Скелет на документ

Тодор Дуков

Съдържание

Глава 1

Примерна глава

1.1 Примерна секция

Нека като за начало да дадем една аксиома.

Аксиома 1.1.1 (Аксиома за обема)**.** *Две множества са равни т.с.т.к. съдържат едни и същи елементи т.е.*

$$(\forall x)(\forall y)[x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$$

Сега нека дадем и една дефиниция.

Дефиниция 1.1.2 (Наредена двойка)**.** Ако x и y са множества, то наредена двойка на x и y ще наричаме множеството $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ и ще го бележим с $\langle x,\, y \rangle$.

Твърдение 1.1.3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2})$

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по $n \in \mathbb{N}$.
База: При $n = 0$ се получава, че $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ ✓
ИС: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \overset{\text{ИП}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ □

Лема 1.1.4 (за покачването)**.** *Езикът е* L *регулярен. Тогава* $(\exists p \in \mathbb{N}\, \forall \alpha \in \Sigma^*\, \exists x, y, z \in \Sigma^*, xyz = \alpha, |xy| \leq p, |y| \geq 1\, \forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$.

Доказателство. Езикът L е регулярен.
Следователно съществува ДКА $\mathcal{A} = \langle Q,\, \Sigma,\, s,\, \delta,\, F\, \rangle$, такъв че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$.
Нека $p = |Q|$ и нека $q_1, \ldots, q_p$ са състоянията от Q. Нека $\alpha \in L$ е такава, че $|\alpha| = n$, където $n \geq p$.
Ще разбием α на $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Sigma$ (т.е. $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n$). Знаем, че съществуват $q_{i_0} = s, \ldots, q_{i_n} \in Q$, такива че $(\forall j \in \{1, \ldots, n\})(\delta(q_{i_{j-1}}, \alpha_j) = q_{i_j})$.
Нека разгледаме думата $\alpha_1 \ldots \alpha_p$. За нея знаем, че по време на четенето на думата автоматът минава през $p + 1$ състояния.
Следователно по принципа на Дирихле съществуват $t_1, t_2 \in \{1, \ldots, p\}$, където $t_1 < t_2$ са такива, че $q_{i_{t_1}} = q_{i_{t_2}}$.
Нека $x = \alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}$, $y = \alpha_{t_1+1} \ldots \alpha_{t_2}$, $z = \alpha_{t_2+1} \ldots \alpha_n$.
Сигурни сме, че $|xy| \leq p$, защото $t_2 \leq p$ и че $|y| \geq 1$ понеже $t_1 \neq t_2$. Знаем, че $\delta^*(q_{i_{t_1}}, y) = q_{i_{t_2}}$.

Твърдение 1.1.5. $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i) = q_{i_{t_2}})$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по $i \in \mathbb{N}$.
База: $\delta^*(q_{i_{t_1}}, \epsilon) = q_{i_{t_1}} = q_{i_{t_2}}$ ✓
ИС: $\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^{i+1}) \overset{\text{Деф}}{=} \delta(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i), y) \overset{\text{ИП}}{=} \delta(q_{i_{t_2}}, y) = \delta(q_{i_{t_1}}, y) = q_{i_{t_2}}$ □

Знаем, че $\alpha = xyz \in L$. Тъй като $xyz = \alpha$, имаме че $\delta^*(s, xyz) \in F$. От тук следва, че $\delta^*(\delta^*(s, xy), z) \in F$, следователно $\delta^*(\delta^*(\delta^*(s, x), y), z) \in F$. $\delta^*(s, x) = q_{i_{t_1}} \Rightarrow \delta^*(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y), z) \in F$. От доказаното твърдение имаме, че $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i) = q_{i_{t_2}} = q_{i_{t_1}})$. Освен това знаем, че $\delta^*(q_{i_{t_2}}, z) \in F$. Следователно $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i), z) \in F)$. От тук можем да заключим, че $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(\delta^*(\delta^*(s, x), y^i), z) \in F)$ и вървейки в обратната посока (обединяването на всички δ^*) получаваме, че $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(s, xy^iz) \in F)$, с което доказахме лемата.

□

Забележка (Примерна забележка)*.* $(\forall x)(\varnothing \subseteq x)$

Глава 2

Друга примерна глава

2.1 Примерна секция

Това е просто случаен текст, който си губиш времето да четеш.

2.2 Друга примерна секция

Това е просто случаен текст, който си губиш времето да четеш.