


## ***2.8 Независимость системы аксиом ИВ***

- 
- Система аксиом формально непротиворечивой теории  $T$  называется *независимой*, если никакая из аксиом не выводима из остальных по правилам вывода теории  $T$ .




# Теорема.

- ***Система аксиом ИВ  
независима.***



# Доказательство.

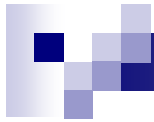
- Независимость аксиом исчисления высказываний  $L$  устанавливается через обращение к многозначным логикам.

- 
- Для доказательства независимости схем аксиом необходимо рассмотреть различные интерпретации связок  $\neg$  и  $\rightarrow$ .
  - Покажем независимость схемы аксиом  $\mathcal{A}_1$




# Таблица для связки $\neg$

$x$	$\neg x$
0	1
1	1
2	0



# Таблица для связки $\rightarrow$

$x$	$y$	$x \rightarrow y$	$x$	$y$	$x \rightarrow y$	$x$	$y$	$x \rightarrow y$
0	0	0	1	0	2	2	0	0
0	1	2	1	1	2	2	1	0
0	2	2	1	2	0	2	2	0

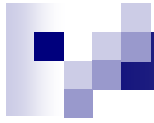
- 
- **Всякая аксиома, полученная по схеме  $\mathcal{A}_2$  или  $\mathcal{A}_3$ , принимает значение 0 при предложенной интерпретации логических операций.**







Действительно, для аксиомы  $\mathcal{A}_3$   
таблица значений выглядит так:

$A$	$B$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$\neg B \rightarrow A$	$(\neg B \rightarrow A) \rightarrow B$	$\mathcal{A}_3$
0	0	2	2	0	0
0	1	2	2	0	0
0	2	2	0	2	0
1	0	2	2	0	0
1	1	2	2	0	0
1	2	2	2	0	0
2	0	2	0	0	0
2	1	2	0	2	0
2	2	0	2	0	0



- Кроме того, правило вывода **modus ponens** сохраняет у формул свойство равенства 0 в данной интерпретации.
- Действительно, если формулы  $A$  и  $A \rightarrow B$  имеют значение 0, то по таблице значений для импликации в новой интерпретации можно однозначно определить, что формула  $B$  также имеет значение 0.

- 
- Следовательно, значение 0 принимает и всякая формула, выводимая из аксиом, полученных по схемам  $\mathcal{A}_2$  или  $\mathcal{A}_3$ .

- 
- Формула  $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$  не равна тождественно 0
  - при  $A=1, B=2$  формула принимает значение 2 .
  - Таким образом, аксиомы по схеме 1 не могут быть выведены с помощью правила вывода из аксиом, построенных по другим схемам.



## ***2.8 Другие аксиоматизации ИВ***



# Гильберт и Аккерман, 1938

- Связки  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$

- Аксиомы

$$A \vee A \rightarrow A$$

$$A \rightarrow A \vee B$$

$$A \vee B \rightarrow B \vee A$$

$$(B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A \vee C)$$

- Правило Modus ponens



# Россер, 1953

- Связки  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$

- Аксиомы

$$A \& A \rightarrow A$$

$$A \rightarrow A \& B$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg(B \& C) \rightarrow \neg(C \& A))$$

- Правило Modus ponens

# Клини, 1952

■ Связки  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$ ,  $\vee$

■ Аксиомы

$A \& B \rightarrow A$      $A \& B \rightarrow B$      $A \rightarrow A \vee B$      $B \rightarrow A \vee B$

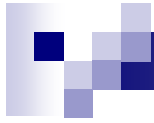
$A \rightarrow (B \rightarrow A)$      $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$      $\neg \neg A \rightarrow A$

$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$





## ■ **Правило Modus ponens**



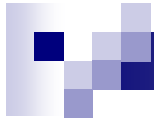
# Никод, 1917

- Связка  $|$   $(A|B := \neg A \vee \neg B)$

- Аксиома

$(A|(B|C))|((D|(D|D)) | ((E|B)|((A|E)|(A|E))))$

- Правило  $A, A|(B|C) \vdash C$



- ***Различные аксиоматизации ИВ  
равносильны***