2.9 Понятие предиката Операции с предикатами

- **существенную роль при логическом выводе играет внутреннее строение высказываний,**
- **а не только их логические значения**

- Из истинных высказываний
- «5<8» и «8<10»
- можно сделать вывод,
- что «5<10».

- **Для того чтобы сделать более понятной структуру сложных высказываний используется специальный язык –**
- **язык *исчисления предикатов* (ИП) первого порядка**

- **Каждое высказывание представляет собой некоторое суждение**

  о предмете высказывания (субъекте) или

  о взаимосвязи нескольких субъектов.

- **Предметы (субъекты), о которых делается суждение, могут быть самой различной природы.**
- **Множество субъектов, о которых делаются высказывания, называется *предметной областью* Ω.**
- **Для обозначения субъектов будем использовать *предметные переменные*.**

- ***Предикат*** **– это языковое выражение, обозначающее какое-то свойство субъекта или отношение между субъектами.**

- ***Предикатом мощности n***

  $P(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \in \Omega$

- **определенным на предметной области Ω, называют отображение набора предметных переменных $x_1,\dots,x_n$ во множество высказываний.**

примеры предикатов

- ***Q*=«2+3=5» – нульместный предикат, определенный на множестве натуральных чисел N**
- ***P(x)*=«Натуральное число *x* четное» – одноместный предикат, определенный на множестве натуральных чисел N.**

- $D(x_1,x_2)$=«Натуральное число x_1 делится (без остатка) на натуральное число x_2 » – двуместный предикат, определенный на множестве пар натуральных чисел N×N.
- $M(x)$= «x – мужчина», одноместный предикат, определенный на множестве всех людей.

- Поскольку предикаты – это отображения со значениями во множестве высказываний, где введены логические операции, то эти операции естественным образом определяются и для предикатов.

Пусть *P*, *Q* – предикаты мощности *n*, определенные на предметной области Ω.

Тогда логические операции для предикатов вводятся следующим образом

- $(\neg P)(x_1,\ldots,x_n) := \neg(P(x_1,\ldots,x_n))$
- $(P \vee Q)(x_1,\ldots,x_n) := (P(x_1,\ldots,x_n) \vee Q(x_1,\ldots,x_n))$
- $(P \& Q)(x_1,\ldots,x_n) := (P(x_1,\ldots,x_n) \& Q(x_1,\ldots,x_n))$
- $(P \to Q)(x_1,\ldots,x_n) := (P(x_1,..,x_n) \to Q(x_1,\ldots,x_n))$
- $(P \sim Q)(x_1,\ldots,x_n) := (P(x_1,\ldots,x_n) \sim Q(x_1,\ldots,x_n))$

Пример. Пусть на множестве натуральных чисел N определены два предиката

$P(x)$=«Натуральное число x делится на 2»

$Q(x)$=«Натуральное число x делится на 3»

Тогда

- $(P \vee Q)(x) := P(x) \vee Q(x)$= «Натуральное число x делится на 2 или на 3»,
- $(P \& Q)(x) := P(x) \& Q(x)$= «Натуральное число x делится на 6»
- Таким образом, $(P \vee Q)(5) = Л \vee Л = Л$, $(P \& Q)(120) = И \& И = И$

- **В логике предикатов наряду с операциями логики высказываний имеются специфические операции, называемые кванторами.**

- **Именно использование кванторов делает логику предикатов более богатой и гибкой по сравнению с логикой высказываний.**

- Пусть *P* – одноместный предикат, определенный на предметной области Ω
- Пусть множество Ω имеет конечное число элементов, т.е. $\Omega=\{a_1,\ldots,a_m\}$.

- **Тогда высказывание**

  «Все элементы Ω обладают свойством P»

  можно записать в виде конечной конъюнкции

  $$P(a_1)\&P(a_2)\&\ldots\&P(a_m)$$

  и высказывание будет истинно тогда и только тогда, когда предикат P принимает истинное значение для любого a_i из предметной области

- можно рассмотреть высказывание

  «Хотя бы один элемент Ω обладает свойством P» и

  записать его в виде конечной дизъюнкции предикатов

  $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_m)$

  и это высказывание будет истинным, если хотя для одного элемента из предметной области предикат принимает истинное значение.

- **Однако в случае бесконечного множества нельзя записать бесконечную конъюнкцию или дизъюнкцию предикатов**
- **в этом случае используют *квантор всеобщности* или *квантор существования*.**

Пусть P – предикат мощности n, определенный на предметной области Ω.

- Поставим ему в соответствие (n-1)-местный предикат

  $$\forall x_i\, P(x_1,\ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots,x_n)$$

  от переменных $x_1,\ldots,x_{i-1}, x_{i+1},\ldots,x_n$, который получен из исходного навешиванием ***квантора всеобщности***.

В естественном языке предикату $\forall x\, P(x)$ соответствуют фразы

- Для любого x (имеет место) P
- $P(x)$ при произвольном x
- $P(x)$, каково бы ни было x
- Всегда имеет место $P(x)$
- Каждый x обладает свойством P

Пусть *P* – предикат мощности *n*, определенный на предметной области Ω.

- Поставим ему в соответствие (*n-1*)-местный предикат

  $$\exists\, x_i\ P(x_1,\ldots\ x_{i-1}, x_i\ ,\ x_{i+1},\ldots, x_n)$$

  от переменных $x_1,..,x_{i-1}, x_{i+1},..,x_n$, который получен из исходного навешиванием *квантора существования*.

В естественном языке предикату $\exists x\, P(x)$ соответствуют фразы

- Для некоторых x имеет место $P(x)$
- Существует x, для которого $P(x)$
- Имеется x такой, что $P(x)$
- Найдется x, для которого $P(x)$

- Если в формуле по некоторой переменной навешан квантор, то такая переменная называется *связанной*
- В противном случае, переменная является *свободной*
- Если в формуле нет свободных переменных, то формула называется *замкнутой*

Пример.

- **Пусть на множестве натуральных чисел определен предикат**

  $P(x)$=«Натуральное число x четное»

Тогда

$\forall x\, P(x) \equiv 0$

$\exists x\, P(x) \equiv 1$

Пример.

- Пусть имеется предикат

$$D(x,y) = «x-y>0»$$

на множестве целых чисел Z.

- $D_1(x) = \forall y\, D(x,y) =$

«Для всякого y, $x-y>0$».

Этот предикат тождественно ложный.

- $D_2(y) = \exists x\, D(x,y) =$«Существует x, $x-y>0$». Этот предикат тождественно истинный.

Пример.

- Пусть имеется предикат

$$D(x,y) = «x+y>x»$$

на множестве натуральных чисел *N*.

- Очевидно, что для любых *x* и *y* из данной предметной области предикат $D(x,y)$ – истинный, т.е.

$$\forall x \forall y\ D(x,y) \equiv 1.$$

- **Если данный предикат определить на множестве действительных чисел, то**

  $\forall x \forall y\ D(x,y) \equiv 0,$

  но $\forall x \exists y\ D(x,y) \equiv 1.$

Пример. Записать в логической символике фразу «Кто ищет, тот всегда найдет»

- Можно перефразировать данное предложение следующим образом – «Каждый, кто ищет, тот всегда найдет».
- $A(x)$ = «x ищет», $B(x)$ = «x найдет», определенные на предметной области, состоящей из всех людей.

Тогда фраза в логической символике будет выглядеть следующим образом $\forall x\,(A(x) \to B(x))$.