2.7 Метод резолюций

- **Наиболее известный алгоритм проверки выводимости формул в ИВ называется *методом резолюций*.**

Теорема.

- Если $\Gamma,\ \neg A \vdash_L B$, где B – *любое противоречие,*

  то $\Gamma \vdash_L A$.

Доказательство.

- $\Gamma, \neg A \vdash_L B \Leftrightarrow \Gamma \& \neg A \vdash_L B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vdash_L \Gamma \& \neg A \to B \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \& \neg A \to B$ – тавтология.

- Преобразуем эту формулу.
- $\Gamma \& \neg A \rightarrow B \equiv \neg(\Gamma \& \neg A) \vee B \equiv$

$\equiv \neg(\Gamma \& \neg A) \equiv \neg\Gamma \vee A \equiv \Gamma \rightarrow A.$

- Следовательно, $\Gamma \rightarrow A$ – тавтология, тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash_L A$.

- **В качестве формулы *B* при доказательстве от противного по методу резолюций принято использовать пустую формулу, которую будем обозначать $\varnothing$.**

- Пустая формула не имеет никакого значения и не является истинной ни при какой интерпретации и, по определению является противоречием.

- **Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые называются *предложениями*.**
- **Предложение – это дизъюнкция переменных или их отрицаний (литералов).**

- Любая формула исчисления высказываний может быть преобразована во множество предложений следующим образом.
- Формула приводится к КНФ
- Затем конъюнкция дизъюнкций литералов разбивается на множество предложений.

Пример.

Найдем множество предложений, соответствующих формуле

$$A \to \neg(B \to A)$$

- Приведем формулу к КНФ.
- $A \to \neg(B \to A) \equiv \neg A \vee \neg(B \to A) \equiv$

$\equiv \neg A \vee \neg(\neg B \vee A) \equiv \neg A \vee (B \& \neg A) \equiv (\neg A \vee B) \& \neg A$

Таким образом, множество предложений состоит из двух формул $\neg A \vee B$, $\neg A$.

- Пусть A и B – два предложения
- Пусть $A = P \vee A_1$, а $B = \neg P \vee B_1$,

где P – переменная, а

A_1, B_1 – любые предложения

(в частности, могут быть пустые или состоящие только из одного литерала).

- Правило вывода

$$\frac{A, B}{A_1 \vee B_1} R$$

- называется *правилом резолюции*.

- Предложения *A* и *B* называются ***резольвируемыми*** (или родительскими)
- предложение $A_1 \vee B_1$ – ***резольвентой***,
- формулы *P*, $\neg P$ – ***контрарными*** литералами.

- Ранее рассмотренные правила вывода являются частными случаями правила резолюций

Modus ponens

$$\boldsymbol{A, A \rightarrow B \vdash B}$$

$$\boldsymbol{A, \neg A \vee B \vdash B}$$

- **Правило транзитивности**

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

$$\neg A \vee B,\ \neg B \vee C \vdash \neg A \vee C$$

- **Правило сечения**

$$A \rightarrow (B \rightarrow C),\ B \vdash A \rightarrow C$$

$$\neg A \vee \neg B \vee C,\ B \vdash \neg A \vee C$$

Теорема.

- ***Правило резолюции логично, т.е. резольвента является логическим следствием резольвируемых предложений.***

Доказательство.

- Пусть $A=P \vee A_1$, а $B=\neg P \vee B_1$
- Пусть A=И и B=И при некоторой интерпретации.
- Тогда если P=И, то $B_1 \neq \varnothing$ и B_1=И, а значит $A_1 \vee B_1$=И.
- Если же P=Л, то $A_1 \neq \varnothing$ и A_1=И, а значит $A_1 \vee B_1$=И.

- **Пусть нужно установить выводимость $\Gamma \vdash_L F$.**
- **Воспользуемся доказательством от противного и будем доказывать выводимость**

  $$\Gamma, \neg F \vdash_L \varnothing$$

  с помощью метода резолюций.

- **Каждая формула множества *Г* и формула ¬*F* независимо преобразуются в множества предложений.**

- **В полученном совокупном множестве предложений отыскиваются резольвируемые предложения**

- Далее применяется правило резолюции и резольвента добавляется во множество предложений
- Процедура резольвирования повторяется.

При этом возможны два случая

- Среди текущего множества предложений нет резольвируемых. Это означает, что теорема опровергнута, т.е. формула *F* не выводима из множества формул *Г*.
- В результате очередного применения правила резолюции получено пустое предложение. Это означает, что теорема доказана, т.е. $\Gamma \vdash_L F$.

Пример

Докажем методом резолюций теорему

$$\vdash_L (X \& Y \& Z) \to (X \to Y) \& (X \to Z).$$

Преобразуем во множество предложений отрицание целевой формулы

- $\neg((X \& Y \& Z) \to (X \to Y) \& (X \to Z))$
- $\neg(\neg(X \& Y \& Z) \vee (\neg X \vee Y) \& (\neg X \vee Z))$
- $\neg(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z \vee (\neg X \vee Y) \& (\neg X \vee Z))$
- $X \& Y \& Z \& \neg((\neg X \vee Y) \& (\neg X \vee Z))$
- $X \& Y \& Z \& (\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg X \vee Z))$

- $X \& Y \& Z \& (X \& \neg Y \vee X \& \neg Z)$
- $X \& Y \& Z \& X \& (\neg Y \vee \neg Z)$
- $X \& Y \& Z \& (\neg Y \vee \neg Z)$

Таким образом, множество предложений состоит из

X, Y, Z, $(\neg Y \vee \neg Z)$.

Теперь производим резольвирование

- 1 X
- 2 Y
- 3 Z
- 4 $(\neg Y \vee \neg Z)$
- 5 $\neg Z$ ПР из 2 и 4
- 6 $\varnothing$ ПР из 3 и 5

Пример

Докажем методом резолюций выводимость

$$(X\&Y\&Z) \vdash_L (X \to Y)\&(X \to Z)$$

- **Преобразуем во множество предложений отдельно гипотезу и отрицание целевой функции.**
- **Гипотеза дает предложения**

  {*X*, *Y*, *Z*}.

- **Отрицание целевой формулы дает следующие предложения $\{ X, (\neg Y \vee \neg Z)\}$, поскольку**
- $\neg((X \rightarrow Y) \& (X \rightarrow Z))$
- $\neg(X \rightarrow Y) \vee \neg(X \rightarrow Z)$
- $(X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z)$
- $X \& (\neg Y \vee \neg Z)$

- Таким образом общее множество предложений

$$X,\ Y,\ Z,\ (\neg Y \vee \neg Z)$$

- Далее резольвируем как в предыдущем примере.

Пример

Проверим методом резолюций выводимость

$$\vdash_L X \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$$

- **Применим к выводимости теоремy дедукции. Получим**

$$X \vdash (X \to Y) \to (X \to Z)$$

- **Еще раз применим теорему дедукции**

$$X,\ X \to Y \vdash X \to Z$$

- Преобразуем к множеству предложений гипотезу и отрицание целевой формулы.
- Получим предложения

$$X, \neg X \vee Y, \neg Z$$

- Теперь производим резольвирование
- 1 X
- 2 $\neg X \vee Y$
- 3 $\neg Z$
- 4 Y ПР из 1 и 2

- Таким образом, дальнейшее резольвирование невозможно и выводимость не доказуема.

Относительно четырех подсудимых установлено следующее

Если Антонов виновен, то Воронин был соучастником

Если Воронин виновен, то либо Сидоров был соучастником, либо Антонов не виновен.

Если Дронов не виновен, то Антонов виновен и Сидоров не виновен.

Если Дронов виновен, то Антонов виновен

Вывод: *Антонов виновен*

Обозначим переменными

- A – «*Антонов виновен*»
- B – «*Воронин виновен*»
- C – «*Сидоров виновен*»
- D – «*Дронов виновен*»

Гипотезы

- $A \to B$
- $B \to C \vee \neg A$
- $\neg D \to A \& \neg C$
- $D \to A$

Вывод

A

Проверим выводимость методом резолюций

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vee \neg A,\ \neg D \rightarrow A \& \neg C,\ D \rightarrow A \vdash A$$

Множество предложений

- 1. $\neg A \vee B$
- 2. $\neg B \vee C \vee \neg A$
- 3. $D \vee A$
- 4. $D \vee \neg C$
- 5. $\neg D \vee A$
- 6. $\neg A$

- 7. $\neg$ D ПР 5, 6
- 8. D ПР 3, 6
- 9. $\varnothing$ ПР 7, 8

Пример

Перевести рассуждение в логическую символику и проверить результат на правильность

Он сказал, что придет, если не будет дождя.

Но идет дождь.

Значит, он не придет.

Выделим отдельные высказывания и обозначим их.

- *A*=”Он придет”
- *B*=”Идет дождь”

- **Таким образом, в логической символике рассуждение выглядит так**

$$\neg B \to A,\ B \vdash \neg A$$

Проверим правильность рассуждения методом резолюций

- Множество предложений, соответствующее двум гипотезам и отрицанию вывода, состоит из следующих предложений

$$B \vee A,\ B,\ A\ .$$

- Среди предложений нет резольвируемых, поэтому рассуждение ложное.