

1 目的

デジタルマルチメータで測定した抵抗器の測定結果に、1 次式 ($y = ax + b$) の最小 2 乗法と実験標準偏差の誤差処理を実際に適応することで、これらの誤差処理方法を理解することを目的とする。

2 原理

[1] もし今回は原理として §2.1 で 1 次式 ($y = ax + b$) の最小 2 乗法の式を導出し、§2.2 で実験標準偏差の式を導出したものを示す。

2.1 1 次式 ($y = ax + b$) の最小 2 乗法

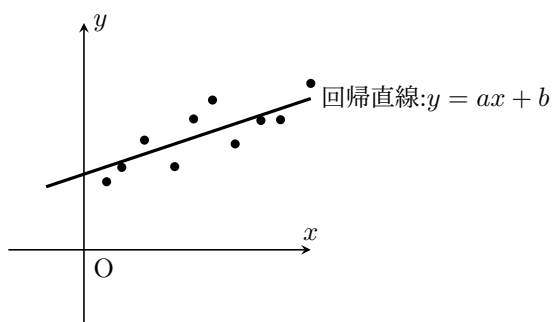


図 2.1: 散布図（相関している）の例グラフ

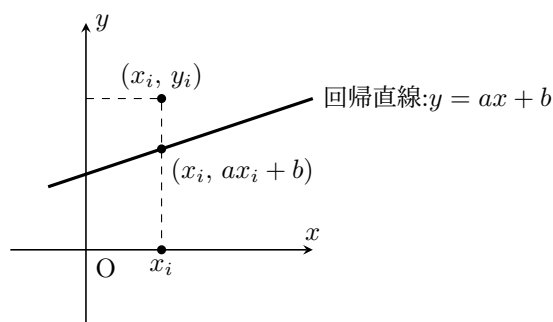


図 2.2: 回帰直線とあるデータの誤差を示すグラフ

図 2.1 のような実験結果の散布図が与えられて、その散布図にある程度相関があるとき、このデータを表す実験式として、

$$y = ax + b \quad (2.1)$$

がある。これを「y の x への回帰直線」と言い、式 2.1 の係数 a と b はそれぞれ最小 2 乗法から求めることができる。図 2.2 において、ある実験データ (x_i, y_i) の点と、回帰直線上の点 $(x_i, ax_i + b)$ の y 座標の差は

$$y_i - (ax_i + b) \quad (2.2)$$

となり、式 2.2 の 2 乗の総和を L とおくと、

$$L = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (2.3)$$

という式が成り立つ。このとき、式 2.3 の a と b を変数（それ以外を定数）と見て、L を最小になるように a と b を定める方法を最小 2 乗法という。L が最小になるとき、

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0 \quad (2.5)$$

となる。最初に、式 2.4 に式 2.3 を代入して偏微分を行い、式変形をしていくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \times \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \times (-x_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) = 0 \quad \text{より} \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 0 \\ \therefore a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \cdots \textcircled{1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。同様に、式 2.5 に式 2.3 を代入して偏微分を行い、式変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b} \times \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \times (-1) = 0 \quad \text{より} \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n 1 - \sum_{i=1}^n y_i &= 0 \\ \therefore a \sum_{i=1}^n x_i + nb &= \sum_{i=1}^n y_i \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。式 2.6 の①と②は a と b を未知数とする非同次の 2 元連立 1 次方程式より、これを行列とベクト

ルの積の形にまとめると、

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \dots \textcircled{1} \\
 & \textcircled{1} \text{の両辺に } \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}^{-1} \text{を左からかけると、} \\
 & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \tag{2.7} \\
 & = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} n & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix} \dots \textcircled{2} \\
 & \left(\text{ただし、行列式 } \Delta = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = n^2 \sigma_x^2 \neq 0 \right)
 \end{aligned}$$

となる。式 2.1 の係数 a は式 2.7 の $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned}
 a & = \frac{1}{\Delta} \left(n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i \right) \dots \textcircled{1} \\
 & \textcircled{1} \text{の式において、} \sum_{i=1}^n x_i \text{を } n\bar{x} \text{とし、} \sum_{i=1}^n y_i \text{を } n\bar{y} \text{とすると、} \\
 & = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - n^2 \bar{x} \bar{y}}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\
 & = \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} \right)}{n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right)} \dots \textcircled{2} \tag{2.8} \\
 & \text{このとき } n^2 \text{を約分した}\textcircled{2} \text{の分子を } \sigma_{xy} \text{とし、分母を } \sigma_x^2 \text{とすると、} \\
 & = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

という形で求められる。次に、式 2.1 の係数 b は式 2.6 の②から求められる。②の両辺を n で割ると、

$$a \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.9)$$

$$\therefore b = \bar{y} - a\bar{x}$$

となり、係数 b を求めることができる。

2.2 実験標準偏差

[2][3] 最初に、ある実験データの平均を \bar{x} とし、個々のデータ x_i (i 番目の測定値)、データ数を n としたとき、

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.10)$$

標準偏差という式がある。これは、 n 個のデータからなる母集団（対象としている集合の全要素から得られる数値全体のデータの集まり）の偏りを表す指標のことである。しかし、標準偏差 σ は実験標準偏差 s と違って、推測統計ではない。そのため、実験標準偏差 s を示すことができない。そもそも、実験標準偏差 s は、 x_i の i 番目の測定値、 \bar{x} を平均値、 n をデータ数とすると、

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.11)$$

という式である。この式は、先ほど述べた推測統計という母集団から抽出した標本により、母集団を推定する時に使う。また、実験標準偏差 s の根号を取り除いた式として不偏分散 s_2 という式がある。不偏分散とは、実験標準偏差 s と同じく推測統計であり、標準偏差 σ の期待値（これが分かると、その分布の平均となる値が分かる）が母分散に一致するように標本分散の算出式に $n/(n-1)$ をかけたものである。これは、標本標準偏差は母集団標準偏差よりも小さくなってしまいうことから、 $n/(n-1)$ をしている。これらの行操作を式に表すと、

$$\begin{aligned} & \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。

3 実験

今回の実験では、最初に実験標準偏差を検討するために、抵抗器 R_1 を 60 個測った。次に、1 次式の最小 2 乗法を検討するために、抵抗器 $R_1 \sim R_6$ をそれぞれ 1 回ずつ測った。

3.1 実験方法

以下のような手順で実験を行った。

3.1.1 実験標準偏差

- (1) 最初に、デジタルマルチメータの電源スイッチが「OFF」になっていることを確認してから、電源プラグを差し込んだ。
- (2) デジタルマルチメータの電源を「ON」にした。
- (3) INPUT に、テスト棒を差し込んだ。
- (3) FILTER ボタンを押して、画面から「FILTER」表記が消えていることを確認した。
- (4) EXTRIG ボタンを押してから、TRIG ボタンを押した。
- (5) $\Omega 2$ ボタンを押して、抵抗を測るモードにした。
- (6) RANGE ボタンを使い、「OHM」レンジにした。
- (7) デジタルマルチメータに差し込んだテスト棒を用いて、抵抗器 R_1 を 60 個測った。(このとき、測り次第データをノートに記録した。)

3.1.2 1 次式の最小 2 乗法

- (1) 実験標準偏差用の実験データを集め終えた後に、各班の抵抗器をそれぞれ 1 つずつ適当に取った（自班と合わせて合計で 6 個）。
- (2) 実験標準偏差の時と同様に、デジタルマルチメータで抵抗器 $R_1 \sim R_6$ を測った。(このとき、測り次第データをノートに記録した。)

3.2 実験機器

実験で使用した機器を以下の表 3.1 に示す。

表 3.1: 使用機器

使用機器	レポート内の記号	規格・許容差	管理番号	製造会社
6-1/2 デジタルマルチメータ		2000	L96-006697	KEITHLEY
リード線形抵抗器 (4 線)	R_1	$110 \Omega \cdot \pm 5$		
リード線形抵抗器 (4 線)	R_2	$120 \Omega \cdot \pm 5$		
リード線形抵抗器 (4 線)	R_3	$130 \Omega \cdot \pm 5$		
リード線形抵抗器 (4 線)	R_4	$150 \Omega \cdot \pm 5$		
リード線形抵抗器 (4 線)	R_5	$160 \Omega \cdot \pm 5$		
リード線形抵抗器 (4 線)	R_6	$180 \Omega \cdot \pm 5$		

4 実験結果

今回の実験では、§3.1 にあるように 2 つの誤差処理を検討するために与えられた抵抗器 R を測った。このときの測定結果を §3.1 と同様に、それぞれの誤差処理ずつに章分けして示す。

4.1 実験標準偏差

§3.1 にあるように、抵抗器 R_1 60 個の測定結果を表 4.1 に示す。表 4.1 の測定抵抗値の平均値 \bar{x} は 110.94Ω である。表 4.1 の測定抵抗と平均値を比較すると、6,22,26,47,51,55.56 回目では約 112Ω であり平均値 \bar{x} より約 1Ω 高い結果となった。

表 4.1: 抵抗器 R_1 の測定結果

データ数 : n	測定抵抗 : R_1/Ω	データ数 : n	測定抵抗 : R_1/Ω
1	111.3373	2	111.2384
3	110.9289	4	110.9608
5	110.1471	6	112.1501
7	110.0091	8	110.1586
9	109.7316	10	110.9134
11	109.8568	12	110.1689
13	110.6910	14	110.5940
15	110.4368	16	111.3552
17	110.9869	18	110.1503
19	110.6759	20	110.2279
21	110.6109	22	112.0148
23	111.6734	24	110.3216
25	110.4937	26	112.1341
27	113.5877	28	111.5359
29	110.6828	30	109.8603
31	110.1884	32	110.0415
33	111.5038	34	110.3065
35	110.2803	36	109.7902
37	111.1231	38	110.7709
39	111.0797	40	111.6174
41	111.2432	42	111.1656
43	110.7212	44	110.7891
45	111.1750	46	111.2286
47	112.2869	48	109.8453
49	110.8396	50	111.2611
51	112.0811	52	111.7093
53	111.4302	54	110.3345
55	112.2810	56	112.3754
57	110.5903	58	111.9212
59	111.3358	60	109.1929

次に、表 4.1 をもとに作成したヒストグラムを図 4.1 として示す。図 4.1 の横軸は、表 4.1 の測定抵抗 R_1 より最大値 R_{max} (113.5877Ω) と最小値 R_{min} (109.1929Ω) の間に分布している抵抗値を 10 等分したものである。縦軸は、横軸のそれぞれの階級ごとにどのくらい抵抗器があるかを示す。

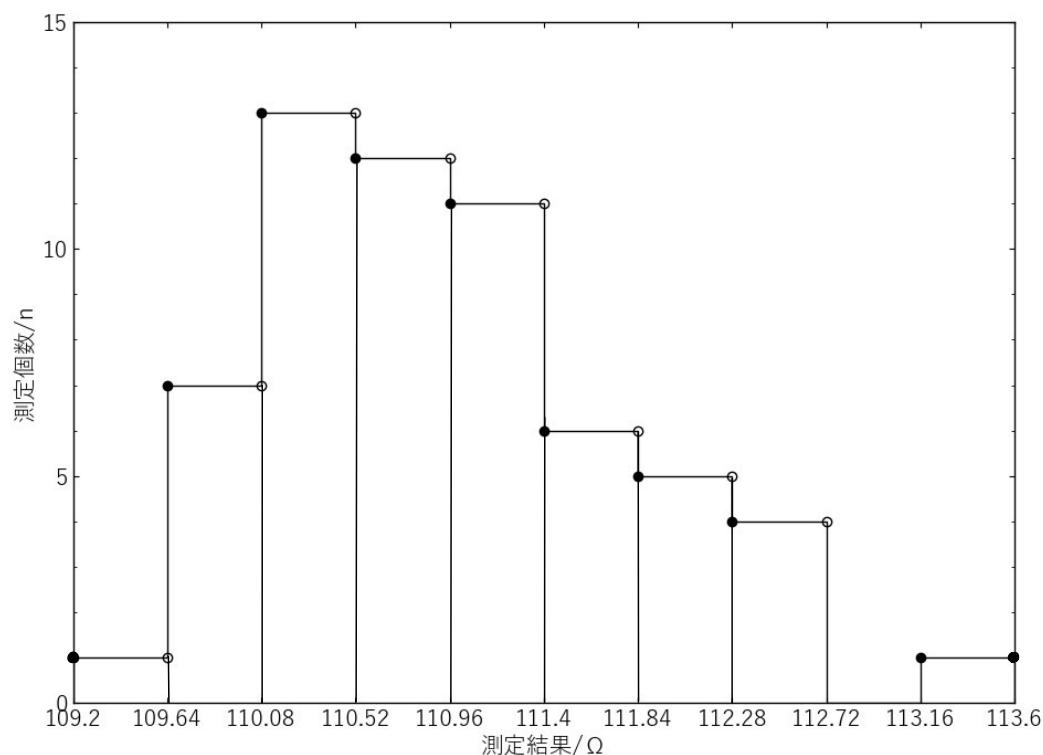


図 4.1: 抵抗器 R_1 の測定結果の分布

最後に、実験標準偏差 s_1 を関数電卓から求めた値と、図 4.1 のヒストグラムから計算したときの実験標準偏差 s_2 の値を比較する。実験標準偏差 s を求める式は、

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.1)$$

である。これを関数電卓を用いて計算を行った結果、

$$s_1 = 0.84384 \Omega \quad (4.2)$$

であった。次に、図 4.1 のヒストグラムから実験標準偏差 s_2 の近似値を求める。実験標準偏差 s_2 を求める式は、

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{10} I_j (\sigma_j - \bar{x})^2} \quad (4.3)$$

である。ここで $j = 1, 2, 3, \dots, 10$ 、 \bar{x} は図 4.1 の測定抵抗 R_1 の平均値、 I_j はある j 区間目の測定個数 n 、 σ_j はある j 区間における平均値、総和記号の上が 10 なのは、図 4.1 のように今回の実験データを 10 等分にしたためである。式 4.3 の式を関数電卓の STAT 機能を用いて計算すると、

$$s_2 = 0.84339 \, \Omega \quad (4.4)$$

である。 s_1 と s_2 の計算結果を比較すると、 s_2 は s_1 に比べて $0.0046 \, \Omega$ ずれていることがわかる。このことから、ヒストグラムの度数から求める場合でも、有効数字 3 桁にするように数字を丸めれば同じ値になるため、近似値として求められていることが分かる。

4.2 1 次式の最小 2 乗法

§3.2 の実験機器にあるように、今回実験で使用した全ての抵抗器 R の許容差は $\pm 5\%$ である。そのため、表 4.2 の測定値 R が許容範囲 R_{ran} 内なら許容されることになる。

表 4.2: 実験で使用了抵抗器の許容差とその範囲

	抵抗器 : R/Ω	許容差	許容範囲 : R_{ran}/Ω	測定値 : R'/Ω
1	110	$\pm 5\%$	104.5~115.5	112.305
2	120	$\pm 5\%$	114~126	120.748
2	130	$\pm 5\%$	123.5~136.5	130.382
4	150	$\pm 5\%$	142.5~157.5	151.602
5	160	$\pm 5\%$	152~168	163.409
6	180	$\pm 5\%$	171~189	184.345

表 4.2 の許容範囲 R_{ran} と測定値 R' より、どの測定値 R' においても許容範囲内にあることが読み取れる。そのため、今回測定した値は抵抗器本来の値からわずかに離れているようなもの ($R_5 R_6$ 等) があるが、許されると考えられる。

次に、横軸にカラーコードの読み値、縦軸にデジタルマルチメータから読み取った測定結果をプロットしたものを図 4.2 として示す。また、式 2.8 と 2.9 より、傾き a と切片 b を関数電卓を用いて計算を行った結果、

$$a = 1.0427, \quad b = -3.9178 \quad (4.5)$$

となった。図 4.2 より読み取れることとして、目見当で引いた線と最小 2 乗法の線を比較するとプロットした点がほぼ一直線にあるため、目見当引くことができる範囲が狭くなるため、最小 2 乗法から求めて引いた線とほぼ一致している事が読み取れる。

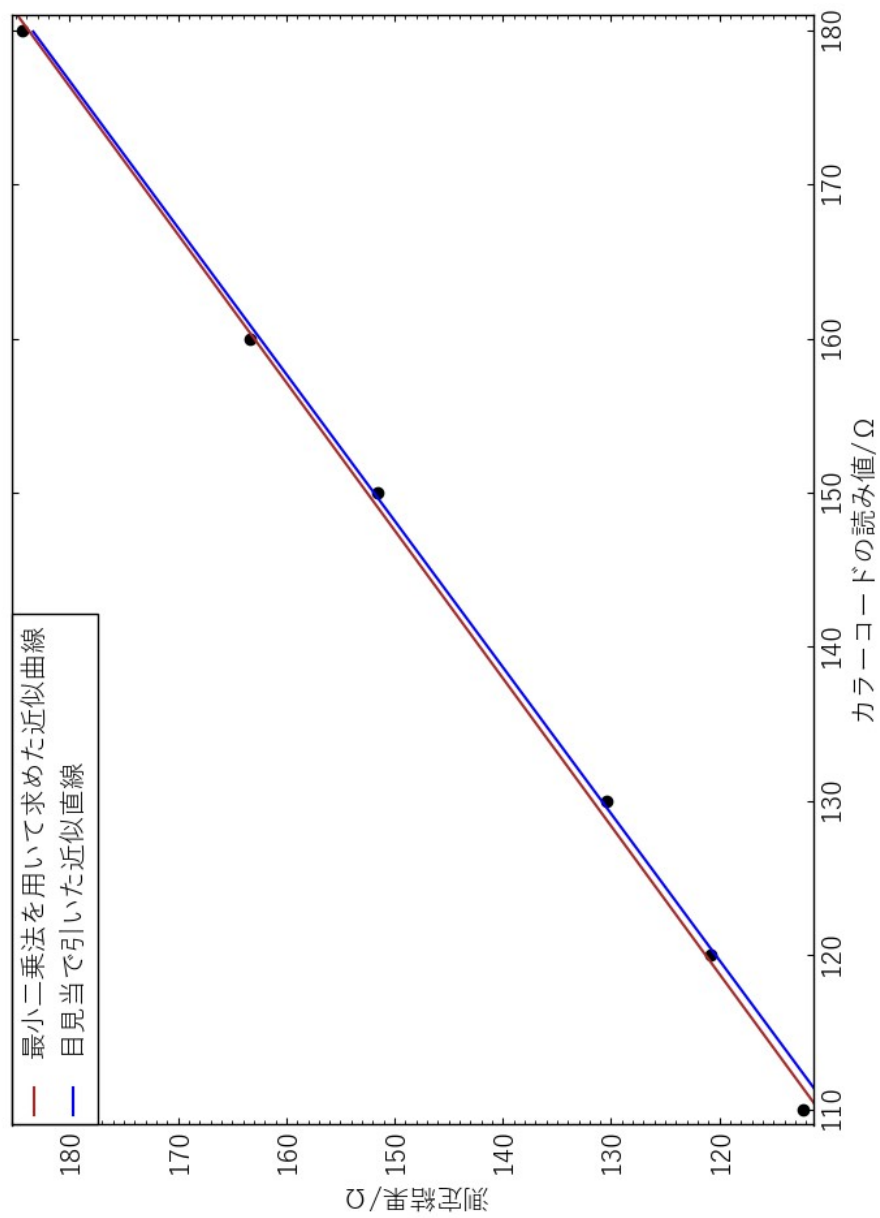


図 4.2: 目見当と計算による最小 2 乗法の関係図

5 まとめ

レポートをまとめることで、1 次式の最小 2 乗法と実験標準偏差の誤差処理を適応することができるようになったため、今回の目的は達成したと言える。

6 参考文献

- [1] 馬場 敬介、素晴らしく実力が付くと評判の統計学 キャンパス・ゼミ、マセマ出版社、平成 28 年 12 月 23 日、153 155・162・164・165
- [2] 宮川 雅己、統計技法、共立出版株式会社、1998 年 4 月 25 日、43・66
- [3] 三宅章彦、基礎数学シリーズ 7 統計学、株式会社培風館、1997 年 1 月 27 日、7・47・50