2.8 Независимость системы аксиом ИВ

- Система аксиом формально непротиворечивой теории Т называется ***независимой***, если никакая из аксиом не выводима из остальных по правилам вывода теории Т.

Теорема.

- ***Система аксиом ИВ независима***.

Доказательство.

- Независимость аксиом исчисления высказываний L устанавливается через обращение к многозначным логикам.

- Для доказательства независимости схем аксиом необходимо рассмотреть различные интерпретации связок $\neg$ и $\rightarrow$.
- Покажем независимость схемы аксиом $\mathcal{A}_1$

Таблица для связки ¬

x	$\neg x$
0	1
1	1
2	0

Таблица для связки →

x	y	$x \to y$	x	y	$x \to y$	x	y	$x \to y$
0	0	0	1	0	2	2	0	0
0	1	2	1	1	2	2	1	0
0	2	2	1	2	0	2	2	0

- **Всякая аксиома, полученная по схеме $\mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_3$, принимает значение 0 при предложенной интерпретации логических операций.**

Действительно, для аксиомы $\mathcal{A}_3$ таблица значений выглядит так:

A	B	$\neg B \to \neg A$	$\neg B \to A$	$(\neg B \to A) \to B$	$\mathcal{A}_3$
0	0	2	2	0	0
0	1	2	2	0	0
0	2	2	0	2	0
1	0	2	2	0	0
1	1	2	2	0	0
1	2	2	2	0	0
2	0	2	0	0	0
2	1	2	0	2	0
2	2	0	2	0	0

- Кроме того, правило вывода modus ponens сохраняет у формул свойство равенства 0 в данной интерпретации.
- Действительно, если формулы A и $A \to B$ имеют значение 0, то по таблице значений для импликации в новой интерпретации можно однозначно определить, что формула B также имеет значение 0.

- **Следовательно, значение 0 принимает и всякая формула, выводимая из аксиом, полученных по схемам $\mathcal{A}_2$ или $\mathcal{A}_3$.**

- Формула $(A \to (B \to A))$ не равна тождественно 0
- при $A=1, B=2$ формула принимает значение 2 .
- Таким образом, аксиомы по схеме 1 не могут быть выведены с помощью правила вывода из аксиом, построенных по другим схемам.

2.8 Другие аксиоматизации ИВ

Гильберт и Аккерман, 1938

- Связки $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$
- Аксиомы

  $A \vee A \rightarrow A$

  $A \rightarrow A \vee B$

  $A \vee B \rightarrow B \vee A$

  $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A \vee C)$
- Правило Modus ponens

Россер, 1953

- Связки &, ¬, →
- Аксиомы

  $A \& A \to A$

  $A \to A \& B$

  $(A \to B) \to (\neg(B \& C) \to \neg(C \& A))$
- Правило Modus ponens

Клини, 1952

- Связки &, ¬, →, ∨
- Аксиомы

$A \& B \to A$ $\quad$ $A \& B \to B$ $\quad$ $A \to A \vee B$ $\quad$ $B \to A \vee B$

$A \to (B \to A)$ $\quad$ $A \to (B \to (A \& B))$ $\quad$ $\neg\neg A \to A$

$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

$(A \to B)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

- **Правило Modus ponens**

Никод, 1917

- Связка | (A|B:=¬A∨¬B)
- Аксиома

(A|(B|C))|((D|(D|D)) | ((E|B)|((A|E)|(A|E))))

- Правило A, A|(B|C) ├ C

- ***Различные аксиоматизации ИВ равносильны***