Теми за държавен изпит

34. Дискретни разпределения. Равномерно, биномно, геометрично и Поасоново разпределение. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

def Нека е дадено Ω – мн-вото от всички възможни елементарни събития. Нека $H \subseteq \Omega$. Тогава $1_H : \Omega \to \{0, 1\}$,

$$1_H(w) = \begin{cases} 1, & w \in H \\ 0, & w \notin H \end{cases}$$

наричаме индикаторна функция на H.

def Нека V е вер. пр-во и са дадени

$$\overline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

$$H = \{H_1, H_2, \dots H_n, \dots\}, \text{ където } \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$$

Тогава $X(w) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot 1_{H_j}(w)$ наричаме дискретна случайна величина.

def Нека X е дискретна случайна величина. Тогава под разпределение на X $\left(X = \sum_j x_j 1_{H_j}\right)$ разбираме таблицата:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

, където

$$p_j = P(X = x_j) = P(H_j), \quad p_j > 0 \quad и \quad \sum_j p_j = 1.$$

def| Нека Ω е м-во от ел. събития, $\mathcal{A}$ е σ-алгебра в Ω. Тогава $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност, ако:

а) $P(\emptyset) = 0$

б) $P(A^c) = 1 - P(A)$, за $A \in \mathcal{A}$

в) ако $A_i \in \mathcal{A}$, $i \geq 1$, и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Свойства на вероятностите:

- Неотрицателност: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Това е изпълнено по дефиницията т. $P : \mathcal{A} \to [0,1]$.

- Нормираност: $P(\Omega) = 1$.

$P(A^c) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\Omega) = 1 - P(\emptyset) = 1 - 0 = 1.$

- Адитивност - от в). За $A \cap B = \emptyset$ имаме:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

от б): $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

– монотонност:

Ако $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$ $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$, то

$$\lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(A_j) = 0$$

Нека $B_1 = A_1 \setminus A_2$

$B_2 = A_2 \setminus A_3$

– – –

$B_n = A_n \setminus A_{n+1}$

$P(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) < \infty$, защото $P(A_1) \in [0,1]$.

$$\Rightarrow \lim_{j \to \infty} \mathbb{P}(B_j) = 0$$

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Равномерно разпределение:

$X \in DUnif(a,b)$

Стойностите на X са в интервала $[a,b]$

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1}, & \text{ако } x_i = a, a+1, \dots, b \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \cancel{\sum_{i=a}^{b} x_i p_i} = \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_X(x)} = \sum_{i=a}^{b} i \, \mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=a}^{b} i \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(a + \dots + b) = \frac{\frac{b(b+1)}{2} - \frac{(a-1)a}{2}}{n} =$$

$$= \frac{b^2 + b - a^2 + a}{2n} = \frac{(b-a)(b+a) + (b+a)}{2n} =$$

$$= \frac{(b+a)(b-a+1)}{2 \cdot (b-a+1)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\cancel{\sigma^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2}$$

$$\cancel{\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=}}$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 =$$

$$= \sum_{i=a}^{b} i^2 \, \mathbb{P}(X=i) - \left(\sum_{i=a}^{b} i \, \mathbb{P}(X=i) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=a}^{b} i^2 - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{b(b+1)(2b+1) - (a-1)a(2a-1)}{6} - \frac{(a+b)^2}{4} \right)$$

$$DX = \sum_{i=a}^{b} (x_i - EX)^2 \cdot p_i$$

$$= \dots = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Пример в задача:

Дадено е честно зарче със стойности от 1 до 6. Разпределението на стойностите му е равномерно, т.е. $P(X=i) = \frac{1}{6}$, $1 \le i \le 6$.
и $X \in DUnif(1,6)$.

Биномно разпределение:

$X \in Bi(n,p)$, когато X брои броя успехи в първите n експеримента в схема на Бернули с вероятност за успех p.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\dots,n.$$

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \text{където } X_j \in Ber(p)$$

$$\Rightarrow \mu = E[X] = E[\sum_{j=1}^{n} X_j] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j] = \sum_{j=1}^{n} p = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = D[X] = D[\sum_{j=1}^{n} X_j] = \sum_{j=1}^{n} D[X_j] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p \cdot q = npq.$$

Пример в задача: Нека имаме честен зар. Хвърляме n пъти и броим броят на шестиците, които означаваме с Y. Тогава разпределението на стойностите на Y е $X \in Bi(n, \frac{1}{6})$,

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n.$$

Геометрично разпределение:

$X \in Ge(p)$, когато X брои броят неуспехи до първи успех в схема на Бернули с вероятност p.

$$\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^k\cdot p$$

$$\mu=\mathbb{E}[X]=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\mathbb{P}(X=i)=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot(1-p)^i\cdot p=pq\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot q^{i-1}=$$

$$=pq\frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right)=pq\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{1-q}\right)=pq\frac{-1}{(1-q)^2}\cdot(-1)=\frac{pq}{p^2}=$$

$$=\frac{q}{p}$$

$$\sigma^2=\mathbb{D}[X]=\sum_{i=0}^{\infty}(x_i-\mathbb{E}[X])^2 p_i=\sum_{i=0}^{\infty}\left(i-\frac{q}{p}\right)^2\cdot\mathbb{P}(X=i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\left(i^2-2i\frac{q}{p}+\left(\frac{q}{p}\right)^2\right)\cdot q^i\cdot p\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\left[i^2q^ip-2iq^{i+1}+\dots\right]=$$

$$=\frac{q}{p^2}$$

Най-добре с пораждащи функции!

Пример в задача: Нека имаме честен зар. Броят y на хвърлянията до шестица е с разпределение $X \in Ge(\frac{1}{6})$ и $\mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6}$

$k \in 0, 1, \ldots$

Поасоново разпределение:

$X \in Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$, ако $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Ако $X \sim Poi(\lambda)$, то $g_X(s) = e^{\lambda s - \lambda}$,

$\mathbb{E}[X] = g'_X(s)\Big|_{s=1} = \lambda e^{\lambda s - \lambda}\Big|_{s=1} = \lambda$

$\mathbb{D}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Пример в задача:

~~Броят на колите~~ В една автомивка идват средно на ден 20 коли. Тогава броят на колите $\overset{\text{на ден}}{е}$ с разпределение $Poi(\lambda = 20)$

и $\mathbb{P}(X=k) = \frac{20^k}{k!} e^{-20}$.

def) Нека $X: \Omega \to \mathbb{N}$ е целочислена сл. вел. Тогава под пораждаща ф-я на X разбираме:

$$g_X(s) := \mathbb{E}\, s^X = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \cdot \mathbb{P}(X=n) \quad , \text{ за } s \in [-1,1]$$

$$g_X : [-1,1] \to \mathbb{R} .$$

Следва така:

а) $\mathbb{E}[X] = g'_X(1)$

б) $\mathbb{D}[X] = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2$

в) $k! \, \mathbb{P}(X=k) = g_X^{(k)}(0)$, за $k \geq 0$.

Ex ~~Ако $X \in DUnif(a,b)$, то $g_X(s) = (q+p$~~

~~$\mathbb{E}X = g_X(s)\big|_{s=1} =$~~

Ако $X \in Bi(n,p)$, то $g_X(s) = (q + p \cdot s)^n$

Ако $X \in Ge(p)$, то $g_X(s) = \dfrac{p}{1-qs}$

Ако $X \in Poi(\lambda)$, то $g_X(s) = e^{\lambda s - \lambda}$

def) Нека $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ е вер. п-во. Тогава изображението $X: \Omega \to \mathbb{R}$ се нарича сл. вел., ако за $a < b$ и $I = (a,b)$ е вярно, че $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$.

$$\mathbb{P}(X^{-1}(I)) = \mathbb{P}(a < X < b).$$