Dynamische Simulation von Mehrkörpersystemen
SS 2012

Aufgabenblatt 2

In diesem Aufgabenteil wird die Simulation von Gelenken behandelt. Ein Gelenk verbindet zwei Körper (Starrkörper bzw. Partikel) und entfernt damit permanent Freiheitsgrade aus dem Gesamtsystem. Zur Vereinfachung soll davon ausgegangen werden, dass die Summe aller externen Kräfte während eines Simulationsschrittes konstant ist. Die translatorische Bewegung von Starrkörpern und Partikeln kann dann durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_0+h) &= \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)\,h + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m}h^2 \\ \mathbf{v}(t_0+h) &= \mathbf{v}(t_0) + \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m}h.\end{aligned}$$

Für Federn, die eine kontinuierliche Kraft haben, wird die Stärke der Kraft nur am Anfang eines Simulationsschrittes ausgewertet. Dies bedeutet, dass sie mit dem Euler-Verfahren integriert werden.

1. Implementieren Sie eine Klasse für die Simulation eines Kugelgelenks. Ein Kugelgelenk verbindet zwei Körper in einem gemeinsamen Punkt. Dieser Punkt muss im jeweiligen lokalen Koordinatensystem des Körpers gespeichert und einmal pro Simulationsschritt in Weltkoordinaten transformiert werden, um numerische Probleme zu vermeiden.

2. Schreiben Sie eine Funktion zur Berechnung der Matrix $\mathbf{K}$.

3. Für die impulsbasierte Simulation der Positionsbedingung des Gelenks wird eine Vorschau der Gelenkpunkte benötigt. Die Veränderung des Vektors vom Schwerpunkt zum Gelenkpunkt sowie die neue Position des Schwerpunktes können durch Integration bestimmt werden. Dafür müssen Sie eine weitere Funktion schreiben, die diese Vorschau berechnet.

4. Positionsbedingung: Mit Hilfe der Vorschau kann der Abstand der Punkte zum Zeitpunkt $t_0 + h$ bestimmt werden. Berechnen Sie daraus den Korrekturimpuls und lassen Sie ihn zum Zeitpunkt t_0 auf die Körper

einwirken. Die veränderten Geschwindigkeiten sorgen dafür, dass der Abstand der Gelenkpunkte zum Zeitpunkt $t_0 + h$ kleiner wird. Damit der Abstand am Ende des Simulationsschrittes Null wird, berechnen Sie weitere Korrekturimpulse in einer iterativen Schleife. Die Schleife soll enden, wenn eine vorgegebene Genauigkeit erreicht wurde (z. B. $10^{-6}\,\mathrm{m}$).

5. Nachdem die Schleife für die Positionsbedingung beendet wurde, lösen Sie die Bewegungsgleichung. Durch die berechneten Impulse sollten die Positionsbedingungen nun erfüllt sein.

6. Geschwindigkeitsbedingung: Berechnen Sie die Korrekturimpulse für die Geschwindigkeitsbedingungen aller Gelenke bis diese innerhalb einer vorgegebenen Toleranz erfüllt sind (z. B. $10^{-4}\,\mathrm{m/s}$).