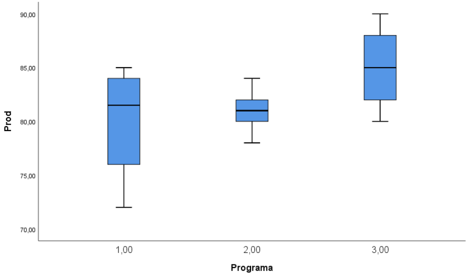
exemplo

O diretor de uma empresa quer determinar se três tipos diferentes de programas de formação profissional têm efeitos diferentes no nível de produtividade dos empregados.
Quatorze empregados são selecionados aleatoriamente e alocados a cada um dos programas de formação.
A experiência termina quando a cada empregado é aplicado um teste para medir o seu desempenho. Os resultados obtidos estão resumidos no diagrama em caixa de bigodes.



análise de variância (ANOVA)

A **análise de variância** (ANOVA, "***Analisys of Variance***") aborda o problema da comparação entre médias de k populações normais

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

- quando $k = 2$ pode aplicar-se o **teste** Z (assintótico) ou o **teste** t (exato) para populações normais

- quando $k \geq 3$, para testar H_0 deve ter-se em consideração
  - a forma como as k populações são definidas – habitualmente são definidas com base num ou mais critérios - os **fatores**
  - a variabilidade evidenciada pelas amostras de cada uma das k populações
- **fator** – é a variável cujo impacto queremos medir nas unidades experimentais
- o fator tem k ***tratamentos*** ou ***níveis*** que definem as k populações

análise de variância (ANOVA) versus testes simultâneos

Se quisermos comparar a produção média diária de três máquinas podemos testar as hipóteses

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ vs } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \text{ e } H_0 : \mu_1 = \mu_3 \text{ vs } H_1 : \mu_1 \neq \mu_3 \text{ e}$$

$$H_0 : \mu_2 = \mu_3 \text{ vs } H_1 : \mu_2 \neq \mu_3$$

Se H_0 não for rejeitada em cada um dos testes, pode-se concluir que as três médias são iguais.

- quando o n.º de máquinas (populações) aumenta o n.º de testes necessários cresce acentuadamente
- se os testes foram realizados com $\alpha = 5\%$, a significância real dos três testes simultâneos excede bastante os 5%; de facto, α é a probabilidade do erro do tipo I (rejeitar H_0 sendo verdadeira)

$$\begin{aligned} P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) &= 1-(1-0,05)(1-0,05)(1-0,05) \\ &= 14,26\% >> 5\% \end{aligned}$$

ANOVA com um fator (efeitos fixos)

Há várias formas de planear uma experiência. O mais simples é o *modelo completamente aleatorizado* ou ANOVA com um fator.

As unidades experimentais são associadas aos diferentes níveis (ou tratamentos) de um único fator.

Neste caso, assume-se que os dados são constituídos por k amostras aleatórias independentes

$$X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_i}, i = 1, 2, ..., k$$

onde as variáveis aleatórias X_{ij} têm distribuição normal com médias μ_i desconhecidas e com **variância comum** σ^2, também desconhecida

$$X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2), j = 1, 2, ..., n_i, i = 1, 2., ..., k$$

condições gerais de aplicação da ANOVA

A aplicação da ANOVA tem associada 3 pressupostos essenciais (entre outros):

- todas as populações são normais
- todas as populações possuem a mesma variância, isto é, verifica-se a **homocedasticidade** ou homogeneidade das variâncias
- as amostras são aleatórias e independentes entre si

exemplo

O diretor de uma empresa quer determinar se três tipos diferentes de programas de formação profissional têm efeitos diferentes no nível de produtividade dos empregados.

- Estes programas de formação são os *tratamentos* ou níveis que a ANOVA pode avaliar
- Quatorze empregados são selecionados aleatoriamente e alocados a cada um dos programas de formação.

A experiência termina quando a cada empregado é aplicado um teste para medir o seu desempenho. Os resultados obtidos são apresentados na tabela seguinte.

exemplo (cont.)

Tratamentos								
	programa 1	85	72	83	80	–	$\overline{x}_{1\bullet} = \mathbf{80}$	$s^2_{1\bullet} = 98/3$
	programa 2	80	84	81	78	82	$\overline{x}_{2\bullet} = \mathbf{81}$	$s^2_{2\bullet} = 5$
	programa 3	82	80	85	90	88	$\overline{x}_{3\bullet} = \mathbf{85}$	$s^2_{3\bullet} = 17$

média global da amostra: $\overline{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{14} x_{ij}}{14} = \frac{\sum_{k=1}^{3} n_k \overline{x}_{k\bullet}}{n} = \mathbf{82,14}$

Podemos identificar três tipos, ou fontes, de variação:

- há variação entre todas as 14 observações – nem todas as notas dos empregados são as mesmas no teste – esta é a chamada **variação total**
- há variação entre tratamentos diferentes (amostras) – os empregados do programa 1 não possuem as mesmas notas dos empregados dos programas 2 ou 3 – esta é a chamada **variação entre as amostras**
- há variação dentro de qualquer tratamento (amostra) – nem todos os empregados sujeito ao mesmo programa têm a mesma nota – esta é a chamada **variação dentro das amostras**

formalização do modelo ANOVA com um fator

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \text{ com } \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), j = 1, 2, ..., n_i, i = 1, 2., ..., k$$

- o que implica que $\mu_i = \mu + \alpha_i$, $(i = 1, 2, ..., k)$
- o efeito do tratamento ou nível i do fator é representado pelo parâmetro α_i, $i = 1, 2, ..., k$
- a violação da homocedasticidade ($var(\epsilon_{ij}) = \sigma^2$) pode ter sérias consequências no que diz respeito à validade das conclusões, consequências essas que podem ser minoradas se as amostras forem da mesma dimensão
- a violação da normalidade pode não ter consequências sérias se a dimensão das amostras for razoavelmente grande (teorema do limite central)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k \text{ vs } H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$$

ou

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0 \text{ vs } H_1 : \exists i : \alpha_i \neq 0$$

princípios subjacentes à ANOVA

- para determinar se tratamentos diferentes possuem efeitos diferentes nas respetivas populações, é feita uma comparação entre a variação **dentro** das amostras e a variação **entre** as amostras
- a variação dentro de qualquer amostra pode ser causada por vários motivos (habilidade natural dos empregados, motivação pessoal, etc) que designamos por **erros aleatórios**
- a variação entre as amostras pode ser causada pelos mesmos fatores aleatórios mais alguma influência adicional devido ao tratamento aplicado (tratamentos diferentes podem ter efeitos diferentes) – o **efeito de tratamento** entre amostras

variação total = variação entre as amostras + variação dentro das amostras

SQT SQE SQD

Se a variação entre amostras é significativamente maior do que a variação dentro das amostras, um forte efeito de tratamento está presente.

A ANOVA avalia a razão destas variações.

a soma dos quadrados

Os tipos de variação gera uma *soma de quadrados* e uma partição da forma

$$SQT = SQE + SQD$$

- $SQ\boldsymbol{T}$ – soma dos quadrados **Total** $SQT = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{\overline{X}})^2$ Variância x n-1 Global.

  é a variação das observações em torno da média global

- $SQ\boldsymbol{E}$ – soma dos quadrados **Entre** tratamentos $SQE = \sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{\overline{X}})^2$ Soma. Produto excel

  reflete a variação das médias dos tratamentos em relação à média global

- $SQ\boldsymbol{D}$ – soma dos quadrados **Dentro** dos tratamentos (**erros**)

  $$SQD = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \overline{X}_{i\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_{i\bullet}^2$$

  mede a variação aleatória dentro dos tratamentos em relação às respetivas médias

exemplo (cont.)

$$
\begin{aligned}
SQT &= (85-\mathbf{82,14})^2+(72-\mathbf{82,14})^2+(83-\mathbf{82,14})^2+(80-\mathbf{82,14})^2+\\
&\quad +(80-\mathbf{82,14})^2+\ldots+(82-\mathbf{82,14})^2\\
&\quad +(82-\mathbf{82,14})^2+\ldots+(88-\mathbf{82,14})^2\\
&= 251,7\\
SQE &= 4(\mathbf{80}-\mathbf{82,14})^2+5(\mathbf{81}-\mathbf{82,14})^2+5(85-\mathbf{82,14})^2\\
&= 65,7\\
SQD &= (85-\mathbf{80})^2+(72-\mathbf{80})^2+\ldots+(80-\mathbf{80})^2\\
&\quad +(80-\mathbf{81})^2+(84-\mathbf{81})^2+\ldots+(82-\mathbf{81})^2\\
&\quad +(82-85)^2+(80-85)^2+\ldots+(88-85)^2\\
&= 3\times 98/3+4\times 5+4\times 17\\
&= 186,0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SQT &= SQE+SQD\\
251,7 &= 65,7+186,0
\end{aligned}
$$

os graus de liberdade e as médias dos quadrados

Define-se **graus de liberdade (g.l.)** como o número de observações no conjunto de dados menos qualquer restrição que temos aplicada.
Uma restrição é uma quantidade que foi calculada por meio do conjunto de dados.

$$\begin{aligned} \text{g.l. para } SQT &= \text{g.l. para } SQE + \text{g.l. para } SQD \\ n-1 &= \quad k-1 \quad + \quad n-k \end{aligned}$$

Dividindo as somas dos quadrados pelos respetivos graus de liberdade obtém-se as médias quadráticas respetivas

- média dos quadrados total $MQT = \frac{SQT}{n-1}$
- média dos quadrados entre tratamentos $MQE = \frac{SQE}{k-1}$
- erro quadrático médio $MQD = \frac{SQD}{n-k}$

estatística de teste da ANOVA

Mostra-se que $\mu_{MQT} = \sigma^2$; $\mu_{MQD} = \sigma^2$ e $\mu_{MQE} = \sigma^2 + \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i^2$

A estatística de teste da ANOVA é a razão entre as medidas de variâncias MQE e MQD tendo a seguinte distribuição F de Snedecor

$$F_{teste} = \frac{\frac{SQE}{k-1}}{\frac{SQD}{n-k}} = \frac{MQE}{MQD} \sim F_{(k-1,n-k)}$$

interpretação:

- se os tratamentos apresentam efeitos diferentes, MQE refletirá isso crescendo
- se $F = \frac{MQE}{MQD}$ for "significativamente" grande (MQE é maior que MQD), provavelmente existe efeito dos tratamentos; neste caso, é provável que tratamentos diferentes tenham efeitos diferentes sobre as médias das suas respetivas populações, e a hipótese H_0 deve ser rejeitada

o teste é unilateral à direita, rejeitando-se H_0 quando $F_{obs} > F_{1-\alpha,(k-1,n-k)}$

Alternativamente, rejeita-se H_0 quando $P(F_{Teste} \geq F_{obs}) < \alpha$

exemplo (cont.)

$$MQT = \frac{SQT}{n-1} = \frac{251,7}{14-1} = 19,4;\ MQE = \frac{SQE}{k-1} = \frac{65,7}{3-1} = 32,9$$

$$MQD = \frac{SQD}{n-k} = \frac{186,0}{14-3} = 16,9$$

logo

$$F_{obs} = \frac{32,9}{16,9} = 1,94 \text{ e } F_{teste} \sim F_{(2,11)}$$

como $F_{0,95,(2,11)} = 3,98$, isto é, $F_{obs} = 1,94 < 3,98$, a hipótese de que as médias são iguais não pode ser rejeitada para $\alpha = 5\%$

a tabela ANOVA

ANOVA

fonte de variação	soma de quadrados	g.l.	média dos quadrados	valor F
entre amostras (tratamentos)	SQE	$k-1$	$SQE/(k-1)$	$\dfrac{MQE}{MQD}$
dentro das amostras (erros)	SQD	$n-k$	$SQD/(n-k)$	
variação total	SQT	$n-1$		

exemplo (cont.)

ANOVA

fonte de variação	**soma de quadrados**	**g.l.**	**média dos quadrados**	**valor F**
entre amostras (tratamentos)	$65,7$	2	$32,9$	
dentro das amostras (erros)	$186,0$	11	$16,9$	$F_{obs} = 1,94$
variação total	$251,7$	13		

- hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ vs $H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$, com $i, j = 1, 2, 3$
- regra de decisão: rejeitar H_0 de $F_{obs} > 3,98$
- conclusão: como $F_{obs} = 1,94 < 3,98$, não rejeitamos a hipótese nula

exercício

1. O resultado das vendas efetuadas por três vendedores de uma indústria durante certo período é dado a seguir.
   Pretende-se saber, ao nível de significância de $\alpha = 5\%$, se há diferença de eficiência entre os vendedores.

A	29	27	31	29	32	30
B	27	27	30	28		
C	30	30	31	27	29	

2. Considerem-se 5 tratamentos que foram aplicados a determinadas peças de modo a avaliar-se a resistência induzida. Os resultados são os seguintes.
   Teste se existe igualdade na resistência média induzida pelos 5 tratamentos ($\alpha = 1\%$).

T1	330	314	331	311	320
T2	315	304	307	320	305
T3	298	289	273	240	121
T4	286	273	269	278	274
T5	279	240	266	269	250

testes para diferenças entre dois tratamentos - testes *Post-hoc*

- Se H_0 for rejeitada, pelo menos uma das médias é diferente das demais.

- A questão é ***"Quais os pares de médias que devem ser consideradas diferentes?"***

- Existem vários testes *Post-hoc* de comparações múltiplas de médias (por exemplo, Tukey, Bonferroni, Scheffé, DMS, etc.)

- O **método de Tukey** é um dos mais potentes e robustos aos desvios à normalidade e homocedasticidade das variâncias para amostras grandes.

- O **DMS** (*diferença mínima significativa*) de Fisher pode ser utilizado especialmente quando se compara um n.º reduzidos de grupos porque tem cálculos simples.

método de Tukey

- **amostras equilibradas** $n_i = n_j = r$, $\forall ij$
  o método de Tukey indica que duas médias são significativamente diferentes se o valor absoluto das suas diferenças amostrais for superior a

$$|\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet}| > q_{1-\alpha,(k,n-k)}\sqrt{\frac{MQD}{r}}$$

  onde $q_{1-\alpha,(k,n-k)}$ é o valor tabelado da distribuição padronizada para a amplitude (ver tabela do teste de Tukey) e r é o n.º de réplicas em cada tratamento
- **amostras pouco desequilibradas** $n_i \neq n_j$ **e** $\max\{n_i\} \leq 2 \cdot \min\{n_i\}$
  r deve ser substituído pela média harmónica r_h

$$r_h = \frac{k}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}}$$

  –> quando a relação $\max\{n_i\} \leq 2 \cdot \min\{n_i\}$ não se verifica deve aplicar-se o teste de Scheffé

método DMS (diferença mínima significativa)

LSD - Least Significant Difference

No teste de DMS de Fisher rejeita-se $H_0 : \mu_i = \mu_j$ se

- **amostras equilibradas** $n_i = n_j = r$, $\forall ij$

$$|\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet}| > \sqrt{\frac{2 \cdot MQD \cdot F_{1-\alpha,(1,n-k)}}{r}}$$

- **amostras desequilibradas** $n_i \neq n_j$, **para algum** i **e** j

$$|\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{j\bullet}| > \sqrt{MQD\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right) F_{1-\alpha,(1,n-k)}}$$

o método de DMS é aconselhado para a comparação até 4 médias, quando se pretende fazer mais comparações deve aplicar-se o teste de Scheffé

exemplo 1 - amostras equilibradas

Um banco tem 4 setores que atribuíram prémios diferentes aos novos clientes. Para aferir que prémios diferentes atraíram grupos diferentes de rendimentos, recolheram-se os dados seguintes relativos aos valores de 7 depósitos em cada setor do banco.

Teste se há diferenças no nível médio de depósito entre os quatro setores ($\alpha = 5\%$).

	setor 1	setor 2	setor 3	setor 4
	5,1	1,9	3,6	1,3
	4,9	1,9	4,2	1,5
	5,6	2,1	4,5	0,9
	4,8	2,4	4,8	1,0
	3,8	2,1	3,9	1,9
	5,1	3,1	4,1	1,5
	4,8	2,5	5,1	2,1
$\overline{x}_i$	4,87	2,29	4,31	1,46
$\overline{\overline{x}} = 3,23$				

exemplo 1 (cont.)

ANOVA

fonte de variação	**soma de quadrados**	**g.l.**	**média dos quadrados**	**valor F**
entre amostras (tratamentos)	$55,33$	3	$18,44$	
dentro das amostras (erros)	$5,67$	24	$0,236$	$F_{obs} = 78,09$
variação total	$61,00$	27		

- hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ vs $H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$, com $i, j = 1, 2, 3, 4$
- regra de decisão: rejeitar H_0 de $F_{obs} > 3,01$
- conclusão: como $F_{obs} = 78,09 > 3,01$, **rejeitamos** a hipótese nula

exemplo 1 (cont.)

- método de Tukey da tabela do teste de Tukey temos $q_{0,95,(4,24)} = 3,90$, logo

$$T = q_{1-\alpha,(k,n-k)}\sqrt{\frac{MQD}{r}} = 3,90\sqrt{\frac{0,236}{7}} = 0,716$$

$|\overline{x}_1 - \overline{x}_2| = |4,87 - 2,29| = 2,58 > 0,716^*$
$|\overline{x}_1 - \overline{x}_3| = |4,87 - 4,31| = 0,56 < 0,716$
$|\overline{x}_1 - \overline{x}_4| = |4,87 - 1,46| = 3,41 > 0,716^*$
$|\overline{x}_2 - \overline{x}_3| = |2,29 - 4,31| = 2,02 > 0,716^*$
$|\overline{x}_2 - \overline{x}_4| = |2,29 - 1,46| = 0,83 > 0,716^*$
$|\overline{x}_3 - \overline{x}_4| = |4,31 - 1,46| = 2,85 > 0,716^*$

–> com 95% de confiança apenas os setores 1 e 3 têm níveis de depósitos médios iguais; todas as outras diferenças são estatisticamente significativas

exemplo 1 (cont.)

- método de DMS
  $F_{0,95,(1,24)} = 4,26$

$$DMS = \sqrt{\frac{2 \cdot MQD \cdot F_{1-\alpha,(1,n-k)}}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,236 \cdot 4,26}{7}} = 0,536$$

$|\overline{x}_1 - \overline{x}_2| = |4,87 - 2,29| = 2,58 > 0,536^*$
$|\overline{x}_1 - \overline{x}_3| = |4,87 - 4,31| = 0,56 > 0,536^*$
$|\overline{x}_1 - \overline{x}_4| = |4,87 - 1,46| = 3,41 > 0,536^*$
$|\overline{x}_2 - \overline{x}_3| = |2,29 - 4,31| = 2,02 > 0,536^*$
$|\overline{x}_2 - \overline{x}_4| = |2,29 - 1,46| = 0,83 > 0,536^*$
$|\overline{x}_3 - \overline{x}_4| = |4,31 - 1,46| = 2,85 > 0,536^*$
–> o método DMS sugere médias diferentes para todos os setores
–> o método DMS é mais conservador que o método de Tukey no sentido em que o valor DMS é menor que o valor de Tukey

exemplo 2 - amostras desequilibradas

Um grupo empresarial dispõe de três unidades hoteleiras especialmente dedicadas a atividades de lazer distintas (campismo, pesca e vela).
Determine se há diferença nas médias dos rendimentos anuais (m€) dos visitantes em cada uma dessas unidades hoteleiras de acordo com as atividades disponibilizadas. Considere $\alpha = 5\%$.

	campismo	pesca	vela
	38	30	19
	32	25	35
	35	31	20
	36	35	22
	38		25
	32		
$\overline{x_i}$	35,17	30,25	24,20

$\overline{\overline{x}} = 30,2$

exemplo 2 (cont.)

ANOVA

fonte de variação	**soma de quadrados**	**g.l.**	**média dos quadrados**	**valor F**
entre amostras (tratamentos)	$328,0$	2	$164,0$	
dentro das amostras (erros)	$254,4$	12	$21,2$	$F_{obs} = 7,74$
variação total	$582,4$	14		

- hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ vs $H_1 : \exists i, j : \mu_i \neq \mu_j$, com $i, j = 1, 2, 3$
- regra de decisão: rejeitar H_0 de $F_{obs} > 3,89$
- conclusão: como $F_{obs} = 7,74 > 3,89$, **rejeitamos** a hipótese nula

exemplo 2 (cont.)

Uma vez que a H_0 foi rejeitada podemos fazer as comparações dois a dois para determinar qual, ou quais, as diferenças significativas.

- método de Tukey

  $q_{\alpha,(k,n-k)} = q_{95\%,3,12} = 3,77$

$$r_h = \frac{k}{\frac{1}{n_C} + \frac{1}{n_P} + \frac{1}{n_V}} = \frac{3}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = 4,86$$

$$T = q_{1-\alpha,(k,n-k)} \sqrt{\frac{MQD}{r_h}} = 3,77\sqrt{\frac{21,2}{4,86}} = 7,87$$

$$|\overline{x}_C - \overline{x}_P| = |35,17 - 30,25| = \mathbf{4,92} < 7,87$$
$$|\overline{x}_C - \overline{x}_V| = |35,17 - 24,20| = \mathbf{10,97} > 7,87$$
$$|\overline{x}_P - \overline{x}_V| = |30,25 - 24,20| = \mathbf{6,05} < 7,87$$

–> apenas os rendimentos médios anuais dos visitantes que praticam o campismo e a vela diferem significativamente, a um nível de 5%.

exemplo 2 (cont.)

- método de DMS

$F_{1-\alpha,(1,n-k)} = F_{1-5\%,(1,15-3)} = F_{95\%,(1,12)} = 4,75$

$$DMS_{C,P} = \sqrt{MQD\left(\frac{1}{n_C} + \frac{1}{n_P}\right) \cdot 4,75} = \sqrt{21,2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) \cdot 4,75} = 6,48$$

$$DMS_{C,V} = \sqrt{MQD\left(\frac{1}{n_C} + \frac{1}{n_V}\right) \cdot 4,75} = \sqrt{21,2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) \cdot 4,75} = 6,08$$

$$DMS_{P,V} = \sqrt{MQD\left(\frac{1}{n_P} + \frac{1}{n_V}\right) \cdot 4,75} = \sqrt{21,2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot 4,75} = 6,48$$

$|\overline{x}_C - \overline{x}_P| = |35,17 - 30,25| = \mathbf{4,92} < 6,48$

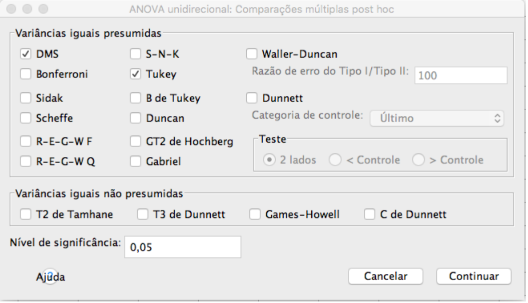
$|\overline{x}_C - \overline{x}_V| = |35,17 - 24,20| = \mathbf{10,97} > 6,08$

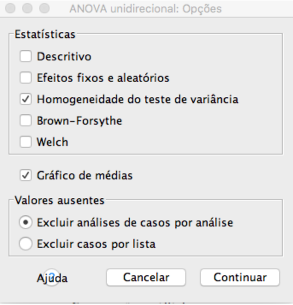
$|\overline{x}_P - \overline{x}_V| = |30,25 - 24,20| = \mathbf{6,05} < 6,73$

–> apenas os rendimentos médios anuais dos visitantes que praticam o campismo e a vela diferem significativamente, a um nível de 5%.

a ANOVA com um fator no

- o teste da ANOVA a um fator encontra-se em **analyze/compare means/Oneway ANOVA**
- os testes de comparações múltiplas *Post-Hoc* encontram-se no botão





- a homocedasticidade pode ser testada através do teste de Levene que pode ser selecionado nas opções (ver em cima à direita)

exemplo 1 (cont.)

ANOVA

deposito

	Soma dos Quadrados	df	Quadrado Médio	Z	Sig.
Entre Grupos	55,332	3	18,444	78,090	,000
Nos grupos	5,669	24	,236		
Total	61,001	27			

Teste de Homogeneidade de Variâncias

deposito

Estatística de Levene	df1	df2	Sig.
,136	3	24	,938

Comparações múltiplas

Variável dependente: deposito

	(I) setor	(J) setor	Diferença média (I-J)	Erro Padrão	Sig.	Intervalo de Confiança 95% Limite inferior	Intervalo de Confiança 95% Limite superior
Tukey HSD	1	2	2,5857*	,2598	,000	1,869	3,302
		3	,5571	,2598	,168	-,159	1,274
		4	3,4143*	,2598	,000	2,698	4,131
	2	1	-2,5857*	,2598	,000	-3,302	-1,869
		3	-2,0286*	,2598	,000	-2,745	-1,312
		4	,8286*	,2598	,019	,112	1,545
	3	1	-,5571	,2598	,168	-1,274	,159
		2	2,0286*	,2598	,000	1,312	2,745
		4	2,8571*	,2598	,000	2,141	3,574
	4	1	-3,4143*	,2598	,000	-4,131	-2,698
		2	-,8286*	,2598	,019	-1,545	-,112
		3	-2,8571*	,2598	,000	-3,574	-2,141
DMS	1	2	2,5857*	,2598	,000	2,050	3,122
		3	,5571*	,2598	,042	,021	1,093
		4	3,4143*	,2598	,000	2,878	3,950
	2	1	-2,5857*	,2598	,000	-3,122	-2,050
		3	-2,0286*	,2598	,000	-2,565	-1,492
		4	,8286*	,2598	,004	,292	1,365
	3	1	-,5571*	,2598	,042	-1,093	-,021
		2	2,0286*	,2598	,000	1,492	2,565
		4	2,8571*	,2598	,000	2,321	3,393
	4	1	-3,4143*	,2598	,000	-3,950	-2,878
		2	-,8286*	,2598	,004	-1,365	-,292
		3	-2,8571*	,2598	,000	-3,393	-2,321

*. A diferença média é significativa no nível 0.05.

- temos $F_{obs} = 78,09$ com o valor-p $\approx 0 < 5\%$, logo, **rejeitamos** H_0, isto é, $\exists i,j : \mu_i \neq \mu_j$
- como se rejeitou a igualdade de todas as médias procede-se às comparações múltiplas, para $\alpha = 5\%$:
  - o método de Tukey indica que apenas devemos aceitar que as médias μ_1 e μ_3 são idênticas (**valor-p 16,8%>5%**), todas as restantes igualdades são rejeitadas (**valor-p<5%**)
  - o método DMS considera todas as médias diferentes entre si (todos os **valores-p<5%**)
- a **homocedasticidade não é rejeitada** (valor-p=93,8%>5%); a **normalidade não é rejeitada** (intervalos g_1 e g_2 de cada setor)

exemplo 2 (cont.)

ANOVA

rendimento

	Soma dos Quadrados	df	Quadrado Médio	Z	Sig.
Entre Grupos	328,017	2	164,008	7,737	,007
Nos grupos	254,383	12	21,199		
Total	582,400	14			

Teste de Homogeneidade de Variâncias

rendimento

Estatística de Levene	df1	df2	Sig.
1,192	2	12	,337

Testes Post Hoc

Comparações múltiplas

Variável dependente: rendimento

	(I) atividade	(J) atividade	Diferença média (I-J)	Erro Padrão	Sig.	Intervalo de Confiança 95% Limite inferior	Limite superior
Tukey HSD	1	2	4,917	2,972	,262	-3,01	12,85
		3	10,967*	2,788	,005	3,53	18,40
	2	1	-4,917	2,972	,262	-12,85	3,01
		3	6,050	3,089	,165	-2,19	14,29
	3	1	-10,967*	2,788	,005	-18,40	-3,53
		2	-6,050	3,089	,165	-14,29	2,19
DMS	1	2	4,917	2,972	,124	-1,56	11,39
		3	10,967*	2,788	,002	4,89	17,04
	2	1	-4,917	2,972	,124	-11,39	1,56
		3	6,050	3,089	,074	-,68	12,78
	3	1	-10,967*	2,788	,002	-17,04	-4,89
		2	-6,050	3,089	,074	-12,78	,68

*. A diferença média é significativa no nível 0.05.

- temos $F_{obs} = 7,737$ com o valor-p $= 0,7\% < 5\%$, logo, **rejeitamos** H_0, isto é, $\exists i,j : \mu_i \neq \mu_j$
- como se rejeitou a igualdade de todas as médias procede-se às comparações múltiplas, para $\alpha = 5\%$:
  - o método de Tukey indica que apenas rejeitar a igualdade das médias entre *campismo* e *vela* (**valor-p 0,5%<5%**), todas as restantes igualdades não são rejeitadas (**valor-p>5%**)
  - o método DMS indica conslusões idênticas ao método de Tukey
- a **homocedasticidade não é rejeitada** (valor-p=33,7%>5%); a **normalidade não é rejeitada** (teste de S-W)

exercícios

1 Um departamento governamental pretende analisar os custos associados a diferentes projetos solicitados a 4 institutos através da razão entre o custo final incorrido e o custo inicialmente previsto. Averigúe se os quatro institutos têm um comportamento global distinto em relação ao agravamento de custos (comparação das médias das razões).

instituto	custo incorrido / custo previsto					
A	1,0	0,8	1,9	1,1	2,7	
B	1,7	2,5	3,0	2,2	3,7	1,9
C	1,0	1,3	3,2	1,4	1,3	2,0
D	3,8	2,8	1,9	3,0	2,5	

2 Uma empresa distribuidora de butano decidiu testar qual o conteúdo de isobutano no gás que distribuía. Os testes foram realizados em três laboratórios distintos. Os resultados foram os apresentados. Interprete os resultados obtidos.

I	27,64	27,48	26,82	27,42	27,2	27,91	28,20	26,45	27,63
II	28,40	28,24	28,54	28,61	27,82	27,93	28,45		
III	28,01	27,86	28,44	28,69	28,32	27,75	28,21	28,43	

3 Para estudar o efeito que os quatro tipos de óleos disponíveis no mercado podem ter na vida de determinado componente, um laboratório efetuou os testes de longevidade cujos resultados figuram na tabela seguinte. Teste, ao nível de significância de 5%, se há diferenças estatisticamente significativas entre as longevidades médias associadas aos diferentes óleos.

	óleo		
W	X	Y	Z
20	28	17	21
27	26	15	23
26	21	18	19
22	29	20	17

4 Na tabela seguinte apresentam n.ºs de avarias semanais registadas nas 4 máquinas existentes na empresa. Avalie o desempenho das máquinas.

máquina	n.º de avarias por semana				
1	22	15	9	16	10
2	8	4	2	10	8
3	7	16	15	8	10
4	11	6	1	12	7

ANOVA com dois fatores

- a ANOVA com um fator apenas permite avaliar a influencia de um fator nas unidades experimentais
- há situações em que existe uma segunda influência (externa) que pode afetar as unidades experimentais
- os níveis do segundo fator que pretende *bloquear* o fator externo designam-se muitas vezes por ***blocos***

Exemplo

Pretende-se comparar a produtividade média de três tipos de máquinas (*tratamentos*).
No entanto, a habilidade e a experiência do operador podem afetar o desempenho da máquina, causando algumas confusões sobre qual máquina é realmente melhor.
O fator *nível de experiência* dos operadores pode ter, por exemplo 5 blocos, de 1 a 5.

análise de variância com dois fatores (*two-way*) sem réplicas

Consideramos que as unidades experimentais tenham sido classificadas segundo dois critérios (*fatores*) A e B.
Admintido que os fatores A e B têm k e c categorias, respetivamente. Os dados podem ser organizados através de uma tabela da forma seguinte.

fator A	fator B			
	B_1	B_2	$\dots$	B_C
A_1	X_{11}	X_{12}	$\dots$	X_{1C}
A_2	X_{21}	X_{22}	$\dots$	X_{2C}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_L	X_{L1}	X_{L2}	$\dots$	X_{LC}

A ANOVA *two-way* assume o modelo

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

onde

- μ é a média global
- α_i é o efeito relativo ao nível i do fator A, com $i = 1, 2, ..., L$
- β_j é o efeito relativo ao nível j do fator B, com $j = 1, 2, ..., C$
- e_{ij} é o erro experimental, $e_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

partição da soma dos quadrados totais

Na ANOVA com dois fatores, a soma dos quadrados é particionada em três partes

$$SQT = SQA + SQB + SQD$$

onde

- SQT é a soma dos quad. total $SQT = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{C} (X_{ij} - \overline{\overline{X}})^2$
- SQA é a soma dos quad. entre linhas (fator A), $SQA = C \sum_{i=1}^{L} (\overline{X}_i - \overline{\overline{X}})^2$
- SQB é a soma dos quad. entre colunas (fator B), $SQB = L \sum_{i=j}^{C} (\overline{X}_j - \overline{\overline{X}})^2$
- SQD é a soma dos quad. dos erros,

  $SQD = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{C} \left(X_{ij} - \overline{X}_i - \overline{X}_j + \overline{\overline{X}} \right)^2$

  ou $SQD = SQT - SQA - SQB$

graus de liberdade e as hipóteses a testar

- existindo L níveis no fator A e C níveis no fator B, temos $n = LC$ observações, assim, os graus de liberdade distribuem-se da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccc} SQT & = & SQA & + & SQB & + & SQD \\ n-1 & = & L-1 & + & C-1 & + & (L-1)(C-1) \end{array}$$

- médias dos quadrados

$MQT = \dfrac{SQT}{n-1}$, $MQA = \dfrac{SQA}{L-1}$, $MQB = \dfrac{SQB}{C-1}$ e $MQD = \dfrac{SQD}{(L-1)(C-1)}$

comparar médias entre colunas

$H_0 : \beta_j = 0$ vs $H_1 : \exists j : \beta_j \neq 0$

$$F^B_{teste} = \frac{MQB}{MQD} \sim F_{(C-1,(L-1)(C-1))}$$

comparar médias entre linhas

$H_0 : \alpha_i = 0$ vs $H_1 : \exists i : \alpha_i \neq 0$

$$F^A_{teste} = \frac{MQA}{MQD} \sim F_{(L-1,(L-1)(C-1))}$$

tabela ANOVA com dois fatores sem repetições

ANOVA

fonte de variação	**soma de quadrados**	**g.l.**	**média dos quadrados**	**valor F**
entre colunas (fator B)	SQB	$L-1$	MQB	$F^B_{teste} = \frac{MQB}{MQD}$
entre linhas (fator A)	SQA	$C-1$	MQA	$F^A_{teste} = \frac{MQA}{MQD}$
dentro das amostras (erros)	SQD	$(C-1)(L-1)$	MQD	
variação total	SQT	$n-1$		

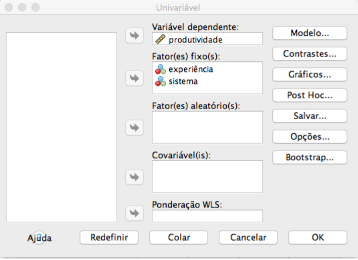
exemplo 1

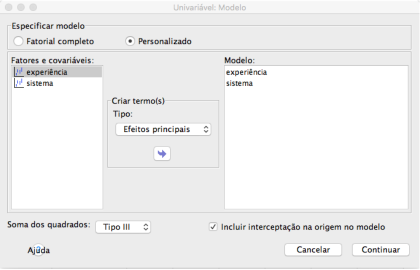
Cinco operadores, classificados quanto ao seu nível de experiência, são selecionados aleatoriamente para operar três sistemas computacionais para avaliar a produtividade dos sistemas.

nível de experiência	sistema 1	2	3	$\overline{X}_i$
1	27	21	25	24,33
2	31	33	35	33,00
3	42	39	39	40,00
4	38	41	37	38,67
5	45	46	45	45,33
$\overline{X}_j$	36,5	36,0	36,2	$\overline{\overline{X}} = 36,27$

exemplo 1(cont.)

analisar/modelo linear geral/ com uma única variável





Testes de efeitos entre assuntos

Variável dependente: produtividade

Origem	Tipo III Soma dos Quadrados	df	Quadrado Médio	Z	Sig.
Modelo corrigido	765,867[a]	6	127,644	24,866	,000
Interceptação	19729,067	1	19729,067	3843,325	,000
experiência	764,933	4	191,233	37,253	,000
sistema	,933	2	,467	,091	,914
Erro	41,067	8	5,133		
Total	20536,000	15			
Total corrigido	806,933	14			

a. R Quadrado = ,949 (R Quadrado Ajustado = ,911)

exemplo 1 (cont.)

fonte de variação	SQ	g.l.	MQ	valor F
entre colunas (*sistema*)	0,93	2	0,47	0,09
entre linhas (*experiência*)	765,04	4	191,26	37,50
dentro das amostras (*erros*)	40,96	8	5,10	
variação total	806,93	14		

- como $F_{95\%,(4,8)=3,84}$ e $F^A_{obs} = 37,50 > 3,84$ concluímos que **rejeitamos** $H_0 : \mu^A_1 = \mu^A_2 = ... = \mu^A_5$, ou seja, concluímos que o nível de experiência dos operadores **influencia** a produtividade dos sistemas computacionais
- $F_{95\%,(2,8)=4,46}$ e $F^A_{obs} = 0,09 < 4,46$ concluímos que **não rejeitamos** $H_0 : \mu^B_1 = \mu^B_2 = \mu^B_3$, ou seja, concluímos que os sistemas computacionais **não influenciam** a produtividade dos sistemas computacionais
- note que se o nível de experiência dos operadores não fosse considerado, a conclusão sobre a produtividade dos sistemas computacionais poderia não ser a mesma

ANOVA com dois fatores com réplicas

Neste caso haverá mais que do que observação em cada célula da tabela.
Vamos admitir que temos C colunas, L linhas e R réplicas.

$$X_{ijl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijl}$$

onde

- μ é a média global
- α_i é o efeito relativo ao nível i do fator A, com $i = 1, 2, ..., L$
- β_j é o efeito relativo ao nível j do fator B, com $j = 1, 2, ..., C$
- γ_{ij} é o **efeito da interação** entre o nível i do fator A e o nível j do fator B
- e_{ijl} é o erro experimental, $e_{ijl} \sim N(0, \sigma^2)$

tabela ANOVA com dois fatores com repetições

ANOVA

fonte de variação	**soma de quadrados**	**g.l.**	**média dos quadrados**	**valor F**
entre colunas (fator B)	SQB	$L-1$	MQB	$F^B_{teste} = \frac{MQB}{MQD}$
entre linhas (fator A)	SQA	$C-1$	MQA	$F^A_{teste} = \frac{MQA}{MQD}$
interação entre A e B	SQI	$(C-1)(L-1)$	MQI	$F^I_{teste} = \frac{MQI}{MQD}$
dentro das amostras (erros)	SQD	$CL(R-1)$	MQD	
variação total	SQT	$n-1$		

Hipóteses a testar:

efeito entre linhas $H_0 : \alpha_i = 0$ vs $H_1 : \exists i : \alpha_i \neq 0$

efeito entre colunas $H_0 : \beta_j = 0$ vs $H_1 : \exists j : \beta_j \neq 0$

efeito da interação $H_0 : \gamma_{ij} = 0$ vs $H_1 : \exists i, j : \gamma_{ij} \neq 0$

- **Nota**: apenas abordamos a ANOVA com dois fatores com réplicas através do SPSS.
- caso se rejeite H_0 numa ANOVA com dois fatores pode proceder-se à comparação múltipla de médias com os testes *Post-hoc* já referidos

  –> para isso selecionar no botão Post Hoc...

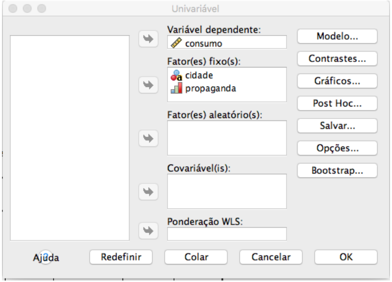
exemplo 2

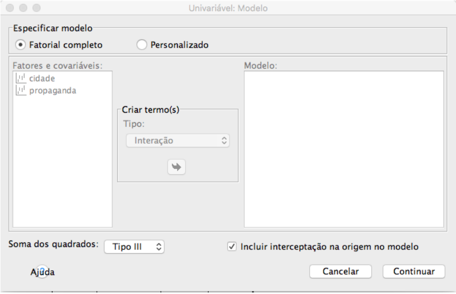
As compras de um determinado produto de 18 famílias estão dadas na tabela. Cada família está classificada segundo a cidade em que reside e o n.º de vezes que foi exposta à propaganda noticiada na TV. Ao nível de 5% pretende-se saber:

1. se há alguma relação entre a propaganda noticiada e o consumo do produto;
2. se há alguma diferença significativa para o consumo entre cidades;
3. se há alguma relação entre a propaganda e as cidades no consumo.

cidade	de 1 a 5 vezes		de 6 a 10 vezes		mais do 10 vezes	
A	19	27	18	20	30	18
B	18	26	27	19	25	32
C	24	21	19	31	25	30

exemplo 2 (cont.)





Testes de efeitos entre assuntos

Variável dependente: consumo

Origem	Tipo III Soma dos Quadrados	df	Quadrado Médio	Z	Sig.
Modelo corrigido	133,000[a]	8	16,625	,528	,810
Interceptação	10224,500	1	10224,500	324,587	,000
cidade	31,000	2	15,500	,492	,627
propaganda	72,333	2	36,167	1,148	,360
cidade * propaganda	29,667	4	7,417	,235	,911
Erro	283,500	9	31,500		
Total	10641,000	18			
Total corrigido	416,500	17			

a. R Quadrado = ,319 (R Quadrado Ajustado = -,286)

exemplo 2 (cont.)

ANOVA com dois fatores (com réplicas)

fonte de variação	soma de quadrados	g.l.	média dos quadrados	valor F	valor-p
entre colunas (*propaganda*)	72,33	2	36,167	$F_{obs} = 1,148$	0,360
entre linhas (*cidade*)	31,00	2	15,50	$F_{obs} = 0,492$	0,627
interação *propaganda/cidade*	29,667	4	7,417	$F_{obs} = 0,235$	0,911
dentro das amostras (*erros*)	283,50	9	31,5		
variação total	416,50	17			

- como valor-p(propaganda)=36%>5%, **não rejeitamos** H_0, isto é, não há relação entre a propaganda e o consumo
- como valor-p(cidade)=62,7%>5%, **não rejeitamos** H_0, isto é, não há relação entre a cidade de residência e o consumo
- como valor-p(interação)=91,1%>5%, **não rejeitamos** H_0, isto é, não há uma interação significativa quanto ao consumo entre a cidade de residência e exposição à propaganda

exercícios

1. Cinco empregados foram selecionados ao acaso e solicitados a avaliar 4 dos seus gerentes numa escala de 10 a 50. Os resultados são os apresentados na tabela seguinte.
   Aplique a ANOVA com dois fatores e analise os resultados ($\alpha = 1\%$).

empregado	gerente			
	1	2	3	4
1	31	35	46	38
2	29	32	45	36
3	13	17	35	20
4	28	38	52	39
5	14	20	40	20

2. A seguir estão as quantidades vendidas de certo produto, considerando três preços de venda e três tipos de distribuidores.

distribuidores/preço	$P_1 = 54$	$P_2 = 49$	$P_3 = 44$
farmácia	78, 76, 74, 77	108,106, 110, 104	124, 122, 123, 125
drogaria	78, 78, 80, 77	108, 110, 111, 107	126, 125, 122, 128
outros	80, 78, 79, 81	110, 106, 108, 111	128, 130, 126, 129

   Teste se a natureza do distribuidor, o preço e a interação entre estes são estatisticamente significativos ($\alpha = 5\%$).