

Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα:

Μελέτη μη γραμμικών, μη αυτόνομων ταλαντωτών

Θόδωρος Καϊμασίδης, 15536

Θεσσαλονίκη Α.Π.Θ.

Εισαγωγή:

Μελετάμε την συμπεριφορά δύο μη γραμμικών συστημάτων με χρήση υπολογιστή, με μελέτη του χώρου φάσεων τους και των στροβοσκοπικών απεικονίσεων τους. Συγκεκριμένα θα γίνει προσπάθεια να αποσαφηνιστεί η συμπεριφορά του συστήματος με γραφική παράσταση του χώρου φάσεων είτε για διαφορετικές παραμέτρους ή για διαφορετικές αρχικές συνθήκες στις κατάλληλες πάντα περιοχές, ώστε να είναι σαφή τα όρια των περιοχών με περιοδικές ή ημιπεριοδικές και χαοτικές τροχιές.

A

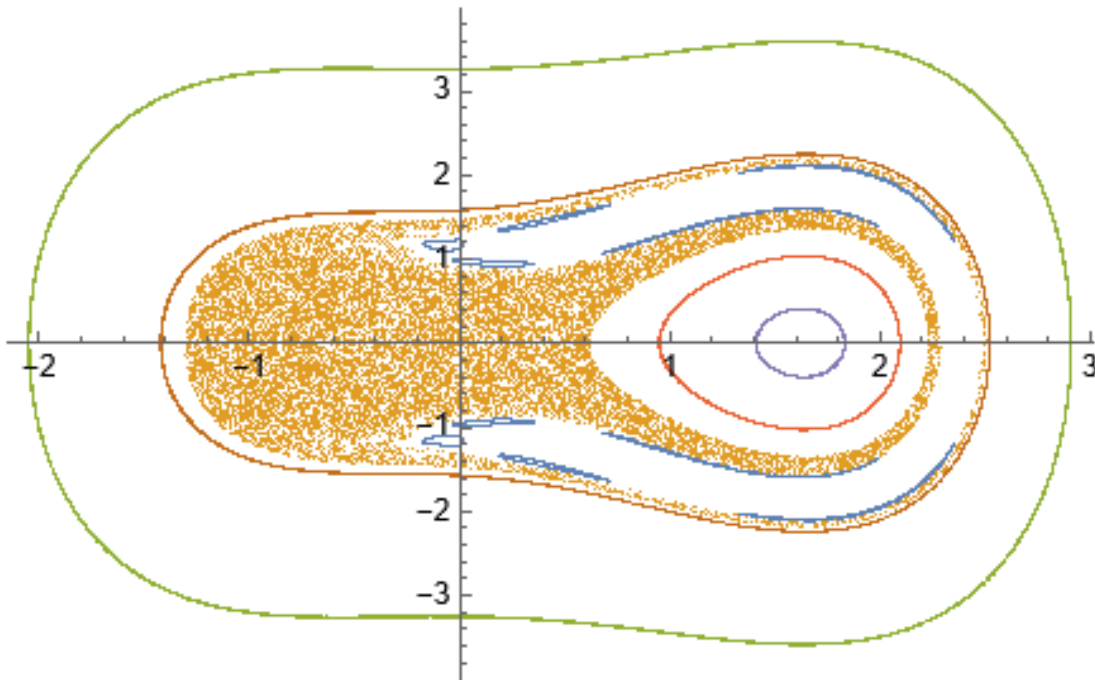
Αρχικά έχουμε να μελετήσουμε έναν ταλαντωτή, το σύστημα του οποίου καθορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x'' = x - x^3 + x^2 + a \cos t$$

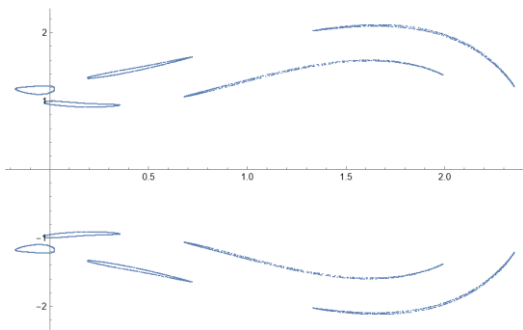
Βέβαια μπορούμε να το αναγάγουμε σε ένα διπλό μη γραμμικό σύστημα, ωστόσο πραγματικά δεν αλλάζει κάτι ειδικά όσο έχουμε και αριθμητικές λύσεις με υπολογιστή.

Αρχικά έχοντας να σχεδιάσουμε τις τομές Poincare για την παράμετρο $a=0.05$, θεωρώντας την περίοδο διέγερσης σταθερά στα 2π , θα ζητήσουμε μία απεικόνιση των λύσεων για δεδομένη αρχική συνθήκη κάθε φορά ανά χρονικά διαστήματα ακέραια πολλαπλάσια του 2π .

Τις διάφορες τομές παραθέτω παρακάτω, ενώ στη συνέχεια η καθεμία και ο τρόπος που δημιουργήθηκε (Α.Σ.) καταγράφονται στη λεζάντα. Πιστεύω πως φαίνεται η συμπεριφορά του συστήματος σε κάθε περιοχή, όμως θα ήταν εμφανώς καλύτερα να είχα φτιάξει μία δομή επανάληψης.

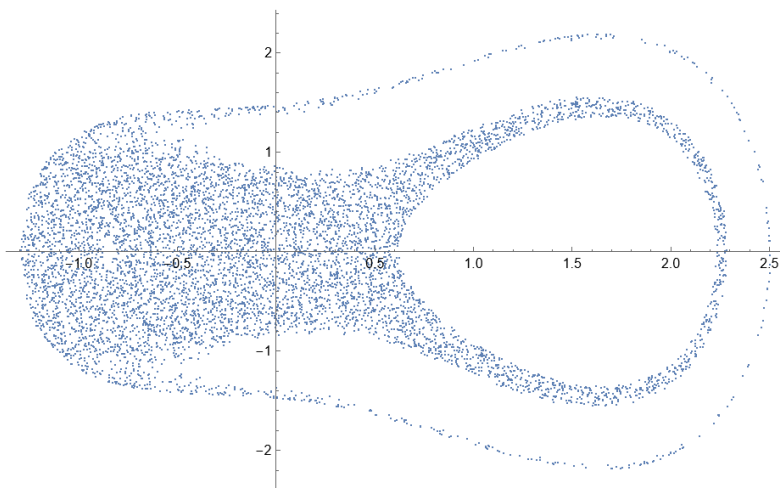


Εικόνα 1 $\alpha=0.05$

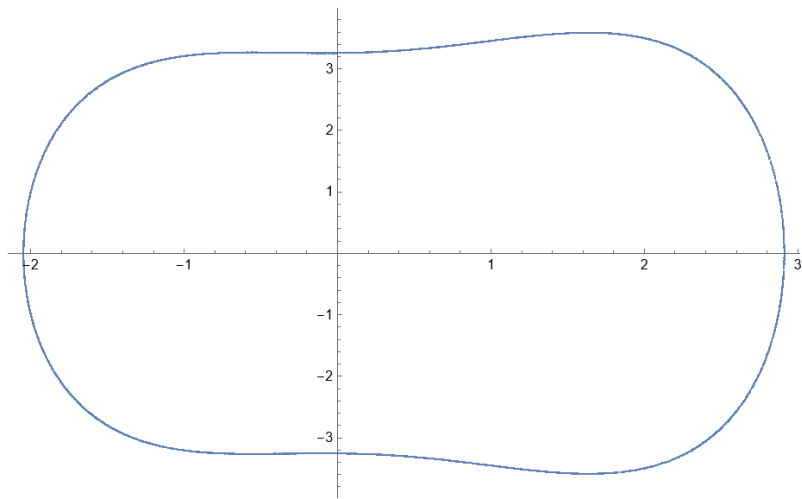


Εικόνα 2 Α.Σ. $x=0, \gamma=1$

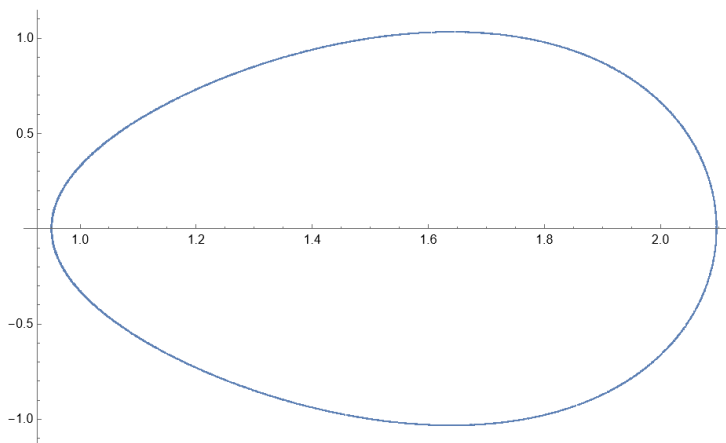
Παρατηρούμε τις δύο αυτές περιοχές με χαοτική συμπεριφορά, διακοπτόμενες ωστόσο από περιοχές στις οποίες μπορούμε να βρούμε περιοδικές ή ημιπεριοδικές τροχιές. Πιο μετά δείχνεται πως έξω από τον χαοτικό ελκυστή που βλέπουμε παρακάτω υπάρχουν ημιπεριοδικές τροχιές που τον περιβάλλουν, ενώ στην μεγάλη “τρύπα” υπάρχουν ημιπεριοδικές τροχιές, δηλαδή η συμπεριφορά τους είναι αρκετά καλή, όπως φαίνεται για διάφορες αρχικές τιμές στην περιοχή.



Εικόνα 3 $x=-1, \gamma=1$

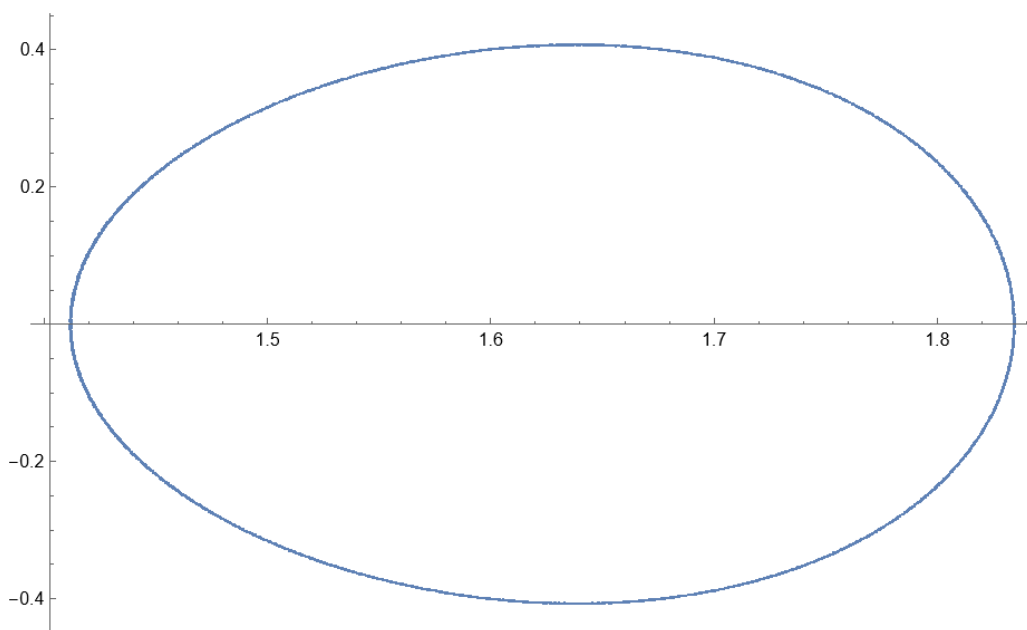


Εικόνα 4 $x=-2, y=1$

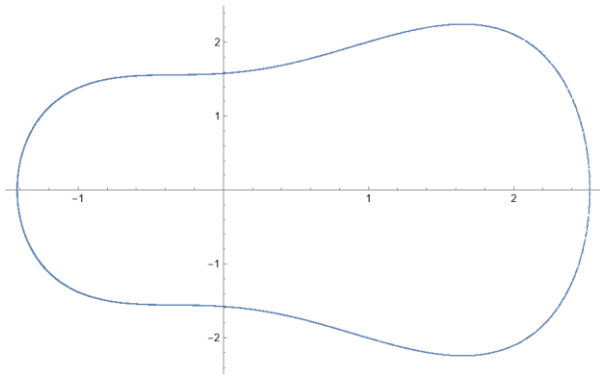


Εικόνα 5 $x=1.5, y=1$

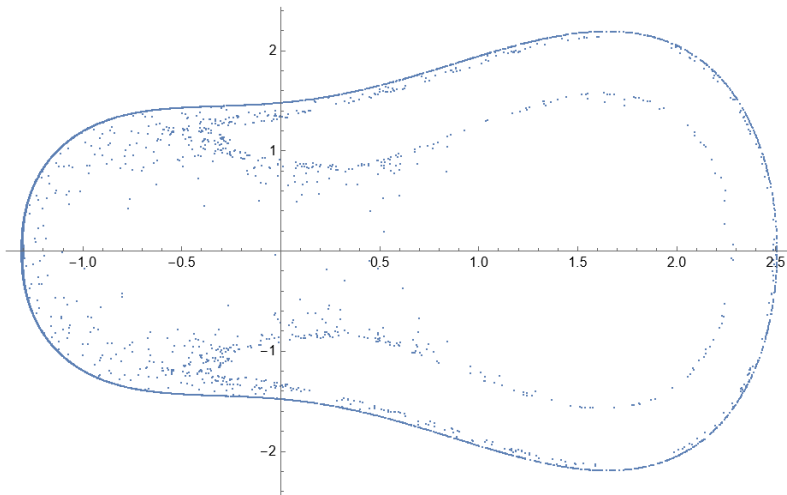
Μέσα στην περιοχή αυτή έχουμε σχεδόν γραμμική συμπεριφορά με κέντρο το 1.6 περίπου, βέβαια οι ταλαντώσεις δεν είναι γραμμικές, ούτε περιοδικές αλλά τα όρια της τροχιάς είναι καλά ορισμένα. Για διάφορες αρχικές συνθήκες η συμπεριφορά δεν αλλάζει.



Εικόνα 6 $x=1.75, y=0.34$

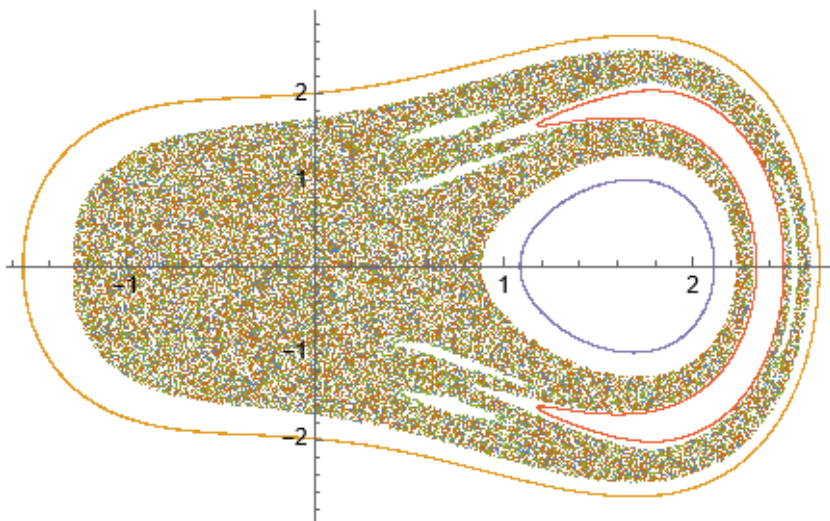


Εικόνα 7 $x=0, y=1.58$

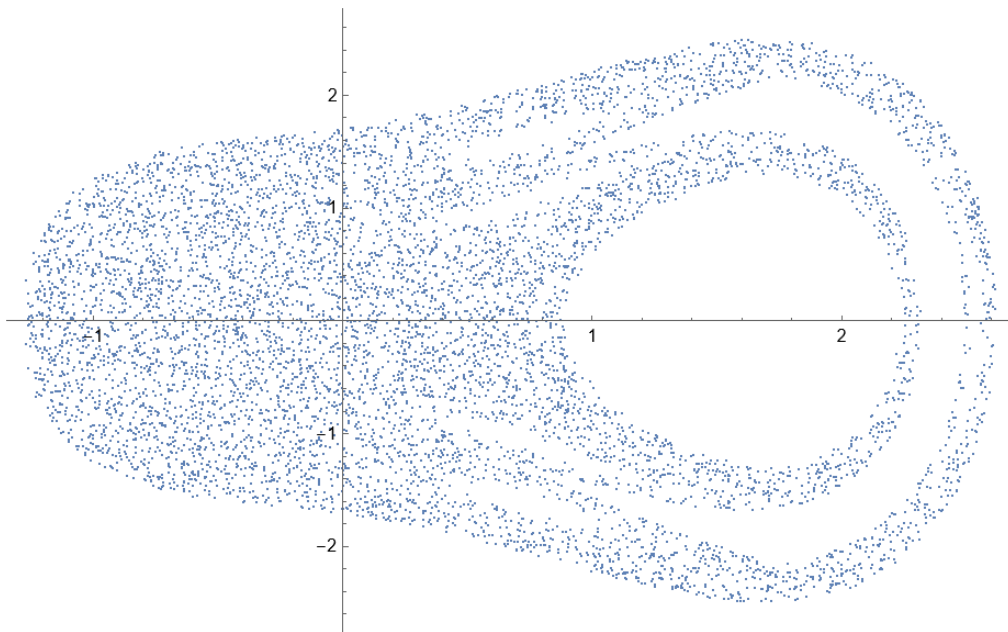


Εικόνα 8 $x=0, y=1.48$

Θέτοντας $\alpha=0.15$ δεν περιμένουμε να αλλάξει δραματικά η εικόνα του συστήματος μα ίσως να γεννηθούν, διαιρεθούν ή συμπυκνούν διάφορες περιοχές με ημιπεριοδική συμπεριφορά. Έχουμε και πάλι την συνολική εικόνα, για την χαοτική περιοχή δοκιμάστηκαν 3 συνθήκες που δε φαίνονται όλες εδώ, φαίνεται από τα χρώματα η επικάλυψη της περιοχής και η συμπεριφορά στις διάφορες περιοχές όπως πάνω:

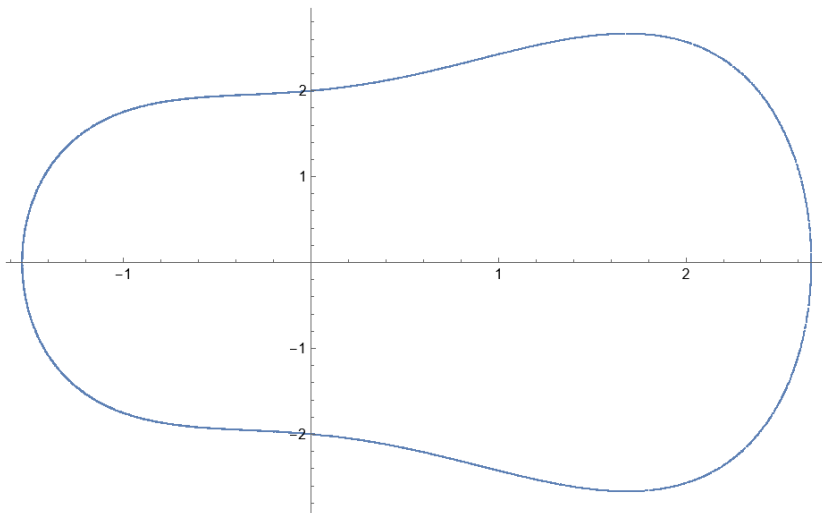


Εικόνα 9 $\alpha=0.15$

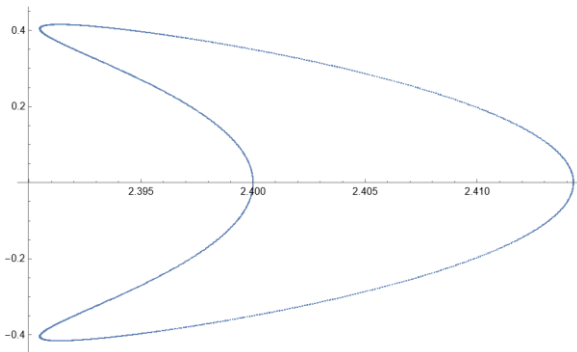


Εικόνα 10 $x=0, y=0$

Που περιβάλλεται από ημιπεριοδικές καμπύλες:

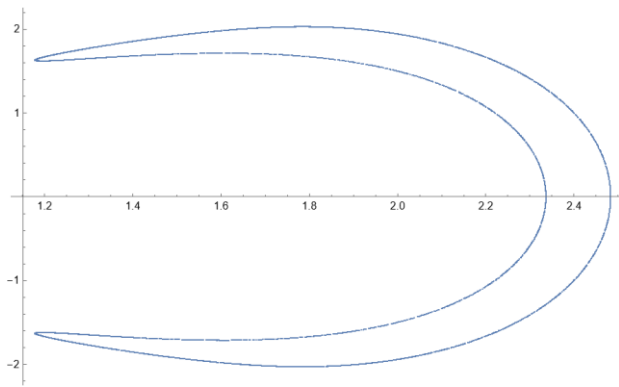


Εικόνα 11 $x=0, y=2$



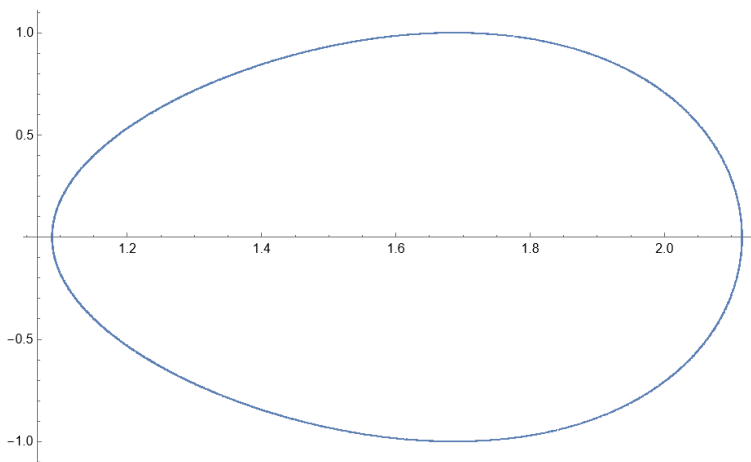
Εικόνα 12 $x=2.5, y=0$

Στα όρια μεταξύ της νέας ήρεμης "λίμνης" υπάρχουν οριακοί κύκλοι που μοιάζουν με πέταλο.



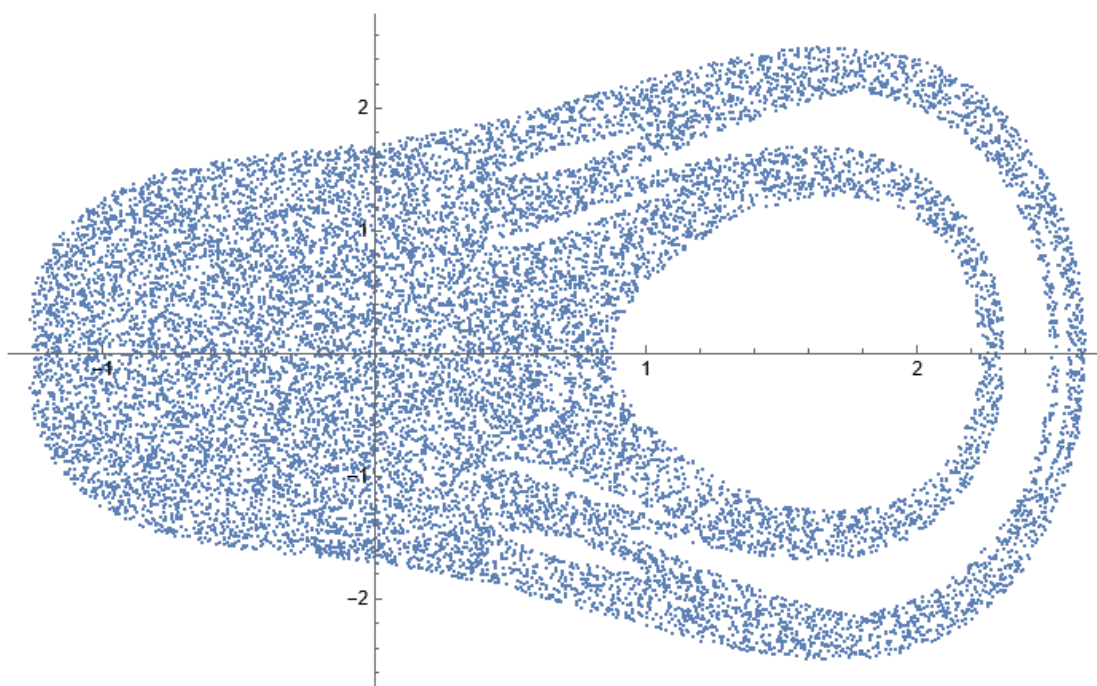
Εικόνα 13 $x=2.4, y=1$

Και φυσικά όπως και πριν υπάρχει μία μεγάλη περιοχή όπου έχουμε ημιπεριοδικές τροχιές. Των οποίων η συμπεριφορά είναι σταθερή εντός των ορίων της.

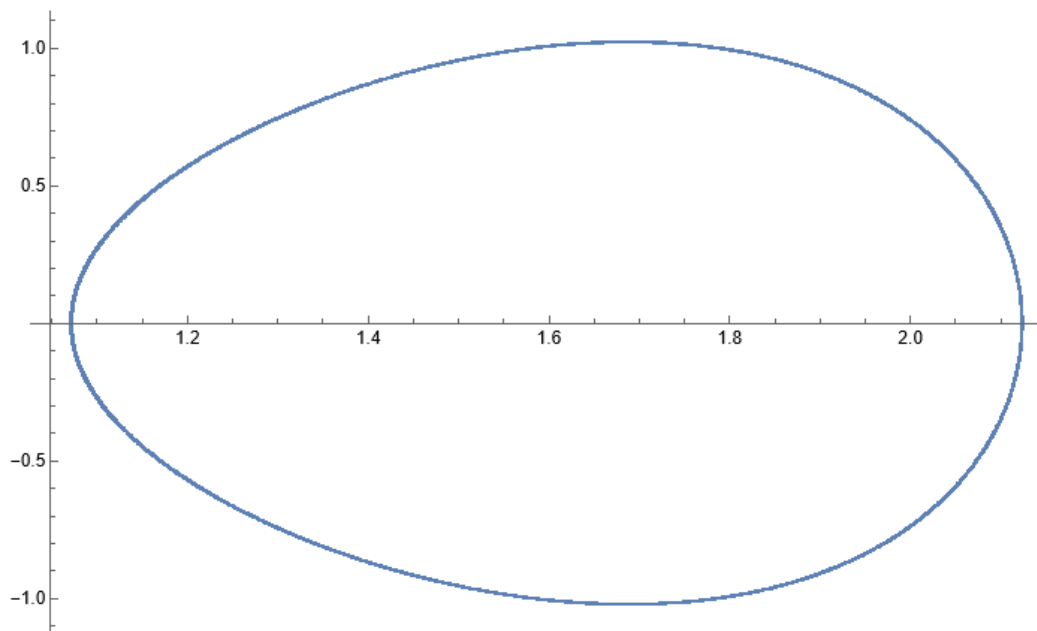


Εικόνα 14 $x=1.7, y=1$

Μας ζητείται να βρούμε τροχιές τέτοιες ώστε, για $\alpha=0.15$ να είναι περιοδική, ημιπεριοδική και μία χαοτική. Δεν κατάφερα με διάφορες στρατηγικές να βρω κάποια πραγματικά περιοδική, ωστόσο χαοτική τροχιά έχουμε για Α.Σ.: $x[0]=0.6, x'[0]=0.4$ ενώ ημιπεριοδική για $x[0]=1.69, x'[0]=-1$:



Εικόνα 15 χαοτική τροχιά



Εικόνα 16 ημιπεριοδική τροχιά

B

Έχουμε ένα μη γραμμικό, αποσβεστικό σύστημα με εξωτερική διέγερση στη μορφή:

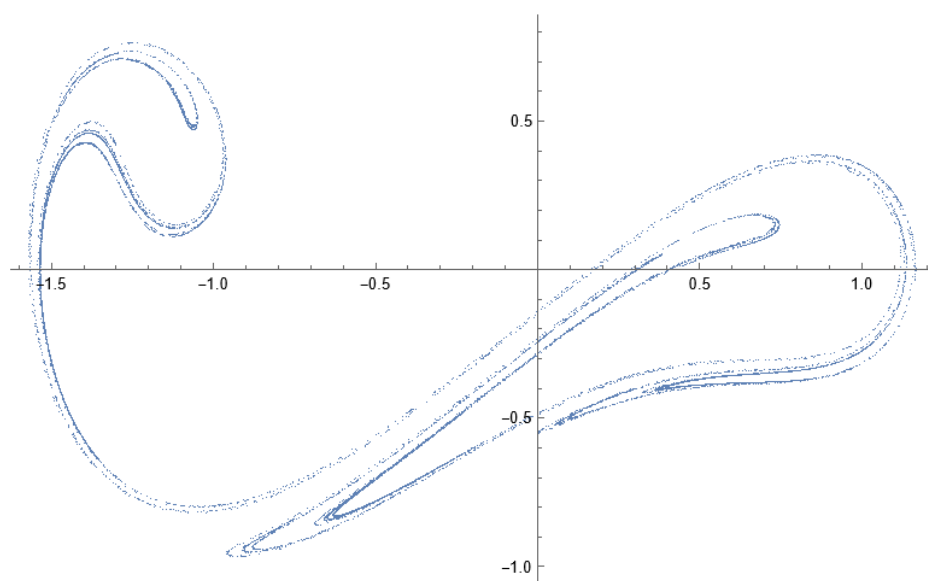
$$\chi'' = \chi - 0.9\chi^3 - 0.25\chi' + g\sin t$$

Όπως φαίνεται έχουμε μη γραμμικότητα και εξωτερική διέγερση, τα οποία μπορούν να μας δώσουν χάος.

Αρχικά έχουμε για το $g=0.355$ την παρακάτω τομή Poincare, όπου εμφανίζεται ένας παράξενος ελκυστής.

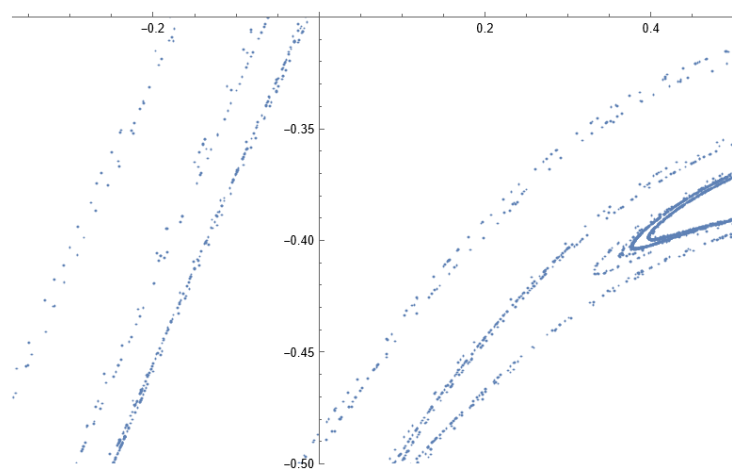
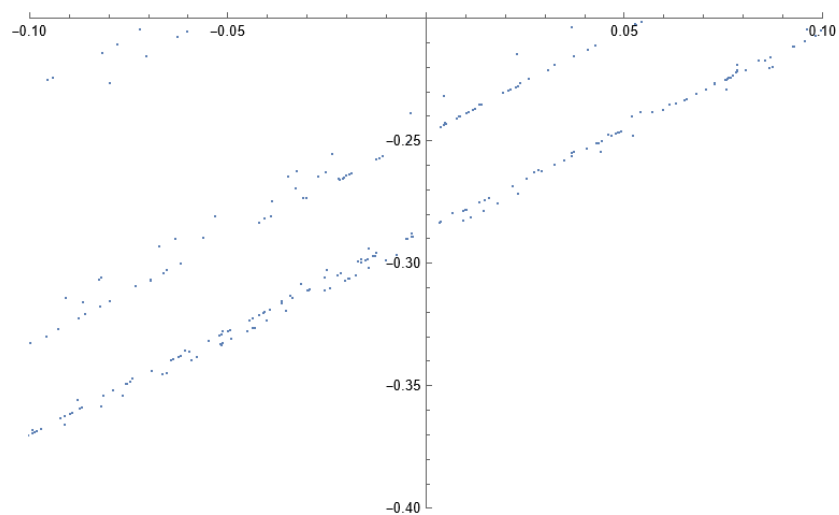
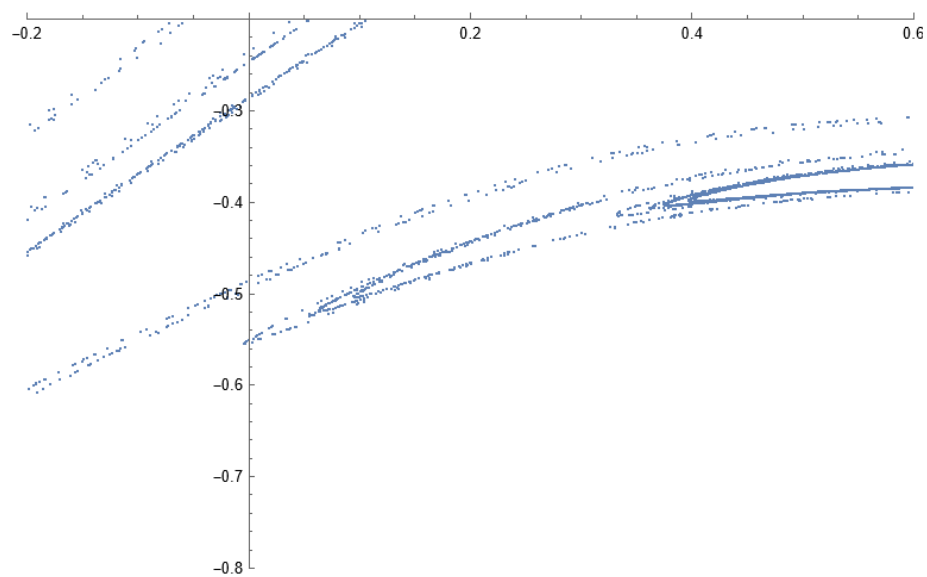
Παρακάτω όμως έχουμε την μεγέθυνση, όπου διαδοχικά έχουμε τις μεγεθύνσεις και με μεγαλύτερες κουκκίδες ανά σημείο για καλύτερη ευκρίνεια.

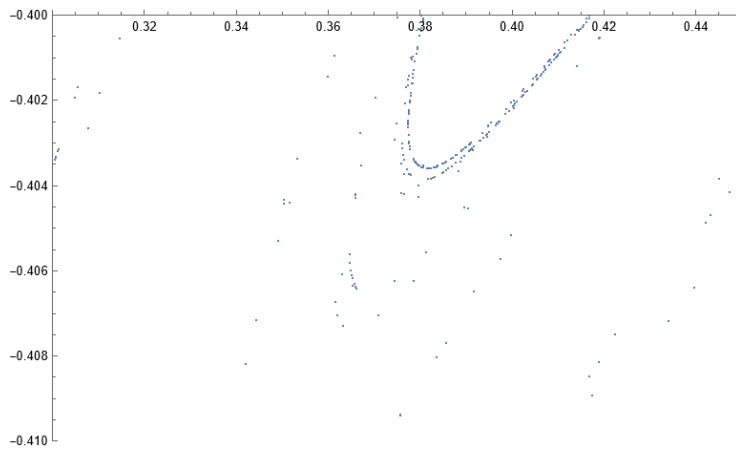
Συγκεκριμένα μετά την πρώτη “φωτογραφία” παραθέτω περισσότερες με μεγεθύνσεις περιοχών που της ανήκουν, και που δείχνουν το πως είναι το σύστημα πραγματικά.



Εικόνα 17 Το σύστημα με αρχικές συνθήκες $\chi=0.22$, $\gamma=0/g=0.355$

Ο παράξενος ελκυστής του συστήματος για τις παραμέτρους όπως φαίνονται $g=0.355$, και αρχικές συνθήκες $x=0.22, y=0$.





Κατακλείδα:

Το πιο σημαντικό συμπέρασμα είναι το πως η χρήση υπολογιστή μπορεί να δώσει με ιδιαίτερα εύκολο τρόπο απαντήσεις για τα ποιοτικά μα και όπως είδαμε εδώ, ποσοτικά επίσης χαρακτηριστικά ενός συστήματος τόσο απλού όπως ο ταλαντωτής του Duffing, που όμως μπορεί να δώσει χάος.

Από την εργασία λείπει το πρώτο ερώτημα της δεύτερης, και από την πρώτη άσκηση, αν και δοκίμασα πάρα πολλές διαφορετικές αρχικές συνθήκες με διάφορες "ακρίβειες" και σε διάφορες ενέργειες δεν βρήκα κάποια αμιγώς περιοδική τροχιά.