Narzędzia Obliczeniowe Fizyki projekt

Aproksymacja liczby π poprzez kolizje bloków

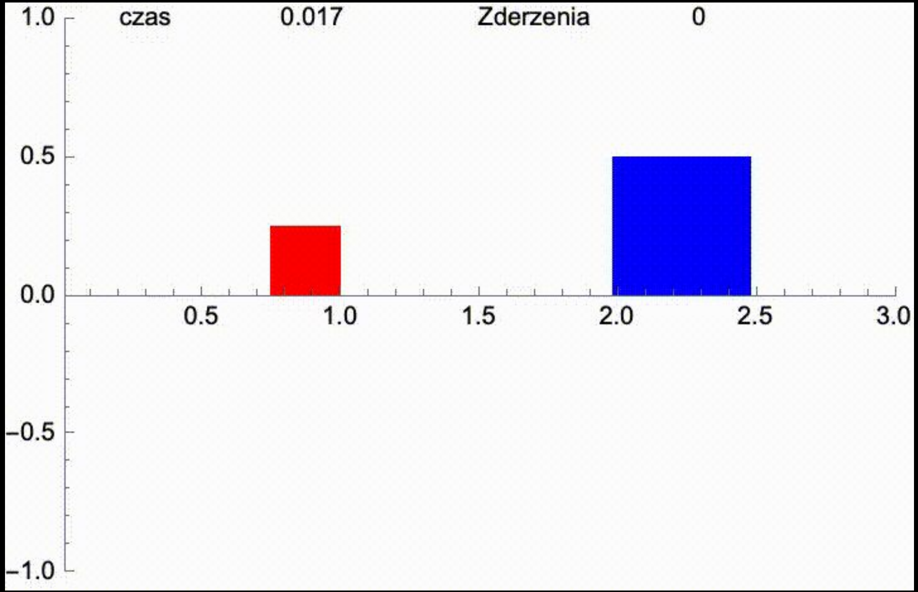
Adam Węglik, Michał Toczek, Mariusz Wilk, Michał Harasim

Zderzenia bloków

Wizualizacja

Wizualizacja pokazuje dwa przesuwające się bloki w przestrzeni, gdzie nie ma tarcia, a wszystkie zderzenia są doskonale sprężyste, dzięki czemu nie dochodzi do utraty energii.

Większy blok o masie m2 = 100^(d-1) (w dalszej części prezentacji m2=10)porusza się w stronę mniejszego o masie
m1 = 1. Animacja pokazuje, że mniejszy odbija się tam i z powrotem, dopóki nie przekieruje pędu dużego bloku na tyle, aby zmienić jego trajektorię.



Skąd się bierze π?

1. Zasada zachowania energii

Przyjmujemy że bloki mają odpowiednio masy $m1$, $m2$ oraz prędkości $v1$, $v2$.

Całkowita energia kinetyczna w każdym momencie jest równa:

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2)^2 = const$$

Skąd się bierze π?

2. Zasada zachowania pędu

Całkowity pęd dwóch bloków wynosi $m_1v_1 + m_2v_2$ i podobnie jak energia, jest on stały. W rzeczywistości drugi blok oddałby swój pęd do ściany podczas kolizji, natomiast w naszych założeniach jest to, że ściana ma nieskończoną masę. Stąd, taki transfer nie poruszy ściany.

Skąd się bierze π?

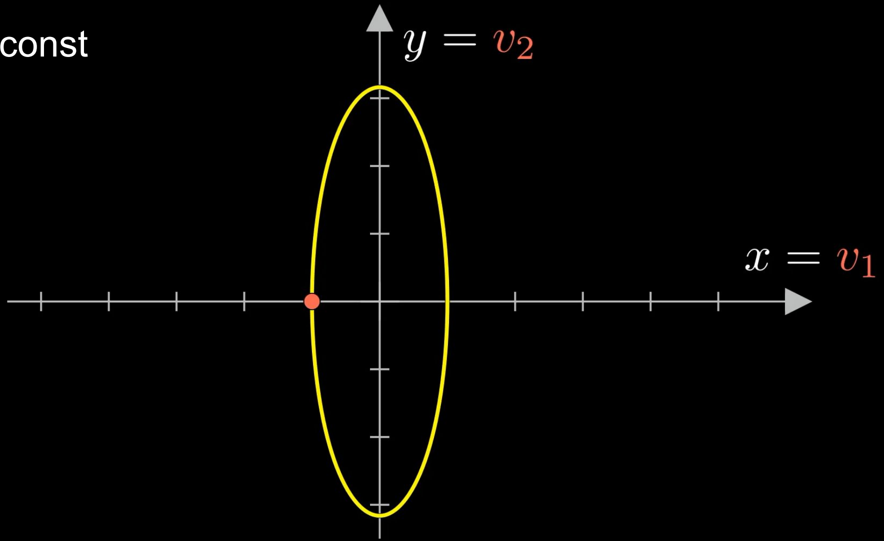
Mamy więc 2 niewiadome oraz dwa równania. Spróbujmy narysować wykres, żeby zwizualizować sobie te równania. Na początek zajmijmy się równaniem energii.

Skąd się bierze π?

Narysujmy wykres, gdzie $x = v_1$, a $y = v_2$.

Każdy punkt na elipsie odpowiada parze prędkości, która spełnia równanie, więc w każdym punkcie jest taka sama energia kinetyczna.

$\frac{1}{2} m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2(v_2)^2 = const$



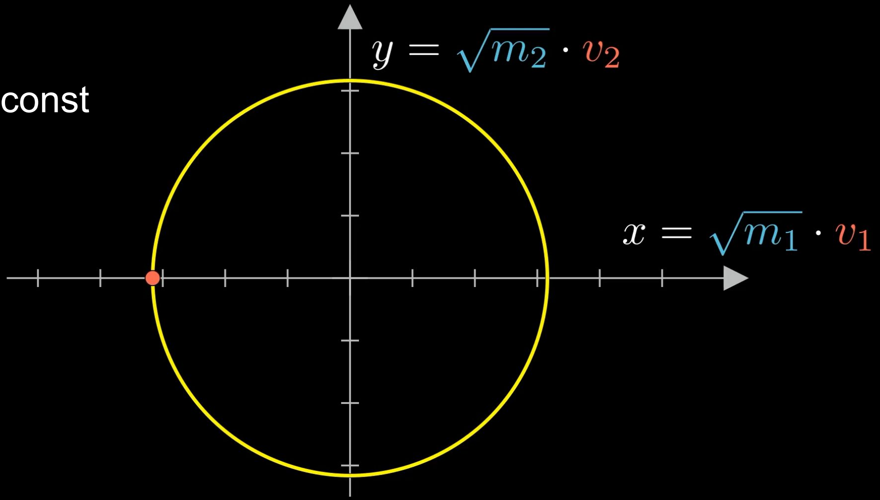
Skąd się bierze π?

Wiemy, że poszukujemy π. Stwórzmy z elipsy okręg.

Ustalmy $x = v_1 * \sqrt{m_1}$, $y = v_2 * \sqrt{m_2}$

$\frac{1}{2} m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2(v_2)^2 = const$

$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) = const$



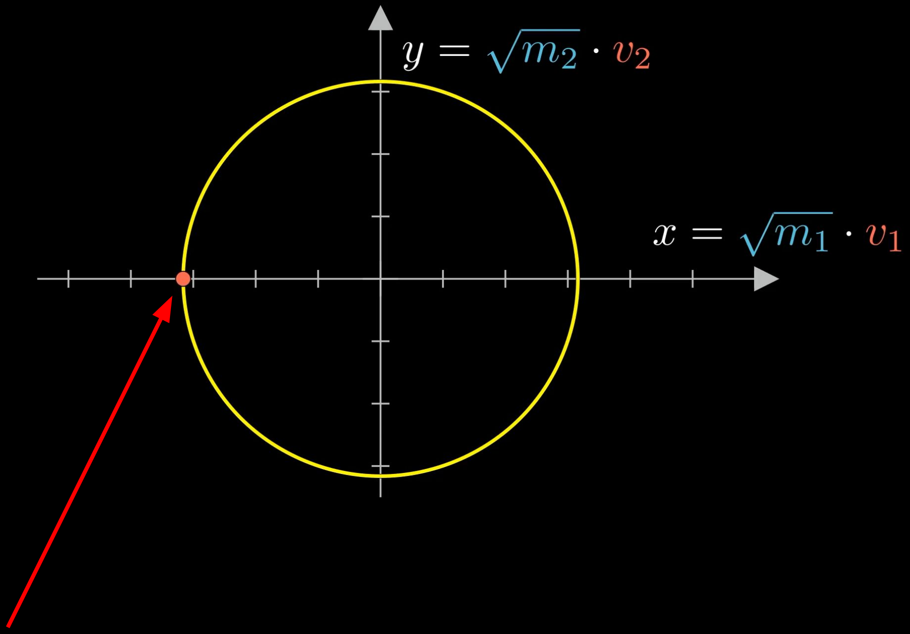
Stan przed kolizją bloków

$x < 0$ - większy blok przesuwa się w lewo

$y = 0$ - mniejszy blok nie przesuwa się w ogóle

$$\tfrac{1}{2} m_1 (v_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 (v_2)^2 = \text{const}$$

$$\tfrac{1}{2} (x^2 + y^2) = \text{const}$$



Stan zaraz po kolizji bloków:

$x < 0$ - ale bliżej zera, większy blok spowalnia

$y < 0$ - mniejszy bloczek zaczyna przesuwać się w kierunku ściany

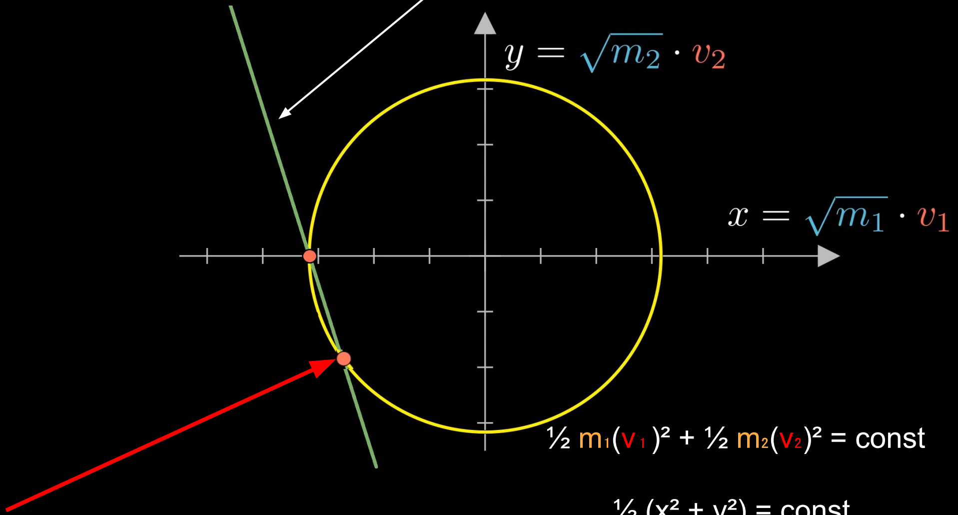
Wiemy że kolejny punkt znajduje się gdzieś na okręgu, ale żeby dowiedzieć się gdzie dokładnie, musimy utworzyć linię posługując się zasadą zachowania pędu. Nachylenie linii będzie zawsze takie samo, jednak jej położenie zależy od tego jaki jest stały pęd. Linia ta reprezentuje wszystkie pary prędkości które dają ten sam pęd.

okręg - energia

linia - pęd

nachylenie = $-(\sqrt{m_1}/\sqrt{m_2})$

$x\sqrt{m_1} + y\sqrt{m_2} = \text{const}$



$\frac{1}{2} m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2(v_2)^2 = \text{const}$

$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{const}$

Stan zaraz po kolizji ze ścianą

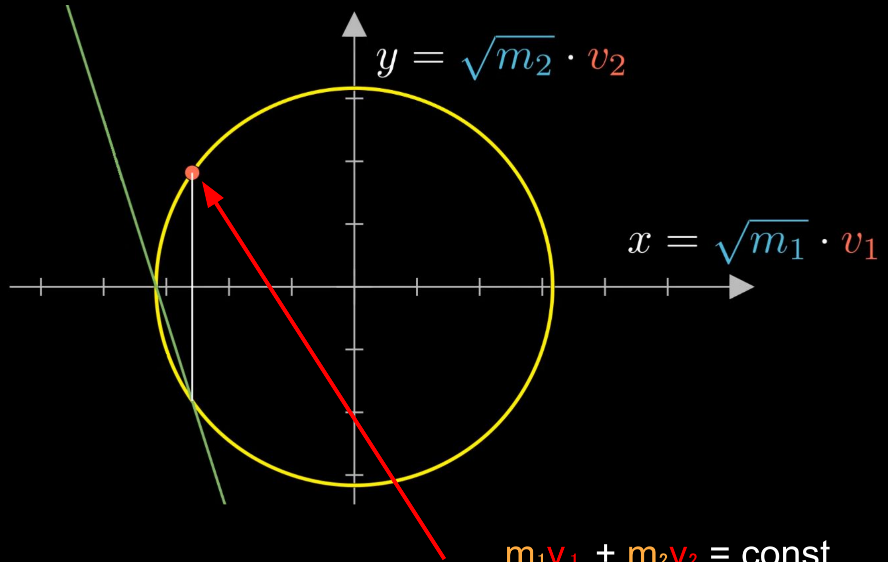
$x < 0$ - w dokładnie tym samym miejscu co poprzednio

$y > 0$ - mniejszy bloczek zaczyna przesuwać się w kierunku większego bloku

Mamy zwizualizowane już wszystkie możliwe stany w jakich może się znaleźć nasza symulacja.

$$\frac{1}{2} m_1(v_1)^2 + \frac{1}{2} m_2(v_2)^2 = \text{const}$$

$$\frac{1}{2} (x^2 + y^2) = \text{const}$$

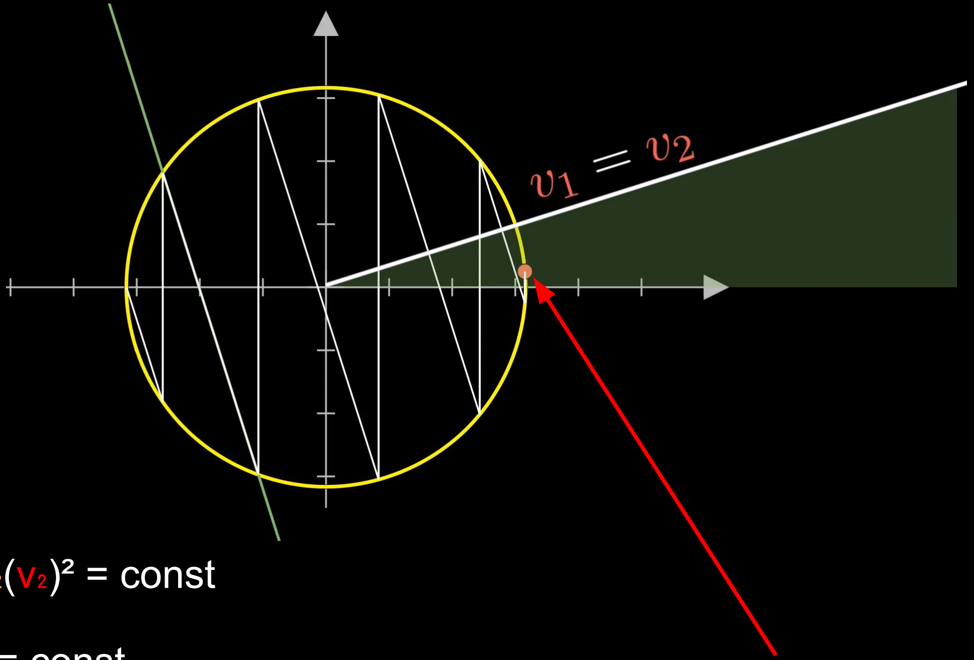


$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const}$$

$$x\sqrt{m_1} + y\sqrt{m_2} = \text{const}$$

Warunek stopu

Kończymy symulację w momencie, kiedy zarówno x i y > 0 - poruszają się w prawą stronę, oraz większy blok porusza się szybciej



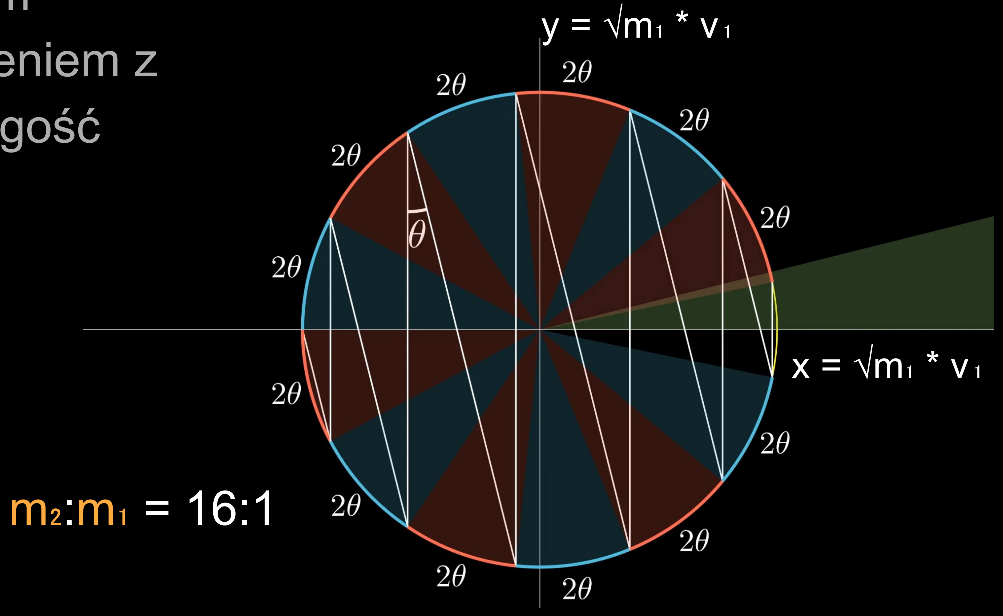
$$\tfrac{1}{2} m_1(v_1)^2 + \tfrac{1}{2} m_2(v_2)^2 = \text{const}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const}$$

$$x\sqrt{m_1} + y\sqrt{m_2} = \text{const}$$

Ale gdzie to π?

Podzielmy sobie teraz nasz okrąg na łuki. Możemy zauważyć, że są one równe. Jeśli przyjmiemy że kąt pomiędzy odbiciem mniejszego bloku od ściany, a zderzeniem z większym blokiem jest równy θ to długość łuku będzie równa dokładnie 2θ (w radianach)

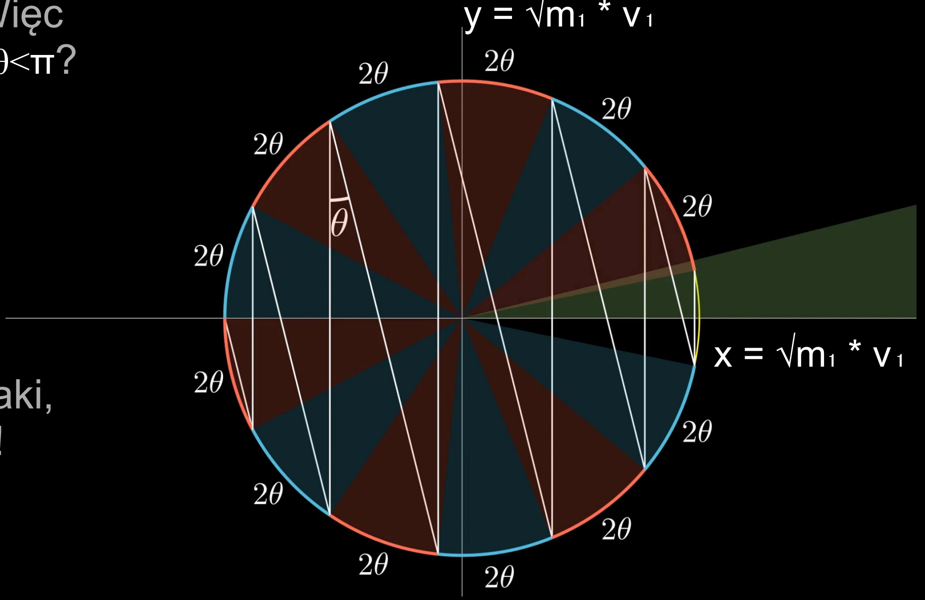


Ale gdzie to π?

Każda nowa kolizja będzie tworzyła nowy łuk o długości 2θ ale w pewnym momencie ich łączna długość będzie > niż obwód okręgu (u nas 2π). Więc jaka jest maksymalna liczba kolizji N taka żeby $N\theta<\pi$?

- **312 · (0.01) = 3.12 < π**
- **313 · (0.01) = 3.13 < π**
- **314 · (0.01) = 3.14 < π**
- **315 · (0.01) = 3.15 > π**
- **316 · (0.01) = 3.16 > π**

Oznacza to, że gdyby stosunek mas bloków był taki, że $\theta = 0.01$ to bloki zderzą się dokładnie **314 razy**!

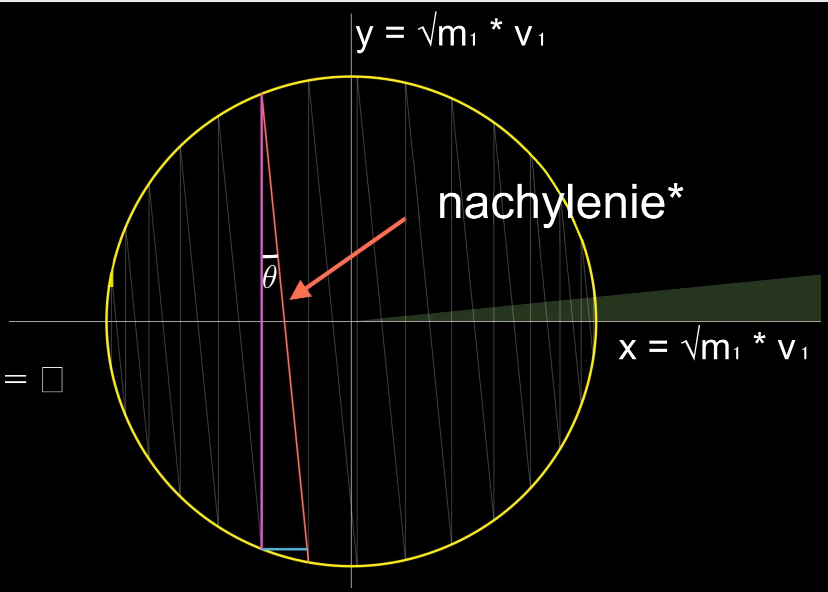


$m_2 : m_1 = 16:1$

Ale gdzie to π?

Przyjmijmy że mamy różnicę mas rzędu **100:1**.
Pamiętając, że $\mathbf{x\sqrt{m_1} + y\sqrt{m_2} = const}$
oraz **linia** = $\mathbf{-\sqrt{m_1} / \sqrt{m_2}}$, wychodzi nam, że
tan(θ) = □, a z tego: **θ = arctan(□)**.

tan(θ) = □



Uogólniając: $\boldsymbol{\theta = \arctan(\sqrt{m_2}/\sqrt{m_1})}$

nachylenie* = $-\sqrt{m_1} / \sqrt{m_2} = -10$

$m_2 : m_1 = 100:1$

Ale gdzie to π?

Policzmy teraz sobie kilka wartości używając tej tej formuły.

Okazuje się, że wartość arctg. jest praktycznie taka sama jak m_2/m_1.

Na przykład arctan(1/100) która odpowiada $m_2 = 10000$ jest strasznie blisko 1/100. Tak blisko że możemy jej użyć w tabelce, którą prezentowaliśmy 2 slajdy temu.

Przypomnijmy szukamy jak największego N takiego że: $N\theta<\pi$, gdzie N to liczba kolizji a za razem liczba π.

- $312 \cdot (0.0099996667) = 3.1198960104 < \pi$
- $313 \cdot (0.0099996667) = 3.1298956771 < \pi$
- $314 \cdot (0.0099996667) = 3.1398953438 < \pi$
- $315 \cdot (0.0099996667) = 3.1498950105 > \pi$
- $316 \cdot (0.0099996667) = 3.1598946772 > \pi$

$m_2 : m_1$	**wzór θ**	**wartość θ**
$m_2 : m_1$	**arctan ($\sqrt{m_1} / \sqrt{m_2}$)**	
$10^2 : 1$	**arctan(□)**	0.0996676524…
$10^4 : 1$	$\arctan(10^{-2})$	0.00999966…
$10^6 : 1$	$\arctan(10^{-3})$	0.00099999966…
$10^8 : 1$	$\arctan(10^{-4})$	0.000099999…
$10^{10} : 1$	$\arctan(10^{-5})$	0.0000099999…

$m_2:m_1 = 10^6 : 1$

$3139 \cdot (0.0009999997) = 3.1389990583 < \pi$

$3140 \cdot (0.0009999997) = 3.1399990580 < \pi$

$3141 \cdot (0.0009999997) = 3.1409990577 < \pi$

$3142 \cdot (0.0009999997) = 3.1419990574 > \pi$

$3143 \cdot (0.0009999997) = 3.1429990571 > \pi$

Implementacja w Wolfram Mathematica

Implementacja obejmuje obliczanie kolejnych zderzeń między klockami, a także ich animowanie.

Zderzenia koralików na okręgu

Wizualizacja

Wizualizacja pokazuje odbijające się od siebie koraliki, ze stosunkiem mas podobnym jak w przypadku klocków.

Warunki tarcia oraz elastyczności pozostają bez zmian.