Prof. Dr. Jan Bender

Dynamische Simulation von Mehrkörpersystemen

MEHRKÖRPERSYSTEME

Interne/Externe Kräfte

- Externe Kräfte wirken von außen auf das System als Ganzes (z.B. Gravitation).
- Interne Kräfte wirken dagegen zwischen einzelnen Körpern des Systems (z.B. wenn diese untereinander mit Gelenken verbunden sind).
- Die Energie im Mehrkörpersystem muss konstant bleiben. Daher muss die Summe aller internen Kräfte Null sein.

Zwangsbedingungen

- Die Bewegungsfreiheit eines Körpers kann durch Zwangsbedingungen eingeschränkt werden.

- Man unterscheidet dabei zwischen holonomen und nichtholonomen Zwangsbedingungen.

Holonome Zwangsbedingungen

- Eine holonome Zwangsbedingung beschränkt die Bewegung der Körper in Form einer impliziten Funktion

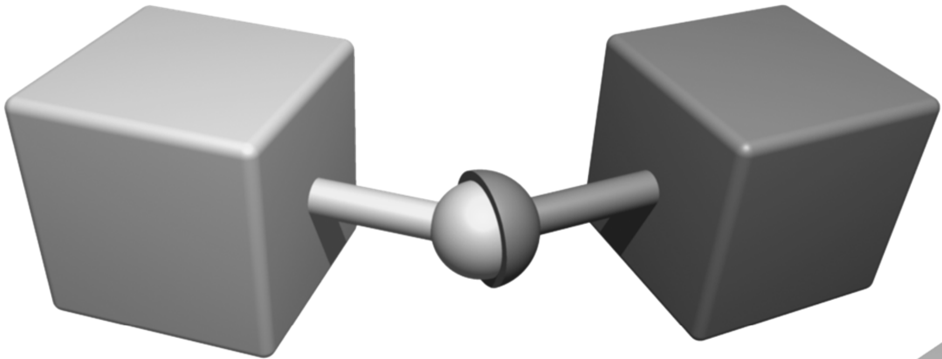
$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = 0$$

- Diese Funktion hängt nur von der aktuellen Lage der Körper und von der Zeit t ab.

- Beispiel:

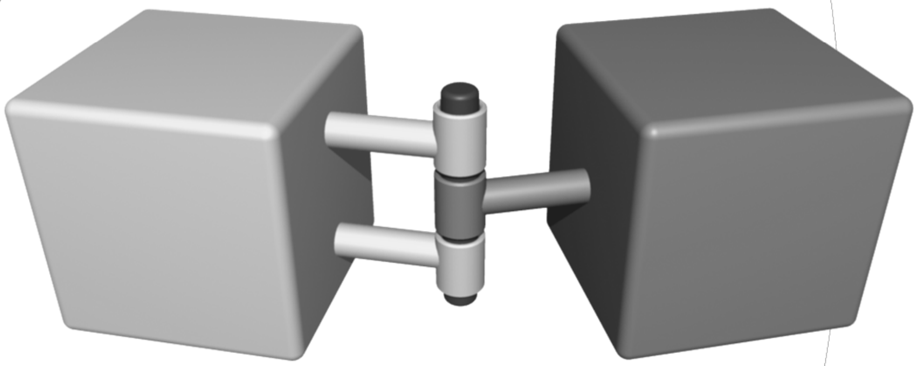
$$\mathbf{C}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}$$

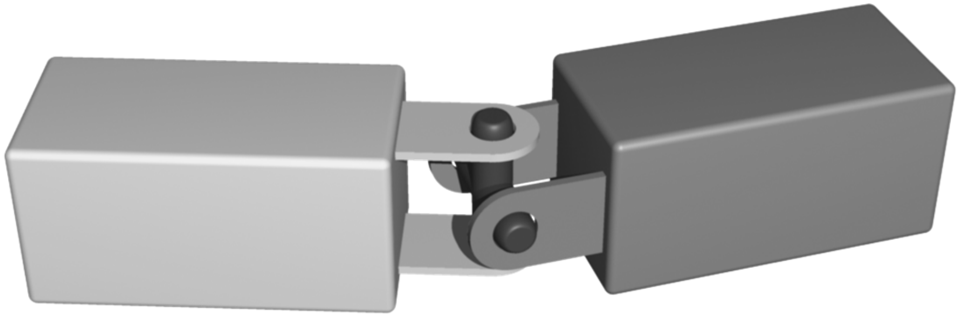
Gelenke



Kugelgelenk

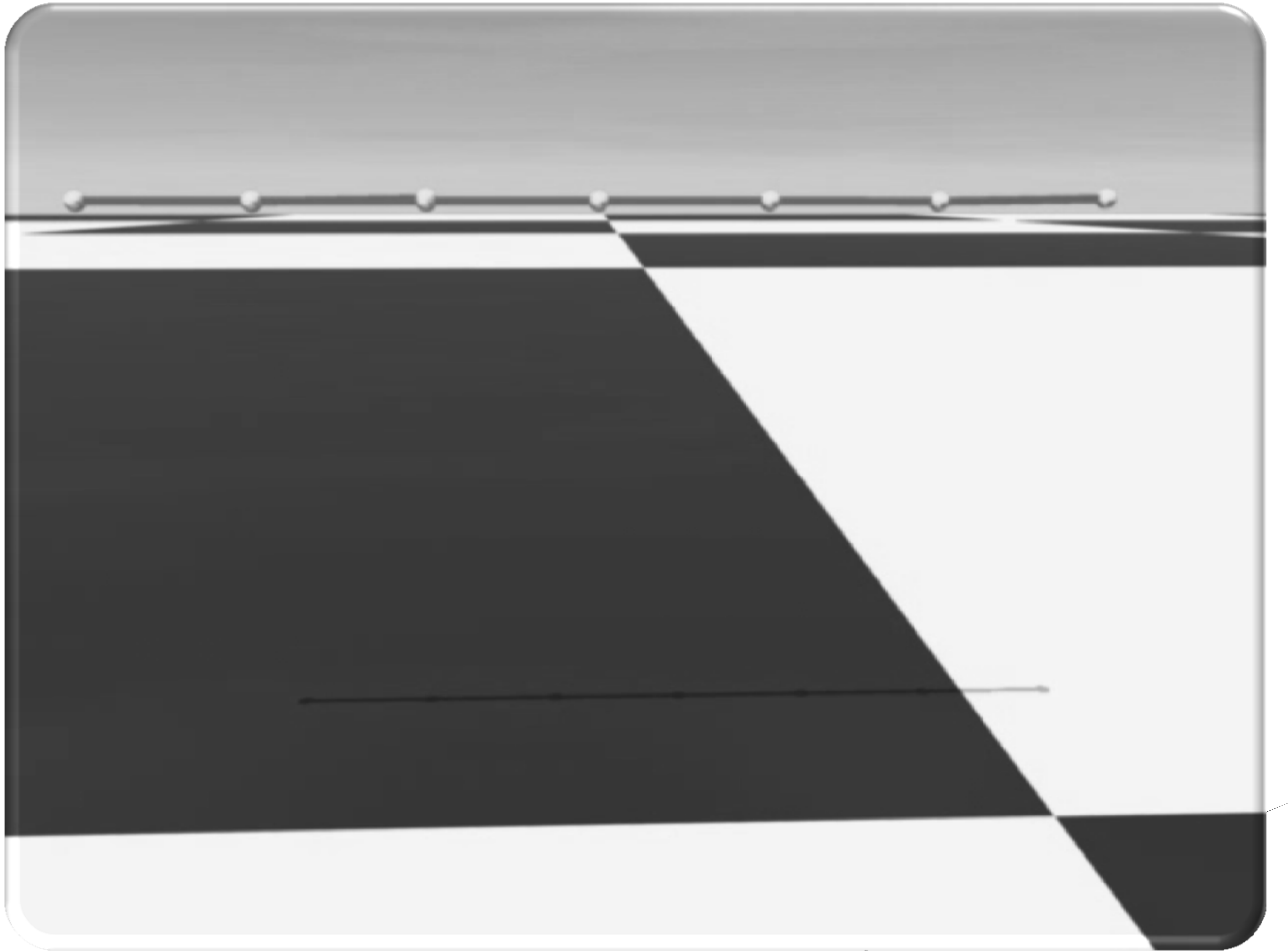
Drehgelenk





Kardangelenk

Video



Geschwindigkeitsänderung durch einen Impuls

- Punktgeschwindigkeit

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{r}_{as}$$

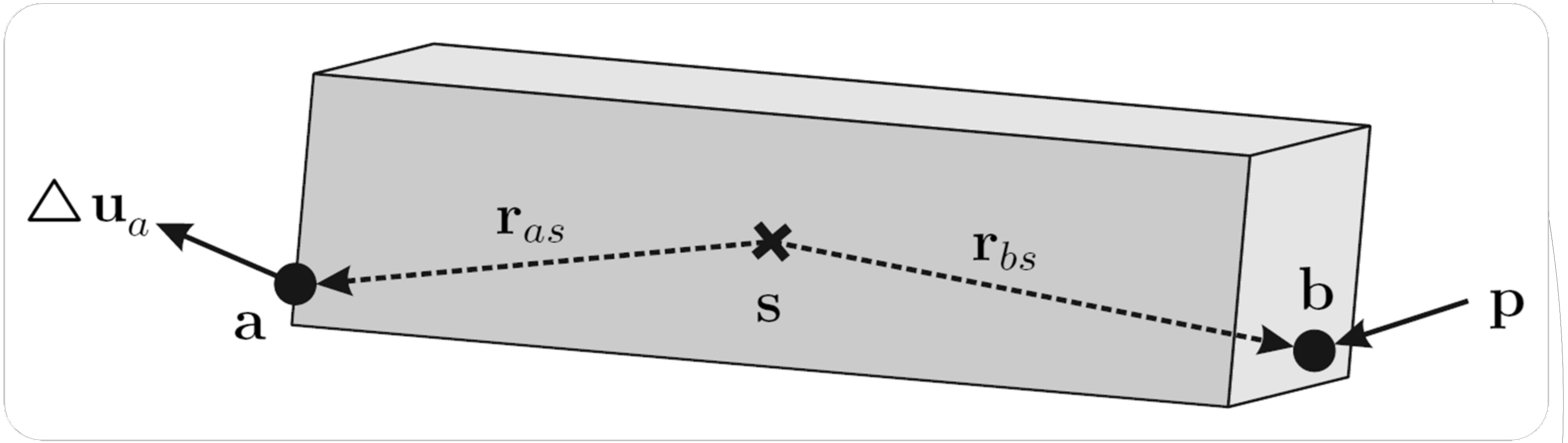
- Änderung der Schwerpunktgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v}_k = \frac{1}{m_k}\,\mathbf{p}$$

- Änderung der Winkelgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{J}_k^{-1}\left(\mathbf{r}_{bs} \times \mathbf{p}\right)$$

Matrix K



$$\mathbf{K}_{a,b}(t) := \begin{cases} \frac{1}{m_k}\,\mathbf{E}_3 - \mathbf{r}^*_{as}(t)\,\mathbf{J}_k^{-1}(t)\,\mathbf{r}^*_{bs}(t) & \text{falls Körper } k \text{ dynamisch} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_a(t) = \mathbf{K}_{a,b}(t)\cdot\mathbf{p}$$

Gelenke

- Bei der impulsbasierten Simulation wird für jedes Gelenk eine Gelenk- und eine Geschwindigkeitsbedingung definiert.
- Die Gelenkbedingung reduziert die Freiheitsgrade der Körper.
- Die Geschwindigkeitsbedingung eliminiert die relative Geschwindigkeit des reduzierten Freiheitsgrades.

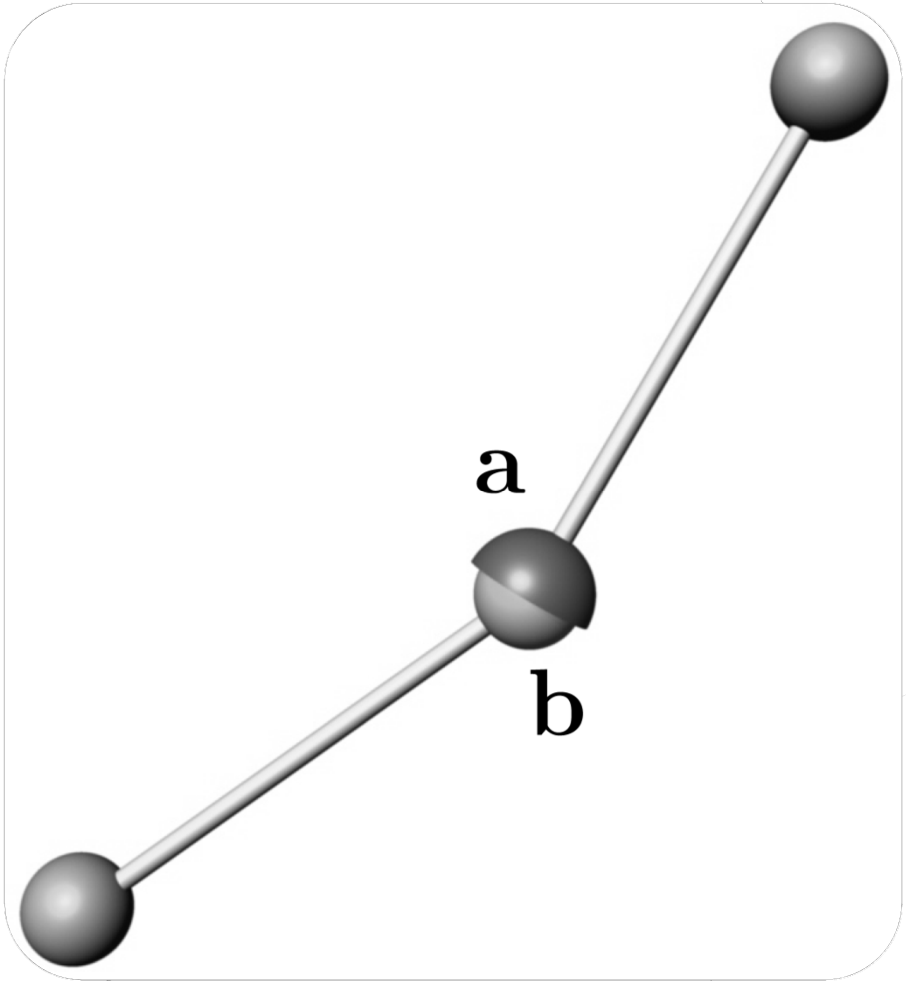
Beispiel: Kugelgelenk

- Gelenkbedingung

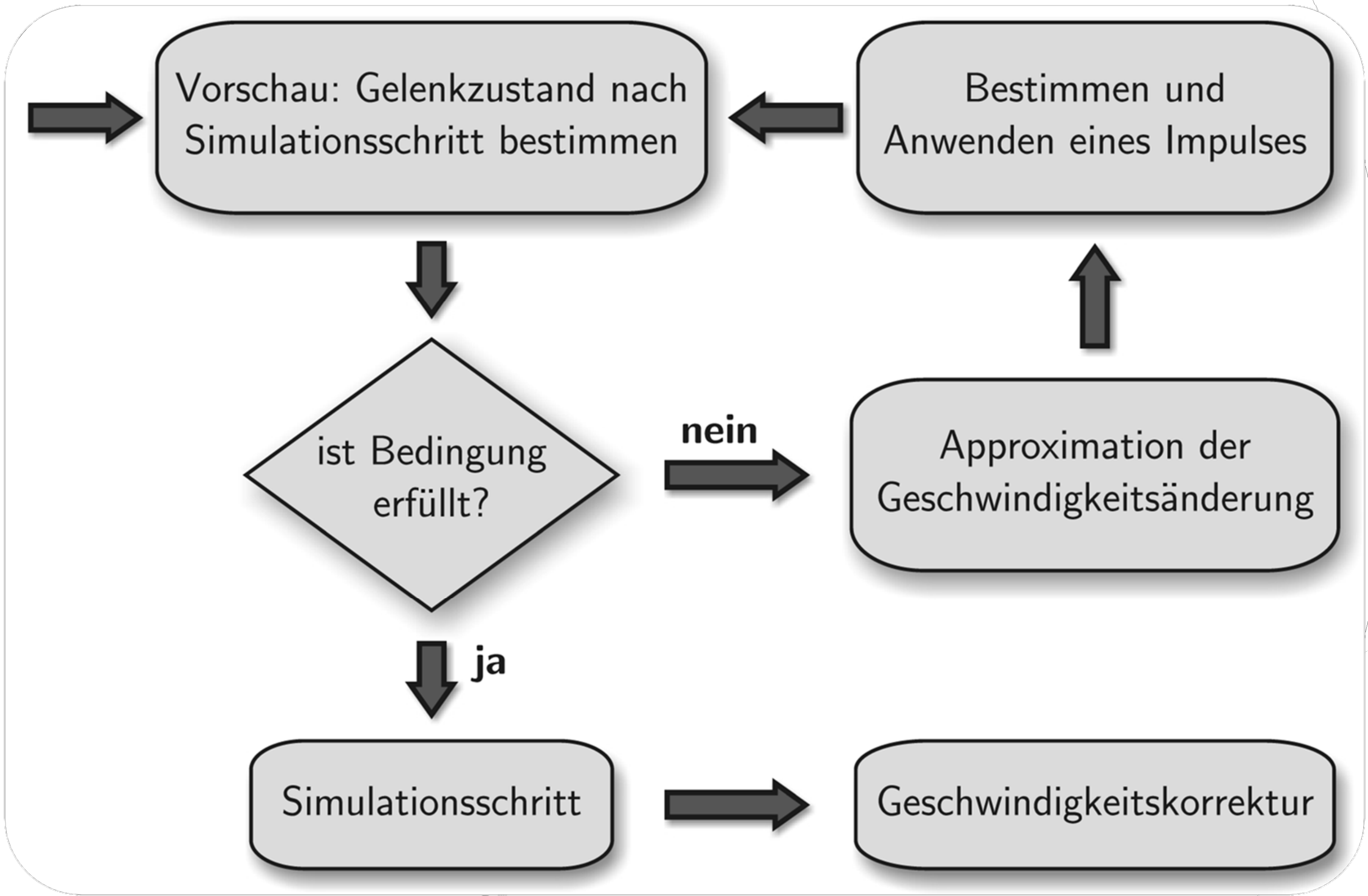
$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}(t)| \leq \varepsilon_{pos}$$

- Geschwindigkeits-bedingung

$$|\mathbf{u}_a(t) - \mathbf{u}_b(t)| \leq \varepsilon_v$$



Simulation von Gelenken



Rotation eines Vektors

- Die Veränderung eines Ortsvektors

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{p} - \mathbf{s}_k$$

in einem Starrkörper k wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)$$

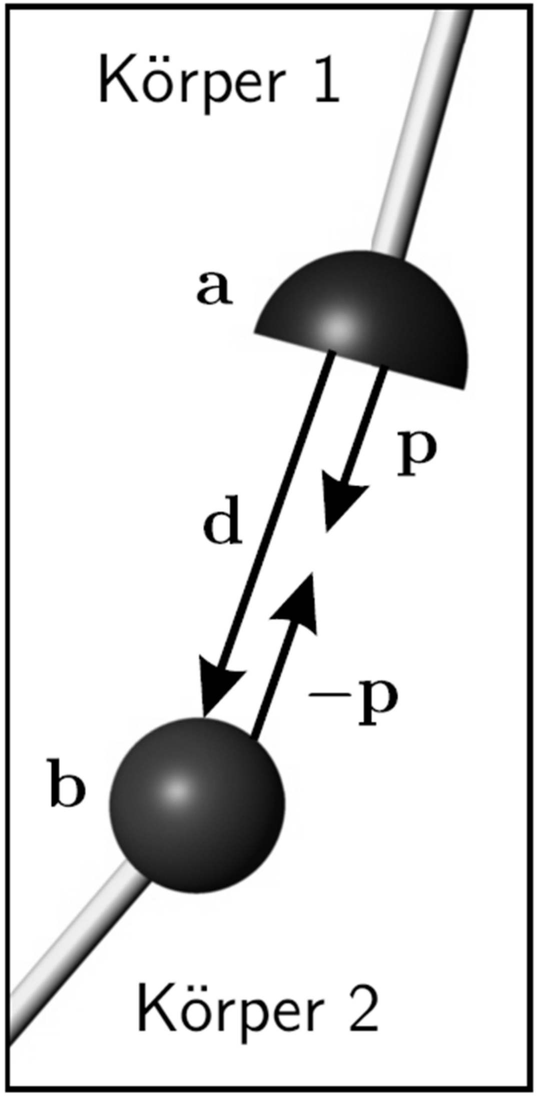
Gelenkbedingung

Bestimmen des Abstands

$$\mathbf{d}(t_0 + h) = \mathbf{b}(t_0 + h) - \mathbf{a}(t_0 + h)$$

$\Rightarrow$ Approximation der Geschwindigkeits-änderung:

$$\frac{1}{h}\,\mathbf{d}(t_0 + h)$$

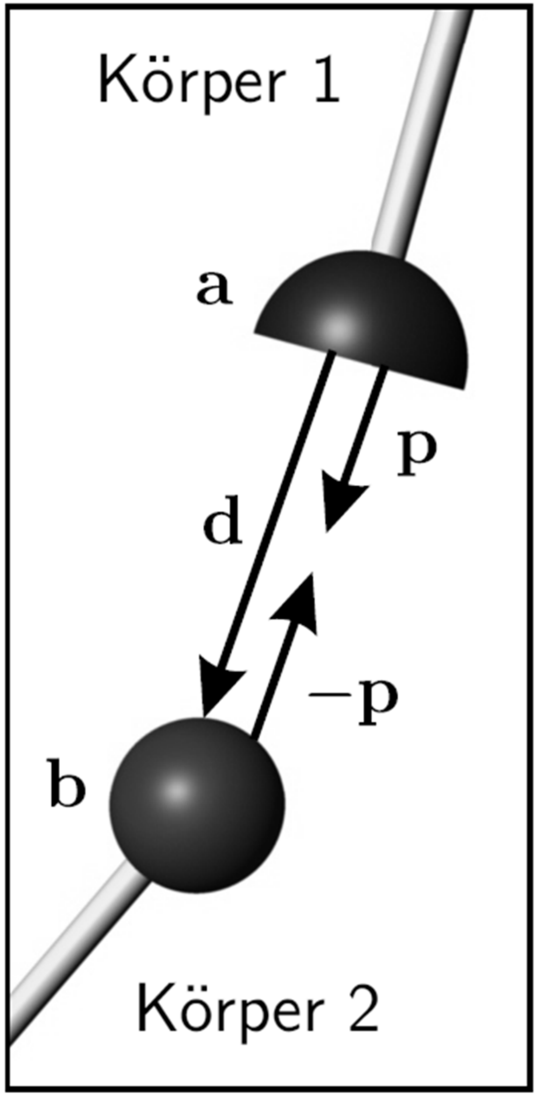


Gelenkbedingung

Berechnen des Korrekturimpulses

Der gesuchte Impuls $\mathbf{p}$ wird durch Lösen der folgenden Gleichung bestimmt:

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_{a,a}(t) + \mathbf{K}_{b,b}(t)$$
$$\mathbf{K}(t_0) \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{h}\,\mathbf{d}(t_0 + h).$$



Eigenschaften

- Die Matrix $\mathbf{K}(t)$ hat die folgenden Eigenschaften:
  - Sie ist konstant für einen Zeitpunkt t,
  - positiv definit,
  - symmetrisch und
  - regulär.

- Daher ist sie schnell invertierbar.

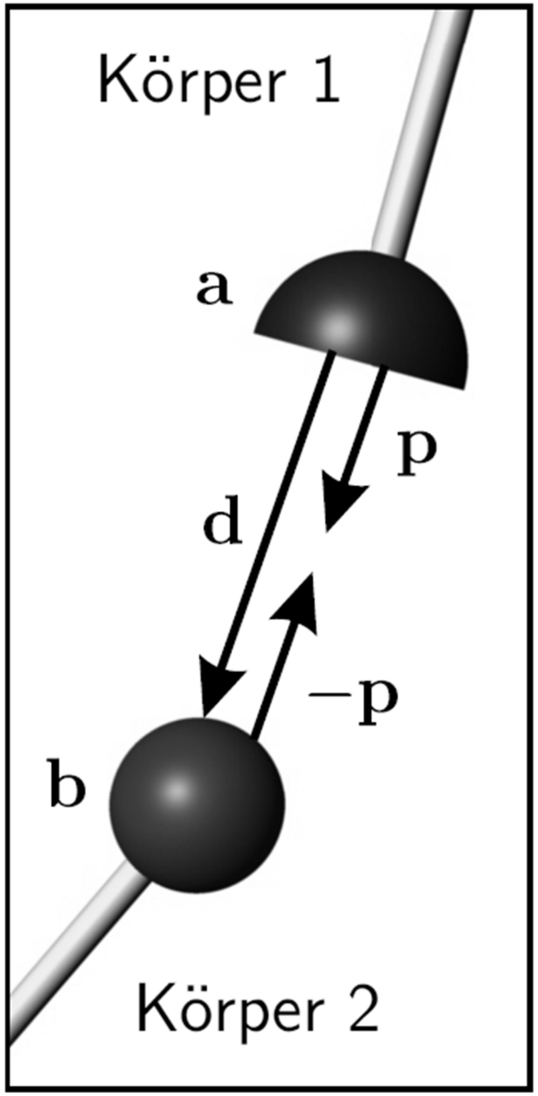
Gelenkbedingung

Impuls zum Zeitpunkt t_0 anwenden

Durch den Impuls $\mathbf{p}$ ergibt sich die folgende Geschwindigkeitsänderung für die Körper:

$$\boldsymbol{\Delta v_1} = \frac{1}{m_1}\mathbf{p}, \ \ \boldsymbol{\Delta\omega_1} = \tilde{\mathbf{J}}_1^{-1}(\mathbf{r}_a \times \mathbf{p})$$

$$\boldsymbol{\Delta v_2} = -\frac{1}{m_2}\mathbf{p}, \ \ \boldsymbol{\Delta\omega_2} = -\tilde{\mathbf{J}}_2^{-1}(\mathbf{r}_b \times \mathbf{p})$$

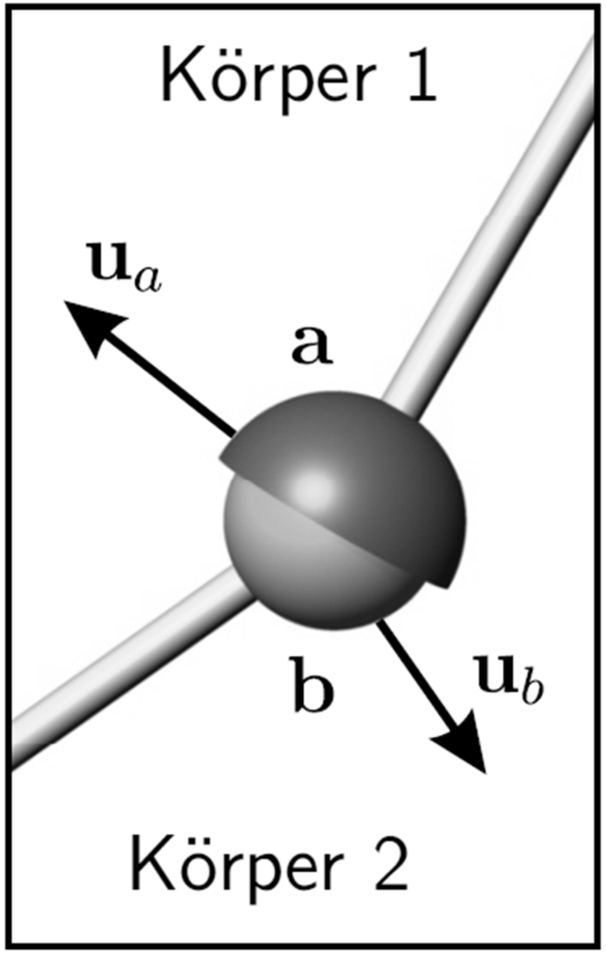


Geschwindigkeitsbedingung

Geschwindigkeitsdifferenz

Bestimmen der Geschwindigkeitsdifferenz der Gelenkpunkte:

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_b(t) - \mathbf{u}_a(t).$$

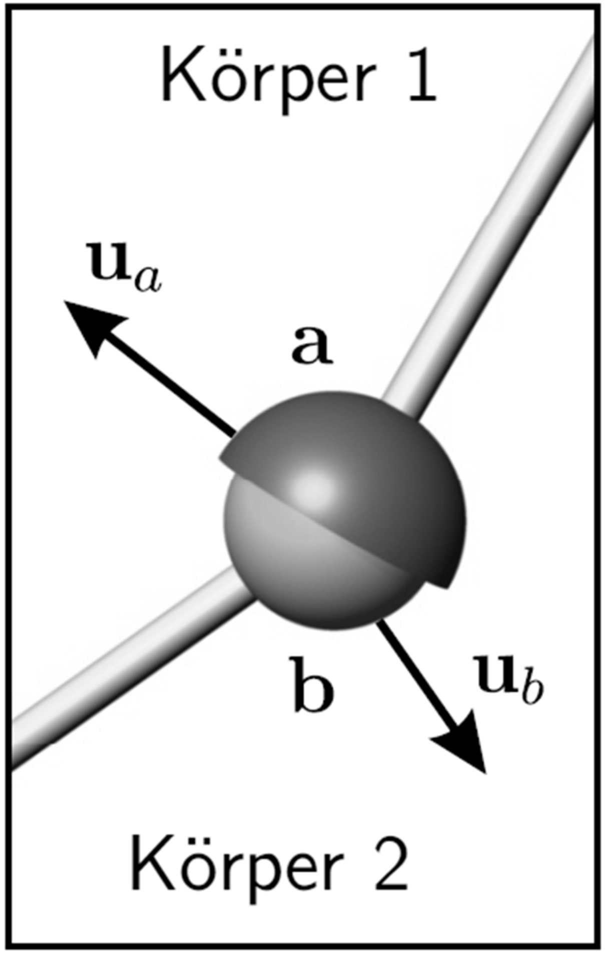


Geschwindigkeitsbedingung

Berechnen des Korrekturimpulses

Der gesuchte Impuls wird durch Lösen der folgenden Gleichung bestimmt:

$$\mathbf{K}(t_0 + h) \cdot \mathbf{p}_v = \mathbf{\Delta u}(t_0 + h).$$



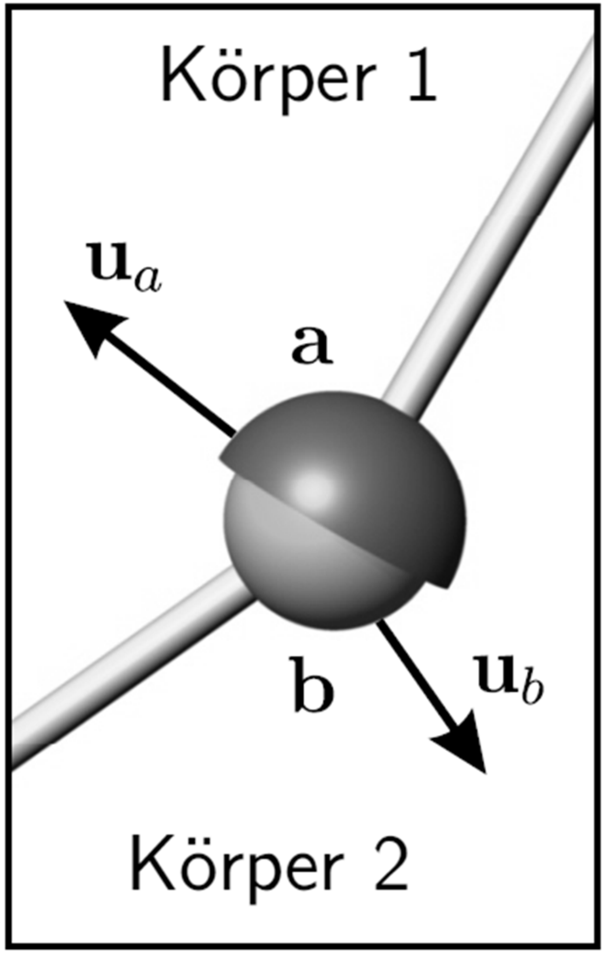
Geschwindigkeitsbedingung

Impuls anwenden

Der Impuls $\mathbf{p}_v$ wirkt zum Zeitpunkt t_0+h auf die Körper und ergibt die folgende Geschwindigkeitsänderung:

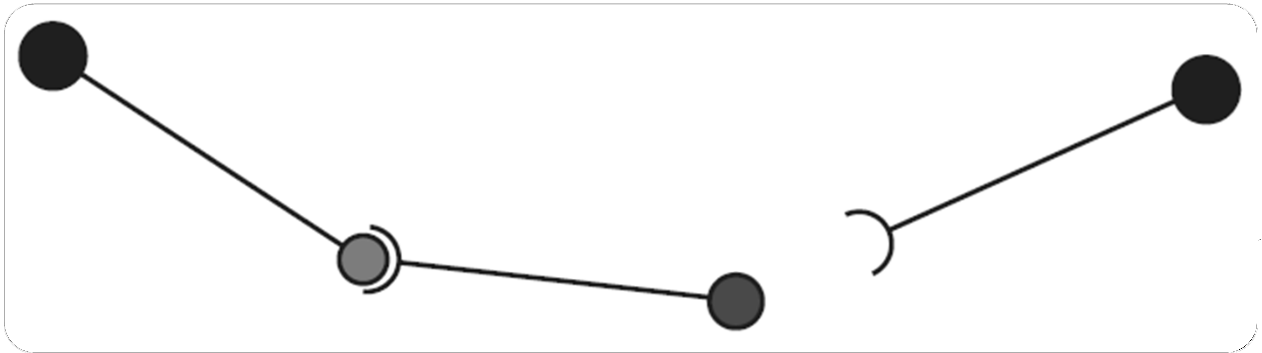
$$\mathbf{\Delta v_1} = \frac{1}{m_1}\mathbf{p}_v, \quad \mathbf{\Delta \boldsymbol{\omega}_1} = \tilde{\mathbf{J}}_1^{-1}(\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_v)$$

$$\mathbf{\Delta v_2} = -\frac{1}{m_2}\mathbf{p}_v, \quad \mathbf{\Delta \boldsymbol{\omega}_2} = -\tilde{\mathbf{J}}_2^{-1}(\mathbf{r}_b \times \mathbf{p}_v)$$

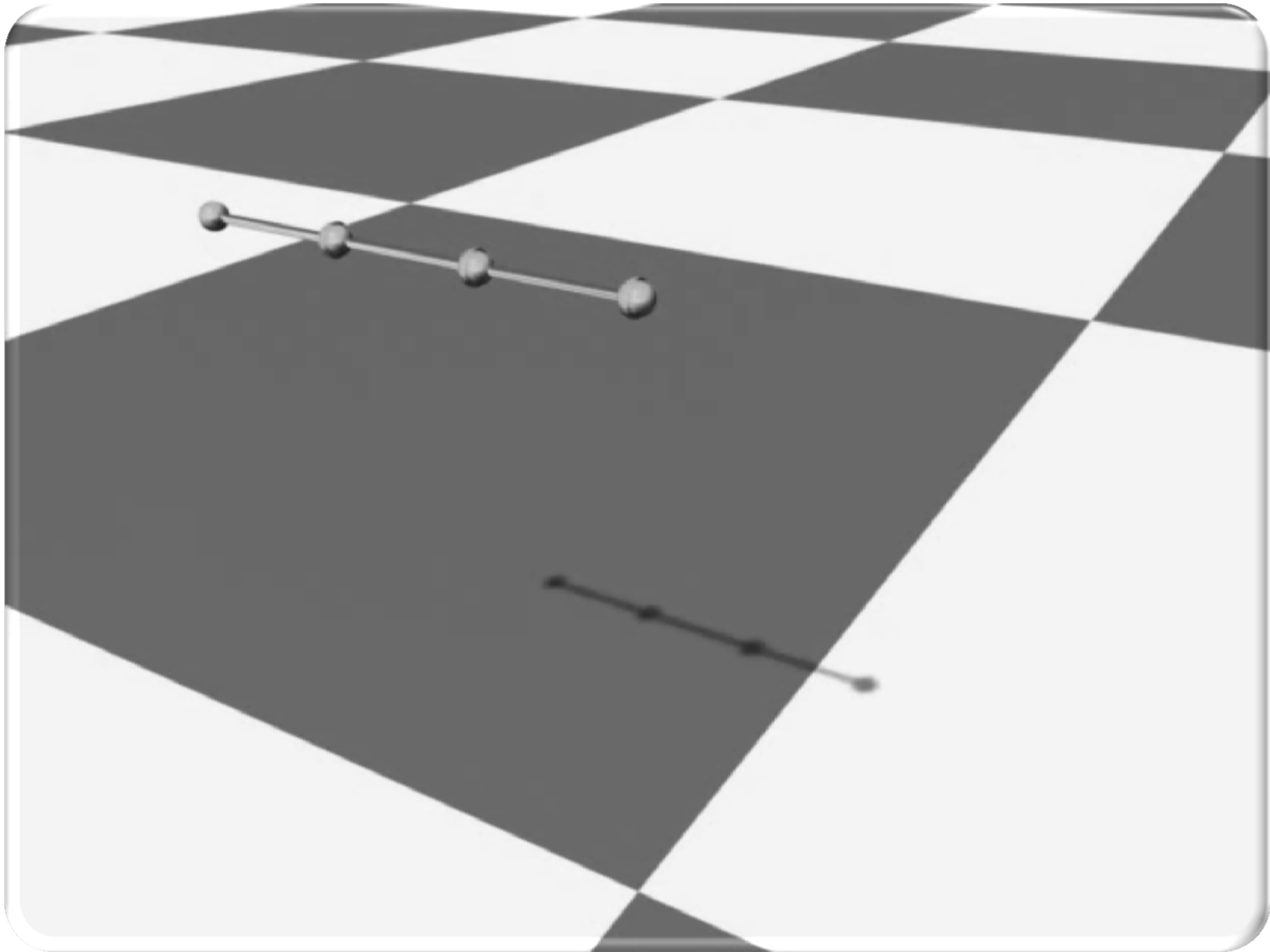


Systeme von Gelenken

- In Systemen mit mehreren Gelenken entstehen Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Bedingungen.
- Diese müssen bei der Berechnung der Impulse berücksichtigt werden.



Iteratives Verfahren



Literatur

- David Baraff, „Physically Based Modeling“, Siggraph 2001 course notes, http://www.pixar.com/companyinfo/research/pbm2001
- David Baraff, „Linear-time dynamics using Lagrange multipliers”, Siggraph 1996
- Joachim W. Baumgarte, „Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1972

Literatur

- Herbert Goldstein, Charles P. Poole und John L. Safko, „Klassische Mechanik“, 2006
- Friedrich Wagner, „Konzepte und Methoden zu allgemeinen, physikalisch basierten Animationssystemen auf der Grundlage der Lagrange-Faktoren-Methode“, Universität Rostock, 2001
- Jan Bender, "Impulsbasierte Dynamiksimulation von Mehrkörpersystemen in der virtuellen Realität", Universität Karlsruhe, 2007