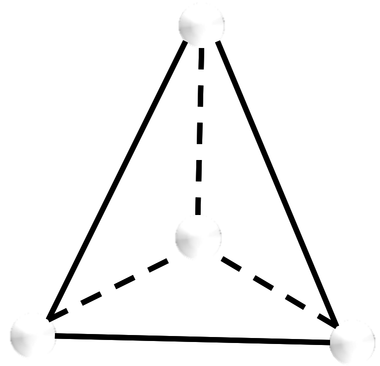
Prof. Dr. Jan Bender

Dynamische Simulation von Mehrkörpersystemen

# STARRKÖRPER

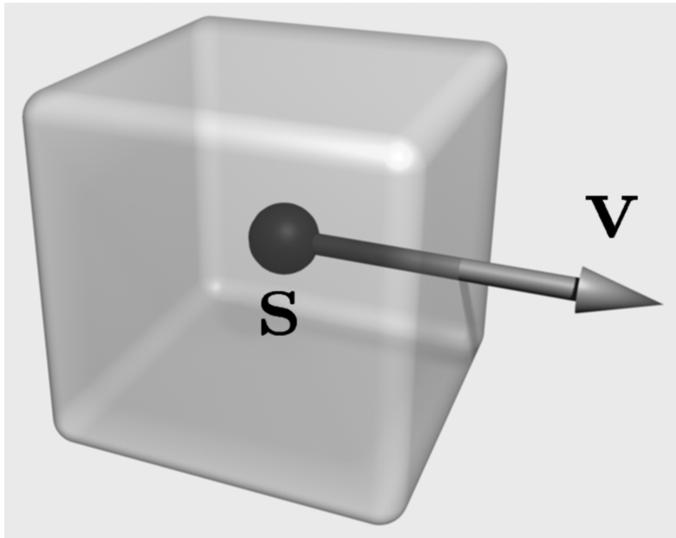
# Freiheitsgrade

- Ein Partikel hat 3 Freiheitsgrade.
- Ein Starrkörper hat im Gegensatz zu einem Partikel eine Ausdehnung und damit eine Rotation. Daher hat ein Starrkörper 3 zusätzliche Freiheitsgrade für die Drehung.
- Beispiel:



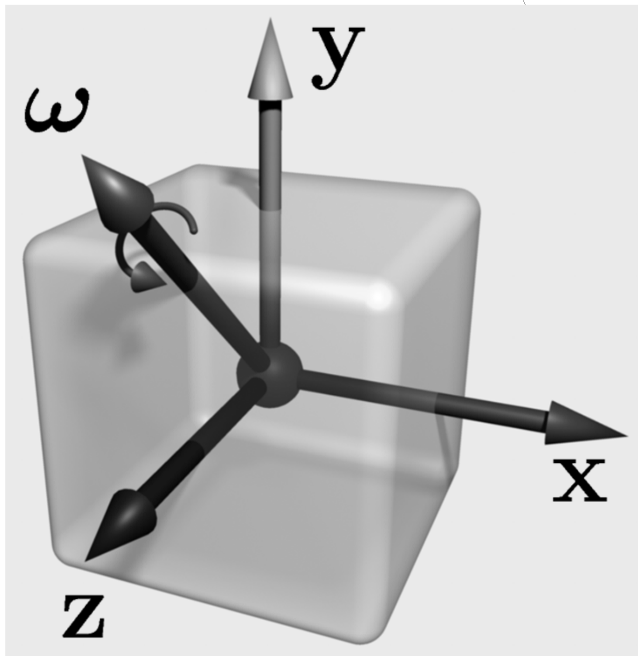
# Translation

- Masse $m$
- Schwerpunkt $\mathbf{s}$
- Geschwindigkeit $\mathbf{v}$



# Rotation

- Trägheitstensor $\mathbf{J}$
- Rotation $\mathbf{R}$
- Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$



# Schwerpunkt

- Schwerpunkt von n Massenpunkten

$$\mathbf{s} = \frac{1}{m}\sum_0^n \mathbf{m}_i\mathbf{p}_i, \quad m = \sum_0^n m_i$$

- Schwerpunkt bei homogener Massenverteilung

$$\mathbf{s} = \frac{1}{n}\sum_0^n \mathbf{p}_i$$

- Schwerpunkt bei kontinuierlicher Massenverteilung

$$\mathbf{s} = \frac{1}{m}\int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}dV$$

# Trägheitstensor

- Beschreibt die Trägheit des Körpers bezüglich Rotationen

Ein Trägheitstensor $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreibt die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ eines Körpers und seinem Drehimpuls:

$$\mathbf{l} = \mathbf{J}\,\boldsymbol{\omega}.$$

# Trägheitstensor

Sei ein Körper durch $n$ Massenpunkte mit den Massen $m_i$ gegeben und seien weiterhin $\mathbf{r}_i = (x_i \quad y_i \quad z_i)^T$ die Ortsvektoren der Massenpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt des Körpers hat. Dann berechnet sich der Trägheitstensor wie folgt:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{n} m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i\, y_i & -x_i\, z_i \\ -y_i\, x_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i\, z_i \\ -z_i\, x_i & -z_i\, y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}.$$

# Beispiele

Trägheitstensor einer Kugel mit Radius r

$$\mathbf{J}_{Kugel} = m \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5}r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}r^2 \end{pmatrix}$$

# Beispiele

Trägheitstensor eines Zylinders mit Radius r und Länge l

$$\mathbf{J}_{Zylinder} = m \cdot \begin{pmatrix} \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{2} \end{pmatrix}$$

# Beispiele

Trägheitstensor eines Quaders mit Kantenlängen a, b und c

$$\mathbf{J}_{Quader} = m \cdot \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}$$

# Trägheitstensor

- Kann durch eine Hauptachsentransformation in Diagonalform gebracht werden

$$\mathbf{J}_l = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}_l^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{pmatrix}$$

- Koordinatensystem eines Körpers wird so gewählt, dass Trägheitstensor Diagonalform hat und der Nullpunkt im Schwerpunkt liegt

# Trägheitstensor

- Der Trägheitstensor $\mathbf{J}_l$ ist im lokalen Koordinatensystem des Körpers konstant
- Die Transformation vom lokalen Koordinatensystem in Weltkoordinaten erfolgt mit Hilfe der aktuellen Rotationsmatrix R

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{R}\,\mathbf{J}_l\,\mathbf{R}^T \\ \mathbf{J}^{-1} &= \mathbf{R}\,\mathbf{J}_l^{-1}\,\mathbf{R}^T\end{aligned}$$

# Rotationsmatrix

- Rotation um x-, y- oder z-Achse

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\
\mathbf{R}_y &= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \\
\mathbf{R}_z &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

# Rotationsmatrix

- Gesamtrotation

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_z =$$

$$\begin{pmatrix} c(\beta)c(\gamma) & -c(\beta)s(\gamma) & s(\beta) \\ s(\alpha)s(\beta)c(\gamma) + c(\alpha)s(\gamma) & c(\alpha)c(\gamma) - s(\alpha)s(\beta)s(\gamma) & -s(\alpha)c(\beta) \\ s(\alpha)s(\gamma) - c(\alpha)s(\beta)c(\gamma) & c(\alpha)s(\beta)s(\gamma) + s(\alpha)c(\gamma) & c(\alpha)c(\beta) \end{pmatrix}$$

# Quaternionen

- Sir William Rowan Hamilton 1843

$$\mathbf{q} = (w, x, y, z) = w + xi + yj + zk$$

$$w, x, y, z \in \mathbb{R}$$

# Quaternionen

- Die Menge der Quaternionen $\mathbb{H}$ bildet einen Schiefkörper
- Die konjugierte Quaternion ist

$$\mathbf{q}^* = (w, \ -x, \ -y, \ -z)$$

- Eine Quaternion, für die

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{q} = 1$$

gilt, bezeichnet man als Einheitsquaternion

# Rotation mit Quaternionen

- Rotationen können mit Einheitsquaternionen beschrieben werden

$$\mathbf{q} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{x}^T\right)$$

- Ein Punkt a wird folgendermaßen rotiert

$$\left(0, \mathbf{a}'\right) = \mathbf{q}\left(0, \mathbf{a}^T\right)\mathbf{q}^*$$

# Rechenregeln

- Addition

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 &= (w_1, x_1, y_1, z_1) + (w_2, x_2, y_2, z_2) \\ &= (w_1 + w_2,\ x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)\end{aligned}$$

- Subtraktion

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 &= (w_1, x_1, y_1, z_1) - (w_2, x_2, y_2, z_2) \\ &= (w_1 - w_2,\ x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2)\end{aligned}$$

# Rechenregeln

- Multiplikation

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (w_1, x_1, y_1, z_1) \cdot (w_2, x_2, y_2, z_2) \\ &= (w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2, \\ &\quad w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2, \\ &\quad w_1 y_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2, \\ &\quad w_1 z_2 + z_1 w_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2)\end{aligned}$$

- Verkettung von Rotationen benötigen 16 Multiplikationen und 12 Additionen (günstiger als Matrixprodukt mit 27 *, 18 +)

# Rechenregeln

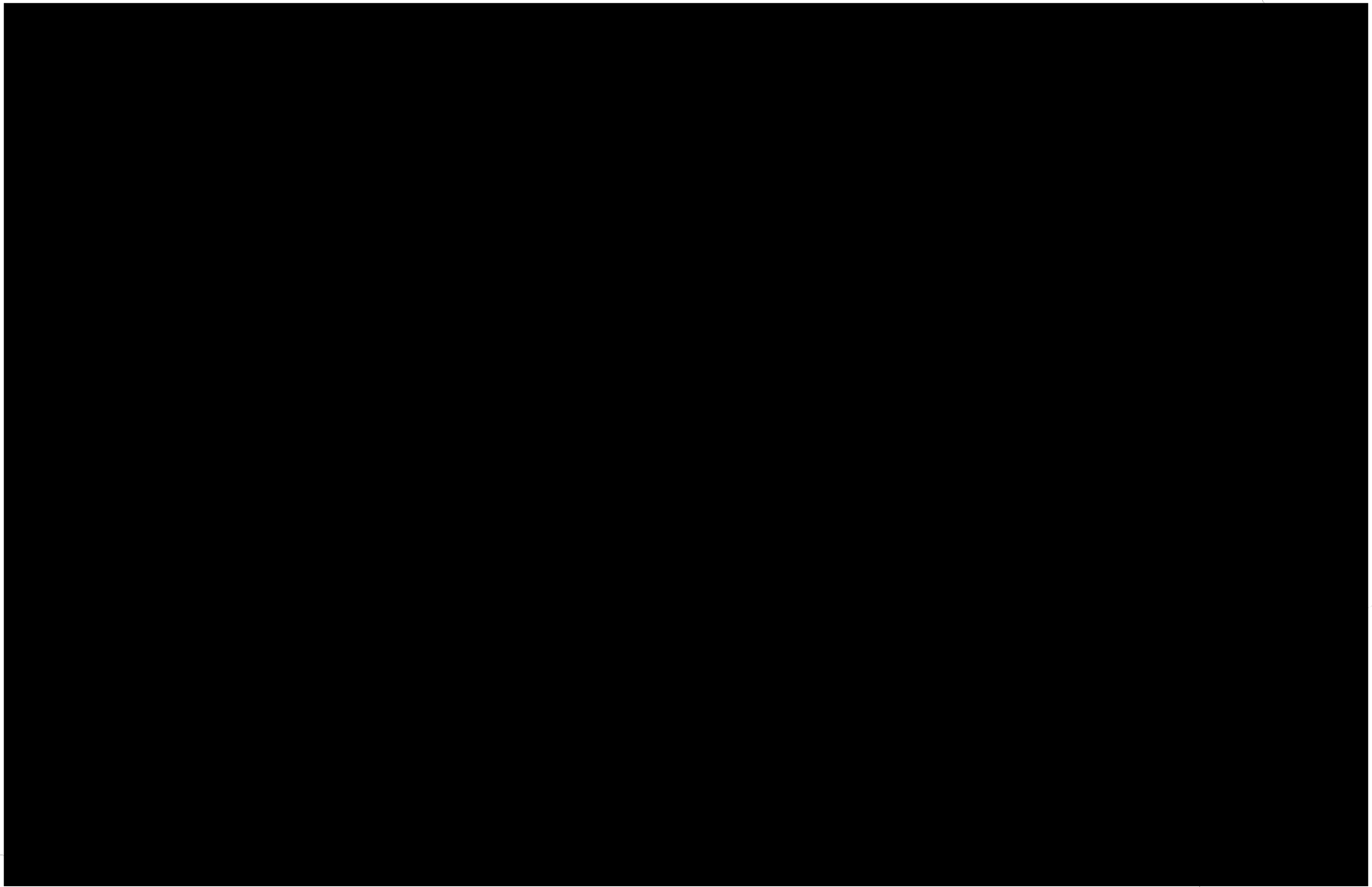
- Inverses Element

$$\mathbf{q}^{-1} := \frac{\mathbf{q}^*}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}^*} \qquad (\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}^* \in \mathbb{R})$$

- Für eine Einheitsquaternion gilt daher

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^{-1}$$

# Konvertierung



[redacted]

# Konvertierung

- Umrechnung einer Einheitsquaternion in eine Rotationsmatrix

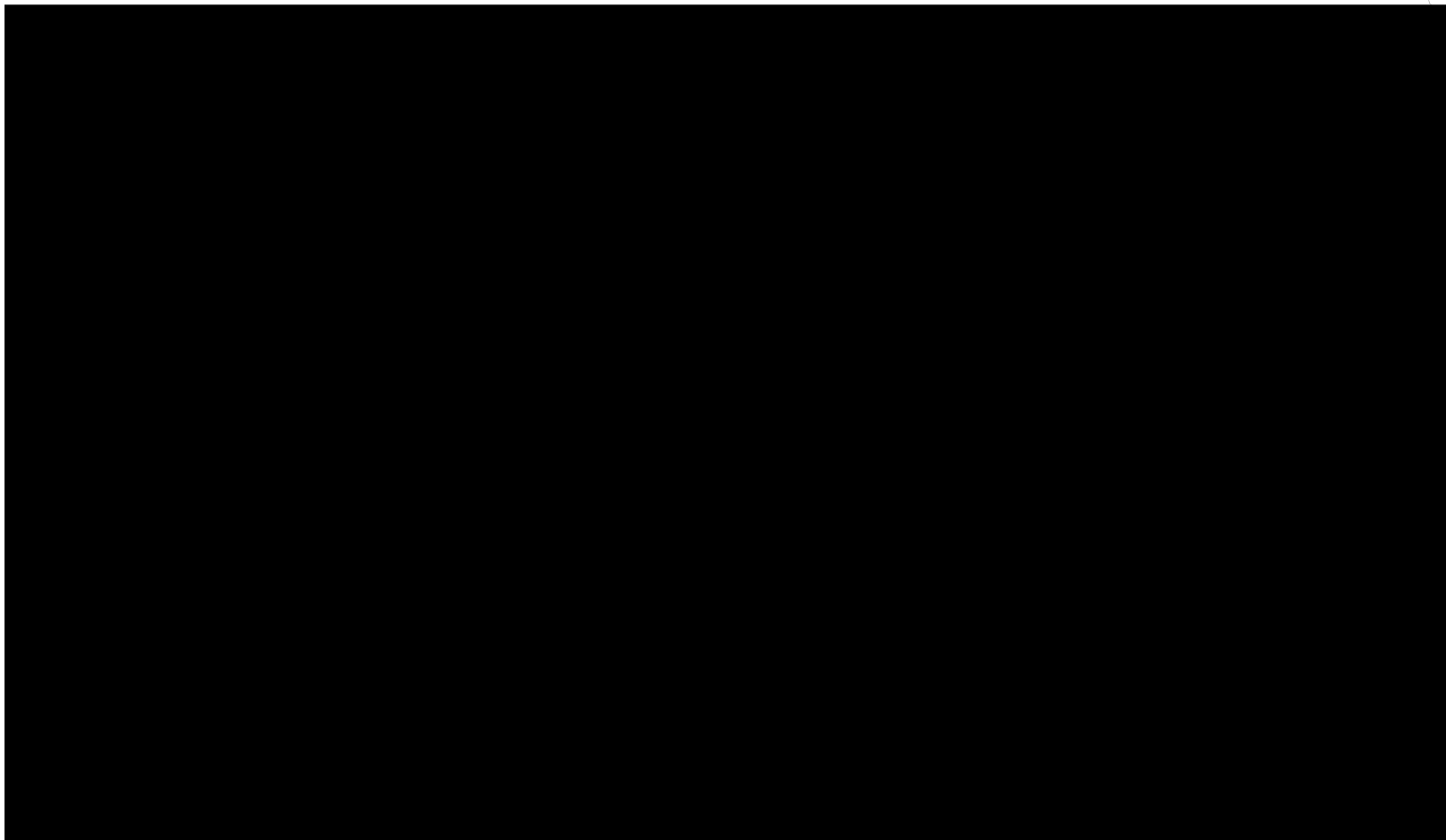
$$\begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-zw) & 2(zx+yw) \\ 2(xy+zw) & 1-2(z^2+x^2) & 2(yz-xw) \\ 2(zx-yw) & 2(yz+xw) & 1-2(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

# Konvertierung

- Umrechnung einer Drehachse $\mathbf{x}$ und eines Winkels $\alpha$ in eine Einheitsquaternion

$$\mathbf{q} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{x}^T\right)$$

# Konvertierung

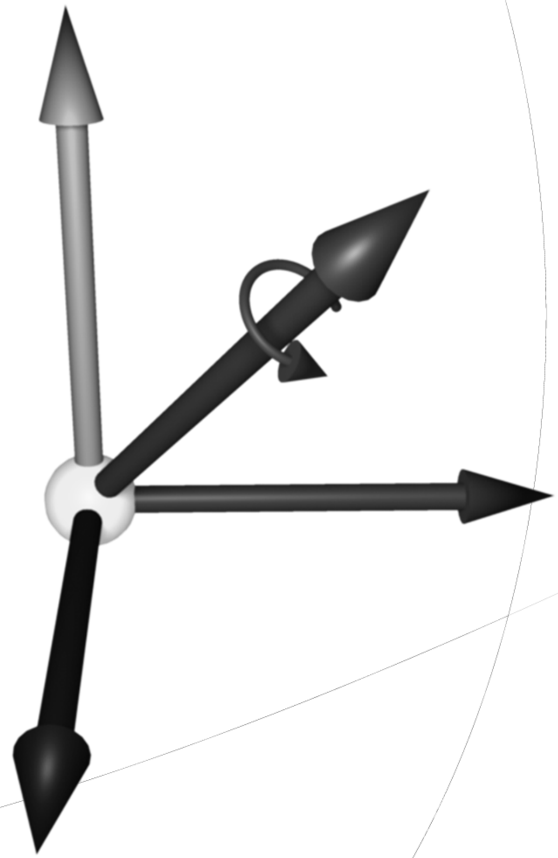


# Rotationsmatrix vs. Quaternion

- Quaternionen haben weniger Redundanz
  - Differentialgleichung in Simulation „nur“ vierdimensional
  - Numerischer Fehler ist kleiner
- Rotationsmatrix muss orthonormalisiert werden, Einheitsquaternion nur normiert
- Bei Verkettungen von Rotationen sind Quaternionen günstiger, bei der Drehung von Punkten Rotationsmatrizen

# Winkelgeschwindigkeit

- Die Winkelgeschwindigkeit ist ein Vektor
- Richtung ist die Rotationsachse
- Betrag ist die Stärke



# Translation

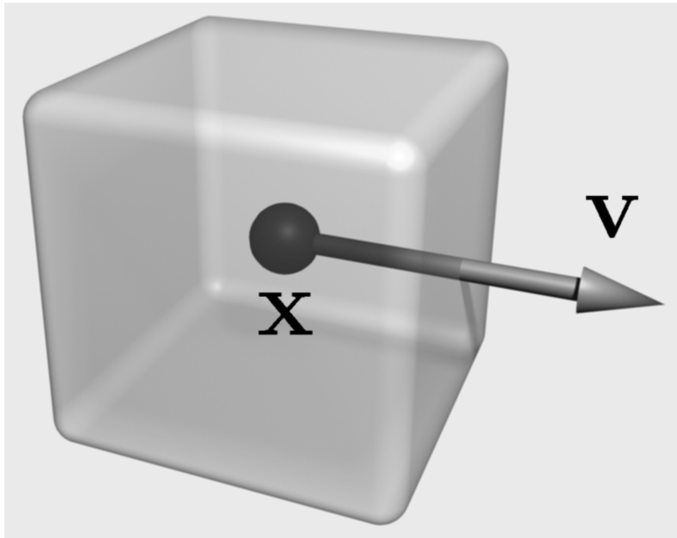
- Masse $m$

- Position

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

- Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$$



# Rotation

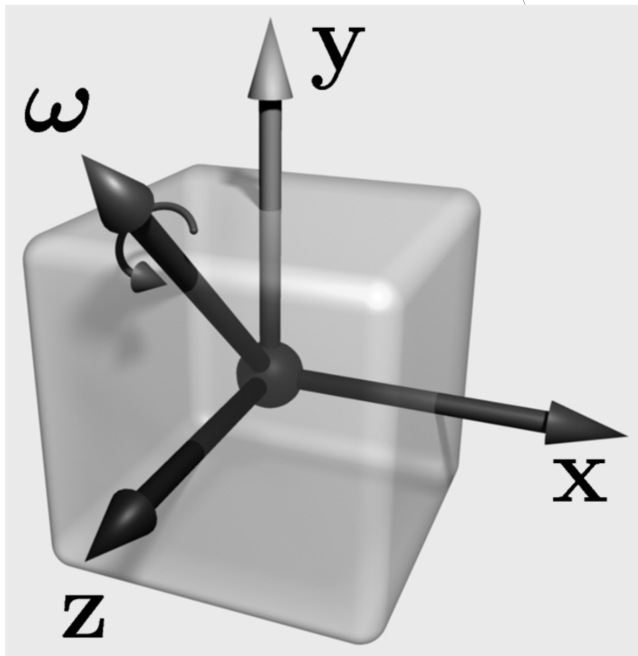
- Trägheitstensor $\mathbf{J}$

- Quaternion

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\mathbf{q},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (0, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

- Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{ext}} - (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\,\boldsymbol{\omega})))$$



# Literatur


- David Baraff, „Physically Based Modeling“, Siggraph 2001 course notes, http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001
- Herbert Goldstein, Charles P. Poole und John L. Safko, „Klassische Mechanik“, 2006
- Ken Shoemake, „Animating rotation with quaternion curves”, Siggraph 1985