекурсивности и общерекурсивности функций следует, что $K_{орф} \subset K_{чрф}$.

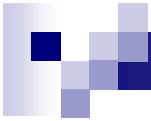
- 
- Выше был приведен пример нигде не определённой частично рекурсивной функцией, а любая общерекурсивная функция является всюду определённой.
 - Таким образом, имеет место строгое включение $K_{ОРФ} \subset K_{ЧРФ}$.

- 
- Очевидно, что $K_{\text{чрф}} \subset K_{\text{вф}}$, т.е. любая частично рекурсивная функция интуитивно вычислима.



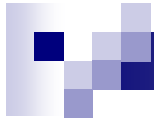
тезис Чёрча-Клини

- в современной теории рекурсивных функций считают, что любая вычислимая функция является частично рекурсивной, т.е. $K_{чрф} = K_{вф}$



Теорема о равносильности алгоритмических систем

- **Класс ч.р.функций совпадает с классом функций, вычислимым по Тьюрингу.**



- **существуют функции, не являющиеся частично рекурсивными, а следовательно, если принять тезис Чёрча-Клини, то существуют функции, не являющиеся вычислимыми**