Федеральное агентство связи

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»

(СибГУТИ)

Е. П. Мачикина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Учебно-методическое пособие

Новосибирск
2020

УДК [510.6+510.5](075.8)

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ

Рецензент: доцент каф. высшей математики СибГУТИ,
к.т.н., доцент *Храмова Т.В.*

Мачикина Е.П. Задачи по математической логике и теории алгоритмов : учебно-методическое пособие / Е.П. Мачикина ; Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики ; каф. прикладной математики и кибернетики. – Новосибирск, 2020. – 85 с.

В пособии приведен необходимый теоретический материал, примеры решения задач и упражнения для решения на практических занятиях и во время самостоятельной работы по всем разделам дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов второго курса факультета ИВТ, направление 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, профили «Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем», «Электронно-вычислительные машины, комплексы, системы и сети», «Распределённые автоматизированные системы».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Логика (от греч. logos – слово, понятие, рассуждение, разум) – это наука о законах и операциях правильного мышления. Логика складывалась как наука (особенно в Древней Греции) в результате исследования методов рассуждений, применяемых для убедительного обоснования утверждений. Установившиеся в Греции демократические формы жизни потребовали развития искусства убеждения – ораторского искусства, риторики. Появились учителя риторики – *софисты*, учившие не только доказывать истинные утверждения, но и искусно их опровергать. Понятия *истины*, *лжи* и *противоречия*, а также причины истинности или ложности заключений, полученных из истинных посылок, надолго стали предметом изучения в логике.

Стройную научную систему логики впервые разработал великий греческий учёный Аристотель (ученик Платона, воспитатель Александра Македонского). В своём логическом своде «Органон» («Категории», «Об истолковании», «Аналитики» 1-я и 2-я, «Топика») он создал раздел формальной логики *силлогистику*. Его труды оказали влияние на развитие логической науки во всём мире. В Европе до 17 века вся логика развивалась на основе аристотелевского учения.

За последние 150 лет в логике произошла научная революция и на смену традиционной логике пришла современная логика, называемая также математической или символической логикой. В основе математической логики положены идеи Г. Лейбница (1646-1716) о возможности представить доказательство как математическое вычисление. Д. Буль (1815-1864) истолковал умозаключение как результат решения логических равенств, после чего теория умозаключения приобрела вид своеобразной алгебры.

Основными разделами современной математической логики (её *классического* варианта) являются *логика высказываний*, идущая от Дж. Буля и не охватывающая силлогистику Аристотеля, и значительно более широкая *логика предикатов*, содержащая силлогистику как часть. Современный вид математическая логика приобрела в 1880-е годы в трудах немецкого логика, математика и философа Г. Фреге (1848-1925). Он дал первую аксиоматику логики высказываний и предикатов и сделал попытку свести математику к логике. Значительный вклад в развитие логики внесли Б. Рассел, А.Н. Уайтхед, Д. Гильберт, К. Гедель, А. Тарский, А. Черч.

В современной логике логические процессы изучаются путем их отображения в формализованных языках или логических исчислениях. Построение исчисления отличается особой тщательностью, с которой формулируются его синтаксические и семантические правила, отсутствием исключений, характерных для естественного языка. Исследованием формального строения логических исчислений, правил образования и преобразования занимается логический синтаксис. Отношения между исчислениями и содержательными областями, служащими их интерпретациями или моделями, исследуются логической семантикой. Современная логика слагается из большого числа логических систем, описывающих отдельные фрагменты, или типы содержательных рассуждений. В данном пособии будут рассмотрены классические исчисление высказываний и исчисление предикатов первого порядка.

1. Булевы функции. Равносильность формул

Булевой (или логической) функцией от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется функция $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, т.е. булева функция ставит в соответствие произвольному набору $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ нулей и единиц значение $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \in \{0,1\}$. Аргументы булевой функции являются *булевыми* переменными. Если булева функция принимает значение 1 (0) на всех наборах значений переменных, то такая функция называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*).

Булеву функцию можно задать *таблицей истинности*, в которой каждой строке взаимно однозначно сопоставляется набор значений переменных и соответствующий этому набору значение булевой функции. В качестве примера логических функций можно привести основные логические операции (связки) – отрицание (¬), конъюнкция (&), дизъюнкция (∨), импликация (→), эквиваленция (~).

Таблица истинности для названных основных операций имеет вид:

x	y	$\neg x$	$x \,\&\, y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \sim y$
0	0	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

Приведем таблицы истинности для еще нескольких известных логических функций: *штрих Шеффера* ($(x|y) \equiv \neg(x\&y)$), *стрелка Пирса* ($(x\downarrow y) \equiv \neg(x\vee y)$), *кольцевая сумма* (сложение по модулю 2) ($(x\oplus y)\equiv\neg(x\sim y)$).

x	y	$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
0	0	**1**	**1**	**0**
0	1	**1**	**0**	**1**
1	0	**1**	**0**	**1**
1	1	**0**	**0**	**0**

Из логических переменных с помощью логических связок можно составлять *формулы алгебры логики*. Определим рекурсивно понятие *формулы алгебры логики*:

1. любая логическая переменная является формулой (атомарной);
2. если α и β – формулы, то выражения $\neg(\alpha)$, $(\alpha \text{ x } \beta)$, где x – знак логической операции, являются формулами;
3. никаких других формул, кроме построенных по пп 1 и 2, нет.

Данное определение задает *синтаксис* формул, т.е. формальные законы их построения. Приведенные выше таблицы истинности являются интерпретациями логических операций и задают *семантику* формул (т.е. придают им смысл).

Формула G называется подформулой формулы F, если G является частью F. Например, для формулы $F = x_1 \sim (x_1 \,\&\, x_2 \to x_3)$ формула $G = x_1 \,\&\, x_2$ является подформулой.

Любая формула, кроме атомарной, по определению должна быть заключена в наружные круглые скобки. Однако обилие скобок затрудняет чтение формул, поэтому в алгебре логики приняты некоторые соглашения относительно расстановки скобок: 1) внешние скобки не пишутся; 2) логические операции наделяются приоритетом (здесь операции перечислены в порядке убывания приоритета ¬, &, ∨, →, ~, |, ↓, ⊕). В таком соглашении скобки в формулах ставятся только тогда, когда требуется изменить последовательность выполнения операций.

Пример 1.1. Удалить несущественные скобки в формуле: $((((a \,\&\, b) \,\&\, \neg c) \vee d) \to ((a \vee \neg b) \,\&\, a))$. Используя приоритет операций, получим

$$((((a \,\&\, b) \,\&\, \neg c) \vee d) \to ((a \vee \neg b) \,\&\, a)) \equiv a \,\&\, b \,\&\, \neg c \vee d \to (a \vee \neg b) \,\&\, a .$$

В итоге в формуле осталась только одна пара скобок, которая нужна для того, чтобы дизъюнкция выполнилась прежде конъюнкции. И наоборот, расставим скобки в формуле в соответствии с последовательностью выполнения операций:

$$x \oplus y \sim \neg z \to u \vee v \,\&\, w \downarrow x \mid y \equiv ((x \oplus y) \sim (\neg z \to (u \vee (((v \,\&\, w) \downarrow x) \mid y)))) .$$

На основании таблиц истинности логических операций можно строить таблицы истинности для произвольных формул.

Пример 1.2. Построим таблицу истинности для формулы $(x \oplus z) \to (x \,\&\, \neg y)$

x	y	z	$x \oplus z$	$x\&\neg y$	$(x \oplus z) \to (x \,\&\, \neg y)$
0	0	0	**0**	**0**	**1**
0	0	1	**1**	**0**	**0**
0	1	0	**0**	**0**	**1**
0	1	1	**1**	**0**	**0**
1	0	0	**1**	**1**	**1**
1	0	1	**0**	**1**	**1**
1	1	0	**1**	**0**	**0**
1	1	1	**0**	**0**	**1**

Пусть даны формулы $F(y_1, y_2, ... y_m)$, $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$, …, $f_m(x_1, x_2, ..., x_n)$ Тогда *подстановкой* формул f_i, $i = 1,2,...,m$ в формулу F называется следующая конструкция:

$$(F \mid y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2, ..., x_n) = F(f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) .$$

Нетрудно показать, что подстановка формул также является формулой, т.е. вместо некоторой подформулы в формулу может быть подставлена другая формула, и в результате получится правильно построенная формула.

Пример 1.3. Пусть даны формулы $F(y_1, y_2) = y_1 \sim y_2$, $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1$, $f_2(x_1, x_2, x_n) = x_1 \,\&\, x_2 \to x_3$. Тогда результатом подстановки формул f_1 и f_2 в формулу *F* будет формула $(F \mid y_i \leftarrow f_i)(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sim (x_1 \,\&\, x_2 \to x_3)$.

Одна и та же функция может иметь множество реализаций формулами с различными наборами логических операций. Формулы F и G называются *равносильными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию (т.е. на всех наборах переменных их значения истинности совпадают). Равносильность обозначается так $F \equiv G$.

Пример 1.4. Формулы $x \to y$ и $\neg x \vee y$ равносильны, поскольку их таблицы истинности совпадают. Формулы $x \sim y$ и $(x \to y) \,\&\, (y \to x)$ также равносильны.

Имеют место равносильности формул, доказательство которых проводится сравнением таблиц истинности формул.

1	$\neg\neg x \equiv x$	*Закон двойного отрицания*
2	$x \,\&\, y \equiv y \,\&\, x$	*Законы коммутативности*
3	$x \vee y \equiv y \vee x$	
4	$x \,\&\, (y \,\&\, z) \equiv (x \,\&\, y) \,\&\, z$	*Законы ассоциативности*
5	$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$	
6	$x \vee (y \,\&\, z) \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$	*Законы дистрибутивности*
7	$x \,\&\, (y \vee z) \equiv (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$	
8	$x \,\&\, x \equiv x$	*Законы идемпотентности*
9	$x \vee x \equiv x$	
10	$\neg(x \,\&\, y) \equiv \neg x \vee \neg y$	*Законы де Моргана*
11	$\neg(x \vee y) \equiv \neg x \,\&\, \neg y$	
12	$x \vee 1 \equiv 1$	*Законы нуля и единицы*
13	$x \,\&\, 0 \equiv 0$	
14	$x \vee 0 \equiv x$	
15	$x \,\&\, 1 \equiv x$	
16	$x \,\&\, \neg x \equiv 0$	*Закон противоречия*
17	$x \vee \neg x \equiv 1$	*Закон исключенного третьего*

Для получения равносильных формул используют приведенные равносильности и два правила.

Правило подстановки. Если в равносильных формулах $F(y_1, y_2, ..., y_n)$ и $G(y_1, y_2, ..., y_n)$ вместо всех вхождений некоторой переменной y_i подставить одну и ту же формулу, то получатся равносильные формулы.

Правило замены. Если в формуле F заменить некоторую подформулу f на равносильную g, то получится равносильная F формула.

Пример 1.5. Используя приведенные равносильности и правила, можно выполнять равносильные преобразования, выводить и доказывать новые законы. В частности, при выполнении преобразований часто используются *законы поглощения*:

$$x \,\&\, (x \vee y) \equiv x \qquad\qquad x \vee (x \,\&\, y) \equiv x$$

$$\neg x \,\&\, (x \vee y) \equiv \neg x \,\&\, y \qquad\qquad x \vee \neg x \,\&\, y) \equiv x \vee y$$

Покажем доказательство закона поглощения $\neg x \,\&\, (x \vee y) \equiv \neg x \,\&\, y$. Будем проводить равносильные замены подформул, чтобы получить из левой части тождества правую. Сначала применяется закон дистрибутивности (7), затем закон противоречия (16) и закон нуля и единицы (14)

$$\neg x \,\&\, (x \vee y) \equiv \neg x \,\&\, x \vee \neg x \,\&\, y \equiv 0 \vee \neg x \,\&\, y \equiv \neg x \,\&\, y$$

Пример 1.6. Применяя равносильные преобразования, показать равносильность двух формул $x \to y$ и $\neg y \to \neg x$. Будем проводить равносильные преобразования, чтобы получить из одной формулы другую.

$$x \to y \equiv \neg x \vee y \equiv \neg x \vee \neg(\neg y) \equiv \neg y \to \neg x$$

Формулы алгебры логики, при образовании которых используются только операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, называются *булевыми формулами*. Поскольку любая логическая функция выражается через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, то для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей булева формула.

Пример 1.7. Применяя равносильные преобразования, получить равносильную булеву формулу для функции $x \sim (y \to z)$

$$x \sim (y \to z) \equiv (x \to (y \to z)) \,\&\, ((y \to z) \to x) \equiv (\neg x \vee \neg y \vee z) \,\&\, (\neg(\neg y \vee z) \vee x) \equiv$$
$$\equiv (\neg x \vee \neg y \vee z) \,\&\, (y \,\&\, \neg z \vee x)$$

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – булева функция от n переменных. Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2, ..., \neg x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Из определения видно, что двойственность инволютивна: $f^{**}=f$. Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f, то такая функция f называется *самодвойственной*.

Пример 1.8. Найдем двойственные функции для функций $\neg x$, $x \,\&\, y$, $x \vee y$, $x \to y$. По определению $(\neg x)^* = \neg(\neg\neg x) \equiv \neg x$, что означает самодвойственность функции отрицание. Пользуясь определением двойственности, несложно найти, что двойственной функцией к конъюнкции $(x \,\&\, y)^* = \neg(\neg x \,\&\, \neg y) \equiv x \vee y$ является дизъюнкция, а к дизъюнкции – конъюнкция. Двойственной функцией к импликации является функция $(x \to y)^* = \neg(\neg x \to \neg y) \equiv \neg(x \vee \neg y) \equiv \neg(y \to x)$.

Для нахождения двойственных функций, используются следующие теоремы.

Теорема (общий принцип двойственности).
Если формула $G(x_1,...,x_n)$ *получена подстановкой формул* f_i *из* $F(y_1,...,y_m)$ $G(x_1,...,x_n)=(F\,|\,y_i \leftarrow f_i)(x_1,x_2,...,x_n)$ *то* $G^*(x_1,...,x_n)=(F^*|\,y_i \leftarrow f_i{}^*)(x_1,x_2,...,x_n)$.

Теорема (принцип двойственности для булевых формул).
Двойственная формула к булевой формуле может быть получена заменой констант 0 *на* 1, 1 *на* 0, *дизъюнкции на конъюнкцию, конъюнкции на дизъюнкцию и сохранением структуры формулы (т.е. соответствующего исходному порядка действий).*

Пример 1.9. Пользуясь общим принципом двойственности, найдем двойственную функцию для $x \sim y$. Поскольку эквиваленция двух переменных может быть представлена как конъюнкция двух импликаций, то $x \sim y = (u \,\&\, v \,|\, u \leftarrow (x \to y), v \leftarrow (y \to x))$. Ранее были найдены двойственные функции для конъюнкции и импликации, что позволяет найти двойственную функцию для эквиваленции

$$(x \sim y)^* = ((u \,\&\, v)^* \,|\, u \leftarrow (x \to y)^*, v \leftarrow (y \to x)^*) = \neg(y \to x) \vee \neg(x \to y) \equiv$$
$$\equiv \neg((y \to x) \,\&\, (x \to y)) \equiv \neg(x \sim y)$$

Общий принцип двойственности может быть сформулирован и другим образом.
Теорема. *Если формулы* F *и* G *равносильны* $F \equiv G$, *то двойственные формулы* F^* *и* G^* *также равносильны* $F^* \equiv G^*$

Упражнения

1.1. Упростить запись формулы (убрать лишние скобки):

а. $((((x \,\&\, y) \,\&\, (\neg z)) \vee t) \to ((x \vee (\neg y)) \,\&\, x))$

б. $((((x \vee y) \,\&\, (\neg(z \vee x))) \to (x \,\&\, (\neg y))) \to ((x \,\&\, (\neg y)) \sim t))$

в. $((\neg((x \vee y) \,\&\, z) \vee ((x \downarrow t) \,|\, y)) \to (x \,\&\, ((\neg z) \sim (x \,\&\, \neg y))) \to t))$

1.2. Расставить скобки в формуле в соответствии с последовательностью выполнения операций:

а. $x \oplus y \sim \neg z \to u \vee v \,\&\, w \downarrow x \,|\, y \to x \,\&\, z$

б. $x \oplus y \,\&\, \neg z \vee u \vee v \,|\, w \to x \,|\, y \,\&\, z \sim x \,\&\, z \vee \neg y \,\&\, x$

в. $x \,\&\, y \,\&\, \neg z \vee u \downarrow v \,\&\, w \oplus x \vee y \,\&\, z \sim \neg(x \,\&\, z) \vee x \to y$

1.3. Выписать все подформулы формул из задачи 1.2.

1.4. Выяснить, какие из следующих формул равносильны:

а. $x \vee y \,\&\, \neg z \,\&\, u \downarrow v \,\&\, w \oplus x \to y \vee z \sim x \,\&\, z \vee x$

б. $x \vee (y \,\&\, \neg z \,\&\, u) \downarrow v \,\&\, w \oplus x \to (y \vee z) \sim x \,\&\, z \vee x$

в. $x \vee (y \,\&\, \neg z) \,\&\, u \downarrow v \,\&\, w \oplus (x \to (y \vee z)) \sim (x \,\&\, z) \vee x$

г. $(x \vee y \,\&\, \neg z \,\&\, u \downarrow (v \,\&\, w) \oplus x) \to y \vee z \sim (x \,\&\, z) \vee x$

д. $((x \vee y \& \neg z \& u \downarrow v \& w \oplus x) \to y \vee z) \sim (x \& z \vee x)$

е. $(x \vee y \& \neg z \& u \downarrow v \& w \oplus x) \to (y \vee z) \sim (x \& z) \vee x$

1.5. Составить таблицы истинности для формул:

а. $x \to (y \vee x)$

б. $(x \to y) \to z$

в. $x \sim (y \sim z)$

г. $(x \to (y \vee z)) \to (\neg x \& (\neg y \& \neg z))$

д. $(x \sim \neg(y \vee z)) \sim (x \sim (y \vee z))$

е. $(x \sim y) \to (((y \sim z) \to (z \to x)) \to (x \sim z))$

1.6. Определить число различных булевых функций.

1.7. Применяя равносильные преобразования, доказать тождества:

а. $x \vee y \equiv \neg(\neg x \& \neg y)$

б. $x \to y \equiv \neg y \to \neg x$

в. $x \& (\neg x \vee y) \equiv x \& y$

г. $x \vee \neg x \& y \equiv x \vee y)$

д. $(x \vee y) \& (x \vee \neg y) \equiv x$

1.8. Применяя равносильные преобразования, доказать тождественную истинность формул:

а. $x \to (y \to x \& y)$

б. $(\neg x \to \neg y) \to (y \to x)$

в. $(x \to z) \& (y \to z) \to (x \vee y \to z)$

1.9. Записать f в виде булевой формулы и определить ее истинность:

а. $f(x, y, z) = (z \vee y \to y) \& (x \& y) \to y \oplus x \downarrow y \& x$

б. $f(x, y) = (x \vee \neg y \to y) \& (\neg x \vee y) \to (x \mid y \& x \oplus y)$

в. $f(x, y) = (\neg(x \& y) \sim \neg x \vee y) \to (x \oplus y)$

г. $f(x, y) = \neg((x \to y) \sim (\neg y \to \neg x)) \oplus x \downarrow \neg y \to x \vee y$

1.10. Найти двойственные функции:

а. $f(x, y, z) = \neg(x \vee y) \& (x \vee \neg(y \& z))$

б. $f(x, y) = x \& (\neg y \vee z)$

в. $f(x, y) = (\neg x \vee y) \& (x \vee \neg y)$

г. $f(x, y) = \neg x \& y \vee x \& \neg y$

д. $f(x, y, z) = x \& y \vee x \& z$

е. $f(x, y, z) = x \& (\neg y \vee z)$

ж. $f(x, y) = (x \to y) \& (x \vee \neg y)$

1.11. Проверить самодвойственность формул:

а. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_1 \neg x_2 x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_4 \vee \neg x_2 \neg x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee \neg x_1 x_2 \neg x_3 \neg x_4$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_2 \& (x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \vee x_1 \& \neg x_3 \& \neg x_4$

б. $f(x, y, z) = \neg(x \& y \& z) \vee x \& y \& \neg z \vee x \& \neg y \& z \vee \neg x \& y \& z$

2. Нормальные формы

Формула логической функции находится в *нормальной форме*, если в ней отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, а знаки отрицания находятся только при переменных.
Элементарной дизъюнкцией (*конъюнкцией*) называется дизъюнкция (конъюнкция) переменных или их отрицаний. Формула логической функции находится в *нормальной форме*, если она представлена как конъюнкция элементарных дизъюнкций (*конъюнктивная нормальная форма КНФ*) или как дизъюнкция элементарных конъюнкций (*дизъюнктивная нормальная форма ДНФ*). В таких формулах отсутствуют знаки эквивалентности, импликации, двойного отрицания, а знаки отрицания находятся только при переменных. Как ДНФ, так и КНФ функции не единственна.

Пример 2.1. Элементарными дизъюнкциями являются формулы $x \vee \neg y, z$, а формулы $x, \neg y \,\&\, z, x$ – элементарными конъюнкциями.

Пример 2.2. Формула $xyz \vee \neg xy$ является ДНФ логической функции, а формула $(x \vee \neg y)z$ – КНФ той же логической функции. Для уменьшения длины формул знаки конъюнкции будут опускаться при написании нормальных форм.

Теорема. *Для любой формулы F существует равносильная формула G (F≡G) в дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме.*
Доказательство. Для приведения логической формулы к нормальному виду необходимо выполнить следующие действия.

- Формулу F равносильными преобразованиями можно превратить в булеву формулу (без импликаций и эквиваленций).
- Используя закон де Моргана, внешние отрицания перемещаются к переменным. Двойные отрицания переменных снимаются.
- Используя закон дистрибутивности, формула окончательно приводится к виду ДНФ.

Пример 2.3. Найти нормальные формы для функции $f(x, y, z) = (x \sim y) \to z$
Равносильными преобразованиями приводим функцию к булеву виду, заменяя эквиваленцию и импликацию равносильными формулами

$$(x \sim y) \to z \equiv (x \to y) \& (y \to x) \to z \equiv (\neg x \vee y) \,\&\, (\neg y \vee x) \to z \equiv$$
$$\equiv \neg((\neg x \vee y) \,\&\, (\neg y \vee x)) \vee z \equiv (x \,\&\, \neg y) \vee (y \,\&\, \neg x) \vee z$$

Получена дизъюнкция элементарных конъюнкций, т.е. ДНФ. Продолжим далее преобразования по закону дистрибутивности.

$$(x \sim y) \to z \equiv (x \,\&\, \neg y) \vee (y \,\&\, \neg x) \vee z \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee \neg x) \,\&\, (\neg y \vee y) \,\&\, (\neg y \vee \neg x) \vee z \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee z) \,\&\, (\neg y \vee \neg x \vee z)$$

Получена конъюнкция элементарных дизъюнкций, т.е. КНФ.

ДНФ (КНФ) называется *совершенной*, если каждая переменная формулы входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз. Для получения совершенных нормальных форм можно продолжить преобразовывать нормальные формы, добиваясь, чтобы в элементарных конъюнкциях (дизъюнкциях) были все переменные формулы.

При получении СКНФ из КНФ если некоторая элементарная дизъюнкция КНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо дизъюнктивно добавить в нее произведение этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон. При получении СДНФ из ДНФ нужно действовать двойственно, т.е. если некоторое произведение ДНФ не содержит какой-либо переменной, то необходимо домножить это произведение на дизъюнкцию этой переменной и ее отрицания и применить дистрибутивный закон.

Пример 2.4. Приведем ДНФ из примера 2.3 к совершенному виду равносильными преобразованиями.

$(x \& \neg y) \vee (y \& \neg x) \vee z \equiv$

$\equiv (x \& \neg y \& (z \vee \neg z)) \vee (y \& \neg x \& (z \vee \neg z)) \vee z \& (x \vee \neg x) \& (y \vee \neg y) \equiv$

$\equiv x \& \neg y \& z \vee x \& \neg y \& \neg z \vee y \& \neg x \& z \vee y \& \neg x \& \neg z \vee z \& x \& y \vee z \& \neg x \& \neg y$

Получена дизъюнкция элементарных конъюнкций, где каждая переменная формула встречается ровно один раз, получена СДНФ.

Существует способ получения совершенных нормальных форм без использования равносильных преобразования, основанный на теореме о разложении логической функции.

Введем обозначения: $x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \alpha = 1 \\ \neg x, & \alpha = 0 \end{cases}$

Теорема (о разложении булевой функции по k переменным).

$$f(x_1,\dots,x_n) = \underset{\alpha_1,\dots\alpha_k}{V} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,x_{k+1},\dots,x_n)$$

Доказательство. Выберем какой-либо набор значений для переменных $x_1 = \sigma_1,\dots,x_n = \sigma_n$. Заметим, что $\sigma_i^{\alpha_i} = \begin{cases} 1, & \sigma_i = \alpha_i \\ 0, & \sigma_i \neq \alpha_i \end{cases}$ Действительно, 1^1=1, 0^0=1, 1^0=¬1=0, 0^1=0. Подставим в правую часть формулировки теоремы вместо переменных выбранный набор значений. Тогда $f(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = \underset{\alpha_1,\dots,\alpha_k}{V} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$. Поскольку коэффициент перед функцией равен 1 только если $\sigma_i = \alpha_i$, то в разложении останется только один член: $\sigma_1^{\alpha_1} \dots \sigma_k^{\alpha_k} \cdot f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n) = f(\sigma_1,\dots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$. Получена левая часть формулы теоремы. Поскольку набор был выбран произвольно, то утверждение верно для произвольного набора значений переменных.

Пример 2.5. Положим $n = 3, k = 2$. Тогда по теореме о разложении

$$f(x_1,x_2,x_3) = \underset{\alpha_1,\alpha_2}{V} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdot f(\alpha_1,\alpha_2,x_3) = \neg x_1 \neg x_2 \cdot f(0,0,x_3) \vee$$
$$\neg x_1 x_2 \cdot f(0,1,x_3) \vee x_1 \neg x_2 \cdot f(1,0,x_3) \vee x_1 x_2 \cdot f(1,1,x_3)$$

Следствие 1 (разложение Шеннона).
$f(x_1,x_2,...,x_n) = \neg x_1 \,\&\, f(0,x_2,...,x_n) \vee x_1 \,\&\, f(1,x_2,...,x_n)$

Доказательство. Достаточно положить $k=1$ в теореме о разложении булевой функции.

Следствие 2 (представление в виде СДНФ). $f(x_1,...,x_n) = \underset{f(\alpha)=1}{V} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$

Доказательство. Достаточно положить $k=n$ в теореме о разложении булевой функции. Полученная формула представляет собой *СДНФ*.

Пример 2.6. Для логической функции от трех переменных, которая задана таблицей истинности, построить СДНФ и СКНФ.

x	y	z	f
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

Построение СДНФ состоит в следующих действиях:

- Найти строки в таблице истинности, где $f = 1$.
- Каждому найденному набору $\sigma_1, ..., \sigma_n$. поставить в соответствие элементарную конъюнкцию $\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot ... \cdot \tilde{x}_n$, где $\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, \sigma_i = 1 \\ \neg x_i, \sigma_i = 0 \end{cases}$
- Составить дизъюнкцию из полученных элементарных конъюнкций.

Данная функция равна 1 на наборах (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1) Построим по этим наборам элементарные конъюнкции (если переменная в наборе равна 0, то переменная входит с отрицанием; если 0, то без отрицания). СДНФ для заданной функции имеет такой вид:

$f(x,y,z) = \neg x \neg y \neg z \vee \neg x \neg yz \vee \neg xyz \vee x \neg yz \vee xyz$

Построение СКНФ происходит двойственно.

- Найти строки в таблице истинности, где $f = 0$.
- Каждому найденному набору $\sigma_1, ..., \sigma_n$. поставить в соответствие элементарную дизъюнкцию $\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee ... \vee \tilde{x}_n$, где $\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i, \sigma_i = 0 \\ \neg x_i, \sigma_i = 1 \end{cases}$
- Составить конъюнкцию из полученных элементарных дизъюнкций.

СКНФ для заданной функции имеет такой вид:
$f(x,y,z) = (x \vee y \vee \neg z)(x \vee \neg y \vee z)(\neg x \vee \neg y \vee z)$

Теорема. *Для всякой не тождественно ложной формулы алгебры логики существует равносильная ей СДНФ и притом единственная с точностью до перестановок элементарных конъюнкций в дизъюнкции и переменных в элементарных конъюнкциях.*

Контактная цепь (схема) – устройство из проводов и контактов, связывающих два полюса. Любой контакт может быть либо замкнут, либо разомкнут. Контакты будем обозначать $x_1, x_2, x_3, \ldots$, при этом

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если контакт разомкнут} \\ 1, & \text{если контакт замкнут.} \end{cases}$$

Контактной схеме будет соответствовать булева функция, которая принимает значение 1, если контур между двумя полюсами замкнут, и 0 – в противном случае. Основные операции булевой алгебры можно реализовать с помощью последовательного и параллельного соединения контактов (см. рисунок 1).

Схема **Булева операция**

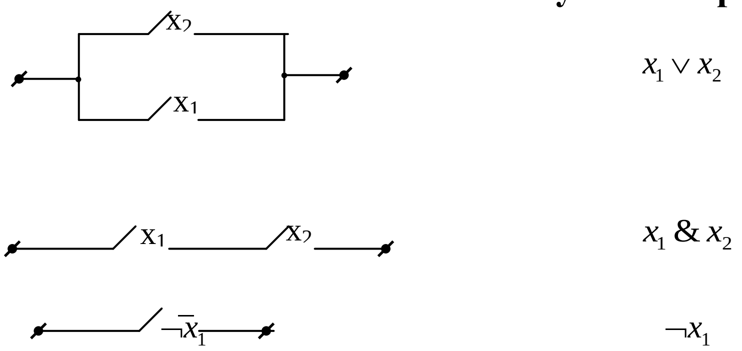


Рис. 1. Соответствие контактных схем и логических связок

Соответствие между схемой и булевой операцией легко проверить, сравнив работу схемы с таблицей истинности булевой функции. Для сложных контактных цепей можно построить более простую реализацию, упростив исходную булеву функцию равносильными преобразованиями.

Пример 2.7. Контактная схема задана на рисунке 2. Упростить ее до пяти контактов.

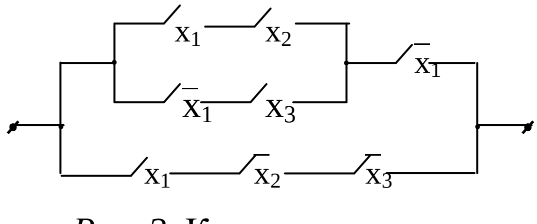


Рис. 2. Контактная схема

Составим булеву функцию для исходной схемы и упростим ее, используя равносильные преобразования. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1x_2\vee\overline{x}_1x_3)\overline{x}_1\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3=\overline{x}_1x_3\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.
По упрощенной формуле составим схему

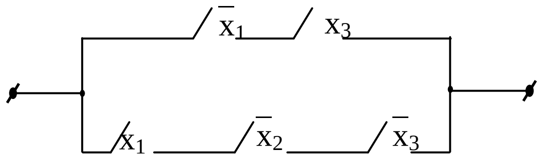


Рис. 3. Упрощенная контактная схема

Упражнения

2.1. Привести равносильными преобразованиями к ДНФ и КНФ следующие формулы:

а. $x\to(y\to z)$
б. $\neg(x\,\&\,y)\vee(x\to y)$
в. $(x\sim y)\sim z$
г. $(x\vee y)\,\&\,(y\vee z)\to(x\vee z)$
д. $x\to y\&z\&t$
е. $x\vee y\,\&\,z$
ж. $x\sim y\,\&\,z$
з. $(z\to y\,\&\,x)\vee(y\to z)$
и. $(z\sim x)\to(x\,\&\,y\vee z\,\&\,x\vee y\,\&\,z)$
к. $(x\sim y)\vee x\,\&\,z$
л. $(x\,\&\,y)\to(x\sim y)$

2.2. Определить, является ли формула тождественно ложной (истинной):

а. $x\to y\to(\neg y\to\neg x)$
б. $x\vee y\to x\vee z$
в. $(x\to y)\,\&\,x\to x\vee y\vee z$
г. $x\,\&\,y\to x\vee y$
д. $x\vee y\to x\,\&\,y$

2.3. Найти СКНФ и СДНФ для конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции.

2.4. Привести логические формулы к СДНФ и СКНФ равносильными преобразованиями:

а. $x\to(y\to x)$
б. $\neg x\vee\neg y$
в. $(x\vee y)\,\&\,(y\vee z)\,\&\,(x\sim z)$
г. $(\neg x\to y)\to x$
д. $x\vee y\vee z\to(x\vee y)\,\&\,z$
е. $x\,\&\,y\,\&\,z$
ж. $x\to y\,\&\,z$

2.5. Найти СДНФ и СКНФ для следующих функций с помощью таблицы истинности:

а. $f(x,y,z)=x\vee\neg x\,\&\,y\vee y\,\&\,z$
б. $f(x,y,z)=x\vee\neg y\,\&\,z\vee\neg x\,\&\,y\,\&\,z\vee x\,\&\,\neg y$
в. $f(x,y,z)=\neg(x\,\&\,y\vee y\,\&\,z)\,\&\,\neg(x\,\&\,y)$
г. $f(x,y,z)=(x\vee z)\to\neg(y\,\&\,z)$
д. $f(x,y,z)=(x\to\neg(y\vee z))\vee x$
е. $f(x,y,z)=\neg(x\,\&\,\neg y)\sim(x\vee\neg z)$

ж. $f(x,y,z) = \neg(x \to y) \,\&\, (z \vee x)$

з. $f(x,y,z) = (\neg x \vee \neg y) \to (z \to x)$

2.6. Записать в виде формулы булеву функцию от 3 переменных, которая:

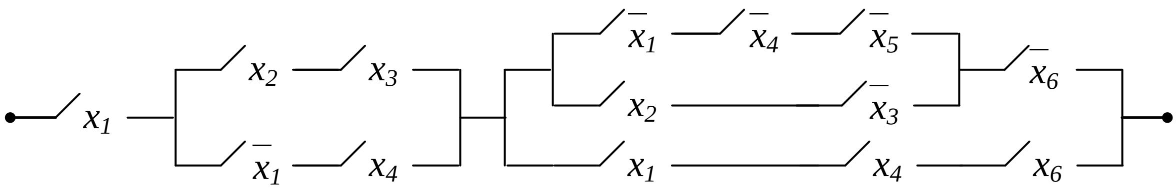
а. истинна только на наборах значений переменных (1,0,1) и (0,0,0);

б. истинна только на наборах значений переменных с четным числом единиц;

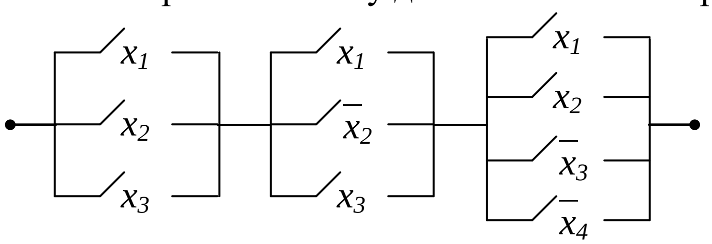
в. ложна только на наборах значений переменных (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0).

2.7. Составить контактные схемы для функций, заданных в задаче 2.5.

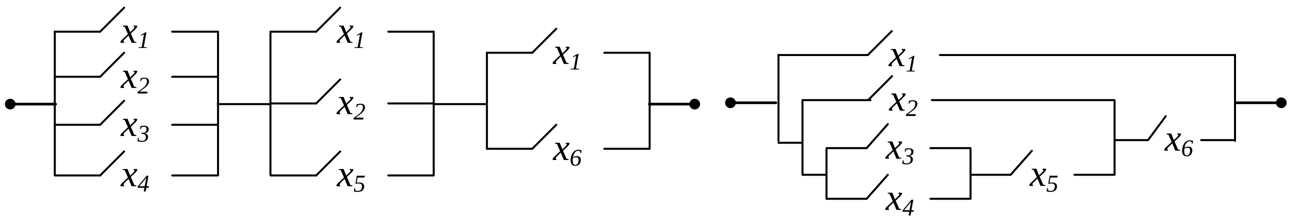
2.8. Упростить схему до 5 контактов и нарисовать ее:



2.9. Упростить схему до 4 контактов и нарисовать ее:



2.10. Доказать эквивалентность схем:



2.11. В подъезде трехэтажного дома на каждом этаже имеется кнопочный выключатель, которым можно включать/выключать свет в подъезде. Нажатие любого из выключателей должно менять состояние света на противоположное – свет гаснет, если до этого горел, и загорается, если был выключен. Требуется построить контактную схему соединения этих выключателей.

2.12. По установленному сигналу каждый игрок замыкает или размыкает выключатель, находящийся под его управлением. Если оба игрока делают одно и то же, то выигрывает первый, если разное – то второй. Построить схему так, чтобы в случае выигрыша первого игрока загоралась лампочка.

2.13. Комиссия из пяти человек принимает решение большинством голосов, и решение не принимается, если председатель голосует «против», даже при большинстве голосов «за». Построить схему, в которой голосование «за» производится нажатием кнопки и в случае принятия решения загорается сигнальная лампочка.

3. Полнота системы булевых функций

Система функций $F=\{f_1, f_2,..., f_k\}$ называется *полной*, если любая логическая функция может быть выражена через функции системы F с помощью подстановки (т.е. составления сложных функций).

Пример 3.1. Система функций $\{\neg,\&,\vee\}$ – полная, поскольку любая логическая функция может быть представлена в нормальной форме. Из этой системы можно удалить конъюнкцию, выразив через отрицание и дизъюнкцию $x\,\&\,y=\neg x\vee\neg y$.

Пример 3.2. Другим примером полной системы является система $\{|\}$, состоящая из единственной функции штрих Шеффера. Система $\{|\}$ сводится к полной системе $\{\neg,\&\}$, т.к. $\neg x=(x\,|\,x), x\,\&\,y=\neg(x\,|\,y)=((x\,|\,y)\,|\,(x\,|\,y))$.

Логическая функция f *сохраняет константу* 0, если $f(0,0,...,0)=0$. Функцию f называют *функцией, сохраняющей константу* 1, если $f(1,1,...,1)=1$. Множество всех функций, сохраняющих константу 0, обозначим T_0, а множество всех функций, сохраняющих константу 1, – T_1.

Пример 3.3. Логическая функция, заданная столбцом значений $f=(00111101)$, сохраняет константу 0 и константу 1. Отрицание не сохраняет ни 0, ни 1.

Двойственной к булевой функции $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется функция $f^*(x_1,x_2,...,x_n)=\neg f(\neg x_1,\neg x_2,...,\neg x_n)$. Если двойственная функция f^* совпадает с исходной функцией f, то такая функция f называется *самодвойственной*.
Из определения следует, что функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах значений переменных функция принимает противоположные значения. Множество всех самодвойственных функций обозначим S.

Логическая функция f *монотонная*, если для любых пар α, β наборов значений переменных таких, что $\alpha\le\beta$, $f(\alpha)\le f(\beta)$. Множество всех монотонных функций принято обозначать через M.

Если функция f не является монотонной, то найдутся два таких набора α, β и индекс i, что $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,...,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},...\beta_n)$, $f(\alpha)=1$, $f(\beta)=1$, т.е. эти два набора различаются значениями только в одной компоненте, а значение функции равно 0 на большем наборе и равно 1 на меньшем.

Пример 3.4. Функция $f=(0011)$ является монотонной. Отрицание – немонотонная функция.

Булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ представлена в виде *полинома Жегалкина* от n переменных, если $f(x_1,...,x_n)=\bigoplus\limits_{\{i_1,i_2,...,i_m\}\subseteq I} a_{i_1 i_2 ... i_m} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_m}$, где коэффициенты полинома $a_{i_1 i_2 \ldots i_m} \in \{0,1\}$ индексированы всеми возможными подмножествами множества $I = \{1,2,\ldots,n\}$. Между коэффициентами и переменными стоит конъюнкция, которая опущена для сокращения длины формулы.

Утверждение. *Полином Жегалкина для любой булевой функции определен однозначно.*

Пример 3.5. Пусть булева функция задана столбцом значений $f = (1,1,0,0,1,0,1,1)$. Найдем полином Жегалкина, соответствующий заданной функции.
В общем виде полином от трех переменных имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$.
Определим вид полинома методом неопределенных коэффициентов. Количество коэффициентов совпадает с количеством значений логической функции, коэффициенты определяются однозначно из системы уравнений.

$f(0,0,0) = a_0 = 1$

$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = a_3 \oplus 1 = 1,\ a_3 = 0$

$f(0,1,0) = a_2 \oplus 1 = 0,\ a_2 = 1$

$f(1,0,0) = a_1 \oplus 1 = 1,\ a_1 = 0$

$f(1,1,0) = a_{12}x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0 = a_{12} \oplus 1 \oplus 1 = 1,\ a_{12} = 1$

$f(1,0,1) = a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_3x_3 \oplus a_0 = a_{13} \oplus 1 = 0,\ a_{13} = 1$

$f(0,1,1) = a_{23}x_2x_3 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0 = a_{23} \oplus 1 \oplus 1 = 0,\ a_{23} = 0$

$f(1,1,1) = a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1,\ a_{123} = 1$

Таким образом, полином Жегалкина для функции f имеет вид $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus 1$.

Функция f *линейная*, если f представима в виде полинома Жегалкина первой степени, т.е. $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_0$. Множество всех линейных функций обозначают через L. Логическая функция из предыдущего примера – нелинейная.
Множества функций T_0, T_1, S, M, L называются *классами Поста*.

Пример 3.6. Штрих Шеффера $x \mid y = \neg(x \,\&\, y)$ не принадлежит ни одному из классов Поста. Действительно, таблица истинности этой функции имеет такой вид:

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Из таблицы истинности можно сделать вывод, что штрих Шеффера не сохраняет 0, не сохраняет 1, не является монотонной (монотонность нарушается, например, на наборах (10) и (11)), не является самодвойственной (см. наборы (01) и (10)). Многочлен Жегалкина для штриха Шеффера имеет такой вид $x \mid y = \neg(x \& y) = (x \& y) \oplus 1$, т.е. функция нелинейна.

Множество булевых функций F называют *замкнутым*, если любая подстановка (сложная функция) функций из F также принадлежит F.

Теорема. *Каждый класс Поста замкнут.*

Доказательство. Нужно показать, что для каждого класса Поста P любая функция из P представляемая подстановкой функций из P принадлежит этому же классу P. Пусть $f, g_1, g_2, ..., g_n$ из класса T_0, т.е. $f(0,..,0) = 0$, $g_i(0,...,0) = 0$, $i = 1,2,...,n$. Тогда $f(g_1(0,...,0), g_2(0,...,0),..., g_n(0,...,0)) = 0$. Следовательно, подстановка функций из T_0 содержится в классе T_0**.** Для классов T_1**,** S**,** M**,** L доказательство аналогичное.

Критерий Поста. *Множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов Поста.*

Доказательство состоит в сведении системы функции к заведомо полной системе $\{\neg, \&\}$.

Пример 3.7. Проверить на полноту множество булевых функций $F = \{\sim, \vee, 0\}$.

Для исследования используют критериальную таблицу. Строки таблицы соответствуют функциям исследуемого множества, а столбцы – классам Поста.

Таблицы истинности функций из системы приведены ниже, по таблицам истинности можно определить принадлежность к классам T_0, T_1, S, M:

x	y	$x \sim y$	$x \vee y$	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	0

Линейность определяется по виду многочленов Жегалкина для функций. Найдем эти многочлены, используется равносильность $\neg x \equiv x \oplus 1$

$$x \vee y \equiv \neg(\neg x \& \neg y) \equiv (x \oplus 1) \& (y \oplus 1) \oplus 1 \equiv x \& y \oplus x \oplus y \oplus 1$$

$$x \sim y \equiv (\neg x \vee y) \& (x \vee \neg y) = ((x \oplus 1) \& y \oplus (x \oplus 1) \oplus y \oplus 1) \& (x \& (y \oplus 1) \oplus x \oplus (y \oplus 1) \oplus 1) \equiv$$

$$\equiv x \oplus y \oplus 1$$

Если функция принадлежит классу Поста, то в таблицу ставится +, иначе – .

	T_0	T_1	S	M	L
~	-	+	-	-	+
V	+	+	-	+	-
0	+	-	-	+	+

По критерию Поста полная система функций не содержится ни в одном из классов Поста, т.е. для полной системы в каждом столбце критериальной таблицы должен быть хотя бы один «–» . Таким образом, система функций $F = \{\sim, \vee, 0\}$ полная.

Выразим теперь константы, отрицание, конъюнкцию через функции системы $F = \{\sim, \vee, 0\}$. Константу 1 можно получить из эквиваленции, которая не сохраняет 0, но сохраняет 1, отождествлением переменных, т.е. $1 = x \sim x$. Отрицание можно получить из немонотонной функции (~) и констант, $\neg x = 0 \sim x$. Конъюнкция может быть получена из нелинейной функции (дизъюнкция), отрицания и констант. Поскольку $x \,\&\, y = \neg(\neg x \vee \neg y) = (0 \sim (\neg x \vee \neg y)) = (0 \sim ((0 \sim x) \vee (0 \sim y)))$.

Полная система логических функций называется *базисом*, если она перестает быть полной при исключении из неё любой функции.

Пример 3.8. Система функций {&,v, ¬} полная, но не является базисом, поскольку дизъюнкцию можно выразить через отрицание и конъюнкцию. Система {&, ¬} является базисом.

Теорема о максимальном числе функций в базисе. *Максимально возможное число булевых функций в базисе – четыре.*

Доказательство. Очевидно, что в базисе не более 5 функций – по одной функции для каждого из пяти основных замкнутых классов.

Если какая-то функция в базисе не принадлежит сразу нескольким классам, то в базисе меньше пяти функций. В базисе обязательно имеется функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, не сохраняющая константу 0, т.е. такая, что $F(0,0,...,0) = 1$. Существует две возможности: либо $F(1,1,...,1) = 0$, т.е. $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ не сохраняет также константу 1; либо $F(1,1,...,1) = 1$ и тогда эта функция не может быть самодвойственной. В любом случае этой функции достаточно на 2 класса.

Упражнения

3.1. Определить принадлежность классам Поста для логических функций $x_1 \to x_2$, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \downarrow x_2$, $x_1 | x_2$, $x_1 \sim x_2$, $x_1 \oplus x_2$

3.2. Доказать замкнутость классов Поста T_0, T_1, M, L, S

3.3. Привести пример логической функции, которая:

а. принадлежит всем классам Поста;

б. не принадлежит никакому классу Поста;

в. является линейной и самодвойственной;

г. является монотонной и самодвойственной;

д. является монотонной и линейной.

3.4. Определить количество логических функций от n переменных в множествах:

а. T_0, T_1, M, L, S

б. $T_0 \cap T_1$

в. $T_0 \cap T_1 \cap S$

г. $L \cap S$

д. $M \cap L$

е. $M \cap L \cap S$

ж. $M \setminus (T_0 \cap T_1)$

3.5. Сводя к заведомо полной системе, показать, что система логических функций полная:

а. $\{x_1 \downarrow x_2\}$

б. $\{x_1 \mid x_2\}$

в. $\{x_1 \to x_2, \neg(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)\}$

3.6. Записать в виде многочлена Жегалкина логическую функцию от 3 переменных, которая:

а. истинна только на наборах значений переменных (1,0,1) и (0,0,0);

б. истинна только на наборах значений переменных с четным числом единиц;

в. ложна только на наборах значений переменных (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0).

3.7. Используя критерий Поста, проверить полноту систем логических функций. Выразить через суперпозицию функций этих систем константы, отрицание и конъюнкцию:

а. $\{x_1 \to x_2, x_1 \,\&\, x_2\}$

б. $\{x_1 \to x_2, x_1 \vee x_2\}$

в. $\{x_1 \to x_2, 0, 1\}$

г. $\{(01101001), (10001101), (00011100)\}$

д. $\{(1011), (1111110011000000)\}$

3.8. Являются ли базисами следующие полные системы:

а. $\{x_1 \to x_2, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}$

б. $\{1, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \oplus x_2\}$

в. $\{0, 1, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$

4. Высказывания. Формулы алгебры высказываний

Под *высказыванием* принято понимать языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Не всякое предложение может быть истинным или ложным, а значит, быть высказыванием. Так, вопросительное или повелительное предложение не является высказыванием.

Пример 4.1. Примерами высказываний могут служить следующие предложения:

За окном идет снег.
Завтра будет Новый год.
Столица России – Москва.

Пример 4.5. Повествовательное предложение *"Я лгу"* не может быть высказыванием (парадокс лжеца). Действительно, если бы это предложение было верным, то по смыслу оно было бы ложным. А если бы предложение было бы ложным, то по смыслу оно должно быть истинным. Но ни то, ни другое для высказывания невозможно, так как оно не может быть одновременно и истинным, и ложным. Этот пример показывает, насколько внимательно следует относиться к принимаемым определениям (в данном случае – к определению высказывания).

В *логике высказываний* интересуются не содержанием, а истинностью или ложностью высказываний. Истинностное значение – истина или ложь – будем обозначать И и Л соответственно. Для соединения высказываний в более сложные высказывания используют следующие *логические операции* **(***связки***)**.

Отрицанием высказывания A называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Обозначается $\neg A$. В естественном языке отрицание $\neg A$ соответствует следующим конструкциям:

- не A (или то, что получится в результате вставки частицы "не" перед глаголом – основным или вспомогательным);
- A не имеет места;
- A не верно.

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Обозначается $A \& B$. В естественном языке конъюнкция $A \& B$ соответствует следующим конструкциям:

- A и B;
- не только A, но и B;
- B, хотя и A;
- B, несмотря на A;
- как A, так и B;
- A вместе с B;
- A, в то время как B.

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны. Обозначается $A \vee B$. В естественном языке дизъюнкция $A \vee B$ соответствует следующим конструкциям:

- A или B, или оба;
- A или B;
- A, если не B;
- A и/или B (в юридических текстах).

Импликацией двух высказываний A и B называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. Обозначается $A \to B$. В естественном языке импликация $A \to B$ соответствует следующим конструкциям:

- если A, то B;
- коль скоро A, то B;
- в случае A имеет место B;

- для B достаточно A;
- для A необходимо B;
- B, если A;
- A влечет B.

Эквиваленцией двух высказываний A и B называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения A и B совпадают. Обозначается $A \sim B$. В естественном языке эквиваленция $A \sim B$ соответствует следующим конструкциям:

- A, если и только если B;
- если A, то B, и обратно;
- A, если B, и B, если A;
- для A необходимо и достаточно B;
- A равносильно B;
- A тогда и только тогда, когда B.

Алфавит логики высказываний содержит следующие символы: *высказывательные переменные* – обычно заглавные латинские буквы; логические символы, символы скобок (,).

Последовательность символов в логике высказываний называется *формулой,* если она удовлетворяет следующему определению:

1. Любая высказывательная переменная – формула.
2. Если A и B – формулы, то $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \sim B)$, $\neg A$ – формулы.
3. Других формул нет.

Для упрощения записи вводится приоритет операций ($\neg$, &, $\vee$, ~, $\to$) и лишние скобки опускаются**.**

Пример 4.3. Выражение $(A \& B) \to (A \vee B)$ является формулой, поскольку получено при помощи логической связки $\to$ из двух подформул $(A \& B)$, $(A \vee B)$. Каждая из подформул представляет собой логическую связку двух переменных.

Пример 4.4. Выражение $(A \& B)\neg \to (A \vee B)$ не является формулой, поскольку логическая связка $\to$ связывает два выражения $(A \& B)\neg$ и $(A \vee B)$. Первое выражение не является формулой, поскольку не получено по правилам 1–3.

Пример 4.5. Записать следующее высказывание в логической символике:

Я заплачу за работу по ремонту телевизора, если он будет работать.

Выделим отдельные высказывания, встречающиеся в данном высказывании, и обозначим их переменными.

A=”Я заплачу за работу по ремонту телевизора”.

B=”Телевизор будет работать”.

Высказывания A и B связаны между собой импликацией, поэтому формула, соответствующая высказыванию, выглядит так $(B \to A)$.

Если каждой высказывательной переменной, входящей в формулу, придавать истинностное значение И и Л, то формула будет определять истинностную функцию (т.е. функцию, определенную на множестве высказывательных переменных) со значениями в множестве {И, Л}. Если, кроме того, принять И=1, Л=0, то любую формулу логики высказываний можно интерпретировать как формулу логики булевых функций. По аналогии с булевыми функциями для любого высказывания можно построить таблицу истинности. Все свойства формул булевых функций сохраняются и для формул логики высказываний.

Формула F называется *тавтологией* (тождественно-истинной формулой), если при любых значениях (интерпретации) переменных она принимает истинное значение. Формула F называется *противоречием* (тождественно ложной формулой), если при любых значениях переменных списка формула принимает ложное значение. Формула F называется *выполнимой*, если при некоторой интерпретации значений переменных F принимает истинное значение. Формула F называется *опровержимой*, если при некоторых значениях переменных формула принимает ложное значение.

Пример 4.6. Формула $(A \& B) \to (A \vee B)$ не тавтология и не противоречие, но является выполнимой и опровержимой

Формула G *логически следует* из формулы F $(F \Rightarrow G)$, если формула G принимает истинное значение при всех интерпретациях, при которых формула F принимает истинное значение.

Формулы F и G *логически эквивалентны* $(F \equiv G)$, если они являются логическим следствием друг друга. Логически эквивалентные формулы имеют одинаковые значения при любой интерпретации. Приведем теорему о логическом следствии двух формул.

Теорема

- $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \Rightarrow Q$ *тогда и только тогда, когда* $(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n) \to Q$ – *тавтология* $(n \geq 1)$.
- $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \Rightarrow Q$ *тогда и только тогда, когда* $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \& \neg Q$ – *противоречие* $(n \geq 1)$.

Упражнения

4.1. Являются ли следующие предложения высказываниями?

а. Новосибирск расположен на берегах реки Оки.
б. Завтра будет дождь.
в. Вступайте в профсоюз!
г. 3<5.
д. Физику я, скорее всего, не сдам.
е. Береза и осина являются вечнозелеными растениями.

4.2. Являются ли следующие выражения формулами логики высказываний:

а. $X \to (Y \vee X)$
б. $(X \to Y) \to Z$

в. $X \sim (Y \sim Z)$

г. $(X \to (Y \vee Z)) \to (\neg X(\neg Y \wedge \neg Z))$

д. $(X \sim \neg Y \vee Z)) \sim (X \sim (Y \vee Z))$

е. $(X \sim Y) \to (((Y \sim Z) \to (Z \to X) \to (X \sim Z))$

4.3. Применяя таблицы истинности, доказать логическую эквивалентность формул логики высказываний:

а. $X \vee Y \equiv Y \vee X$

б. $\neg(X \vee Y) \equiv \neg X \& \neg Y$

в. $X \vee X \equiv X$

г. $X \to Y \equiv \neg Y \to \neg X$

д. $X \& (\neg X \vee Y) \equiv X \& Y$

е. $X \vee \neg X \& Y \equiv X \vee Y$

ж. $(X \vee Y) \& (X \vee \neg Y)$

4.4. Является ли следующее рассуждение верным?

а. Если Джон не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джон лжет. Если Смит не был убийцей, то Джон не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джон лжет. Следовательно, убийцей был Смит.

б. Я бы заплатил за работу по ремонту телевизора, только если телевизор будет работать. Телевизор не работает. Поэтому я платить не буду.

в. Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы. А не спроси она его, он бы и не сказал ей. Но она узнала. Значит, она его спросила.

г. Он сказал, что придет, если не будет дождя. Но идет дождь. Значит, он не придет.

д. Если парень из нашей компании, то он храбр и на него можно положиться. Этот парень не из нашей компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.

е. Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то четырехугольник является параллелограммом. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали делятся в точке пересечения пополам. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Следовательно, диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам.

ж. Иванов не сделает эту работу, если ее сделает Петров. Петров и Сидоров сделают эту работу в том и только том случае, если ее сделает Иванов. Сидоров эту работу сделает, а Иванов нет. Следовательно, Петров не сделает эту работу.

4.5. Про четверых подсудимых A, B, C, D установлено следующее:

Если A виновен, то B был соучастником.

Если B виновен, то либо C был соучастником, либо A не виновен.

Если D не виновен, то A виновен и C не виновен.

Если D виновен, то A виновен.

Кто из подсудимых виновен и кто не виновен?

4.6. Браун, Джон и Смит обвиняются в преступлении. Следствие установило, что:

Джон виновен, а Смит не виновен.

Браун без помощи Смита не смог бы это сделать.

Смит не виновен, но кто-то из остальных виновен.

Кто из обвиняемых виновен и кто не виновен?

4.7. Студенты A, B, C учатся на разных факультетах. На вопрос «Кто изучал математическую логику?» был получен верный ответ: «Если изучал A, то изучал и C, но неверно, что если изучал B, то изучал и C».

Кто изучал математическую логику?

4.8. Доказать, что если формулы A, A→B тождественно истинны, формула B тождественно истинна.

5. Исчисление высказываний

Способ построения научной теории в виде системы аксиом (постулатов) и правил вывода, позволяющих формальным логическим путем получать утверждения (теоремы) данной теории, называется *аксиоматическим методом*. Чтобы задать *формальную аксиоматическую теорию* $\mathcal{T}$, необходимо определить:

1. Некоторое счётное множество символов (*алфавит*) – символов теории $\mathcal{T}$ (конечные последовательности символов теории $\mathcal{T}$ называются выражениями или словами теории $\mathcal{T}$).
2. Подмножество выражений теории $\mathcal{T}$, называемых *формулами*.
3. Подмножество формул теории $\mathcal{T}$, называемых *аксиомами*.
4. Конечное множество $R_1, R_2, \ldots, R_m$ отношений между формулами, называемых *правилами вывода*.

Определим исчисление высказываний как формальную аксиоматическую теорию $\mathcal{L}$ следующим образом:

1. Алфавит ИВ образуют буквы $A, B, C, \ldots$ и т.д. (возможно с индексами), которые называются пропозициональными переменными, логические символы (связки $\neg$, $\to$), а также вспомогательные символы скобок (,).
2. Множество формул ИВ определяется индуктивно:

   а) все пропозициональные переменные являются формулами ИВ;

   б) если A и B формулы ИВ, то $(\neg A)$, $(A \to B)$ – формулы ИВ;

   в) других формул нет.
3. Аксиомы ИВ (классическое определение):

   $\mathcal{A}_1: (A \to (B \to A))$

   $\mathcal{A}_2: ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

   $\mathcal{A}_3: ((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$

4. Единственным правилом вывода в ИВ является правило отделения (*modus ponens*): если A и $(A \to B)$ – выводимые формулы, то B – также выводимая формула. Символическая запись: $\frac{A, A \to B}{B} MP$

Здесь A и B – любые формулы. Таким образом, множество аксиом теории $\mathcal{L}$ бесконечно, хотя задано тремя схемами аксиом. Множество правил вывода также бесконечно, хотя оно задано только одной схемой.

Договоримся далее опускать внешние скобки у формул. Другие логические связки вводятся определениями: $A \& B := \neg(A \to \neg B)$, $A \vee B := \neg A \to B$. Любая формула, содержащая эти связки, рассматривается как синтаксическое сокращение собственной формулы теории $\mathcal{L}$.

Пример 5.1. Пользуясь определением формулы исчисления высказываний, проверить, является ли данное выражение формулой.

$\neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C)) \to (\neg A \to \neg(B \to \neg C))$

Разобьем выражение на составляющие выражения: $\neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$ и $(\neg A \to \neg(B \to \neg C))$, которые связываются при помощи $\to$ и проверим каждое из этих выражений на принадлежность к формулам. Для этого разобьем и их на более мелкие составляющие.

Первое выражение $\neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$ состоит из $(\neg A \to B)$ и $\neg(\neg A \to C)$ связанных $\to$. Выражение $\neg A$ является формулой и B – формула, следовательно $(\neg A \to B)$ – формула. Выражение $\neg A$ – формула и C – формула, следовательно $(\neg A \to C)$ – формула, и выражение $\neg(\neg A \to C)$ также является формулой. Поскольку оба выражения формулы, то и $((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$ – формула, и следовательно $\neg((\neg A \to B) \to \neg(\neg A \to C))$ – формула.

Второе выражение $(\neg A \to \neg(B \to \neg C))$ состоит из $\neg(B \to \neg C)$ и $\neg A$, связанных $\to$. $\neg C$ – формула и B – формула, следовательно $(B \to \neg C)$ – формула, и следовательно $\neg(B \to \neg C)$, $\neg A$ – формулы. Поскольку оба выражения – формулы, то и $(\neg A \to \neg(B \to \neg C))$ – формула. Значит, исходное выражение является формулой.

Если формула F и формулы $F_1, F_2, ..., F_i$ находятся в некотором отношении R_k, то F называется *непосредственным следствием* из формул $F_1, F_2, ..., F_i$, полученным по правилу вывода R_k. Обозначается это так $\frac{F_1, F_2, \ldots F_i}{F} R_k$, при этом формулы $F_1, F_2, ..., F_i$ называются *посылками*, формула F – *заключением*. *Выводом формулы* F *из формул* $F_1, F_2, ..., F_k$ в теории $\mathcal{T}$ называется всякая последовательность формул $G_1, G_2, ..., G_i, ..., G_n$ такая, что $G_n = F$ и для любого i, $1 \le i \le n$, формула G_i есть

- либо аксиома теории $\mathcal{T}$,
- либо одна из формул F_j, $1 \le j \le k$,
- либо непосредственное следствие из формул G_s и G_t, $1 \le s, t < i$.

Если в теории $\mathcal{T}$ существует вывод формулы F из формул $F_1, F_2, ..., F_k$, то это записывают так: $F_1, F_2, ..., F_k \vdash_T F$, при этом формулы $F_1, F_2, ..., F_k$ называются *гипотезами вывода*. Если множество посылок в выводе формулы F пустое или $\vdash_T F$, то формула F называется *теоремой* теории $\mathcal{T}$ (т.е. выводима только из аксиом без гипотез). Вывод теоремы называется *доказательством*. Выводимость формул в теории $\mathcal{L}$ доказывается путем предъявления конкретного вывода, т.е. последовательности формул, удовлетворяющих определению.

Пример 5.2. Доказать выводимость $\vdash_{\mathcal{L}} (A \to A)$.

Для удобства формулы последовательности вывода располагаются друг под другом в столбик, а справа указывается, на каком основании формула включена в вывод.

1	$(A \to ((A \to A) \to A))$	$\mathcal{A}_1$: $B \leftarrow (A \to A)$
2	$((A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)))$	$\mathcal{A}_2$: $B \leftarrow (A \to A); C \leftarrow A$
3	$((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$	MP 1,2
4	$(A \to (A \to A))$	$\mathcal{A}_1$: $B \leftarrow A$
5	$(A \to A)$	MP 4,3

Пример 5.3. Доказать выводимость $A \vdash_{\mathcal{L}} (B \to A)$.

1	A	гипотеза
2	$(A \to (B \to A))$	$\mathcal{A}_1$
3	$(B \to A)$	MP 1,2

Всякую доказанную выводимость можно использовать как новое (производное) правило вывода. Последняя доказанная теорема называется правилом введения импликации: $\dfrac{A}{B \to A}(\to^+)$

Теорема дедукции. *Пусть* Γ *– множество формул,* A *и* B *– формулы. Если* Γ, $A \vdash_{\mathcal{L}} B$, *то* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A \to B$ *и обратно.*

Следствие 1. *Если* $A \vdash_{\mathcal{L}} B$, *то* $\vdash_{\mathcal{L}} A \to B$ *и обратно.*

Доказательство. Положим в теореме дедукции $\Gamma = \varnothing$.

Следствие 2. *(Правило транзитивности)* $A \to B, B \to C \vdash_{\mathcal{L}} A \to C$.

Доказательство.

1	$A \to B$	гипотеза
2	$B \to C$	гипотеза
3	A	гипотеза
4	B	MP 3,1
5	C	MP 4,2
6	$A \to B, B \to C, A \vdash_{\mathcal{L}} C$	1-5

7	$A \to B, B \to C \vdash_{\mathcal{L}} A \to C$	Теорема дедукции

Следствие 3. *(Правило сечения)* $A \to (B \to C), B \vdash_{\mathcal{L}} A \to C$.

Доказательство.

1	$A \to (B \to C)$	гипотеза
2	A	гипотеза
3	$B \to C$	MP 2,1
4	B	гипотеза
5	C	MP 4,3
6	$A \to (B \to C), B, A \vdash_{\mathcal{L}} C$	1-5
7	$A \to (B \to C), B \vdash_{\mathcal{L}} A \to C$	Теорема дедукции

Упражнения

5.1. Являются ли формулами ИВ выражения:

а. $(A \& B)C \neg D$

б. $(A \& B) \to C$

в. $(A \to B) \to (C \to D)$

г. $(((\neg A) \to D) \to C)$

д. $((A \to C) \& \to (A \vee B))$

е. $\& (A \& B)C \neg D$

ж. $(A \& \to B) \to C$

з. $(A \to \neg B) \to (C \to \neg D)$

5.2. Сколькими способами можно расставить скобки в таких выражениях:

а. $A \to B \vee \neg B \& C$

б. $A \to B \to C \to \neg A \to \neg B$

в. $\neg B \to \neg A \to A \to C$

г. $\neg B \to A \to \neg A \vee B$

д. $A \to C \& C \to A \vee B$

5.3. Являются ли доказательством (выводом) в ИВ следующие последовательности формул?

а. $A \to (A \vee B)$;

б. $A \to (A \vee B)$, $(A \to (A \vee B)) \to (B \to (A \to (A \vee B)))$, $B \to (A \to (A \vee B))$;

в. $A \to (B \to A)$, $(A \to (B \to A)) \to B$, B

5.4. Построить в исчислении высказываний следующие выводы:

а. $\vdash \neg\neg A \to A$

б. $\vdash A \to \neg\neg A$

в. $\vdash A \to (A \to B)$

г. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

д. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

е. $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$

ж. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

з. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$

и. $A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$
к. $A \to B \vdash (B \to (\neg B \to A))$
л. $\vdash (\neg B \to \neg C) \to ((\neg C \to \neg A) \to (A \to B))$
м. $\vdash (A \to (\neg B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to \neg C))$

5.5. Проверьте правильность рассуждений построением вывода:

а. Если все стороны четырехугольника равны между собой, то четырехугольник является ромбом. Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны. Все стороны четырехугольника равны между собой. Следовательно, диагонали четырехугольника перпендикулярны.

б. Если число делится на 16, то оно делится на 8. Если число делится 8, то оно делится на 4. Данное число делится на 16. Значит, оно делится на 4.

6. Методы проверки выводимости формул в исчислении высказываний

Следующая теорема, доказанная Постом, устанавливает взаимосвязь между тождественной истинностью и доказуемостью формулы.

Теорема (Пост, 1921). *Формула F является теоремой исчисления высказываний тогда и только тогда, когда F – тавтология.*

Таким образом, для проверки выводимости формулы в исчислении высказываний достаточно проверить тождественную истинность этой формулы, что можно сделать за конечное число шагов.

Тривиальный метод проверки выводимости заключается в проверке значений формулы при всевозможных значениях (интерпретациях) ее переменных. Однако при большом количестве переменных такой метод становится очень громоздким.

Метод Куайна представляет собой модификацию тривиального метода. Пусть $\langle X_1, X_2, ..., X_k \rangle$ – множество высказывательных переменных в формуле F. Возьмем первую переменную X_1 и придадим ей, например, истинное значение (или ложное). Подставим это значение в формулу F и выполним логические операции, которые могут возникнуть при такой подстановке. После выполнения вычислений получим формулу F' с меньшим количеством переменных и далее опять применяем к ней описанную процедуру. Если на каком-то шаге получена формула, которая является тавтологией или противоречием независимо от значений высказывательных переменных, входящих в эту формулу, то алгоритм на этом шаге можно остановить. Таким образом, алгоритм Куайна приводит к рассмотрению меньшего количества интерпретаций, чем тривиальный алгоритм.

Пример 6.1. Проверить выводимость формулы $(X \& Y \& Z) \to (X \to Y) \& (X \to Z)$ методом Куайна.

Пусть переменная X принимает ложное значение или $X=0$. Тогда $(0\&Y\&Z)\to(0\to Y)\&(0\to Z)=1$ при любой интерпретации переменных Y и Z.

Пусть теперь переменная X принимает истинное значение или $X=1$. Тогда $(1\&Y\&Z)\to(1\to Y)\&(1\to Z)=Y\&Z\to Y\&Z$.

Для полученной формулы повторим процедуру метода Куайна. Положим $Y=0$. Тогда $0\&Z\to 0\&Z=1$ при любой интерпретации переменной Z.

Положим теперь $Y=1$. Тогда $1\&Z\to 1\&Z=Z\to Z=1$ при любой интерпретации переменной Z.

Таким образом, данная формула является тавтологией, а значит, выводима в исчислении высказываний.

Пример 6.2. Проверить выводимость $(X\&Y\&Z)\vdash(X\to Y)\&(X\to Z)$ методом Куайна. Сначала применим теорему дедукции к данной выводимости. По теореме дедукции можно проверять выводимость $(X\&Y\&Z)\to(X\to Y)\&(X\to Z)$. Далее поступаем, как в предыдущем примере.

Пример 6.3. Проверить выводимость $(X\to Y)\vdash(X\to Y)\&(X\to\neg Z)$ методом Куайна. Сначала применим теорему дедукции к данной выводимости. По теореме дедукции можно проверять выводимость $(X\to Y)\to(X\to Y)\&(X\to\neg Z)$.

Положим $X=0$. Тогда $(0\to Y)\to(0\to Y)\&(0\to\neg Z)=1$ при любой интерпретации переменных Y и Z.

Пусть теперь $X=1$. Тогда

$(1\to Y)\to(1\to Y)\&(1\to\neg Z)=Y\to Y\&\neg Z=\neg Y\vee\neg Z$.

При $Y=1$, $Z=1$ получаем, что формула принимает ложное значение.

Таким образом, формула не является тавтологией, а значит, не выводима в исчислении высказываний.

Рассмотрим *метод редукции* распознавания тождественно истинных формул в исчислении высказываний. Он особенно удобен, когда в записи формул встречается много импликаций. Суть метода заключается в следующем. Пусть формула F имеет вид импликации, например, $F=A\to B$. Допустим, что в некоторой интерпретации формула F принимает ложное значение. Тогда в соответствии с таблицей истинности для импликации имеем $A=1$, $B=0$. Таким образом, проверка формулы F сводится к проверке формул A и B. После этого данный процесс применяется к формулам A и B и продолжается до тех пор, пока не будет получено противоречие с начальным предположением о ложности формулы. В этом случае доказано, что формула является тавтологией. В противном случае будет определен набор значений переменных, на котором формула принимает ложное значение, а значит, не является тавтологией.

Пример 6.4. Проверить выводимость формулы $(X\to(Y\to Z))\to((X\to Y)\to(X\to Z))$ методом редукции.

Пусть в некоторой интерпретации формула имеет ложное значение. Тогда

$$X\to(Y\to Z)=1,\ (X\to Y)\to(X\to Z)=0.$$

Применим теперь метод редукции к формуле $(X \to Y) \to (X \to Z)$. Если она в некоторой интерпретации имеет ложное значение, то $X \to Y = 1$, $X \to Z = 0$.
Для формулы $X \to Z$ метод редукции дает $X = 1$, $Z = 0$.
Из $X \to Y = 1$ получаем, что $Y = 1$. Однако это приводит к противоречию с $X \to (Y \to Z) = 1$. Таким образом, исходная формула не может быть ложной ни при какой интерпретации, т.е. формула является тавтологией, а следовательно, выводима в исчислении высказываний.

Пример 6.5. Проверить методом редукции выводимость формулы

$$X \to (Y \to Z) \vdash (X \to Y) \to (X \to Z).$$

По теореме дедукции будем доказывать выводимость формулы $(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$. Далее поступаем, как в предыдущем примере.

Пример 6.6. Проверить методом редукции выводимость

$$(X \to Y) \vdash (X \to Y) \& (X \to \neg Z).$$

Сначала применим теорему дедукции к данной выводимости. По теореме дедукции можно проверять выводимость $(X \to Y) \to (X \to Y) \& (X \to \neg Z)$. Пусть в некоторой интерпретации формула имеет ложное значение. Тогда $X \to Y = 1$, $(X \to Y) \& (X \to \neg Z) = 0$. Отсюда $X \to \neg Z = 0$ и $X = 1$, $Z = 1$. Таким образом, существует интерпретация переменных ($X = 1$, $Y = 1$, $Z = 1$), при которой формула является ложной. Значит, формула не выводима в исчислении высказываний.

Наиболее известный классический алгоритм проверки выводимости формул в ИВ называется *методом резолюций*. В основу метода резолюций положена следующая теорема (доказательство от противного).

Теорема (доказательство от противного). *Если* $\Gamma, \neg A \vdash_{\mathcal{L}} B$, *где* B *– любое противоречие, то* $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} A$.

В качестве формулы B при доказательстве от противного по методу резолюций принято использовать пустую формулу, которую будем обозначать $\varnothing$. Пустая формула не имеет никакого значения и не является истинной ни при какой интерпретации и по определению является противоречием. Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые называются *предложениями*. Предложение – это дизъюнкция литералов (переменных или их отрицаний). Любая формула исчисления высказываний может быть преобразована во множество предложений следующим образом. Сначала формула приводится к КНФ, а затем конъюнкция дизъюнкций литералов разбивается на множество предложений.

Пример 6.7. Найдем множество предложений, соответствующих формуле

$$A \to \neg(B \to A)$$

Приведем формулу к КНФ.

$$A \to \neg(B \to A) \equiv \neg A \vee \neg(B \to A) \equiv \neg A \vee (B \& \neg A) \equiv (\neg A \vee B) \& \neg A$$

Таким образом, множество предложений состоит из двух формул $\neg A \vee B$, $\neg A$.

Рассмотрим теперь *правило резолюции*, т.е. правило вывода, которое используется в методе резолюций. Пусть A и B – два предложения, которые имеют следующий вид $A = P \vee A_1$ и $B = \neg P \vee B_1$, где P – переменная, а A_1, B_1 – любые предложения (в частности, может быть пустые или состоящие только из одного литерала). Правило вывода $\dfrac{A, B}{A_1 \vee B_1} R$ называется *правилом резолюции*. Предложения A и B называются *резольвируемыми* (или родительскими), предложение $A_1 \vee B_1$ – *резольвентой*, а формулы P, $\neg P$ – *контрарными* литералами.

Теорема. *Правило резолюции логично, т.е. резольвента является логическим следствием резольвируемых предложений.*

Доказательство. Пусть предложения A и B имеют следующий вид: $A = P \vee A_1$ и $B = \neg P \vee B_1$, где P – переменная, а A_1, B_1 – любые предложения. Предположим, что предложения A и B истинны в некоторой интерпретации. Тогда если $I(P) = 1$, то предложение B_1 непустое и $I(B_1) = 1$, а значит, резольвента $A_1 \vee B_1$ принимает истинное значение. Если же $I(P) = 0$, то предложение A_1 непустое и $I(A_1) = 1$, а значит, резольвента $A_1 \vee B_1$ принимает истинное значение.

Метод резолюций для исчисления высказываний заключается в следующем. Пусть нужно установить выводимость $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} F$. Воспользуемся доказательством от противного и будем доказывать выводимость $\Gamma, \neg F \vdash_{\mathcal{L}} \varnothing$ с помощью метода резолюций. Для этого каждая формула множества гипотез Γ и формула $\neg F$ независимо преобразуются во множества предложений. В полученном совокупном множестве предложений S отыскиваются резольвируемые предложения, к ним применяется правило резолюции и полученная резольвента добавляется во множество предложений S. После чего процедура резольвирования повторяется. При этом возможны два случая:

- Среди предложений множества S нет резольвируемых или нельзя получить новую резольвенту. Это означает, что теорема опровергнута, т.е. формула F не выводима из множества формул Γ.
- В результате очередного применения правила резолюции получено пустое предложение. Это означает, что теорема доказана, т.е. $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} F$.

Пример 6.8. Докажем методом резолюций теорему

$$\vdash_{\mathcal{L}} (X \& Y \& Z) \to (X \to Y) \& (X \to Z).$$

Преобразуем во множество предложений отрицание целевой формулы

$$\neg((X \& Y \& Z) \to (X \to Y) \& (X \to Z)) \equiv$$
$$\equiv \neg(\neg(X \& Y \& Z) \vee (\neg X \vee Y) \& (\neg X \vee Z)) \equiv$$
$$\equiv (X \& Y \& Z) \& \neg((\neg X \vee Y) \& (\neg X \vee Z)) \equiv$$
$$\equiv (X \& Y \& Z) \& (\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg X \vee Z)) \equiv$$
$$\equiv (X \& Y \& Z) \& (X \& \neg Y \vee X \& \neg Z) \equiv$$
$$\equiv (X \& Y \& Z) \& (\neg Y \vee \neg Z)$$

Таким образом, множество предложений S состоит из X, Y, Z, $(\neg Y \vee \neg Z)$. Теперь в этом множестве необходимо отыскивать резольвируемые предложения и резольвировать их.

1	X	
2	Y	
3	Z	
4	$(\neg Y \vee \neg Z)$	
5	$\neg Z$	ПР из 2 и 4
6	$\varnothing$	ПР из 3 и 5

Поскольку получено пустое предложение, то исходная формула выводима в исчислении высказываний.

Пример 6.9. Докажем методом резолюций выводимость

$$(X \& Y \& Z) \vdash_{\mathcal{L}} (X \to Y) \& (X \to Z).$$

Преобразуем во множество предложений отдельно гипотезу и отрицание целевой функции. Гипотеза находится в КНФ, что позволяет сразу определить предложения $\{X, Y, Z\}$. Отрицание целевой формулы дает следующие предложения $\{X, (\neg Y \vee \neg Z)\}$, т.к.

$$\neg((X \to Y) \& (X \to Z)) \equiv \neg(X \to Y) \vee \neg(X \to Z) \equiv$$
$$\equiv (X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Z) \equiv X \& (\neg Y \vee \neg Z)$$

Таким образом, общее множество предложений $S = \{X, Y, Z, (\neg Y \vee \neg Z)\}$. Далее резольвируем как в предыдущем примере.

Пример 6.10. Проверим методом резолюций выводимость

$$\vdash_{\mathcal{L}} X \to ((X \to Y) \to (X \to Z)).$$

Применим к выводимости теорему дедукции, чтобы упростить выводимую формулу. Получим $X \vdash (X \to Y) \to (X \to Z)$. Еще раз применим теорему дедукции. Это дает X, $X \to Y \vdash X \to Z$.

Преобразуем к множеству предложений гипотезу и отрицание целевой формулы. Таким образом, получим множество предложений $S = \{X, \neg X \vee Y, \neg Z\}$.

Теперь производим резольвирование.

1	X	
2	$\neg X \vee Y$	
3	$\neg Z$	
4	Y	ПР из 1 и 2

Таким образом, дальнейшее резольвирование невозможно и выводимость не доказуема.

Пример 6.11. Записать рассуждение в логической символике и проверить его правильность:

Он сказал, что придет, если не будет дождя.

Но идет дождь. Значит, он не придет.

Выделим отдельные высказывания и обозначим их переменными:

A="Он придет"

B="Идет дождь"

Рассуждение состоит их двух гипотез, которые записываются следующими формулами: $\neg B \to A,\ B$. Таким образом, в логической символике рассуждение выглядит так $\neg B \to A,\ B \vdash \neg A$.

Проверим правильность этого рассуждения методом резолюций. Множество предложений, соответствующее двум гипотезам и отрицанию вывода, состоит из предложений $B \vee A,\ B,\ A$. Среди предложений нет резольвируемых, поэтому рассуждение ложное.

Упражнения

6.1. Проверить выводимость в ИВ следующих формул методом Куайна и методом редукции:

а. $(A \to B) \vee (B \to A)$

б. $(A \to B) \vee (B \to \neg A)$

в. $A \to (B \to (A \& B))$

г. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

д. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

е. $C \to ((A \to (C \to B)) \to (A \to B))$

ж. $(A \to \neg C) \to (A \to (B \to \neg C))$

з. $C \to (\neg A \to ((\neg B \to A) \to B))$

и. $(A \to C) \to (A \to (B \to C))$

к. $C \to ((A \to B) \to (A \to \neg\neg A))$

л. $(A \to C) \to ((B \to A) \to (B \to C))$

6.2. Проверить следующие выводимости различными методами:

а. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

б. $\neg A \to B, A \to C \vdash \neg B \to C$

в. $\neg A \to B, A \to C, B \to D \vdash \neg C \to D$

г. $A \to B, C \to \neg B \vdash A \to \neg C$

д. $A \& B, C \to (A \sim B) \vdash A \vee \neg C$

е. $A \to C, \neg(B \to C) \vdash A$

6.3. Записать в логической символике и проверить правильность следующих рассуждений:

а. Мне обязательно необходимо выспаться. Я высыпаюсь только когда мне ничего не надо делать. Если я свободен, то я иду гулять. Значит, я не высплюсь.

б. Если человек занимается спортом, то у него хороший аппетит. Когда у человека хороший аппетит, он много ест. Этот человек много ест. Значит, он занимается спортом.

в. Я люблю вкусно поесть после стресса. Если я вкусно поем, то мне приходится делать физические упражнения. После физических упражнений у меня стресс. Значит, у меня всегда стресс.

г. Я могу сварить суп, если у меня есть овощи и вода. Если магазин закрыт, то у меня не будет овощей. Магазин открыт, но воду отключили. Значит, суп я не смогу сварить.

д. Если кошка мяукает, то она либо голодная, либо хочет в комнату. Кошка сытая и сейчас мяукает. Значит, она хочет в комнату.

е. Если на улице тепло, то я сяду в кабриолет. Если я сяду в кабриолет, то уеду куда-нибудь. На улице – 40. Значит, я никуда не поеду.

ж. Если он с утра выучил уроки, то потом весь день свободен. У него хорошее настроение тогда и только тогда, когда он выучил уроки. У него хорошее настроение. Значит, у него есть свободное время.

з. В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.

и. Если к власти придет Кощей Бессмертный, то будет война. Если будет война, то все пойдут воевать и в стране будет голод. Если заграница нам поможет, то голода не будет. Значит, если к власти придет Кощей Бессмертный, то и заграница не поможет.

к. Если бы он учился в университете, он был бы умным. Он учится тогда и только тогда, когда ему хочется. Сейчас ему не хочется. Значит, он глупый.

л. Если человек счастлив, то у него есть кот и горячий шоколад. Если кота нет, то человек не достаточно счастлив. Следовательно, если у человека нет горячего шоколада, то он несчастлив.

м. Человек, обедающий в кафе быстрого питания, голоден и куда-то торопится. Человек не обедает в кафе быстрого питания, хотя и очень торопится. Значит, он не голоден.

н. Наша футбольная команда либо выигрывает матч, либо проигрывает, либо сводит его к ничьей. Если матч выигран или проигран, то он не перенесён. Команда матч не выиграла и не свела его к ничьей. Следовательно, матч не перенесён и проигран.

о. Если Паша ляжет поздно спать, то он опоздает в школу. Если он заснет рано, то он не успеет сделать домашнее задание. Следовательно, или Паша завтра опоздает в школу, или он не успеет сделать домашнее задание.

п. Если танк взорвался, то танк либо наехал на мину, либо в него попали из пушки. Танк взорвался, но в него не попали из пушки. Значит, танк наехал на мину.

р. Если студент завел будильник и приготовился к занятиям, то он пойдет в университет к первой паре. Студент забыл завести будильник и не пошел к первой паре. Значит, студент не приготовился к занятиям.

7. Предикаты и операции с предикатами

В исчислении высказываний важным было лишь истинностное значение высказываний, при этом внутреннее строение высказываний не рассматривалось. Выполняя логические вычисления, можно было определить истинностное значение сложных высказываний в зависимости от истинности или ложности входящих в них простых высказываний. Однако при этом внутренний смысл высказываний не рассматривался. Возможности языка исчисления высказывания оказываются очень бедными для описания и изучения даже простейших задач науки и практики.

Рассмотрим простой пример. Из истинных высказываний «5<8» и «8<10» можно сделать вывод, что «5<10». При этом истинность следствия зависит не только от истинности посылок, но и от их внутреннего строения. Изменив вторую посылку на истинное высказывание «$8 \neq 10$», уже нельзя сделать вывод, что «5<10». Таким образом, даже на таком простом примере видно, что существенную роль при логическом выводе играет внутреннее строение высказываний, а не только их логические значения.

Для того чтобы сделать более понятной структуру сложных высказываний, пользуются специальным языком – языком *исчисления предикатов* (ИП) первого порядка.

Каждое высказывание представляет собой некоторое суждение о предмете высказывания (субъекте) или взаимосвязи нескольких субъектов. Предметы (субъекты), о которых делается суждение, могут быть самой различной природы. Множество субъектов, о которых делаются высказывания, называется *предметной областью* Ω. Для обозначения субъектов будем использовать *предметные переменные*. *Предикат* – это языковое выражение, обозначающее какое-то свойство субъекта или отношение между субъектами. В современной логике предикатами называются функции, значениями которых служат высказывания. *Предикатом мощности n (n-местным предикатом)* $P(x_1,...,x_i,...,x_n)$, $x_i \in \Omega$ определенным на предметной области Ω, называют отображение набора предметных переменных $x_1,...,x_n$ во множество высказываний.

Пример 7.1. Приведем примеры различных предметных областей и предикатов.

- $Q =$«2+3=5» – нульместный предикат, определенный на множестве натуральных чисел N.
- $P(x)$ =«Натуральное число x четное» – одноместный предикат, определенный на множестве натуральных чисел N.
- $D(x_1, x_2)$ =«Натуральное число x_1 делится (без остатка) на натуральное число x_2 » – двуместный предикат, определенный на множестве пар натуральных чисел N×N.
- $M(x)$ =«x – мужчина», одноместный предикат, определенный на множестве всех людей.

Придавая конкретные значения из предметной области предметным переменным, участвующим в предикатах, можно получить высказывания, которые принимают логическое значение истина или ложь в зависимости от значения переменных.

Поскольку предикаты представляют собой отображения со значениями во множестве высказываний, где введены логические операции, то эти операции естественным образом определяются и для предикатов. Пусть P, Q – предикаты мощности n, определенные на предметной области Ω. Тогда логические операции для предикатов вводятся следующим образом:

$$(\neg P)(x_1,\dots,x_n) := \neg(P(x_1,\dots,x_n))$$
$$(P \vee Q)(x_1,\dots,x_n) := (P(x_1,\dots,x_n) \vee Q(x_1,\dots,x_n))$$
$$(P \,\&\, Q)(x_1,\dots,x_n) := (P(x_1,\dots,x_n) \,\&\, Q(x_1,\dots,x_n))$$
$$(P \to Q)(x_1,\dots,x_n) := (P(x_1,\dots,x_n) \to Q(x_1,\dots,x_n))$$

Пример 7.2. Пусть на множестве натуральных чисел N определены два предиката

$P(x)$ =«Натуральное число x делится на 2»

$Q(x)$ =«Натуральное число x делится на 3».

Тогда

$(P \vee Q)(x) := (P(x) \vee Q(x))$= «Натуральное число x делится на 2 или на 3»,

$(P \,\&\, Q)(x) := (P(x) \,\&\, Q(x))$= «Натуральное число x делится на 6».

Таким образом,

$(P \vee Q)(5) := (P(5) \vee Q(5))$ = *Л∨Л=Л,*

$(P \,\&\, Q)(120) := (P(120) \,\&\, Q(120))$ =*И&И=И.*

Существуют такие виды высказываний, которые нельзя записать в виде формулы исчисления высказываний. Например:

- Все дети должны смеяться.
- Все люди смертны.
- Никто не забыт, и ничто не забыто.

Корректность таких высказываний определяется не только истинностью соответствующих логических связок, но и пониманием таких слов, как «все», «всякий» и т.д. В логике предикатов наряду с операциями логики высказываний основную роль играют операции, называемые *кванторами*. Именно использование кванторов делает логику предикатов более богатой и гибкой по сравнению с логикой высказываний.

Дадим определение операции кванторов. Пусть Q – одноместный предикат, определенный на предметной области Ω. Предположим сначала, что множество Ω имеет конечное число элементов, т.е. $\Omega = \{a_1,\dots,a_m\}$. Тогда высказывание A=«Все элементы Ω обладают свойством Q» можно записать в виде конечной конъюнкции $A = Q(a_1) \,\&\, Q(a_2) \,\&\, \dots \,\&\, Q(a_m)$ и высказывание A будет истинно тогда и только тогда, когда предикат Q принимает истинное значение для любого $a_i \in \Omega$. Также можно рассмотреть высказывание $B =$«Хотя бы один элемент Ω обладает свойством Q» и записать его в виде конечной дизъюнкции предикатов – $B = Q(a_1) \vee Q(a_2) \vee ... \vee Q(a_m)$. Очевидно, что высказывание B будет истинным, если хотя для одного элемента из предметной области предикат принимает истинное значение. Однако в случае бесконечного множества Ω нельзя записать бесконечную конъюнкцию или дизъюнкцию предикатов и в этом случае используют операцию *квантор всеобщности* или *квантор существования*.

Пусть имеется n-местный предикат $P(x_1,..x_n)$, определенный на предметной области Ω. Предикату P поставим в соответствие пару $(n-1)$-местных предикатов

$\forall x_i P(x_1,...,x_i,...,x_n)$ («для всякого $x_i P(x_1,...,x_i,...,x_n)$») и

$\exists x_i P(x_1,...,x_i,...,x_n)$ (существует x_i, для которого $P(x_1,...,x_i,...,x_n)$).

Эти $(n-1)$-местные предикаты переменных $x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1},...,x_n$ получены из исходного предиката навешиванием *квантора всеобщности* и *квантора существования.* При этом переменная x_i *связана* квантором всеобщности или существования.

В естественном языке предикату $\forall x P(x)$ соответствуют фразы:

- Для любого x (имеет место) P.
- $P(x)$ при произвольном x.
- Для всех x (верно) $P(x)$.
- $P(x)$, каково бы ни было x.
- Для каждого x (верно) $P(x)$.
- Всегда имеет место $P(x)$.
- Каждый обладает свойством P.
- Свойство P присуще всем.
- Всё удовлетворяет P.
- Любой объект является P.
- Всякая вещь обладает свойством P.

В естественном языке предикату $\exists x P(x)$ соответствуют фразы:

- Для некоторых x (имеет место) $P(x)$.
- Для подходящего x (верно) $P(x)$.
- Существует x, для которого (такой, что) $P(x)$.
- Имеется x, для которого (такой, что) $P(x)$.
- Найдется x, для которого (такой, что) $P(x)$.
- У некоторых вещей есть признак P.
- Хотя бы для одного x (верно) $P(x)$.
- Кто-нибудь относится к (есть) P.
- По крайней мере, один объект есть P.

Пример 7.3. Пусть имеется предикат $D(x,y) = "x - y > 0"$ на множестве целых чисел *Z*. Тогда можно получить новые одноместные предикаты

$$D_1(x,y) = \forall y D(x,y) = \text{«Для всякого } y,\ x - y > 0\text{»}.$$

$$D_2(x,y) = \exists x D(x,y) = \text{«Существует } x,\ x - y > 0\text{»}.$$

Нетрудно видеть, что предикат D_1 тождественно ложный, а предикат D_2 тождественно истинный.

Пример 7.4. Пусть имеется предикат $D(x,y) = "x + y > x"$ на множестве натуральных чисел *N*. Для любых x и y из данной предметной области предикат $D(x,y)$ является тождественно истинным, т.е. $\forall x \forall y D(x,y) \equiv 1$. Если данный предикат определить на предметной области действительных чисел, то $\forall x \forall y D(x,y) \equiv 0$, но $\forall x \exists y D(x,y) \equiv 1$.

Упражнения

7.1. На множестве натуральных чисел определены предикаты:

$P(x)$= «x – простое число»,

$E(x)$= «x – четное число»,

$O(x)$= «x – нечетное число»,

$D(x,y)$= «y делится на x».

Переведите на русский язык формулы логики предикатов и определите их истинностные значения:

а. $P(11)$
б. $E(2) \& P(2)$
в. $\forall x(E(x) \& D(x,6))$
г. $\forall x(\neg E(x) \to \neg D(2,x))$
д. $\forall x(E(x) \& \forall y(D(x,y) \to E(y)))$
е. $\forall x(O(x) \to \forall y(P(y) \to \neg D(x,y)))$
ж. $\forall x(P(x) \to \exists y(E(y) \& D(x,y)))$

7.2. На множестве натуральных чисел определены предикаты:

$A(n)$= «n кратно 5»
$B(n)$= «n кратно 2»
$C(n)$= «n кратно 4»
$D(n)$= «n кратно 10»
$E(n)$= «n кратно 20»

Установите истинность следующих формул:

а. $\forall n D(n)$
б. $\exists n E(n)$
в. $\forall n(D(n) \to A(n) \& B(n))$
г. $\exists n(A(n) \& B(n) \to C(n))$

д. $\forall n(\neg A(n) \to \neg E(n))$

е. $\exists n(A(n) \,\&\, B(n))$

ж. $\forall n(A(n) \,\&\, B(n))$

з. $\forall n(A(n) \to B(n))$

и. $\forall n(B(n) \,\&\, D(n) \to E(n))$

к. $\exists n(B(n) \,\&\, C(n) \to \neg D(n))$

7.3. Среди следующих выражений выделить предикаты, и для каждого предиката установить местность и область истинности. Для двуместных предикатов изобразить область истинности графически.

а. $x+2=0$

б. При $x=0$ выполняется равенство $x-2=0$

в. $x^2-4=0$

г. $\exists x(x^3-8=0)$

д. $x-y=1$

е. x^2-3x+6

ж. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

з. $x-2y\geq 0$

и. Однозначное число x является простым

к. $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0$

7.4. Пользуясь знаками арифметических операций (+, ×) и отношений (<, =), запишите на языке логики предикатов следующие высказывания о действительных числах и определите, истинные они или ложные:

а. Если произведение двух чисел равно 0, то хотя бы один из сомножителей равен 0

б. Система уравнений $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ не имеет решения

в. Существует ровно одно положительное значение квадратного корня из положительного числа

г. Существует такое положительное число x, что $x^2-4=0$

д. Для любых действительных чисел x и y, если $x<y$ и $y\neq 0$, то $\frac{x}{y}<1$

7.5. Пусть предметная область Ω – множество неотрицательных целых чисел. На множестве Ω определены предикаты $S^3(x,y,z)="x+y=z"$ и $P^3(x,y,z)="xy=z"$. Записать предикаты с использованием $S^3(x,y,z)$ и $P^3(x,y,z)$, выражающие следующие утверждения:

а. $x=0$

б. $x=1$

в. $x=2$

г. x – четное число

д. x – нечетное число

е. x – простое число

ж. $x = y$
з. $x \geq y$
и. $x < y$
к. x делит y
л. z – наименьшее общее кратное x и y
м. z – наибольший общее делитель x и y
н. коммутативность сложения
о. ассоциативность сложения
п. $x + y = 1$
р. $3x - y = 0$

7.6. Пусть Ω множество точек, прямых и плоскостей трехмерного евклидова пространства. На множестве Ω определены предикаты

$P_1(x)$ принимает значение истина, тогда и только тогда, когда x – точка,

$P_2(x)$ принимает значение истина, тогда и только тогда, когда x – прямая,

$P_3(x)$ принимает значение истина, тогда и только тогда, когда x – плоскость,

$Q(x, y)$ принимает значение истина, тогда и только тогда, когда x лежит на y

$R(x, y)$ принимает значение истина, тогда и только тогда, когда x совпадает с y

Запишите в логической символике следующие утверждения:

а. Через каждые две точки можно провести прямую, и притом единственную.
б. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.
в. Определение параллельных прямых.
г. Определение параллельных плоскостей.
д. Аксиома Евклида о параллельных прямых (через точку, не лежащую на данной прямой, всегда можно провести прямую, параллельную данной прямой, причем только одну).
е. Аксиома Лобачевского о параллельных прямых (через точку, не лежащую на данной прямой, всегда можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной прямой).

7.7. Записать с помощью кванторов следующие утверждения и их отрицания:

а. Функция $f(x)$ возрастает на интервале (a_0, a_1).
б. Функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a_0, a_1).
в. Множество A является собственным подмножеством множества B.
г. Точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$.
д. Функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на ке $[a_0, a_1]$ в точке x_0.

е. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
ж. Бинарное отношение ρ является симметричным.
з. Функция $f(x)$ ограничена на множестве R.
и. Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ самодвойственна.
к. Множества A и B не пересекаются.

7.8. Пусть Ω – множество людей. На множестве Ω заданы следующие предикаты:

$E(x, y)$ = «x и y – один и тот же человек»
$P(x, y)$ = «x родитель y»
$C(x, y)$ = «x и y – супруги»
$M(x)$ = «x – мужчина»
$W(x)$ = «x – женщина»

С использованием этих предикатов записать формулы, выражающие следующие утверждения:

а. У каждого есть отец и мать
б. У каждого есть бабушка
в. У каждого есть дедушка
г. х – прабабушка
д. х – прадедушка
е. х – деверь
ж. х – шурин
з. х – кузен
и. х – кузина
к. х – золовка
л. х тесть
м. х – теща
н. х – свекровь
о. х – свекор
п. х – зять
р. х – сноха
с. х – правнук
т. У некоторых людей есть братья
у. У некоторых людей есть сестры
ф. Некоторые супруги бездетны
х. Некоторые супруги имеют детей
ц. Некоторые супруги имеют детей только женского пола
ч. Некоторые супруги имеют детей только мужского пола
ш. х внебрачный сын у
щ. х – двоюродная тетя
ы. х – двоюродный племянник
э. х внебрачная дочь у
ю. х – внучатая племянница
я. х – незаконнорожденный
аа. х – племянница

8. Исчисление предикатов как формальная теория

Формальная теория задается алфавитом символов, способом построения формул, набором аксиом и правил вывода. Чтобы показать, что исчисление предикатов является формальной аксиоматической теорией, приведем описание всех составных частей.

Сначала определим алфавит исчисления предикатов. В алфавит входят:

- предметные переменные x_i, y_j, z_r; значениями предметных переменных являются элементы предметной области Ω
- функциональные переменные f_m^n, $n,m = 0,1,2,...$, где n – арность функции; функциональные переменные нужны для обозначения функций, заданных на предметной области и со значениями в предметной области
- предикатные переменные P_m^n, $n,m = 0,1,2,...$, n – арность предиката;
- логические символы $\to$, $\neg$, $\forall$ (дополнительные $\vee$, &,$\exists$)
- служебные символы (,)

Поскольку исчисление предикатов более сложная теория по сравнению с исчислением высказываний, то помимо логических формул необходима символическая запись функций, определенных на предметной области и со значениями в предметной области. Такие последовательности символов называются термами.

Последовательность символов в исчислении предикатов называется *термом,* если она удовлетворяет следующему определению:

1. любая предметная переменная, любая нульарная функциональная переменная является термом;
2. если $T_1,...,T_n$ – термы, то $f_m^n(T_1,...,T_n)$ – терм;
3. других термов нет.

Пример 8.1. Выражение $f_1^2(x_4, f_2^2(f_3^2(x_1,x_2),x_3))$ является термом. Выражение $f_1^2(x_4,P_2^2(x_1,x_2),x_3)$ не является термом, поскольку $P_2^2(x_1,x_2)$ является предикатным символом, а не термом.

Пример 8.2. Пусть предметная область Ω – множество натуральных чисел N. Придадим теперь функциональным символам, определенным на данной предметной области, следующие значения: f_1^2– умножение двух чисел, f_2^2– возведение в степень, f_3^2– сложение двух чисел. Тогда терм выглядит так: $x_4(x_1+x_2)^{x_3}$. Полагая $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 2$, получаем, что терм равен 9. Таким образом, если заданы значения всех функциональных и предметных переменных, входящих в терм, то для получения значения терма следует выполнить все операции с сопоставленными переменными.

Последовательность символов в исчислении предикатов называется *формулой,* если она удовлетворяет следующему определению:

1. каждый предикатный символ арности нуль является формулой;
2. если P_m^n– n-арный предикатный символ и $T_1,\dots,T_n$ – термы, то $P_m^n(T_1,\dots,T_n)$ – формула и все входящие в эту формулу предметные переменные – свободные;
3. если F_1, F_2 – формулы, то $\neg(F_1)$, $(F_1 \to F_2)$ – формулы и свободные вхождения переменных в F_1, F_2 остаются свободными в формулах $\neg(F_1)$, $(F_1 \to F_2)$;
4. если переменная x – свободная в формуле F, то выражение $\forall x(F)$ – формула и вхождения других переменных (отличных от x) остаются свободными в формуле $\forall x(F)$;
5. других формул нет.

Одна и та же переменная может иметь в одной и той же формуле как свободные, так и связанные вхождения. Формула, не содержащая свободных вхождений переменных, называется *замкнутой*. Квантор существования вводится определением $\exists x(F) := \neg(\forall x(\neg(F)))$.

Пример 8.3. Выражение $P(x_1, x_2, x_3)$ является формулой. Все переменные в этой формуле имеют свободное вхождение. В формуле $(\forall x \exists y P(x, y, z)) \to \forall x Q(x, w)$ переменные x и y являются связанными, а переменные z и w свободными. Выражение $(\forall x \exists y P(x, y, z)) \to \exists x \forall x Q(x, w)$ не является формулой, поскольку выражение $\exists x \forall x Q(x, w)$ не является формулой.

Поскольку ИП является расширением ИВ, то и множество аксиом ИП является расширением множества аксиом ИВ.

$\mathcal{A}_1$: $(A \to (B \to A))$

$\mathcal{A}_2$: $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

$\mathcal{A}_3$: $((\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B))$

$\mathcal{P}_1$: $(\forall x A(x) \to A(t))$, где формула $A(x)$ не содержит терм t

$\mathcal{P}_2$: $(\forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B))$, если формула A не включает свободных вхождений x.

Вместо A и B можно подставлять любые правильно построенные формулы.

Правилами вывода в ИП служат:

- modus ponens: $\dfrac{A, A \to B}{B} MP$,
- правило обобщения $\dfrac{A}{\forall x A}(\forall^+)$.

Понятие выводимой формулы определяется так же, как и в исчислении высказываний.

Пример 8.4. Доказать выводимость в исчислении предикатов

$$\forall x \forall y A \vdash \forall y \forall x A$$

Следующий вывод доказывает выводимость данной формулы

1	$\forall x \forall y A$	гипотеза
2	$\forall x \forall y A \to \forall y A$	$\mathcal{P}_1$
3	$\forall y A$	MP 1,2
4	$\forall y A \to A$	$\mathcal{P}_1$
5	A	MP 3,4
6	$\forall x A$	$\forall^+$ 5
7	$\forall y \forall x A$	$\forall^+$ 6

Очень полезными оказываются производные правил вывода, которые позволяют сократить длину вывода формулы. Рассмотрим некоторые из них для исчисления предикатов.

Теорема (правило индивидуализации (ПИ)). *Если* $A(x)$ *не содержит терм* t*, то* $\forall x A(x) \vdash A(t)$.

Доказательство.

1	$\forall x A(x)$	гипотеза
2	$\forall x A(x) \to A(t)$	$\mathcal{P}_1$
3	$A(t)$	MP 1,2

Теорема (правило существования (ПС)). *Если терм* t *свободный для переменной* x *в формуле* $A(x)$*, то* $A(t) \vdash \exists x A(x)$.

Доказательство.

1	$\forall x \neg A(x) \to \neg A(t)$	$\mathcal{P}_1$
2	$(\forall x \neg A(x) \to \neg A(t)) \to$ $(A(t) \to \neg \forall x \neg A(x))$	$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ – тавтология $B \leftarrow A(t)$, $A \leftarrow \forall x \neg A(x)$
3	$A(t) \to \neg(\forall x \neg A(x))$ $A(t) \to \exists x A(x)$	MP 1,2

Упражнения

8.1. Пусть f^1, g^2, h^3 – унарный, бинарный и тернарный функциональные символы, определенные на предметной области Ω. Являются ли термами следующие выражения:

а. $f^1(g^2(x_0, x_1))$

б. $g^2(f^1(x_2), h^3(x_0, x_1, x_2))$

в. $f^1(g^2(x_0), h^3(x_0, x_1, x_2))$

г. $g^2(f^1(x_2, x_0), h^3(x_0, x_1))$

д. $h^3(x, g^2(y), z)$

8.2. Пусть f^1, g^2, h^3 – унарный, бинарный и тернарный функциональные символы, P^1 и Q^3 – унарный и тернарный предикатные символы, определенные на предметной области Ω. Определить, являются ли формулами следующие выражения:

а. $Q^3(x_0, f^1(x_1), h^3(x_1, x_2, x_3))$

б. $(P^1(x_0) \to \forall x_1(Q^3(x_0, x_1, x_2) \& P^1(g^2(x_0, x_1))))$

в. $Q^3(P^1(x), f^1(y), f^1(y))$

г. $f^1(h^3(x, y, z))$

8.3. Будут ли следующие выражения формулами исчисления предикатов и если это формулы, то какие переменные в них являются свободными, а какие связанными:

а. $\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 P(x_1, x_2, x_3, x_4)$

б. $\forall x P(x, y) \to \exists y P(x, y)$

в. $\exists x \exists y (P(x, y) \& Q(x, y))$

г. $\forall x \exists y (P(x, z) \to Q(z))$

д. $(P(x) \& P(y)) \vee (Q(x) \to Q(z))$

8.4. Указать все подформулы формул:

а. $Q^2(f^1(x), g^2(x, y))$

б. $\exists x Q^2(x, y) \to \neg(\forall x(P^1(g^2(x, y))) \& \forall z P^1(z))$

в. $\forall x P^2(x, y) \to \forall z Q^2(x, z)$

г. $\neg(\exists z Q^2(z, z) \vee R^3(x, y, z))$

8.5. Укажите, какие из следующих выражений являются формулами исчисления предикатов. В каждой формуле укажите свободные и связанные вхождения переменных:

а. $\forall x \exists x P(x, y)$

б. $\exists x \to y P(x, y)$

в. $\exists x \forall y P(x, y) \to Q(z)$

г. $(\neg A \to B) \to (A \to B)$

д. $x \to \forall y P(x, y)$

е. $\exists x \forall y (P(x, y) \to Q(z))$

ж. $\forall x P(x) \to \forall y Q(y)$

з. $\neg(\exists x \forall z (P(x, y) \to P(y, z)))$

и. $(P(x) \to Q(x)) \& \exists x (\forall x R(x))$

к. $\forall x (P(x) \to Q(x)) \to \forall x Q(x, y)$

8.6. Пусть +, –, | |, < – операции сложения, вычитания, взятия модуля и отношение неравенства, определенные на множестве вещественных чисел R. Записать в виде предиката выражении:

а. $|x + y| - 5 < 0$

б. $|x| + |y| < |x + y|$

в. $|x - 3| < 7 + y$

8.7. Используя другие операции, определенные на множестве вещественных чисел, указать новую интерпретацию формул из предыдущей задачи.

9. Логические эквивалентности с кванторами. Предваренная форма

Предикаты P,Q мощности n, определенные на предметной области Ω, называются логически эквивалентными (равносильными) $P \equiv Q$, если $P(x_1,...,x_n) = Q(x_1,...,x_n)$ для любого набора предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Пример 9.1. Пусть множество слов является предметной областью $\Omega = \{a, abbab, bbabb, aa\}$. На этом множестве заданы два предиката:

$P(x)$ =«Слово x содержит букву b»

$Q(x)$ =«Слово x имеет длину 5»

Нетрудно видеть, что на данном множестве Ω эти два предиката равносильны. Если изменить предметную область, то предикаты P и Q могут стать неравносильными.

Теорема. *Справедливы следующие логические эквивалентности для n-местных предикатов P, Q, R (1 и 0 – тождественно истинный и тождественно ложный предикаты соответственно)*

1	$\neg\neg P \equiv P$	Закон двойного отрицания
2	$P \& Q \equiv Q \& P$	*Законы коммутативности*
3	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	
4	$P \& (Q \& R) \equiv (P \& Q) \& R$	*Законы ассоциативности*
5	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	
6	$P \vee (Q \& R) \equiv (P \vee Q) \& (P \vee R)$	*Законы дистрибутивности*
7	$P \& (Q \vee R) \equiv (P \& Q) \vee (P \& R)$	
8	$P \& P \equiv P$	*Законы идемпотентности*
9	$P \vee P \equiv P$	
10	$\neg(P \& Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	*Законы де Моргана*
11	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \& \neg Q$	
12	$P \vee 1 \equiv 1$	*Законы нуля и единицы*
13	$P \& 0 \equiv 0$	
14	$P \vee 0 \equiv P$	
15	$P \& 1 \equiv P$	
16	$P \vee (P \& Q) \equiv P$	*Законы поглощения*
17	$P \& (P \vee Q) \equiv P$	
18	$P \& \neg P \equiv 0$	*Закон противоречия*
19	$P \vee \neg P \equiv 1$	*Закон исключенного третьего*

Теорема. *Разноименные кванторы не всегда коммутируют*.

Доказательство. Приведем пример предиката, для которого верно утверждение теоремы. Пусть имеется двуместный предикат $D(x, y)$ =« x делится на y » на множестве натуральных чисел. Тогда очевидно, что $\exists x \forall y D(x, y) \equiv 0$ и $\forall y \exists x D(x, y) \equiv 1$.

Теорема. *Имеют место следующие логические следования и эквивалентности:*

1	$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$	*Законы де Моргана*
2	$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$	
3	$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$	*Коммутация одноименных*
4	$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$	*кванторов*
5	$\forall x (P(x) \,\&\, Q(x)) \equiv \forall x P(x) \,\&\, \forall x Q(x)$	*Законы дистрибутивности*
6	$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	
7	$\forall x (P(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x P(x) \vee Q(y)$	*Законы ограничения действия*
8	$\forall x (P(x) \,\&\, Q(y)) \equiv \forall x P(x) \,\&\, Q(y)$	*кванторов*
9	$\exists x (P(x) \,\&\, Q(y)) \equiv \exists x P(x) \,\&\, Q(y)$	
10	$\exists x (P(x) \vee Q(y)) \equiv \exists x P(x) \vee Q(y)$	
11	$\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y) \equiv 1$	

Формула F находится в *предваренной форме*, если она имеет следующий вид: $F = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n G(x_1, \ldots, x_n)$,где Q_i – квантор всеобщности или существования или отсутствие квантора по переменной x_i, а G – бескванторная формула. Приставка $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$называется *префиксом*, а формула G – *матрицей*.

Пример 9.2. Формула $\exists x \neg P(x) \vee R(z)$ не является формулой в предваренной форме, поскольку квантор существования действует только на $\neg P(x)$, но не на $R(z)$.

Теорема. *Для любой формулы исчисления предикатов существует логически эквивалентная ей формула в предваренной форме.*

Доказательство. Для того, чтобы привести формулу к предваренной форме, используют следующие шаги:

- Исключают импликации.
- Для внесения $\neg$ внутрь скобок применяют законы де Моргана и закон двойного отрицания.
- Для переноса кванторов применяют законы дистрибутивности, законы ограничения действия кванторов и равносильности с переименованием кванторов (Q_1, Q_2 – кванторы существования или всеобщности)

$$(Q_1 x) P(x) \,\&\, (Q_2 x) R(x) \equiv (Q_1 x)(Q_2 z)(P(x) \,\&\, R(z))$$
$$(Q_1 x) P(x) \vee (Q_2 x) R(x) \equiv (Q_1 x)(Q_2 z)(P(x) \vee R(z)).$$

Пример 9.3. Рассмотрим построение предваренной формы для формулы $\forall xP(x) \to \forall xR(x)$.

$$\forall xP(x) \to \forall xR(x) \equiv \neg(\forall xP(x)) \vee \forall xR(x) \equiv \exists x\neg P(x) \vee \forall xR(x) \equiv$$
$$\equiv \exists x\neg P(x) \vee \forall zR(z) \equiv \exists x\forall z(\neg P(x) \vee R(z))$$

Пример 9.4. Привести формулу к предваренной форме. $(\forall x\exists yQ(x,y)) \to ((\exists y\forall xP(x,y)) \to Q(x,y))$.

Для построения предваренной нормальной формы выполним следующие действия:

Шаг 1. Переименуем связанные переменные, свободные переменные x, y не меняют своих имен.

$(\forall u\exists vQ(u,v)) \to ((\exists t\forall sP(s,t)) \to Q(x,y))$.

Шаг 2. Исключим всюду логические операции импликации:

$(\forall u\exists vQ(u,v)) \to ((\exists t\forall sP(s,t)) \to Q(x,y)) = \neg\forall u\exists vQ(u,v) \vee \neg\exists t\forall sP(s,t) \vee Q(x,y)$

Шаг 3. Продвинем отрицания до элементарной формулы по законам де Моргана:

$\neg\forall u\exists vQ(u,v) \vee \neg\exists t\forall sP(s,t) \vee Q(x,y) = \exists u\forall v\neg Q(u,v) \vee \forall t\exists s\neg P(s,t) \vee Q(x,y)$.

Шаг 4. Вынесем кванторы влево, используя несколько раз законы ограничения действия кванторов.

$\exists u\forall v\neg Q(u,v) \vee \forall t\exists s\neg P(s,t) \vee Q(x,y) = \exists u(\forall v\neg Q(u,v) \vee \forall t\exists s\neg P(s,t) \vee Q(x,y)) =$

$\exists u(\forall v\neg Q(u,v) \vee \forall t(\exists s\neg P(s,t) \vee Q(x,y))) = \exists u(\forall v(\neg Q(u,v) \vee \forall t(\exists s\neg P(s,t) \vee Q(x,y)))) =$

$\exists u\forall v(\neg Q(u,v) \vee \forall t(\exists s\neg P(s,t) \vee Q(x,y))) = \exists u\forall v\forall t(\neg Q(u,v) \vee \exists s\neg P(s,t) \vee Q(x,y)) =$

$\exists u\forall v\forall t\exists s(\neg Q(u,v) \vee \neg P(s,t) \vee Q(x,y))$

Получена равносильная формула, в которой все кванторы вынесены в начало формулы и действуют на бескванторную часть формулы.

Упражнения

9.1. Привести формулы к предваренной форме.

а. $\neg\exists x\forall y\exists z\forall uA(x,y,z,u)$

б. $\exists x\forall yA(x,y) \,\&\, \exists x\forall yB(x,y)$

в. $\exists x\forall yA(x,y) \to \exists x\forall yB(x,y)$

г. $\exists x\forall yA(x,y) \vee \exists x\forall yB(x,y)$

д. $\exists x\forall yA(x,y) \to \forall x\exists yB(x,y)$

9.2. Записать инверсию формулы в предваренной нормальной форме.

а. $\exists x\neg A(x)$

б. $\exists x(A(x) \,\&\, \neg B(x))$

в. $\forall x\neg A(x)$

г. $\forall x(A(x) \to \forall yB(y))$

д. $\exists x(A(x) \,\&\, B(x) \,\&\, C(x))$

е. $\forall x(A(x) \to B(x))$

ж. $\exists x(A(x) \sim B(x))$

з. $\forall x(A(x) \vee \exists yB(y))$

и. $\forall x(A(x) \to B(x)) \,\&\, \exists x(C(x) \,\&\, \neg D(x))$

к. $\forall x \exists y \forall z(A(x,y,z) \to B(x,y,z))$

9.3. Привести формулы к предваренной форме.

а. $(\forall x \exists y Q(x,y)) \to ((\exists y \forall x Q(x,y)) \vee R(x,y))$

б. $(\forall x \exists y Q(x,y)) \to ((\exists y \forall x P(x,y)) \to Q(x,y))$

в. $\forall x Q(x,y) \to (\exists y Q(x,y) \vee \exists x R(x,y))$

г. $(\forall x \exists y Q(x,y)) \to (\exists y P(x,y) \to \forall x Q(x,y))$

д. $(\exists x \forall y A(x,y)) \vee \forall y B(x,y)$

е. $(\exists x \forall y A(x,y)) \to \neg(\forall x \exists y B(x,y))$

ж. $\neg(\exists x \forall y Q(x,y)) \to (\forall y \exists x Q(x,y))$

з. $(\forall x \exists y Q(x,y)) \to \forall x Q(x,y)$

и. $\forall x Q(x,y) \to (\exists y Q(x,y) \vee \exists x R(x,y))$

к. $\exists y Q(x,y) \to (\exists y P(x,y) \to \forall x Q(x,y))$

л. $(\forall y A(x,y)) \vee (\exists x \forall y B(x,y))$

м. $(\exists x \forall y A(x,y)) \to \neg(\forall x B(x,y))$

н. $(\forall x Q(x,y) \to \exists y Q(x,y)) \vee \exists x R(x,y)$

о. $(\exists y \exists x Q(x,y) \to \exists y P(x,y)) \to \forall x Q(x,y)$

п. $\neg(\exists x A(x,y)) \to (\forall x \exists y B(x,y))$

р. $\exists x \forall y A(x,y) \,\&\, B(x,y)$

с. $(\exists x \forall y A(x,y)) \to (\exists x \exists y B(x,y))$

10. Метод резолюций для исчисления предикатов

Исчисление предикатов, которое не содержит предметных констант, функторов, предикатов и собственных аксиом, называется *чистым*. Исчисление предикатов, которое содержит предметные константы и (или), функторы и (или) предикаты и связывающие их собственные аксиомы, называется *прикладным.* Исчисление предикатов, в котором кванторы могут связывать только предметные переменные, но не могут связывать функторы, предикаты или иные множества объектов, называются исчислениями *высших порядков.*

Значение формулы определено лишь тогда, когда задана какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов. Под *интерпретацией* (*моделью)* будем понимать предметную область Ω с определенными на ней n-арными предикатами.

Формула F *выполнима в данной модели,* если существует набор $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i \in \Omega$, значений свободных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ формулы F такой, что $F(a_1, a_2, ..., a_n)$ принимает истинное значение.

Формула F *выполнима (в логике предикатов),* если существует модель, в которой F выполнима.

Формула F *истинна в данной модели*, если она принимает истинное значение на любом наборе $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i \in \Omega$, значений своих свободных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Формула F *общезначима или (тождественно истинна в логике предикатов)*, если она истинна в любой интерпретации.

Пример 10.1. На множестве целых чисел определен предикат $P(x,y) = "x > y"$. Тогда поскольку при любом значении свободной переменной y эта формула истинна, то формула $\exists x P(x,y)$ выполнима в этой модели и выполнима вообще. Кроме того, формула $\exists x P(x,y)$ истинна в указанной модели, но не является общезначимой. Так как существует модель (на множестве целых чисел предикат $P(x,y)$ всюду ложный), в которой формула $\exists x P(x,y)$ не является истинной.

Пример 10.2. Очевидно, что формула $\exists x(P(x,y) \vee \neg P(x,y))$ истинна в любой интерпретации при любом наборе значений переменных, т.е. эта формула общезначима.

Формула F – *тавтология* в ИП, если тавтологией является формула, полученная из F опусканием всех кванторов и термов вместе со всеми соответствующими скобками и переменными.

Пример 10.3. Аксиома $(\forall x A(x) \to A(t))$ является тавтологией в ИП, поскольку формула $A \to A$ тавтология.

Теорема. *Если формула F – тавтология в ИП, то F является теоремой в ИП и может быть выведена лишь с использованием аксиом $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ и правила вывода МР.*

Теорема. (Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов) *Формула доказуема в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда формула общезначима*.

Доказательство. Покажем только необходимость утверждения, поскольку доказательство достаточности более сложное. Аксиомы ИП являются общезначимыми формулами. При использовании правил вывода для общезначимых формул можно получить только общезначимую формулу.

Теорема (Теорема Черча о неразрешимости исчисления предикатов**)**. *ИП является полуразрешимой теорией.*

Метод резолюций для проверки выводимости формул в логических исчислениях, предложенный в 1965 г. А. Робинсоном, используется во многих системах логического программирования. Метод резолюций работает с особой стандартной формой формул, которые называются предложениями. Предложение – это бескванторная дизъюнкция предикатных символов и (или) их отрицаний (литералов). Любая формула ИП может быть преобразована во множество предложений, используя следующие шаги:

- Приведение к предваренной форме с использованием равносильных преобразований.

- Элиминация кванторов существования с использованием преобразований (неравносильных)

$$\exists x_1 Q_2 x_2 .. Q_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow Q_2 x_2 .. Q_n x_n F(a, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} \exists x_i Q_{i+1} x_{i+1} .. Q_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_{i-1} Q_{i+1} x_{i+1} .. Q_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, f(x_1, \ldots, x_{i-1}), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

  где a – новая предметная константа, f – новый функциональный символ, $Q_2, \ldots, Q_n$ – кванторы существования или всеобщности (или отсутствие квантора) по соответствующим переменным. После этого этапа формула может содержать только кванторы всеобщности. Такой вид формул называется *скулемовская стандартная форма*.
- Элиминация кванторов всеобщности с использованием преобразования (неравносильного)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(x)$$

  После этого шага формула не содержит кванторов.
- Приведение к конъюнктивной нормальной форме и элиминация конъюнкций. После этого получается множество предложений.

Пример 10.4. Преобразовать во множество предложений формулу

$$\forall x(P(x) \to \exists y(E(y) \,\&\, D(x, y)))$$

$$\forall x(P(x) \to \exists y(E(y) \,\&\, D(x, y))) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \exists y(E(y) \,\&\, D(x, y))) \equiv$$
$$\equiv \forall x \exists y(\neg P(x) \vee E(y) \,\&\, D(x, y)) \Rightarrow \forall x(\neg P(x) \vee E(f(x)) \,\&\, D(x, f(x))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \neg P(x) \vee E(f(x)) \,\&\, D(x, f(x)) \Rightarrow (\neg P(x) \vee E(f(x))) \,\&\, (\neg P(x) \,\&\, D(x, f(x))) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{\neg P(x) \vee E(f(x)), \neg P(x) \vee D(x, f(x))\}$$

В целом метод резолюций для предикатов похож на метод резолюций для исчисления высказываний, хотя и имеет свои особенности. При рассмотрении метода резолюций для исчисления высказываний особое внимание уделялось поиску контрарных пар во множестве предложений. В логике предикатов этот поиск заметно усложняется, поскольку в формулы входят предметные переменные.

Пример 10.5. Рассмотрим особенности поиска контрарных пар на примере. Пусть имеется два предложения C_1 и C_2 (P, R, Q – предикаты, определенные на некоторой предметной области):

$$C_1 = P(y) \vee R(y),$$
$$C_2 = \neg P(f(x)) \vee Q(x).$$

Не существует ни одного литерала в C_1, контрарного какому-либо литералу в C_2. Однако если подставить терм $f(a)$ вместо y в предложении C_1 и терм a – вместо x в C_2, то получим предложения C_1' и C_2', в которых уже существуют контрарные литералы $\{P(f(a)), \neg P(f(a))\}$:

$$C_1' = P(f(a)) \vee R(f(a)),$$

$$C_2' = \neg P(f(a)) \vee Q(a).$$

Новые предложения уже можно резольвировать и получить резольвенту $C_3' = Q(a) \vee R(f(a))$. Таким образом, для получения резольвент из предложений в логике предикатов необходимо не только отыскать контрарные предикатные символы, но и выполнить подстановки соответствующих термов вместо переменных для получения контрарных пар.

Пусть X – множество предметных переменных из Ω и T – множество термов над переменными из X. *Подстановкой* называется отображение $\sigma : X \to T$. Подстановка σ называется *конечной*, если $\sigma(x) \neq x$ лишь для конечного числа элементов $x \in X$. Подстановка, не имеющая элементов, называется *тождественной*. Подстановку будем обозначать как множество пар $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, ..., x_k \leftarrow t_k\}$, где $x_1, ..., x_k$ – переменные, $t_1, ..., t_k$ – термы.

Пусть имеются две подстановки $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, ..., x_k \leftarrow t_k\}$ и $\nu = \{y_1 \leftarrow p_1, ..., y_k \leftarrow p_n\}$. *Произведением подстановок σ и ν* называется подстановка $\sigma * \nu$, полученная из множества $\{x_1 \leftarrow \nu(t_1), ..., x_k \leftarrow \nu(t_k), y_1 \leftarrow p_1, ..., y_n \leftarrow p_n\}$ отбрасыванием всех элементов, имеющих вид $x_j \leftarrow \nu(t_j)$, для которых $\nu(t_j) = x_j$ и всех элементов $y_j \leftarrow p_j$ таких, что $y_j \in \{x_1, ..., x_k\}$.

Пример 10.6. Приведем пример вычисления произведения подстановок. Пусть имеются подстановки термов:

$$\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, x_2 \leftarrow t_2\} = \{x \leftarrow f(y), y \leftarrow z\},$$
$$\nu = \{y_1 \leftarrow p_1, y_2 \leftarrow p_2, y_3 \leftarrow p_3\} = \{x \leftarrow a, y \leftarrow b, z \leftarrow y\}.$$

Тогда $\sigma * \nu = \{x \leftarrow \nu(f(y)), y \leftarrow \nu(z), x \leftarrow a, y \leftarrow b, z \leftarrow y\}$. Поскольку $\nu(z) = y$, то элемент $y \leftarrow \nu(z)$ отбрасываем. Также отбрасываем элементы $x \leftarrow a$, $y \leftarrow b$, т. к. x и y принадлежат множеству термов первой подстановки. Окончательно получаем $\sigma * \nu = \{x \leftarrow f(b), z \leftarrow y\}$ *σ*ν={x←f(b), z←y}*

Подстановка σ называется *унификатором* для множества термов $\{t_1, ..., t_k\}$, если $\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = ... = \sigma(t_k)$. В рассмотренном выше примере 10.5 подстановка $\sigma = \{x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)\}$ является унификатором для множества термов $\{f(x), y\}$.

Пусть имеется две конечные последовательности термов $(t_1, ..., t_k)$ и $(p_1, ..., p_k)$. Унификатором двух последовательностей термов называется подстановка σ такая, что $\sigma(t_1) = \sigma(p_1), ..., \sigma(t_k) = \sigma(p_k)$.

Следующий рекурсивный алгоритм выясняет, унифицируемы ли два терма S и T:

- Если термы S и T – константы, то S и T унифицируемы тогда и только тогда, когда они являются одной и той же предметной константой.
- Если терм S является переменной, а T – произвольным термом, то термы S и T унифицируемы и $\sigma = \{S \leftarrow T\}$. Если терм T является пере-

менной, а S – произвольным термом, то термы S и T унифицируемы и $\sigma = \{T \leftarrow S\}$.

- В остальных случаях термы S и T унифицируемы тогда и только тогда, когда S и T имеют одинаковый главный функциональный символ и все их соответствующие компоненты (подтермы) унифицируемы.

Пример 10.7. Рассмотрим теперь *правило резолюции*, т.е. правило вывода, которое используется в методе резолюций. Пусть A и B – два предложения в исчислении предикатов, причем $A = P_1 \vee A_1$ и $B = \neg P_2 \vee B_1$, где P_1 и P_2 унифицируемые с помощью унификатора σ контрарные литералы. Правило вывода $\dfrac{A, B}{(A_1 \vee B_1)\sigma} R$ называется *правилом резолюции* в исчислении предикатов. В этом случае резольвентой предложений A и B является предложение $(A_1 \vee B_1)\sigma$, полученное из предложения $A_1 \vee B_1$ применением унификатора σ.

Пусть нужно установить выводимость $\Gamma \vdash F$ в ИП методом резолюций. Воспользуемся доказательством от противного и будем доказывать выводимость $\Gamma, \neg F \vdash \varnothing$. Для этого каждая формула множества Γ и формула $\neg F$ независимо преобразуются во множества предложений. В полученном совокупном множестве предложений отыскиваются резольвируемые предложения, к ним применяется правило резолюции в ИП и резольвента добавляется во множество и т.д. При этом возможны три случая:

- Среди текущего множества предложений нет резольвируемых. Это означает, что теорема опровергнута, т.е. формула F не выводима из множества формул Γ.
- В результате очередного применения правила резолюции получено пустое предложение. Это означает, что теорема доказана, т.е. $\Gamma \vdash F$.
- Процесс не заканчивается, т.е. множество предложений пополняется все новыми резольвентами, среди которых нет пустых. Это ничего не означает.

Таким образом, ИП является полуразрешимой теорией, а метод резолюций является частичным алгоритмом автоматического доказательства теорем, т.е. метод резолюций позволяет однозначно определить общезначимость формулы, но остальных случаях метод резолюций не всегда дает определенный результат.

Пример 10.8. Покажем выводимость формулы $\forall x \forall y F(x,y) \to \forall y \forall x F(x,y)$ методом резолюций. Возьмем отрицание этой формулы и преобразуем во множество предложений. Сначала необходимо привести формулу к предваренной форме. Для этого заменяются импликации и внешние отрицания переносятся к предикатным символам.

$$\neg(\forall x \forall y F(x,y) \to \forall y \forall x F(x,y)) \equiv \neg(\neg(\forall x \forall y F(x,y)) \vee \forall y \forall x F(x,y)) \equiv$$
$$\equiv \forall x \forall y F(x,y) \,\&\, \neg(\forall y \forall x F(x,y)) \equiv \forall x \forall y F(x,y) \,\&\, (\exists y \exists x \neg F(x,y))$$

Далее одноименные связанные переменные переименовываются и кванторы переносятся в начало формулы

$$\forall x \forall y F(x,y) \,\&\, (\exists y \exists x \neg F(x,y)) \equiv \forall y \exists y_1 \forall x \exists x_1 (F(x,y) \,\&\, \neg F(x_1,y_1))$$

После получения предваренной формы из формулы необходимо удалить кванторы. Сначала слева направо элиминируются кванторы существования, затем кванторы всеобщности. Самый левый квантор существования в формуле по переменной y_1, и поскольку левее находится квантор всеобщности по переменной y, то при удалении из формулы квантора существования, переменная y_1 заменяется на терм от переменной y (преобразования теперь не равносильные).

$$\forall y \exists y_1 \forall x \exists x_1 (F(x,y) \,\&\, \neg F(x_1,y_1)) \Rightarrow \forall y \forall x \exists x_1 (F(x,y) \,\&\, \neg F(x_1, f(y)))$$

Далее двигаясь по префиксу слева направо, удаляются все имеющиеся кванторы существования. Следующий квантор существования навешан по переменной x_1 и левее его находятся кванторы всеобщности по переменным x, y, поэтому при удалении из формулы квантора существования по переменной x_1, переменная x_1 заменяется на терм от переменных x, y

$$\forall y \forall x \exists x_1 (F(x,y) \,\&\, \neg F(x_1, f(y))) \Rightarrow \forall y \forall x (F(x,y) \,\&\, \neg F(g(x,y), f(y)))$$

Кванторы всеобщности из формулы удаляются без дополнительных преобразований.

$$\forall y \forall x (F(x,y) \,\&\, \neg F(g(x,y), f(y))) \Rightarrow F(x,y) \,\&\, \neg F(g(x,y), f(y))$$

Полученную бескванторную формулу необходимо представить как конъюнкцию дизъюнкций предикатных символов. После удаления конъюнкций формула распадается на предложения

$$F(x,y) \,\&\, \neg F(g(x,y), f(y)) \Rightarrow \{F(x,y), \neg F(g(x,y), f(y))\}$$

Резольвируем полученное множество предложений, в правой колонке указаны унификаторы для правила резолюции:

1	$F(x,y)$	$x \leftarrow g(a,b)$, $y \leftarrow f(b)$
2	$\neg F(g(x,y), f(y))$	$x \leftarrow a$, $y \leftarrow b$
3	$\varnothing$	ПР из 1,2

Выводимость доказана.

Пример 10.9. Проверить правильность рассуждения:

Всякий, кто может решить эту задачу, – математик.
Ни один математик не может решить эту задачу.
Значит, она неразрешима.

Определим на множестве людей следующие предикаты:
$R(x)$ = «x может решить эту задачу»,
$M(x)$ = «x математик».

Тогда фразы можно записать в логической символике следующим образом:
$\forall x(R(x) \to M(x))$
$\neg(\exists x(M(x) \to R(x)))$
$\neg(\exists x R(x))$
или

$\forall x(R(x) \to M(x)),\ \neg(\exists x(M(x) \to R(x))) \vdash \neg(\exists x R(x))$

Проверим данную выводимость методом резолюций. Преобразуем во множество предложений гипотезы и отрицание целевой формулы. Полученное множество предложений $\{\neg R(x) \vee M(x), \neg R(x), M(x), R(a)\}$ легко резольвируется до получения пустой формулы. Таким образом, данное рассуждение правильное.

Упражнения

10.1. Будут ли общезначимы следующие формулы?

а. $\forall x P(x) \to P(y)$
б. $P(y) \to \forall x P(x)$
в. $\neg(\exists x P(x) \to \forall x P(x))$
г. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$
д. $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$
е. $\forall x \exists y Q(x, y) \to \exists y \forall x Q(x, y)$
а. $(\exists x \forall y A(x, y)) \,\&\, (\exists x \forall y B(x, y))$
б. $(\exists x \forall y A(x, y)) \to (\exists x \forall y B(x, y))$
в. $(\exists x \forall y A(x, y)) \vee (\exists x \forall y B(x, y))$
г. $(\forall x \exists y Q(x, y)) \to ((\exists y \forall x Q(x, y)) \vee R(x, y))$
д. $(\forall x \exists y Q(x, y)) \to ((\exists y \forall x P(x, y)) \to Q(x, y))$
е. $\forall x Q(x, y) \to (\exists y Q(x, y) \vee \exists x R(x, y))$
ж. $(\forall x \exists y Q(x, y)) \to (\exists y P(x, y) \to \forall x Q(x, y))$
з. $(\exists x \forall y A(x, y)) \vee \forall y B(x, y)$
и. $(\exists x \forall y A(x, y)) \to \neg(\forall x \exists y B(x, y))$
к. $\neg(\exists x \forall y Q(x, y)) \to (\forall y \exists x Q(x, y))$
л. $(\forall x \exists y Q(x, y)) \to \forall x Q(x, y)$
м. $\forall x Q(x, y) \to (\exists y Q(x, y) \vee \exists x R(x, y))$
н. $\exists y Q(x, y) \to (\exists y P(x, y) \to \forall x Q(x, y))$
о. $(\forall y A(x, y)) \vee (\exists x \forall y B(x, y))$
п. $(\exists x \forall y A(x, y)) \to \neg(\forall x B(x, y))$
р. $\neg(\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y))$
с. $(\forall x Q(x, y) \to \exists y Q(x, y)) \vee \exists x R(x, y)$
т. $(\exists y \exists x Q(x, y) \to \exists y P(x, y)) \to \forall x Q(x, y)$
у. $\forall y A(x, y) \vee \exists x \forall y B(x, y)$
ф. $\neg(\exists x A(x, y)) \to (\forall x \exists y B(x, y))$
х. $\exists x \forall y A(x, y) \,\&\, B(x, y)$
ц. $(\exists x \forall y A(x, y)) \to (\exists x \exists y B(x, y))$

10.2. Проверить правильность рассуждения методом резолюций:

а. Каждый любит сам себя. Значит, кого-то кто-нибудь любит.
б. Все любят Джейн. Значит, все любимы кем-то.

в. Ни одно животное не бессмертно. Кошки – животные. Значит, некоторые кошки не бессмертны.
г. Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие лишены перьев.
д. Имеются прилежные студенты. Ни один студент не лишен способностей. Значит, некоторые студенты, лишенные способностей, не прилежны.
е. Все политики – лицедеи. Некоторые лицедеи – лицемеры. Значит, некоторые политики – лицемеры.
ж. Ничто плодотворное не легко. Некоторые легкие вещи общедоступны. Значит, некоторые общедоступные вещи не плодотворны.
з. У нее только преданные друзья. Некоторые из ее друзей – лицемеры. Ни один лицемер не может быть преданным. Значит, все ее друзья – проходимцы.
и. Этому никто не поверит. Значит, судья этому не поверит.
к. Глупец был бы способен на это. Я на это не способен. Значит, я не глупец.
л. Если бы кто-нибудь мог решить эту задачу, то и какой-нибудь математик мог бы. Кэбот – математик, а не может ее решить. Значит, задача неразрешима.
м. Всякий, кто может решить эту задачу, – математик. Кэбот не может её решить. Значит, Кэбот – не математик.
н. Всякий, кто может решить эту задачу, – математик. Ни один математик не может решить этой задачи. Значит, она неразрешима.
о. Если какое-нибудь из чисел, лежащих (строго) между 1 и 101, делит 101, то простое число, меньше 11, делит 101. Ни одно простое число, меньшее 11, не делит 101. Значит, ни одно число между 1 и 101 не делит 101.
п. Тот, кто распускает этот слух, должен быть и ловким, и беспринципным. Кэбот не ловок. Лоувелл не беспринципен. Значит, ни Кэбот, ни Лоувелл не распускают этот слух.
р. Если обуви со шнурками, то это не летняя обувь. Если обувь с каблуками, то без шнурков. Существуют модели зимней обуви без шнурков. Значит, вся летняя обувь без шнурков и с каблуками.
с. Если у людей много дел, то они едут на машине. Если люди торопятся, то они едут на метро. Некоторые люди ездят на метро. Следовательно, некоторые люди торопятся.
т. Все Повелители времени с планеты Галлифрей внешне похожи на людей. Обычный человек не умеет перемещаться во времени. Некоторые жители Земли имеют технологии управления временем. Значит, на Земле живут инопланетяне.
у. Если дракон черный, то он может извергать огонь. Если дракон подавился бензином, то он извергнет огонь. Значит, все драконы, которые давятся огнем, черные.

10.3. Проверить правильность рассуждения методом резолюций:

а. Если элемент является общим для всех объектов данного класса, то этот элемент – статический. Если элемент статический, то память под него резервируется при запуске программы. Поле count является общим для всех объектов класса. Значит, память для него выделилась до явного создания класса.
б. Если книга содержит полезные факты, то она заслуживает внимания. Если книга развивает умственные способности, то она содержит полезные факты. Существуют книги, содержащие полезные факты. Следовательно, любая книга заслуживает внимания.
в. Любой, кто играет на скрипке, умеет немного играть на фортепиано. Если человек умеет играть на фортепиано, то либо он безумно талантлив, либо имеет в этом опыт. Я опыта не имею, да и талантами музыкальными не блещу. Значит, скрипач из меня никакой.
г. Ходить на пары утром трудно. Если рано ложиться, то утром вставать легко. Мне не трудно ходить на пары утром. Значит, я рано ложусь.
д. Все птицы – позвоночные. Все позвоночные – животные. Орел – птица. Значит, орел – животное.
е. Если профессия интересная, то человек становится увлеченным. Если человек увлекается профессией, то ему больше платят. Программирование – интересная профессия. Значит, программистам платят больше.
ж. Если в пицце есть ананасы и кетчуп, то пицца – гавайская. Если в пицце есть оливки и свежие помидоры, то пицца – греческая. Я в свою пиццу положил оливки и ананасы. Значит пицца не гавайская и не греческая.
з. Некоторые люди любят мороженое. Если человек боится заболеть, то он не будет есть мороженое. Если у человек нет денег, то он тоже не ест мороженое. Значит, не все, кто любит мороженое, едят его.

Список литературы

1. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1975.
2. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
3. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БЧВ-Петербург, 2004.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
5. Унучек, С. А. Математическая логика [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. А. Унучек. – Электрон. текстовые данные. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 239 c. – 978-5-4486-0086-9. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69312.html. Лицензия: весь срок охраны авторского права.

6. Макоха, А. Н. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Н. Макоха, А. В. Шапошников, В. В. Бережной. – Электрон. текстовые данные. – Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2017. – 418 с. – 2227-8397. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69397.html. Лицензия: весь срок охраны авторского права.
7. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : методические указания к самостоятельной работе / – Электрон. текстовые данные.– Липецк : Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2014.– 25 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/55106. – ЭБС «IPRbooks» Лицензия: весь срок охраны авторского права.
8. Зюзьков, В. М. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. М. Зюзьков. – Электрон. текстовые данные. – Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2015. – 236с. – 978-5-4332-0197-2. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/72122.html. Лицензия: весь срок охраны авторского права.
9. Балюкевич, Э.Л. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Балюкевич Э.Л., Ковалева Л.Ф. – Электрон. текстовые данные. – М.: Евразийский открытый институт, 2009. – 188 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/10772. – ЭБС «IPRbooks». Лицензия до 17.02.2020.
10. Маньшин, М.Е. Математическая логика и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Маньшин М.Е. – Электрон. текстовые данные. – Волгоград : Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2009. – 106 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/11334. – ЭБС «IPRbooks», по паролю. Лицензия 09.12.2023.
11. Зарипова, Э.Р. Лекции по дискретной математике. Математическая логика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Зарипова Э.Р., Кокотчикова М.Г., Севастьянов Л.А. – Электрон. текстовые данные. – М.: Российский университет дружбы народов, 2014. – 120 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/22190. ЭБС «IPRbooks», по паролю. Лицензия: весь срок охраны авторского права.
12. Алябьева, В.Г. Теория алгоритмов [Электронный ресурс] : учебное пособие для специальности 050201.65 – «Математика с дополнительной специальностью “Информатика”», направление подготовки 050100 – «Педагогическое образование» / Алябьева В.Г., Пастухова Г.В. – Электрон. текстовые данные. – Пермь : Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2013. – 125 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/32100. – ЭБС «IPRbooks». Лицензия: весь срок охраны авторского права.

Учебное издание

Мачикина Елена Павловна

Математическая логика и теория алгоритмов

Редактор:
Корректор:

Подписано в печать 01.01.2020.
Формат бумаги 62 × 84/16, отпечатано на ризографе, шрифт № 10,
п. л. – 2,3, заказ № , тираж – 200.

Редакционно-издательский отдел СибГУТИ
630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86, офис 107, тел. (383) 269-82-36