08.09.2021 г. СУ–ФМИ Държавен изпит за ОКС *Бакалавър* **Компютърни науки** ф.н. ___________ лист 10/11

Задача 7. В равнината е въведена декартова координатна система Oxy и е даден триъгълникът ABC. Известно е, че върхът A на триъгълника има координати $(-2,-2)$; медианата m_B на триъгълника, минаваща през върха B, има уравнение $x+9y+8=0$, а ъглополовящата l_B на вътрешният ъгъл на триъгълника при върха B има уравнение $y+1=0$.

a) (8 точки) Да се намерят координатите на върховете B и C.

b) (2 точки) Да се намери лицето на триъгълника ABC.

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:30

13.07.2021 г. СУ–ФМИ Държавен изпит за ОКС *Бакалавър* **Компютърни науки** ф.н. ___________ лист 8/9

Задача 7. В равнината е въведена декартова координатна система Oxy. Правите $g:\ y-1=0$ и $h:\ 2x-y+5=0$ са страни на един триъгълник, чиято трета страна минава през точката $U(2,0)$. Известно е още, че една от медианите на този триъгълник лежи върху правата $m:\ x-2y+4=0$. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника, както и неговото лице.

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:31

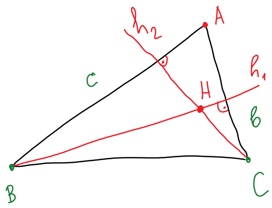
3 зад.

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден ромб $ABCD$, чиито диагонали (AC и BD) се пресичат в точка $M(1,6)$. Точките $P(3,0)$, $Q(6,6)$ и $R(5,9)$ лежат съответно върху правите AB, BC и CD. Да се намерят координатите на точките P', Q' и R'– симетрични, относно точката M съответно на точките P, Q и R, както и уравненията на страните на робма.

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:36

4 зад.

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден триъгълник ABC, за който $A(-1,1)$. Да се намерят координатите на върховете B и C, дължината на страната BC, координатите на ортоцентъра H и лицето S_{ABC}, при условие че две от височините на триъгълника ABC лежат върху правите с уравнения $h_1: 6x+y-9=0$ и $h_2: x+2y-5=0$.



1) ?, $b \begin{cases} \ni A(-1;+1) \\ \perp h_1 : 6x+1y-9=0 \end{cases}$

$b: 1.x - 6.y + D = 0$

$6.1 + 1.(-6) = 0$

$A \Rightarrow 1.(-1) - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 7$

$b: x - 6y + 7 = 0$

2) ? т. $C = b \cap h_2$

3) ?, $c \begin{cases} \ni A \\ \perp h_2 \end{cases}$

4) ?, т. $B = c \cap h_1$

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:37

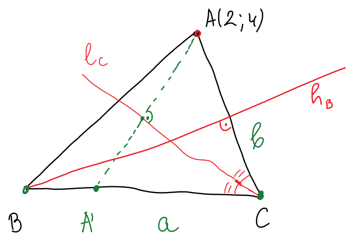
5 зад.

Задача 1.

В равнината е въведена декартова координатна система Oxy и е даден триъгълникът ABC. Известно е, че върхът A на триъгълника има координати $(2,4)$; височината h_B на триъгълника, минаваща през върха B, има уравнение $x+y-2=0$, а ъглополовящата l_C на вътрешният ъгъл на триъгълника при върха C има уравнение $3x+y-4=0$.

a) Да се намерят координатите на върховете B и C;

b) Да се намери лицето на триъгълника ABC.



1) ? $b \begin{cases} \ni A \\ \perp h_B \end{cases}$

2) ? $C = b \cap l_C$

3) ? т. A' – симетрична на A спрямо l_C

4) ? $a \begin{cases} \ni C \\ \ni A' \end{cases}$

5) ? $B = a \cap h_B$

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:38

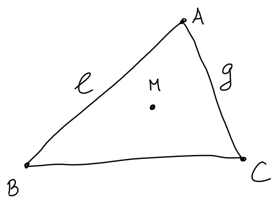
6 зад.

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден триъгълникът ABC, така че височините му се пресичат в точката $H(14,15)$ и уравненията на правите AB и AC са съответно $l: x+2y-5=0$ и $g: 5x+4y-13=0$. Да се намерят координатите на точките A, B, C и G - медицентър на триъгълника ABC, както и лицето S_1 на триъгълника ABG.

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:41

7 зад.

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден триъгълникът ABC, така че уравненията на правите AB и AC са съответно $l: 7x+4y-1=0$ и $g: 5x+2y-5=0$. Да се намерят координатите на върховете A, B, C и лицето S на триъгълника ABC, при условие че медианите му се пресичат в точката $M(1,-1)$.



1) ? $A = l \cap g$)

2) $B(x_B, y_B)$ (1) $B \ni l$

$C(x_C, y_C)$ (2) $C \ni g$

(3)+(4) $\vec{OM} = \frac{1}{3}.(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$

$x_M = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$

$y_M = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

32. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния.
Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина. Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.
Литература: [21].

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:46

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:41

08.09.2021 г. СУ–ФМИ Държавен изпит за ОКС *Бакалавър* **Компютърни науки** ф.н. ___________ лист 10/11

Задача 7. В равнината е въведена декартова координатна система Oxy и е даден триъгълникът ABC. Известно е, че върхът A на триъгълника има координати $(-2,-2)$; медианата m_B на триъгълника, минаваща през върха B, има уравнение $x+9y+8=0$, а ъглополовящата l_B на вътрешният ъгъл на триъгълника при върха B има уравнение $y+1=0$.

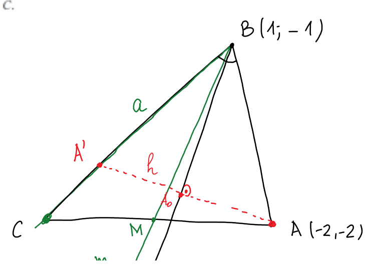
a) (8 точки) Да се намерят координатите на върховете B и C.

b) (2 точки) Да се намери лицето на триъгълника ABC.

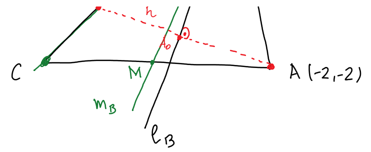
1) т. $B = l_B \cap m_B$

$\begin{vmatrix} x+9y+8=0 \\ y+1=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-9+8=0 \Rightarrow x=1 \\ y=-1 \end{vmatrix}$

$B(1;-1)$



$B(1;-1)$



2) При дадена ъглопол. l_B се използва σ_{l_B} – осева симетрия

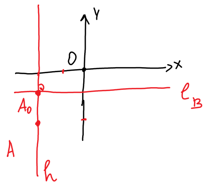
Нека т. $A \xrightarrow{\sigma_{l_B}}$ т. A' $\Rightarrow$ A', B, C лежат на 1 права

$A' \in BC \equiv a$

Търсим A'

* $h \begin{cases} \ni A(-2;-2) \\ \perp l_B: \ y+1=0, \ y=-1 \end{cases} \Rightarrow$ $h: x = const.$

$h: x = -2$



$h: x=-2$

* $A_0 = l_B \cap h \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases}$ $A_0(-2;-1)$

$A(-2;-2)$

$A_0(-2;-1)$ – средата на AA'

$A'(x', y')$

$\frac{-2+x'}{2} = -2$

$\frac{-2+y'}{2} = -1$

$A'(-2;0)$

$A'(-2;0)$

3) Търсим $a \begin{cases} \ni B(1;-1) \\ \ni A'(-2;0) \end{cases}$ $a: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Общо уравнение на права през 2 точки в равнината.

$a: -x-3y-2=0$

$x+3y+2=0$ Да

$1 \quad -1$

$-2 \quad 0$

4) Нека т. $C(x_c, y_c)$, т. $C \in a \Rightarrow$ $\boxed{x_c + 3.y_c + 2 = 0}$ $A(-2;-2)$

Нека т. M е средата на $AC \Rightarrow M\left(\frac{x_c+(-2)}{2}, \frac{y_c+(-2)}{2}\right) \in m_B: x+9y+8=0$

$\frac{x_c-2}{2} + 9.\frac{(y_c-2)}{2} + \frac{8}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{x_c + 9y_c - 4 = 0}$

т. $C \begin{cases} x+3y+2=0 \quad (-) \\ x+9y-4=0 \end{cases} \Rightarrow$ $-6y+6=0$

$y=1 \Rightarrow x=-5$ $C(-5;1)$

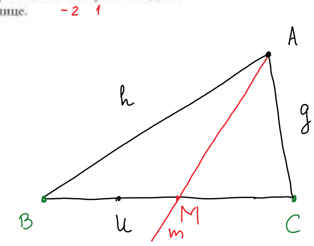
5) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right|$

Формула за лице на Δ спрямо ОКС Oxy

13.07.2021 г.	СУ–ФМИ	Държавен изпит за ОКС *Бакалавър*	**Компютърни науки**	ф.н. ______	лист 8/9

Задача 7. В равнината е въведена декартова координатна система Oxy. Правите $g: \ y-1=0$ и $h: \ 2x-y+5=0$ са страни на един триъгълник, чиято трета страна минава през точката $U(2,0)$. Известно е още, че една от медианите на този триъгълник лежи върху правата $m: \ x-2y+4=0$. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника, както и неговото лице. $-2 \quad 1$

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 16:31



1) ?, т. $A = h \cap g$ $\begin{cases} 2x-y+5=0 & x=-2 \\ y-1=0 \Rightarrow y=+1 \end{cases}$

$A(-2;1)$

2) С непосредствена проверка

установяваме, че т. $A \in m$

Нека $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ $\Rightarrow$
(1) $B \in h$
(2) $C \in g$
(3) B, C, U - колинеарни
(4) $M\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right) \in m$

(1) $B \in h \Rightarrow 2x_B - y_B + 5 = 0$

(2) $C \in g: y = 1 \Rightarrow C(x_C, 1)$

(3) $\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_B + 2y_B - 2 - x_C \cdot y_B = 0$

(4) $M\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+1}{2}\right) \in m: x - 2y + 4 = 0$

$$\underbrace{\frac{x_B+x_C}{2} - 2 \cdot \frac{(y_B+1)}{2} + \overset{2}{4} = 0}_{2}$$

$$x_B + x_C - 2y_B + 6 = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_B - y_B + 5 = 0 \Rightarrow y_B = 2x_B + 5 \\ x_B + 2y_B - x_C \cdot y_B - 2 = 0 \\ x_B + x_C - 2y_B + 6 = 0 \Rightarrow x_C = -x_B + 2y_B - 6 = -x_B + 2(2x_B + 5) - 6 \end{array} \right.$$

$x_C = 3x_B + 4$

$\Rightarrow x_B + 2(2x_B + 5) - (3x_B + 4) \cdot (2x_B + 5) - 2 = 0$

$x_B + 4x_B + 10 - 6x_B^2 - 15x_B - 8x_B - 20 - 2 = 0$

$-6x_B^2 - 18x_B - 12 = 0 \quad | : (-6)$

$x_B^2 + 3 \cdot x_B + 2 = 0$

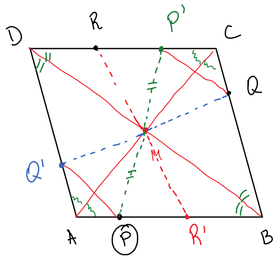
$x_B = -1$	$x_B = -2$ $A(-2, 1)$
$y_B = 3$	$y_B = 1$
$B(-1; 3)$	Не е решение, $B \not\equiv A$
$C(1, 1)$	

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right|$

---

3 зад.

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден ромб $ABCD$, чиито диагонали (AC и BD) се пресичат в точка $M(1, 6)$. Точките $P(3, 0)$, $Q(6, 6)$ и $R(5, 9)$ лежат съответно върху правите AB, BC и CD. Да се намерят координатите на точките P', Q' и R'– симетрични, относно точката M съответно на точките P, Q и R, както и уравненията на страните на ромба.



1) $P \xrightarrow{\sigma_M} P'$

$P \in AB \Rightarrow P' \in CD$

$P(3, 0)$
$M(1, 6)$ - средата на PP'
$P'(x', y')$

$\frac{x'+3}{2} = 1 \qquad x' = -1$

$\frac{y'+0}{2} = 6 \qquad y' = 12$

$P'(-1; 12)$

2) $CD \equiv RP': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 9 & 1 \\ -1 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$x \cdot (-3) - y \cdot 6 + 69 = 0 \quad | : -3$

$CD: x + 2y - 23 = 0$

$\begin{array}{cc} 5 & 9 \\ -1 & 12 \end{array}$

3) $AB \left\{ \in P \right.$

$-1 \quad 12$

3) $AB \begin{cases} \ni P \\ \parallel CD: x+2y-23=0 \end{cases}$

$AB: 1.x+2.y+F=0$

$P(3,0) \Rightarrow F=-3$

$AB: \; x+2y-3=0$

4) $A(x_A,y_A) \in AB \qquad x_A+2y_A-3=0$

$C(x_C,y_C) \in CD \qquad x_C+2y_C-23=0$

$M(1,6) \Rightarrow \quad \dfrac{x_A+x_C}{2}=1 \quad (*)$

$\dfrac{y_A+y_C}{2}=6$

$\left.\begin{array}{l} x_A = 3-2y_A \\ x_C = 23-2y_C \end{array}\right\} \to (*) \quad \dfrac{26-2(y_A+y_C)}{2}=1$

$x_A+x_C=2$

$y_A+y_C=12$

$3-2y_A+x_C=2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_C=-1+2y_A \\ y_C = 12-y_A \end{array}\right\} \to x_C+2y_C-23=0$

$2y_A-1+2(12-y_A)-23=0$

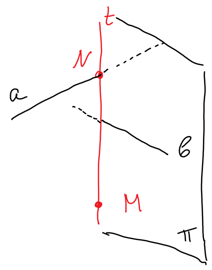
$0.y_A=0$

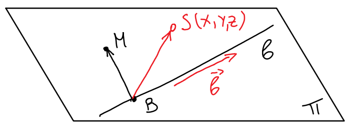
$a: \begin{cases} x=p \\ y=-2+p \\ z=-1+2p \end{cases}, p\in\mathbb{R}, \; b: \begin{cases} x+z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases} \qquad M(6,0,4)$

Screen clipping taken: 27.6.2023 г. 19:48

Да се намерят коорд. параметрични уравнения на оназ зи трансверзала t на кръстосаните прави a и b, която минава през т. M.

1) Търсим общо уравнение на равн. $\pi \begin{cases} \ni M \\ \ni b \end{cases}$





* $b \begin{cases} x+z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow$?, коорд. парам. уравн. на b

Изб. $z=s \Rightarrow x=-s$, $y=2-s$ $\Rightarrow$ $b: \begin{cases} x = -1.s \\ y=2-1.s \\ z=+1.s \end{cases}$

$b \parallel \vec{b}(-1,-1,1) \parallel \pi$

* Изб. т. B от b за $s=0 \Rightarrow B(0,2,0)$, $M(6,0,4)$ $\Rightarrow \overrightarrow{BM}(6,-2,4) \parallel \pi$

Нека $S(x,y,z)$ е произволна от $\pi \Rightarrow \overrightarrow{BS}(x-0,y-2,z-0) \parallel \pi$

* $\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BM}$ и $\vec{b}$ са компланарни $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 6 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$x.(2)-(y-2).(10)+z.(-8)=0 \quad | :2$

$\pi: x-5y-4z+10=0 \quad$ т. $M(6,0,4)$

$A=1, \; B=-5, \; C=-4$

$\vec{b}(-1,-1,1) \parallel \pi \qquad A.(-1)+B(-1)+C.1 \stackrel{?}{=} 0$ Да

$\overrightarrow{BM}(6,-2,4) \parallel \pi \qquad A.6+B.(-2)+C.4 \stackrel{?}{=} 0$ Да Условие за компланарност

3) ?, т. $N = a \cap \pi$

$$\begin{array}{|l} x = p \\ y = -2 + p \\ z = -1 + 2p \\ x - 5y - 4z + 10 = 0 \end{array}$$

$p - 5.(-2+p) - 4.(-1+2p) + 10 = 0$

$-12p + 24 = 0 \quad p = 2 \Rightarrow N(2, 0, 3)$

4) $t \begin{cases} \ni N(2,0,3) \\ \ni M(6,0,4) \end{cases} \Rightarrow t \parallel \vec{NM}(4,0,1) \Rightarrow t: \begin{cases} x = 6 + 4.\lambda \\ y = 0 + 0.\lambda \\ z = 4 + 1.\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$