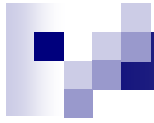


3.5 *Примитивно рекурсивные функции*

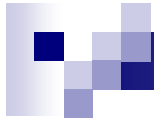


- **Рассматривается уточнение понятия алгоритма – теория частично рекурсивных функций.**
- **Этот подход к формализации алгоритма был разработан в 30-х годах прошлого столетия математиками К. Гёделем, С.К. Клини, А. Черчем**

- 
- Будем рассматривать n -арные функции на множестве наборов неотрицательных целых чисел

$$f : \overline{N} \times \overline{N} \times \dots \times \overline{N} \rightarrow \overline{N}$$

- Такие функции называются *арифметическими функциями*.



- Если функция определена не для каждого набора чисел, то такие функции называются *частично определенными арифметическими функциями (ЧАФ)*.



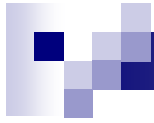
базовые функции:

- функция следования $S(x) = x + 1$

- функция нуля $O(x) = 0$

- функция проекции

$$U_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$$



**Базовые функции всюду определены
и достаточно просты для
вычисления (будем называть их
интуитивно вычислимыми).**



Суперпозиция

- Пусть имеются n -арная функция f и m -арные функции f_1, f_2, \dots, f_n .

- Функция g получена операцией суперпозиции из функций

f, f_1, f_2, \dots, f_n ,

если для любых x_1, x_2, \dots, x_m

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$



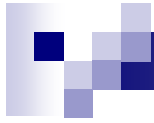
Пример

- Функция $F(x,y)$ получена суперпозицией функций

$$f(x,y,z)=x+y+z,$$

$$g_1(x,y)=x, \quad g_2(x,y)=y, \quad g_3(x,y)=x-y.$$

Определить значение $F(3,1)$



$$g_1(x,y)=x, \quad g_2(x,y)=y, \quad g_3(x,y)=x-y.$$

$$f(x,y,z)=x+y+z$$

$$F(3,1)=g_1(3,1)+g_2(3,1)+g_3(3,1)=6$$

$$F(1,3)=g_1(1,3)+g_2(1,3)+g_3(1,3)=\text{неопр.}$$



Примитивная рекурсия

- Пусть имеются произвольные функции: n -арная функция g и $n+2$ -арная функция h .
- $n+1$ -арная функция f получена операцией примитивной рекурсии из функций g и h , если для любых

$$x_1, \dots, x_n, y \in \overline{N}$$

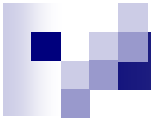


Примитивная рекурсия

■ выполнены соотношения

$$f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y))$$



**В случае если $n=0$, то
определение имеет такой вид**

- **Функция $f(x)$ получена операцией
примитивной рекурсии из функции
 $h(x, y)$ и константы C ,**
- **если для любого $x \in \mathbb{N}$ выполнены
соотношения**

$$f(0) = C$$

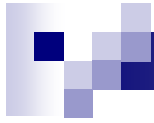
$$f(x + 1) = h(x, f(x))$$



Пример

- Функция $f(x,y)$ получена операцией примитивной рекурсии из функций $g(x)=x+1$ и $h(x,y,z)=xz$

Вычислить значение $f(4,3)$

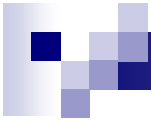



$$f(4,0) = g(4) = 5 + 1 = 6$$

$$f(4,1) = h(4,0,f(4,0)) = 4 \cdot f(4,0) = 24$$

$$f(4,2) = h(4,1,f(4,1)) = 4 \cdot f(4,1) = 96$$

$$f(4,3) = h(4,2,f(4,2)) = 4 \cdot f(4,2) = 384$$

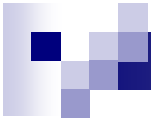
- 
- Функция f называется *примитивно рекурсивной* (п.р.ф.),
если ее можно получить из
простейших функций с помощью
конечного числа
операций суперпозиции и
примитивной рекурсии.





Предложение. (свойства
операций суперпозиции и
примитивной рекурсии)

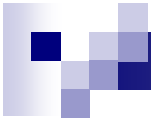
*Операции суперпозиции и
примитивной рекурсии сохраняют:*

- *всюду определённость функций;*
- *интуитивную вычислимость функций.*

- 
- Доказательство проведем для операции суперпозиции.
 - Пусть m -арная функция $g(x_1, \dots, x_m)$ получена в результате операции суперпозиции из функций f, f_1, \dots, f_n

- 
- Если все функции f, f_1, \dots, f_n — всюду определённые, то функция g всюду определена.
 - Функция g будет не всюду определённой, если одна из функций f_1, \dots, f_n не всюду определена или если можно найти такие a_1, \dots, a_m , что $b_1 = f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, b_n = f_n(a_1, \dots, a_m)$, но значение $f(b_1, \dots, b_n)$ неопределено.

- 
- Если каким-либо образом можно вычислять значения функций f и f_1, \dots, f_n , то можно вычислить значение функции g

- 
- Придадим переменным x_1, \dots, x_m некоторые значения a_1, \dots, a_m .
 - Вычислим
$$b_1 = f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, b_n = f_n(a_1, \dots, a_m).$$
 - Вычислим значение $c = f(b_1, \dots, b_n)$, которое будет значением $g(a_1, \dots, a_m)$
 - Таким образом, если функции f и f_1, \dots, f_n интуитивно вычислимы, то и функция g интуитивно вычислима.



Предложение

- *Всякая п.р.ф. всюду определена.*
- *Если функция f получена из п.р.ф. с применением операций суперпозиции или примитивной рекурсии, то функция f является п.р.ф.*
- *Все п.р.ф. интуитивно вычислимы.*



Пример

- Рассмотрим функцию

$$g(x_1, \dots, x_m) = 1$$

для любых $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{N}$

- 
- Эта функция может быть получена суперпозицией из простейших функций.

$$g(x_1, \dots, x_m) = S(O(U_1^n(x_1, \dots, x_m))) = 1$$



Пример

- Покажем, что функция суммы

$$f(x, y) = x + y$$

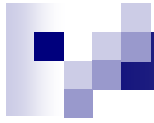
примитивно рекурсивна.

- 
- Действительно,

$$f(x, 0) = x = U_1^1(x) = g(x)$$

$$\begin{aligned} f(x, y + 1) &= x + y + 1 = f(x, y) + 1 = \\ &= S(f(x, y)) = h(x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

- где $h(x, y, z) = S(U_3^3(x, y, z))$



- Поскольку функции g и h являются п.р., то и функция f является п.р.ф.



Пример

- Покажем, что функция $sg(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1, x > 0 \end{cases}$ является п.р. Представим функцию в виде примитивной рекурсии

$$sg(0) = 0$$

$$sg(x + 1) = S(O(sg(x))) = h(x, sg(x))$$

где

$$h(x, y) = S(O(U_2^2(x, y)))$$



Теорема.

- Пусть n -арная функция g п.р. Тогда функции f , и определенные следующим образом

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{x_n} g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, i)$$
$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, i)$$

также примитивно рекурсивны.



Доказательство.

■ Из условия теоремы следует, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y+1) &= \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) + g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y+1) \end{aligned}$$



- Следовательно, функция f строится с помощью примитивной рекурсии из п.р.ф.

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \text{ и}$$

$$h(x_1, \dots, x_n, y, z) = z + g(x_1, \dots, x_{n-1}, y + 1)$$

Поэтому функция f п.р. Для функции u доказательство аналогичное.



Пример.

- Пусть $g(x) = x$

- Тогда $\sum_0^y g(i) = 0 + 1 + \dots + y = \frac{y(y+1)}{2}$

- Поскольку функция $g(x) = x$
п.р., то по предыдущей теореме
функция

$$f(y) = \frac{y(y+1)}{2}$$

также является п.р.



Теорема.

- Если $f(x_1, \dots, x_n)$ п.р.ф., то

$$g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

также п.р.ф.

(Операция введения фиктивных переменных).

- 
- Если $f(x_1, \dots, x_n)$ п.р.ф., то

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$$

также п.р.ф.

(Операция перестановки
переменных).

- 
- Если $f(x_1, \dots, x_n)$ п.р.ф., то

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n-1})$$

также п.р.ф.

(Операция отождествления
переменных)



Доказательство.

- Докажем первое утверждение. Новая функция представима в виде суперпозиции п.р.ф.

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \\ &= f(U_1^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, U_n^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})) \end{aligned}$$