Съждително смятане

1 Език

Символите които ще ползваме ще бъдат:

- най-много изброимо множество от променливи Vars
- логическите съюзи $\neg$ и $\vee$, които не са част от Vars

Забележка. Ще бележим променливите с малките букви p, q, r и т.н. с потенциални горни/долни индекси.

Формула ще наричаме всяка крайна редица от символи, която може да се получи от краен брой прилагания на следните правила:

- ако $p \in \text{Vars}$, то е формула
- ако φ е формула, то $\neg\varphi$ също е формула
- ако φ_1 и φ_2 са формули, то $\vee\varphi_1\varphi_2$ също е формула

Забележка. Ще бележим формули с гръцките букви φ, ψ, χ и т.н. с потенциални горни/долни индекси.

Когато две формули φ и ψ са **графически равни** (т.е. са еднаква последователност от символи), ще бележим този факт с $\varphi \equiv \psi$. **Дължината** на φ ще бележим с $|\varphi|$. **Подформула** на φ е всеки подниз на φ, който е формула.

Лема 1.1. *Ако ψ е префикс на φ, то тогава $\varphi \equiv \psi$*

Доказателство. Доказваме с индукция по $|\varphi|$:

- $\varphi \equiv p$: тогава твърдението очевидно е изпълнено.
- $\varphi \equiv \neg\psi$: тогава ако χ е префикс на φ, то тогава $\chi \equiv \neg\chi'$. Тогава χ' е префикс на ψ и по (ИП) $\chi' \equiv \psi$, откъдето $\chi \equiv \neg\chi' \equiv \neg\psi \equiv \varphi$.
- $\varphi \equiv \vee\varphi_1\varphi_2$: тогава ако ψ е префикс на φ, то тогава $\psi \equiv \vee\psi_1\psi_2$. Така или ψ_1 е префикс на φ_1 или φ_1 е префикс на ψ_1. И в двата случая по (ИП) $\psi_1 \equiv \phi_1$, откъдето ψ_2 е префикс на φ_2 и по (ИП) $\psi_2 \equiv \varphi_2$. Така $\psi \equiv \vee\psi_1\psi_2 \equiv \vee\varphi_1\varphi_2 \equiv \varphi$.

$\square$

Теорема 1.2. *(Еднозначен синтактичен анализ) За всяка формула φ попадаме в точно една от следните ситуации:*

- *Съществува единствено p, за което $\varphi \equiv p$*
- *Съществува единствена ψ, за което $\varphi \equiv \neg\psi$*
- *Съществува единствени φ_1 и φ_2, за които $\varphi \equiv \vee\varphi_1\varphi_2$*

Доказателство. Съществуването е ясно, а единствеността е директно следствие от Лема 1.1. $\square$

Лема 1.3. *Всеки символ във φ е начало на единствена подформула на φ.*

Доказателство. Доказваме с индукция по $|\varphi|$. Базата е очевидна. Ще разгледаме само (ИС):

1 сл. $\varphi \equiv \neg\psi$: тогава един символ във φ или е първото $\neg$, или се намира някъде във ψ. В първия случай $\neg$ е начало на φ и на никоя друга подформула на φ (по Лема 1.1). Във втория случай по (ИП) този символ е начало на единствена подформула на ψ, а от там и на φ.

2 сл. $\varphi \equiv \vee\varphi_1\varphi_2$: тогава един символ във φ или е първото $\vee$, или участва във φ_1 или участва във φ_2. Тук могат да се направят напълно аналогични разсъждения като в предния случай.

$\square$

Теорема 1.4. *Ако φ_1 и φ_2 са подформули на φ, то едната формула е подформула на другата, или нямат обща част.*

Доказателство. Да допуснем, че φ_1 и φ_2 имат обща част, като б.о.о. тя е суфикс на φ_1 и префикс на φ_2. Съгласно Лема 1.3 първият символ на общата част е начало на единствена подформула ψ на φ_1. Но тогава ψ ще бъде префикс на φ_2, откъдето по Лема 1.1 $\psi \equiv \varphi_2$ и така φ_2 е подформула на φ_1. $\square$

Въвеждаме следните съкращения:

- Ще пишем $(\varphi \vee \psi)$ вместо $\vee\varphi\psi$
- Ще пишем $(\varphi \,\&\, \psi)$ вместо $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- Ще пишем $(\varphi \Rightarrow \psi)$ вместо $(\neg\varphi \vee \psi)$
- Ще пишем $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ вместо $((\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi))$
- Няма да пишем най-външните скоби т.е. ще пишем $\varphi\,\sigma\,\psi$ вместо $(\varphi\,\sigma\,\psi)$, където $\sigma \in \{\vee, \,\&\,, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- Ще пишем $\varphi_1\,\sigma_1\,\varphi_2\,\sigma_2 \dots \varphi_n\,\sigma_n\,\varphi_{n+1}$ вместо $\varphi_1\,\sigma_1\,(\varphi_2\,\sigma_2(\dots(\varphi_n\,\sigma_n\,\varphi_{n+1})\dots))$, където $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{\vee, \,\&\,, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

2 Аксиоми и правила на извод

За всяка формула φ ще имаме аксиомата $\neg\varphi \vee \varphi$. Също така ще имаме следните четири правила на извод:

$$\frac{\varphi}{\psi \vee \varphi}\,(\text{ER}) \qquad \frac{\varphi \vee \varphi}{\varphi}\,(\text{CR}) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \vee \chi}{(\varphi \vee \psi) \vee \chi}\,(\text{AR}) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \qquad \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi}\,(\text{Cut})$$

Ще покажем следните няколко правила:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\,(\text{MP}) \qquad \frac{\varphi \vee \psi}{\psi \vee \varphi}\,(\text{Com})$$

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n}\,(\text{ER}'),\text{ за } 1 \le i \le n \qquad \frac{\varphi_i \vee \varphi_j}{\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n}\,(\text{ER}''),\text{ за } 1 \le i, j \le n$$

$$\frac{\varphi_{i_1} \vee \dots \vee \varphi_{i_k}}{\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n}\,(\text{Gen}),\text{ за } 1 \le i_1, \dots i_k, \le n \qquad \frac{\varphi \vee \psi}{\neg\neg\varphi \vee \psi}\,(\neg\neg\text{R}) \qquad \frac{\neg\varphi \vee \chi \qquad \neg\psi \vee \chi}{\neg(\varphi \vee \psi) \vee \chi}\,(\neg\vee\text{R})$$

Извод за (Com):

$$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{}{\neg\varphi \vee \varphi}\,(\text{Ax})}{\psi \vee \varphi}\,(\text{Cut})$$

Извод за (MP):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi}{\psi \vee \varphi}\,(\text{ER})}{\varphi \vee \psi}\,(\text{Com}) \qquad \neg\varphi \vee \psi}{\psi \vee \psi}\,(\text{Cut})}{\psi}\,(\text{CR})$$

Извод за (ER′):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_i}{(\varphi_{i+1} \vee \dots \vee \varphi_n) \vee \varphi_i}\,(\text{ER})}{\varphi_i \vee \dots \vee \varphi_n}\,(\text{Com})}{\varphi_{i-1} \vee \dots \vee \varphi_n}\,(\text{ER})}{\vdots}\,(\text{ER})}{\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n}\,(\text{ER})$$

Извода за (ER″) се разделя на няколко случая в зависимост от i и j.
Ако $i = j$, тогава имаме следния извод:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi_i \vee \varphi_i}{\varphi_i}\,(\text{CR})}{\varphi_1 \vee \dots \varphi_n}\,(\text{ER}')$$

Ако $i < j$, тогава имаме следния извод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_i \lor \varphi_j}{(\varphi_{j+1} \lor \dots \lor \varphi_n) \lor \varphi_i \lor \varphi_j}\,(\mathrm{ER})}{((\varphi_{j+1} \lor \dots \lor \varphi_n) \lor \varphi_i) \lor \varphi_j}\,(\mathrm{AR})}{\varphi_j \lor (\varphi_{j+1} \lor \dots \lor \varphi_n) \lor \varphi_i}\,(\mathrm{Com})}{(\varphi_j \lor \varphi_{j+1} \lor \dots \lor \varphi_n) \lor \varphi_i}\,(\mathrm{AR})}{\varphi_{j-1} \lor (\varphi_j \lor \dots \lor \varphi_n) \lor \varphi_i}\,(\mathrm{ER})}{(\varphi_{j-1} \lor \varphi_j \lor \dots \lor \varphi_n) \lor \varphi_i}\,(\mathrm{AR})}{\vdots}\,(\mathrm{ER})}{(\varphi_{i+1} \lor \dots \lor \varphi_n) \lor \varphi_i}\,(\mathrm{AR})}{\varphi_i \lor \dots \lor \varphi_n}\,(\mathrm{Com})}{\varphi_1 \lor \dots \lor \varphi_n}\,(\mathrm{ER}')$$

Ако $i > j$, тогава имаме следният извод:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi_i \lor \varphi_j}{\varphi_j \lor \varphi_i}\,(\mathrm{Com})}{\varphi_1 \lor \dots \lor \varphi_n}\,(\mathrm{ER}'') \text{ за } j < i$$

Правилото (Gen) ще покажем с индукция по $k \geq 1$. При $k = 1$ или $k = 2$, използваме съответно (ER') и (ER''). Нека $k \geq 3$. Нека за по-кратко $\varphi \equiv \varphi_1 \lor \dots \lor \varphi_n$. Тогава можем да построим следният извод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_{i_1} \lor \varphi_{i_2} \lor \varphi_{i_3} \lor \dots \lor \varphi_{i_k}}{(\varphi_{i_1} \lor \varphi_{i_2}) \lor \varphi_{i_3} \lor \dots \lor \varphi_{i_k}}\,(\mathrm{AR})}{(\varphi_{i_1} \lor \varphi_{i_2}) \lor \varphi}\,(\text{ИП})}{\varphi \lor \varphi_{i_1} \lor \varphi_{i_2}}\,(\mathrm{Com})}{(\varphi \lor \varphi_{i_1}) \lor \varphi_{i_2}}\,(\mathrm{AR})}{(\varphi \lor \varphi_{i_1}) \lor \varphi}\,(\mathrm{ER}'')}{\varphi \lor \varphi \lor \varphi_{i_1}}\,(\mathrm{Com})}{(\varphi \lor \varphi) \lor \varphi_{i_1}}\,(\mathrm{AR})}{(\varphi \lor \varphi) \lor \varphi \lor \varphi}\,(\mathrm{ER}'')}{\varphi \lor \varphi}\,(\mathrm{CR})}{\varphi}\,(\mathrm{CR})$$

Извод за $(\neg\neg\mathrm{R})$:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \lor \psi \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\varphi \lor \neg\varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\neg\varphi \lor \neg\neg\varphi}\,(\mathrm{Com})}{\psi \lor \neg\neg\varphi}\,(\mathrm{Cut})}{\neg\neg\varphi \lor \psi}\,(\mathrm{Com})$$

Извод за $(\neg\lor\mathrm{R})$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\varphi \lor \psi) \lor \varphi \lor \psi}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi \lor \neg(\varphi \lor \psi) \lor \psi}\,(\mathrm{Gen}) \qquad \neg\varphi \lor \chi}{(\neg(\varphi \lor \psi) \lor \psi) \lor \chi}\,(\mathrm{Cut})}{\chi \lor \neg(\varphi \lor \psi) \lor \psi}\,(\mathrm{Com})}{\psi \lor \chi \lor \neg(\varphi \lor \psi)}\,(\mathrm{Gen}) \qquad \neg\psi \lor \chi}{(\chi \lor \neg(\varphi \lor \psi)) \lor \chi}\,(\mathrm{Cut})}{\chi \lor \chi \lor \neg(\varphi \lor \psi)}\,(\mathrm{Com})}{\neg(\varphi \lor \psi) \lor \chi}\,(\mathrm{Gen})$$

3 Оценки и тавтологии

Оценка ще наричаме всяка функция $v : \mathrm{Vars} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$. От Теорема 1.2 знаем, че тя може да се продължи по единствен начин до $\tilde{v} : \{\varphi \mid \varphi \text{ е формула}\} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ по следния начин:

- $\tilde{v}(p) = v(p)$
- $\tilde{v}(\neg\varphi) = \mathbb{T}$ т.с.т.к $\tilde{v}(\varphi) = \mathbb{F}$
- $\tilde{v}(\varphi \lor \psi) = \mathbb{T}$ т.с.т.к. $\tilde{v}(\varphi) = \mathbb{T}$ или $\tilde{v}(\psi) = \mathbb{T}$

Ще казваме, че една формула φ е **тавтология**, ако за всяка оценка v имаме $\tilde{v}(\varphi) = \mathbb{T}$. Ще бележим този факт с $\models \varphi$.

Лема 3.1. *Нека $n \geq 2$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са такива, че $\models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$. Нека също така $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са променливи или отрицанието на такива. Тогава има $i \neq j$, за които $\varphi_i \equiv \neg\varphi_j$.*

Доказателство. Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са такива формули. Нека допуснем, че няма такива i и j. Да вземем оценката v, дефинирана по следния начин:

$$v(p) = \mathbb{T} \text{ т.с.т.к. } \varphi_i \equiv p \text{ за някое } 1 \leq i \leq n$$

Тогава $\tilde{v}(\varphi_i) = \mathbb{F}$ за всяко $1 \leq i \leq n$, откъдето $\tilde{v}(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{F}$. Но тогава $\not\models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$, което е абсурд. □

Лема 3.2. *Нека $n \geq 2$ и $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ са такива, че $\models (\varphi_0 \vee \varphi_1) \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$. Тогава $\models \varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$.*

Доказателство. Нека $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ са такива формули. Нека v е произволна оценка. Понеже $\models (\varphi_0 \vee \varphi_1) \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$, то $\tilde{v}(\varphi_0 \vee \varphi_1) = \mathbb{T}$ или $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. В първия случай $\tilde{v}(\varphi_0) = \mathbb{T}$ или $\tilde{v}(\varphi_1) = \mathbb{T}$, откъдето получаваме, че $\tilde{v}(\varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. В другия случай отново $\tilde{v}(\varphi_0 \vee \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$, поради $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. □

Лема 3.3. *Нека $n \geq 2$ и $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ са такива, че $\models \neg(\varphi_0 \vee \varphi_1) \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$. Тогава $\models \neg\varphi_0 \vee \vee\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$ и $\models \neg\varphi_1 \vee \vee\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$.*

Доказателство. Нека $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ са такива формули. Нека v е произволна оценка. Понеже $\models \neg(\varphi_0 \vee \varphi_1) \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$, то $\tilde{v}(\varphi_0 \vee \varphi_1) = \mathbb{F}$ или $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. В първия случай $\tilde{v}(\neg\varphi_0) = \mathbb{T}$ и $\tilde{v}(\neg\varphi_1) = \mathbb{T}$, откъдето получаваме, че $\tilde{v}(\neg\varphi_0 \vee \vee\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \tilde{v}(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. В другия случай отново $\tilde{v}(\neg\varphi_0 \vee \vee\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$ и $\tilde{v}(\neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$, поради $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. □

Лема 3.4. *Нека $n \geq 2$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са такива, че $\models \neg\neg\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$. Тогава $\models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$.*

Доказателство. Нека $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са такива формули. Нека v е произволна оценка. Понеже $\models \neg\neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$, то $\tilde{v}(\neg\neg\varphi_1) = \mathbb{T}$ или $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. Тогава $\tilde{v}(\varphi_1) = \mathbb{T}$ или $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$, откъдето получаваме, че $\tilde{v}(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n) = \mathbb{T}$. □

4 Теореми за коректност и пълнота. Теорема за тавтологиите

Теорема 4.1. *(Коректност) Ако $\vdash \varphi$, то $\models \varphi$.*

Доказателство. С индукция по извода на φ:

- φ е аксиома т.е. $\varphi \equiv \neg\psi \vee \psi$: тогава за всяка оценка v имаме, че $\tilde{v}(\psi) \neq \tilde{v}(\neg\psi)$. Тогава $\tilde{v}(\neg\psi \vee \psi) = \mathbb{T}$.
- φ се получава от (ER) т.е. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$, където $\vdash \chi$: тогава по (ИП) имаме $\models \chi$. Тогава за всяка оценка v е изпълнено, че $\tilde{v}(\chi) = \mathbb{T}$, откъдето за всяка оценка v имаме $\tilde{v}(\psi \vee \chi) = \mathbb{T}$.
- φ се получава от (CR) т.е. $\vdash \varphi \vee \varphi$: тогава по (ИП) $\models \varphi \vee \varphi$, откъдето за всяка оценка v е изпълнено, че $\tilde{v}(\varphi \vee \varphi) = \mathbb{T}$. Така очевидно за всяка оценка v имаме, че $\tilde{v}(\varphi) = \mathbb{T}$.
- φ се получава от (AR) т.е. $\varphi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3$, където $\vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$: тогава по (ИП) $\models \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$, следователно за всяка оценка v имаме, че $\tilde{v}(\phi_i) = \mathbb{T}$ за някое $i \in \{1, 2, 3\}$. Така очевидно за всяка оценка v получаваме, че $\tilde{v}((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) = \mathbb{T}$.
- φ се получава от (Cut) т.е. $\varphi \equiv \varphi_2 \vee \varphi_3$, където $\vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ и $\vdash \neg\varphi_1 \vee \varphi_3$: тогава по (ИП) $\models \varphi_1 \vee \varphi_2$ и $\models \neg\varphi_1 \vee \varphi_3$. Нека v е произволна оценка. Тогава ако $\tilde{v}(\varphi_1) = \mathbb{T}$, то тогава $\tilde{v}(\varphi_3) = \mathbb{T}$, откъдето $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \varphi_3) = \mathbb{T}$. Ако пък $\tilde{v}(\varphi_1) = \mathbb{F}$, то тогава $\tilde{v}(\varphi_2) = \mathbb{T}$, откъдето $\tilde{v}(\varphi_2 \vee \varphi_3) = \mathbb{T}$.

□

Лема 4.2. *Нека $n \geq 2$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са такива, че $\models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$. Тогава $\vdash \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$.*

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по общият брой на логически съюзи във $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.
Нека първо предположим, че $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ са само променливи или отрицанието на такива. Тогава по Лема 3.1 има $i \neq j$, за които $\varphi_i \equiv \not\varphi_j$. Тогава $\varphi_i \vee \varphi_j$ е аксиома, и по (Gen) имаме, че $\vdash \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$.
Нека сега в някоя формула от $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ не е променлива или отрицанието на такава. Заради правилото (Gen), б.о.о. можем да считаме, че това е φ_1. Имаме няколко възможности за φ_1.
Едната от тях е $\varphi_1 \equiv \psi \vee \chi$. Тогава по Лема 3.2 получаваме, че $\models \psi \vee \chi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$. В новата формула общият брой на логически съюзи е по-малък, откъдето по (ИП) $\vdash \psi \vee \chi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$. Така по (AR) получаваме, че $\vdash (\psi \vee \chi) \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$.

Друга възможност е $\varphi_1 \equiv \neg(\psi \vee \chi)$. Тогава по Лема 3.3 получаваме, че $\models \neg\psi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$ и $\models \neg\chi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$. Във двете нови формули общият брой на логически съюзи е по-малък, откъдето по (ИП) $\vdash \neg\psi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$ и $\vdash \neg\chi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$. Така $\vdash \neg(\psi \vee \chi) \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$ съгласно ($\neg\vee$R).
Последната възможност е $\varphi_1 \equiv \neg\neg\psi$. Тогава по Лема 3.4 получаваме, че $\models \psi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$, откъдето по (ИП) $\vdash \psi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$. Така $\vdash \neg\neg\psi \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$ съгласно ($\neg\neg$R). □

Теорема 4.3 (Пълнота). *Ако $\models \varphi$, то $\vdash \varphi$.*

Доказателство. Ако $\models \varphi$, то $\models \varphi \vee \varphi$, откъдето по Лема 4.2 $\vdash \varphi \vee \varphi$. Така по (CR) получаваме, че $\vdash \varphi$. □

Ще казваме, че φ е **тавтологично следствие** от $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, ако $\models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi_n \Rightarrow \varphi$.

Теорема 4.4 (За тавтологиите). *Нека φ е тавтологично следствие на $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $n \geq 0$ и $\vdash \varphi_i$ за всяко $1 \leq i \leq n$. Тогава $\vdash \varphi$.*

Доказателство. Нека φ е тавтологично следствие на $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $n \geq 0$ и $\vdash \varphi_i$ за всяко $1 \leq i \leq n$. Тогава получаваме, че $\models \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi_n \Rightarrow \varphi$, откъдето по Теорема 4.3 $\vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \varphi_n \Rightarrow \varphi$. Така прилагайки правилото (MP) n на брой пъти получаваме, че $\vdash \varphi$. □