

# Скелет на документ

Тодор Дуков

# Съдържание

<b>1</b>	<b>Примерна глава</b>	<b>2</b>
1.1	Примерна секция . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Друга примерна глава</b>	<b>4</b>
2.1	Примерна секция . . . . .	4
2.2	Друга примерна секция . . . . .	4

# Глава 1

## Примерна глава

### 1.1 Примерна секция

Нека като за начало да дадем една аксиома.

**Аксиома 1.1.1** (Аксиома за обема). *Две множества са равни т.с.т.к. съдържат едни и същи елементи т.е.*

$$(\forall x)(\forall y)[x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$$

Сега нека дадем и една дефиниция.

**Дефиниция 1.1.2** (Наредена двойка). Ако  $x$  и  $y$  са множества, то наредена двойка на  $x$  и  $y$  ще наричаме множеството  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  и ще го бележим с  $\langle x, y \rangle$ .

**Твърдение 1.1.3.**  $(\forall n \in \mathbb{N})(\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2})$

*Доказателство.* Ще докажем твърдението с индукция по  $n \in \mathbb{N}$ .

База: При  $n = 0$  се получава, че  $0 = \frac{0(0+1)}{2} \checkmark$

$$\begin{aligned} \text{ИС: } \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \stackrel{\text{ип}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned} \quad \square$$

**Лема 1.1.4** (за покачването). *Езикът е  $L$  регулярен. Тогава  $(\exists p \in \mathbb{N} \forall \alpha \in \Sigma^* \exists x, y, z \in \Sigma^*, xyz = \alpha, |xy| \leq p, |y| \geq 1 \forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$ .*

*Доказателство.* Езикът  $L$  е регулярен.

Следователно съществува ДКА  $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F \rangle$ , такъв че  $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$ .

Нека  $p = |Q|$  и нека  $q_1, \dots, q_p$  са състоянията от  $Q$ . Нека  $\alpha \in L$  е такава, че  $|\alpha| = n$ , където  $n \geq p$ .

Ще разбием  $\alpha$  на  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma$  (т.е.  $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$ ). Знаем, че съществуват  $q_{i_0} = s, \dots, q_{i_n} \in Q$ , такива че  $(\forall j \in \{1, \dots, n\})(\delta(q_{i_{j-1}}, \alpha_j) = q_{i_j})$ .

Нека разгледаме думата  $\alpha_1 \dots \alpha_p$ . За нея знаем, че по време на четенето на думата автоматът минава през  $p + 1$  състояния.

Следователно по принципа на Дирихле съществуват  $t_1, t_2 \in \{1, \dots, p\}$ , където  $t_1 < t_2$  са такива, че  $q_{i_{t_1}} = q_{i_{t_2}}$ .

Нека  $x = \alpha_1 \dots \alpha_{t_1}$ ,  $y = \alpha_{t_1+1} \dots \alpha_{t_2}$ ,  $z = \alpha_{t_2+1} \dots \alpha_n$ .

Сигурни сме, че  $|xy| \leq p$ , защото  $t_2 \leq p$  и че  $|y| \geq 1$  понеже  $t_1 \neq t_2$ . Знаем, че  $\delta^*(q_{i_{t_1}}, y) = q_{i_{t_2}}$ .

**Твърдение 1.1.5.**  $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i) = q_{i_{t_2}})$ .

*Доказателство.* Ще докажем твърдението с индукция по  $i \in \mathbb{N}$ .

База:  $\delta^*(q_{i_{t_1}}, \epsilon) = q_{i_{t_1}} = q_{i_{t_2}}$  ✓

ИС:  $\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^{i+1}) \stackrel{\text{Деф}}{=} \delta^*(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i), y) \stackrel{\text{ИП}}{=} \delta(q_{i_{t_2}}, y) = \delta(q_{i_{t_1}}, y) = q_{i_{t_2}}$  □

Знаем, че  $\alpha = xyz \in L$ . Тъй като  $xyz = \alpha$ , имаме че  $\delta^*(s, xyz) \in F$ . От тук следва, че  $\delta^*(\delta^*(s, xy), z) \in F$ , следователно  $\delta^*(\delta^*(\delta^*(s, x), y), z) \in F$ .  $\delta^*(s, x) = q_{i_{t_1}} \Rightarrow \delta^*(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y), z) \in F$ . От доказаното твърдение имаме, че  $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i) = q_{i_{t_2}} = q_{i_{t_1}})$ . Освен това знаем, че  $\delta^*(q_{i_{t_2}}, z) \in F$ . Следователно  $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(\delta^*(q_{i_{t_1}}, y^i), z) \in F)$ . От тук можем да заключим, че  $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(\delta^*(\delta^*(s, x), y^i), z) \in F)$  и вървейки в обратната посока (обединяването на всички  $\delta^*$ ) получаваме, че  $(\forall i \in \mathbb{N})(\delta^*(s, xy^iz) \in F)$ , с което доказахме лемата. □

*Забележка* (Примерна забележка).  $(\forall x)(\emptyset \subseteq x)$

## Глава 2

# Друга примерна глава

### 2.1 Примерна секция

Това е просто случаен текст, който си губиш времето да четеш.

### 2.2 Друга примерна секция

Това е просто случаен текст, който си губиш времето да четеш.