

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

## Báo cáo bài thực hành 2

Đề tài: Hồi quy Softmax cho bài toán nhận diện chữ số viết tay

Môn học: Nhập môn học máy

Sinh viên thực hiện:

Tô Hữu Danh (23127336)

Nguyễn Đăng Hưng (23127050)

Lê Phú Cường (23127164)

Nguyễn Bá Đăng Khoa (23127392)

Giáo viên hướng dẫn:

Thầy Võ Nhật Tân

Ngày 11 tháng 12 năm 2025



# Mục lục

<b>1 Mô tả và tiền xử lý dữ liệu</b>	<b>1</b>
1.1 Mô tả dữ liệu . . . . .	1
1.1.1 Cấu trúc tập tin . . . . .	1
1.1.2 Định dạng nội tại và Metadata (Internal Format and Metadata) . . . . .	1
1.1.3 Đặc tả chi tiết dữ liệu . . . . .	1
1.2 Tiền xử lý dữ liệu . . . . .	2
1.2.1 Thu thập và đọc dữ liệu thô (Data Loading) . . . . .	2
1.2.2 Chuẩn hoá và trích xuất đặc trưng (Feature Extraction) . . . . .	3
1.2.3 Phân chia dữ liệu (Data Splitting) . . . . .	3
<b>2 Nền tảng toán học và triển khai mô hình</b>	<b>5</b>
2.1 Nền tảng toán học . . . . .	5
2.1.1 Mô hình Softmax Regression . . . . .	5
2.1.2 Hàm mất mát (Loss Function) . . . . .	5
2.1.3 Giải thuật tối ưu Gradient Descent . . . . .	6
2.1.4 Quy trình huấn luyện mô hình . . . . .	7
2.1.5 Quy trình suy diễn và dự đoán . . . . .	9
<b>3 Thiết kế các feature vector</b>	<b>10</b>
3.1 Feature vector 1: Đặc trưng cường độ điểm ảnh (Raw Pixel Intensity) . . . . .	10
3.1.1 Biểu diễn vector hóa (Vectorization) . . . . .	10
3.1.2 Chuẩn hoá dữ liệu (Data Normalization) . . . . .	10
3.2 Feature vector 2: Trích xuất đặc trưng biên (Edge feature) . . . . .	11
3.2.1 Nguyên lý toán học của thuật toán Canny [2] . . . . .	11
3.2.2 Kỹ thuật phân ngưỡng trễ (Hysteresis Thresholding) . . . . .	11
3.2.3 Quy trình tiền xử lý và biểu diễn đặc trưng . . . . .	12
3.2.4 Ý nghĩa . . . . .	12
3.3 Feature vector 3: Giảm dimension bằng block averaging . . . . .	13
<b>4 Đánh giá và phân tích kết quả</b>	<b>16</b>
4.1 Kết quả dự đoán của mô hình với từng loại đặc trưng . . . . .	16

4.2 So sánh giữa các đặc trưng với nhau . . . . .	17
4.3 Phân tích chi tiết qua ma trận nhầm lẫn (Confusion Matrix) . . . . .	20
<b>5 Mô tả ứng dụng</b>	<b>25</b>
<b>6 Kết luận và nhận định</b>	<b>27</b>
6.1 Tổng kết kết quả thực nghiệm . . . . .	27
6.2 Nhận định và phân tích . . . . .	27
6.3 Cải tiến đề xuất . . . . .	28
<b>7 Tài liệu tham khảo</b>	<b>29</b>

## Danh sách bảng

## Danh sách hình vẽ

1	Quy trình trích xuất đặc trưng Block Averaging: từ ảnh chữ số gốc $28 \times 28$ sang ảnh đã được khử chiều $7 \times 7$ và vector đặc trưng chiều 49. . . . .	15
2	Biểu đồ so sánh các chỉ số Accuracy, Precision, Recall và F1-score giữa các phương pháp trích xuất đặc trưng . . . . .	16
3	So sánh độ chính xác (Accuracy) giữa các đặc trưng . . . . .	17
4	So sánh chỉ số Macro F1-score giữa các đặc trưng . . . . .	18
5	So sánh Macro Precision giữa các đặc trưng . . . . .	19
6	So sánh Macro Recall giữa các đặc trưng . . . . .	20
7	Confusion matrix chuẩn hoá - Feature PIXEL . . . . .	21
8	Confusion matrix chuẩn hoá - Feature BLOCK_AVG . . . . .	22
9	Confusion matrix chuẩn hoá - Feature EDGE . . . . .	23
10	Ảnh minh họa cho ứng dụng web demo . . . . .	25

# 1 Mô tả và tiền xử lý dữ liệu

## 1.1 Mô tả dữ liệu

Hệ thống được xây dựng để vận hành trên bộ cơ sở dữ liệu MNIST [1], một tập dữ liệu chuẩn mực trong lĩnh vực thị giác máy tính bao gồm các hình ảnh chữ số viết tay. Dữ liệu được tổ chức lưu trữ cục bộ trong thư mục **data** và được truy xuất thông qua các đường dẫn tệp tịnh được định nghĩa trong cấu hình hệ thống.

### 1.1.1 Cấu trúc tập tin

Bộ dữ liệu bao gồm bốn tệp nhị phân riêng biệt theo định dạng IDX, tương ứng với hai tập dữ liệu con: tập huấn luyện (training set) và tập kiểm thử (test set). Cụ thể bao gồm:

- **Tập huấn luyện (train):** Bao gồm tệp hình ảnh (**train-images.idx3-ubyte**) và tệp nhãn tương ứng (**train-labels.idx1-ubyte**).
- **Tập kiểm thử (test):** Bao gồm tệp hình ảnh (**t10k-images.idx3-ubyte**) và tệp nhãn tương ứng (**t10k-labels.idx1-ubyte**).

### 1.1.2 Định dạng nội tại và Metadata (Internal Format and Metadata)

Dữ liệu không được lưu trữ dưới dạng các tệp ảnh thông thường (như PNG hay JPEG) mà dưới dạng chuỗi byte (byte stream). Quá trình đọc dữ liệu được thực hiện bằng cách giải mã (unpack) cấu trúc nhị phân của tệp header:

- **Số định danh (Magic Number):** Mỗi tệp bắt đầu bằng 4 byte đầu tiên chứa "magic number" để xác thực định dạng. Hệ thống kiểm tra giá trị này để đảm bảo tính toàn vẹn: giá trị 2049 xác định tệp chứa nhãn và giá trị 2051 xác định tệp chứa dữ liệu hình ảnh.
- **Thông tin kích thước:** Ngay sau magic number, header cung cấp thông tin về số lượng mẫu (size), số hàng (rows) và số cột (cols). Các thông số này được đọc thông qua module **struct** để thiết lập kích thước mảng dữ liệu chính xác.

### 1.1.3 Đặc tả chi tiết dữ liệu

Sau khi giải mã, dữ liệu được chuyển đổi thành các cấu trúc đại số tuyến tính để phục vụ tính toán:

- **Dữ liệu hình ảnh (Image Data):**

- **Kích thước gốc:** Mỗi mẫu dữ liệu thô sau khi đọc được tái cấu trúc (reshape) thành một ma trận hai chiều với kích thước cố định là  $28 \times 28$  pixel.
- **Kiểu dữ liệu:** Trong quá trình nạp vào bộ nhớ chính (RAM), các ma trận này được ép kiểu sang định dạng `numpy.uint8` (số nguyên không dấu 8-bit). Điều này đồng nghĩa mỗi điểm ảnh (pixel) mang một giá trị nguyên nằm trong khoảng [0, 255], đại diện cho độ đậm nhạt của nét viết.

- **Dữ liệu nhãn (Label Data):**

- Chứa các giá trị số nguyên tương ứng với chữ số trong hình ảnh.
- Hệ thống được cấu hình tham số `n_classes = 10`, xác định không gian đầu ra bao gồm 10 lớp phân loại (tương ứng các chữ số từ 0 đến 9).

## 1.2 Tiền xử lý dữ liệu

Quy trình xử lý dữ liệu được thiết kế theo mô hình đường ống (pipeline), bắt đầu từ việc đọc dữ liệu nhị phân thô, chuẩn hóa, trích xuất đặc trưng và cuối cùng là phân chia tập dữ liệu để phục vụ việc huấn luyện mô hình hồi quy Softmax.

### 1.2.1 Thu thập và đọc dữ liệu thô (Data Loading)

Dữ liệu đầu vào là bộ dataset MNIST được lưu trữ dưới định dạng tệp nhị phân IDX. Module `MnistDataloader` chịu trách nhiệm đọc và giải mã các tệp này.

- **Kiểm tra tính toàn vẹn:** Quá trình đọc tệp sử dụng thư viện `struct` để giải mã phần header. Hệ thống thực hiện kiểm tra "magic number" (số định danh tệp) để đảm bảo tính hợp lệ của dữ liệu: giá trị 2049 đối với tệp nhãn (label) và 2051 đối với tệp hình ảnh.
- **Định dạng dữ liệu ban đầu:** Dữ liệu hình ảnh được đọc dưới dạng mảng byte liên tục, sau đó được tái cấu trúc (reshape) thành các ma trận kích thước  $28 \times 28$  pixel.
- **Chuyển đổi dữ liệu:** Tại hàm `load_mnist_data`, dữ liệu thô được chuyển đổi sang định dạng `numpy.array` với kiểu dữ liệu `uint8` (số nguyên không dấu 8-bit) nhằm tối ưu hóa bộ nhớ lưu trữ trước khi bước vào giai đoạn xử lý đặc trưng.

### 1.2.2 Chuẩn hóa và trích xuất đặc trưng (Feature Extraction)

Giai đoạn này được thực hiện bởi lớp `FeatureExtractor`, bao gồm bước chuẩn hóa chung và ba chiến lược trích xuất đặc trưng riêng biệt nhằm đa dạng hóa đầu vào cho mô hình.

**Chuẩn hóa dữ liệu (Normalization):** Trước khi áp dụng bất kỳ thuật toán trích xuất nào, phương thức `_normalize` được áp dụng để chuyển đổi giá trị pixel từ thang đo số nguyên [0, 255] sang thang đo số thực [0.0, 1.0]. Phép toán này sử dụng kiểu dữ liệu float32 để đảm bảo độ chính xác tính toán.

**Các chiến lược trích xuất đặc trưng:** Hệ thống triển khai ba phương pháp trích xuất đặc trưng chính:

- **Đặc trưng điểm ảnh (Pixel Features):** Phương thức `get_pixel_features` thực hiện duỗi phẳng (flatten) ma trận ảnh  $28 \times 28$  thành vector đặc trưng một chiều có kích thước 784 ( $N \times 784$ ). Đây là phương pháp giữ nguyên toàn bộ thông tin gốc của ảnh.
- **Đặc trưng biên dạng (Edge Detection Features):** Phương thức `get_edge_features` sử dụng thuật toán Canny (qua thư viện OpenCV) để phát hiện các cạnh của chữ số. Các ngưỡng (threshold) được thiết lập với `min_val=100` và `max_val=200`. Kết quả là các vector đặc trưng đại diện cho cấu trúc hình học của chữ số, loại bỏ các chi tiết nền không cần thiết.
- **Đặc trưng trung bình khối (Block Averaging Features):** Phương thức `get_block_features` thực hiện giảm chiều dữ liệu bằng kỹ thuật gộp (pooling). Ảnh được chia thành các khối kích thước  $4 \times 4$  không chồng lấn, sau đó tính giá trị trung bình cho từng khối. Kỹ thuật này giảm kích thước vector đặc trưng từ 784 xuống còn 49 ( $N \times 49$ ), giúp giảm tải tính toán.

### 1.2.3 Phân chia dữ liệu (Data Splitting)

Sau khi trích xuất đặc trưng, dữ liệu được phân chia thành tập huấn luyện (training set) và tập kiểm định (validation set) thông qua hàm `train_val_split`.

- **Xáo trộn ngẫu nhiên (Shuffling):** Để đảm bảo tính khách quan và tránh hiện tượng mô hình học thuộc thứ tự dữ liệu, chỉ số dữ liệu được xáo trộn ngẫu nhiên với một `seed` cố định (42) nhằm đảm bảo kết quả có thể tái lập.
- **Tỷ lệ phân chia:** Dựa trên cấu hình hệ thống (CONFIG), 10% dữ liệu từ tập huấn luyện gốc

được tách ra để làm tập kiểm định (`val_split: 0.1`), phục vụ việc đánh giá chéo trong quá trình huấn luyện.

## 2 Nền tảng toán học và triển khai mô hình

### 2.1 Nền tảng toán học

#### 2.1.1 Mô hình Softmax Regression

Mô hình *Softmax Regression* được sử dụng để giải quyết bài toán phân loại đa lớp (*multi-class classification*) trên tập dữ liệu MNIST. Với một mẫu đầu vào được biểu diễn bởi vector đặc trưng  $x \in \mathbb{R}^d$  (trong đó  $d$  là số chiều của không gian đặc trưng), mô hình trước tiên tính toán điểm số tuyến tính (logits) tương ứng với  $K$  lớp thông qua phép biến đổi sau:

$$z = Wx + b.$$

Trong đó:

- $W \in \mathbb{R}^{K \times d}$  là ma trận trọng số;
- $b \in \mathbb{R}^K$  là vector bias;
- $z \in \mathbb{R}^K$  là vector điểm số.

Để chuyển các điểm số tuyến tính  $z$  thành một phân phối xác suất hợp lệ trên không gian nhãn, mô hình sử dụng hàm kích hoạt *softmax*. Xác suất để mẫu  $x$  thuộc lớp  $k$  được xác định bởi:

$$\hat{y}_k = P(y = k|x) = \text{softmax}(z_k) = \frac{e^{z_k}}{\sum_{j=1}^K e^{z_j}}.$$

Trong đó,  $z_k$  là điểm số ứng với lớp  $k$ , và mẫu số  $\sum_{j=1}^K e^{z_j}$  đảm bảo rằng tổng các xác suất bằng 1, tạo thành một phân phối xác suất chuẩn hóa trên  $K$  lớp.

#### 2.1.2 Hàm mất mát (Loss Function)

Để huấn luyện mô hình, ta sử dụng hàm mất mát *Cross-Entropy* nhằm đo lường mức độ khác biệt giữa phân phối xác suất dự đoán và nhãn thực tế. Đồng thời, nhằm hạn chế hiện tượng quá khớp (*overfitting*), một thành phần điều chỉnh L2 (*L2 Regularization*) được bổ sung vào hàm mất mát tổng quát. Cụ thể, hàm mất mát được định nghĩa như sau:

$$J(W, b) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K y_{i,k} \log \hat{y}_{ik} + \frac{\lambda}{2} \sum_l \sum_m W_{lm}^2.$$

Trong đó:

- $N$  là số lượng mẫu trong một batch;
- $y_{i,k}$  là thành phần của vector one-hot label (bằng 1 nếu mẫu  $i$  thuộc lớp  $k$ , ngược lại bằng 0);
- $\lambda$  (ký hiệu là `reg` trong mã nguồn) là hệ số điều chỉnh.

Trong biểu thức trên, hạng tử cross-entropy (hạng tử thứ nhất) thúc đẩy mô hình tối đa hóa xác suất dự đoán đúng, trong khi hạng tử điều chỉnh (hạng tử thứ hai) giúp giới hạn độ lớn của các trọng số, từ đó nâng cao khả năng tổng quát hóa của mô hình.

### 2.1.3 Giải thuật tối ưu Gradient Descent

Quá trình huấn luyện mô hình được thực hiện bằng thuật toán *Mini-batch Gradient Descent*. Ở mỗi bước lặp, ta tính gradient của hàm mất mát đối với các tham số  $W$  và  $b$ . Nhờ đặc tính giải tích thuận lợi của hàm softmax khi kết hợp với hàm mất mát cross-entropy, các biểu thức đạo hàm thu được có dạng đơn giản và hiệu quả như sau:

$$\frac{\partial J}{\partial z} = \hat{y} - y, \quad \frac{\partial J}{\partial W} = \frac{1}{N} X^T (\hat{y} - y) + \lambda W, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = \frac{1}{N} \sum (\hat{y} - y).$$

Trong đó  $X \in \mathbb{R}^{N \times d}$  là ma trận dữ liệu đầu vào của mini-batch gồm  $N$  mẫu.

Quy tắc cập nhật tham số với tốc độ học  $\alpha$  (*learning rate*) được thể hiện như sau:

$$W \leftarrow W - \alpha \frac{\partial J}{\partial W}, \quad b \leftarrow b - \alpha \frac{\partial J}{\partial b}.$$

Nhờ việc sử dụng mini-batch, quá trình tối ưu vừa duy trì sự ổn định của gradient, vừa đảm bảo hiệu năng tính toán phù hợp cho các tập dữ liệu lớn.

Trước khi đi vào quy trình huấn luyện lặp, ta cần xác định cách khởi tạo tham số và chi tiết các bước tính toán giá trị mất mát cũng như đạo hàm tại mỗi bước lặp. Các hàm này tương ứng với phương thức `__init__` và `compute_loss_and_grads` trong mã nguồn cài đặt.

**Algorithm 1** Khởi tạo và Tính toán Loss/Gradient

```

function INITIALIZE( $n\_features, n\_classes, lr, reg$ )
     $self.lr \leftarrow lr$ 
     $self.reg \leftarrow reg$                                  $\triangleright$  Khởi tạo ngẫu nhiên nhỏ để phá vỡ tính đối xứng
     $W \leftarrow 0.01 \times \mathcal{N}(0, 1, (n\_classes, n\_features))$ 
     $b \leftarrow \vec{0}_{n\_classes}$ 
end function

function COMPUTELOSSANDGRADS( $X, y$ )
     $N \leftarrow \text{rows}(X)$ 
    1. Forward Pass:
     $scores \leftarrow XW^\top + b$ 
     $probs \leftarrow \text{Softmax}(scores)$                    $\triangleright$  Sử dụng max-subtraction để ổn định số học
    2. Compute Loss (Data + Regularization):
     $correct\_logprobs \leftarrow -\log(probs[\text{range}(N), y] + \epsilon)$ 
     $data\_loss \leftarrow \text{Mean}(correct\_logprobs)$ 
     $reg\_loss \leftarrow 0.5 \cdot reg \cdot \sum(W \circ W)$ 
     $loss \leftarrow data\_loss + reg\_loss$ 
    3. Backward Pass (Gradient):
     $dscores \leftarrow probs$ 
     $dscores[\text{range}(N), y] \leftarrow dscores[\text{range}(N), y] - 1$ 
     $dscores \leftarrow dscores/N$ 
     $\nabla_W \leftarrow dscores^\top X$ 
    if  $reg > 0$  then
         $\nabla_W \leftarrow \nabla_W + reg \cdot W$ 
    end if
     $\nabla_b \leftarrow \text{Sum}(dscores, \text{axis} = 0)$ 
    return ( $loss, \nabla_W, \nabla_b$ )
end function

```

Doạn mã giả trên mô tả chi tiết hai quá trình:

- **Initialize:** Thiết lập ma trận trọng số  $W$  với các giá trị ngẫu nhiên nhỏ theo phân phối chuẩn và bias  $b$  bằng 0. Việc này giúp mô hình hội tụ tốt hơn so với khởi tạo bằng 0.
- **ComputeLossAndGrads:** Thực hiện tính toán xuôi (forward) để lấy xác suất dự đoán, sau đó tính toán ngược (backward) để xác định gradient. Lưu ý rằng gradient của trọng số  $\nabla_W$  bao gồm cả thành phần đạo hàm từ *Regularization* ( $reg \cdot W$ ).

#### 2.1.4 Quy trình huấn luyện mô hình

- Xáo trộn (*shuffle*) tập huấn luyện ở đầu mỗi epoch bằng một hoán vị ngẫu nhiên các chỉ số.

**Algorithm 2** Hàm huấn luyện **fit**

```

function FIT( $X_{train}, y_{train}, X_{val}, y_{val}, epochs, batch\_size$ )
     $N \leftarrow \text{rows}(X_{train})$ 
     $history.train\_loss \leftarrow []$ 
     $history.val\_acc \leftarrow []$ 
    for  $epoch \leftarrow 1$  to  $epochs$  do
         $indices \leftarrow \text{RandomPermutation}(\{0, \dots, N - 1\})$ 
         $X_{train} \leftarrow X_{train}[indices]$ 
         $y_{train} \leftarrow y_{train}[indices]$ 
         $epoch\_loss \leftarrow 0$ 
         $n\_batches \leftarrow 0$ 
        for  $start \leftarrow 0$  to  $N$  step  $batch\_size$  do
             $end \leftarrow start + batch\_size$ 
             $X_{batch} \leftarrow X_{train}[start : end]$ 
             $y_{batch} \leftarrow y_{train}[start : end]$ 
             $(L, \nabla_W, \nabla_b) \leftarrow \text{ComputeLossAndGrads}(X_{batch}, y_{batch})$ 
             $epoch\_loss \leftarrow epoch\_loss + L$ 
             $n\_batches \leftarrow n\_batches + 1$ 
             $W \leftarrow W - lr \cdot \nabla_W$ 
             $b \leftarrow b - lr \cdot \nabla_b$ 
        end for
         $avg\_loss \leftarrow epoch\_loss / \max(n\_batches, 1)$ 
         $history.train\_loss.append(avg\_loss)$ 
        if  $X_{val} \neq \emptyset$  and  $y_{val} \neq \emptyset$  then
             $\hat{y}_{val} \leftarrow \text{Predict}(X_{val})$ 
             $val\_acc \leftarrow \text{Mean}(\hat{y}_{val} = y_{val})$ 
             $history.val\_acc.append(val\_acc)$ 
        end if
    end for
    return  $history$ 
end function

```

- Chia dữ liệu đã xáo trộn thành các mini-batch có kích thước `batch_size`.
- Với mỗi mini-batch, gọi `ComputeLossAndGrads` để tính giá trị hàm mất mát và gradient theo  $W, b$ .
- Cập nhật tham số theo quy tắc gradient descent:  $W \leftarrow W - lr \cdot \nabla_W, b \leftarrow b - lr \cdot \nabla_b$ .
- Tính loss trung bình của toàn bộ các mini-batch trong một epoch và lưu vào `history.train_loss`.
- Nếu có tập validation, tính độ chính xác trên  $X_{\text{val}}$  và lưu vào `history.val_acc`.

### 2.1.5 Quy trình suy diễn và dự đoán

**Algorithm 3** Hàm suy diễn `predict_proba` và `predict`

```

function PREDICT_PROBA( $X$ )
     $Z \leftarrow XW^\top + b$ 
     $Z' \leftarrow Z - \max(Z \text{ theo từng hàng})$ 
     $\exp Z \leftarrow \exp(Z')$ 
     $P \leftarrow \exp Z / \sum(\exp Z \text{ theo từng hàng})$ 
    return  $P$ 
end function

function PREDICT( $X$ )
     $P \leftarrow \text{predict\_proba}(X)$ 
     $\hat{y} \leftarrow \arg \max(P \text{ theo từng hàng})$ 
    return  $\hat{y}$ 
end function

```

- `predict_proba`:

- Tính điểm số tuyến tính  $Z = XW^\top + b$  cho tất cả mẫu và tất cả lớp.
- Chuẩn hoá  $Z$  theo từng hàng để ổn định số học, sau đó áp dụng hàm softmax để thu được ma trận xác suất  $P$ .

- `predict`:

- Gọi lại `predict_proba` để lấy phân phối xác suất trên các lớp cho từng mẫu.
- Chọn lớp có xác suất lớn nhất bằng toán tử `arg max` theo chiều lớp, thu được vector nhãn dự đoán  $\hat{y}$ .

### 3 Thiết kế các feature vector

#### 3.1 Feature vector 1: Đặc trưng cường độ điểm ảnh (Raw Pixel Intensity)

Theo [1], phương pháp biểu diễn dữ liệu trực quan nhất là sử dụng trực tiếp giá trị cường độ sáng (pixel intensity) của ảnh làm vector đặc trưng. Phương pháp này, được triển khai trong hàm `get_pixel_features`, coi mỗi điểm ảnh là một biến độc lập, bỏ qua mối quan hệ không gian cục bộ giữa các điểm ảnh lân cận.

##### 3.1.1 Biểu diễn vector hóa (Vectorization)

Dữ liệu gốc của bộ MNIST bao gồm các ảnh xám có kích thước  $28 \times 28$  pixel. Tuy nhiên, các mô hình học máy truyền thống như Softmax Regression yêu cầu đầu vào là các vector một chiều cố định. Do đó, kỹ thuật duỗi phẳng (flattening) được áp dụng để chuyển đổi ma trận ảnh  $I \in \mathbb{R}^{H \times W}$  thành vector đặc trưng  $x \in \mathbb{R}^D$ , với  $D = H \times W$ .

Trong ngữ cảnh đồ án này:

$$x = \text{flatten}(I) \in \mathbb{R}^{784}.$$

Quá trình này biến đổi cấu trúc dữ liệu từ  $(N, 28, 28)$  thành  $(N, 784)$ . Mặc dù đơn giản, cách tiếp cận này vẫn giữ lại toàn bộ thông tin gốc của ảnh và đã được Yann LeCun cùng cộng sự sử dụng làm mốc cơ sở (baseline) trong các nghiên cứu đầu tiên về MNIST.

##### 3.1.2 Chuẩn hóa dữ liệu (Data Normalization)

Trước khi đưa vào mô hình, dữ liệu điểm ảnh thô (thường nằm trong khoảng  $[0, 255]$  đối với ảnh 8-bit) cần được chuẩn hóa. Trong phương thức `_normalize`, hệ thống thực hiện phép biến đổi tuyến tính để đưa giá trị về khoảng  $[0, 1]$ :

$$x_{norm} = \frac{x_{raw}}{255.0}.$$

Thao tác này được thực hiện bằng cách ép kiểu dữ liệu sang `float32` và chia cho 255.0. Việc chuẩn hóa này đóng vai trò quan trọng trong việc tối ưu hóa mô hình Gradient Descent:

- Đồng nhất thang đo: Giúp các đặc trưng đóng góp bình đẳng vào hàm mất mát.

- Ôn định số học: Ngăn chặn hiện tượng bão hòa hoặc tràn số khi tính toán hàm mũ trong lớp Softmax.
- Tăng tốc độ hội tụ: Giúp thuật toán tối ưu tìm được cực trị nhanh hơn so với dữ liệu chưa chuẩn hóa.

## 3.2 Feature vector 2: Trích xuất đặc trưng biên (Edge feature)

Trong khuôn khổ của hệ thống nhận dạng chữ viết tay, bên cạnh việc sử dụng trực tiếp giá trị cường độ điểm ảnh (pixel intensity), phương thức trích xuất đặc trưng thứ hai được đề xuất là khai thác thông tin cấu trúc hình học thông qua kỹ thuật phát hiện biên (Edge Detection). Kỹ thuật này được hiện thực hóa trong phương thức `get_edge_features` của lớp `FeatureExtractor`.

### 3.2.1 Nguyên lý toán học của thuật toán Canny [2]

Phương pháp này sử dụng thuật toán Canny (Canny Edge Detector), một trong những kỹ thuật phát hiện biên kinh điển và hiệu quả nhất trong xử lý ảnh. Về mặt toán học, biên của một đối tượng trong ảnh số được định nghĩa là nơi có sự thay đổi đột ngột về cường độ sáng.

Thuật toán Canny hoạt động dựa trên việc tính toán đạo hàm của cường độ sáng (gradient) tại mỗi điểm ảnh. Với một đầu vào  $I(x, y)$ , gradient tại toạ độ  $(x, y)$  được xác định bởi vector:

$$\nabla I = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix}.$$

Trong đó  $G_x$  và  $G_y$  là đạo hàm riêng theo hướng ngang và dọc. Biên độ (magnitude) của gradient, ký hiệu là  $G$ , đại diện cho cường độ của biên tại điểm đó:

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}.$$

### 3.2.2 Kỹ thuật phân ngưỡng trễ (Hysteresis Thresholding)

Điểm đặc biệt trong triển khai của phương thức `get_edge_features` là việc áp dụng cơ chế phân ngưỡng trễ (Hysteresis Thresholding) để lọc nhiễu và xác định các đường biên thực sự. Cơ chế này sử dụng hai giá trị ngưỡng: ngưỡng dưới ( $T_{min}$ ) và ngưỡng trên ( $T_{max}$ ).

Trong đồ án, hai tham số này được thiết lập mặc định như sau:

- Ngưỡng dưới (`min_val`): 100.

- Ngưỡng trên (`max_val`): 200.

Quy tắc lọc biên hoạt động như sau:

- Các điểm ảnh có gradient  $G \geq T_{max}$  (200) được xem là biên chắc chắn (strong edges).
- Các điểm ảnh có gradient  $G < T_{min}$  (100) bị loại bỏ.
- Các điểm ảnh nằm trong khoảng  $T_{min} \leq G < T_{max}$  được xem là biên yếu (weak edges) và chỉ được giữ lại nếu chúng có liên kết hình học với một biên chắc chắn. Điều này giúp đảm bảo tính liên tục của các nét chữ viết tay và loại bỏ các nhiễu rời rạc.

### 3.2.3 Quy trình tiền xử lý và biểu diễn đặc trưng

Trước khi áp dụng thuật toán Canny, dữ liệu ảnh đầu vào được chuyển đổi sang định dạng `uint8` (số nguyên 8-bit không dấu) để tương thích với thư viện OpenCV [3]:

$$I_{uint8} = \text{cast}(I_{raw}, \text{uint8}).$$

Việc chuyển đổi này được thực hiện trong vòng lặp xử lý từng mẫu dữ liệu  $i$  thông qua lệnh `images[i].astype(np.uint8)`.

Kết quả đầu ra của bộ phát hiện biên là một ma trận nhị phân biểu thị vị trí các nét vẽ. Để đồng nhất với đầu vào của mô hình Softmax Regression, ma trận này được chuẩn hóa về khoảng  $[0, 1]$  và duỗi phẳng (flatten) thành một vector đặc trưng  $x \in \mathbb{R}^{784}$ :

$$x_{edge} = \text{flatten}\left(\frac{\text{Canny}(I_{uint8})}{255.0}\right).$$

Quy trình này đảm bảo mỗi ảnh được biểu diễn bởi một vector đặc trưng có kích thước  $(N, 784)$ , trong đó các giá trị khác 0 đại diện cho cấu trúc hình học của chữ số.

### 3.2.4 Ý nghĩa

Việc sử dụng đặc trưng biên giúp mô hình tập trung vào hình dáng và cấu trúc tông màu của chữ số thay vì phụ thuộc vào độ nhạt của nét bút (vốn có thể thay đổi tùy thuộc vào người viết hoặc dùng cụm viết). Đây là một bước trích xuất đặc trưng bậc cao giúp tăng cường khả năng bắt biên của mô hình đối với các biến thể về độ sáng của ảnh đầu vào.

### 3.3 Feature vector 3: Giảm dimension bằng block averaging

**Ý tưởng chính:** Ở hai thiết kế trước đó, mô hình Softmax Regression làm việc trực tiếp với tập dữ liệu, dẫn đến việc vector đặc trưng có số chiều khá lớn, khiến quá trình huấn luyện chậm hơn và mô hình dễ bị ảnh hưởng bởi nhiễu.

Vì vậy, feature vector thứ ba (**Block Averaging**) được giới thiệu nhằm giải quyết vấn đề này bằng cách thay thế 1 block với dimension cho trước (vd:  $4 \times 4$ ) thành 1 giá trị duy nhất là trung bình của các pixel trong block này.

**Cơ chế chuyển đổi ảnh  $28 \times 28$  thành vector đặc trưng.**

1. Chia ảnh  $28 \times 28$  thành các block con không chồng lấp có kích thước cố định, ví dụ  $4 \times 4$ .
2. Mỗi block được rút gọn thành một giá trị duy nhất bằng cách tính trung bình cường độ sáng của các pixel trong block đó.
3. Các giá trị trung bình của các block con được xếp lại theo thứ tự của block  $4 \times 4$  cha, tạo thành một vector đặc trưng có số chiều nhỏ hơn rất nhiều so với vector pixel gốc.

Cụ thể, với ảnh MNIST kích thước  $28 \times 28$  và kích thước block  $(b_h, b_w) = (4, 4)$ :

- Chiều cao ảnh:  $H = 28$ , chiều rộng ảnh:  $W = 28$ ;
- Số block theo chiều dọc:  $H' = \frac{H}{b_h} = \frac{28}{4} = 7$ ;
- Số block theo chiều ngang:  $W' = \frac{W}{b_w} = \frac{28}{4} = 7$ ;
- Tổng số block:  $H' \cdot W' = 7 \cdot 7 = 49$ .

Sau bước Block Averaging, mỗi ảnh được biểu diễn bằng vector  $7 \times 7$  (thay vì  $28 \times 28$ ).

**Biểu diễn toán học.** Ký hiệu ảnh đã chuẩn hóa (chia cho 255) là ma trận  $X \in [0, 1]^{28 \times 28}$ . Với kích thước block  $(b_h, b_w)$ , ta định nghĩa ma trận đặc trưng sau khi khử chiều là  $F \in \mathbb{R}^{H' \times W'}$ , với:

$$H' = \frac{H}{b_h}, \quad W' = \frac{W}{b_w}.$$

Phần tử  $F_{r,c}$  (block ở hàng  $r$ , cột  $c$ ) được tính bằng trung bình cường độ sáng trên block tương ứng của ảnh gốc:

$$F_{r,c} = \frac{1}{b_h \cdot b_w} \sum_{i=0}^{b_h-1} \sum_{j=0}^{b_w-1} X_{r \cdot b_h + i, c \cdot b_w + j}, \quad 0 \leq r < H', \quad 0 \leq c < W'. \quad (1)$$

Cuối cùng, ta vector hoá ma trận  $F$  theo thứ tự hàng-cột:

$$\phi_{\text{block}}(X) = \text{vec}(F) \in \mathbb{R}^{H' \cdot W'}.$$

Trong thực nghiệm với  $(b_h, b_w) = (4, 4)$ , ta có:

$$\phi_{\text{block}}(X) \in \mathbb{R}^{49}.$$

### Quy trình trích xuất đặc trưng trong code:

1. **Chuẩn hoá:** chuyển ảnh từ kiểu uint8 về float32 và chia cho 255 để đưa cường độ pixel về khoảng  $[0, 1]$ :

$$X_{\text{norm}} = \frac{X}{255}.$$

2. **Reshape để gom block:** với  $N$  ảnh đầu vào có dạng  $(N, 28, 28)$ , ta reshape thành dạng:

$$(N, H', b_h, W', b_w) = (N, 7, 4, 7, 4),$$

sao cho mỗi “ô”  $(r, c)$  tương ứng đúng một block  $4 \times 4$  của ảnh ban đầu.

3. **Trung bình theo block:** tính trung bình trên hai trực ứng với kích thước block  $(b_h, b_w)$  để thu được tensor dạng:

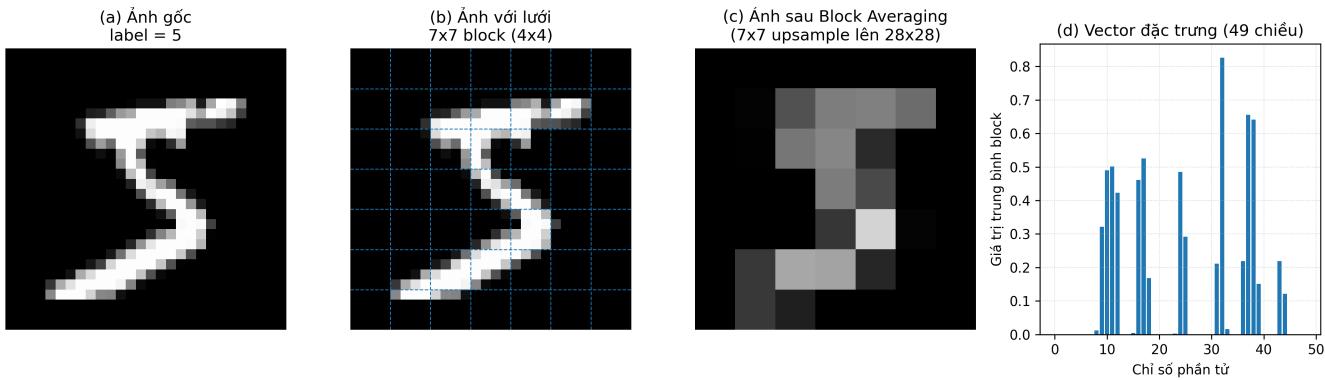
$$(N, H', W') = (N, 7, 7).$$

4. **vector hoá:** flatten từng ma trận  $7 \times 7$  về vector chiều 49 để đưa vào mô hình Softmax Regression.

Trong mã nguồn, các bước này tương ứng với hàm:

```
FeatureExtractor.get_block_features(images, block_size=(4,4))
```

trả về mảng NumPy kích thước  $(N, 49)$ .



Hình 1: Quy trình trích xuất đặc trưng Block Averaging: từ ảnh chữ số gốc  $28 \times 28$  sang ảnh đã được khử chiều  $7 \times 7$  và vector đặc trưng chiều 49.

### **Đánh giá sơ bộ về ưu nhược điểm trước khi train**

- **Ưu điểm:**

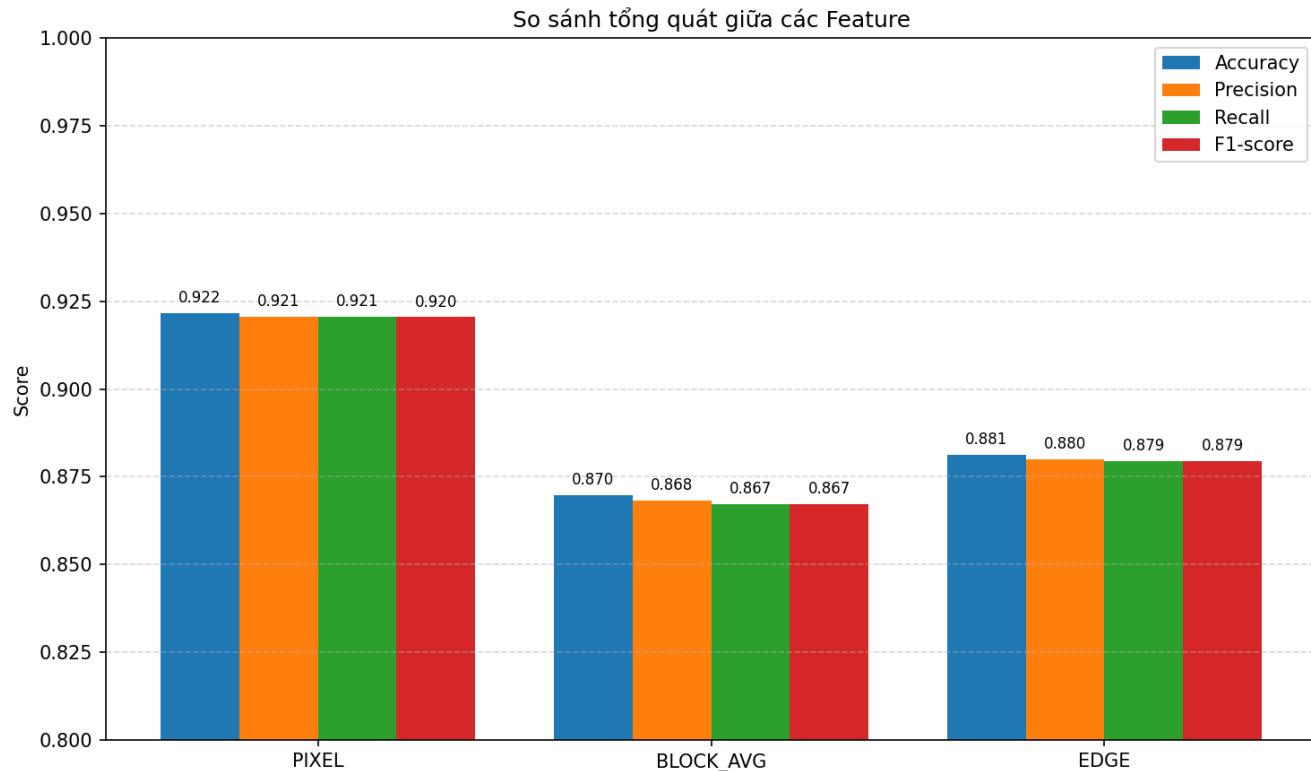
- Giảm số chiều đặc trưng rất mạnh (từ 784 xuống 49), qua đó:
  - \* Mô hình Softmax Regression có ít tham số hơn, huấn luyện nhanh hơn
  - \* Giảm nguy cơ overfitting trên những nhiễu rất cục bộ.
- Giữ lại được cấu trúc tổng thể của chữ số: các vùng pixel “sáng” (nét chữ) khi được trung bình hoá vẫn tạo thành hình dạng gần giống chữ số ban đầu ở cấp độ thô.
- Trung bình hoá trong block hoạt động như một bộ lọc thông thấp (low-pass filter), làm trơn các biến thiên nhỏ trong block và giúp mô hình ít nhạy với nhiễu.

- **Nhược điểm:**

- Mất đi nhiều chi tiết quan trọng, đặc biệt là các nét mảnh hoặc cấu trúc tinh tế giúp phân biệt những cặp chữ số khó như (3, 5), (5, 8), (4, 9), ...
- Do block không chồng lấp, các đường biên rời đúng ranh giới block có thể bị “bóp méo” nhiều hơn, làm giảm khả năng phân biệt dựa trên hình dạng chính xác.
- Khi chỉ nhìn ở độ phân giải  $7 \times 7$ , một số chữ số khác nhau có thể trở nên khá giống nhau về mặt phân bố cường độ trung bình, khiến ranh giới quyết định tuyến tính của Softmax Regression khó phân tách hoàn toàn.

## 4 Đánh giá và phân tích kết quả

### 4.1 Kết quả dự đoán của mô hình với từng loại đặc trưng



Hình 2: Biểu đồ so sánh các chỉ số Accuracy, Precision, Recall và F1-score giữa các phương pháp trích xuất đặc trưng

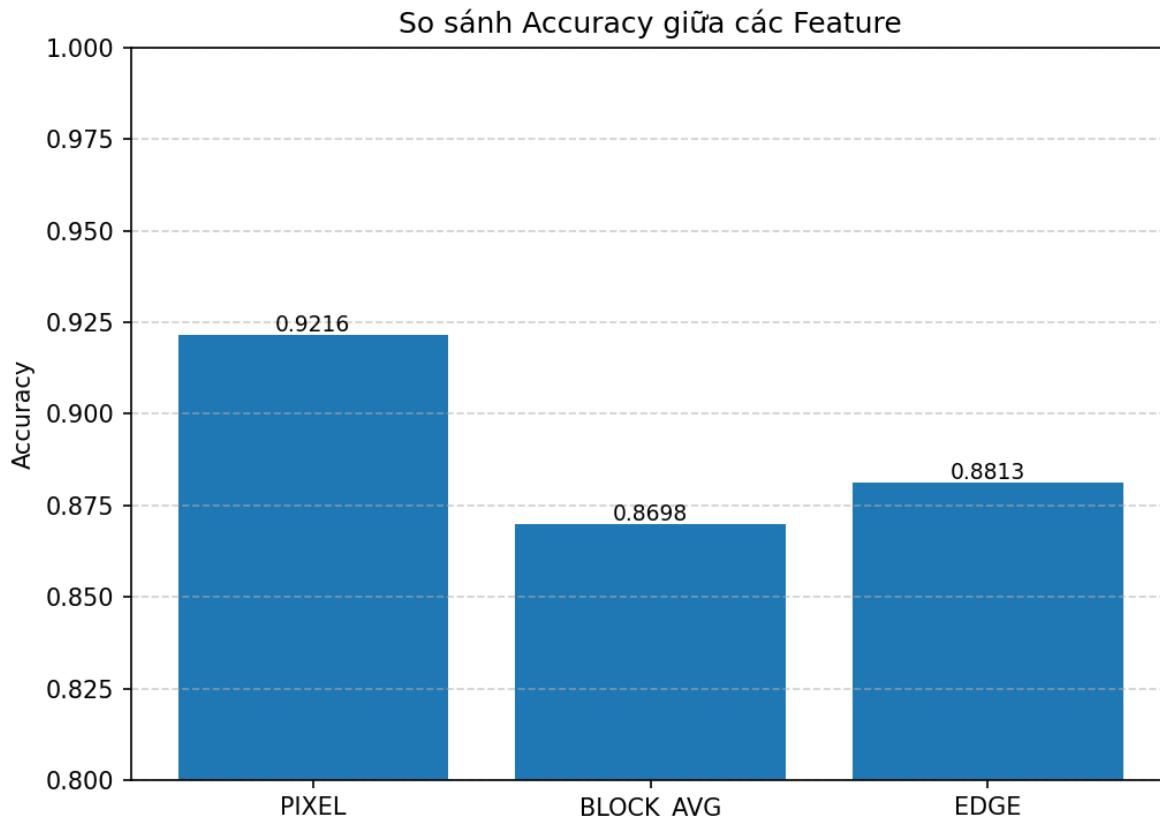
Kết quả thực nghiệm cho thấy cả ba phương pháp trích xuất đặc trưng (PIXEL, BLOCK\_AVG, EDGE) đều mang lại hiệu suất dự đoán khả quan, với độ chính xác dao động trong khoảng 0.87 – 0.92. Tuy nhiên, có sự phân hóa rõ rệt về hiệu quả giữa các phương pháp:

- **PIXEL** đạt độ chính xác (Accuracy) cao nhất  $\approx 0.922$ , cho thấy mô hình đạt hiệu suất tối ưu khi bảo toàn toàn bộ thông tin điểm ảnh.
- **EDGE** xếp thứ hai với Accuracy  $\approx 0.881$ , khẳng định rằng thông tin về đường biên vẫn mang giá trị phân loại lớn đối với tập dữ liệu này.
- **BLOCK\_AVG** có Accuracy thấp nhất  $\approx 0.870$ , phản ánh việc giảm chiều dữ liệu quá mức đã lược bỏ nhiều chi tiết thiết yếu cho quá trình phân lớp.

Như vậy, mô hình sử dụng đặc trưng nguyên bản (PIXEL) đạt hiệu năng tốt nhất, trong khi hai phương pháp còn lại cho thấy xu hướng giảm độ chính xác khi thông tin đặc trưng bị lược giản.

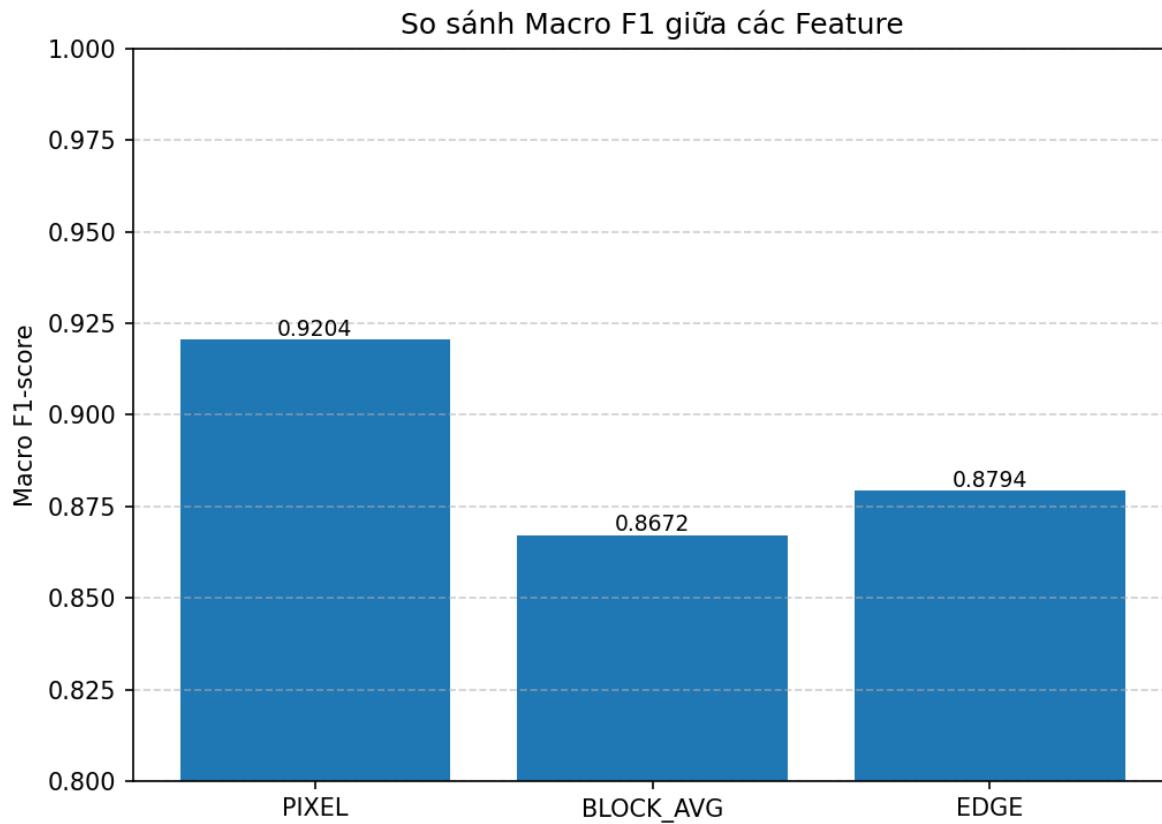
## 4.2 So sánh giữa các đặc trưng với nhau

### So sánh về độ chính xác (Accuracy)



Hình 3: So sánh độ chính xác (Accuracy) giữa các đặc trưng

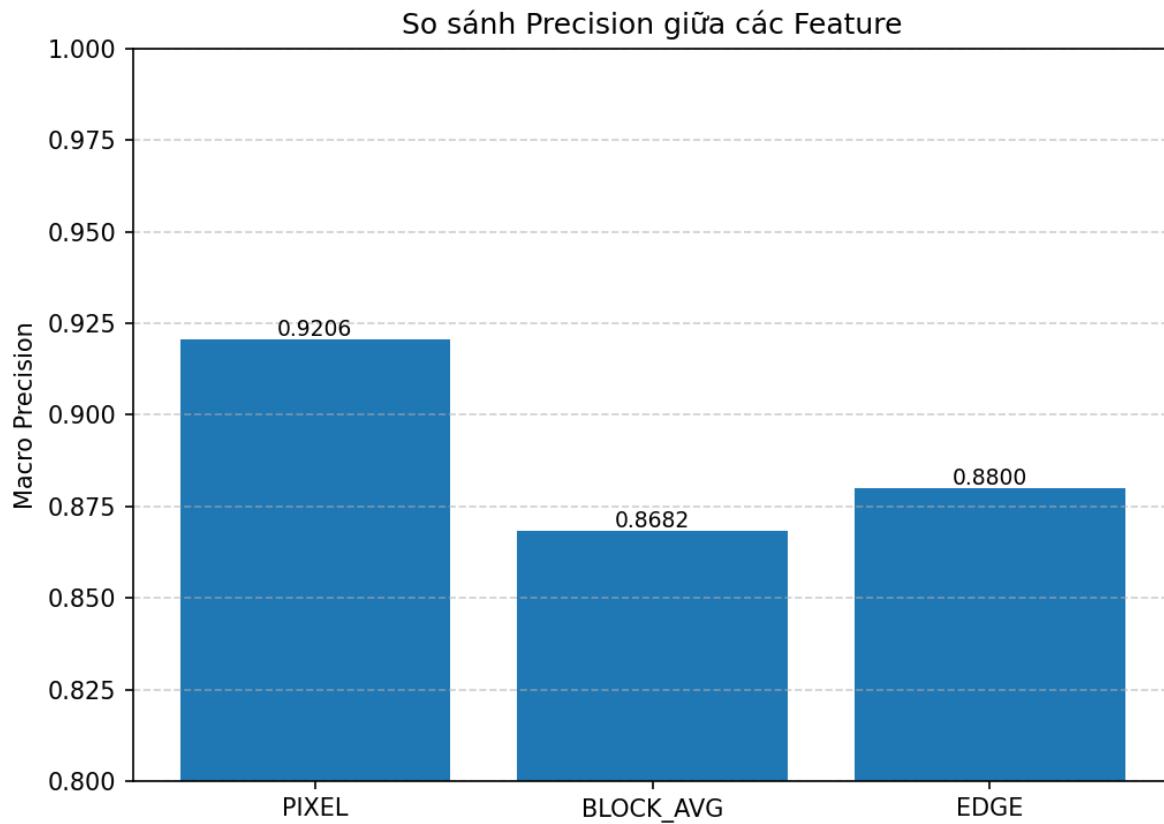
Đặc trưng PIXEL dẫn đầu về độ chính xác (0.922), theo sau là EDGE (0.881) và cuối cùng là BLOCK\_AVG (0.8698). Điều này minh chứng rằng độ chi tiết của dữ liệu đầu vào có tác động trực tiếp đến khả năng phân loại của mô hình Softmax Regression.

**So sánh về chỉ số Macro F1-score**

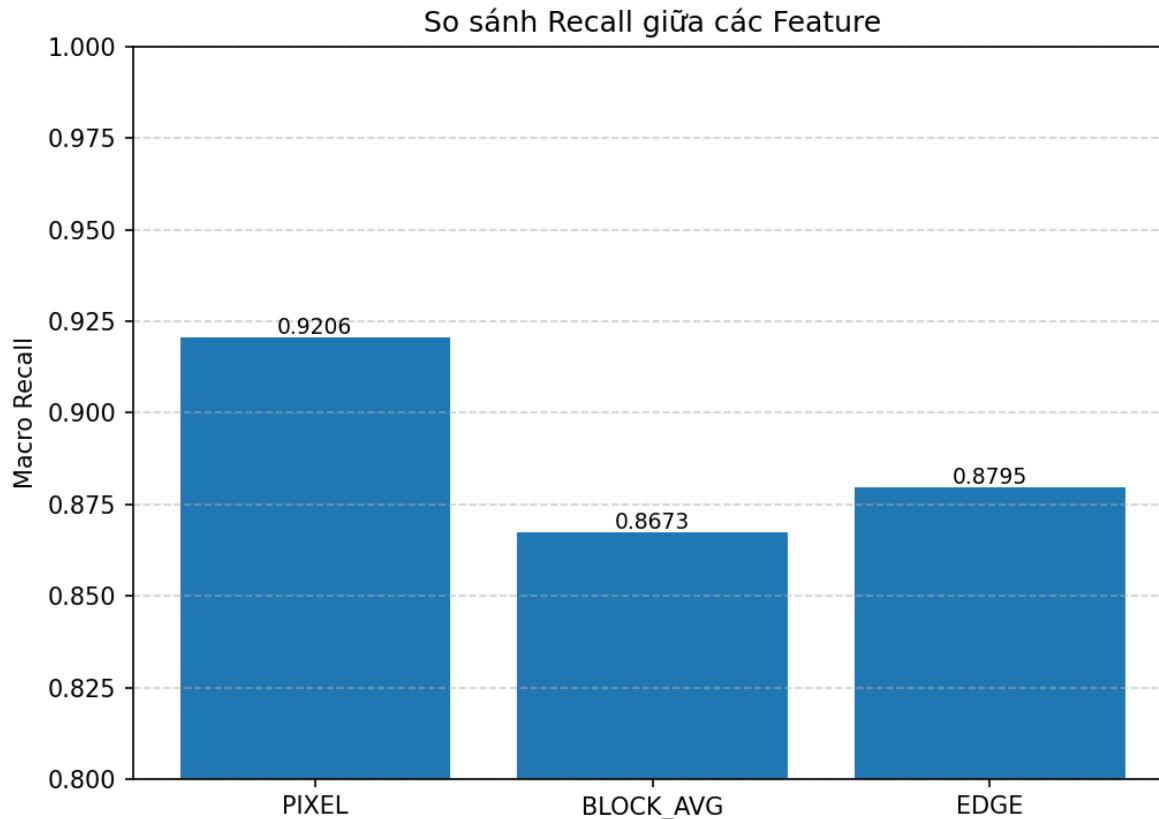
Hình 4: So sánh chỉ số Macro F1-score giữa các đặc trưng

PIXEL tiếp tục đứng đầu với Macro F1  $\approx 0.9204$ . EDGE đạt  $\approx 0.8794$  và BLOCK\_AVG đạt khoảng 0.8672. Thứ hạng về F1-score tương đồng với Accuracy, cho thấy sự ổn định về hiệu năng của mô hình trên toàn bộ các lớp dữ liệu.

### So sánh về Precision và Recall



Hình 5: So sánh Macro Precision giữa các đặc trưng



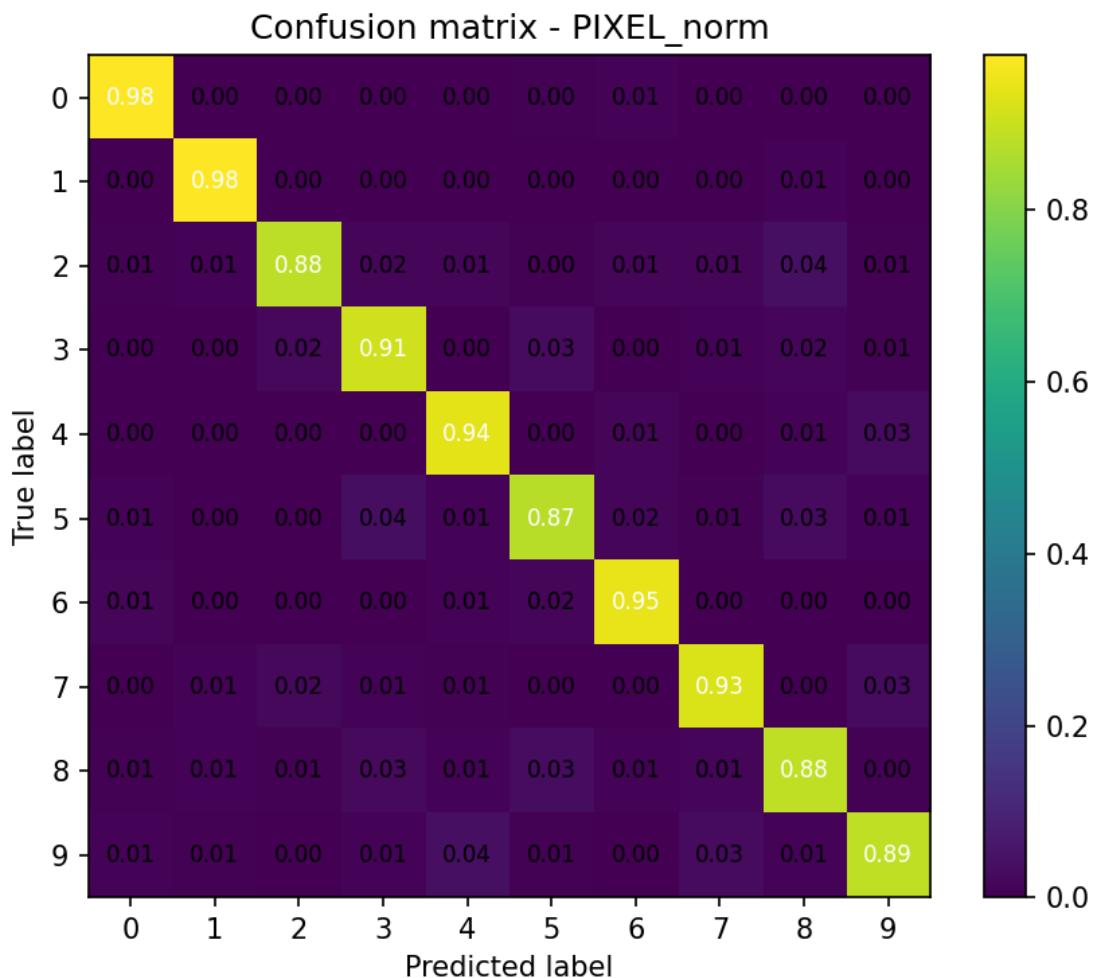
Hình 6: So sánh Macro Recall giữa các đặc trưng

Cả Precision và Recall của PIXEL đều trên 0.92, cao nhất trong ba đặc trưng. EDGE duy trì mức trung bình  $\approx 0.88$  và BLOCK\_AVG thấp nhất khoảng 0.867. Cả Precision và Recall đều cho thấy mô hình với feature BLOCK\_AVG có xu hướng bỏ sót và nhầm lẫn giữa các lớp nhiều hơn.

### 4.3 Phân tích chi tiết qua ma trận nhầm lẫn (Confusion Matrix)

Phần này tập trung phân tích mức độ phân loại sai giữa các lớp dựa trên Confusion Matrix đã được chuẩn hóa.

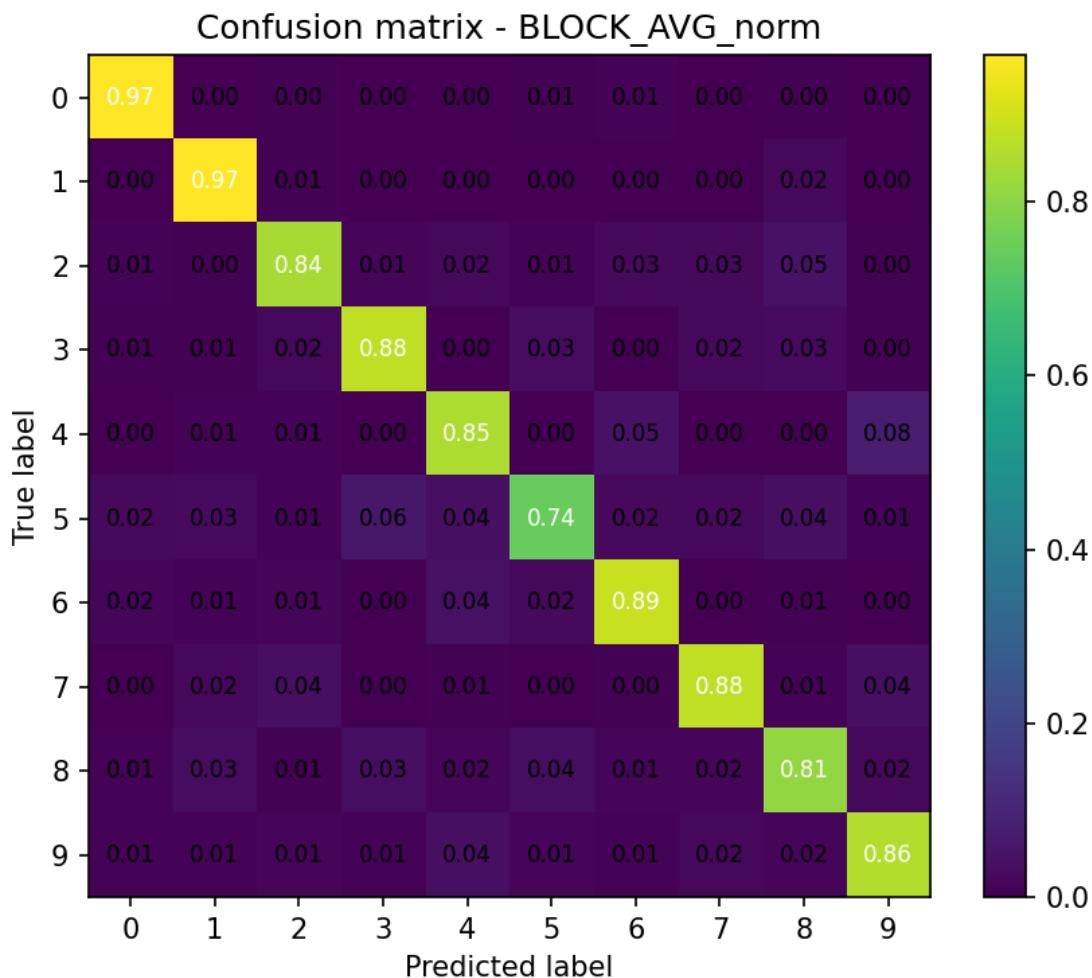
## PIXEL



Hình 7: Confusion matrix chuẩn hoá - Feature PIXEL

Đối với PIXEL, các giá trị trên đường chéo chính chiếm tỷ trọng lớn:

- Các lớp 0, 1, 6 đạt tỉ lệ dự đoán đúng trên 95%.
- Tồn tại một sự nhầm lẫn nhẹ giữa 3 và 5, phản ánh sự tương đồng hình dạng giữa hai số này.

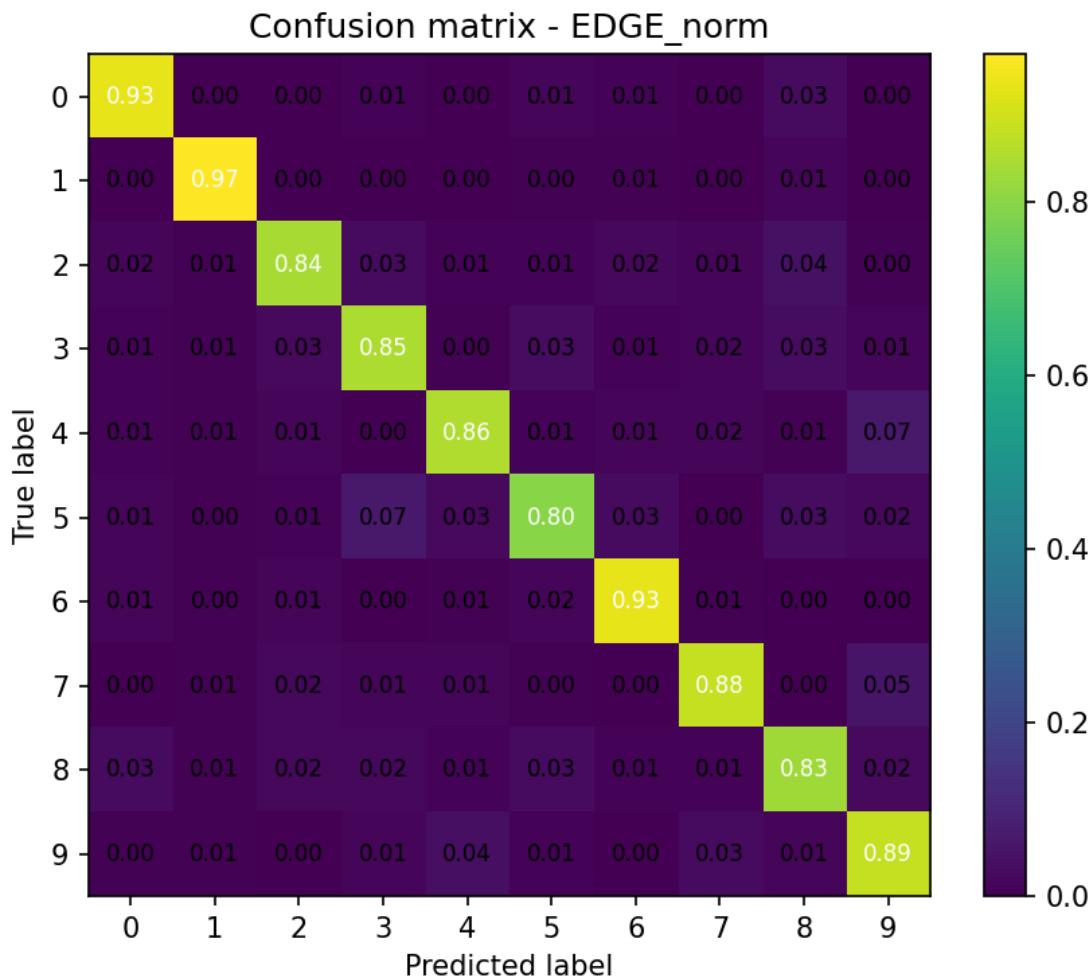
**BLOCK\_AVG**

Hình 8: Confusion matrix chuẩn hoá - Feature BLOCK\_AVG

BLOCK\_AVG có mức nhầm lẫn cao hơn đáng kể:

- Lớp 5 bị nhầm sang lớp 3 khoảng 6%.
- Lớp 8 bị nhầm với 1, 3, và 5 (2-4%).

Cho thấy khi giảm ảnh xuống  $7 \times 7$ , mô hình mắc nhiều sai sót hơn khi phân tách các lớp có cấu trúc tương tự.

**EDGE**

Hình 9: Confusion matrix chuẩn hoá - Feature EDGE

- Các lớp có hình dạng rõ ràng như 0, 1, 6 được dự đoán chính xác cao.
- Tuy nhiên, tương tự như BLOCK\_AVG, EDGE cũng bị nhầm lẫn khi xác định các số còn lại, đặc biệt là 5 và 8.

Mặc dù EDGE vượt trội hơn BLOCK\_AVG, nó vẫn chưa đạt được hiệu suất của PIXEL do thiếu hụt thông tin về cường độ điểm ảnh. Tổng hợp các phân tích trên, ta có thể kết luận:

- **PIXEL** là feature mạnh nhất, đạt toàn bộ metric cao nhất (Accuracy, Precision, Recall, F1-score).
- **EDGE** giữ lại cấu trúc biên đủ tốt nên đứng thứ hai.

- **BLOCK\_AVG** làm mất nhiều chi tiết quan trọng, dẫn đến performance thấp nhất.

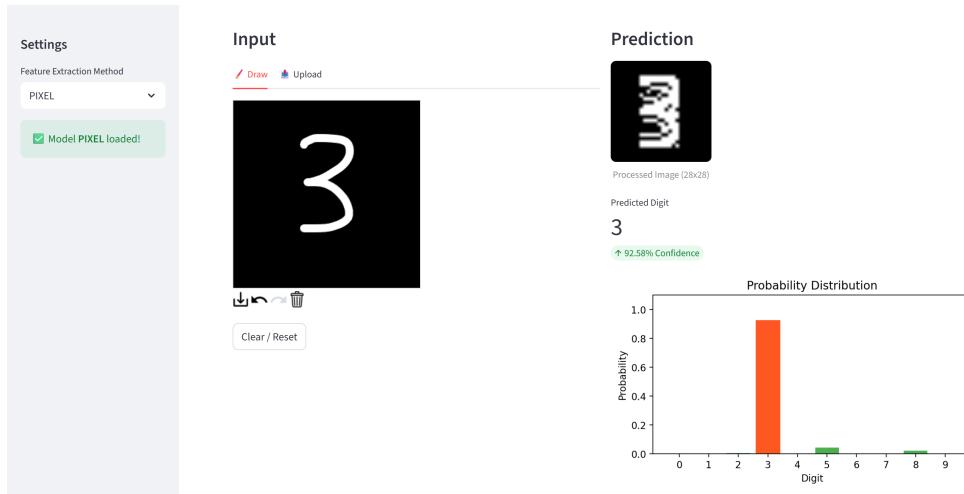
Mặc dù BLOCK\_AVG và EDGE có ưu điểm về giảm số chiều dữ liệu và chi phí tính toán, việc áp dụng chúng đã dẫn đến sự suy giảm đáng kể khả năng phân loại của mô hình Softmax Regression trong bài toán này.

## 5 Mô tả ứng dụng

Nhóm đã xây dựng một ứng dụng web đơn giản dùng để tương tác với mô hình, cho phép người dùng vẽ hình chữ viết tay bằng chuột hoặc upload ảnh chữ viết tay để cho model dự đoán số và hiển thị các thông số liên quan như độ tin cậy, xác suất dự đoán.

Các công nghệ đã sử dụng:

- **Streamlit:** Đây là framework nhẹ dùng để xây dựng một giao diện web tương tác với người dùng, thích hợp để trình bày các dữ liệu, mô hình, kết quả trong lĩnh vực AI/ML và Data Science. Đặc biệt streamlit có hỗ trợ drawable canvas để vẽ và nhận file ảnh
- **Pillow:** Đây là thư viện chuyên xử lý điểm ảnh, được nhóm sử dụng để xử lý ảnh từ ảnh upload hay vẽ tay sang dạng ảnh 28 x 28 để phù hợp với input của model.
- **Numpy:** Thư viện dùng để tính toán số học



Hình 10: Ảnh minh họa cho ứng dụng web demo

Hướng dẫn sử dụng:

- Ở góc bên trái là nơi chọn load model theo feature, có thể chọn **PIXEL**, **EDGE**, hoặc **BLOCK\_AVG**
- Ở giữa, người dùng có thể chọn vẽ trực tiếp lên canvas, khi thả chuột model sẽ thực hiện dự đoán lên chính bức ảnh đó.

- Ngoài ra người dùng còn có thể chọn upload ảnh viết tay vì vẽ trực tiếp
- Sau khi model dự đoán người dùng có thể xem ảnh sau khi được preprocess, xác suất và độ tin cậy ở bên phải màn hình.

## 6 Kết luận và nhận định

### 6.1 Tổng kết kết quả thực nghiệm

Trong đồ án này, nhóm đã xây dựng và huấn luyện thành công mô hình Softmax Regression để giải quyết bài toán phân loại chữ số viết tay trên tập dữ liệu MNIST. Hệ thống đã được thử nghiệm với ba chiến lược trích xuất đặc trưng khác nhau: Raw Pixel Intensity, Edge Detection (Canny), và Block Averaging.

Kết quả đánh giá trên tập kiểm thử cho thấy:

- **Đặc trưng Raw Pixel Intensity (PIXEL)** mang lại hiệu quả cao nhất. Đây là phương pháp giữ lại toàn vẹn thông tin nhất về cường độ sáng của ảnh.
- **Đặc trưng Edge Detection (EDGE)** đứng thứ hai. Phương pháp này chứng minh rằng thông tin cấu trúc hình học (đường biên) đóng vai trò quan trọng nhưng việc loại bỏ thông tin cường độ điểm ảnh đã làm giảm nhẹ hiệu năng.
- **Đặc trưng Block Averaging (BLOCK\_AVG)** có hiệu năng thấp nhất. Việc giảm chiều dữ liệu mạnh (từ 784 xuống 49 chiều) đã làm mất mát các chi tiết cục bộ quan trọng, dẫn đến sự nhầm lẫn cao giữa các cặp số có cấu trúc tương đồng.

### 6.2 Nhận định và phân tích

Từ các kết quả trên, nhóm rút ra các nhận định quan trọng về mối quan hệ giữa trích xuất đặc trưng và mô hình tuyến tính:

- **Sự đánh đổi giữa Giảm chiều dữ liệu và Độ chính xác:** Mặc dù Block Averaging và Edge Detection giúp giảm đáng kể kích thước vector đặc trưng (đặc biệt là Block Averaging giảm từ 784 xuống 49 chiều), giúp mô hình huấn luyện nhanh hơn và nhẹ hơn, nhưng sự suy giảm độ chính xác là không thể tránh khỏi. Đối với mô hình đơn giản như Softmax Regression, việc cung cấp đầy đủ thông tin chi tiết (Raw Pixel) giúp mô hình tìm ra ranh giới quyết định tuyến tính tốt hơn so với các đặc trưng đã bị lược bỏ.
- **Khả năng phân tách các lớp khó:** Phân tích Confusion Matrix cho thấy mô hình sử dụng đặc trưng nén (Block Avg) gặp khó khăn lớn trong việc phân biệt các chữ số có hình dáng

xem xem nhau (ví dụ: nhầm lẫn giữa số 5 và 3, số 8 và các số khác). Điều này khẳng định rằng các chi tiết nhỏ, tinh tế (vốn bị làm mờ khi tính trung bình block) là yếu tố quyết định để phân loại chính xác các mẫu nhập nhằng.

- **Hiệu quả của mô hình Softmax Regression:** Việc đạt độ chính xác trên 92% chỉ với mô hình tuyến tính và dữ liệu điểm ảnh thô cho thấy Softmax Regression là một baseline mạnh mẽ cho bài toán MNIST. Tuy nhiên, giới hạn của mô hình nằm ở chỗ nó coi từng điểm ảnh là độc lập và không khai thác tốt mối quan hệ không gian (spatial relationship) như các mô hình học sâu hiện đại (ví dụ: CNN).

### 6.3 Cải tiến đề xuất

Để cải thiện kết quả hiện tại, một số hướng tiếp cận tiềm năng có thể được thực hiện:

- **Cải tiến phương pháp trích xuất đặc trưng:** Thay vì Block Averaging đơn giản, có thể sử dụng phương pháp HOG (Histogram of Oriented Gradients) [4] hoặc PCA (Principal Component Analysis) [5] để giảm chiều dữ liệu nhưng vẫn giữ lại được các thông tin quan trọng hơn về phương sai và cấu trúc.
- **Tinh chỉnh siêu tham số:** Thủ nghiệm thêm các giá trị Learning Rate và Regularization khác nhau để tối ưu hóa sự hội tụ của thuật toán Gradient Descent.

## 7 Tài liệu tham khảo

- [1] Yann LeCun et al. “Gradient-based learning applied to document recognition”. In: *Proceedings of the IEEE* 86.11 (1998), pp. 2278–2324.
- [2] John Canny. “A computational approach to edge detection”. In: *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence* 6 (1986), pp. 679–698.
- [3] Gary Bradski. “The OpenCV Library”. In: *Dr. Dobb's Journal of Software Tools* 25.11 (2000), pp. 120–125.
- [4] Navneet Dalal and Bill Triggs. “Histograms of oriented gradients for human detection”. In: *2005 IEEE computer society conference on computer vision and pattern recognition (CVPR'05)*. Vol. 1. IEEE. 2005, pp. 886–893.
- [5] Karl Pearson. “LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2.11 (1901), pp. 559–572.