Уравнения высших порядков.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

(1) -уравнение n-го порядка, разрешенное относительно производной

$$y(x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = y_1,$$

$$y''(x_0) = y_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

(2) -начальные условия для данного уравнения

-Задача Коши

Уравнения высших порядков. Понижение порядка.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши: Пусть функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}-1})$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}_1}, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}_2}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}-1}}$$

в некоторой области $\boldsymbol{D}$ $(\boldsymbol{n} + 1)$-мерного евклидового пространства переменных $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}-1})$, и пусть точка $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}-1})$ принадлежит области $\boldsymbol{D}$. Тогда в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ существует решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2). Это решение единственно.

Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка

$y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным *n*-кратным интегрированием.

Пример:

$$y^{(4)} = e^x \Rightarrow y''' = e^x + C_1 \Rightarrow y'' = e^x + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow y = e^x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 .$$

Уравнение, не содержащее в явном виде неизвестную функцию и её младшие производные

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

$z(x) = y^{(k)}(x)$ $\qquad F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$

Пример: решить задачу Коши: $x^6 y''' - 2x^5 y'' = \dfrac{(y'')^3}{2}; \quad y(1) = 3,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 1$

$z(x) = y''(x)$ $\qquad x^6 z' - 2x^5 z = \dfrac{z^3}{2}$ -уравнение Бернулли

Уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную *x*

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

$$y' = p(y)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} \cdot p(y)$$

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y(x)))}{dx} = \frac{d(p(y))}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y) \cdot y'(x) = p'(y) \cdot p(y) = p' \cdot p$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d\left(p'(y) \cdot p(y)\right)}{dx} = \frac{d\left(p'(y)\right)}{dx} p(y) + p'(y) \frac{d\left(p(y)\right)}{dx} = \left(\frac{d\left(p'(y)\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right) p(y) +$$

$$+ p'(y) \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p''(y) \cdot p(y) \cdot p(y) + p'(y) \cdot p'(y) \cdot p(y) = p''(y) \cdot (p(y))^2 + (p'(y))^2 \cdot p(y) =$$

$$= p'' p^2 + p'^2 p.$$

Уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную *x*

Примеры: 1. Задача Коши $yy'' = y'^2 - y';\ \ y(1) = 2,\ y'(1) = 0$

$$y' = p(y) \quad y'' = p' \cdot p$$

$$ypp' = p^2 - p$$

1 $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$

2 $yp' = p - 1.$

$$\frac{dp}{p-1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p-1| = \ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow p - 1 = C_1 y \Rightarrow p = C_1 y + 1$$

$$y' = C_1 y + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y + 1 \Rightarrow \frac{dy}{C_1 y + 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1}\int \frac{d(C_1 y + 1)}{C_1 y + 1} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{C_1}\ln|C_1 y + 1| = x + \frac{1}{C_1}\ln|C_2| \Rightarrow$$

$C_1 y + 1 = C_2 e^{C_1 x}$ -общее решение

$$y' = C_1 y + 1,\ x = 1,\ y = 2,\ y' = 0 \Rightarrow 0 = 2C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{y}{2} + 1 = C_2 e^{-x/2}$ $\quad -\frac{2}{2} + 1 = C_2 e^{-1/2}$ $\quad -\frac{y}{2} + 1 = 0$ $\quad$ ***y*** = 2

Уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную *x*

Примеры: 2. Задача Коши $3y'y'' = y;\ \ y\big|_{x=0} = \sqrt{2},\ y'\big|_{x=0} = 1.$

$$y' = p(y),\ y'' = p'p,\ 3p^2 p' = y,\ 3p^2 \frac{dp}{dy} = y,\ 3p^2 dp = ydy,\ \int 3p^2 dp = \int ydy,$$

$$p^3 = \frac{y^2}{2} + C_1,\ p = \left(\frac{y^2}{2} + C_1\right)^{1/3},\ y' = \left(\frac{y^2}{2} + C_1\right)^{1/3},\ \frac{dy}{\left(\frac{y^2}{2} + C_1\right)^{1/3}} = dx$$

Интеграл неберущийся, но учитывая начальные условия, $C_1=0$, следовательно

$$y' = \left(\frac{y^2}{2}\right)^{1/3},\ \frac{dy}{y^{2/3}} = \frac{dx}{\sqrt[3]{2}},\ \int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2}},\ 3y^{1/3} = \frac{x + C_2}{\sqrt[3]{2}},\ y = \left(\frac{x + C_2}{3\sqrt[3]{2}}\right)^3,\ y = \frac{(x + C_2)^3}{54}$$

$$\sqrt{2} = \frac{(C_2)^3}{54} \Rightarrow C_2 = 3\sqrt{2}$$

$$y = \frac{\left(x + 3\sqrt{2}\right)^3}{54}$$

Применение интегрируемых комбинаций

Иногда мы можем увидеть (непонятно как), что можно привести уравнение к виду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = \frac{dF_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})}{dx} = 0$$

Тогда нам повезло, и мы легко понизим порядок:

$$\boldsymbol{F_1(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C_1}$$

Пример: $\boldsymbol{x^2(y''^2 - y'y''') = y'^2}$

$$-\frac{\boldsymbol{y'y''' - y''^2}}{\boldsymbol{y'^2}} = \frac{1}{\boldsymbol{x^2}} \qquad \frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} + C_1$$

$$\boldsymbol{z = y',\ z' = y'',\ \frac{z'}{z} = \frac{1}{x} + C_1,\ \frac{dz}{z} = \left(\frac{1}{x} + C_1\right)dx,\ \ln|z| = \ln|x| + C_1x + \ln|C_2|,\ z = C_2xe^{C_1x},\ y' = C_2xe^{C_1x},}$$

$$\boldsymbol{y = \int C_2xe^{C_1x}dx = \frac{C_2}{C_1}\int xde^{C_1x} = \frac{C_2}{C_1}\left(xe^{C_1x} - \int e^{C_1x}dx\right) = \frac{C_2}{C_1}\left(xe^{C_1x} - \frac{e^{C_1x}}{C_1}\right) + C_3}$$