* $\vec{a}\,(a_1, a_2)$
  $\vec{b}\,(b_1, b_2)$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \rightarrow$ спрямо ОКС

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \rightarrow$ ОКС

-

* Равнина през 3 точки

$M(1,1,1)$
$N(2,0,1)$
$P(1,0,2)$

I н. $S(x,y,z) \in \alpha$, определена от $M, N, P \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \quad \cdot(-1)$$

II н. Метод на неопределените коефициенти

$\alpha: A.x + B.y + C.z + D = 0 \qquad A = ?,\ B = ?,\ C = ?,\ D = ?$

$M \in \alpha \Rightarrow A.1 + B.1 + C.1 + D = 0$

$N \in \alpha \Rightarrow A.2 + B.0 + C.1 + D = 0$

$P \in \alpha \Rightarrow A.1 + B.0 + C.2 + D = 0$

III н. $S(x,y,z)$
$M(1,1,1)$
$N(2,0,1)$
$P(1,0,2)$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MS}(x-1,\ y-1,\ z-1) \\ \overrightarrow{MN}(1,\ -1,\ 0) \\ \overrightarrow{NP}(-1,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \text{компланарни} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1).(-1) - (y-1).1 + (z-1).(-1) = 0$

$\alpha: -x - y - z + 3 = 0 \ /.(-1)$

$\boxed{\alpha: x + y + z - 3 = 0}$

$M(1,1,1) \rightarrow 1 + 1 + 1 - 3 = 0$ ✓

$N(2,0,1)$ ✓

$P(1,0,2)$ ✓

Задача 7. В равнината е въведена декартова координатна система Oxy и е даден триъгълникът ABC. Известно е, че върхът A на триъгълника има координати $(-2, -2)$; медианата m_B на триъгълника, минаваща през върха B, има уравнение $x + 9y + 8 = 0$, а ъглополовящата l_B на вътрешният ъгъл на триъгълника при върха B има уравнение $y + 1 = 0$.

а) (8 точки) Да се намерят координатите на върховете B и C.

b) (2 точки) Да се намери лицето на триъгълника ABC.

Screen clipping taken: 21.5.2025 г. 19:00

ОКС $K = O_{xy}$: $A(-2;-2)$

$m_B: x + 9y + 8 = 0$

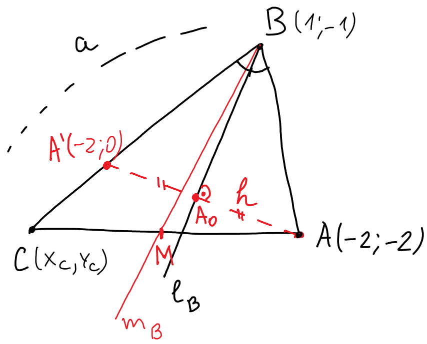
$l_B: y + 1 = 0$

а) ? коорд. B и C;

1) т. $B = m_B \cap \ell_B$

$$\left| \begin{matrix} x + 9y + 8 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left| \begin{matrix} x = -9y - 8 = 9 - 8 = 1 \\ y = -1 \end{matrix} \right. \qquad B(1;-1)$$

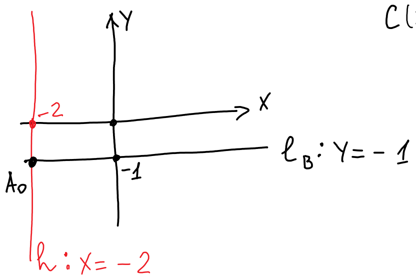
2) При дадена ъглополовяща, използване симетрия спрямо нея



Ако $A \xrightarrow{\sigma_{\ell_B}} A'$, то $A' \in a \equiv BC$

Търсим коорд. на A'

$h \begin{cases} \ni A(-2;-2) \\ \perp \ell_B : y+1=0 \end{cases}$



$\ell_B \parallel Ox$, $h \perp \ell_B \Rightarrow$

$h \parallel Oy \Rightarrow h: x = -2$

$A(-2;-2)$

$A_0 = h \cap \ell_B$

$$\left| \begin{matrix} y = -1 \\ x = -2 \end{matrix} \right. \Rightarrow A_0(-2;-1) \Rightarrow$$

$A'(x';y')$
$A(-2;-2)$
$A_0(-2;-1)$ – средата на AA'

$$\frac{x' + (-2)}{2} = -2$$

$$\frac{y' + (-2)}{2} = -1$$

$A'(-2;0)$

3) ? уравнение на правата $a \begin{cases} \ni B(1;-1) \\ \ni A'(-2,0) \end{cases}$

$$a: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad a: -x - y.3 + 1.(-2) = 0 \ /.(-1)$$

$a: x + 3y + 2 = 0$ 2 проверки

4) Търсим коорд на т. $C(x_c;y_c)$

$C \in a \Rightarrow x_c + 3.y_c + 2 = 0$

Нека M е средата на $AC \Rightarrow M\left(\frac{x_c - 2}{2}, \frac{y_c - 2}{2}\right) \in m_B : x + 9y + 8 = 0$

$$\underbrace{\frac{x_c - 2}{2} + 9.\left(\frac{y_c - 2}{2}\right) + \overset{2}{8} = \overset{2}{0}}_{2} \Rightarrow x_c + 9y_c - 4 = 0$$

т. $C \left| \begin{matrix} x_c + 3y_c + 2 = 0 \\ x_c + 9y_c - 4 = 0 \end{matrix} \right.$

$C(-5;1)$
$A(-2;-2)$
$B(1;-1)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right|$$ спр. ОКС Oxy

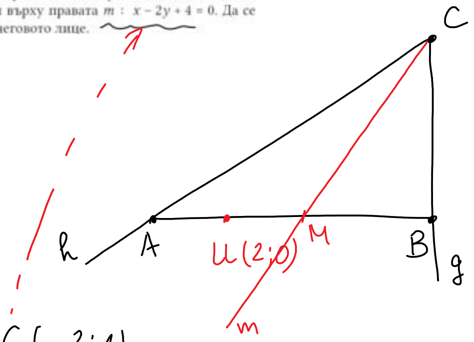
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right|$ спр. ОКС (O_{xy})

Не е вярна спр. O_{xyz}

Задача 7. В равнината е въведена декартова координатна система Oxy. Правите $g:\ y-1=0$ и $h:\ 2x-y+5=0$ са страни на един триъгълник, чиято трета страна минава през точката $U(2,0)$. Известно е още, че една от медианите на този триъгълник лежи върху правата $m:\ x-2y+4=0$. Да се намерят координатите на върховете на триъгълника, както и неговото лице.

Screen clipping taken: 21.5.2025 г. 19:24

ОКС $K = O_{xy}$



1) т. $C = g \cap h$

$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2;1)$

пров., че $C \in m \Rightarrow m$ е медианата от C към AB

2) $A \in h:\ 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow A(x_A;\ 2x_A + 5)$

$y = 2x + 5$

$B \in g:\ y - 1 = 0 \Rightarrow B(x_B;\ 1)$

! A, B, U – колинеарни $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{vmatrix} x_A & 2x_A+5 & 1 \\ x_B & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0}$

3) M е средата на $AB \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{2x_A + 5 + 1}{2}\right) \in m: x - 2y + 4 = 0$

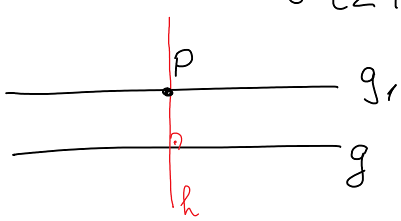
$$\boxed{\frac{x_A + x_B}{2} - 2 \cdot \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) + 4 = 0}$$

Отг. $A(-1;3)$, $B(1;1)$

Примери:

1) $g:\ 3x + 4y + 5 = 0$ Търсим права $g_1 \begin{cases} \parallel g \\ \ni P \end{cases}$

т. $P(1;1) \notin g$



$g_1:\ 3x + 4y + C = 0$

$P \in g_1 \Rightarrow 3.1 + 4.1 + C = 0$

$C = -7 \Rightarrow g_1:\ 3x + 4y - 7 = 0$

2) $h \begin{cases} \ni P \\ \perp g:\ 3x + 4y + 5 = 0 \end{cases}$

$h:\ 4.x - 3y + D = 0$

$P(1;1) \to h \Rightarrow 4-3+D=0 \quad D=-1 \Rightarrow h: 4x-3y-1=0$

Упр. $P \xrightarrow{\sigma_g} P'$, ? т. P'

Задача 8. Спрямо ОКС $K = Oxyz$ в пространството са дадени точките $A(2,\ 0,\ 1)$, $B(-1,\ 2,\ 0)$ и $P(4,\ 1,\ 5)$ и правата $b : \begin{cases} x = 5 \\ z = 6 \end{cases}$.

a) Да се намери общо уравнение на равнината β, която минава през точките A и B и е успоредна на правата b;

б) Да се намерят координатите на точката S, която е симетрична на точката P спрямо равнината $\gamma : x - 3y + 1 = 0$. Ако точките A, B, P, S не са компланарни, да се пресметне обема на тетраедъра $ABPS$.

Screen clipping taken: 21.5.2025 г. 19:43

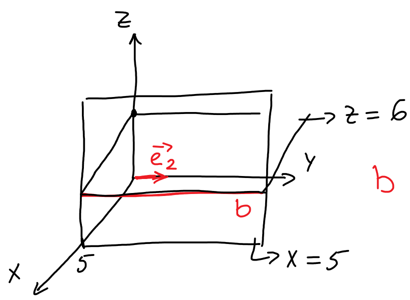
a) $b \begin{cases} x=5 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow$

$x=5$ спр. $Oxyz$ е уравн. на равнина

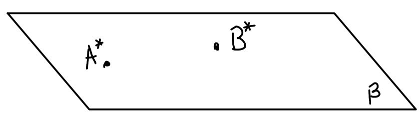
$\Downarrow$

$b: \begin{cases} x=5 \\ y=s \\ z=6 \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$

$B_1(5,0,6), B_2(5,1,6)\ldots$



$b \parallel Oy \Rightarrow b \parallel \vec{e}_2(0;1;0)$



$\beta \parallel b \Leftrightarrow \beta \parallel \vec{e}_2$

$A^*(2;0;1) \in \beta$

$B^*(-1;2;0) \in \beta$

$\beta: A.x + B.y + C.z + D = 0$

$A^* \in \beta \Rightarrow \quad A.2 + B.0 + C.1 + D = 0$

$B^* \in \beta \Rightarrow \quad A.(-1) + B.2 + C.0 + D = 0$

$\vec{e}_2(0,1,0) \parallel \beta \Rightarrow \quad A.0 + B.1 + C.0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$\left| \begin{array}{l} 2A + C + D = 0 \\ -A \qquad + D = 0 \Rightarrow A = D \end{array} \right. \qquad C = -2A - D = -3D$

$(D; 0; -3D; D), \ D \neq 0$

изб. $D = 1$

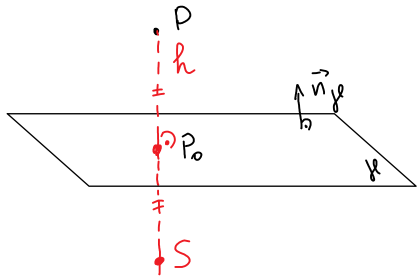
$\beta: x - 3.z + 1 = 0$

б) $P \xrightarrow{\sigma_\gamma} S$

търсим S

$\gamma: x - 3y + 1 = 0$

$P(4;1;5)$



1) $h \begin{cases} \ni P \\ \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow h \parallel \vec{n}_\gamma(1;-3;0) \Rightarrow h: \begin{cases} x = 4 + q.1 \\ y = 1 + q.(-3) \\ z = 5 + 0.q \end{cases}$

2) ?, т. $P_0 = h \cap \gamma \Rightarrow \begin{cases} x = 4+q \\ y = 1-3q \\ z = 5 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4+q-3.(1-3q)+1=0$

$10q + 2 = 0 \Rightarrow q_0 = -\frac{1}{5} \to h$

$P_0\left(4-\frac{1}{5};\ 1+\frac{3}{5},\ 5\right)$

$P_0\left(\frac{19}{5};\ \frac{8}{5};\ 5\right)$ – средата на PS

$P(4;\ 1;\ 5)$

$S(x',\ y',\ 5)$ $\qquad \frac{x'+4}{2} = \frac{19}{5} \Rightarrow \qquad x' = \frac{38}{5} - 4 = \frac{18}{5}$

$\qquad y' = 2.\frac{8}{5} - 1 = \frac{11}{5}$

$S\left(\frac{18}{5},\ \frac{11}{5},\ 5\right)$

3) Лице на $\triangle ABP$

$A(2;0;1)$

$B(-1;2;0)$

$P(4;1;5)$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AP}|}{2}$$

$\vec{AB}(-3,\ 2,\ -1)$

$\vec{AP}(\underset{I}{2},\ \underset{II}{1},\ \underset{III}{4})$

$$\Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AP}\left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$\vec{AB} \times \vec{AP}(9;\ 10;\ -7)$

$(\vec{AB} \times \vec{AP})^2 = 9^2 + 10^2 + (-7)^2 = 81 + 49 + 100 = 230$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{\sqrt{230}}{2}$$

4) $V_{ABPS} = ?$

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\langle \vec{AB}, \vec{AP}, \vec{AS} \rangle|$$

$A(2;0;1)$

$S\left(\frac{18}{5};\ \frac{11}{5},5\right)$

$\vec{AS}\left(\frac{8}{5};\ \frac{11}{5},4\right)$

$\vec{AB}(-3,\ 2,\ -1)$

$\vec{AP}(2,\ 1,\ 4)$

$\vec{AS}\left(\frac{8}{5};\ \frac{11}{5};\ 4\right)$

Спр. ОКС

$$\langle \vec{AB}, \vec{AP}, \vec{AS} \rangle = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ \frac{8}{5} & \frac{11}{5} & 4 \end{vmatrix}$$

Задача 1.

Спрямо афинна координатна система $K = Oxyz$ в реалното тримерно пространство $\mathbb{R}^3$ са дадени кръстосаните прави:

$\{x = 3 + s \qquad \{x = -2 + 3p$

Задача 1.

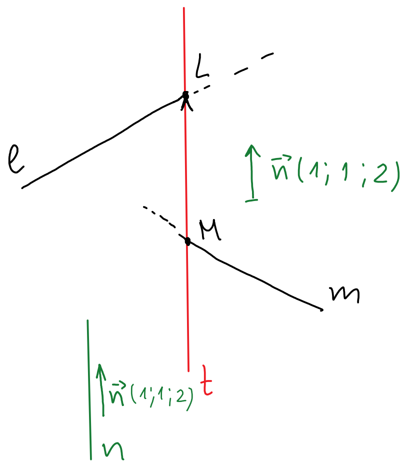
Спрямо афинна координатна система $K = Oxyz$ в реалното тримерно пространство $\mathbb{R}^3$ са дадени кръстосаните прави:

$$l : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4s \end{cases} \quad \text{и} \quad m : \begin{cases} x = -2 + 3p \\ y = -1 \\ z = 4 - 5p \end{cases}.$$

Да се намери трансверзалата t на правите l и m, ако е известно, че t е успоредна на права n с уравнения

$$n : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}.$$

Screen clipping taken: 21.5.2025 г. 20:16



1) $n \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$

Търсим параметр. уравнения на n

Изб. $y = p \to$ параметър

$\left| \begin{array}{l} x + z = 3p \\ x - z = -4 - p \end{array} \right\} + \Rightarrow 2x = -4 + 2p$

$\left| \begin{array}{l} x = -2 + p \\ y = p \\ z = 3p - x = 3p - (-2 + p) = 2 + 2p \end{array} \right.$

$n : \begin{cases} x = -2 + 1.p \\ y = 1.p \\ z = 2 + 2.p \end{cases}$

$n \parallel \vec{n}(1;1;2)$

2) $L \in l \Rightarrow L(3+s; -1+2s; 4s)$

$M \in m \Rightarrow M(-2+3p; -1; 4-5p)$

$\vec{ML}(5 - 3p + s; 2s; -4 + 4s + 5p) \parallel \vec{n}(1;1;2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5 - 3p + s}{1} = \dfrac{2s}{1} = \dfrac{-4 + 4s + 5p}{2}$

$5 - 3p + s = 2s$

$2 \cdot \cancel{2s} = -4 + \cancel{4s} + 5p \Rightarrow p = \dfrac{4}{5} \Rightarrow s = 5 - 3p = \dfrac{13}{5}$

$\downarrow$

M

$t \begin{cases} \ni M \\ \parallel \vec{n}(1,1,2) \end{cases}$