Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, интегрируемые в квадратурах

Уравнение называется интегрируемым в квадратурах, если его решение (явное или неявное) можно представить в виде элементарных функций и интегралов от них.

Как мы уже сказали ранее, класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, составляет лишь малую часть дифференциальных уравнений, возникающих в математическом моделировании реальных объектов.
Мы изучим несколько таких типов среди уравнений первого порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$f(y)dy = g(x)dx$$

называется уравнением с *разделенными переменными*. Оно легко интегрируется.

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C$$

Пример

$$y^2 dy = \cos x dx$$

$$\int y^2 dy = \int \cos x dx + C$$

$$\frac{y^3}{3} = \sin x + C$$

Уравнения вида
$$y' = f(x)g(y)$$

(или $f(x)g(y)dx + f_1(x)g_1(y)dy = 0$)

называются уравнениями с *разделяющимися переменными*. Переменные можно разделить.

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Примеры.

1. $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)} - \int \frac{ydy}{(1+y^2)} = c$$

$$\ln(1+x^2) - \ln(1+y^2) = c$$

$$1 + y^2 = C(1+x^2)$$

2. $\dot{x} = tx$

$$\frac{dx}{x} = tdt$$

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + c \qquad x = Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Если в уравнении $y' = f(x)g(y)$ при некотором $y = y_0$ $g(y_0) = 0$, то данное уравнение имеет решение $y \equiv y_0$.

Кроме того, если при некотором $x = x_0$ функция $f(x_0)$ обращается в бесконечность, то $x \equiv x_0$ является решением перевернутого уравнения, которым обычно дополняют общее решение.

Эти решения могут оказаться особыми.

Примеры. 1. $\dot{x} = t\sqrt{x}$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = tdt$$

$$2\sqrt{x} = \frac{t^2}{2} + 2C$$

$$x = \left(\frac{t^2}{4} + C\right)^2$$

Через каждую точку $(t_0, 0)$ проходит интегральная кривая

$$x = \left(\frac{t^2 - t_0^2}{4}\right)^2$$

С другой стороны $x \equiv 0$ является решением уравнения. Особым!

При x=0 правая часть не удовлетворяет 2-му условию Т. о сущ. и ед.

2. $y' = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C \quad , x \equiv 0, y \equiv 0$$

либо

$$y = Cx, x \equiv 0$$

либо

$$x = Cy, y \equiv 0$$

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by)$$

с помощью замены $z = ax + by$ можно привести к уравнению с разделяющимися переменными .

$$z' = a + by' = a + bf(z)$$

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$$

Пример. $$y' = \frac{1}{x - y} + 1$$

$$z = x - y$$

$$z' = 1 - y' = 1 - \frac{1}{z} - 1 = \frac{1}{z}$$

$$zdz = dx$$

$$z^2 = 2x + C$$

$$(x - y)^2 = 2x + C$$

$$y = x \pm \sqrt{2x + C}$$

Однородные уравнения

Функция F нескольких переменных называется *однородной порядка k*, если

$$\forall t > 0 \qquad F(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^k F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Например, квадратичная форма – функция однородная 2-го порядка.

$x + y + \sqrt{xy}$ – функция однородная 1-го порядка.

$x^2 y + y^3 + x^3 \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ – функция однородная 3-го порядка.

Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y) = 0$ называется *однородным*, если функции M и N – однородные функции одинакового порядка.

Однородное уравнение всегда приводится к виду

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Другими словами, при подстановке в однородное уравнение *tx* и *ty* вместо *x* и *y* уравнение не меняется.

Однородное уравнение всегда приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$y = zx$$

$$y' = z'x + z = f(z)$$

$$z'x = f(z) - z$$

Примеры.

$$y' = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$$

$$y = zx$$

$$z'x + z = z + \mathrm{tg}\,z$$

$$\frac{dz}{\mathrm{tg}\,z} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + C$$

$$\sin z = Cx$$

$$\sin\frac{y}{x} = Cx$$

$$(x + y)dx - (y - x)dy = 0$$

$$y = zx$$

$$(x + zx)dx - (zx - x)(zdx + xdz) = 0$$

$$(1 + 2z - z^2)dx + x(1 - z)dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - z)}{(1 + 2z - z^2)}dz = 0$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|(1 + 2z - z^2)| = C$$

$$x^2(1 + 2z - z^2) = C$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

Уравнение вида
$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$
можно привести к уравнению
$$y' = f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right),$$
которое является однородным.

Для этого делается перенос начала координат плоскости (x,y) в точку пересечения прямых $ax+by+c$ и $a_1x+b_1y+c_1$.

(Если они не пересекаются, то это уравнение вида $y' = f(ax+by)$.)

Пример.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-1}{2x+3y-2}$$
$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ 2x+3y-2=0 \end{cases}$$
$$x=1, y=0$$
$$x_1 = x-1$$
$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{x_1-y}{2x_1+3y}$$
$$y = zx_1$$
$$z'x_1 + z = \frac{x_1 - zx_1}{2x_1+3zx_1} = \frac{1-z}{2+3z}$$
$$z'x_1 = \frac{1-z}{2+3z} - z = \frac{1-3z-3z^2}{2+3z}$$
$$\int \frac{2+3z}{1-3z-3z^2}dx = \int \frac{dx_1}{x_1} + C$$

Некоторые уравнения можно привести к однородным с помощью замены

$$x = z^k \quad (y = z^k).$$

Такие уравнения называются *обобщенно-однородными*.

Примеры.

$$2x^4 y dy + (y^4 - 4x^6)dx = 0$$

$$y = z^k$$

$$2x^4 z^k k z^{k-1} dz + (z^{4k} - 4x^6)dx = 0$$

$$4 + k + k - 1 = 4k = 6$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Теперь можно сразу сделать замену

$$y = zx^k$$

$$2x^4 zx^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} zx^{\frac{1}{2}} dx + x^{\frac{3}{2}} dz \right) + (z^4 x^6 - 4x^6)dx = 0$$

$$2zxdz + (z^4 - 4 + 3z^2)dx = 0$$

$$\frac{2zdz}{(z^4 - 4 + 3z^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$