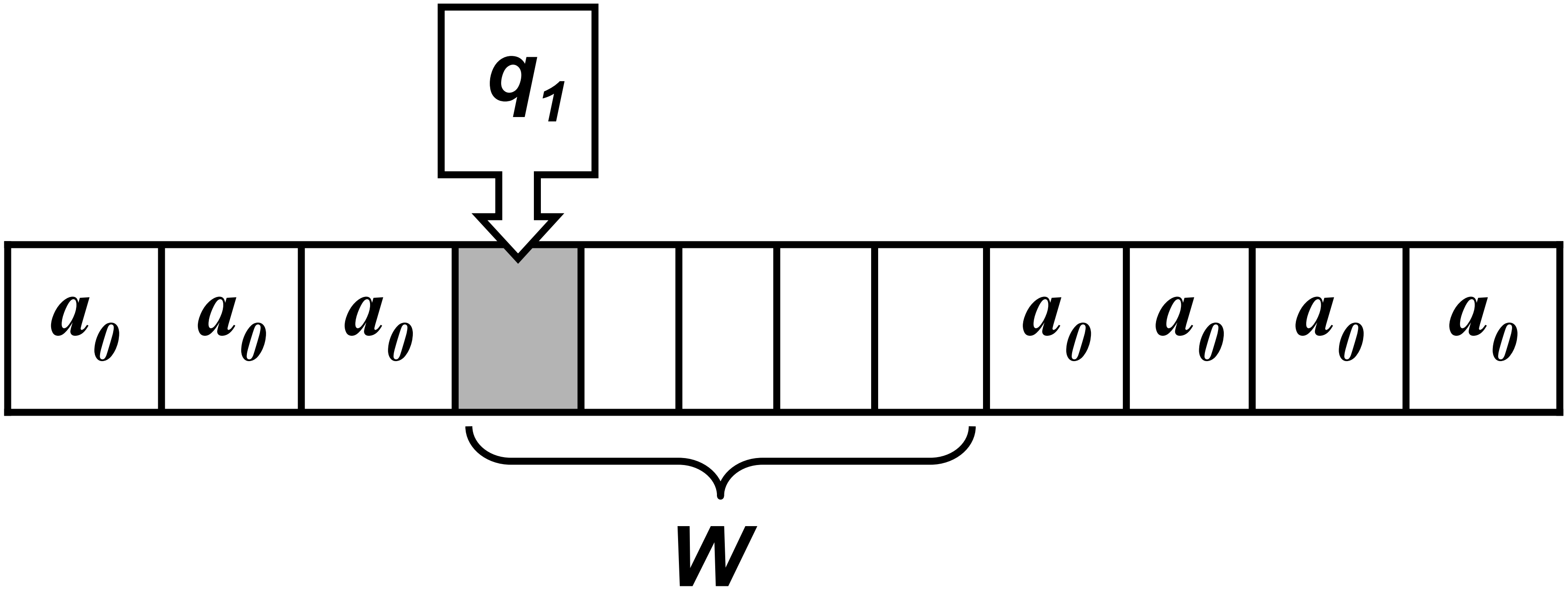
3.3 Вычисление функций на машине Тьюринга

Вычисления, производимые МТ в алфавите *A* – *правильные*, если

- **В начальный момент машина находится в состоянии q_1**
- **на ленте записано некоторое слово *W* в алфавите *A***
- **все ячейки ленты, не содержащие слово *W*, содержат пустой символ.**
- **Головка машины обозревает ячейку с первой буквой слова *W*.**



q_1
a_0
a_0
a_0
a_0
a_0
a_0
a_0
w

- При переходе МТ в заключительное состояние q_0 все ячейки левее головки содержат пустой символ.
- Головка находится над самой левой среди ячеек, не содержащей пустой символ (если такие имеются).

Результатом правильных вычислений МТ считается

- Пустое слово, если ячейки ленты не содержат непустых символов.
- Слово, на первую букву которого указывает указатель, последняя буква слова отлична от пустого символа.
- Все ячейки правее заполнены пустыми символами.

- **Поскольку алгоритм можно представить как преобразование входных данных в выходные (в результат),**
- **а любые данные – как неотрицательное целое число,**
- **то алгоритм можно понимать как некоторую арифметическую функцию.**

- **Функции, определенные на множестве наборов неотрицательных целых чисел,**

$$f : N \cup \{0\} \times N \cup \{0\} \times \ldots \times N \cup \{0\} \to N \cup \{0\}$$

называются *арифметическими функциями*.

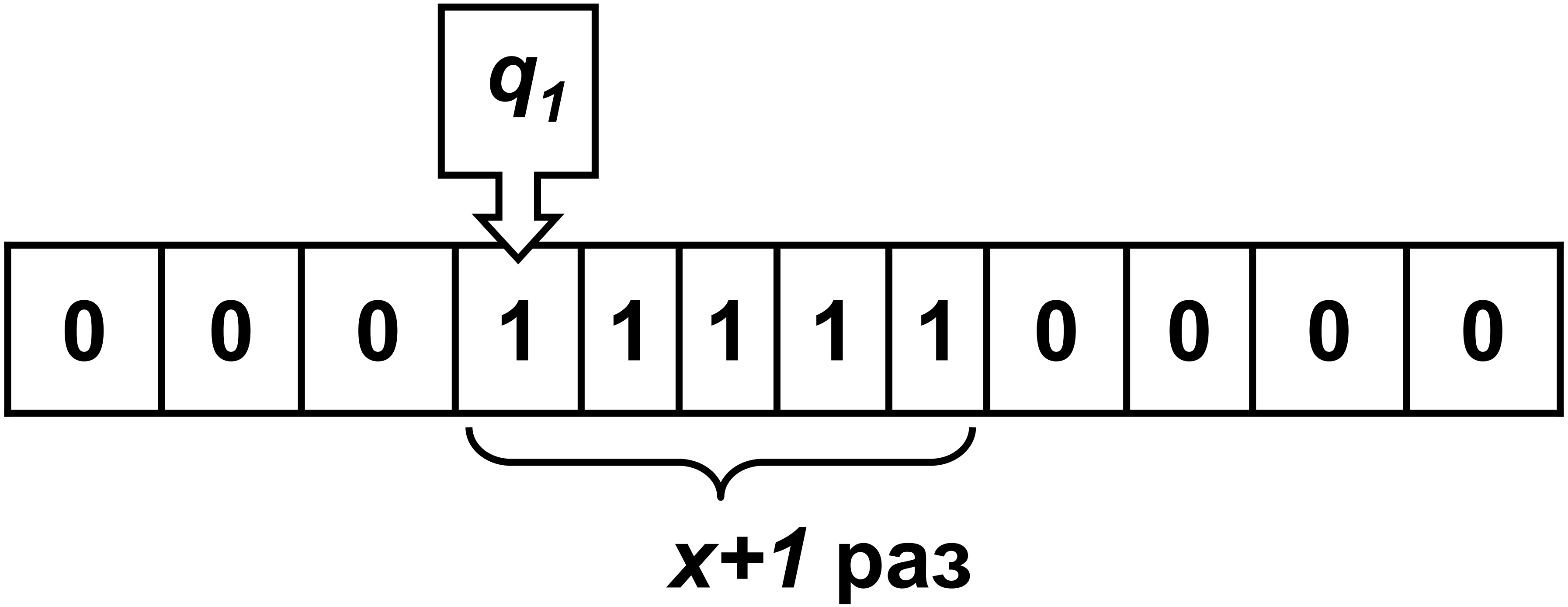
- **Если функция определена не для каждого набора переменных, то такие функции будем называть *частично определенными арифметическими функциями* (ЧАФ).**

- **Рассмотрим правильное вычисление арифметических функций на МТ.**
- **Для вычисления значений**

  f(x), x=0,1,…,

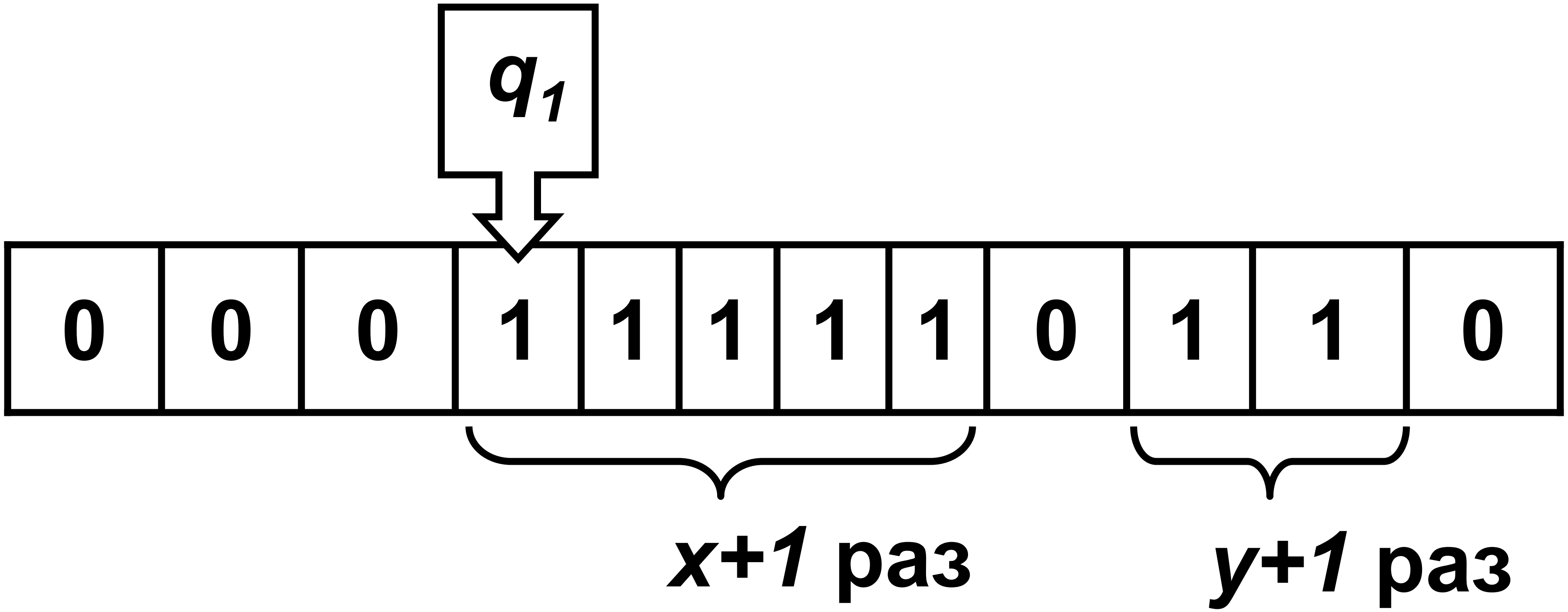
  будем записывать *x* на ленте в виде последовательности *x+1* единиц.

Для вычисления f(x)



- **Если функция зависит от нескольких переменных, то на ленте записывают последовательно группы единиц, которые соответствуют аргументам функции.**

Для вычисления f(x, y)



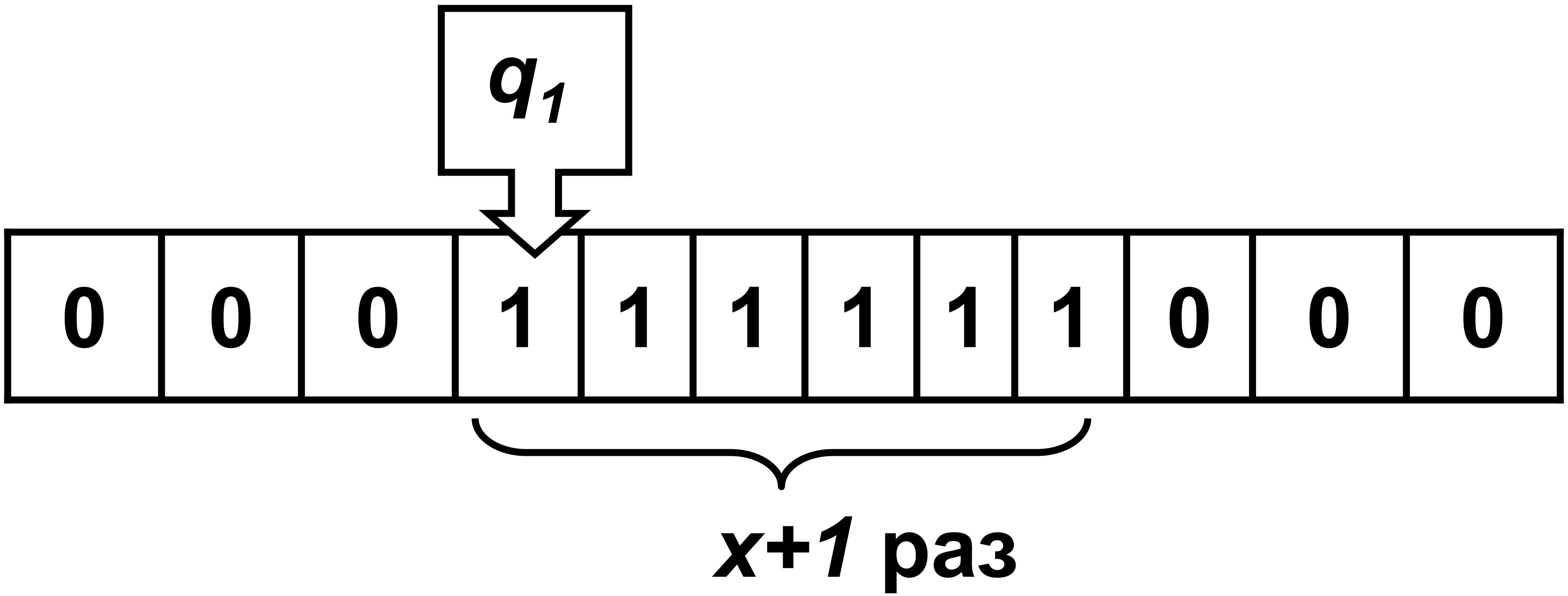
- ***Правильным вычислением арифметической функции***

  f(x), x=0,1,…, **на МТ**

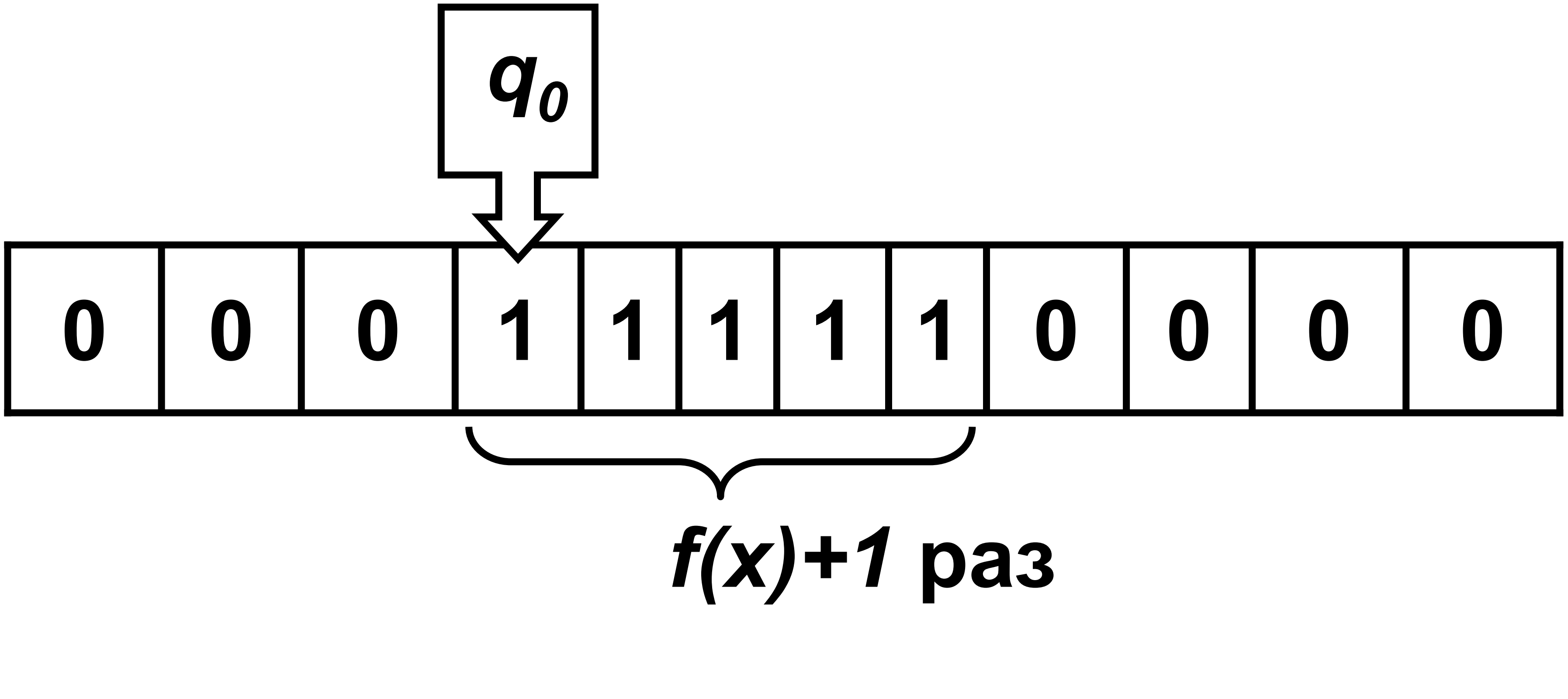
  называются правильные вычисления, производимые МТ в алфавите *A* ={0,1} для перехода

$$0\ q_1\ 1^{x+1}\ 0 \vdash 0\ q_0\ 1^{f(x)+1}\ 0$$

Начальная конфигурация



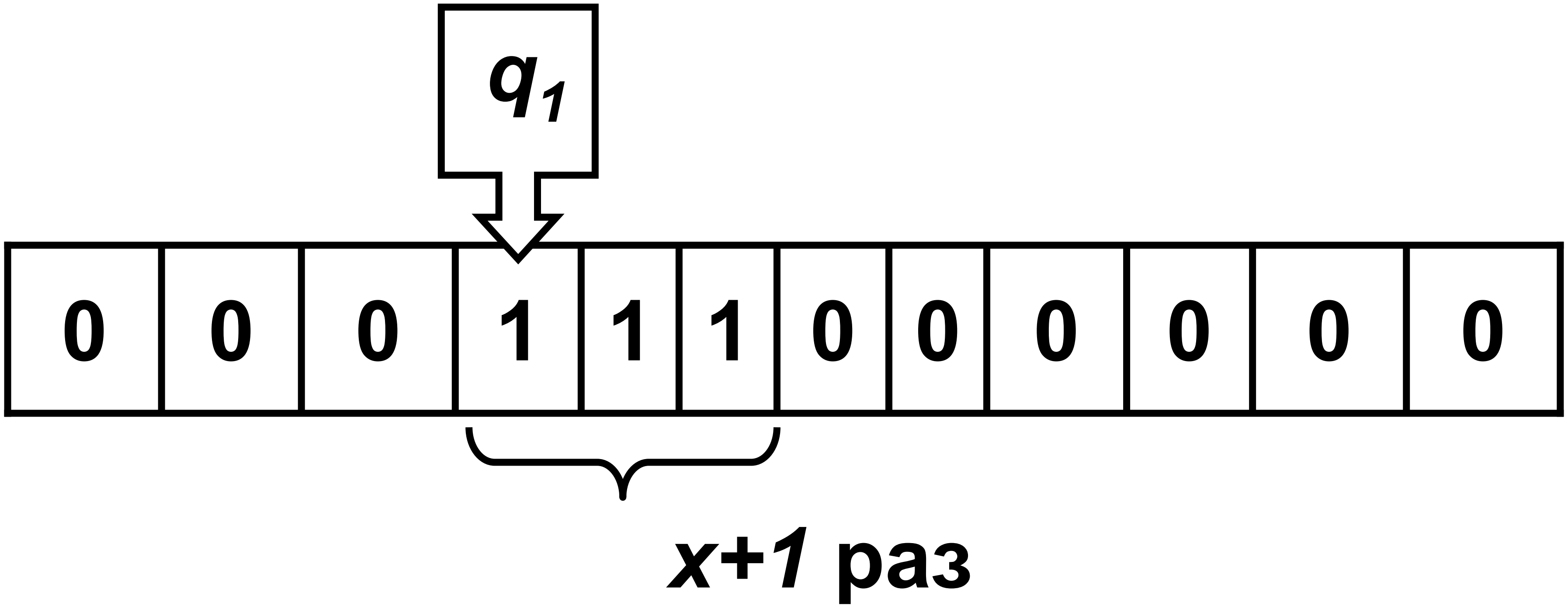
Конечная конфигурация



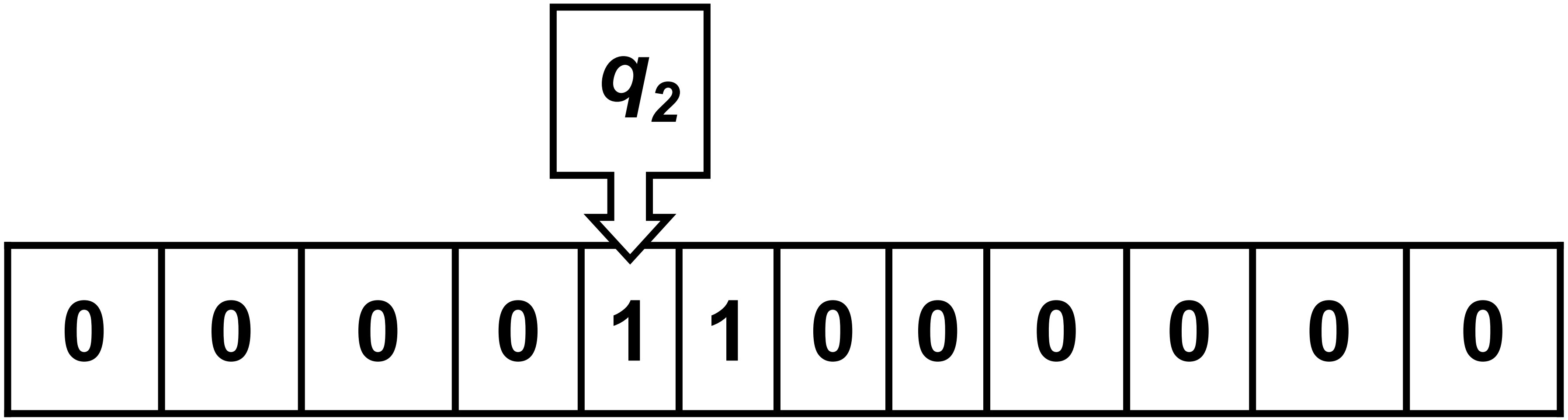
Пример. Вычисление функции $O(x)=0$

- **действия МТ сводятся к последовательной замене всех единиц на ленте нулями.**
- **И записи одной единицы.**

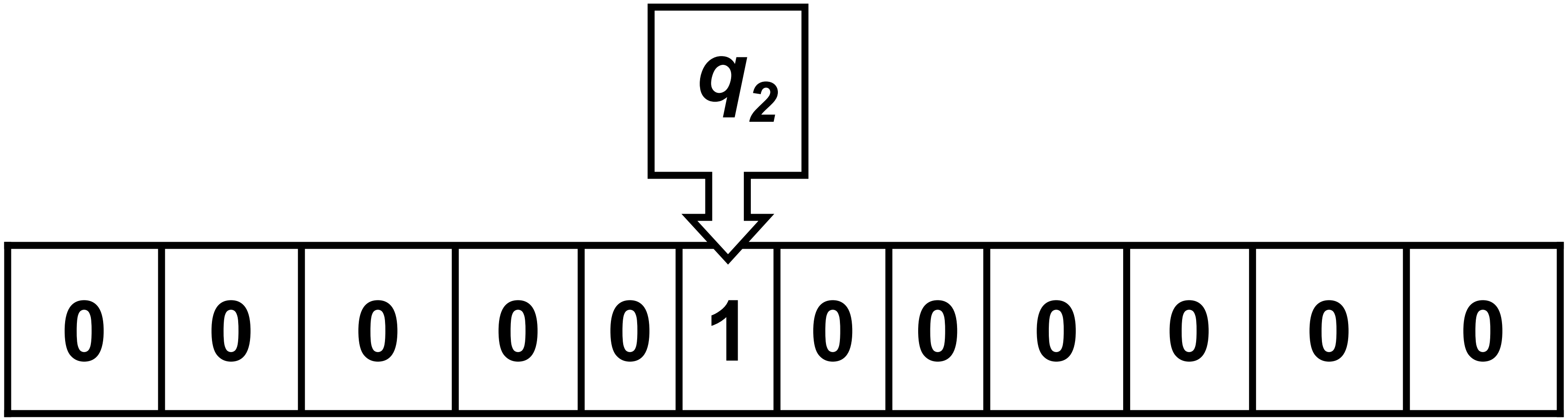
Начальная конфигурация



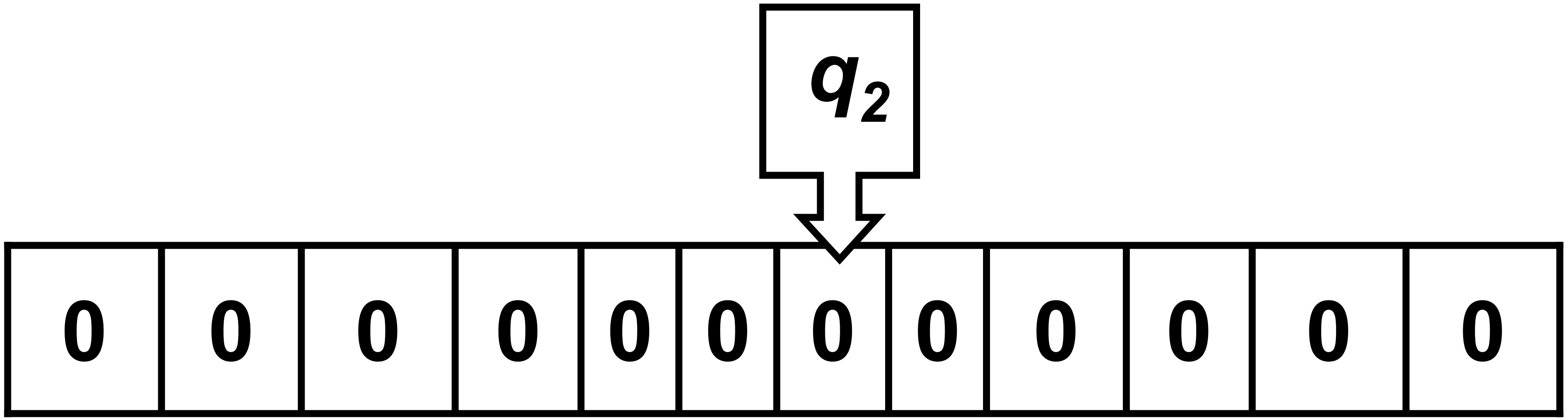
1-й шаг



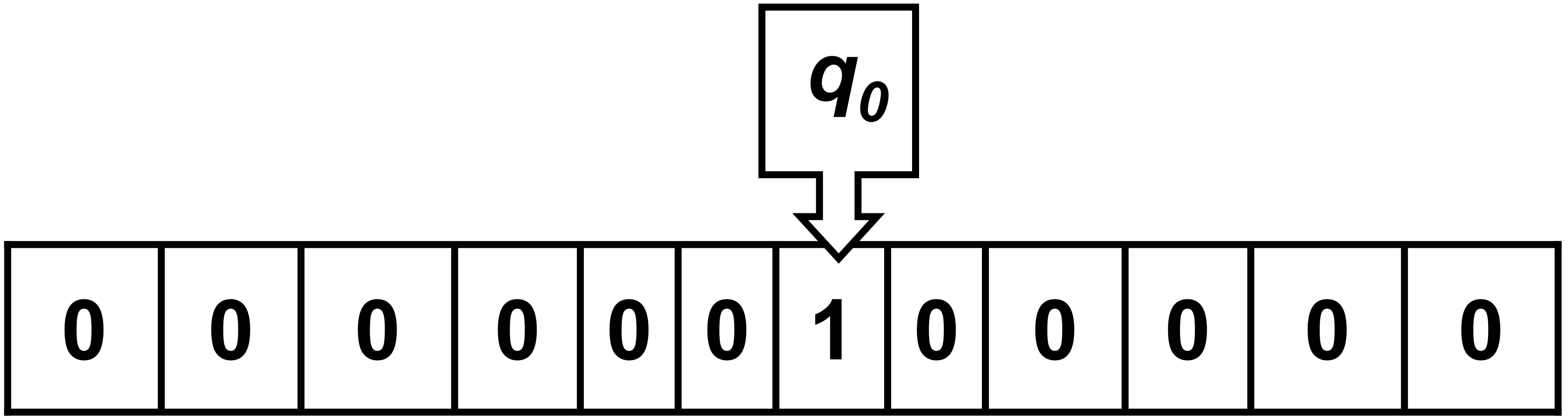
2-й шаг



3-й шаг



4-й шаг Завершение работы МТ



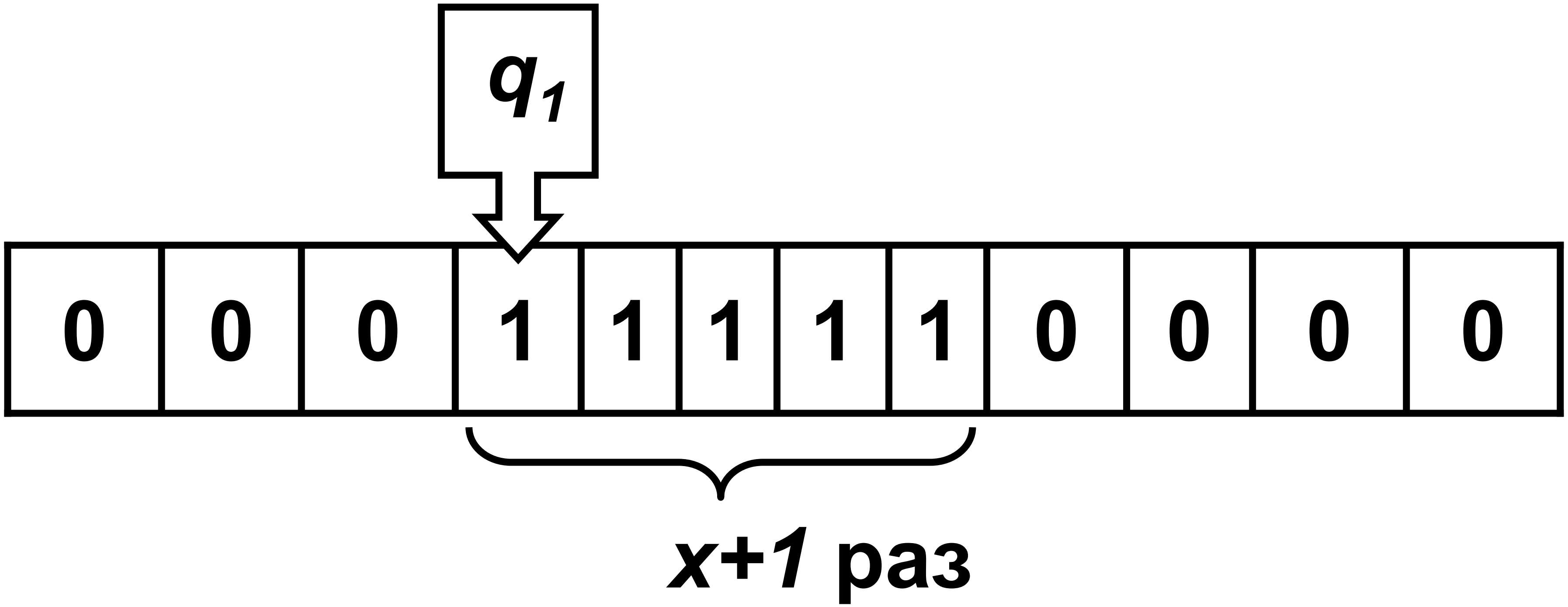
Программа вычислений

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$0Rq_2$	$0Rq_2$

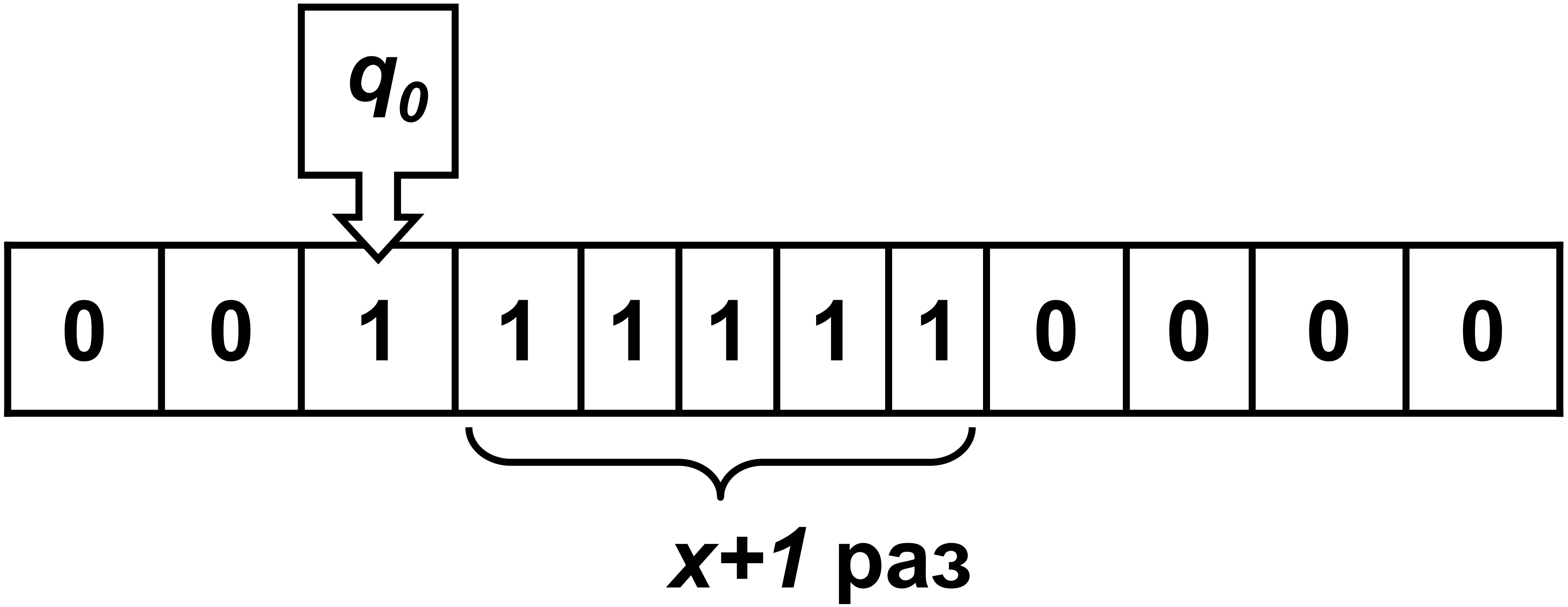
Пример. Вычисление функции *S(x)=x+1*

- **Для вычисления этой функции достаточно приписать слева одну единицу к последовательности единиц на ленте и**
- **перевести МТ в заключительное состояние.**

Начальная конфигурация



Конечная конфигурация



Программа вычислений

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$1Lq_2$	

Пример.

- Построить машину Тьюринга для вычисления функции $C(x)=1$

- **Искомую машину будем строить как суперпозицию машин, вычисляющих функции $O(x)=0$ и $S(x)=x+1$**
- **т.е. $C(x)=S(O(x))$.**

- **Пусть имеются две машины T_1 и T_2, которые вычисляют функции**

  $$f_1(x) \text{ и } f_2(x)$$

  соответственно в одном и том же алфавите.
- **Построим новую машину Тьюринга T следующим образом.**

- Состояния машины T_2 переобозначим так, чтобы они отличались от состояний T_1.

- **Начальное состояние q_1^1 машины T_1 объявляем начальным состоянием q_1 машины T.**
- **Заключительное состояние q_0^2 машины T_2 объявляем заключительным состоянием q_0 для машины T.**

- Заключительное состояние q_0^1 машины T_1 и начальное состояние q_1^2 машины T_2 отождествляем.
- Полученные команды для обеих машин объединяем в одну программу новой машины.

- Построенная машина Т вычисляет суперпозицию функций $f(x)=f_2(f_1(x))$ и называется суперпозицией машин T_1 и T_2.

В результате из двух таблиц

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$0Rq_2$	$0Rq_2$

	q_1	q_2
0		$1Hq_0$
1	$1Lq_2$	

получим одну

	q_1	$q_2{}^1$	$q_0{}^1$	$q_2{}^2$
0		$1H\ q_0{}^1$		$1Hq_0$
1	$0R\ q_2{}^1$	$0R\ q_2{}^1$	$1L\ q_2{}^2$	

Пример.

- **Построить МТ для вычисления функции**

$$f(x) = \begin{cases} 0, x > 1 \\ x + 1, x \le 1 \end{cases}$$

Ранее были построены МТ для вычисления функций $O(x)=0$ и $S(x)=x+1$.

Исходная функция

- **это функция $O(x)$, если $x>1$**
- **и функция $S(x)$ в противном случае.**

- Таким образом, перед вычислением нужно определить сколько единиц находится на ленте, и в зависимости от этого переходить к вычислению функций.
- Для определения количества единиц на ленте будем сдвигаться по ленте вправо и на каждом сдвиге менять состояние МТ.

- **Если обнаружили больше двух единиц, необходимо вернуться назад на начало последовательности единиц и применить МТ для вычисления функции *O(x)*.**
- **Если обнаружили две или одну единицу, то устанавливаем головку на начале последовательности единиц и применяем МТ для вычисления функции *S(x)*.**

- **Внутренние состояния машин для вычисления функций *O(x)* и *S(x)* пометим буквами *O* и *S* соответственно.**
- **Заключительные состояния этих машин отождествим.**

- $q_1 1 \rightarrow 1Rq_2$
- $q_2 1 \rightarrow 1Rq_3$

  На ленте больше одной единицы
- $q_2 0 \rightarrow 0Lq_{S1}$

  На ленте одна единица, начинаем вычисление S(x)

- $q_3 1 \to 1 L q_4$

  На ленте больше двух единиц
- $q_4 1 \to 1 L q_4$

  Сдвигаемся обратно на начало последовательности
- $q_4 0 \to 0 R q_{O1}$

  Начинаем вычисление функции O(x)

- ***$q_3 0 \rightarrow 0 L q_5$***
  На ленте две единицы, переходим на начало последовательности
- ***$q_5 1 \rightarrow 1 L q_5$***
- ***$q_5 0 \rightarrow 0 R q_{S1}$***
  начинаем вычисление S(x)

3.4. Алгоритмически неразрешимые задачи

- Согласно Тьюрингу алгоритм решения задачи – это машина Тьюринга для вычисления подходящей арифметической функции.

- **Если машина Тьюринга существует для решения задачи, то такая задача называется *алгоритмически разрешимой*,**
- **в противном случае задача *алгоритмически неразрешима*.**

- **Предварительно пронумеруем все машины Тьюринга следующим образом. Зафиксируем счетные множества символов**

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots\}$$

и

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_j, \ldots\}$$

- **Каждому символу *x* из множества**

$$\{L, R, H\} \cup A \cup Q$$

- **поставим в соответствие двоичную последовательность *n(x)* по следующему правилу**

x	$n(x)$	x	$n(x)$	x	$n(x)$
R	10	a_0	10000	q_0	100000
L	100	a_1	1000000	q_1	10000000
H	1000	…	…	…	…
		a_i	10^{2i+4}	q_j	10^{2j+5}
		…	…	…	…

- Очевидно, что последовательности $n(x_1)$ и $n(x_2)$ могут совпадать только тогда, когда $x_1=x_2$.

- **Команде МТ** $q_j a_i \to a_k S q_m$

$$q_j, q_m \in Q \quad a_i, a_k \in A \quad S \in \{L, R, H\}$$

сопоставим последовательность такого вида (числа здесь не перемножаются, а последовательно записаны)

$$n(q_j a_i \to a_k S q_m) = n(q_j) n(a_i) n(a_k) n(S) n(q_m)$$

- **Все команды МТ упорядочим в соответствием с лексикографическим порядком левых частей команд и МТ сопоставим набор нулей и единиц, состоящий из последовательно записанных двоичных наборов для каждой команды МТ.**
- **Эту последовательность назовем *шифром машины Тьюринга*.**

- Разные машины Тьюринга имеют различные шифры, при этом по шифру можно однозначно восстановить программу машины Тьюринга.
- Шифр машины состоит из нулей и единиц и всегда начинается с единицы. Его можно считать двоичной записью некоторого натурального числа.

Пример. Найдем шифр машины Тьюринга, вычисляющую функцию $O(x)=0$.

- **Программа вычислений имеет такой вид** $a_0 = 0, a_1 = 1$

$$q_1 1 \to 0Rq_2$$

$$q_2 0 \to 1Hq_0$$

$$q_2 1 \to 0Rq_2$$

- и машина имеет такой шифр

$$n(q_1)n(1)n(0)n(R)n(q_2)n(q_2)n(0)n(1)n(H)n(q_0)n(q_2)n(1)n(0)n(R)n(q_2)$$

$$10^7\,10^6\,10^4\,1010^9\,10^9\,10^4\,10^6\,10^3\,10^5\,10^9\,10^6\,10^4\,10\,10^9$$

- **Пусть теперь внешний алфавит некоторой машины Тьюринга содержит символы множества $\{a_0, 0, 1\}$**
- **На ленте записан шифр этой машины, головка МТ обозревает самую левую единицу шифра, а машина находится в начальном состоянии q_1 .**

- Машина называется *самоприменимой*, если после начала работы в указанной конфигурации она через конечное число шагов попадет в заключительное состояние q_0,
- в противном случае машина называется *несамоприменимой*.

Пример.

- **Машина** $q_1 1 \to 1 H q_0 \quad q_1 0 \to 0 H q_0$ **является самоприменимой, поскольку после выполнения одной команды машина попадает в заключительное состояние независимо от того, что было записано на ленте (т.е. в том числе и если был записан шифр этой машины)**

Пример.

- **Программа машины**

$$q_1 1 \to 1Hq_1 \qquad q_1 0 \to 0Hq_1$$

не содержит состояния q_0,

поэтому машина не может попасть в это состояние

и является несамоприменимой.

Проблема самоприменимости

- **Пусть арифметическая функция *p(x)* определена следующим образом**

$$p(x)=\begin{cases}1,\ \text{если } x \text{ шифр самоприменимой машины,}\\ 0,\ \text{если } x \text{ шифр несамоприменимой машины}\end{cases}$$

- **Существует ли машина Тьюринга *T* в алфавите $\{a_0, 0,1\}$, которая правильно вычисляет функцию *p(x)*?**

- **Будем считать, что машина будет оставлять на ленте одну единицу в случае, если слово на ленте в начальной конфигурации было шифром некоторой самоприменимой машины,**
- **и будет оставлять 0, если слово на ленте в начальной конфигурации было шифром некоторой несамоприменимой машины.**

Теорема. *Проблема самоприменимости алгоритмически неразрешима*

- **Доказательство от противного**.
- **Предположим, что существует машина Тьюринга *T* , которая решает проблему самоприменимости.**

Пусть $Q=\{q_0,q_1,...,q_m\}$ внутренний алфавит машины T.

- Изменим программу машины T следующим образом.
- В командах, содержащих символ q_0 , заменим q_0 на q_{m+1}.
- Добавим к программе команды

$$q_{m+1}1 \to 1Hq_{m+1} \quad q_{m+1}0 \to 0Hq_0$$

- **В результате получим новую машину Тьюринга, которую обозначим через T_1.**

- Предположим, что в начальный момент на лентах машин *T* и T_1 был записан шифр какой-то самоприменимой МТ и обе машины начинают работу.
- Действия машин будут идентичны до тех пор, пока машина *T* не попадет в состояние q_0, записав на ленте 1 и остановит головку над ячейкой с этой единицей.

- Машина T_1 также напечатает на ленте единицу и поместит головку над этой ячейкой, но не остановится, а перейдет в состояние q_{m+1} и продолжит работу, выполняя новые команды.
- В состояние q_0 машина попасть не может.

- Если в начальный момент на лентах машин *T* и *T_1* был записан шифр некоторой несамоприменимой машины Тьюринга, то каждая из них попадет в заключительное состояние, выдав в качестве результата 0.

Определим к какому классу относится машина T_1.

- **Для этого на ленте запишем шифр этой машины и запустим её.**
- **Если машина самоприменимая, то ее шифр является шифром самоприменимой машины, и машина никогда не попадет в заключительное состояние и, следовательно, самоприменимой быть не может.**

- Предположим, что машина несамоприменимая и ее шифр является шифром несамоприменимой машины.
- Тогда через конечное число шагов машина попадет в состояние q_0.
- Это означает, что машина самоприменимая, что противоречит предположению.

Проблема останова

- **Проблема останова заключается в том, чтобы по любой машине Тьюринга и любой последовательности во внешнем алфавите узнать применима ли машина к последовательности, т.е. остановится ли машина через конечное число шагов после начала работы с начальной последовательностью на ленте.**

- **Данная проблема алгоритмически неразрешима, т.к. если бы она была разрешимой, то взяв в качестве начальной последовательности шифр машины, получили бы разрешимость проблемы самоприменимости.**
- **Таким образом, проблема останова *сводится* к проблеме самоприменимости.**

Тезис Чёрча -Тьюринга

- ***Для любой интуитивно вычислимой функции существует вычисляющая её значения машина Тьюринга.***