3.5 *Примитивно рекурсивные функции*

- Рассматривается уточнение понятия алгоритма – теория частично рекурсивных функций.
- Этот подход к формализации алгоритма был разработан в 30-х годах прошлого столетия математиками К. Гёделем, С.К. Клини, А. Черчем

- **Будем рассматривать *n*-арные функции на множестве наборов неотрицательных целых чисел**

$$f:\overline{N}\times\overline{N}\times\ldots\times\overline{N}\to\overline{N}$$

- **Такие функции называются *арифметическими функциями*.**

- **Если функция определена не для каждого набора чисел, то такие функции называются**

  частично определенными арифметическими функциями **(ЧАФ).**

базовые функции:

- **функция следования** $S(x) = x + 1$
- **функция нуля** $O(x) = 0$
- **функция проекции**

$$U_i^n(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$$

Базовые функции всюду определены и достаточны просты для вычисления (будем называть их *интуитивно вычислимыми*).

Суперпозиция

- **Пусть имеются *n*-арная функция *f* и *m*-арные функции $f_1, f_2, \dots f_n$.**
- **Функция g получена операцией суперпозиции из функций**

  $f, f_1, f_2, \dots, f_n,$

  если для любых $x_1, x_2, \dots, x_m$

$$g(x_1,\dots,x_m) = f(f_1(x_1,\dots x_m),\dots,f_n(x_1,\dots x_m))$$

Пример

- **Функция F(x,y) получена суперпозицией функций**

$$f(x,y,z)=x+y+z,$$

$$g_1(x,y)=x,\ g_2(x,y)=y,\ g_3(x,y)=x-y.$$

Определить значение F(3,1)

$g_1(x,y)=x, \qquad g_2(x,y)=y, \qquad g_3(x,y)=x-y.$

$f(x,y,z)=x+y+z$

$F(3,1)= g_1(3,1)+ g_2(3,1)+ g_3(3,1)=6$

$F(1,3)= g_1(1,3)+ g_2(1,3)+ g_3(1,3)=$неопр.

Примитивная рекурсия

- **Пусть имеются произвольные функции: *n*- арная функция *g* и *n*+2-арная функция *h*.**
- ***n+1*-арная функция *f* получена *операцией примитивной рекурсии* из функций *g* и *h,* если для любых**

$$x_1, \ldots, x_n, y \in \overline{N}$$

Примитивная рекурсия

- **выполнены соотношения**

$$f(x_1,\ldots x_n,0)=g(x_1,\ldots x_n)$$

$$f(x_1,\ldots x_n,y+1)=h(x_1,\ldots x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,y))$$

В случае если *n=0*, то определение имеет такой вид

- **Функция *f(x)* получена *операцией примитивной рекурсии* из функции *h(x,y)* и константы *C*,**
- **если для любого $x \in N$ выполнены соотношения**

$$f(0) = C$$

$$f(x+1) = h(x, f(x))$$

Пример

- **Функция $f(x,y)$ получена операцией примитивной рекурсии из функций $g(x)=x+1$ и $h(x,y,z)=xz$**

Вычислить значение $f(4,3)$

$$f(4,0)= g(4)=5+1=6$$

$$f(4,1)= h(4,0,f(4,0))=4\cdot f(4,0)=24$$

$$f(4,2)= h(4,1,f(4,1))=4\cdot f(4,1)=96$$

$$f(4,3)= h(4,2,f(4,2))=4\cdot f(4,2)=384$$

- **Функция *f* называется *примитивно рекурсивной* (п.р.ф.),**

  если ее можно получить из простейших функций с помощью конечного числа

  операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Предложение. (свойства операций суперпозиции и примитивной рекурсии)

Операции суперпозиции и примитивной рекурсии сохраняют:

- ***всюду определённость функций;***
- ***интуитивную вычислимость функций.***

- **Доказательство проведем для операции суперпозиции.**
- **Пусть *m*-арная функция *$g(x_1, \ldots, x_m)$* получена в результате операции суперпозиции из функций *$f, f_1, \ldots, f_n$***

- Если все функции f, $f_1,\ldots,f_n$ – всюду определённые, то функция g всюду определена.
- Функция g будет не всюду определённой, если одна из функций $f_1,\ldots,f_n$ не всюду определена или если можно найти такие $a_1,\ldots a_m$, что $b_1=f_1(a_1,\ldots,a_m),\ldots,b_n=f_n(a_1,\ldots,a_m)$, но значение $f(b_1,\ldots,b_n)$ неопределено.

- **Если каким-либо образом можно вычислять значения функций f и $f_1, \ldots, f_n$, то можно вычислить значение функции g**

- Придадим переменным $x_1,\ldots,x_m$ некоторые значения $a_1,\ldots,a_m$.
- Вычислим

$b_1=f_1(a_1,\ldots,a_m),\ldots,b_n=f_n(a_1,\ldots,a_m)$.

- Вычислим значение $c=f(b_1,\ldots,b_n)$, которое будет значением $g(a_1,\ldots,a_m)$
- Таким образом, если функции f и $f_1,\ldots,f_n$, интуитивно вычислимы, то и функция g интуитивно вычислима.

Предложение

- ***Всякая п.р.ф. всюду определена.***
- ***Если функция f получена из п.р.ф. с применением операций суперпозиции или примитивной рекурсии, то функция f является п.р.ф.***
- ***Все п.р.ф. интуитивно вычислимы.***

Пример

- **Рассмотрим функцию**

  $$g(x_1,\ldots,x_m)=1$$

  для любых $x_1,\ldots,x_m \in \mathbf{N}$

- **Эта функция может быть получена суперпозицией из простейших функций.**

$$g(x_1,\ldots,x_m) = S(O(U_1^n(x_1,\ldots,x_m))) = 1$$

Пример

- Покажем, что функция суммы

$$f(x, y) = x + y$$

примитивно рекурсивна.

- **Действительно,**

$$f(x,0) = x = U_1^1(x) = g(x)$$

$$f(x, y+1) = x + y + 1 = f(x, y) + 1 =$$

$$= S(f(x, y)) = h(x, y, f(x, y))$$

- **где** $h(x, y, z) = S(U_3^3(x, y, z))$

- Поскольку функции *g* и *h* являются п.р., то и функция *f* является п.р.ф.

Пример

- Покажем, что функция $sg(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1, x > 0 \end{cases}$

является п.р.Представим функцию в виде примитивной рекурсии

$$sg(0) = 0$$

$$sg(x+1) = S(O(sg(x))) = h(x, sg(x))$$

где

$$h(x, y) = S(O(U_2^2(x, y)))$$

Теорема.

- ***Пусть n- арная функция g п.р. Тогда функции f , и определенные следующим образом***

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{x_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i)$$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i)$$

также примитивно рекурсивны.

Доказательство.

- **Из условия теоремы следует, что**

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, y+1) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, y) + g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y+1)$$

- **Следовательно, функция *f* строится с помощью примитивной рекурсии из п.р.ф.**

$$g(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$$ **и**

$$h(x_1,\ldots,x_n,y,z)=z+g(x_1,\ldots,x_{n-1},y+1)$$

Поэтому функция *f* п.р. Для функции *u* доказательство аналогичное.

Пример.

- **Пусть** $g(x) = x$
- **Тогда** $\sum\limits_{0}^{y} g(i) = 0 + 1 + \ldots + y = \dfrac{y(y+1)}{2}$
- **Поскольку функция** $g(x) = x$ **п.р., то по предыдущей теореме функция**

$$f(y) = \frac{y(y+1)}{2}$$

также является п.р.

Теорема.

- *Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ п.р.ф., то*

$$g(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = f(x_1,\ldots,x_n)$$

также п.р.ф.

(Операция введения фиктивных переменных).

- *Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ п.р.ф., то*

$$g(x_1,\ldots,x_n)= f(x_2,x_1,\ldots,x_n)$$

также п.р.ф.

(Операция перестановки переменных).

- ***Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ п.р.ф., то***

  $$g(x_1,\ldots,x_{n-1}) = f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_{n-1})$$

  также п.р.ф.

(Операция отождествления переменных)

Доказательство.

- **Докажем первое утверждение. Новая функция представима в виде суперпозиции п.р.ф.**

$$g(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) =$$

$$= f(U_1^{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}),\ldots,U_n^{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}))$$