2.2 Понятие формальной теории

Исчисление

– основанный на четких правилах формальный аппарат оперирования со знаниями определенного вида,

позволяющий дать точное описание некоторого класса задач, а для отдельных подклассов этого класса и алгоритм решения.

Логическое исчисление

- **строится на базе некоторого формализованного языка**

- Задается набор исходных символов, из которых с помощью четко определенных правил строятся формулы рассматриваемого исчисления.
- Некоторые из этих формул выбираются в качестве ***аксиом***, из которых с помощью правил преобразования получают новые формулы, называемые ***теоремами***.

- После того как к исчислению добавляется интерпретация, придающая значение ее исходным символам и формулам, исчисление превращается в язык, описывающий некоторую предметную область.

- **Способ построения научной теории в виде системы аксиом (постулатов) и правил вывода, позволяющих формальным логическим путем получать утверждения (теоремы) данной теории, называется *аксиоматическим методом*.**

Чтобы задать *формальную аксиоматическую теорию* Т, необходимо определить:

- **некоторое счётное множество символов (*алфавит*) – символов теории Т**

  (конечные последовательности символов теории Т называются выражениями или словами теории Т);

- **подмножество выражений теории Т,**

  называемых *формулами*

- **подмножество формул теории Т, называемых *аксиомами***

- **конечное множество**
  R_1, R_2, ..., R_m
  отношений между формулами, называемых
  правилами вывода

- Если формула A и формулы

  A_1, A_2, ..., A_i находятся в некотором отношении R_k,

  то A называется ***непосредственным следствием*** из формул

  A_1, A_2, ..., A_i,

  полученным по правилу R_k.

- **Это обозначается так**

$$\frac{A_1, A_2, \ldots A_i}{A} R_k$$

- **при этом формулы *A*$_1$, *A*$_2$, ..., *A*$_i$ называются *посылками*, формула *A* – *заключением*.**

Выводом формулы А из формул $F_1, \dots, F_k$ в теории Т

называется всякая последовательность формул

$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ такая, что

- $A_n = A$
- для любого i формула A_i --

  либо аксиома теории Т,

  либо одна из формул F_j,

  либо непосредственное следствие из ранее полученных формул.

- **Если в теории T существует вывод формулы *A* из формул $F_1, \ldots, F_k$, то записывают это так**

$$F_1, \ldots, F_k \vdash_T A,$$

при этом формулы $F_1, \ldots, F_k$ называются *гипотезами* вывода.

- **Если $\vdash_T A$, то формула A называется *теоремой* теории Т (т.е. выводима только из аксиом без гипотез).**
- **Вывод теоремы называется *доказательством*.**

2.3 Исчисление высказываний (ИВ)

- **Определим исчисление высказываний как формальную аксиоматическую теорию L следующим образом:**

Алфавит ИВ образуют

- **буквы *A*, *B*, *C*,...**

(возможно с индексами)

- **логические символы $\neg$, $\rightarrow$**
- **вспомогательные символы скобок (,)**

Множество формул ИВ

- а) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;
- б) если *A* и *B* формулы ИВ, то $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$ – формулы ИВ;
- в) других формул нет.

Аксиомы ИВ (классическое определение):

- $A_1 : (A \to (B \to A))$
- $A_2 :$ $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
- $A_3 : ((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$

Единственным правилом вывода в ИВ

- является правило отделения (*modus ponens*):
- если A и $A \rightarrow B$ – выводимые формулы,

  то B – также выводимая формула.

Символическая запись:

$$\frac{A, A \to B}{B}\,MP$$

- Здесь A, B – любые формулы.
- Таким образом, множество аксиом теории L бесконечно, хотя задано тремя схемами аксиом.
- Множество правил вывода также бесконечно, хотя оно задано только одной схемой.

- **Будем далее опускать внешние скобки у формул.**
- **Другие логические связки вводятся определениями:** $A \& B := \neg(A \to \neg B)$, $A \vee B := \neg A \to B$.
- **Любая формула, содержащая эти связки, рассматривается как синтаксическое сокращение собственной формулы теории L.**

- Выводимость формул в теории L доказывается путем предъявления конкретного вывода, т.е. последовательности формул, удовлетворяющих определению.

Теорема.

$$\vdash_L A \to A$$

- Необходимо построить последовательность формул.
- Каждая из формул является или аксиомой или логическим следствием предыдущих формул в последовательности

- 1. $(A \to ((A \to A) \to A))$

A_1: $(A \to (B \to A))$ $\quad$ $B \leftarrow (A \to A)$

- 2.

$$((A\rightarrow((A\rightarrow A)\rightarrow A))\rightarrow((A\rightarrow(A\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow A)))$$

A_2: $((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)))$

$$B\leftarrow(A\rightarrow A); \quad C\leftarrow A$$

- **3.** $((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
  MP 1,2

- **4.** $A \to (A \to A)$
  A_1: $B \leftarrow A$

- *5. $A \rightarrow A$*

MP 4,3

Теорема.

- $A \vdash_L B \to A$

Доказательство.

- 1. A гипотеза
- 2. $A \to (B \to A)$ A_1
- 3. $B \to A$ MP 1,2

2.4 Теорема дедукции

- ***Дедуктивные умозаключения --* это умозаключения, в которых из общего правила делается вывод для частного случая.**

- Все звезды излучают энергию
- Солнце – это звезда
- Значит, Солнце излучает энергию

Теорема дедукции (Ж. Эрбран)

Пусть Г – множество формул,

A и B – формулы.

Если Г, A $\vdash_L$ ***B,***

то Г $\vdash_L$ ***A→B и обратно.***

Доказательство достаточности

Докажем, что если

$\boldsymbol{\Gamma \vdash_L A \to B}$**, то** $\boldsymbol{\Gamma, A \vdash_L B}$

- **Пусть имеется вывод $\Gamma \vdash_L A \to B$, состоящий из n формул.**

- n $A \to B$
- n+1 A гипотеза
- n+2 B MP n, n+1

- Достроив имеющийся вывод таким образом , получим вывод $\Gamma, A \vdash_L B$.

Доказательство необходимости

Пусть имеется вывод B_1, B_2 , …,B_n из $Г$ U {A}, где B_n=B

Индукцией по i ($1 \le i \le n$) покажем, что $Г \vdash_L A \rightarrow B$

Базис индукции i=1

- **B_1 должно быть элементом Γ, либо быть аксиомой, либо совпадать с A.**

$B_1 \to (A \to B_1)$ – аксиома, поэтому
$\Gamma \vdash_L A \to B_1$ по правилу отделения

Если $B_1 = A$, то показано, что $\vdash_L A \to A$

Индуктивный переход

- **Допустим, что** $\boldsymbol{\Gamma \vdash_L A \rightarrow B_k}$

для любого $\boldsymbol{k<i}$

Для B_i имеется четыре возможности

- Аксиома
- Гипотеза
- B_i=A
- B_i логическое следствие из некоторых B_s и B_m,
  при этом $s,m<i$ и $B_m= B_s \rightarrow B_i$

Первые три случая аналогичны доказательству базы индукции

- Применим индуктивное предположение, что $\Gamma \vdash_L A \to B_s$ и $\Gamma \vdash_L A \to (B_s \to B_i)$
- Поскольку имеет место аксиома

$$\vdash_L (A \to (B_s \to B_i)) \to ((A \to B_s) \to (A \to B_i))$$

то по правилу отделения

$$\vdash_L (A \to B_s) \to (A \to B_i)$$

Еще раз применяя правило отделения

$$\vdash_L (A \to B_i)$$

Следствие 1.

- ***Если $A \vdash_L B$, то $\vdash_L A \to B$ и обратно***

- **Доказательство. Положим в теореме дедукции $\Gamma = \varnothing$.**

Следствие 2. *(Правило транзитивности)*

- $A \to B,\ B \to C \vdash_L A \to C$

Доказательство.

- 1 $A \to B$ гипотеза
- 2 $B \to C$ гипотеза
- 3 A гипотеза
- 4 B MP 3,1
- 5 C MP 4,2
- 6 $A \to B,\ B \to C,\ A \vdash_L C$ 1-5
- 7 $A \to B,\ B \to C \vdash_L A \to C$

Теорема дедукции

Следствие 3.
(Правило сечения)

- $A \to (B \to C),\ B \vdash_L A \to C$

Доказательство.

- 1 $A\to(B\to C)$ гипотеза
- 2 A гипотеза
- 3 $B\to C$ MP 2,1
- 4 B гипотеза
- 5 C MP 4,3
- 6 $A\to(B\to C),\ B,\ A \vdash_L C$ 1-5
- 7 $A\to(B\to C),\ B \vdash_L A\to C$

Теорема дедукции

Следствие 4.

- **Если** Γ**, A** $\vdash \Phi$ **и** Γ**,¬A** $\vdash \Phi$**,**

  то $\Gamma \vdash \Phi$

Следствие 5

- Если $\Gamma \vdash \Phi$ и $\Gamma \vdash \Psi$,
  то $\Gamma \vdash (\Phi \,\&\, \Psi)$ и $\Gamma \vdash (\Phi \vee \Psi)$