Системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) & = & 0, \end{cases}$$

-общий вид системы дифференциальных уравнений. Здесь *x – независимая переменная,*

$y_1, y_2, \ldots y_n$ *– искомые функции,*

$F_1, F_2, \ldots F_n$ *– известные функции.*

Примеры задач, приводящих к системам ОДУ:

1. Некоторое вещество *А разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложившегося вещества.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(c - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(c - x - y), \end{cases}$$

2. Движение материальной точки в пространстве под действием переменной силы F(X,Y,Z)

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = u(t), \\
\dfrac{dy}{dt} = v(t), \\
\dfrac{dz}{dt} = w(t), \\
m\dfrac{du}{dt} = X(t, x, y, z, u, v, w), \\
m\dfrac{dv}{dt} = Y(t, x, y, z, u, v, w), \\
m\dfrac{dw}{dt} = Z(t, x, y, z, u, v, w).
\end{cases}
$$

3. Динамика численности взаимодействующих популяций

Система хищник-жертва:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2\right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1\right)$$

4. Процесс кроветворения

$$\dot{x}_1(t) = 2\beta_0(\lambda_0 + \mu_0 x_{n+1}(t-r))x_0(t-r) - (\lambda_1 + \mu_1 x_{n+1}(t))x_1(t) - (\rho x)_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = 2\beta_1(\lambda_1 + \mu_1 x_{n+1}(t-r))x_1(t-r) - (\lambda_2 + \mu_2 x_{n+1}(t))x_2(t) - (\rho x)_2(t),$$

$$\dot{x}_j(t) = 2\beta_{j-1}(\lambda_{j-1} + \mu_{j-1} x_{n+1}(t-r))x_{j-1}(t-r) -$$

$$- (\lambda_j + \mu_j x_{n+1}(t))x_j(t) - (\rho x)_j(t),$$

$$j = 3,\ 4,\ \ldots,\ n-2,$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = 2\beta_{n-2}(\lambda_{n-2} + \mu_{n-2} x_{n+1}(t-r))x_{n-2}(t-r) -$$

$$- (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1} x_{n+1}(t))x_{n-1}(t) - (\rho x)_{n-1}(t),$$

$$\dot{x}_n(t) = \beta_{n-1}(\lambda_{n-1} + \mu_{n-1} x_{n+1}(t-\alpha))x_{n-1}(t-\alpha) - \lambda_n x_n(t) - (\rho x)_n(t),$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = g(x_n(t-\omega)) - \lambda_{n+1} x_{n+1}(t) - (\rho x)_{n+1}(t), \quad t \geq 0.$$

5. Практически все задачи механики
6. Очень много задач в экономике
7. Химические реакции
8. Теория эпидемий
9. Модели боевых действий
10. Климатология. Упрощение задач о турбулентности. Тория хаоса и катастроф
11. Движение планет
12. Социология и реклама
13…

.

.

.

.

Система, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется **каноnической**:

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} & = & f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} & = & f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m_n)} & = & f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \end{cases}$$

x *– независимая переменная,* $\boldsymbol{y_i}$ *– искомые функции,* $\boldsymbol{f_i}$ *– заданные в некоторой области функции.*

Совокупность ***n*** функций $\boldsymbol{y_i}$ *(i=1..n)* (дифференцируемых достаточное количество раз) называется решением системы на интервале (a,b) , если она обращает на этом интервале каждое уравнение этой системы в тождество.

Система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций называется **нормальной.**

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Замечание. Любая каноническая система приводится к нормальной с помощью замены производных на новые функции.

Пример 1.
$$\begin{cases} y''=f(x,y,y',z,z') \\ z''=g(x,y,y',z,z') \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'=u \\ u'=f(x,y,u,z,v) \\ z'=v \\ v'=g(x,y,u,z,v) \end{cases}$$

Пример 2.
$$y'''+a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=f(x)$$

$$y'=y_1$$
$$y_1'=y_2$$
$$y_2'=-a_1(x)y_2-a_2(x)y_1-a_3(x)y+f(x)$$

Далее мы будем изучать **только нормальные системы**, т.е. системы первого порядка, разрешенные относительно производной.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \qquad (1)$$

Можем записать систему (1) в векторной форме:

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y) \qquad Y = (y_1, y_2, \dots y_n), F = (f_1, f_2, \dots f_n)$$

n – порядок системы.

Дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$ - частный случай системы при n=1

Напомним, что с геометрической точки зрения частное решение уравнения первого порядка ***y=y(x)*** – кривая на плоскости OXY.

Точно так же частное решение нормальной системы второго порядка – некоторая кривая в трехмерном пространстве OXY_1Y_2.

Частное решение системы ***n***-го порядка – кривая в ***n+1*** – мерном пространстве.

Кривые, соответствующие решениям системы будем называть **интегральными кривыми.**

Задача Коши для систем дифференциальных уравнений ставится также, как для одного уравнения: найти решение системы, удовлетворяющее **начальным условиям**

$$y_1(x_0) = y_{10},\ \ y_2(x_0) = y_{20},\ \ \ldots,\ \ y_n(x_0) = y_{n0}. \qquad (2)$$

ТЕОРЕМА 1 (о существовании и единственности решения задачи Коши).

Пусть в системе (1) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *удовлетворяют двум условиям:*

1) *функции* $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *непрерывны как функции* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства;*
2) *их частные производные по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в области* D *ограничены (т. е.* $\exists\, M > 0$ *такое, что* $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le M$, $i, j = \overline{1, n}$).

Тогда для любой фиксированной точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ *области* D *существует, и притом единственное, решение*

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x)$$

системы (1), *определенное в некоторой окрестности точки* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям* (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Совокупность n функций*

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, \ldots, C_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned} \qquad (3)$$

называется общим решение системы (1), если:

1) при любых допустимых значениях постоянных C_i (i=1..n) она обращает все уравнения системы (1) в тождество, т. е. определяет решение системы;

2) для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант C_i, при которых функции совокупности (3) удовлетворяют заданным начальным условиям.

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных , будем называть ***частным***

Как мы показали выше на примере, любое уравнение n-го порядка можно свести к нормальной системе n- порядка.

Далее покажем так же на примере, что нормальную систему n-го порядка можно привести к уравнению n-го порядка.

Пример.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

$$y_1' = y_2 + y_3;$$

$$y_1'' = y_2' + y_3' = \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3)}_{y_2'} + \underbrace{(y_2 + y_3)}_{y_3'},$$

$$\Rightarrow \quad y_1'' = y_1 + 2y_2.$$

$$y_1''' = y_1' + 2y_2' = (y_2 + y_3) + 2(y_1 + y_2 - y_3),$$

$$\Rightarrow \quad y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3.$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$y_2 = 0{,}5 \cdot (y_1'' - y_1),$$
$$y_3 = y_1' - 0{,}5 \cdot (y_1'' - y_1).$$

$$y_1''' - 2y_1'' + y_1' = 0.$$

$$y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3 x).$$

$$y_1' = e^x(C_2 + C_3 + C_3 x)$$

$$y_1'' = e^x(C_2 + 2C_3 + C_3 x).$$

$$y_2 = -0{,}5 \cdot C_1 + C_3 e^x;$$

$$y_3 = 0{,}5 \cdot C_1 + e^x(C_2 + C_3 x).$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения ее к одному уравнению порядка , называется ***методом исключения.***

Пусть
$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n), \end{aligned}$$
-общее решение системы (1)

Эта совокупность равенств – система уравнений относительно $C_1, C_2, ..C_n$, решив которую, получим:

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Совокупность равенств (4) называют ***общим интегралом*** системы (1), а каждое из равенств системы (4) называют ***первым интегралом*** системы (1).

Иногда при интегрировании системы дифференциальных уравнений можно получить первые интегралы системы.

Например, если с помощью элементарных преобразований системы (1) получим

$$d\Phi(x, y_1, y_2, ..y_n) = 0$$

то $\quad \Phi(x, y_1, y_2, ..y_n) = C \quad$ -первый интеграл системы

Поиск общего решения с помощью первых интегралов называется методом **интегрируемых комбинаций**.

Пример 1.
$$\begin{cases} y_1 y_1' + y_2 y_2' + 1 = 0, \\ \dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} + y_1 y_2' + y_2 y_1' = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} d(y_1^2) + \dfrac{1}{2} d(y_2^2) + dx = 0, \\ d(\ln|y_1|) + d(\ln|y_2|) + d(y_1 y_2) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + 2x = C_1, \\ \ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1 = C_2. \end{cases}$$

Получив каким-то образом первый интеграл, мы получаем соотношение между переменными, следовательно, выразив одну из них через другие, мы уменьшим количество переменных системы, то есть понизим её порядок.

Пример 2.
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = -(2y_1 - y_2 - y_3) + (3y_1 - 2y_2 - 3y_3) + (-y_1 + y_2 + 2y_3) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(-y_1 + y_2 + y_3) = 0 \qquad -y_1 + y_2 + y_3 = C_1. \qquad y_3 = C_1 + y_1 - y_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - (C_1 + y_1 - y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3(C_1 + y_1 - y_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - C_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - 3C_1 \end{cases}$$

$$y_1 = C_1 + C_2 e^x$$
$$y_2 = 3C_1 + C_3 e^x$$
$$y_3 = e^x (C_2 - C_3) - C_1$$

Система вида

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\ldots=\frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})}$$

называется ***симметрической.***

Любую нормальную систему можно привести к симметрической

$$dx=\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,\ldots,y_n)}=\ldots=\frac{dy_n}{f_n(x,y_1,\ldots,y_n)}$$

Замечание. При интегрировании системы методом интегрируемых комбинаций часто оказывается полезным **свойство равных дробей (или производных пропорций)**

$$\boxed{\text{если}\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\quad \text{то}\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}.}$$

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{\ln x}{2y_1}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{\ln x}{2y_1} - 1 \end{cases}$$

$$\frac{dy_1}{-\dfrac{\ln x}{2y_1}} = \frac{dy_2}{\dfrac{\ln x}{2y_1} - 1} = \frac{d\,x}{1}$$

$$\frac{dy_1}{\ln x} = \frac{d\,x}{-2y_1} \qquad y_1{}^2 + x(\ln x - 1) = C_1$$

$$\frac{dy_1 + dy_2}{\ln x + 2y_1 - \ln x} = \frac{d\,x}{-2y_1} \qquad y_1 + y_2 + x = C_2$$

$$\begin{cases} y_1{}^2 + x(\ln x - 1) = C_1\,, \\ \qquad y_1 + y_2 + x = C_2\,. \end{cases}$$

Системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений называется ***линейной****, если функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *линейны относительно неизвестных функций*, т. е. если она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{cases} \tag{5}$$

или, более кратко,

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + b_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ – известные функции от x, $y_i(x)$ – искомые функции.

Если все $b_i(x) \equiv 0 \quad (i = \overline{1,n})$, то система называется ***однородной***

Запись в матричной форме:

обозначим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots\dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots\dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots\dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (5) запишется в виде:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{B} \qquad (5)$$

Однородная система:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \qquad (6)$$

Пусть $$L\left[\mathbf{Y}\right]=\mathbf{Y}'-\mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{Y}\in D_n[a,b]. \qquad (7)$$

Тогда система (5) запишется в виде:

$$L\left[\mathbf{Y}\right]=\mathbf{B}.$$

А система (6): $$L\left[\mathbf{Y}\right]=\mathbf{O}.$$

Это называется *операторной формой* системы дифференциальных уравнений.

Заметим, что оператор (7) является ЛИНЕЙНЫМ, то есть выполняются свойства

1. $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=CL\left[\mathbf{Y}\right],\ \forall C\in\mathbb{R};$
2. $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right].$

Действительно, по свойствам матриц,

1) $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=(C\,\mathbf{Y})'-\mathbf{A}(C\,\mathbf{Y})=C\,\mathbf{Y}'-C\,\mathbf{A}\mathbf{Y}=C(\mathbf{Y}'-\mathbf{A}\mathbf{Y})=CL\left[\mathbf{Y}\right];$

2) $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)'-\mathbf{A}(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)=\mathbf{Y}_1'+\mathbf{Y}_2'-\mathbf{A}\mathbf{Y}_1-\mathbf{A}\mathbf{Y}_2=$

$$=(\mathbf{Y}_1'-\mathbf{A}\mathbf{Y}_1)+(\mathbf{Y}_2'-\mathbf{A}\mathbf{Y}_2)=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right]. \blacksquare$$

Изучение СЛДУ будем проводить по той же схеме, что и изучение линейных дифференциальных уравнений n-го порядка: сначала изучим однородные СЛДУ, а затем – неоднородные.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}, \qquad (8)$$

в которой все коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны на $[a,b]$.

Тогда в области $D = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \,|\, x \in [a;b],\ \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Будут выполняться условия теоремы о существовании и единственности, а следовательно для любых $x_0 \in [a;b]$ и $y_{i0} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение системы (8), удовлетворяющее условию:

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Так как оператор L – линейный, то справедлива:

ТЕОРЕМА 2 *Если* $\mathbf{Y}_1$ *и* $\mathbf{Y}_2$ *– решения линейной однородной системы* (8), *то* $\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$ *и* $C\mathbf{Y}_1$ $(\forall C \in \mathbb{R})$ *тоже являются решениями линейной однородной системы* (8).

СЛЕДСТВИЕ *Если* $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_k$ *– решения линейной однородной системы* (8) *, то для любых постоянных* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *линейная комбинация решений*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + C_k \mathbf{Y}_k$$

тоже является решением системы.

Возьмем в пространстве $D_n[a,b]$ n векторов:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \dots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \dots\dots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и

$$\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{Y}_n \equiv 0 .$$

Это означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \ldots + \alpha_n y_{1n} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_n y_{2n} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \ldots + \alpha_n y_{nn} \equiv 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение. Это возможно, когда равен нулю определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Эта матрица называется ***интегральной матрицей,*** а ее определитель называется ***определителем Вронского (вронскианом)*** векторов

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$$

Обозначается:

$$W\,[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \quad \text{или} \quad W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x).$$

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие линейной зависимости n векторов пространства $D_n[a,b]$). *Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.*

Это условие необходимое, но **не достаточное**

Пример: Для векторов $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Тем не менее, эти векторы линейно независимы, так как

$$\begin{cases} \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \equiv 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0 \quad \text{или} \quad \alpha_1 x + \alpha_2 \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

ТЕОРЕМА 4 (условие линейной независимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений)**.** *Если* n *решений* $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ *линейной однородной системы* (8) *линейно независимы на* $[a;b]$, *то их определитель Вронского* $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ *не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

СЛЕДСТВИЕ (теоремы 3 и 4). Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – *решения системы* . *Тогда их определитель Вронского* $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ *либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно зависимы; либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x \in [a,b]$, *и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно независимы.*

ТЕОРЕМА 5 *Пространство решений* $S_n[a,b]$ *линейной однородной системы* (8) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком системы, т. е.* $\dim S_n[a;b] = n$.

Система n линейно независимых решений линейной однородной системы порядка n (базис пространства $S_n[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений***.

Если матрицы-столбцы

$$\mathbf{Y}_1=\begin{pmatrix} y_{11}(x)\\ y_{21}(x)\\ \ldots\ldots\\ y_{n1}(x)\end{pmatrix},\quad \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} y_{12}(x)\\ y_{22}(x)\\ \ldots\ldots\\ y_{n2}(x)\end{pmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} y_{1n}(x)\\ y_{2n}(x)\\ \ldots\ldots\\ y_{nn}(x)\end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}]=\mathbf{O}$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\boxed{\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n}C_i\mathbf{Y}_i}$$

или, подробнее

$$\begin{cases} y_1(x)=C_1y_{11}(x)+C_2y_{12}(x)+\ldots+C_ny_{1n}(x),\\ y_2(x)=C_1y_{21}(x)+C_2y_{22}(x)+\ldots+C_ny_{2n}(x),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n(x)=C_1y_{n1}(x)+C_2y_{n2}(x)+\ldots+C_ny_{nn}(x).\end{cases}$$

Итак, задача интегрирования линейной однородной системы свелась к отысканию фундаментальной системы ее решений. Но сделать это для произвольной системы очень сложно. Позже мы рассмотрим один класс однородных систем, для которых практически всегда удается найти фундаментальную систему решений – линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

ПРИМЕР 20.2. Доказать, что $\mathbf{Y_1} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y_2} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Записать общее решение этой системы.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$ – линейно независимы (по следствию (20.7)) и образуют фундаментальную систему решений (по теореме 20.6). Поэтому общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix}. \diamond$$

Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}.$$

Метод вариации произвольной постоянной (Лагранжа)

Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$$

Тогда его общее решение будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n\mathbf{Y}_n$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Решение неоднородной системы будем искать в виде:

$$\mathbf{Y} = C_1(x)\mathbf{Y}_1 + C_2(x)\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n(x)\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i,$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции.

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в неоднородную систему $\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A} \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i) = \mathbf{B}.$$

Т.к. $\mathbf{Y}_i$ – решения однородной системы, то $\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i = \mathbf{O}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{21} + \ldots + C_n'(x)y_{n1} = b_1(x), \\ C_1'(x)y_{12} + C_2'(x)y_{22} + \ldots + C_n'(x)y_{n2} = b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_{1n} + C_2'(x)y_{2n} + \ldots + C_n'(x)y_{nn} = b_n(x). \end{cases} \qquad (10)$$

Это линейная неоднородная система относительно неизвестных функций $C_i'(x)$. Ее определитель – определитель Вронского для системы линейно независимых решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$, и, следовательно, он отличен от нуля. Значит система (10) имеет единственное решение

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),$$

откуда интегрированием находим

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

ПРИМЕР 20.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Запишем соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$y_1'' = y_2' \quad \Rightarrow \quad y_1'' = -y_1.$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, общее решение уравнения

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$y_2 = y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

$$\mathbf{Y}_{од} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x \ + \ C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x \ + \ C_2 \cos x \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y}_{ч} = C_1(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = -tgx, \qquad C_2'(x) = 1.$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + C_1, \qquad C_2(x) = x + C_2.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$\mathbf{Y}_{он} = (\ln|\cos x| + C_1) \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + (x + C_2) \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \cdot \ln|\cos x| + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \cdot x$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \cdot \ln|\cos x| + x \cos x. \end{cases} \diamond$$

ТЕОРЕМА 6 (о структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Общее решение неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B}$$

с непрерывными на $[a,b]$ *коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и правыми частями* $b_i(x)$, *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$ *и частного решения* $\overline{\mathbf{Y}}$ *рассматриваемой неоднородной системы, т. е.*

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}},}$$

где $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ *– фундаментальная система решений однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

ТЕОРЕМА 7 (о наложении решений). *Если* $\mathbf{Y_i}$ *– решения неоднородных систем*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m}),$$

то их сумма $\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} + \ldots + \mathbf{Y_m}$ *является решением неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + (\mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \ldots + \mathbf{B_m}).$$

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Собственные значения и собственные векторы

Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить ряд понятий, связанных с линейными операторами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* φ *– оператор пространства* L. *Если для некоторого ненулевого вектора* $x \in L$ *и числа* λ *имеем* $\varphi(x) = \lambda x$, *то число* λ *называется собственным значением оператора* φ, *а вектор* x *называется собственным вектором оператора* φ, *относящимся к собственному значению* λ.

Свойства собственных векторов:

1. *Каждый собственный вектор* x *оператора* φ *относится к единственному собственному значению.*
2. *Если* x_1 *и* x_2 *– собственные векторы оператора* φ, *относящиеся к одному и тому же собственному значению* λ, *то их линейная комбинация* $\alpha x_1 + \beta x_2$ *– собственный вектор оператора* φ, *относящийся к тому же собственному значению.*
3. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \ldots x_k$ *оператора* φ, *относящиеся к различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Из свойства 3 следует, что *линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L_n, не может иметь более n собственных значений*. Кроме того, *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы*.

Процесс поиска собственных значений и собственных векторов оператора конечномерного пространства на практике сводится к решению алгебраических уравнений и систем.

Действительно, предположим, что $\mathbf{A}$ – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $\mathbf{X}$ – матрица-столбец координат вектора x в том же базисе. Тогда векторное равенство $\varphi(x) = \lambda x$ равносильно матричному равенству

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad \text{или} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}.$$

Последняя система имеет ненулевое решение лишь тогда, когда:

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.} \qquad (11)$$

Матрица $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ называется ***характеристической матрицей*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$), а ее определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$, являющийся многочленом относительно λ – ***характеристическим многочленом*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$).

Найдя корни характеристического многочлена, мы определим собственные значения. Подставив конкретное собственное значение в (11) и решив получившуюся систему, мы найдем относящиеся к нему собственные векторы.

ПРИМЕР 21.1. Найти собственные векторы и собственные значения оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

1.

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18). \qquad \lambda_1 = 6, \ \ \lambda_{2,3} = 3.$$

2. Для $\lambda_1 = 6$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 6\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2-6 & -5 & -3 \\ -1 & -2-6 & -3 \\ 3 & 15 & 12-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Для $\lambda_{2,3} = 3$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2-3 & -5 & -3 \\ -1 & -2-3 & -3 \\ 3 & 15 & 12-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Далее мы будем называть ***собственными значениями*** и ***собственными векторами матрицы A*** собственные значения и собственные векторы линейного оператора, порожденного матрицей А.

Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + b_i(x) \quad (i = \overline{1,n}), \tag{12}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные. Такие системы называют ***системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** и именно они имеют наибольшее практическое применение.

Будем искать решение сначала для однородной системы:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \quad (i = \overline{1,n}). \tag{13}$$

Запишем систему в матричном виде: $$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будем искать решение системы в виде вектор- функции:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \dots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\mathbf{D}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

где $\lambda, d_1, d_2, \ldots, d_n$ – неизвестные действительные числа

Подставим **Y** в систему (13), получим

$$\lambda \cdot e^{\lambda x}\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda x}\mathbf{D}) \quad \text{или} \quad \lambda \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D},$$

Но это означает, что λ *должно является действительным характеристическим корнем* (*т. е. собственным значением*) *матрицы* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{D}$ *– ее собственным вектором, относящимся к* λ.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные. Рассмотрим ситуации, которые в связи с этим могут возникнуть.

I. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны и различны*

В этом случае для каждого характеристического корня λ_i $(i=\overline{1,n})$ найдем собственный вектор $\mathbf{D_i}=(d_{ji})$ и запишем решения $\mathbf{Y_i}=e^{\lambda_i x}\mathbf{D_i}$:

$$\mathbf{Y_1}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}d_{11} \\ e^{\lambda_1 x}d_{21} \\ \dots \\ e^{\lambda_1 x}d_{n1} \end{pmatrix},\ \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x}d_{12} \\ e^{\lambda_2 x}d_{22} \\ \dots \\ e^{\lambda_2 x}d_{n2} \end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} e^{\lambda_n x}d_{1n} \\ e^{\lambda_n x}d_{2n} \\ \dots \\ e^{\lambda_n x}d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений. Имеем:

$$W\,[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n]=\begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}=e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x}\cdot\ldots\cdot e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n d_{1n}e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1 d_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n d_{2n}e^{\lambda_n x}, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ y_n = C_1 d_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2}e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n d_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

Пример Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1.$$

Для $\lambda_1 = 5$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \ x_2 = 2x_1$ – общее решение системы.

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y_1} = e^{5x}\mathbf{D_1} = e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ 2e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = -1$ имеем:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 4 & 3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \; x_2 = -x_1$ – общее решение системы.

$$\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y_2} = e^{-x}\mathbf{D_2} = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = 2C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x}. \end{cases} \diamond$$

II. *Характеристические корни матрицы* **A** *различны, но среди них есть комплексные*

Так как характеристический многочлен матрицы **A** имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. Пусть, например, характеристическими корнями являются числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Пусть $\mathbf{D} = (d_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}$.

Тогда комплексная вектор-функция

$$\mathbf{Z_1} = e^{\lambda_1 x}\mathbf{D} = e^{(\alpha + i\beta)x}\mathbf{D} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}\mathbf{D} = e^{\alpha x} \cdot (\cos\beta x + i\sin\beta x)\mathbf{D},$$

является решением системы (13).

А следовательно её вещественная и мнимая части

$$\mathbf{Y_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z_1},$$

$$\mathbf{Y_2} = \operatorname{Im}\mathbf{Z_1}.$$

являются действительными решениями системы (13).

Заметим, что для второго комплексно-сопряженного корня мы получим те же вектор-функции.

Таким образом для пары комплексно-сопряженных корней мы получаем две Линейно-независимые вектор функции

ПРИМЕР. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2, \\ y_3' = 3y_1 + y_3. \end{cases}$$

1) Матрица системы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 4]. \qquad \Rightarrow \ \lambda_1 = 1, \ \ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

$\lambda_1 = 1$ $$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 3x_1 = 0. \end{cases} \qquad \mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y_1} = e^x\mathbf{D_1} = e^x\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 1 + 2i$ $$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1-(1+2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1-(1+2i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2ix_2 = 0, \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1}{2i}, \\ x_3 = \dfrac{3x_1}{2i}. \end{cases} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{Z} = e^{(1+2i)x}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x)\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x + i \cdot 2\cos 2x \\ \cos 2x + i \cdot \sin 2x \\ 3\cos 2x + i \cdot 3\sin 2x \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + ie^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y_2} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y_3} = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2C_2e^x \sin 2x + 2C_3e^x \cos 2x, \\ y_2 = -C_1e^x + C_2e^x \cos 2x + C_3e^x \sin 2x, \\ y_3 = C_1e^x + 3C_2e^x \cos 2x + 3C_3e^x \sin 2x. \end{cases}$$

III. *Характеристические корни матрицы* A *действительны, но среди них есть кратные*

Пусть λ – действительный характеристический корень матрицы $\mathbf{A}$ кратности ℓ, $r = rang(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Возможны два случая.

$\boxed{\mathbf{1)}\ \boldsymbol{n - r = \ell}.}$

В этом случае фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из ℓ решений. Следовательно, существуют ℓ линейно независимых собственных векторов $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}, \ldots, \mathbf{D}_\ell$ матрицы $\mathbf{A}$, относящихся к собственному значению λ. Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \ldots,\ \mathbf{Y}_\ell = e^{\lambda x}\mathbf{D}_\ell$$

линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений этой системы.

$\boxed{\mathbf{2)}\ \boldsymbol{n - r < \ell}}$

Тогда фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из $k < \ell$ решений. С их помощью мы сможем получить k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений.

К сожалению, в этом случае нам не хватает собственных векторов для заполнения ФСР. Поэтому следует воспользоваться теоремой из алгебры:

Теорема. Пусть λ – собственное значение матрицы $\boldsymbol{A}$ кратности $\boldsymbol{l}$.

Тогда существует $\boldsymbol{l}$ линейно независимых векторов-столбцов

$$D_i^{j_i} \; (i = \overline{1,k};\, j_i = \overline{1,q_i})$$

соответствующих λ и удовлетворяющих соотношениям:

$$AD_i^1 = \lambda D_i^1$$

$$AD_i^2 = \lambda D_i^2 + D_i^1$$

$$....$$

$$AD_i^{q_i} = \lambda D_i^{q_i} + D_i^{q_i - 1}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_k = l$$

Здесь $D_i^1 \, (i = \overline{1,k})$ - собственные векторы, а остальные называют присоединенными.

Тогда справедлива:

Теорема 8. Собственному значение λ матрицы $\boldsymbol{A}$ кратности $\boldsymbol{l}$ соответствуют $\boldsymbol{l}$ решений вида:

$$Y_i^1 = D_i^1 e^{\lambda x}$$

$$Y_i^1 = (D_i^2 + x D_i^1) e^{\lambda x}$$

$$.... \qquad\qquad i = \overline{1,k}$$

$$Y_i^{q_i} = \left(D_i^{q_i} + x D_i^{q_i - 1} + \frac{x^2}{2!} D_i^{q_i - 2} + \ldots + \frac{x^{q_i - 1}}{(q_i - 1)!} D_i^1 \right) e^{\lambda x}$$

Пример Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\left| \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \right| = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2.$$

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \qquad \mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Других собственных векторов нет. Будем искать присоединенный корень.

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_1}$$

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1-2 & -1\\ 1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\mathbf{D_1},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases}-x_1 - x_2 = -1,\\ x_1 + x_2 = 1.\end{cases}$$

$$\mathbf{D_{20}}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y_2}=e^{2x}\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}x\right]=e^{2x}\begin{pmatrix}1-x\\ x\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y}=C_1\mathbf{Y}_1+C_2\mathbf{Y_2}=C_1e^{2x}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}1-x\\ x\end{pmatrix}.$$

Пример Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2,3} = 1.$$

$$\mathbf{A} - 1\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-1 & -3 & 3 \\ -2 & -6-1 & 13 \\ -1 & -4 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = rang(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2.$$

Следовательно, $n - r = 3 - 2 = 1$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O} \qquad \begin{cases} \quad\; - 3x_2 + 3x_3 = 0,\\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 0,\\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0.\end{cases}$$

$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ -единственный собственный вектор. Надо искать еще два присоединенных к нему

$$\mathbf{Y_1}=e^x\mathbf{D_1}=e^x\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^x\\ e^x\\ e^x\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{D_1} \qquad \begin{cases} \quad\; - 3x_2 + 3x_3 = 3,\\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 1,\\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1.\end{cases}$$

$\mathbf{D_{20}}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ -первый присоединенный

$$\mathbf{Y_2}=e^x\left[\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}x\right]=e^x\begin{pmatrix}3+3x\\ -1+x\\ x\end{pmatrix}.$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{D_{20}}, \qquad \begin{cases} \quad\; - 3x_2 + 3x_3 = 3,\\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = -1,\\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0.\end{cases}$$

$\mathbf{D_{30}}=\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ -второй присоединенный

$$\mathbf{Y}_3=e^x\left[\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\frac{x^2}{2}\right]=e^x\begin{pmatrix}4+3x+1{,}5x^2\\ -1-x+0{,}5x^2\\ 0{,}5x^2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} y_1 = 3C_1e^x + C_2e^x(3+3x) + C_3e^x(4+3x+1{,}5x^2),\\ y_2 = C_1e^x + C_2e^x(-1+x) + C_3e^x(-1-x+0{,}5x^2),\\ y_3 = C_1e^x + C_2e^x\cdot x + C_3e^x\cdot 0{,}5x^2.\end{cases}$$

Пример Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1, \\ y_2' = y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad \left| \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \right| = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 2)^3,$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 2.$$

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = rang(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1$$

$$n - r = 3 - 1 = 2$$

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O} \qquad \mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ -собственные векторы

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_2} \qquad \begin{cases} 0 = \alpha, \\ 0 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = \beta, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = -\beta. \end{cases}$$

Чтобы система была совместна, возьмем $\alpha = 0$ и $\beta = -1$

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \qquad \mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y_2} = e^{2x}\mathbf{D_2} = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y}_3 = e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right] = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} + C_{\mathbf{3}}\mathbf{Y_3}$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x}, \\ y_2 = C_2 e^{2x} - C_3 x e^{2x}, \\ y_3 = -C_2 e^{2x} + C_3(1+x)e^{2x}. \end{cases}$$