Няколко задачи за (не)регулярност

1 Конструкции с автомати

Задача 1.1. *Да се докаже, че за всеки два регулярни езика L_1, L_2, е регулярен и езикът:*

$$L = \{a_1 b_1 \dots a_n b_n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, a_i, b_i \in \Sigma \,\&\, a_1 \dots a_n \in L_1 \,\&\, b_1 \dots b_n \in L_2\}$$

Решение. Нека вземем ДКА $\mathcal{A}_i = \langle \Sigma,\, Q_i,\, s_i,\, \delta_i,\, F_i \rangle$ за L_i, където $i = 1, 2$.
Строим автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma,\, Q,\, s,\, \delta,\, F \rangle$ за L:

- $Q = Q_1 \times Q_2 \times \{0, 1\}$
- $s = \langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle$
- $\delta(\langle p_1,\, p_2,\, 0 \rangle, x) = \langle \delta_1(p_1,\, x),\, p_2,\, 1 \rangle$
- $\delta(\langle p_1,\, p_2,\, 1 \rangle, x) = \langle p_1,\, \delta_2(p_2,\, x),\, 0 \rangle$
- $F = F_1 \times F_2 \times \{0\}$

Сега ще покажем с индукция по $|\alpha|$, че:

$$(\star) \begin{cases} \text{1. ако } \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{2n} \text{ за някои } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \in \Sigma \text{ то:} \\ \delta^*(\langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle, \alpha) = \langle \delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}),\, \delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}),\, 0 \rangle \\ \text{2. ако } \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_{2n+1} \text{ за някои } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_{2n+1} \in \Sigma, \text{ то:} \\ \delta^*(\langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle, \alpha) = \langle \delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1}),\, \delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}),\, 1 \rangle \end{cases}$$

- в базата имаме $\delta^*(\langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle, \varepsilon) = \langle s_1,\, s_2,\, \varepsilon \rangle = \langle \delta_1^*(s_1,\, \varepsilon),\, \delta_2^*(s_2,\, \varepsilon),\, 0 \rangle$
- индукционната стъпка е следната:

$$\begin{aligned} \delta^*(\langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n}) &\overset{\text{деф } \delta^*}{=} \delta(\delta^*(\langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n-1}), \alpha_{2n}) \\ &\overset{\text{(ИП)}}{=} \delta(\langle \delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}),\, \delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n-2}),\, 1 \rangle, \alpha_{2n}) \\ &\overset{\text{деф } \delta}{=} \langle \delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}),\, \delta_2(\delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n-2}),\, \alpha_{2n}),\, 0 \rangle \\ &\overset{\text{деф } \delta_2^*}{=} \langle \delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}),\, \delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}),\, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^*(\langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n+1}) &\overset{\text{деф } \delta^*}{=} \delta(\delta^*(\langle s_1,\, s_2,\, 0 \rangle, \alpha_1 \dots \alpha_{2n}), \alpha_{2n+1}) \\ &\overset{\text{(ИП)}}{=} \delta(\langle \delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}),\, \delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}),\, 0 \rangle, \alpha_{2n+1}) \\ &\overset{\text{деф } \delta}{=} \langle \delta_1(\delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}),\, \alpha_{2n+1}),\, \delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}),\, 1 \rangle \\ &\overset{\text{деф } \delta_1^*}{=} \langle \delta_1^*(s_1,\, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1}),\, \delta_2^*(s_2,\, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}),\, 1 \rangle \end{aligned}$$

Имайки $(\star)$, получаваме следните еквивалентности:

$$\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \overset{\text{деф } \mathcal{L}(\mathcal{A})}{\iff} \delta^*(\underbrace{\langle s_1,\, s_2 \rangle}_{s}, \alpha) \in F_1 \times F_2 \times \{0\} \quad \text{// тук 0 казва, че думата е с четна дължина}$$

$$\overset{(\star)}{\iff} \quad \text{има } n \in \mathbb{N} \text{ и } \alpha_1, \dots, \alpha_{2n} \in \Sigma \text{ такива, че } \underbrace{\delta_1^*(s_1, \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1}) \in F_1}_{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n-1} \in L_1} \text{ и } \underbrace{\delta_2^*(s_2, \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n}) \in F_2}_{\alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2n} \in L_2}$$

$$\overset{\text{деф } L}{\iff} \quad \alpha_1 \dots \alpha_{2n} \in L$$

Задача 1.2. *Да се докаже, че за всеки регулярен език L, езикът $L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha\alpha \in L\}$ също е регулярен.*

Решение. Нека вземем ДКА $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ за L. Нека $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ като Б.О.О. $q_1 = s$.
Строим автомат $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', s', \delta', F' \rangle$ за L':

- $Q' = Q^n$
- $s' = \langle q_1, \dots, q_n \rangle$
- $\delta'(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, x) = \langle \delta(p_1, x), \dots, \delta(p_n, x) \rangle$
- $F' = \{\langle p_1, \dots, p_n \rangle \in Q' \mid (\exists i \in \{1, \dots, n\})(p_1 = q_i \,\&\, p_i \in F)\}$

Сега ще докажем, че $\underbrace{\delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \alpha) = \langle \delta^*(p_1, \alpha), \dots, \delta^*(p_n, \alpha) \rangle}_{(\star)}$ с индукция по $|\alpha|$:

- в базата имаме $\delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \varepsilon) = \langle p_1, \dots, p_n \rangle = \langle \delta^*(p_1, \varepsilon), \dots, \delta^*(p_n, \varepsilon) \rangle$
- индукционната стъпка е следната:

$$\begin{aligned}\delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \beta x) &\overset{\text{деф } \delta'^*}{=} \delta'(\delta'^*(\langle p_1, \dots, p_n \rangle, \beta), x) \overset{\text{(ИП)}}{=} \delta'(\langle \delta^*(p_1, \beta), \dots, \delta^*(p_n, \beta) \rangle, x)\\ &\overset{\text{деф } \delta'}{=} \langle \delta(\delta^*(p_1, \beta), x), \dots, \delta(\delta^*(p_n, \beta), x) \rangle \overset{\text{деф } \delta^*}{=} \langle \delta^*(p_1, \beta x), \dots, \delta^*(p_n, \beta x) \rangle\end{aligned}$$

Имайки $(\star)$, получаваме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned}\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}') &\overset{\text{деф } \mathcal{L}(\mathcal{A}')}{\iff} \delta'^*(\underbrace{\langle q_1, \dots, q_n \rangle}_{s'}, \alpha) \in F' \overset{(\star)}{\iff} \langle \delta^*(q_1, \alpha), \dots, \delta^*(q_n, \alpha) \rangle \in F'\\ &\overset{\text{деф } F'}{\iff} (\exists i \in \{1, \dots, n\})(\delta^*(\underbrace{s}_{q_1}, \alpha) = q_j \,\&\, \delta^*(q_j, \alpha) \in F) \iff \delta^*(s, \alpha\alpha) \in F \overset{\text{деф } \mathcal{L}(\mathcal{A})}{\iff} \alpha\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) = L\end{aligned}$$

Задача 1.3. *Да се докаже, че за всеки регулярен език L, езикът $L' = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \alpha\alpha^{rev} \in L\}$ също е регулярен.*

Решение. Нека вземем ДКА $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ за L. Строим автомат $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', s', \delta', F' \rangle$ за L':

- $Q' = Q \times \mathcal{P}(Q)$
- $s' = \langle s, F \rangle$
- $\delta'(\langle p, P \rangle, x) = \langle \delta(p, x), \{q \in Q \mid \delta(q, x) \in P\} \rangle$
- $F' = \{\langle p, P \rangle \in Q' \mid p \in P\}$

Сега ще докажем, че $\underbrace{\delta'^*(\langle p, P \rangle, \alpha) = \langle \delta^*(p, \alpha), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \alpha) \in P\} \rangle}_{(\star)}$ с индукция по $|\alpha|$:

- в базата имаме $\delta'^*(\langle p, P \rangle, \varepsilon) = \langle p, P \rangle = \langle \delta^*(p, \varepsilon), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \varepsilon^{rev}) \in P\} \rangle$
- индукционната стъпка е следната:

$$\begin{aligned}\delta'^*(\langle p, P \rangle, \beta x) = \langle p, P \rangle &\overset{\text{деф } \delta'^*}{=} \delta'(\delta'^*(\langle p, P \rangle, \beta), x) \overset{\text{(ИП)}}{=} \delta'(\langle \delta^*(p, \beta), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \beta^{rev}) \in P\} \rangle, x)\\ &\overset{\text{деф } \delta'}{=} \langle \delta(\delta^*(p, \beta), x), \{q \in Q \mid \delta^*(\delta(q, x), \beta^{rev}) \in P\} \rangle\\ &\overset{\text{св } \delta^*}{=} \langle \delta^*(p, \beta x), \{q \in Q \mid \delta^*(q, (\beta x)^{rev}) \in P) \rangle\end{aligned}$$

Имайки $(\star)$, получаваме следните еквивалентности:

$$\begin{aligned}\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}') &\overset{\text{деф } \mathcal{L}(\mathcal{A}')}{\iff} \delta'^*(\underbrace{\langle s, F \rangle}_{s'}, \alpha) \in F' \overset{(\star)}{\iff} \langle \delta^*(s, \alpha), \{q \in Q \mid \delta^*(q, \alpha^{rev} \in F)\} \rangle \in F'\\ &\overset{\text{деф } F'}{\iff} \delta^*(\delta^*(s, \alpha), \alpha^{rev}) \in F \overset{\text{св } \delta^*}{\iff} \delta^*(s, \alpha\alpha^{rev}) \in F \overset{\text{деф } \mathcal{L}(\mathcal{A})}{\iff} \alpha\alpha^{rev} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) = L\end{aligned}$$

Задача 1.4. *Нека* $c, \# \notin \Sigma$ *и* $c \neq \#$. *Да се докаже, че за всеки регулярен език* L *е регулярен езикът*

$$L' = \{\alpha\#c^n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, \alpha^n \in L\}$$

Упътване: да се използва техниката от Задача 1.2

Задача 1.5. *Нека за всяко* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ *с* $s(\alpha, \beta)$ *да бележим броят на срещания на* β *на* α. *Да се докаже, че е регулярен езикът:*

$$L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid s(\alpha, aa) \text{ е четно }\}$$

Решение. Нека дефинираме функцията $last : \Sigma^* \to \Sigma^{\leq 2}$ по следния начин:

- $last(\varepsilon) = \varepsilon$
- $last(x) = x$ за всяко $x \in \Sigma$
- $last(\beta x y) = xy$ за всяко $x, y \in \Sigma$

Можем да забележим, че за всяко $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ имаме $last(\alpha\beta) = last(last(\alpha)\beta)$.
Строим $\mathcal{A} = \langle \Sigma,\, Q,\, s,\, \delta,\, F\rangle$ за L:

- $Q = \Sigma^{\leq 2} \times \{0, 1\}$
- $s = \langle \varepsilon,\, 0\rangle$
- $\delta(\langle \beta,\, c\rangle, x) = \langle last(\beta x),\, c'\rangle$, където $c' = \begin{cases} 1 - c & \text{ако } last(\beta x) = aa \\ c & \text{иначе} \end{cases}$
- $F = \Sigma^{\leq 2} \times \{0\}$

Сега ще покажем, че $\underbrace{\delta^*(s, \alpha) = \langle last(\alpha),\, s(\alpha,\, aa) \pmod 2\rangle}_{(\star)}$ с индукция по $|\alpha|$:

- в базата имаме $\delta^*(s, \alpha) = s = \langle \varepsilon,\, 0\rangle = \langle last(\alpha),\, s(\alpha,\, 2)\rangle$
- индукционната стъпка е следната:

  $$\delta^*(s, \beta x) \stackrel{\text{деф } \delta^*}{=} \delta(\delta^*(s, \beta), x) \stackrel{\text{(ИП)}}{=} \delta(\langle last(\beta),\, s(\beta,\, aa) \pmod 2\rangle, x) \stackrel{\text{деф } \delta}{=} \langle last(last(\beta)x),\, c\rangle \stackrel{\text{заб}}{=} \langle last(\beta x),\, c\rangle, \text{ където}$$

  $$c = \begin{cases} 1 - s(\beta, aa) & \text{ако } last(\beta x) = aa \\ s(\beta, aa) & \text{ако } last(\beta x) \neq aa \end{cases}$$

  Когато $last(\beta x) = aa$, то тогава ние сме имали ново срещане на aa и наистина трябва да сменим четността. В противен случай ще бъде коректно да не сменяме нищо. Значи нашата конструкция наистина прави това, което искаме.

Имайки $(\star)$, получаваме следните еквивалентности:

$$\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{деф } \mathcal{L}(\mathcal{A})}{\iff} \delta^*(s, \alpha) \in F \stackrel{(\star)}{\iff} \langle last(\alpha),\, s(\alpha,\, aa) \pmod 2\rangle \in \Sigma^{\leq 2} \times \{0\} \iff s(\alpha) \text{ е четно} \stackrel{\text{деф } L}{\iff} \alpha \in L$$

Задача 1.6. *Нека фиксираме* $\beta_1, \beta_2 \in \Sigma^*$. *Да се докаже, че е регулярен езикът*

$$L_{odd}(\beta_1, \beta_2) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid s(\alpha, \beta_1) + s(\alpha, \beta_2) \text{ е нечетно }\}$$

Упътване: да се използва техниката от Задача 1.5

Задача 1.7. *Да се докаже, че езикът* $L = \{\alpha \in \{1, 2\}^* \mid$ *сумата на всички инфикси е четна*$\}$ *е регулярен.*

2 Индукции по строенето на регулярните езици

Задача 2.1. *Да се докаже, че за всеки регулярен език L, езикът* $\mathrm{Prefix}(L)$ *също е регулярен.*

Решение. Доказваме с индукция по строенето на регулярните езици:

- $\mathrm{Prefix}(\varnothing) = \varnothing$ - регулярен, $\mathrm{Prefix}(\{\varepsilon\}) = \{\varepsilon\}$ - регулярен, $\mathrm{Prefix}(\{a\}) = \{\varepsilon, a\}$ - регулярен
- $\mathrm{Prefix}(L_1 \cup L_2) = \underbrace{\mathrm{Prefix}(L_1)}_{\text{рег по (ИП)}} \cup \underbrace{\mathrm{Prefix}(L_2)}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен
- $\mathrm{Prefix}(L_1 \cdot L_2) = \underbrace{\mathrm{Prefix}(L_1)}_{\text{рег по (ИП)}} \cup (L_1 \cdot \underbrace{\mathrm{Prefix}(L_2)}_{\text{рег по (ИП)}})$ - регулярен

  Нека се опитаме да си представим защо това равенство наистина е такова. Нека $\alpha_1 \in L_1$ и $\alpha_2 \in L_2$.

  Тогава имаме две възможности за β да бъде префикс на $\alpha_1\alpha_2$:

  1 сл. β е префикс само на α_1:

β	$\dots$
α_1	α_2

  2 сл. β напълно съдържа α_1 заедно с част от α_2:

β	$\dots$
α_1	α_2

- $\mathrm{Prefix}(L^*) = L^* \cdot \underbrace{\mathrm{Prefix}(L)}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен

  Тук имаме обобщение на обединението и конкатенацията.

Задача 2.2. *Да се докаже, че за всеки регулярен език L, езикът* $\mathrm{Suffix}(L)$ *също е регулярен.*
Упътване: могат да се направят подобни разсъждения на Задача 2.1

Задача 2.3. *Да се докаже, че за всеки регулярен език L, езикът* $\mathrm{Infix}(L)$ *също е регулярен.*
Упътване: да се помисли какво общо има операцията Infix *със операциите* Prefix *и* Suffix

Задача 2.4. *Да се докаже, че за всеки регулярен език L, езикът L^{rev} също е регулярен.*

Решение. Доказваме с индукция по строенето на регулярните езици:

- $\varnothing^{rev} = \varnothing$ - регулярен, $\{\varepsilon\}^{rev} = \{\varepsilon\}$ - регулярен, $\{a\}^{rev} = \{a\}$ - регулярен
- $(L_1 \cup L_2)^{rev} = \underbrace{L_1^{rev}}_{\text{рег по (ИП)}} \cup \underbrace{L_2^{rev}}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен
- $(L_1 \cdot L_2)^{rev} = \underbrace{L_2^{rev}}_{\text{рег по (ИП)}} \cdot \underbrace{L_1^{rev}}_{\text{рег по (ИП)}}$ - регулярен

  За да се убеди човек в това равенство може да мисли на ниво думи т.е. за $(\alpha \cdot \beta)^{rev} = \beta^{rev} \cdot \alpha^{rev}$.
- $(L^*)^{rev} = (\underbrace{L^{rev}}_{\text{рег по (ИП)}})^*$ - регулярен

  Тук имаме обобщение на обединението и конкатенацията.

Задача 2.5. *Да се докаже, че за всеки регулярен език L, езикът* $\mathrm{Subseq}(L)$*, съставен от всички подредици на думи от L, също е регулярен.*

Задача 2.6. *Да се докаже, че за всеки регулярен език $L \subseteq \Sigma_1^*$ и хомоморфизъм $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, езикът $h[L]$ също е регулярен.*

Задача 2.7. *Да се докаже, че за всеки регулярен език $L \subseteq \Sigma_1^*$ и регулярен хомоморфизъм $h : \Sigma_1^* \to \mathcal{P}(\Sigma_2^*)$, е регулярен езикът:*

$$\bigcup_{\alpha \in L} h(\alpha)$$

3 Нерегулярни езици

Задача 3.1. *Да се докаже, че езикът* $L = \{a^{1+2+\dots+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *не е регулярен.*

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > k$. Тогава $a^{n+1}a^{1+\dots+n} = a^{1+\dots+n+(n+1)} \in L$, но понеже $k < n$, имаме неравенствата $1+\dots+n < 1+\dots+n+(k+1) < 1+\dots+n+(n+1)$, откъдето заключаваме, че $a^{k+1}a^{1+\dots+n} \notin L$. Така получаваме, че $a^{1+\dots+n} \in (a^{n+1})^{-1}(L)$ и $a^{1+\dots+n} \notin (a^{k+1})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{n+1})^{-1}(L) \neq (a^{k+1})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^{n+1})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.2. *Да се докаже, че езикът* $L = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *не е регулярен.*

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n > k$. Тогава $a^{n!}a^{n!n} = a^{n!+n!n} = a^{n!(n+1)} = a^{(n+1)!} \in L$. Обаче понеже $k < n$, имаме неравенствата $n! < k! + n!n < n! + n!n = (n+1)!$, откъдето $a^{k!}a^{n!n} \notin L$. Така получаваме, че $a^{n!n} \in (a^{n!})^{-1}(L)$ и $a^{n!n} \in (a^{k!})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{n!})^{-1}(L) \neq (a^{k!})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^{n!})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.3. *Да се докаже, че езикът* $L = \{a^{F_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *не е регулярен, където* F_n *е* n*-тото число на Фибоначи.*

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ са такива, че $2 \leq k < n$. Имаме, че $a^{F_n}a^{F_{n+1}} = a^{F_n+F_{n+1}} = a^{F_{n+2}} \in L$. Понеже $2 \leq k < n$, имаме неравенството $F_k < F_n$, откъдето $F_{n+1} < F_{n+1} + F_k < F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Така получаваме, че $a^{F_k}a^{F_{n+1}} \notin L$. Следователно $a^{F_{n+1}} \in (a^{F_n})^{-1}(L)$ и $a^{F_{n+1}} \notin (a^{F_k})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{F_n})^{-1}(L) \neq (a^{F_k})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^{F_n})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, n \geq 2\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.4. *Да се докаже, че езикът* $L = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \,\&\, \mathrm{GCD}(n, m) = 1\}$ *не е регулярен.*

Решение. Нека с p_n бележим n-тото просто число ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5$ и така нататък). Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Очевидно $\mathrm{GCD}(p_n, p_k) = 1$, откъдето $a^{p_n}b^{p_k} \in L$. Също така понеже $\mathrm{GCD}(p_k, p_k) = p_k \neq 1$, имаме $a^{p_k}b^{p_k} \notin L$. Така получаваме, че $b^{p_k} \in (a^{p_n})^{-1}(L)$ и $b^{p_k} \notin (a^{p_k})^{-1}(L)$, откъдето $(a^{p_n})^{-1}(L) \neq (a^{p_k})^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно (понеже простите числа са безброй много) подмножество $\{(a^{p_n})^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.5. *Да се докаже, че езикът* $L = \{\alpha\alpha \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ *не е регулярен.*

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Нека $a^n b a^k b = \alpha\alpha$ за някое $\alpha \in \Sigma^*$. Тъй като $|a^n b a^k b|_b = 2$, то $|\alpha|_b = 1$. Също така понеже $a^n b a^k b$ завършва на b, то α завършва на b. Тогава остава само $\alpha = a^n b = a^k b$, откъдето $n = k$. Следователно ако $n \neq k$, имаме $a^n b a^n b \in L$ и $a^k b a^n b \notin L$. Така $a^n b \in (a^n b)^{-1}(L)$ и $a^n b \notin (a^k b)^{-1}(L)$, откъдето $(a^n b)^{-1}(L) \neq (a^k b)^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^n b)^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.6. *Да се докаже, че езикът* $L = \{\alpha\alpha^{rev} \mid \alpha \in \Sigma^*\}$ *не е регулярен.*

Решение. Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Нека $a^n b a^k b = \alpha\alpha^{rev}$ за някое $\alpha \in \Sigma^*$. Тъй като $|a^n b a^k b|_b = 2$, то $|\alpha|_b = 1$. Също така понеже двете срещание на b във $a^n bba^k$ са съседни, остава само $\alpha = a^n b$ и $\alpha^{rev} = ba^k$, откъдето $n = k$. Следователно ако $n \neq k$, имаме $a^n bba^n \in L$ и $a^k bba^n \notin L$. Така $ba^n \in (a^n b)^{-1}(L)$ и $ba^n \notin (a^k b)^{-1}(L)$, откъдето $(a^n b)^{-1}(L) \neq (a^k b)^{-1}(L)$. Намерихме безкрайно подмножество $\{(a^n b)^{-1}(L) \mid n \in \mathbb{N}\}$ на $\{\alpha^{-1}(L) \mid \alpha \in \Sigma^*\}$, откъдето L не е регулярен.

Задача 3.7. *Да се покаже език* L*, за който* $\mathrm{Sort}(L) = \{a^{|\alpha|_a} b^{|\alpha|_b} \mid \alpha \in L\}$ *не е регулярен.*

Задача 3.8. *Да се покаже език* L*, за който* $\mathrm{Ord}(L) = \{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, a_i, b_i \in \Sigma \,\&\, a_1 b_1 \dots a_n b_n \in L\}$ *не е регулярен.*